



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Harison Vinícius de Souza Brito

**Soluções para equação do calor não linear em
espaços de pseudo-medidas**

São José do Rio Preto
2021

Harison Vinícius de Souza Brito

**Soluções para equação do calor não linear em
espaços de pseudo-medidas**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profa. Dra. Juliana Conceição
Precioso Pereira

São José do Rio Preto
2021

B862s Brito, Harison Vincius de Souza
Soluções para equação do calor não linear em espaços de pseudo-medidas / Harison Vincius de Souza Brito. -- São José do Rio Preto, 2021
50 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto
Orientadora: Juliana Conceição Precioso Pereira

1. Equações diferenciais parciais. 2. Problemas de Cauchy. 3. Equação de calor. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Harison Vinícius de Souza Brito

**Soluções para equação do calor não linear em
espaços de pseudo-medidas.**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profa. Dra. Juliana C. Precioso Pereira
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto
Orientadora

Profa. Dra. Cláudia A. A. dos Santos Mesquita
UNIFESP – Câmpus de São José dos Campos.

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
UNESP – Câmpus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
01 de abril de 2021

À toda a minha família e amigos.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que em sua maravilhosa e infinita bondade me sustentou em todos os momentos de minha jornada, permitindo então a realização deste trabalho.

Também sou grato por todas as pessoas maravilhosas que Ele colocou em minha vida, pois elas foram de suma importância para que eu não desanimasse e me mantivesse firme em meus objetivos, acima de tudo, sou grato a Deus por tais pessoas em minha vida, e essa gratidão se direciona também a algumas pessoas em especial;

Meus pais, Odair e Luciene, eles são minha base, foram eles que sempre me apoiaram e me direcionaram, são o meu tudo, sempre os tomei como base para tomar qualquer decisão em minha vida, pois eles sempre foram e sempre vão ser meus guias, meus pontos de referência.

A Paty é, e sempre será um dos maiores exemplos de perseverança que terei em minha vida! A postura dela em meio a qualquer adversidade, o modo como ela encarava a vida, me fazia sentir vergonha de minhas queixas, me fazia enxergar que meus problemas não eram nada, que eu deveria me esforçar cada vez mais, e nunca desistir, sem reclamar, só seguir em frente, sempre de cabeça erguida, pois essa era a postura que ela tinha, mesmo em situações difíceis, dolorosas, ela nunca perdia o brilho em seu olhar, nunca desanimava, então como eu poderia desanimar? Isso seria um desrespeito para com a memória dela, então eu só tenho a agradecer, pois graças a ela me tornei mais forte, menos preguiçoso, aprendi a encarar a vida com bom ânimo, independente das situações.

Agradeço a minha orientadora Prof^a. Dr^a. Juliana, por sua quase infinita paciência em me orientar ao longo desses 7 anos, e por ser muito mais do que uma orientadora, ser uma amiga, alguém que eu me abria, confiava, e recebia orientações não só na vida acadêmica, por toda a ajuda e apoio que me deu em todo esse tempo, todos os obrigados do mundo não seriam o suficiente para expressar o quanto sou grato a senhora.

Agradeço ao meu amigo Bruno, pelas inúmeras dicas no meio acadêmico, pela amizade e apoio nesses tempos de estudos, por toda a força que me deu durante a realização deste trabalho.

À todos os meus familiares e amigos, que participaram da minha vida durante estes anos de mestrado; À todos os amigos e colegas acadêmicos que de alguma forma colaboraram para a realização deste projeto;

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, à qual agradeço.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o problema de Cauchy, para a equação do calor não linear, em espaços de pseudo-medidas. Provamos a existência, unicidade e estabilidade assintótica das soluções globais no tempo para pequenos dados iniciais em espaços de pseudo-medidas.

Palavras-chave: Equação do calor não linear, Espaços de pseudo-medidas, Soluções auto-similares.

ABSTRACT

In this work, we study the Cauchy problem in pseudomeasures spaces for nonlinear heat equation. We prove the existence, uniqueness and asymptotic stability of the global-in-time solutions for small initial data in pseudomeasures spaces.

Keywords: Nonlinear heat equation, Pseudomeasures spaces, Self-similar solutions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	PRELIMINARES	10
2.1	Os espaços L^p	10
2.2	Propriedades básicas de convoluções	12
2.3	Transformada de Fourier	15
2.3.1	A Transformada de Fourier em L^1	15
2.3.2	A Transformada de Fourier em L^2	19
2.4	Distribuições	21
2.5	Distribuições temperadas	23
2.6	Convolução de funções homogêneas	26
2.7	Lema do ponto fixo abstrato	28
3	OS ESPAÇOS PM^a	30
4	BOA COLOCAÇÃO DA EQUAÇÃO DO CALOR NÃO	35
LINEAR		
4.1	O problema linear associado	35
4.2	Formulação integral do Problema	36
4.3	Existência de solução	39
	REFERÊNCIAS	49

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho, construiremos soluções, em espaços de pseudo-medidas, para o problema de Cauchy para a equação não-linear do calor:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \mu u^3, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é uma constante, $u = u(t, x)$ é uma função a valores reais a ser determinada e $u_0 = u_0(x)$ é o dado inicial.

Na literatura existem muitos trabalhos considerando a existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy para a equação (1.1) com um termo não-linear mais geral, por exemplo, [5, 8, 10, 15, 17, 18] para o caso em que o dado inicial u_0 está em um espaço de Sobolev e [13] em espaços de Besov.

Boa colocação global e o comportamento de soluções em tempos grandes serão discutidos, neste trabalho, em espaços de pseudo-medidas. Estes espaços são apropriados para o estudo de equações parabólicas não-lineares, uma vez que admitem dados iniciais singulares e homogêneos. Além disso, espaços de pseudo-medidas podem conter soluções singulares. Por exemplo, para as equações de Navier-Stokes, as soluções singulares construídas por Landau [9] e por Tian e Xin [16], podem ser descritas em alguns espaços de pseudo-medidas (veja [2] para mais detalhes sobre esta discussão).

Estabeleceremos a boa colocação global de soluções com dado inicial pequeno, em espaços de pseudo-medidas, para o problema de Cauchy acima, empregando a abordagem das duas normas de Kato [7]. Uma vez que espaços de pseudo-medidas podem admitir funções homogêneas, é possível obter soluções auto-similares, desde que os dados iniciais satisfaçam a estrutura auto-similar, porém, tais soluções não serão abordadas neste trabalho.

Esta dissertação está organizada em 3 capítulos. A seguir faremos uma breve descrição do conteúdo de cada um deles.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos preliminares que servirão de base para a teoria que queremos estudar nos capítulos posteriores. Começamos lembrando algumas propriedades da convolução, em seguida, definimos o conceito de transformada de Fourier e

apresentamos algumas de suas propriedades. A transformada de Fourier será importante para definir os espaços PM^a . Para continuar os estudos preliminares, apresentamos o conceito de distribuições e distribuições temperadas. Além disso, veremos um resultado contendo propriedades importantes da transformada de Fourier das distribuições temperadas. Por fim, apresentamos um resultado sobre convolução de funções homogêneas e um Lema de ponto fixo abstrato os quais serão muito úteis para nossos propósitos.

No capítulo 2, introduzimos os espaços de pseudo-medidas, os quais serão fundamentais para obtenção de existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy para a equação do Calor não-linear.

No capítulo 3, apresentamos novamente a equação do calor não linear (1.1) e, baseados no artigo [12], calculamos a solução do problema linear associado. A solução encontrada gera um semigrupo $S(t)$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass. A seguir, apresentamos a formulação integral do problema (1.1), que é dada por,

$$u(t, x) = S(t)u_0(x) + \mu \int_0^t S(t - \tau)u^3(\tau, x)d\tau. \quad (1.2)$$

Depois de encontrarmos estimativas para o semigrupo do calor, provamos a existência, unicidade e estabilidade assintótica das soluções globais no tempo para pequenos dados iniciais em espaços de pseudo-medidas.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as principais ferramentas para o desenvolvimento das técnicas necessárias para obter soluções de uma equação do calor não linear em espaços de pseudo-medidas. Tais definições e resultados serão o alicerce de todo o nosso trabalho. Na Seção 1.1 começaremos apresentando os espaços L^p e as importantes desigualdades de Minkowski e de Hölder. Na Seção 2.2, apresentaremos algumas propriedades básicas de convoluções. Na Seção 2.3 veremos uma breve introdução à teoria da Transformada de Fourier. Nas Seções 2.4 e 2.5 estudaremos os conceitos de distribuição e distribuição temperada, respectivamente. Na Seção 2.6 apresentaremos um resultado importante sobre convoluções de funções homogêneas. Por fim, encerraremos esse capítulo com a Seção 2.7, em que é apresentado um Lema de ponto fixo abstrato que será fundamental para obter existência e unicidade de soluções do problema de Cauchy para a equação do calor não-linear. Todos os conceitos e resultados apresentados nesse capítulo podem ser encontrados em [1, 6, 4].

2.1 Os espaços L^p

Definição 2.1.1 *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p(X)$ consiste de todas as classes de equivalências de funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que*

$$\int_X |f|^p < \infty,$$

em que duas funções mensuráveis são equivalentes se elas são iguais μ -q.t.p. A norma L^p de $f \in L^p(X)$ é definida por

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Com a notação $L^p(X)$ assume-se que a medida μ em X é compreendida. Dizemos que $f_n \rightarrow f$ em L^p se $\|f - f_n\|_{L^p} \rightarrow 0$. A razão para considerar funções que são iguais quase sempre como equivalentes é que $\|f\|_{L^p} = 0$ implica que $f = 0$. Por exemplo, a função característica $\chi_{\mathbb{Q}}$ dos racionais em $\mathbb{R}$ é equivalente a 0 em $L^p(\mathbb{R})$.

O espaço $L^\infty(X)$ é definido de uma maneira ligeiramente diferente. Primeiramente, apresentaremos a noção de supremo essencial.

Definição 2.1.2 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável em um espaço de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$. O supremo essencial de f em X é*

$$\operatorname{ess\,sup}_X f = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu\{x \in X : f(x) > a\} = 0\}.$$

Equivalentemente,

$$\operatorname{ess\,sup}_X f = \inf \left\{ \sup_X g : g = f \text{ } \mu - q.t.p. \right\}.$$

Assim, o supremo essencial de uma função depende apenas de sua $\mu - q.t.p.$ classe de equivalência. Dizemos que f é essencialmente limitada em X se

$$\operatorname{ess\,sup}_X |f| < \infty.$$

Definição 2.1.3 *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. O espaço $L^\infty(X)$ consiste de todas as $\mu - q.t.p.$ classes de equivalências de funções mensuráveis essencialmente limitadas $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ com norma*

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_X |f|.$$

Definição 2.1.4 *Sejam $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. O espaço $L^p_{loc}(X)$ consiste de todas as $\mu - q.t.p.$ classes de equivalências de funções mensuráveis $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f\chi_A \in L^p(X)$, para todo $A \subset X$ compacto, com $1 \leq p \leq \infty$, em que χ_A denota a função característica do conjunto A .*

Apresentaremos agora duas desigualdades fundamentais, cujas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Teorema 2.1.5 (Desigualdade de Minkowski) *Se $f, g \in L^p(X)$, em que $1 \leq p \leq \infty$, então $f + g \in L^p(X)$ e*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Esta desigualdade significa que, como afirmado anteriormente, que $\|\cdot\|_{L^p}$ é uma norma em $L^p(X)$ para $1 \leq p \leq \infty$. Se $0 < p < 1$, então temos a desigualdade contrária

$$\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \leq \|f + g\|_{L^p},$$

então $\|\cdot\|_{L^p}$ não é uma norma neste caso. No entanto, para $0 < p < 1$, temos

$$|f + g|^p \leq |f|^p + |g|^p,$$

então $L^p(X)$ é um espaço linear neste caso também.

Para apresentar a segunda desigualdade, definimos o expoente conjugado de Hölder.

Definição 2.1.6 *Seja $1 \leq p \leq \infty$. O expoente conjugado de Hölder p' de p é definido por*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{se } 1 < p < \infty,$$

$$\text{e } 1' = \infty, \quad \infty' = 1.$$

Teorema 2.1.7 (Desigualdade de Hölder) *Suponha que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^{p'}(X)$, então $fg \in L^1(X)$ e*

$$\int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Para $p = p' = 2$, esta desigualdade é chamada de desigualdade de Cauchy-Schwartz.

2.2 Propriedades básicas de convoluções

Definição 2.2.1 *Se f e g são funções mensuráveis em $\mathbb{R}^n$, então sua convolução $f * g$ é definida por*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ para os quais a integral existe.

Começaremos mostrando que a convolução entre duas funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ é definida e pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.2.2 *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $f * g$ é definida em quase todo ponto de $\mathbb{R}^n$. Além disso, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Demonstração: Para não fugir dos propósitos desse trabalho, utilizaremos o fato de que a função $(x, y) \mapsto h(x, y) = f(x - y)g(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ é mensurável em $\mathbb{R}^{2n}$ sem exibir uma prova.

De acordo com o Teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned} \int \int_{\mathbb{R}^{2n}} |f(x - y)| |g(y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| |g(y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx \right) |g(y)| dy \quad (2.1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| dz \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy < \infty \end{aligned}$$

e, portanto, segue que $h \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$. Do Teorema de Fubini, segue que $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, em particular, que a convolução $f * g$ existe para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. A última afirmação segue, finalmente, de (2.1). ■

O próximo resultado mostra que a convolução é comutativa e associativa.

Proposição 2.2.3 *Se $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então:*

$$(i) \quad f * g = g * f.$$

$$(ii) \quad (f * g) * h = f * (g * h).$$

Demonstração: Fazendo a mudança de variável $z = x - y$, obtemos

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z)dz = g * f(x),$$

o que prova o item (i).

A propriedade associativa segue do Teorema de Fubini e do item (i). De fato,

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - y - z)dz \right) h(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x - y - z)h(y)dy \right) dz \\ &= f * (g * h)(x). \end{aligned}$$

■

Nosso próximo resultado sobre convoluções é frequentemente chamado de *desigualdade de Young* e generaliza a Proposição 2.2.2.

Teorema 2.2.4 *Suponha que $1 \leq p, q \leq \infty$ satisfaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ e seja $1 \leq r \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, então $f * g$ é definido quase sempre em $L^r(\mathbb{R}^n)$, com $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Demonstração: Consideremos, primeiramente, o caso em que $r = \infty$. Então, $q = p'$, em que p' é o expoente conjugado de p e pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \leq \|f\|_p \|g\|_q < \infty,$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, de onde segue que $f * g$ existe para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$ e que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Analisemos, agora, o caso em que $1 \leq r < \infty$. Note que p e q são finitos nesse caso e que $r \geq p, q$. Assim, se $\alpha = 1 - \frac{p}{r}$, então $0 \leq \alpha < 1$. Seja, também, $\beta = \frac{r}{q}$, tal que β satisfaz $1 \leq \beta < \infty$. Da desigualdade de Holder, segue que

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{1-\alpha} |g(y)| |f(x-y)|^\alpha dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\alpha)q} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{q'}^\alpha \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\alpha)q} |g(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{\alpha q'}^\alpha, \end{aligned}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, em que q' o expoente conjugado de q . Isto implica que

$$(h(x))^q \leq \|f\|_p^{\alpha q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\alpha)q} |g(y)|^q dy,$$

pois $\alpha q' = p$.

Da desigualdade acima e da desigualdade de Minkowski na forma integral, segue que

$$\begin{aligned} \|h\|_{\beta q}^q = \|h^q\|_\beta &\leq \|f\|_p^{\alpha q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\alpha)q} |g(y)|^q dy \right)^\beta dx \right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &\leq \|f\|_p^{\alpha q} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{(1-\alpha)\beta q} dx \right)^{\frac{1}{\beta}} |g(y)|^q dy \\ &= \|f\|_p^{\alpha q} \|f\|_{(1-\alpha)\beta q}^{(1-\alpha)q} \|g\|_q^q. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que $\beta q = r$ e $(1-\alpha)\beta q = p$, obtemos

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_p^{1-\alpha} \|g\|_q = \|f\|_p \|g\|_q.$$

■

2.3 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma ferramenta extremamente poderosa e tem muitas aplicações em vários ramos das ciências exatas. Neste trabalho, ela será utilizada para definir os espaços com os quais trabalharemos e, portanto, apresentaremos apenas uma breve introdução à teoria da transformada de Fourier.

2.3.1 A transformada de Fourier em L^1

Definição 2.3.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier $\hat{f}$ de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2)$$

Aqui, $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$ e i é a unidade imaginária.

Observe que

$$|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1}, \quad (2.3)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, ou seja, a transformada de Fourier está bem definida.

Como pode ser visto em [6], Teorema 1.1, a transformada de Fourier $\hat{f}$ é uma função contínua e limitada. Além disso, de (2.3), segue que a seguinte desigualdade é verificada:

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1}. \quad (2.4)$$

Exemplo 2.3.2 *Seja f a função característica do intervalo $(-1, 1) \subset \mathbb{R}$. Então,*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 e^{-ix\xi} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 (\cos(-x\xi) + i \sin(-x\xi)) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \cos(x\xi) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin(x\xi)}{\xi} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}. \end{aligned}$$

Vale observar que $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

A aplicação $\mathfrak{F}$, a qual leva uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ na função $\hat{f}$, é também chamada transformada de Fourier e é linear:

Proposição 2.3.3 *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então*

$$\widehat{\alpha f + \beta g}(\xi) = \alpha \hat{f}(\xi) + \beta \hat{g}(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Segue diretamente da linearidade da integral. ■

Uma das mais importantes propriedades da transformada de Fourier é que a transformada de uma convolução é basicamente o produto das transformadas das funções envolvidas. Lembremos que como visto na Proposição 2.2.2, a convolução $f * g$ é definida quase sempre em $\mathbb{R}^n$ e pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$ se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.3.4 *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Para a demonstração, basta usar as definições de transformada de Fourier e da convolução de funções, bem como realizar uma conveniente mudança de variável:

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (f * g)(x) dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x - u) g(u) du dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(w+u) \cdot \xi} f(w) g(u) du dw \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw \cdot \xi} f(w) e^{-iu \cdot \xi} g(u) du dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw \cdot \xi} f(w) \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iu \cdot \xi} g(u) du \right) dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw \cdot \xi} f(w) dw \hat{g}(\xi) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left((2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw \cdot \xi} f(w) dw \right) \hat{g}(\xi) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$



Para o próximo resultado precisaremos das seguintes definições:

Definição 2.3.5 Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, em que cada componente α_i é um inteiro não-negativo, é chamado de multi-índice de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

e, para $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Definição 2.3.6 Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dado um multi-índice α , definimos o operador derivação de f de ordem $|\alpha|$ por

$$\partial^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Proposição 2.3.7 Suponha que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e que $\partial^\alpha f$ existe quase sempre e pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$ para algum multi-índice α . Então

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi), \quad (2.5)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Usando indução, a prova se reduz a mostrar que (2.5) é válida quando $|\alpha| = 1$, isto é, quando $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j}$, para algum índice j com $1 \leq j \leq n$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $j = 1$. Denotaremos um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x_1, x')$, em que $x_1 \in \mathbb{R}$ e $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Note que a função $x_1 \mapsto f(x_1, x')$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$ para quase todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ de acordo com o Teorema de Fubini. Para tais pontos $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, temos que

$$f(x_1, x') = f(0, x') + \int_0^{x_1} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x') dt,$$

para $-\infty < x_1 < \infty$.

Note que a igualdade acima mostra que $\lim_{x_1 \rightarrow \pm\infty} f(x_1, x')$ existe. Além disso, o limite deve ser nulo, pois $f(\cdot, x')$ pertence a $L^1(\mathbb{R})$.

Agora, obteremos (2.5) integrando por partes a transformada de Fourier, de dimensão um, de $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\cdot, x')$:

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \xi_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x') dx_1 \right) dx'$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} \left(e^{-ix_1 \xi_1} f(x_1, x') \Big|_{x_1=-\infty}^{\infty} + i\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \xi_1} f(x_1, x') dx_1 \right) dx' \\
&= i\xi_1 (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-ix' \cdot \xi'} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1 \xi_1} f(x_1, x') dx_1 \right) dx' \\
&= i\xi_1 \hat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.3.8 *Suponha que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e que $\int_{\mathbb{R}^n} |x|^k |f(x)| dx < \infty$ para algum inteiro $k \geq 1$. Então $\hat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\partial^\alpha \hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (-ix)^\alpha f(x) dx = (-i)^{|\alpha|} \widehat{(\cdot)^\alpha f}(\xi), \quad (2.6)$$

para todo $|\alpha| \leq k$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Observação 2.3.9 *Note que (2.6) é exatamente o que obteríamos se derivássemos formalmente $\hat{f}$ sob o sinal de integração:*

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \partial^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\alpha e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (-ix)^\alpha f(x) dx.
\end{aligned}$$

Demonstração: É suficiente provar (2.6) para $k = 1$ e podemos assumir que $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$. Escrevendo $x = (x_1, x')$ e $\xi = (\xi_1, \xi')$, onde $x', \xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, temos que

$$\frac{\hat{f}(\xi_1 + h, \xi') - \hat{f}(\xi_1, \xi')}{h} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix_1) f(x_1, x') \frac{e^{-ix_1 h} - 1}{-ix_1 h} e^{-i(x_1 \xi_1 + x' \cdot \xi')} dx_1 dx'.$$

Como o quociente $\frac{e^{-ix_1 h} - 1}{-ix_1 h}$ tende a 1 quando h tende a zero e $\left| \frac{e^{-ix_1 h} - 1}{-ix_1 h} \right| \leq 1$, segue do Teorema da convergência dominada que

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi_1 + h, \xi') - \hat{f}(\xi_1, \xi')}{h} &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h \rightarrow 0} (-ix_1) f(x_1, x') \frac{e^{-ix_1 h} - 1}{-ix_1 h} e^{-i(x_1 \xi_1 + x' \cdot \xi')} dx_1 dx' \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} (-ix_1) f(x_1, x') e^{-i(x_1 \xi_1 + x' \cdot \xi')} dx_1 dx',
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_1}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (-ix_1) f(x) dx.$$

A continuidade de $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_1}$ é uma consequência do fato que o lado direito de (2.6) é uma função contínua de ξ . ■

O fato da transformada de Fourier $\hat{f}$ de uma função $f \in L^1$ não ser necessariamente integrável torna a interpretação da fórmula de inversão muito delicada. Aqui, focaremos o caso simples quando $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Porém, vale ressaltar que o espaço $\mathcal{S}$, das funções de decrescimento rápido, chamado de espaço de Schwartz, é o ambiente em que a teoria da transformada de Fourier é mais elegante e mais simétrica, veja por exemplo, [4].

Pode-se mostrar que se ambas f e $\hat{f}$ pertencem a $L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi,$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$. Para mais detalhes veja, por exemplo, [6].

Definição 2.3.10 A transformada inversa de Fourier $\check{f}$ de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é definida por

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} f(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Vale lembrar que a transformada inversa compartilha a maioria das propriedades com a transformada de Fourier. Além disso, com essa notação, a discussão acima pode ser reformulada da seguinte forma: $\check{\check{f}}(x) = f(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, desde que f e $\hat{f}$ pertençam a $L^1(\mathbb{R}^n)$.

2.3.2 A transformada de Fourier em L^2

A estratégia para estender a transformada de Fourier para $L^2(\mathbb{R}^n)$ é a seguinte: primeiro escolhe-se uma sequência de funções $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \rightarrow f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Uma vez que cada f_k pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$, ela tem uma transformada de Fourier $\hat{f}_k$. A seguir mostra-se que a sequência $\hat{f}_k$ é convergente em $L^2(\mathbb{R}^n)$. O limite desta sequência é então definido como a transformada de Fourier $\hat{f}$ de f e é independente da escolha da sequência f_k . Por fim, mostra-se que a extensão é consistente com a definição anterior, verificando-se que as duas definições coincidem para funções em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, consideremos $f_k = f|_{B_k(0)}$, isto é,

$$f_k(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |x| < k \\ 0 & \text{se } |x| \geq k, \end{cases} \quad (2.7)$$

para $k = 1, 2, \dots$. É possível mostrar que cada função f_k pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$, é integrável e, portanto, tem uma transformada de Fourier, e que a sequência f_k aproxima $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.11 Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e f_k é dada por (2.7), definimos $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como o limite em $L^2(\mathbb{R}^n)$ da sequência $(\hat{f}_k)_{k=1}^\infty$.

Observação 2.3.12 1. Pode-se mostrar que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e f_k é dada por (2.7), então a sequência $(\hat{f}_k)_{k=1}^\infty$ é convergente em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

2. A transformada de Fourier leva $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3. Pela definição,

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|x| < k} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n), \quad (2.8)$$

o que significa que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}(\xi) - (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{|x| < k} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \right|^2 d\xi \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

4. No caso em que $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, a transformada $\hat{f}$ definida por (2.8) coincide com a Definição 2.3.1.

5. A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ preserva muitas propriedades da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Em particular, se $\partial_j f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ para algum j , então $\widehat{\frac{\partial f}{\partial \xi_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$.

6. Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então vale a famosa fórmula de Plancherel:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.9)$$

Recordemos que se $f, \check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\check{\check{f}} = f$, em que

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Note também que se R é o operador reflexão, definido por $Rf(x) = f(-x)$, $x \in \mathbb{R}^n$,

então

$$\begin{aligned}\check{f}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} f(\xi) d\xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot (-x)} f(\xi) d\xi \\ &= \hat{f}(-x) = R\hat{f}(x).\end{aligned}$$

Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.3.13 A transformada inversa $\check{f}$ de $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é definida por $\check{f} = R\hat{f}$.

Pode-se mostrar que se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, também temos que $\check{\check{f}} = f$.

2.4 Distribuições

Aqui, X e K denotam subconjuntos aberto e compacto do $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Além disso, por $C_0^\infty(X)$ denota-se a classe das funções infinitamente deriváveis em X , com suporte compacto. Denomina-se suporte de f o fecho do conjunto dos pontos de X onde f é não nula e representa-se o suporte de f por $\text{supp}(f)$.

No contexto da teoria das distribuições, a classe $C_0^\infty(X)$ é tradicionalmente denotada por $\mathcal{D}(X)$ e as funções que pertencem a $\mathcal{D}(X)$ são chamadas de funções teste.

Definição 2.4.1 Uma sequência $(\phi_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(X)$ converge para $\phi \in \mathcal{D}(X)$, isto é, $\phi_k \rightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(X)$, se:

- (i) existe um subconjunto compacto K de X tal que $\text{supp}(\phi_k) \subset K$ para cada k ;
- (ii) $\partial^\alpha \phi_k$ converge uniformemente para $\partial^\alpha \phi$ em X para cada multi-índice α .

Definição 2.4.2 Uma distribuição sobre X é um funcional linear $u : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ que é sequencialmente contínuo, isto é, se $\phi_k \rightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(X)$, então $u(\phi_k) \rightarrow u(\phi)$.

Vale ressaltar que escreveremos na maioria das vezes $\langle u, \phi \rangle$ ao invés de $u(\phi)$, em que $u \in \mathcal{D}'(X)$ e $\phi \in \mathcal{D}(X)$.

Denotaremos a classe das distribuições em $\mathcal{D}(X)$ por $\mathcal{D}'(X)$.

Exemplo 2.4.3 Cada função $f \in L_{loc}^1(X)$ dá origem a uma distribuição u_f através da integração:

$$\langle u_f, \phi \rangle = \int_X f(x) \phi(x) dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(X).$$

Esta aplicação é linear. Além disso, note que se $\phi \in \mathcal{D}(X)$, com $\text{supp}(\phi) \subset K$, então

$$| \langle u_f, \phi \rangle | \leq \int_X |f(x)\phi(x)|dx \leq \|\phi\|_\infty \int_K |f(x)|dx.$$

Disto segue que se $\phi_k \rightarrow \phi$ em $\mathcal{D}(X)$ e $\text{supp}(\phi_k) \subset K$, para todo k , então

$$| \langle u_f, \phi \rangle - \langle u_f, \phi_k \rangle | \leq \|\phi - \phi_k\|_\infty \int_K |f(x)|dx,$$

o que mostra que $\langle u_f, \phi_k \rangle \rightarrow \langle u_f, \phi \rangle$.

Definição 2.4.4 Uma sequência $(u_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}'(X)$ converge para $u \in \mathcal{D}'(X)$, e escrevemos $u_k \rightarrow u$, se $\langle u_k, \phi \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(X)$.

Para motivar a definição de derivada de uma distribuição, assumiremos que $u \in C^1(X)$ e que $\phi \in \mathcal{D}(X)$. Usando integração por partes, temos que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = \int_X \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\phi(x)dx = - \int_X u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)dx = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle,$$

para $j = 1, 2, \dots, n$.

Isto nos leva a seguinte definição para derivadas parciais de primeira ordem de uma distribuição:

Definição 2.4.5 A derivada parcial $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, com $j = 1, 2, \dots, n$, de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(X)$ é definida por

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(X). \quad (2.10)$$

Observação 2.4.6 (i) Segue da definição de convergência em $\mathcal{D}(X)$ que se $u \in \mathcal{D}'(X)$, então $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in \mathcal{D}'(X)$, para $j = 1, 2, \dots, n$.

(ii) Segue do item (i) que a distribuição $u \in \mathcal{D}'(X)$ tem derivadas parciais de todas as ordens. Também, se α é um multi-índice, então (2.10) implica que

$$\langle \partial^\alpha u, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(X).$$

(iii) As derivadas da distribuição u_f do Exemplo 2.4.3 são frequentemente chamadas de derivadas fracas.

2.5 Distribuições temperadas

Definição 2.5.1 Uma função $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é chamada função de decrescimento rápido se

$$\|\phi\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| < \infty,$$

para todo multi-índice α e β . O espaço vetorial de todas as funções de decrescimento rápido é chamado de classe de Schwartz e é denotado por $\mathcal{S}$.

Assim, se $\phi \in \mathcal{S}$, então ϕ e todas as suas derivadas tendem mais rápido a zero do que $|x|^{-k}$ para qualquer inteiro $k \geq 0$, quando $|x| \rightarrow \infty$.

Segue da Definição 2.5.1 que a classe de Schwartz é invariante sob derivação e multiplicação com potências de x e que essas operações são contínuas em $\mathcal{S}$.

Definição 2.5.2 Uma sequência $(\phi_k)_{k=1}^\infty \subset \mathcal{S}$ converge para $\phi \in \mathcal{S}$ se

$$\|\phi - \phi_n\|_{\alpha,\beta} \rightarrow 0, \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

para todo multi-índice α e β .

Observação 2.5.3 São fatos conhecidos que o conjunto $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é um subespaço denso de $\mathcal{S}$ e que $\mathcal{S}$ é um subespaço denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $1 \leq p < \infty$, para mais detalhes veja, por exemplo, [4].

Uma das importâncias da classe Schwartz na teoria da distribuição decorre do seguinte resultado:

Teorema 2.5.4 A transformada de Fourier $\mathcal{F}$ é uma aplicação contínua de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.

Demonstração: Ver [6].

Observação 2.5.5 Vale observar que para $f, g \in \mathcal{S}$, temos que $\widehat{fg}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\hat{f} * \hat{g})(\xi)$. Tal propriedade será de grande importância na obtenção de nossos resultados.

Vamos agora definir o espaço dual de $\mathcal{S}$.

Definição 2.5.6 A distribuição temperada é um funcional linear $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ que é sequencialmente contínuo, isto é, se $\phi_k \rightarrow \phi$ em $\mathcal{S}$, então $\langle u, \phi_k \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle$.

A classe das distribuições temperadas é denotada por $\mathcal{S}'$.

Definição 2.5.7 Uma sequência $(u_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}'$ converge para $u \in \mathcal{S}'$ se $\langle u_k, \phi \rangle \rightarrow \langle u, \phi \rangle$, para toda $\phi \in \mathcal{S}$.

Note que se $u \in \mathcal{S}'$, então como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$, a restrição de u a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pertence a $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Podemos então considerar $\mathcal{S}'$ como um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Agora estamos em condições de definir a transformada de Fourier de uma distribuição temperada.

Definição 2.5.8 A transformada de Fourier $\hat{u}$ de uma distribuição temperada u é definida por

$$\langle \hat{u}, \phi \rangle = \langle u, \hat{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Observação 2.5.9 (i) Note que se $u \in \mathcal{S}'$, então $\hat{u} \in \mathcal{S}'$, pois a transformada de Fourier é contínua em $\mathcal{S}$ de acordo com o Teorema 2.5.4.

(ii) A transformada de Fourier é também contínua em $\mathcal{S}'$. De fato, se $u_k \rightarrow u \in \mathcal{S}'$, então

$$\langle \hat{u}_k, \phi \rangle = \langle u_k, \hat{\phi} \rangle \rightarrow \langle u, \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{u}, \phi \rangle$$

para toda função $\phi \in \mathcal{S}$, pois $\hat{\phi} \in \mathcal{S}$, o que mostra que $\hat{u}_k \rightarrow \hat{u}$ em $\mathcal{S}'$.

(iii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então

$$\langle \widehat{u_f}, \phi \rangle = \langle u_f, \hat{\phi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{\phi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) \phi(x) dx = \langle u_{\hat{f}}, \phi \rangle$$

para toda função $\phi \in \mathcal{S}$, o que mostra que a transformada de Fourier distribucional de f coincide com a transformada ordinária.

(iv) A transformada de Fourier inversa $\check{u}$ de uma distribuição temperada u é definida por

$$\langle \check{u}, \phi \rangle = \langle u, \check{\phi} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}.$$

Mais ainda, $\check{\check{u}} = u = \hat{\hat{u}}$, para toda $u \in \mathcal{S}'$.

A seguir serão demonstradas algumas importantes propriedades da transformada de Fourier de distribuições temperadas. Para isso, observemos primeiramente que se u é uma função integrável, $\phi \in \mathcal{S}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ e se definirmos $u_{\lambda}(x) := u(\lambda x)$, então a fórmula de mudança de variável implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_{\lambda}(x) \phi(x) dx = |\lambda|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \phi_{\lambda^{-1}}(x) dx.$$

A discussão acima motiva a definição da composição de uma distribuição temperada $u \in \mathcal{S}'$ com uma homotetia por

$$\langle u_\lambda, \phi \rangle := |\lambda|^{-n} \langle u, \phi_{\lambda^{-1}} \rangle, \quad \phi \in \mathcal{S}. \quad (2.11)$$

Proposição 2.5.10 *Suponha que $u \in \mathcal{S}'$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- (i) se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, então $\widehat{u_\lambda} = |\lambda|^{-n} \widehat{u}_{\lambda^{-1}}$.
- (ii) $\widehat{\partial^\alpha u} = (i(\cdot))^\alpha \widehat{u}$ para todo multi-índice α .
- (iii) $\widehat{(\cdot)^\alpha u} = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \widehat{u}$ para todo multi-índice α .

Demonstração: Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, então usando (2.11) e fazendo as mudanças de variável $\lambda\xi = z$ e posteriormente $x\lambda^{-1} = w$, obtemos

$$\begin{aligned} \langle |\lambda|^{-n} \widehat{u}_{\lambda^{-1}}, \phi \rangle &= |\lambda|^{-n} \langle \widehat{u}_{\lambda^{-1}}, \phi \rangle \\ &= |\lambda|^{-n} |\lambda|^n \langle \widehat{u}, \phi_\lambda \rangle \\ &= \langle \widehat{u}, \phi_\lambda \rangle \\ &= \langle u, \widehat{\phi_\lambda} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \widehat{\phi_\lambda}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \phi(\lambda\xi) d\xi dx \\ &= |\lambda|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \lambda^{-1} z} \phi(z) dz dx \\ &= |\lambda|^{-n} |\lambda|^n \int_{\mathbb{R}^n} u(\lambda w) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iw \cdot z} \phi(z) dz dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u_\lambda(w) \widehat{\phi}(z) dz \\ &= \langle \widehat{u_\lambda}, \phi \rangle, \end{aligned}$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$, o que mostra o item (i).

Agora observe que

$$\langle \widehat{\partial^\alpha u}, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \widehat{\phi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \widehat{(-ix)^\alpha \phi(x)} \rangle = \langle (i\xi)^\alpha \widehat{u}, \phi \rangle,$$

para toda $\phi \in \mathcal{S}$, o que prova o item (ii).

A prova do item (iii) é análoga a do item (ii). ■

2.6 Convolução de funções homogêneas

Nesta seção, apresentaremos um resultado sobre convolução de funções homogêneas (ver [11]) que será muito útil para nossos propósitos.

Proposição 2.6.1 *Sejam $0 < \alpha < n$, $0 < \beta < n$ tais que $0 < \alpha + \beta < n$. Então*

$$(| \cdot |^{\alpha-n} * | \cdot |^{\beta-n})(y) = \frac{c_{n-\alpha-\beta} c_{\alpha} c_{\beta}}{c_{\alpha+\beta} c_{n-\alpha} c_{n-\beta}} |y|^{\alpha+\beta-n},$$

em que $c_a := \pi^{-\frac{a}{2}} \Gamma(\frac{a}{2})$ e $\Gamma(b) = \int_0^\infty t^{b-1} e^{-t} dt$, $a > 0$.

Demonstração: Começemos observando que

$$\begin{aligned} c_a |z|^{-a} &= \pi^{-\frac{a}{2}} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right) |z|^{-a} \\ &= \pi^{-\frac{a}{2}} |z|^{-a} \int_0^\infty t^{\frac{a}{2}-1} e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty (t\pi^{-1} |z|^{-2})^{\frac{a}{2}-1} e^{-t} \pi^{-1} |z|^{-2} dt \\ &= \int_0^\infty u^{\frac{a}{2}-1} e^{-\pi |z|^2 u} du, \end{aligned} \tag{2.12}$$

em que na última igualdade foi realizada a mudança de variável $u = t\pi^{-1} |z|^{-2}$.

De (2.12) é possível escrever

$$c_{n-\alpha} |x|^{\alpha-n} c_{n-\beta} |y-x|^{\beta-n} = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{n-\alpha-2}{2}} s^{\frac{n-\beta-2}{2}} e^{-\pi(t|x|^2+s|y-x|^2)} dt ds.$$

Portanto, segue que

$$c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (| \cdot |^{\alpha-n} * | \cdot |^{\beta-n})(y) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{n-\alpha-2}{2}} s^{\frac{n-\beta-2}{2}} (e^{-\pi t |\cdot|^2} * e^{-\pi s |\cdot|^2})(y) dt ds. \tag{2.13}$$

Por outro lado, da Proposição 2.3.4 e do fato de que

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{e^{-t|\cdot|^2}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2 t} e^{-i\xi \cdot x} dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}, \tag{2.14}$$

(veja, por exemplo, [6]), obtemos

$$\begin{aligned} (e^{\pi t |\cdot|^2} * e^{\pi s |\cdot|^2})(\xi) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{e^{-\pi t |\cdot|^2}}(\xi) \widehat{e^{-\pi s |\cdot|^2}}(\xi) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\pi t}} \left(\frac{1}{2\pi s}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\pi s}} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi ts} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{(t+s)}{4\pi ts} |\xi|^2}. \quad (2.15)$$

Agora, aplicando a transformada inversa em (2.15) e usando novamente (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} (e^{\pi t|\cdot|^2} * e^{\pi s|\cdot|^2})(y) &= \left(\frac{1}{2\pi ts} \right)^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{\pi ts}{\pi(t+s)} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\pi \frac{ts}{s+t} |y|^2} \\ &= \frac{1}{(s+t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\pi \frac{ts}{s+t} |y|^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Substituindo (2.16) em (2.13) e fazendo a mudança de coordenadas $t = u^2$ e $s = v^2$, segue que

$$\begin{aligned} c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|\cdot|^{\alpha-n} * |\cdot|^{\beta-n})(y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty t^{\frac{n-\alpha-2}{2}} s^{\frac{n-\beta-2}{2}} \frac{1}{(s+t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\pi \frac{ts}{s+t} |y|^2} dt ds \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{n-\alpha-2} v^{n-\beta-2} \frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\pi \frac{u^2 v^2}{u^2+v^2} |y|^2} uv du dv \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{n-\alpha-1} v^{n-\beta-1} \frac{1}{(u^2+v^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\pi \frac{u^2 v^2}{u^2+v^2} |y|^2} du dv. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Agora, usando a mudança de coordenadas polares $u = r \cos \theta$ e $v = r \sin \theta$, e depois a mudança $z = \pi r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta |y|^2$, de (2.17), temos

$$\begin{aligned} c_{n-\alpha} c_{n-\beta} (|\cdot|^{\alpha-n} * |\cdot|^{\beta-n})(y) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\alpha-1} \theta \sin^{n-\beta-1} \theta \int_0^\infty r^{n-\alpha-\beta-2} e^{-\pi r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta |y|^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\alpha-1} \theta \sin^{n-\beta-1} \theta \int_0^\infty (r^2)^{\frac{n-\alpha-\beta}{2}-1} e^{-\pi r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta |y|^2} r dr d\theta \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\alpha-1} \theta \sin^{n-\beta-1} \theta \int_0^\infty \left(\frac{z}{\pi \cos^2 \theta \sin^2 \theta |y|^2} \right)^{\frac{n-\alpha-\beta}{2}-1} e^{-z} \\ &\quad \frac{1}{2\pi \cos^2 \theta \sin^2 \theta |y|^2} dz d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-\alpha-1} \theta \sin^{n-\beta-1} \theta \int_0^\infty z^{\frac{n-\alpha-\beta}{2}-1} e^{-z} \pi^{-\frac{n-\alpha-\beta}{2}} \cos^{-n+\alpha+\beta} \theta \\ &\quad \sin^{-n+\alpha+\beta} \theta |y|^{-n+\alpha+\beta} dz d\theta \\ &= 2\pi^{-\frac{n-\alpha-\beta}{2}} |y|^{-n+\alpha+\beta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta \int_0^\infty z^{\frac{n-\alpha-\beta}{2}-1} e^{-z} dz d\theta \\ &= c_{n-\alpha-\beta} |y|^{\alpha+\beta-n} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\beta-1} \theta \sin^{\alpha-1} \theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Um cálculo similar mostra que se $a > 0$ e $b > 0$, então

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1} \theta \sin^{2b-1} \theta d\theta.$$

Assim, de (2.19) e considerando a identidade acima com $a = \frac{\alpha}{2}$ e $b = \frac{\beta}{2}$, temos

$$c_{n-\alpha}c_{n-\beta}(| \cdot |^{\alpha-n} * | \cdot |^{\beta-n})(y) = c_{n-\alpha-\beta}|y|^{\alpha+\beta-n} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})\Gamma(\frac{\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2})},$$

ou seja,

$$(| \cdot |^{\alpha-n} * | \cdot |^{\beta-n})(y) = \frac{c_{n-\alpha-\beta}c_{\alpha}c_{\beta}}{c_{\alpha+\beta}c_{n-\alpha}c_{n-\beta}}|y|^{\alpha+\beta-n}.$$

■

2.7 Lema de ponto fixo abstrato

Para encerrar, este capítulo, apresentaremos um resultado geral de existência e unicidade para uma equação abstrata via um argumento de contração, o qual será de fundamental importância no decorrer deste trabalho.

Lema 2.7.1 *Sejam X um espaço de Banach e $B : X \times X \times X \rightarrow X$ um operador trilinear contínuo satisfazendo*

$$\|B(u_1, u_2, u_3)\|_X \leq K\|u_1\|_X\|u_2\|_X\|u_3\|_X,$$

para todo $u_1, u_2, u_3 \in X$ e $K > 0$ uma constante. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $12\varepsilon^2 K < 1$. Então para cada $y \in X$ com $\|y\|_X \leq \varepsilon$ a equação

$$u = y + B(u, u, u)$$

tem uma única solução $u \in X$ satisfazendo $\|u\|_X \leq 2\varepsilon$. Além disso, a solução u depende continuamente de y no seguinte sentido: se $\|y_1\|_X \leq \varepsilon$ e $v = y_1 + B(v, v, v)$, $\|v\|_X \leq 2\varepsilon$, então

$$\|u - v\|_X \leq \frac{1}{(1 - 12\varepsilon^2 K)}\|y - y_1\|_X.$$

Demonstração: A prova é baseada em um argumento de contração. Defina $E = \{u : u \in X, \|u\|_X \leq 2\varepsilon\}$ com a métrica $d(u, v) = \|u - v\|_X$. Note que (E, d) é um espaço

métrico completo.

Considere agora uma aplicação T definida por $Tu = y + B(u, u, u)$. Uma vez que $\|y\|_X \leq \varepsilon$, então para $u \in E$,

$$\|Tu\|_X \leq \|y\|_X + \|B(u, u, u)\|_X \leq \|y\|_X + K\|u\|_X^3 \leq \varepsilon + (8\varepsilon^2 K)\varepsilon < 2\varepsilon,$$

pois $8\varepsilon^2 K < 12\varepsilon^2 K < 1$.

Logo, temos $Tu \in E$.

Por outro lado, se $u, v \in E$, então temos que

$$\begin{aligned} \|Tu - Tv\|_X &= \|B(u, u, u) - B(v, v, v)\|_X \\ &\leq \|B(u, u - v, u)\|_X + \|B(u, v, u - v)\|_X + \|B(u - v, v, v)\|_X \\ &\leq K\|u - v\|_X(\|u\|_X^2 + \|u\|_X\|v\|_X + \|v\|_X^2) \\ &= 12\varepsilon^2 K\|u - v\|_X. \end{aligned}$$

Como $12\varepsilon^2 K < 1$, então T é uma contração de (E, d) em (E, d) . Pelo Teorema de ponto fixo para contrações, segue que T tem um único ponto fixo $u \in E$ com $\|u\|_X \leq 2\varepsilon$. Consequentemente, $u = y + B(u, u, u)$ tem uma única solução $u \in E$.

Para mostrar a dependência contínua, note que

$$\begin{aligned} \|u - v\|_X &\leq \|y_1 - y_2\|_X + \|B(u, u, u) - B(v, v, v)\|_X \\ &\leq \|y_1 - y_2\|_X + 12\varepsilon^2 K\|u - v\|_X, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\|u - v\|_X \leq \frac{1}{(1 - 12\varepsilon^2 K)} \|y_1 - y_2\|_X,$$

completando a demonstração. ■

Capítulo 3

Os espaços PM^a

Neste capítulo introduziremos os espaços de pseudo-medidas que serão utilizados para estudar a boa colocação da equação do calor não linear.

Definição 3.0.1 *Seja $a \geq 0$. Definimos o espaço de pseudo-medidas $PM^a(\mathbb{R}^n)$ por*

$$PM^a(\mathbb{R}^n) := \{v \in \mathcal{S}' : \hat{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|v\|_{PM^a} < \infty\}, \quad (3.1)$$

com a norma

$$\|v\|_{PM^a(\mathbb{R}^n)} := \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{v}(\xi)|.$$

Note que $PM := PM^0(\mathbb{R}^n)$ é o espaço clássico de pseudo-medidas.

Observação 3.0.2 *No que segue, para não sobrecarregar a notação, denotaremos $PM^a(\mathbb{R}^n)$ por PM^a .*

Proposição 3.0.3 *O espaço PM^a munido da norma $\|\cdot\|_{PM^a}$ é Banach.*

Demonstração: É claro que PM^a é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_{PM^a}$ define uma norma. Assim, basta verificar que PM^a é completo. Para isso, seja $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \in PM^a$ uma sequência de Cauchy, ou seja,

$$\|v_j - v_k\|_{PM^a} \rightarrow 0, \text{ quando } j, k \rightarrow \infty.$$

Da definição da norma $\|\cdot\|_{PM^a}$ concluímos que a sequência $(|\cdot|^a \hat{v}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Uma vez que o espaço $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é completo, existe uma função $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tal que $|\cdot|^a \hat{v}_j$ converge para f na norma $\|\cdot\|_{L^\infty}$.

Definamos, agora, $g(\xi) = \frac{1}{|\xi|^a} f(\xi)$, $\xi \neq 0$. Assim, dada a bola aberta de centro na origem e raio $r > 0$, $B(0, r) \subset \mathbb{R}^n$, temos

$$\int_{B(0, r)} \frac{1}{|\xi|^a} |f(\xi)| d\xi \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{B(0, r)} \frac{1}{|\xi|^a} d\xi < \infty,$$

pois $a < n$.

Note que isto implica que $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Mais ainda, dada uma função $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) \varphi(\xi) d\xi \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} |f(\xi)| d\xi + \|f\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^1} < \infty,$$

ou seja, $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Portanto, definindo $v := \check{g}$, no sentido de distribuições, segue que $v \in PM^a$ e $v_j \rightarrow v$, na norma $\|\cdot\|_{PM^a}$, quando $j \rightarrow \infty$. $\blacksquare$

Vale ainda ressaltar que a topologia dada pela norma $\|\cdot\|_{PM^a}$ é mais forte do que a topologia herdada como subespaço de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. De fato, sejam $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência em PM^a , tal que $v_j \rightarrow v$ na norma $\|\cdot\|_{PM^a}$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Vale que

$$\begin{aligned} |\langle v_j - v, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{v}_j(\xi) - \hat{v}(\xi)| |\check{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{v}_j(\xi) - \hat{v}(\xi)| |\xi|^{-a} |\check{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &\leq \|v_j - v\|_{PM^a} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{-a} |\check{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &\leq \|v_j - v\|_{PM^a} \left(\|\check{\varphi}\|_{L^\infty} \int_{B(0,1)} |\xi|^{-a} d\xi + \|\check{\varphi}\|_{L^1} \right). \end{aligned}$$

Uma vez que $\|v_j - v\|_{PM^a} \rightarrow 0$, quando $j \rightarrow \infty$, segue que $v_j \rightarrow v$ no sentido de distribuições.

Veremos, agora, uma propriedade importante da norma $\|\cdot\|_{PM^a}$, com relação à composta com uma homotetia. Se $u \in PM^a$, então da Proposição 2.5.10, item (i), temos que para $\lambda > 0$, $\widehat{u_\lambda} = \lambda^{-n} \hat{u}_{\lambda^{-1}}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \|u_\lambda\|_{PM^a} &= \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{u}_\lambda(\xi)| \\ &= \lambda^{a-n} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\lambda^{-1} \xi|^a |\hat{u}(\lambda^{-1} \xi)| \\ &= \lambda^{a-n} \|u\|_{PM^a}. \end{aligned}$$

No caso particular em que $a = n - 1$, segue que

$$\|\lambda u_\lambda\|_{PM^{n-1}} = \|u\|_{PM^{n-1}}, \quad (3.2)$$

ou seja, a norma PM^{n-1} é invariante pela aplicação $f \rightarrow \lambda f_\lambda$, a qual recebe o nome de scaling da norma $\|\cdot\|_{PM^{n-1}}$.

Definição 3.0.4 Para $a \geq 0$ e $\sigma > 0$ definimos o espaço de $\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$ por

$$\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a) := \{v : v(t, \cdot) \in PM^a \text{ e } \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} < \infty\}, \quad (3.3)$$

com a norma

$$\|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} := \sup_{t>0} t^\sigma \|v(t, \cdot)\|_{PM^a}.$$

Proposição 3.0.5 O espaço $\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$ munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)}$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Seja $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|v_j - v_k\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} = \sup_{t>0} t^\sigma \|v_j(t, \cdot) - v_k(t, \cdot)\|_{PM^a} < \varepsilon,$$

para todo $j, k > n_0$, em particular

$$\sup_{t>0} \|t^\sigma v_j(t, \cdot) - t^\sigma v_k(t, \cdot)\|_{PM^a} < \varepsilon,$$

para todo $j, k > n_0$.

Como PM^a é um espaço de Banach, o espaço das funções contínuas e limitadas do intervalo $[0, \infty)$ para o espaço PM^a , denotado por $BC([0, \infty), PM^a)$, também é um espaço de Banach. Então, $(t^\sigma v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para algum u em $BC([0, \infty), PM^a)$, ou seja, $v_j \rightarrow v := t^{-\sigma} u$ em $BC([0, \infty), PM^a)$, quando $j \rightarrow \infty$.

Mostremos que $v \in \mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$ e $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para $v \in \mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$.

Note que $v \in \mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$, pois

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} &= \sup_{t>0} t^\sigma \|v(t, \cdot)\|_{PM^a} \\ &= \sup_{t>0} \|t^\sigma v(t, \cdot)\|_{PM^a} \\ &= \sup_{t>0} \|u(t, \cdot)\|_{PM^a} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Além disso, $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ converge para $v \in \mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$, pois

$$\begin{aligned} \|v_j - v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} &= \sup_{t>0} t^\sigma \|v_j(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^a} \\ &= \sup_{t>0} \|t^\sigma v_j(t, \cdot) - t^\sigma v(t, \cdot)\|_{PM^a} \\ &= \sup_{t>0} \|t^\sigma v_j(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{PM^a} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $j \rightarrow \infty$. ■

Definição 3.0.6 Uma função $v : [0, \infty) \rightarrow PM^a$ é dita *fracamente contínua* em $t \in [0, \infty)$, se para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \langle v(\tau, \cdot), \varphi \rangle = \langle v(t, \cdot), \varphi \rangle.$$

Se v é fracamente contínua para todo $t \in [0, \infty)$, dizemos simplesmente que v é *fracamente contínua*.

Definição 3.0.7 Para $a \geq 0$ definimos o espaço $\mathcal{C}_\omega([0, \infty), PM^a)$ de todas as funções $v : [0, \infty) \rightarrow PM^a$ fracamente contínuas e tais que $\sup_{t \geq 0} \|v(t, \cdot)\|_{PM^a} < \infty$, com a norma

$$\|v\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^a)} := \sup_{t \geq 0} \|v(t, \cdot)\|_{PM^a}.$$

Proposição 3.0.8 O espaço $\mathcal{C}_\omega([0, \infty), PM^a)$ munido da norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^a)}$ é um espaço de Banach.

Demonstração: A prova de que toda sequência de Cauchy converge, na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^a)}$ é similar a do espaço das funções reais $L^\infty(0, \infty)$ com a norma $\|f\|_{L^\infty} := \sup_{t \geq 0} |f(t)|$, pois PM^a é um espaço de Banach. Assim, mostraremos, apenas, a continuidade fraca da função limite. Para isto, seja $(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_\omega([0, \infty), PM^a)$ uma sequência tal que $v_j \rightarrow v$, quando $j \rightarrow \infty$, na norma $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^a)}$. Para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} |\langle v(t, \cdot) - v(\tau, \cdot), \varphi \rangle| &\leq |\langle v(t, \cdot) - v_j(t, \cdot), \varphi \rangle| + |\langle v_j(t, \cdot) - v_j(\tau, \cdot), \varphi \rangle| \\ &\quad + |\langle v_j(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot), \varphi \rangle| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{v}(t, \xi) - \hat{v}_j(t, \xi)| |\xi|^{-a} |\check{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^a |\hat{v}(\tau, \xi) - \hat{v}_j(\tau, \xi)| |\xi|^{-a} |\check{\varphi}(\xi)| d\xi \\ &\quad + |\langle v_j(t, \cdot) - v_j(\tau, \cdot), \varphi \rangle| \\ &\leq 2\|v - v_j\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^a)} \left[\|\check{\varphi}\|_{L^\infty} \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} d\xi \right) + \|\check{\varphi}\|_{L^1} \right] \\ &\quad + |\langle v_j(t, \cdot) - v_j(\tau, \cdot), \varphi \rangle|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\limsup_{\tau \rightarrow t} |\langle v(t, \cdot) - v(\tau, \cdot), \varphi \rangle| \leq 2\|v - v_j\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^a)} \left[\|\check{\varphi}\|_{L^\infty} \left(\int_{B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^a} d\xi \right) + \|\check{\varphi}\|_{L^1} \right]. \quad (3.4)$$

Uma vez que $j \in \mathbb{N}$ é arbitrário, segue que $\limsup_{\tau \rightarrow t} | \langle v(t, \cdot) - v(\tau, \cdot), \varphi \rangle | = 0$, ou seja, o limite em (3.4) existe e é igual a zero. Portanto, v é fracamente contínua em t . ■

Definição 3.0.9 Para $a \geq 0, b \geq 0$ e $\sigma > 0$ definimos $Y_\sigma^{a,b}(\mathbb{R}^+) := \mathcal{C}_\omega([0, \infty), PM^a) \cap \mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^b)$.

Para $2 < b < 3$ e $\sigma = \frac{b}{2} - 1$ escrevemos $Y^b(\mathbb{R}^+) \equiv Y_\sigma^{2,b}(\mathbb{R}^+)$. Note que, $Y^2(\mathbb{R}^+) = \mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)$.

Por fim, vale lembrar que das Proposições 3.0.3 e 3.0.8 segue que o espaço $Y_\sigma^{2,a}(\mathbb{R}^+)$ munido da norma $\|\cdot\|_{Y^a}$ é um espaço de Banach, em que a norma $\|\cdot\|_{Y^a}$ é definida por

$$\begin{aligned} \|v\|_{Y^a} &= \|v\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty), PM^2)} + \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \\ &= \sup_{t>0} \|v(t, \cdot)\|_{PM^2} + \sup_{t>0} t^\sigma \|v(t, \cdot)\|_{PM^a}. \end{aligned}$$

Capítulo 4

Boa colocação da equação do calor não linear

Este capítulo é dedicado ao estudo da equação do calor não linear. Para esta finalidade, primeiramente apresentamos algumas estimativas básicas e lemas e então provamos a boa colocação global no tempo, para pequenas soluções, do problema de Cauchy

$$u_t - \Delta u = \mu u^3, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (4.2)$$

em espaços de pseudo-medidas e, também, a estabilidade assintótica de soluções globais em tempos grandes. Finalmente, será discutido o comportamento, em tempos grandes, da solução global e existência de soluções auto-similares do problema. Aqui, $u = u(t, x)$ é uma função a valores reais a ser determinada, $u_0(x)$ é o dado inicial e $\mu \in \mathbb{R}$ é uma constante.

4.1 O Problema Linear Associado

Observe que o problema linear associado ao sistema (4.1)- (4.2) é o problema de Cauchy para a equação do calor em $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (4.3)$$

Seja $g(t, x)$ o núcleo de Gauss-Weierstrass dado por

$$g(t, x) = (4t\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad (4.4)$$

para todo $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^3$, cuja transformada de Fourier é

$$\hat{g}(t, \xi) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} g(t, x) e^{-ix \cdot \xi} dx = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-|\xi|^2 t}. \quad (4.5)$$

Aplicando formalmente a transformada de Fourier em (4.3), tem-se o seguinte p.v.i.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(t, \xi) + |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \\ \hat{u}(0, \xi) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (4.6)$$

O sistema (4.6) tem solução única dada por

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) \quad (4.7)$$

e, portanto, de (4.5), temos

$$\hat{u}(t, \xi) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \hat{g}(t, \xi) \hat{u}_0(\xi). \quad (4.8)$$

Aplicando, agora, a transformada inversa, obtemos

$$u(t, x) = g(t, x) * u_0(x), \quad (4.9)$$

ou seja, $g(t, x)$ é solução fundamental de (4.3).

A solução do problema linear (4.3), dada em (4.9), gera um semigrupo $S(t)$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass (4.4), isto é,

$$S(t)u_0(x) = g(t, x) * u_0(x). \quad (4.10)$$

No que segue, nos referimos a $g(t, x)$ e $S(t)$ como núcleo do calor e semigrupo do calor, respectivamente. Para mais detalhes sobre a discussão acima veja [3] e para mais informações sobre a teoria de semigrupos veja [14].

4.2 Formulação Integral do Problema

Nesta seção vamos apresentar a formulação integral associada ao sistema (4.3).

Para isso, considere u uma solução clássica de (4.3) e defina $\psi(\tau) = S(t - \tau)u(\tau, x)$, em que $S(t)$ é o semigrupo do calor. Assim, segue que

$$\psi(\tau) = S(t - \tau)u(\tau, x) = g(t - \tau, x) * u(\tau, x)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial \tau}(\tau) &= \frac{\partial}{\partial \tau} (g(t - \tau, x) * u(\tau, x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\int_{\mathbb{R}^3} g(t - \tau, x - y) u(\tau, y) \, dy \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (g(t - \tau, x - y)) u(\tau, y) + g(t - \tau, x - y) \frac{\partial}{\partial \tau} (u(\tau, y)) \right] dy.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Mostremos agora que

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (g(t - \tau, x - y)) = -\Delta (g(t - \tau, x - y)). \tag{4.12}$$

De fato, observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} (g(t - \tau, x - y)) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{[4(t - \tau)\pi]^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}} \right) \\
&= \frac{12\pi}{2[4(t - \tau)\pi]^{\frac{5}{2}}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}} + \frac{1}{[4(t - \tau)\pi]^{\frac{3}{2}}} \frac{|x - y|^2(-4)}{[4(t - \tau)]^2} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}} \\
&= \left[\frac{3}{2(t - \tau)} - \frac{|x - y|^2}{4(t - \tau)^2} \right] \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{[4(t - \tau)\pi]^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Por outro lado, para $i = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} (g(t - \tau, x - y)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{[4(t - \tau)\pi]^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}} \right) \\
&= \frac{-(x_i - y_i)}{2(t - \tau)} \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{[4(t - \tau)\pi]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} (g(t - \tau, x - y)) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{-(x_i - y_i)}{2(t - \tau)} \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{[4(t - \tau)\pi]^{\frac{3}{2}}} \right) \\
&= \left[\frac{-1}{2(t - \tau)} + \frac{(x_i - y_i)^2}{4[(t - \tau)]^2} \right] \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{[4(t - \tau)\pi]^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Assim, de (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{aligned} -\Delta(g(t-\tau, x-y)) &= \left[\frac{3}{2(t-\tau)} - \frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)^2} \right] \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-\tau)}}}{[4(t-\tau)\pi]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau}(g(t-\tau, x-y)), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Agora, uma vez que ψ é diferenciável, aplicando a igualdade (4.12) a (4.11), e utilizando propriedades básicas da convolução, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}\psi(\tau) &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta(g(t-\tau, x-y))u(\tau, y) dy + \int_{\mathbb{R}^n} g(t-\tau, x-y) \frac{\partial}{\partial \tau}(u(\tau, y)) dy \\ &= S(t-\tau) \frac{\partial}{\partial \tau}(u(\tau, x)) - \Delta S(t-\tau)u(\tau, x) \\ &= S(t-\tau)(\Delta u(\tau, x) + \mu u^3(\tau, x)) - \Delta S(t-\tau)u(\tau, x) \\ &= S(t-\tau)\Delta u(\tau, x) + \mu S(t-\tau)u^3(\tau, x) - S(t-\tau)\Delta u(\tau, x) \\ &= \mu S(t-\tau)u^3(\tau, x). \end{aligned}$$

Integrando a última igualdade de 0 até t , e lembrando que $\psi(0) = S(t-0)u(0, x) = S(t)u_0(x)$ e $\psi(t) = S(0)u(t, x) = u(t, x)$, obtemos

$$\psi(t) - \psi(0) = \mu \int_0^t S(t-\tau)u^3(\tau, x) d\tau,$$

ou seja,

$$u(t, x) - S(t)u_0(x) = \mu \int_0^t S(t-\tau)u^3(\tau, x) d\tau,$$

ou ainda,

$$u(t, x) = S(t)u_0(x) + \mu \int_0^t S(t-\tau)u^3(\tau, x) d\tau. \quad (4.15)$$

Portanto, concluímos que toda solução clássica do sistema (4.3) satisfaz a equação integral (4.15).

Para simplificar a expressão em (4.15), definindo

$$B(u, v, w)(t, \cdot) = \mu \int_0^t S(t-\tau)u(\tau, \cdot)v(\tau, \cdot)w(\tau, \cdot) d\tau, \quad (4.16)$$

a equação (4.15) pode ser reescrita da seguinte forma

$$u(t, x) = S(t)u_0(x) + B(u, u, u)(t, x). \quad (4.17)$$

Agora, estamos em condições de apresentar a noção precisa de solução que estaremos tratando neste trabalho.

Definição 4.2.1 *Uma função $u(t, x)$ é dita uma solução branda para o problema de Cauchy (4.1)- (4.2) se $u \in Y^a(\mathbb{R}^+)$ e satisfaz*

$$u(t, x) = S(t)u_0(x) + \mu \int_0^t S(t - \tau)u^3(\tau, x)d\tau, \quad (4.18)$$

para todo $0 < t < \infty$.

Observação 4.2.2 *Pela transformada de Fourier, a solução branda, definida em (4.18), pode ser equivalentemente definida por*

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-|\xi|^2 t} \hat{u}_0(\xi) + \mu \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)} \hat{u}^3(\tau, \xi) d\tau, \quad (4.19)$$

para todo $0 < t < \infty$, em que a integral é entendida como a integral de Bochner. Veja [19] para mais informações sobre a integral de Bochner.

4.3 Existência de solução

Nosso objetivo agora é aplicar o Lema 2.7.1 para a equação (4.17) no espaço $Y^a(\mathbb{R}^+)$. Para isso, precisaremos de alguns lemas. Vale lembrar que estamos nos restringindo ao caso $n = 3$.

Lema 4.3.1 *Se $u_0 \in PM^2$, então $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)$.*

Demonstração: Pela definição da norma em PM^2 segue que, para todo $0 < t < \infty$,

$$\|S(t)u_0\|_{PM^2} = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{S(t)u_0}(\xi)| = \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 e^{-|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)| \leq \|u_0\|_{PM^2} < \infty.$$

Portanto, concluímos que

$$S(\cdot)u_0 \in L^\infty([0, \infty); PM^2).$$

Agora, mostraremos a continuidade fraca de $S(t)u_0$, com relação a t . Por propriedade do semigrupo $S(\cdot)$ é suficiente mostrar a continuidade somente para $t = 0$.

Para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, segue que

$$\begin{aligned}
 | \langle S(t)u_0(x) - S(0)u_0(x), \varphi(x) \rangle | &= | \langle S(t)u_0(x) - u_0(x), \varphi(x) \rangle | \\
 &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} (e^{-|\xi|^2} - 1) \hat{u}_0(\xi) \check{\varphi}(\xi) d\xi \right| \\
 &\leq t \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \left| \frac{e^{-|\xi|^2} - 1}{t|\xi|^2} \right| \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}_0(\xi)| \int_{\mathbb{R}^3} |\check{\varphi}(\xi)| d\xi \\
 &\leq t \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \left| \frac{e^{-|\xi|^2} - 1}{t|\xi|^2} \right| \|u_0\|_{PM^2} \|\check{\varphi}\|_{L^1} \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

Portanto, segue que $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)$. ■

Lema 4.3.2 *Se $2 < a < 3$ e $u_0 \in PM^2$, então $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$, em que $\sigma = \frac{a}{2} - 1$.*

Demonstração: Pela definição da norma no espaço $\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$, segue que

$$\begin{aligned}
 \|S(t)u_0\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} &= \sup_{t>0} t^\sigma \|S(t)u_0\|_{PM^a} \\
 &= \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} t^{\frac{a}{2}-1} |\xi|^a e^{-|\xi|^2 t} |\hat{u}_0(\xi)| \\
 &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} (t|\xi|^2)^{\frac{a}{2}-1} e^{-|\xi|^2 t} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\hat{u}_0(\xi)| \\
 &= C \|u_0\|_{PM^2} < \infty.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $S(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)$. ■

O próximo resultado é consequência imediata dos Lemas 4.3.1 e 4.3.2.

Corolário 4.3.3 *Se as condições dos Lemas 4.3.1 e 4.3.2 são satisfeitas, então $S(\cdot)u_0 \in Y^a(\mathbb{R}^+)$.*

Mostraremos agora um resultado sobre continuidade da forma trilinear $B(\cdot, \cdot, \cdot)$ em $Y^a(\mathbb{R}^+)$.

Lema 4.3.4 *O operador trilinear $B(\cdot, \cdot, \cdot)$ é contínuo em $Y^a(\mathbb{R}^+)$, em que $2 < a < 3$. Além disso, existe uma constante $K > 0$ tal que para todo $u, v, w \in Y^a(\mathbb{R}^+)$ temos*

$$\|B(u, v, w)\|_{Y^a} \leq K \|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}.$$

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned}
\widehat{B(u, v, w)}(t, \xi) &= \mu \int_0^t (S(t-\tau)u(\tau, \cdot)v(\tau, \cdot)w(\tau, \cdot))^\wedge(\xi) d\tau \\
&= \mu \int_0^t (g(t-\tau, \cdot) * u(\tau, \cdot)v(\tau, \cdot)w(\tau, \cdot))^\wedge(\xi) d\tau \\
&= \mu \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (u(\tau, \cdot)v(\tau, \cdot)w(\tau, \cdot))^\wedge(\xi) d\tau \\
&= \mu(2\pi)^{-3} \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\hat{u}(\tau, \cdot) * \hat{v}(\tau, \cdot) * \hat{w}(\tau, \cdot))(\xi) d\tau \\
&= \mu(2\pi)^{-3} W(t, \xi),
\end{aligned}$$

em que $W(t, \xi) = \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\hat{u}(\tau, \cdot) * \hat{v}(\tau, \cdot) * \hat{w}(\tau, \cdot))(\xi) d\tau$.

Agora, observemos que

$$\begin{aligned}
|(\hat{u}(\tau, \cdot) * \hat{v}(\tau, \cdot) * \hat{w}(\tau, \cdot))(\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\tau, \xi - \eta) [(\hat{v}(\tau, \cdot) * \hat{w}(\tau, \cdot))(\eta)] d\eta \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^3} \hat{u}(\tau, \xi - \eta) [(\hat{w}(\tau, \cdot) * \hat{v}(\tau, \cdot))(\eta)] d\eta \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} |\hat{u}(\tau, \xi - \eta)| |\hat{w}(\tau, \eta - z)| |\hat{v}(\tau, z)| dz d\eta \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi - \eta|^2} \frac{1}{|z|^a} \frac{1}{|\eta - z|^2} dz d\eta (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\quad \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi - \eta|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\eta - z|^2} \frac{1}{|z|^a} dz d\eta (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\quad \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi - \eta|^2} \left(\frac{1}{|\cdot|^a} * \frac{1}{|\cdot|^2} \right) (\eta) d\eta (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\quad \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}) \\
&= \left[\left(\frac{1}{|\cdot|^a} * \frac{1}{|\cdot|^2} \right) * \frac{1}{|\cdot|^2} \right] (\xi) (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\quad \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}) \\
&= \left[(|\cdot|^{-a} * |\cdot|^{-2}) * |\cdot|^{-2} \right] (\xi) (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\quad \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}). \tag{4.20}
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela Proposição 2.6.1, segue que

$$\begin{aligned}
(|\cdot|^{-a} * |\cdot|^{-2})(\xi) &= (|\cdot|^{(-a+3)-3} * |\cdot|^{1-3})(\xi) \\
&= \frac{C_{3+a-3-1} C_{-a+3} C_1}{C_{-a+3+1} C_{3+a-3} C_{3-1}} |\xi|^{-a+3+1-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c_{a-1}c_{-a+3}c_1}{c_{-a+4}c_ac_2} |\xi|^{-a+1} \\
&= A |\xi|^{-a+1},
\end{aligned}$$

em que $A = \frac{c_{a-1}c_{-a+3}c_1}{c_{-a+4}c_ac_2}$ e, também,

$$\begin{aligned}
[(|\cdot|^{-a} * |\cdot|^{-2}) * |\cdot|^{-2}](\xi) &= (A|\cdot|^{-a+1} * |\cdot|^{-2})(\xi) \\
&= A(|\cdot|^{-a+1} * |\cdot|^{-2})(\xi) \\
&= A(|\cdot|^{(-a+4)-3} * |\cdot|^{1-3})(\xi) \\
&= A \frac{c_{3+a-4-1}c_{-a+4}c_1}{c_{-a+4+1}c_{3+a-4}c_{3-1}} |\xi|^{-a+4+1-3} \\
&= \frac{c_{a-1}c_{-a+3}c_1}{c_{-a+4}c_ac_2} \frac{c_{a-2}c_{-a+4}c_1}{c_{-a+5}c_{a-1}c_2} |\xi|^{-a+4+1-3} |\xi|^{-a+2} \\
&= \frac{c_1^2}{c_2^2} \frac{c_{-a+3}c_{a-2}}{c_ac_{-a+5}} |\xi|^{-a+2}.
\end{aligned}$$

Ainda, da Proposição 2.6.1 e de propriedades básicas da função gama, segue que $c_1 = 1$, $c_2 = \pi^{-1}$, $c_a = \pi^{-\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{a}{2} - 1\right)$, $c_{a-2} = \pi^{-\frac{a-2}{2}} \Gamma\left(\frac{a}{2} - 1\right)$, $c_{-a+3} = \pi^{-\frac{-a+3}{2}} \Gamma\left(\frac{-a+3}{2}\right)$, $c_{-a+5} = \pi^{\frac{a-5}{2}} \left(\frac{-a+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-a+3}{2}\right)$, ou seja, obtemos

$$\begin{aligned}
[(|\cdot|^{-a} * |\cdot|^{-2}) * |\cdot|^{-2}](\xi) &= 4\pi^4 \frac{1}{(a-2)(3-a)} |\xi|^{2-a} \\
&\leq C |\xi|^{2-a}.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Observação 4.3.5 Onde só podemos garantir a existência de um C positivo, uma vez que $2 \leq a \leq 3$.

Assim, substituindo (4.21) em (4.20), obtemos

$$|(\hat{u}(\tau, \cdot) * \hat{v}(\tau, \cdot) * \hat{w}(\tau, \cdot))(\xi)| \leq C |\xi|^{2-a} (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}). \tag{4.22}$$

Agora, de (4.22), obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(u, v, w)(t, \cdot)\|_{PM^a} &= \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^a |\widehat{B(u, v, w)}(t, \xi)| \\
&= \mu(2\pi)^{-3} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^a |W(t, \xi)| \\
&= \mu(2\pi)^{-3} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^a \left| \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\hat{u}(\tau, \cdot) * \hat{v}(\tau, \cdot) * \hat{w}(\tau, \cdot))(\xi) d\tau \right|
\end{aligned}$$

$$\leq \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^t |\xi|^2 e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}) d\tau$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \|B(u, v, w)\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{a}{2}-1} \|B(u, v, w)(t, \cdot)\|_{PM^a} \\ &\leq \overline{C} \sup_{t>0} t^{\frac{a}{2}-1} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^t |\xi|^2 e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \\ &\quad \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}) d\tau \\ &\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^t t^{\frac{a}{2}-1} \tau^{1-\frac{a}{2}} |\xi|^2 e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \\ &\quad \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}) d\tau. \\ &\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^t \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{a}{2}-1} |\xi|^2 e^{-|\xi|^2(t-\tau)} d\tau (\|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \\ &\quad \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}) . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = ts$ na integral em (4.23), obtemos

$$\begin{aligned} \|B(u, v, w)\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} &\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 s^{1-\frac{a}{2}} |\xi|^2 t e^{-|\xi|^2(1-s)t} ds (\|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \\ &\quad \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}) \\ &\leq \overline{C} \int_0^1 s^{1-\frac{a}{2}} ds (\|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \\ &\quad \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}) \\ &\leq C_1 \|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|B(u, v, w)\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \leq C_1 \|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}. \quad (4.24)$$

Agora, vamos estimar $\|B(u, v, w)(t, \cdot)\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)}$. De (4.22), temos

$$\begin{aligned} \|B(u, v, w)\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} &= \sup_{t>0} \|B(u, v, w)(t, \cdot)\|_{PM^2} \\ &= \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{B(u, v, w)}(t, \xi)| \\ &= \mu(2\pi)^{-3} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \\ &\quad \left| \int_0^t e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\hat{u}(\tau, \cdot) * \hat{v}(\tau, \cdot) * \hat{w}(\tau, \cdot))(\xi) d\tau \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^t |\xi|^{4-a} e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \\
&\quad \|w(\tau, \cdot)\|_{PM^2}) d\tau \\
&\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^t \tau^{1-\frac{a}{2}} |\xi|^{4-a} e^{-|\xi|^2(t-\tau)} (\|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \\
&\quad \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)}) d\tau. \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = ts$ na integral em (4.25), obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(u, v, w)\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} &\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 (ts)^{1-\frac{a}{2}} |\xi|^{4-a} e^{-|\xi|^2(t-ts)} t ds (\|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \\
&\quad \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)}) \\
&\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 t^{2-\frac{a}{2}} s^{1-\frac{a}{2}} (|\xi|^2)^{2-\frac{a}{2}} e^{-|\xi|^2(1-s)t} ds \\
&\quad (\|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)}) \\
&\leq \overline{C} \sup_{t>0} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 s^{1-\frac{a}{2}} (1-s)^{-2+\frac{a}{2}} (|\xi|^2(1-s)t)^{2-\frac{a}{2}} e^{-|\xi|^2(1-s)t} ds \\
&\quad (\|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)}) \\
&\leq \overline{C} \int_0^1 s^{1-\frac{a}{2}} (1-s)^{-2+\frac{a}{2}} ds (\|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \\
&\quad \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)}) \\
&\leq C_2 \|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)},
\end{aligned}$$

pois $\int_0^1 s^{1-\frac{a}{2}} (1-s)^{-2+\frac{a}{2}} ds = \int_0^1 s^{(2-\frac{a}{2})-1} (1-s)^{(-1+\frac{a}{2})-1} ds$, em que $2-\frac{a}{2} > 0$ e $-1+\frac{a}{2} > 0$.

Logo, segue que

$$\|B(u, v, w)\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \leq C_2 \|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)}. \tag{4.26}$$

Portanto, combinando (4.24) e (4.26), obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(u, v, w)\|_{Y^a} &= \|B(u, v, w)\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} + \|B(u, v, w)\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \\
&\leq K \|u\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)} \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \|w\|_{C_\omega([0,\infty);PM^2)}, \tag{4.27}
\end{aligned}$$

o que completa a prova. ■

Agora, estamos em condições de apresentar nosso resultado de existência de solução:

Teorema 4.3.6 *Suponha que $u_0 \in PM^2(\mathbb{R}^3)$. Seja K como no Lema 4.3.4 e ε tal que $12\varepsilon^2 K < 1$. Existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que se $\|u_0\|_{PM^2} \leq \delta$, então o problema de Cauchy*

(4.3)- (4.2) tem uma única solução branda global no tempo $u \in Y^a(\mathbb{R}^+)$, para $2 < a < 3$. Além disso, $\|u\|_{Y^a} \leq 2\varepsilon$.

Demonstração: Seja $X = Y^a$. Considere o operador $B : X \times X \times X \rightarrow X$ dado por

$$B(u, v, w)(t, x) = \mu \int_0^t S(t - \tau) u(\tau, x) v(\tau, x) w(\tau, x) d\tau.$$

Pelo Lema 4.3.4, temos

$$\|B(u, v, w)\|_{Y^a} \leq K \|u\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)} \|v\|_{\mathcal{C}_\sigma([0, \infty); PM^a)} \|w\|_{\mathcal{C}_\omega([0, \infty); PM^2)},$$

ou seja,

$$\|B(u, v, w)\|_{Y^a} \leq K \|u\|_{Y^a} \|v\|_{Y^a} \|w\|_{Y^a}.$$

Note que se $\|u_0\|_{PM^2} \leq \delta$, então, pelo Corolário 4.3.3, tem-se

$$\|S(t)u_0\|_X = \|S(t)u_0\|_{Y^a} \leq C \|u_0\|_{PM^2} \leq C\delta =: \varepsilon.$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que $12\varepsilon^2 K < 1$, o Lema de ponto fixo abstrato 2.7.1 garante a existência de uma solução para a equação integral (4.18) em X e, além disso, garante que essa solução é única na bola fechada $\bar{B}_{2\varepsilon}(0)$. ■

Agora, estudaremos a estabilidade assintótica da solução do problema de Cauchy (4.1)-(4.2).

Teorema 4.3.7 *Suponha que u e v são duas soluções brandas do problema de Cauchy (4.1)- (4.2) correspondendo aos dados iniciais u_0 e v_0 , respectivamente. Se as condições do Teorema 4.3.6 são satisfeitas, então*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2} = 0 \quad (4.28)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^2} = 0. \quad (4.29)$$

Demonstração: Note primeiramente que, pelo Teorema 4.3.6, temos

$$\sup_{t > 0} \|u(t, \cdot)\|_{PM^2} \leq 2\varepsilon, \quad \sup_{t > 0} \|v(t, \cdot)\|_{PM^2} \leq 2\varepsilon.$$

Supondo que ocorra (4.29), mostraremos a igualdade (4.28). Subtraindo a equação integral (4.18) da mesma equação com u_0 e u substituídos por v_0 e v , respectivamente, e

calculando a norma em PM^2 da equação resultante, obtemos

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2} &\leq \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^2} + \\ &\quad + \mu \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \left| (\widehat{u^3 - v^3})(\tau, \xi) \right| d\tau \quad (4.30) \\ &= \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^2} + G, \end{aligned}$$

em que $G = \mu \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \left| (\widehat{u^3 - v^3})(\tau, \xi) \right| d\tau$.

Observe que

$$\begin{aligned} \widehat{u^3 - v^3} &= (\widehat{u - v})^3 + 3\widehat{u^2 v} - 3\widehat{u v^2} \\ &= (2\pi)^{-3} \left[\widehat{u - v} * \widehat{u - v} * \widehat{u - v} + 3\widehat{u} * \widehat{u} * \widehat{v} - 3\widehat{u} * \widehat{v} * \widehat{v} \right] \\ &= (2\pi)^{-3} \left[(\widehat{u - v} * \widehat{u} * \widehat{u} + \widehat{u - v} * \widehat{v} * \widehat{v}) - 2\widehat{u} * \widehat{u} * \widehat{v} + 2\widehat{v} * \widehat{u} * \widehat{v} \right. \\ &\quad \left. + 3\widehat{u} * \widehat{u} * \widehat{v} - 3\widehat{u} * \widehat{v} * \widehat{v} \right] \\ &= (2\pi)^{-3} \left[(\widehat{u - v} * \widehat{u} * \widehat{u} + \widehat{u - v} * \widehat{v} * \widehat{v}) + \widehat{u - v} * \widehat{u} * \widehat{v} \right]. \end{aligned}$$

Logo, usando a estimativa (4.22), temos

$$\begin{aligned} G &\leq C\mu(2\pi)^{-3} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \left[|\xi|^{2-a} \|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|u(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \right. \\ &\quad \left. + |\xi|^{2-a} \|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \right. \\ &\quad \left. + |\xi|^{2-a} \|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|u(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \right] d\tau \\ &= \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^{4-a} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \left[\|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} (\|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \tau^{\frac{a}{2}-1} \|u(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \right. \\ &\quad \left. + \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \tau^{\frac{a}{2}-1} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^a} + \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \tau^{\frac{a}{2}-1} \|u(\tau, \cdot)\|_{PM^a} \right] \tau^{1-\frac{a}{2}} d\tau \\ &\leq \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^{4-a} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \tau^{1-\frac{a}{2}} \left[\|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \right. \\ &\quad \left(\sup_{\tau>0} \|u(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|u\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} + \sup_{\tau>0} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|v\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \right. \\ &\quad \left. \left. + \sup_{\tau>0} \|v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} \|u\|_{C_\sigma([0,\infty);PM^a)} \right) \right] d\tau \quad (4.31) \\ &\leq 12\varepsilon^2 \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} |\xi|^{4-a} \tau^{1-\frac{a}{2}} \|u(\tau, \cdot) - v(\tau, \cdot)\|_{PM^2} d\tau. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = ts$, temos

$$G \leq 12\varepsilon^2 \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 e^{-(t-ts)|\xi|^2} |\xi|^{4-a} (ts)^{1-\frac{a}{2}} \|u(ts, \cdot) - v(ts, \cdot)\|_{PM^2} t ds$$

$$\begin{aligned}
&= 12\varepsilon^2 \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 e^{-(1-s)t|\xi|^2} ((1-s)t|\xi|^2)^{2-\frac{a}{2}} ((1-s)t)^{\frac{a}{2}-2} t^{2-\frac{a}{2}} s^{1-\frac{a}{2}} \\
&\quad \|u(ts, \cdot) - v(ts, \cdot)\|_{PM^2} ds \\
&\leq 12\varepsilon^2 \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 e^{-(1-s)t|\xi|^2} ((1-s)t|\xi|^2)^{2-\frac{a}{2}} (1-s)^{\frac{a}{2}-2} s^{1-\frac{a}{2}} \\
&\quad \|u(ts, \cdot) - v(ts, \cdot)\|_{PM^2} ds.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Seja $A = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2} = \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2}$.

Queremos provar que $A = 0$. De (4.30) e (4.31), obtemos que

$$\begin{aligned}
A &\leq 12\varepsilon^2 \overline{C} \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} \int_0^1 e^{-(1-s)t|\xi|^2} ((1-s)t|\xi|^2)^{2-\frac{a}{2}} \\
&\quad (1-s)^{\frac{a}{2}-2} s^{1-\frac{a}{2}} ds \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \sup_{ts \geq ks} \|u(ts, \cdot) - v(ts, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\leq 12\varepsilon^2 C_2 \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \sup_{ts \geq ks} \|u(ts, \cdot) - v(ts, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\leq 12\varepsilon^2 K A,
\end{aligned}$$

em que C_2 e K são as constantes que aparecem no Lema 4.3.4.

Note que a desigualdade acima implica que $A = 0$, pois $12\varepsilon^2 K < 1$.

Agora, supondo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2} = 0$, provaremos que vale (4.29).

Subtraindo, novamente, a equação integral (4.18) da mesma equação com u_0 e u substituídos por v_0 e v , respectivamente, obtemos

$$u(t, \cdot) - v(t, \cdot) = S(t)(u_0 - v_0) + \mu \int_0^t S(t - \tau) u^3(\tau, \cdot) d\tau,$$

ou seja,

$$S(t)(u_0 - v_0) = -u(t, \cdot) - v(t, \cdot) + \mu \int_0^t S(t - \tau) u^3(\tau, \cdot) d\tau.$$

Calculando a norma em PM^2 , obtemos

$$\begin{aligned}
\|S(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^2} &\leq \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2} \\
&\quad + \mu \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \left| \widehat{(u^3 - v^3)}(\tau, \xi) \right| d\tau \\
&= \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2} + G,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

em que, como anteriormente, $G = \mu \operatorname{ess\,sup}_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 \int_0^t e^{-(t-\tau)|\xi|^2} \left| \widehat{(u^3 - v^3)}(\tau, \xi) \right| d\tau$.

Uma vez que, por hipótese, $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{PM^2} = 0$, usando (4.31) e fazendo o

limite quanto $t \rightarrow \infty$ em (4.33), segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t)(u_0 - v_0)\|_{PM^2} = 0,$$

como queríamos demonstrar. ■

Referências

- [1] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, A Wiley - Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1995).
- [2] Canone, M., Karch, G., *Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations, 197, (2004) 247-274.
- [3] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence RI, (1998).
- [4] Folland, G. B., *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd. ed., Princeton University Press, (1995).
- [5] Fujita, H., *On the blowing up of solutions of Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., 13, (1966), 109-124.
- [6] Íorio, R., Iorio, V., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, (1988).
- [7] Kato, T. *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications*, Math. Z., 187, (1984), 471-480.
- [8] Klainerman, S., *Long-time behavior of solutions to nonlinear evolution equations*, Arch. Ration. Mech. Anal., 78 ,(1985), 73-86.
- [9] Landau, L. D., *A new exact solution of Navier-Stokes equations*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.), 43, (1944), 286-288.
- [10] Li, T., Chen, Y., *Initial value problems for nonlinear heat equations*, J. Partial Differential Equations, 1, (1988), 1-11.
- [11] Lieb, E., Loss, M., *Analysis*, 2nd edn. Providence, RI: American Mathematical Society, (2001).
- [12] Miao, C. X., Yuan, B., *Solution to some nonlinear parabolic equations in pseudomeasure spaces*, Math. Nachr., 280, 1-2, (2007), 171-186.
- [13] Miao, C. X., Zhang, B., *The Cauchy problem for semilinear parabolic equations in Besov spaces*, Houston J. Math., 30, (2004), 829-878.
- [14] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, (1983).

- [15] Ponce, G., *Global existence of small solutions to a class of nonlinear evolution equations*, Nonlinear Anal., 9, (1985), 399-418.
- [16] Tian, G., Xin, Z. P., *One-point singular solutions to Navier-Stokes equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 11, (1998), 135-145.
- [17] Zheng, S., *Remark on time-global existence for nonlinear parabolic equations*, 10, (1986), 107-114.
- [18] Zheng, S., Chen, Y. , *Global existence for monlinear parabolic equations*, *Chin. Ann. Math. Ser. B.*, 7, (1986), 57-73.
- [19] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer (1980).