



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS
TRANSICIONAIS E TURBULENTOS AO REDOR DE
GEOMETRIAS CARTESIANAS**

Rubens Campregher Junior

Ilha Solteira - SP

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS TRANSICIONAIS E TURBULENTOS AO REDOR DE GEOMETRIAS CARTESIANAS

Rubens Campregher Junior

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Said Mansur
Co-orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto (UFU)

Ilha Solteira, Julho de 2002



"SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS TRANSICIONAIS E TURBULENTOS AO REDOR DE GEOMETRIAS CARTESIANAS"

Rubens Campregher Júnior

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA

NA ÁREA DE CONCENTRAÇÃO CIÊNCIAS TÉRMICAS E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

João Antonio Pereira
Prof. Dr. João Antonio Pereira
Coordenador



COMISSÃO EXAMINADORA:

Sérgio Said Mansur
Prof. Dr. Sérgio Said Mansur - Orientador

Eugênio Spanó Rosa
Prof. Dr. Eugênio Spanó Rosa

João Batista Campos Silva
Prof. Dr. João Batista Campos Silva

Proc. 053/2003 - NPD 013/03

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCNICO DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
26.02.03	31.03.03
RECEBIMENTO	TOMBO
<i>Ailza</i>	<i>Te. 1348</i>
AQUIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
<i>laboratório</i> <i>Auto</i> <i>R\$ 10,00</i>	<i>C199</i>

Ilha Solteira – SP, julho de 2002

Co Sys - 186067
Sys - 54772

30500001 ENGA. MECÂNICA

BCpIS - FEIS - UNESP

à minha esposa Ana Cláudia, pelo amor e
compreensão.

aos meus pais Rubens e Conceição e aos
meus irmãos Yvie e Hugo, pelo apoio
incondicional.



AGRADECIMENTOS

Depois de graduar-me engenheiro mecânico, em 1994, só retornei a UNESP Ilha Solteira em meados de 2000, para iniciar meu mestrado na área de Ciências Térmicas. Com grata satisfação, pude, então, perceber que o profissionalismo e a dedicação dos docentes e funcionários do Departamento de Engenharia Mecânica haviam gerado excelentes frutos, entre os quais, o próprio programa de pós-graduação ao qual acabara de vincular-me. Assim, não poderia deixar de agradecer aos servidores dos diversos setores deste câmpus, cujo empenho e dedicação possibilitaram criar, na UNESP Ilha Solteira, as condições necessárias ao desenvolvimento da pesquisa científica e à formação de novos pesquisadores. Em especial, gostaria de registrar meus sinceros agradecimentos às pessoas que contribuíram mais proximamente para o sucesso deste projeto:

Ao Prof. Sérgio Said Mansur, que fincando suas preciosas balizas pelo meu caminho, mostrou-me que um bom orientador pode ser, principalmente, um bom amigo;

Ao co-orientador deste trabalho, o Prof. Aristeu da Silveira-Neto, da Universidade Federal de Uberlândia, pelas inestimáveis sugestões e suporte durante todo o projeto;

Aos Profs. José Luiz Gasche, João Batista Aparecido, Edson Del Rio Vieira e João Batista Campos Silva que, generosamente, deram suas valiosas contribuições ao trabalho;

Ao Prof. Eugênio Spannó Rosa, da Faculdade de Engenharia Mecânica da UNICAMP, que aceitou participar da banca examinadora, na qualidade de membro externo;

A todos os professores do Departamento de Engenharia Mecânica que contribuíram, de forma direta ou indireta, com a realização deste trabalho;

A todos os funcionários, em especial ao técnico em informática Elias e à Sandra, Vânia e Alex, da secretaria do Departamento;

Aos colegas do curso de pós-graduação, onde encontrei novas e boas amizades;

Ao CNPq, que financiou a minha estadia em Ilha Solteira.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas	ix
Lista de Figuras	x
Nomenclatura	xiv
Resumo	xviii
Abstract	xix
Preâmbulo	xx
Capítulo 1 – Introdução	1
1.1 Das cavernas à era do computador: fatos marcantes na história dos fluidos	1
1.2 A simulação de escoamentos e o movimento do fluido ao redor de corpos rombudos	4
1.3 Objetivos e escopo do presente trabalho	7
Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica	9
2.1 Simulação numérica de escoamentos	9
2.2 Simulação numérica da turbulência	13

Capítulo 3 – Formulação Matemática	15
3.1 Equações governantes	15
3.2 O método de solução	15
3.3 Tratamento dos termos advectivos	20
3.3.1 Esquemas de transporte	21
a) Upwind	21
b) Diferenças Centrais	22
c) Power-Law	24
d) Upwind de Segunda Ordem	25
e) QUICK	26
3.3.2 Difusão e oscilação numéricas	27
3.3.3 A equação discretizada	28
3.4 A solução do sistema linear de equações	28
3.5 O arranjo das variáveis no domínio	31
3.6 O acoplamento pressão-velocidade	33
3.6.1 O método de Chorin	36
3.6.2 O método SIMPLE	37
3.6.3 O método SIMPLEC	40
3.7 As condições de contorno	43
3.7.1 Condições de contorno na entrada do domínio	44
3.7.2 Condições de contorno na saída do domínio	44
3.7.3 Condições de contorno nas laterais do domínio	45
3.7.4 Obstáculos sólidos imersos no escoamento	45
3.8 Modelagem da turbulência	46
 Capítulo 4 – O Programa Computacional	 49
4.1 Introdução	49
4.2 O pré-processador	50
4.2.1 Construção da malha	51
4.2.2 Condições de contorno	56
4.2.3 Recuperação de cálculos	60
4.2.4 Sondas Numéricas	61
4.2.5 Execução dos cálculos	62



4.3 O Solver Numérico	63
4.4 O bloco principal do programa	64
4.4.1 A geração da malha computacional	65
4.4.2 A solução numérica das equações de Navier-Stokes	65
Capítulo 5 – Resultados e Discussão	69
5.1 Introdução	69
5.2 Cilindro quadrado isolado	70
5.2.1 Testes iniciais de validação	70
5.2.2 Cálculo do número de Strouhal	71
5.2.3 Configurações da esteira turbilhonar	73
5.2.4 Esquemas de transporte advectivo e acoplamento pressão-velocidade	76
5.2.5 Teste de compressão da malha	78
5.3 Arranjos de cilindros	80
5.3.1 Cilindros retangulares dispostos lado a lado	81
5.3.2 Três cilindros quadrados dispostos em linha (tandem)	85
5.4 Modelagem da turbulência	88
5.5 Razão de forma (ϕ)	89
5.6 Cilindro quadrado posicionado próximo a uma parede sólida	93
5.7 Cilindros retangulares justapostos	96
Capítulo 6 – Considerações Finais	103
Referências Bibliográficas	105
Apêndice A – Tratamento dos termos advectivos	109
A.1 Introdução	109
A.2 QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)	109
A.3 SOU (Second Order Upwind)	121



Apêndice B – A solução do sistema linear	125
B.1 Introdução	125
B.2 Algoritmo de Thomas (TDMA)	127
B.3 TDMA com Correção em Bloco	128
 Apêndice C – Fluxogramas	 131

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	vantagens de desvantagens das funções interpolação	19
Tabela 3.2	Valores da variável ϕ nas faces do VC para o esquema upwind.....	22
Tabela 3.3	Índices de esparsidade comumente encontrados na matriz de coeficientes	29
Tabela 4.1	Arquivo <i>.msh</i> contendo as informações para a geração do domínio e malhas numéricas	53
Tabela 4.2	Arquivo <i>.bnd</i> com informações para as condições de contorno, ajuste do solver numérico e propriedades do fluido.....	59
Tabela 4.3	Arquivo <i>.prb</i> com as informações das sondas numéricas	62
Tabela 4.4	Arquivo <i>main.txt</i> , contendo as informações necessárias à execução do programa	63
Tabela 4.5	Subrotinas empregadas na rotina principal <i>Main</i>	64
Tabela 4.6	Descrição das subrotinas empregadas no módulo <i>solve_ns</i>	66
Tabela 4.7	Sub-rotinas auxiliares na solução das equações de u , v , e p	67
Tabela 5.1	Valores empregados para o teste da malha	79
Tabela 5.2	Resultados do número de Strouhal para simulações ao redor de uma cilindro quadrado isolado, com e sem modelagem de turbulência.....	89
Tabela C.1	Descrição das rotinas apresentadas no algoritmo da Figura C.6.....	141



LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1	Visualização do escoamento a jusante de uma pequena queda d'água.....	2
Figura 1.2	Escoamento sobre um cilindro de base retangular.....	5
Figura 1.3	Regimes de escoamento em torno de um cilindro de base quadrada.....	6
Figura 3.1	Domínio contínuo e domínio discretizado.....	16
Figura 3.2	Malha computacional bidimensional.....	17
Figura 3.3	Comportamento da função interpolação dada pela Equação (3.4).....	18
Figura 3.4	Estêncil da aproximação numérica.....	21
Figura 3.5	Comportamento da variável ϕ em função do número de Peclet.....	24
Figura 3.6	Campo de pressões “checkerboard”	32
Figura 3.7	Disposição das variáveis escalares e vetoriais no arranjo deslocado.....	33
Figura 3.8	Sistemas de equações para solução simultânea.....	33
Figura 3.9	Variação do número de Strouhal obtido em função dos coeficientes de relaxação α	42
Figura 4.1	Janela principal.....	50
Figura 4.2	Ajuste das dimensões do domínio computacional e inserção de obstáculos cartesianos no seio do escoamento.....	51
Figura 4.3	Domínio e obstáculos gerados pelos parâmetros ajustados na janela da Figura 4.2	52
Figura 4.4	Inserção e ajuste de zonas numéricas.....	52
Figura 4.5	Resultados do <i>check-up</i> das interfaces entre as zonas numéricas.....	54
Figura 4.6	Malha computacional gerada pela configuração mostrada na Figura 4.4	55
Figura 4.7	Compressão de malhas irregulares	54
Figura 4.8	Janela para a definição das condições de contorno	56

Figura 4.9	Configurações para a solução das equações discretizadas	58
Figura 4.10	Escolha do acoplamento pressão-velocidade, tratamento dos termos advectivos e precisão requerida para a convergência.....	58
Figura 4.11	Propriedades do fluido, opções de modelagem de turbulência e armazenamento do campo das variáveis calculadas.....	58
Figura 4.12	Recuperando um campo de propriedades armazenado num arquivo	61
Figura 4.13	Grade para inserção e configuração de sondas numéricas	61
Figura 5.1	Malha computacional uniforme, com 288×104 elementos	70
Figura 5.2	Posição das sondas numéricas para u e v	71
Figura 5.3	Perfil médio da componente u da velocidade a jusante do cilindro: resultados obtidos com os programas Fluent® e Fluids, empregando o esquema Power-Law	72
Figura 5.4	Curva Strouhal <i>versus</i> Reynolds, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado: comparação entre resultados numéricos e experimentais	73
Figura 5.5	Evolução temporal das linhas de isovorticidade, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado a $Re = 100$	74
Figura 5.6	Configuração do escoamento ao redor de um cilindro quadrado a $Re = 100$, no instante $t = 100$ s	77
Figura 5.7	Curva Strouhal <i>versus</i> Reynolds, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado: comparação entre resultados numéricos e experimentais.	78
Figura 5.8	Representação geométrica das diferentes regiões de um domínio computacional contendo um cilindro quadrado, para a construção de malhas não uniformes.....	79
Figura 5.9	Número de Strouhal <i>versus</i> densidade de grades, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado, a $Re = 100$	80
Figura 5.10	Malha computacional utilizada na simulação de um arranjo de cilindros retangulares dispostos lado a lado.....	81
Figura 5.11	Posição relativa das sondas numéricas para aquisição do sinal da velocidade v a jusante dos corpos cilíndricos	82
Figura 5.12	Sinais numéricos de velocidade a jusante de um arranjo de cilindros retangulares posicionados lado a lado, captados pela sonda 1	83
Figura 5.13	Curvas de isovorticidade para diferentes regimes de escoamento, obtidas no tempo adimensional $t^* = 278$	84



Figura 5.14 Curva Strouhal *versus* Reynolds, para o escoamento ao redor de dois cilindros dispostos lado a lado: comparação entre os resultados numéricos e experimentais.....85

Figura 5.15 Malha computacional utilizada na simulação de um arranjo de três cilindros quadrados posicionados em linha, separados de uma distância de $1B$ entre si.86

Figura 5.16 Curva Strouhal *versus* Reynolds, para o escoamento ao redor de três cilindros quadrados dispostos em *tandem*86

Figura 5.17 Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade próximos à descontinuidade da curva de Strouhal, para o escoamento ao redor de três cilindros quadrados dispostos em *tandem*87

Figura 5.18 Sinais numéricos de velocidade a jusante de cilindros retangulares com diferentes razões de forma, para $Re = 1000$ 91

Figura 5.19 Configurações do escoamento ao redor de cilindros retangulares com diferentes razões de forma, para $Re = 1000$92

Figura 5.20 Curva de Strouhal *versus* Razão de Forma, para $Re = 1000$92

Figura 5.21 Evolução temporal do campo de vorticidade em torno de um cilindro retangular com $\phi = 6$, para $Re = 1000$93

Figura 5.22 Evolução temporal do campo de vorticidade em torno de um cilindro retangular com $\phi = 10$, para $Re = 1000$93

Figura 5.23 Malha computacional utilizada na simulação do escoamento em torno de um cilindro quadrado posicionado nas proximidades de uma parede sólida94

Figura 5.24 Curva de frequência de emissão de vórtices *versus* número de Reynolds, para cilindros quadrados próximos a uma parede sólida.....95

Figura 5.25 Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade para as simulações correspondentes a um cilindro quadrado, posicionado próximo a uma parede sólida.....96

Figura 5.26 Corte transversal do cilindro em forma de T.....97

Figura 5.27 Malha computacional utilizada na simulação de um cilindro com seção transversal em forma de T.....97

Figura 5.28 Curvas de densidade de potência espectral e contorno de isovorticidade para as simulações correspondentes a um cilindro com seção transversal em forma de T – resultados obtidos sem modelo de turbulência.....98

Figura 5.29	Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade para as simulações correspondentes a um cilindro com seção transversal em forma de T – comparação entre resultados obtidos com e sem modelo de turbulência.....	99
Figura 5.30	Curva Strouhal <i>versus</i> Reynolds, para o escoamento ao redor de um cilindro com seção transversal em forma de T: comparação entre resultados numéricos e experimentais	101
Figura A.1	Estêncil para aproximação numérica dos termos advectivos	109
Figura A.2	Função parábola empregada na interpolação do esquema QUICK.....	110
Figura A.3	Estêncil para a avaliação dos termos cruzados ϕ_n e ϕ_s	114
Figura A.4	Representação dos volumes de controle para a velocidade u no eixo x (esquerda) e no eixo y	117
Figura A.5	Volumes de controle para a velocidade v com a representação dos termos norte e sul (esquerda) e dos termos oeste e leste	118
Figura A.6	Estêncil para a interpolação do termo Upwind de Segunda Ordem.....	121
Figura A.7	Estêncil para o cálculo da interpolação dos termos cruzados	123
Figura B.1	Malha de 25 nós e 9 elementos	126
Figura C.1	Fluxograma da estrutura <i>Main</i>	133
Figura C.2	Geração de malhas computacionais	135
Figura C.3	Fluxograma representativo da subrotina <i>solve_ns</i>	137
Figura C.4	Algoritmo para a solução das velocidades u e v	138
Figura C.5	Algoritmo para a solução da variável pc (correção da pressão).....	139
Figura C.6	Algoritmo simplificado de funcionamento do programa Fluids	140

NOMENCLATURA

Símbolos Latinos

A	altura da seção transversal do cilindro [m]; coeficiente da célula na equação discretizada
B	diâmetro característico do escoamento [m]; termo fonte da equação discretizada
C_s	constante de Smagorinsky
D	coeficiente de difusão nas interfaces [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]
E	coeficiente de relaxação
f	frequência fundamental de emissão de vórtices [s^{-1}]
fc	taxa de compressão da malha
F	fluxo nas interfaces do volume de controle elementar [$\text{kg}.\text{s}^{-1}$]
H_1, H_2, H_3	regiões horizontais do domínio computacional
ℓ	comprimento característico [m]
L	envergadura do cilindro [m]
N	ordem da matriz
N, S, E, W	pontos nodais adjacentes
P	ponto nodal principal
p	Pressão [Pa]
Sc	termo fonte da equação de transporte
t	tempo[s]
T	temperatura [K]
u_i	componentes cartesianas do vetor velocidade ($i = 1, 2$)
U_∞	velocidade de corrente livre do fluido [$\text{m}.\text{s}^{-1}$]

$\mathcal{V}$	volume da célula [m^3]
V_1, V_2, V_3	regiões verticais do domínio computacional
x, y	coordenadas cartesianas[m]

Símbolos Gregos

α	coeficiente de relaxação; coeficiente vertical de compressão da malha
β	coeficiente horizontal de compressão da malha
Γ	coeficiente de transporte [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]
δ	distância entre pontos nodais adjacentes [m]
Δ	diferença ou intervalo
ϕ	razão de forma do cilindro; variável discretizada
μ	viscosidade Dinâmica do fluido [$\text{kg.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$]
ν	viscosidade cinemática do fluido [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]
ν_{ef}	viscosidade efetiva [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]
ν_t	viscosidade turbulenta [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]
θ	ângulo de inclinação do obstáculo [Graus]; coeficiente de interpolação temporal
ρ	densidade do fluido [kg.m^{-3}]
ω	escala turbulenta de tempo [s]
ξ	vorticidade
ψ	função corrente

Índices / expoentes

P	ponto nodal principal
N, S, E, W	pontos nodais adjacentes ao ponto principal
NN, SS, EE, WW	pontos nodais na vizinhança do ponto principal
n, s, e, w	faces do volume de controle principal
0	instante de tempo anterior
k	iteração atual

*	gerado a partir de valores estimados
i, j	índices da malha

Adimensionais

Pe	número de Peclet
Re	número de Reynolds
St	número de Strouhal
t^*	tempo adimensional

Operadores matemáticos

∂	derivada parcial
$\int$	integral
Σ	somatória
-	valor imposto num ponto nodal
∇	operador diferencial

Abreviaturas

ADS	Adaptable Difference Scheme
CDS	Central Difference Scheme
CEL	Coeficientes Explicitamente Limitados
CFD	Computational Fluid Dynamics
CPU	Central Processing Unit
ILEV	Impinging Leading Edge Vortex
LES	Large Eddy Simulation
MAC	Mark And Cell
QUICK	Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics

RAM	Rapid Access Memory
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes equations
SIMPLE	Semi Implicit Method
SIMPLEC	SIMPLE Consistent
SIMPLER	SIMPLE Revised
SOR	Successive Over-Relaxation
SOU	Second Order Upwind
TDMA	Tri-Diagonal Matrix Algorithm
TEVS	Trailing Edge Vortex Shedding
UDT	User Defined Types



RESUMO

No presente trabalho, um código computacional aberto foi inteiramente desenvolvido, para simular numericamente escoamentos isotérmicos e incompressíveis, sobre geometrias cartesianas bidimensionais, notadamente cilindros de seção transversal quadrada e retangular. As equações do movimento – conservação da massa e Navier-Stokes – foram discretizadas no espaço através da metodologia dos volumes finitos, com uma discretização implícita no tempo. Diferentes formas de acoplamento pressão-velocidade – SIMPLE, SIMPLEC – e tratamento dos termos advectivos – Upwind, Upwind de Segunda ordem, Diferenças Centrais, Power-Law e QUICK – foram introduzidas e testadas. Para permitir a análise de escoamentos turbulentos, a metodologia de Simulação de Grandes Escalas foi implementada, juntamente com o clássico modelo sub-malha de Smagorinsky. Seguindo uma tendência apresentada em outros códigos de simulação numérica em mecânica dos fluidos, a estrutura do programa foi dividida em duas partes independentes. A primeira delas constitui um pré-processador, composto de uma interface gráfica amigável ao usuário, enquanto a segunda parte é responsável pela solução das equações propriamente ditas. Num primeiro momento, foram realizados diversos ensaios de validação do programa, com o objetivo de garantir a confiabilidade dos resultados obtidos. Em seguida, foram efetuados testes adicionais, com o intuito de ilustrar as potencialidades do código. Neste contexto, investigou-se o efeito de arranjos de cilindros dispostos em paralelo e em série sobre a dinâmica de emissão de vórtices, bem como a influência do fator de forma em cilindros retangulares e a interferência de uma parede disposta próxima ao obstáculo sólido.

ABSTRACT

In this work, a computational code has been fully developed in order to perform numerical simulations of isothermal, incompressible flows in a laminar, transitional, or turbulent regime – using Large Eddy Simulation – around a set of two-dimensional Cartesian geometry, more specifically square and rectangular section cylinders. The equations of fluid motion – mass conservation and Navier-Stokes – have been spatially discretized by the finite volume method, and implicitly discretized in time. Several different pressure-velocity coupling schemes – SIMPLE, SIMPLEC – and advective terms schemes – Upwind, Second Order Upwind, Central Difference, Power-Law, and QUICK – have been implemented and tested. For turbulence modeling, the classic sub-grid Smagorinsky model has been used. Following the tendencies shown by another numerical simulation codes in fluid mechanics, the software was split in two independent parts. One of them is a pre-processor, with an easy-to-use interface, and the other part is the responsible for solving the equations. Firstly, several different try-out test were performed to ensure the results credibility. In the following step, additional tests were performed, in order to demonstrate the code potentialities. Within this context, the effects of the tandem and parallel cylinders arrangement on the vortex shedding dynamics were investigated, as well as the side factor influence on the rectangular cylinders, and the near-wall influence on a solid body.

PREÂMBULO

Em 1996, estudos experimentais envolvendo o escoamento ao redor de cilindros de diferentes seções transversais – cilíndrica, quadrada, retangular, triangular, etc – passaram a ser desenvolvidos no túnel hidrodinâmico vertical do Laboratório de Visualização de Escoamentos (LVE) da UNESP Ilha Solteira. De lá para cá, uma tese de doutorado – Vieira (1997) – e duas dissertações de mestrado – Lindquist (2000) e Gonçalves (2001) – já foram defendidas, versando sobre este tema.

A partir de 1999, com a criação do Laboratório de Mecânica dos Fluidos Computacional (LMFC), este assunto passou a ser investigado também numericamente, com o emprego do programa comercial Fluent®, dando origem a mais uma dissertação de mestrado, Almeida (2001). As principais dificuldades encontradas durante a realização deste último trabalho decorreram, sobretudo, do enorme tempo requerido para a obtenção das soluções, devido à arquitetura intrincada inerente a um programa comercial desta natureza, que se propõe a resolver uma vasta gama de escoamentos. Além disso, a impossibilidade de acesso ao código fonte é sempre um inconveniente à exploração científica do programa.

Em vista disso, surgiu o desejo de se desenvolver, no próprio LMFC, um código computacional totalmente aberto, capaz de simular escoamentos laminares e turbulentos ao redor de geometrias cartesianas, que pudesse ser utilizado e aprimorado continuamente, por professores, estagiários e alunos de pós-graduação ligados a este laboratório. De certa forma, o presente trabalho representa a concretização deste anseio e o documento ora apresentado foi elaborado com o intuito de servir, também, como um guia ao usuário do programa Fluids, aqui implementado e testado.

Do ponto de vista organizacional, este trabalho foi estruturado em seis capítulos e três apêndices, da maneira como segue:

O Capítulo 1 inicia-se com um breve relato da evolução da mecânica dos fluidos através da história da humanidade. Em seguida, são abordados alguns aspectos fenomenológicos

relativos ao escoamento ao redor de corpos rombudos e, por fim, são estabelecidos os principais objetivos do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão sucinta da literatura sobre vários aspectos ligados ao tema da pesquisa, com foco principal na evolução dos trabalhos numéricos envolvendo o escoamento em torno de cilindros quadrados e retangulares e na metodologia de Simulação de Grandes Escalas de escoamentos turbulentos.

A formulação do problema, com suas considerações físicas e matemáticas, e as hipóteses simplificadoras aplicadas às equações governantes estão presentes no Capítulo 3. Os principais aspectos relativos à metodologia numérica empregada também são detalhados neste capítulo.

O Capítulo 4 pode ser visto como um manual do usuário do programa computacional. Naquele capítulo, estão contidas todas as informações relevantes que possibilitam o manuseio do *software*, mesmo por pessoas com conhecimentos limitados de programação.

Os resultados obtidos estão concentrados no Capítulo 5 e foram subdivididos em dois grupos: ensaios de validação e ensaios de exploração do programa computacional. Simulações numéricas envolvendo a modelagem da turbulência também integram estes resultados.

No Capítulo 6, são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho e, adicionalmente, são formuladas propostas para novos projetos, a serem desenvolvidos nesta mesma linha de atuação. Além disso, são ainda sugeridas modificações no programa computacional, capazes de torná-lo mais abrangente.

Finalmente, os Apêndices A, B e C, colocados as Referências Bibliográficas, trazem, respectivamente, informações mais detalhadas sobre o tratamento dos termos advectivos, sobre a solução do sistema linear e todos as principais rotinas e funções do programa, apresentadas na forma de fluxogramas detalhados.



CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1. Das cavernas à era do computador: fatos marcantes na história da mecânica dos fluidos

Quer pela beleza característica de alguns fenômenos naturais, quer pela importância das aplicações que lhe são inerentes, o movimento dos fluidos sempre despertou a curiosidade e o interesse de inúmeras pessoas ao longo da história da humanidade.

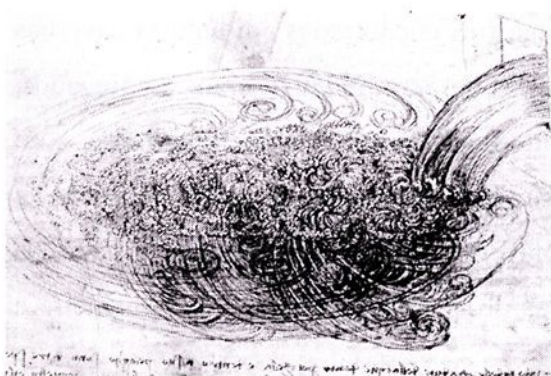
Com efeito, desde seus primórdios, o homem sempre se encantou com o movimento das águas e dos ventos, como atestam inúmeras pinturas rupestres encontradas em antigas cavernas que lhe serviram de abrigo. Já naquela ocasião, conceitos de aerodinâmica eram empregados, ainda que de forma intuitiva, para transformar hastes de madeira em flechas longilíneas, com pontas em forma de cunha e caudas estabilizadoras. Mesmo sem conhecer os fundamentos da hidrodinâmica, antigas civilizações desenvolveram notáveis embarcações movidas à vela e a remo, que evoluíram no sentido de minimizar as forças de arrasto, facilitando sobremaneira a navegação.

Entretanto, a primeira abordagem científica para a solução de problemas de fluidos em repouso só ocorreu muitos séculos depois, quando o grego Arquimedes (285-212 A.C.) estabeleceu as primeiras leis sobre empuxo em corpos submersos. Mais ou menos nesta época, os romanos construíam seus magníficos sistemas de fornecimento de água, demonstrando grande noção intuitiva da resistência viscosa em longos condutos.

A Idade Média foi profundamente marcada pela ocorrência de pestes e conflitos e, sobretudo, pelo forte misticismo que, de certa forma, inibiu as principais tentativas de enxergar o mundo por uma ótica mais científica. Assim mesmo, verificou-se um aprimoramento contínuo no projeto de embarcações e no desenvolvimento de aquedutos e canais de irrigação, utilizados

por diversos povos. Contudo, não existem registros que comprovem o conhecimento de métodos formais de análise ou critérios explícitos de dimensionamento destes artefatos.

Com o fim da Idade Média, várias e importantes descobertas passaram a acontecer, fornecendo explicações para diferentes fenômenos relacionados ao escoamento dos fluidos. Por volta de 1500, a equação de conservação da massa para um escoamento unidimensional em regime permanente foi corretamente deduzida pela mente brilhante de Leonardo Da Vinci (1452-1519). O legado de Da Vinci nesta área inclui vários outros feitos notáveis, dentre os quais destacam-se esboços e manuscritos documentando suas reflexões sobre ondas de superfície, ressaltos hidráulicos, jatos livres, esteiras de corpos rombudos e distribuição de velocidades no interior de vórtices. A título de ilustração, a Figura 1.1 compara um esboço de Da Vinci com a fotografia de uma pequena queda d'água situada na região da Serra da Canastra, obtida por Finotti (2001). O desenho de Da Vinci impressiona, não apenas pela semelhança com a imagem fotográfica que aparece ao seu lado, mas, sobretudo, pela sua riqueza de detalhes, que ressalta a grande multiplicidade de escalas – dificilmente identificável, até mesmo em laboratório – que caracteriza um escoamento deste tipo.



(a) Esboço de Da Vinci



(b) Fotografia de Finotti (2001)

Figura 1.1 - Visualização do escoamento a jusante de uma pequena queda d'água.

Em 1687, Isaac Newton (1643 - 1727) publicou sua famosa obra *Principia Mathematica*, dedicando todo o segundo volume à Mecânica dos Fluidos. Newton considerava o escoamento de um fluido como uma corrente retilínea e uniforme de partículas, que, ao se chocar contra um obstáculo com uma inclinação θ , transferiria a ele sua componente normal da quantidade de movimento, permanecendo a componente tangencial inalterada. Assim, após a colisão, as partículas se moveriam ao longo da superfície do corpo. Essa teoria levou ao surgimento da famosa lei de Newton do seno ao quadrado, em que a expressão para a força

hidrodinâmica variava de acordo com $\sin^2 \theta$. Embora deixasse muito a desejar em termos de acuracidade, esta teoria foi largamente empregada pela indústria naval da época, principalmente devido à sua simplicidade.

Quase um século depois, em 1777, Jean d'Alembert (1717 - 1783) realizou diversos experimentos em canais, para investigar os mecanismos do atrito hidrodinâmico sobre cascos de navios. Os resultados mostraram que a lei do seno ao quadrado funcionava razoavelmente bem para ângulos entre 50 e 90°, mas era incapaz de fornecer bons resultados para ângulos menores.

Em 1781, Leonhard Euler (1707 - 1783) também apontou falhas na teoria de Newton e notou que o fluido alterava sua trajetória e velocidade, mesmo antes de atingir o corpo. Além disso, Euler observou que ao passar ao longo da superfície do corpo, o fluido exercia uma força sobre ela, que poderia ser atribuída exclusivamente ao contato. Com base nesta constatação, Euler propôs uma fórmula para a força hidrodinâmica, que levava em conta a distribuição da tensão de cisalhamento e da pressão ao longo da superfície do corpo, que apresentava boa concordância com os experimentos de d'Alembert.. Nessa expressão, a força sobre o corpo variaria com $\sin^2 \theta$ para grandes ângulos de incidência, tornando-se proporcional a $\sin \theta$ para os pequenos ângulos.

Embora todos os fluidos reais possuam uma certa viscosidade, em diversas situações práticas os gradientes de velocidade são suficientemente brandos para que o escoamento possa ser tratado como invíscido. Sem levar em consideração os efeitos do atrito viscoso, Euler deduziu, em 1777, as equações da conservação da quantidade de movimento na sua forma diferencial e, também, na sua forma integral, hoje chamada de equação de Bernoulli.

Neste mesmo período, Lagrange (1736 – 1813) e Laplace (1749 – 1827) contribuíram para dar à mecânica dos fluidos um tratamento matemático ainda mais elegante. Surgiram, então, dois grupos de pesquisadores – os chamados hidrodinâmicos e os hidráulicos – que mantinham entre si sérias divergências de opinião. Enquanto o primeiro grupo buscava, através do formalismo matemático, modelar os diferentes fenômenos associados ao escoamento dos fluidos, o segundo grupo, cético quanto à eficácia destas novas ferramentas de análise teórica, preferia basear suas conclusões nos dados obtidos com o auxílio de procedimentos experimentais.

A representação matemática completa de um problema de dinâmica dos fluidos, entretanto, somente tornou-se possível a partir do século XIX, graças aos estudos dos franceses Claude Navier (1785-1836) e Siméon Poisson (1781-1840), que, em 1827 e em 1831, respectivamente, incorporaram à equação de Euler os efeitos da viscosidade, analisando as forças intermoleculares atuando no seio de um fluido em movimento. Em 1843, estas equações foram

redescobertas pelo também francês Barré de Saint-Venant (1797-1886) e, em 1845, pelo inglês George Stokes (1819-1903), que, avaliando macroscopicamente o movimento de uma partícula de fluido e as forças que lhe dão origem, consideraram a tensão de cisalhamento como uma função linear da taxa de deformação, e a pressão termodinâmica num ponto qualquer do escoamento igual à média aritmética das tensões normais agindo naquele ponto, tomadas em três direções mutuamente ortogonais. A equação vetorial assim obtida – hoje conhecida como equação de Navier-Stokes – forma a base sobre a qual toda a teoria dos escoamentos viscosos se apóia.

É interessante acrescentar que, associada à equação de conservação da massa e com as condições de contorno adequadas, a equação de Navier-Stokes é capaz de representar qualquer tipo de escoamento, seja ele laminar ou turbulento, desde que o meio possa ser considerado como contínuo, o que ocorre para números de Mach inferiores a 15. Por outro lado, ainda que formem um sistema fechado – número de equações é igual ao número de incógnitas – este conjunto de equações diferenciais parciais não apresenta solução analítica conhecida para casos gerais. Em vista disso, vários são os métodos desenvolvidos ou aprimorados ao longo das últimas décadas, para resolver numericamente as equações do movimento. Assim, graças à evolução destas técnicas e, sobretudo, aos notáveis avanços na velocidade e na capacidade de armazenamento dos computadores modernos, os programas elaborados para simular escoamentos geofísicos e industriais multiplicam-se, constituindo importante ferramenta de análise de escoamentos.

1.2. A simulação de escoamentos e o movimento do fluido ao redor de corpos rombudos

A solução numérica das equações do movimento contém diferentes fontes de imprecisão, que se devem, principalmente, às simplificações na modelagem do problema físico, aos erros de truncamento na forma discretizada das equações e aos erros de arredondamento decorrentes da representação finita dos números no computador. Assim sendo, antes que os resultados oriundos de uma simulação possam ser empregados na solução de problemas práticos, é absolutamente imprescindível que o programa que lhes deu origem tenha sido submetido a um rigoroso processo de validação. O procedimento tipicamente adotado para cumprir este propósito, consiste na realização de testes exaustivos envolvendo a simulação de escoamentos

com um certo grau de complexidade e para os quais se disponha de um bom volume de resultados confiáveis, que possam servir de elementos de comparação. Neste contexto, o escoamento em torno de cilindros de base quadrada e retangular, posicionados como sugere a Figura 1.2, presta-se adequadamente a esta finalidade, uma vez que a dinâmica particularmente ativa que o caracteriza torna sua predição um desafio interessante para qualquer programa de simulação.

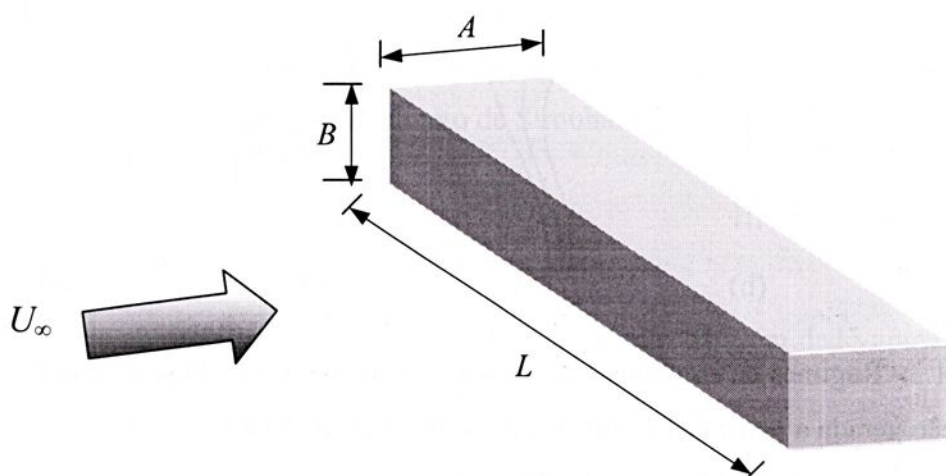


Figura 1.2 - Escoamento sobre um cilindro de base retangular.

Com efeito, apesar de sua forma geométrica bastante simples, os cilindros de seção transversal quadrada e retangular produzem fortes alterações no campo de escoamento. Do ponto de vista fenomenológico, duas camadas cisalhantes se desprendem de ambos os lados do corpo sólido e se prolongam na direção do escoamento, confinando a região da esteira que se desenvolve a jusante do cilindro. Uma vez que a zona mais interna das camadas cisalhantes, em contato com a esteira, move-se mais lentamente do que a sua parte externa, em contato com a corrente livre, estas camadas tendem a se enrolar em torno de si mesmas, formando vórtices discretos, cujo comportamento dinâmico dá origem a diferentes padrões de escoamento, como ilustrado na Figura 1.3. Neste caso, a configuração do escoamento é determinada pelo número de Reynolds, que expressa uma razão entre as forças inerciais e as forças viscosas presentes no seio do fluido, podendo ser escrito da forma:

$$Re = \frac{\text{forças inerciais}}{\text{forças viscosas}} = \frac{\rho B U_\infty}{\mu} \quad (1.1)$$

onde ρ é a densidade do fluido, B é o comprimento característico do escoamento, U_∞ a velocidade e μ a viscosidade do fluido.

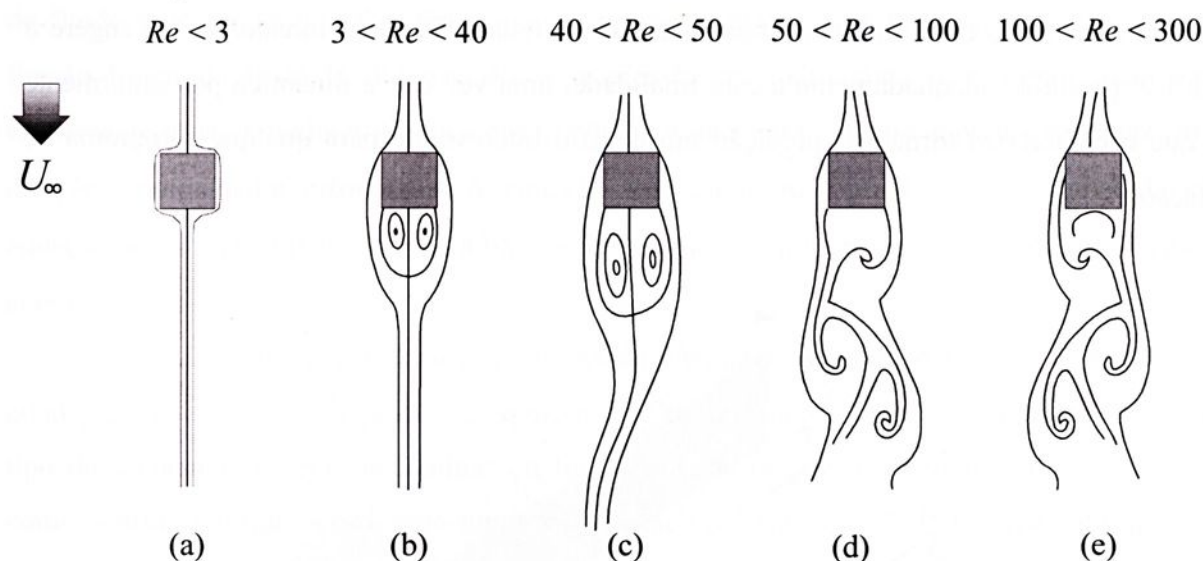


Figura 1.3 - Regimes de escoamento em torno de um cilindro de base quadrada.

Ilustração gerada a partir dos resultados experimentais de Mansur *et al.* (1996), Lindquist (2000) e Almeida *et al.* (2000a).

Conforme se pode observar na Figura 1.3 (a), para números de Reynolds muito baixos, as linhas de corrente contornam quase que perfeitamente o corpo, sem descolamento apreciável da camada limite. A medida em que o regime de escoamento torna-se mais severo, Figura 1.3 (b), nota-se o surgimento de duas bolhas de recirculação simétricas, que permanecem estacionárias bem atrás do cilindro. Com o aumento do número de Reynolds, Figura 1.3 (c), a região de recirculação torna-se instável, gerando uma esteira que oscila continuamente. Na sequência, Figura 1.3 (d), as camadas cisalhantes em contato com a corrente livre, dotada de maior quantidade de movimento, dobram-se sobre as camadas internas e o cilindro passa, então, a emitir vórtices que se desprendem alternadamente de ambos os lados do cilindro, num padrão conhecido como a esteira turbilhonar de von Kármán. Para valores ainda maiores do número de Reynolds, Figura 1.3 (e), o ponto de descolamento da camada limite no bordo de fuga do cilindro desloca-se em direção à montante. A partir daí, o escoamento a jusante do cilindro torna-se cada vez mais caótico, transicionando em direção ao regime turbulento.

Nos regimes onde se verifica a emissão alternada, surgem oscilações cíclicas nas forças de arrasto e de sustentação que atuam no corpo sólido, podendo induzir sobre ele severas vibrações. Este fenômeno, hoje já bem conhecido, deve ser levado em consideração no cálculo

estrutural de edifícios, pontes, torres, chaminés e trocadores de calor multitubulares, dentre vários outros exemplos. Nestas condições, a frequência de emissão de turbilhões na esteira, f , está relacionada com a velocidade de aproximação do escoamento, U_∞ , e com a dimensão característica do cilindro, B , através do número de Strouhal (St), definido por:

$$St_B = \frac{f B}{U_\infty} \quad (1.2)$$

Em certos casos, torna-se mais conveniente a definição do número de Strouhal com base na largura do cilindro. Nesta situação, o número de Strouhal é dado por:

$$St_A = \frac{f A}{U_\infty} \quad (1.3)$$

É importante ressaltar que os padrões do escoamento para um dado número de Reynolds são fortemente dependentes da razão de forma do cilindro:

$$\phi = \frac{A}{B} \quad (1.4)$$

que relaciona a largura A do obstáculo com sua altura B .

1.3. Objetivos e escopo do presente trabalho

Embora existam atualmente no mercado diversos programas comerciais de grande versatilidade e sofisticação, cuja capacidade para a solução de escoamentos complexos já se encontra absolutamente comprovada, a sua utilização para fins científicos cria, dependendo da natureza do trabalho que se deseja realizar, sérias dificuldades, pois, na maioria das vezes, é vedado ao usuário o acesso ao programa fonte. Além disso, tais programas são concebidos para resolver problemas dos mais variados tipos, o que os torna bastante caros e exigentes em termos computacionais. Por tudo isto, é sempre muito interessante que um laboratório de mecânica dos fluidos computacional disponha de seu próprio programa de simulação, onde novas modelagens ou métodos de solução para problemas específicos possam ser mais facilmente introduzidos e testados.

O presente trabalho foi concebido justamente dentro desta filosofia. Neste sentido, um programa computacional utilizando o Método dos Volumes Finitos foi inteiramente desenvolvido, permitindo a solução bidimensional transiente das equações de Navier-Stokes, escritas em coordenadas cartesianas. Para permitir a análise de escoamentos turbulentos e em regime de transição, empregando-se a metodologia de Simulação de Grandes Escalas, o modelo sub-malha de Smagorinsky foi implementado. Para a validação deste código, os resultados obtidos para o escoamento em torno de cilindros quadrados e retangulares, isolados ou agrupados em diferentes tipos de arranjos, foram comparados com dados da literatura, experimentos de laboratório e simulações numéricas realizadas com o código comercial Fluent®. Outras geometrias, resultantes da associação de corpos retangulares, são também exploradas, com o intuito de ilustrar as potencialidades do programa.

É importante ressaltar que, embora sejam realizadas interpretações físicas dos resultados obtidos, a ênfase maior do trabalho concentra-se na construção do programa de simulação e na realização dos testes de validação, que serviram para habilitá-lo como uma importante ferramenta de análise de escoamentos.

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. Simulação numérica de escoamentos

O Dr. Suhas Patankar, da Universidade de Minnessota, é, sem dúvida alguma, um dos pesquisadores mais conhecidos pela comunidade que atua na simulação numérica de escoamentos. Apesar de não ser o autor intelectual do Método dos Volumes Finitos, sua obra, Patankar (1980), intitulada *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, adquiriu notoriedade e tornou-se, durante quase duas décadas, leitura obrigatória para todo e qualquer pesquisador da área. Os procedimentos e a notação adotados pelo autor transformaram-se em referência na literatura da Mecânica dos Fluidos Computacional (CFD). Além de apresentar com muita propriedade o conceito de Volumes Finitos, o livro traz diferentes esquemas para o tratamento dos termos advectivos e algoritmos para o acoplamento pressão-velocidade, notadamente os métodos SIMPLE e similares, de sua autoria. A apresentação que se segue relaciona alguns importantes estudos envolvendo a simulação numérica do escoamento em torno de cilindros de base quadrada e retangular, realizada com o auxílio do Método dos Volumes Finitos.

Davis & Moore (1982) efetuaram simulações para números de Reynolds compreendidos entre 100 e 2800, juntamente com medições experimentais realizadas para Reynolds menores que 1000. Cilindros de várias razões de forma foram ensaiados, alterando-se o ângulo de incidência e o perfil de velocidades na entrada do domínio. Para avaliar qualitativamente o campo de escoamento, os autores empregaram um escalar passivo⁽¹⁾ como agente de visualização, imitando a conhecida técnica experimental *dye wash*, empregada classicamente em meio líquido. Uma importante característica deste trabalho é o esquema de interpolação multidimensional de alta ordem, baseado no esquema unidimensional QUICKEST, proposto por

⁽¹⁾ Entende-se por escalar passivo aquele que é transportado pelo escoamento, sem produzir nenhuma alteração sobre o campo de velocidades.



Leonard (1979). Os esquemas de interpolação de alta ordem – terceira ordem, no caso do QUICKEST – podem resultar em menor difusão numérica, um fenômeno que tende a suavizar os gradientes de velocidade na camada cisalhante, inibindo o surgimento dos vórtices e retardando a transição do escoamento à turbulência.

Pouco tempo depois, Davis & Moore (1984) publicaram outro importante trabalho, com cilindros posicionados dentro de um canal limitado por paredes sólidas, situação frequentemente encontrada na prática da engenharia. Neste caso, também, foram estudados vários perfis de velocidade na entrada do domínio de cálculo e diferentes razões de forma dos cilindros, além de diversas razões de bloqueio sólido. Neste estudo, impuseram, como condição de contorno na saída do domínio, um perfil de velocidades parabólico completamente desenvolvido, em substituição à condição de derivada nula, mais comumente empregada. Esta situação, embora mais fácil de ser implementada, só é compatível com a física de um escoamento real se o regime for laminar e plenamente estabelecido, exigindo que a saída do domínio esteja localizada a uma distância suficientemente grande do obstáculo sólido.

Van Doormaal & Raithby (1984) detalham alguns passos dos procedimentos numéricos apresentados por Patankar (1980) e, em alguns casos, propõem artifícios simples e interessantes para otimizá-los. Entre eles, merece destaque especial a interpretação física do que seria sub-relaxar uma variável e como avaliar as implicações do valor atribuído ao coeficiente de relaxação dos resultados obtidos, levando-se em consideração o método de discretização explícito ou implícito da equação da quantidade de movimento. O trabalho ainda contém importantes observações a respeito das condições de contorno para as velocidades e as pressões prescritas na fronteira, além de sugerir alterações no Algoritmo de Thomas (TDMA), permitindo, ao mesmo tempo, acelerar a convergência da solução e melhorar a consistência dos resultados.

Okajima (1990), ao estudar numericamente o escoamento em torno de cilindros de base retangular, identificou a existência de uma faixa de Reynolds crítico, onde o padrão de escoamento muda abruptamente, produzindo uma variação drástica nas curvas de Strouhal em função de Reynolds. Segundo o autor, para números de Reynolds abaixo dessa faixa crítica, pode-se observar, na maioria dos casos, que a camada cisalhante que se descola no bordo de ataque, volta a se recolocar sobre as faces laterais do cilindro. Com o aumento do número de Reynolds para além de seu valor crítico, o efeito de recolamento não é mais percebido em cilindros com razão de forma entre 1,5 e 2,5. Esta alteração na dinâmica do escoamento também provoca significativa modificação nas curvas de Strouhal.

Logo após a introdução do esquema de interpolação quadrática QUICK, originalmente proposto por Leonard (1979), começaram a surgir trabalhos realizando testes sobre escoamentos de complexidade crescente, onde problemas de oscilação numérica ocorrem com maior intensidade.

Numa tentativa de paliar os inconvenientes característicos do esquema QUICK de Leonard, Hayase *et al.* (1992) propuseram o chamado esquema QUICK Consistente, concebido para assegurar maior estabilidade numérica e resultados físicos mais realistas. A proposta dos autores consistia em transformar a interpolação quadrática, com os dois termos à montante e um termo à jusante da face analisada, em duas parcelas distintas, a primeira composta por um termo Upwind e a outra a ser acrescida no termo-fonte da equação de quantidade de movimento.

Com base na teoria da estabilidade linear, Kelkar & Patankar (1992) buscaram identificar os valores do número de Reynolds para os quais o escoamento ao redor de um cilindro retangular torna-se instável. Empregando um arranjo de malhas desencontradas, os autores utilizaram o algoritmo SIMPLER para o acoplamento pressão-velocidade e o esquema Power-Law para o tratamento dos termos advectivos. Além disso, diversas técnicas de marcha no tempo foram testadas, objetivando a melhor forma de se prever o início das perturbações na camada de cisalhamento. O esquema de discretização totalmente implícito foi escolhido para melhor representar o comportamento transiente do fenômeno.

Um estudo mais detalhado sobre os efeitos da razão de forma de cilindros retangulares na emissão de vórtices foi realizado por Ohya *et al.* (1992). Nesse trabalho, os autores mostraram que o mecanismo de emissão de vórtices está intimamente ligado ao descolamento da camada de cisalhamento no bordo de ataque do obstáculo. As estruturas turbilhonares aí geradas, conhecidas como ILEV (*Impinging-Leading-Edge-Vortices*), quando se deslocam sobre cilindros com razão de forma maior que 3, sofrem sucessivos descolamentos e recolamentos nas laterais do corpo, influenciando a emissão de vórtices no bordo de fuga, conhecidos como TEVS (*Trailing-Edge-Vortex-Shedding*). A interação entre estes diferentes mecanismos determina o nível de organização da esteira turbilhonar de von Kármán.

Okajima *et al.* (1992) estudaram a influência da presença de arestas vivas no bordo de ataque de cilindros retangulares sobre a dinâmica do escoamento, para várias razões de forma. Para o caso de cilindros com bordos de ataque arredondados, os autores empregaram uma malha construída em coordenadas curvilíneas. O método SIMPLE foi empregado neste caso, associado ao esquema QUICK para o tratamento dos termos advectivos. A discretização no tempo foi

efetuada implicitamente pelo método de Crank-Nicholson e a equação de Poisson para pressão foi resolvida pelo método SOR (*Successive Over Relaxation*).

Um estudo bastante completo sobre esquemas de alta ordem para a solução de problemas em Mecânica dos Fluidos pode ser encontrado no trabalho de Marchi (1993). Neste artigo, o autor testa esquemas de interpolação de diferentes ordens, analisando as causas das oscilações numéricas características dos esquemas de ordens mais elevadas, que se contrapõe ao problema da falsa difusão, encontrada quando se utilizam esquemas de primeira ordem. O autor, ainda, apresenta o esquema alternativo ADS (*Adaptable Difference Scheme*) para o tratamento dos termos advectivos, que procura aproveitar as principais qualidades de outros esquemas. Além disso, o autor propõe o procedimento CEL (Coeficientes Explicitamente Limitados), que, ao ser incorporado em esquemas de interpolação de alta ordem, limitam os fluxos das quantidades transportadas, diminuindo as oscilações numéricas. Porém, a maior contribuição deste trabalho é contestar, com argumentos bastante convincentes, o dogma corrente de que os coeficientes das equações discretizadas devem sempre apresentar valores positivos.

Sohankar *et al.* (1995) estudaram o início das instabilidades em escoamentos ao redor de cilindros quadrados. Neste trabalho, os autores testaram, também, diversas configurações de tamanho de domínio, razão de bloqueio e compressão de malhas. Mesmo empregando o esquema QUICK, com malhas co-localizadas e espaçamento irregular, os resultados obtidos para o início das instabilidades na esteira apresentou boa concordância com os valores obtidos por Kelkar & Patankar (1992).

Um estudo numérico e experimental sobre a emissão de vórtices a jusante de cilindros retangulares foi realizada por Nakamura *et al.* (1996). Neste trabalho, foram analisados experimentalmente escoamentos com número de Reynolds variando entre 200 e 1000 sobre cilindros com razão de forma entre 3 e 16 e foram simulados numericamente escoamentos sobre cilindros com razão de forma entre 3 e 10. Embora os autores não tenham detalhado o procedimento numérico empregado nos ensaios, a concordância entre os resultados experimentais e numéricos é muito boa.

Uma extensão do esquema QUICK Consistente de Hayase (1992) para o caso bidimensional foi apresentada por Rahman *et al.* (1996). Apesar do trabalho estar focado em coordenadas co-localizadas, os procedimentos propostos podem ser implementados para utilização em malhas desencontradas com excelentes resultados.

Em um trabalho recente, Almeida (2001), realizou diversas simulações de escoamentos laminares e turbulentos em torno de cilindros de seção quadrada e retangular, empregando a

metodologia de Simulação de Grandes Escalas (LES), implementada em um código comercial, o programa Fluent®. Os resultados obtidos foram comparados com dados experimentais de vários autores, apresentando ótima concordância.

2.2 – Simulação numérica da turbulência

As primeiras tentativas de se modelar as tensões turbulentas procuraram imitar o processo de difusão molecular. Foi com base nesta teoria que Boussinesq (1877) introduziu o conceito de viscosidade turbulenta.

Prandtl (1925) apresentou a idéia do comprimento de mistura, como uma receita alternativa para se calcular a viscosidade turbulenta. A hipótese de comprimento de mistura, intimamente relacionada com o conceito de viscosidade turbulenta, foi empregada em praticamente todas as pesquisas envolvendo a modelagem da turbulência nos 20 anos que se seguiram. O modelo de comprimento de mistura é conhecido como modelo algébrico ou modelo a zero equação.

Para melhorar a capacidade de prever as propriedades dos escoamentos turbulentos e desenvolver uma descrição matemática mais realista das tensões turbulentas, Prandtl (1945) postulou um modelo no qual a viscosidade turbulenta depende da energia cinética das flutuações turbulentas, k . Dessa forma, surgiu o conceito de modelo a uma equação.

Enquanto existir uma viscosidade turbulenta que dependa do histórico do escoamento, a necessidade de se especificar um comprimento de escala turbulento permanece. Uma vez que o comprimento de escala pode ser associado ao tamanho de turbilhão característico, e uma vez que o comprimento de escala é diferente para cada escoamento, os modelos de turbulência que não fornecem o comprimento de escala devem ser considerados incompletos. Isto significa que se deve saber algo a respeito do fluido, além das condições iniciais e de contorno, para se obter a solução do problema. Tais modelos não deixam de ter seu mérito e, de fato, têm se mostrado de grande valia em inúmeras aplicações da engenharia.

Um modelo completo de turbulência não deveria exigir, *a priori*, nenhum conhecimento adicional das propriedades intrínsecas da turbulência, para a obtenção da solução. Esta definição, por si só, não garante nem a precisão, nem a generalidade do modelo. Kolmogorov (1942) introduziu o primeiro modelo completo de turbulência. Além de ter desenvolvido uma equação



para k , o autor introduziu um segundo parâmetro, ω , denominando-o taxa de energia por unidade de volume e tempo. O inverso de ω serve com uma escala turbulenta de tempo, e $k^{\frac{1}{2}}/\omega$ é fisicamente análogo ao comprimento de mistura de Prandtl. Neste modelo a duas equações, conhecido como k - ω , ω satisfaz uma equação diferencial similar àquela empregada para k .

O meteorologista Smagorinsky (1963) foi o primeiro a propor um modelo para as tensões de sub-malha, dando origem a uma nova metodologia para a solução de escoamentos turbulentos, conhecida como Simulação de Grandes Escalas (LES). As primeiras aplicações para problemas em engenharia se iniciaram com Deardorff (1973).

Rodi (1998) efetuou uma análise comparativa dos resultados obtidos por diversos autores para o escoamento em torno de cilindros circulares, quadrados e retangulares, empregando a metodologia de Simulação de Grandes Escalas, e as Equações Médias de Reynolds (RANS). Segundo o autor, apesar de seu custo computacional ser razoavelmente maior, a metodologia de Simulação de Grandes Escalas permite a obtenção de resultados bem mais precisos que as simulações obtidas através da modelagem clássica da turbulência. Ainda segundo Rodi, à medida em que os computadores forem se tornando mais velozes e com mais capacidade de memória, a LES deverá se fixar como uma ferramenta poderosa na análise de escoamentos no interior de geometrias complexas, tal como ocorre na maior parte dos problemas práticos de engenharia.

CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1. Equações governantes

O escoamento bidimensional, incompressível, isotérmico e com efeitos gravitacionais desprezíveis, em torno de geometrias cartesianas pode ser bem representado pelas equações do movimento, escritas em notação indicial como:

– Navier-Stokes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + Sc_i, \quad \text{com } i = 1, 2 \text{ e } j = 1, 2 \quad (3.1)$$

– Conservação da massa:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0, \quad \text{com } j = 1, 2 \quad (3.2)$$

onde ρ representa a densidade do fluido, μ a viscosidade absoluta, u_i as componentes do vetor velocidade e p a pressão.

3.2. O método de solução

Embora formem um sistema fechado, a forte não linearidade que caracteriza os termos advectivos da equação de Navier-Stokes impede a solução analítica do problema, exceto para alguns poucos casos particulares, onde simplificações importantes possam ser introduzidas nas equações governantes. Assim sendo, a solução de escoamentos no interior de regiões arbitrárias, e com condições de contorno gerais, só pode ser encontrada com o auxílio de métodos numéricos

adequados.

De forma geral, a maioria dos métodos numéricos transforma a região contínua Ω onde ocorre o escoamento, num domínio de cálculo discreto, constituído de malhas elementares, como ilustrado na Figura 3.1. Em seguida, através de transformações adequadas, as equações governantes são discretizadas no tempo e no espaço, para fornecer uma solução aproximada ao problema.

Dentre as diversas técnicas de discretização espacial existentes, o Método dos Volumes Finitos, utilizado no âmbito deste trabalho, destaca-se como um dos mais empregados na simulação numérica de problemas de dinâmica dos fluidos e transferência de calor.

A Figura 3.2 ilustra, em detalhes, uma pequena região do domínio numérico, contendo volumes elementares de dimensões Δx e Δy , sobre os quais será realizada a discretização das equações do movimento. O volume principal está representado pela letra P , tendo como vizinhos os volumes E (leste), W (oeste), N (norte) e S (sul). Este padrão de representação é clássico na metodologia dos Volumes Finitos e será seguido no presente texto.

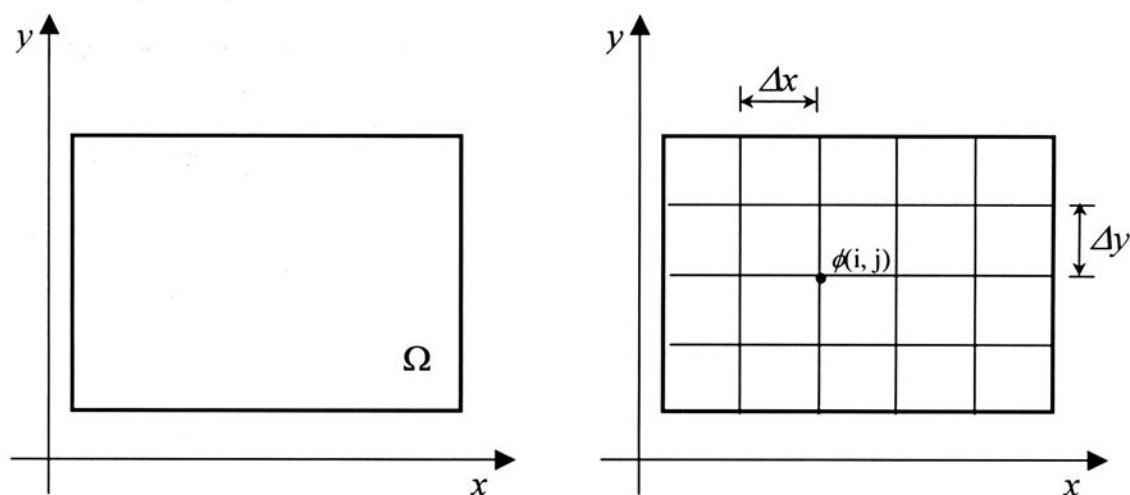


Figura 3.1 – Domínio contínuo e domínio discretizado.

As Equações (3.1) e (3.2) estão escritas na forma conservativa. Assim, as discretizações efetuadas representam, na ausência de fontes ou sorvedouros, a conservação da propriedade estudada, seja ela a massa ou a quantidade de movimento, sobre uma determinada região.

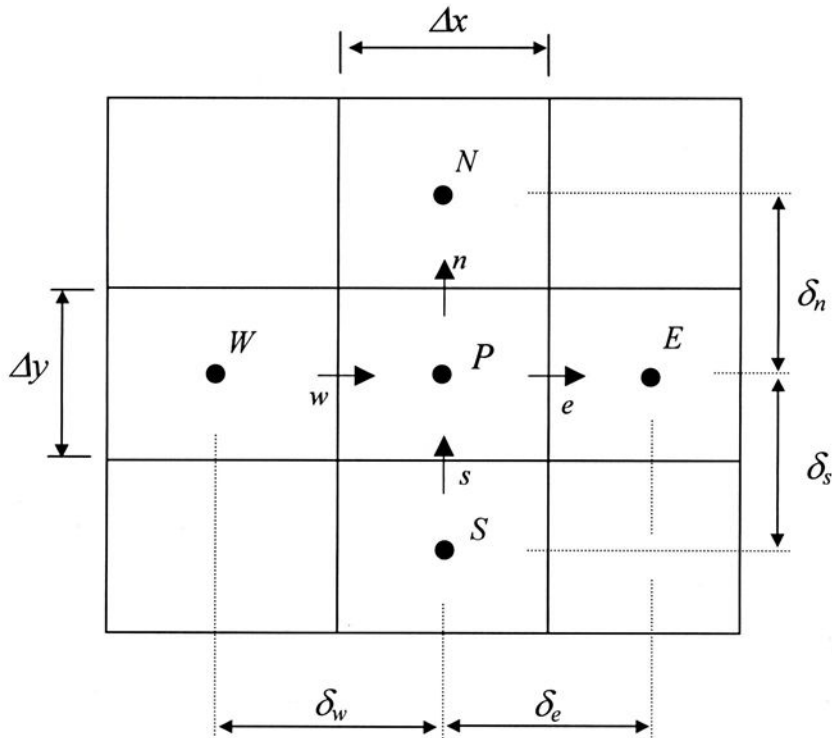


Figura 3.2 – Malha computacional bidimensional.

Integrando-se as equações diferenciais, no volume elementar P , sobre as suas faces e e w na direção de x , nas faces s e n , na direção y e do instante t até o instante $t+\Delta t$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \phi) dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} (\rho v \phi) dx dy dt = \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial x} \Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e \left[\frac{\partial}{\partial y} \Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^e \int_w^e S^\phi dx dy dt \\
 \Rightarrow & \int_s^e \int_w^e (\rho \phi - \rho^0 \phi^0) dx dy + \int_t^{t+\Delta t} (\rho u \phi|_e - \rho u \phi|_w) \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} (\rho v \phi|_n - \rho v \phi|_s) \Delta x dt = \\
 & \int_t^{t+\Delta t} \left[\Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_e - \Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_w \right] \Delta y dt + \int_t^{t+\Delta t} \left[\Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_n - \Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_s \right] \Delta x dt \Delta t \\
 & + S^\phi \Delta x \Delta y
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

A partir deste ponto, torna-se necessário definir a função de interpolação no tempo, que descreverá o comportamento da variável ϕ , que pode ser tanto uma grandeza escalar quanto

vetorial, durante o intervalo de tempo t até $t + \Delta t$. Uma função algébrica possível para traduzir este comportamento pode ser escrita como:

$$\phi^\theta = \theta \phi + (1 - \theta) \phi^0 \quad (3.4)$$

Dependendo dos valores de θ adotados, pode-se ter uma formulação explícita ($\theta = 0$), implícita ($\theta = 0.5$, também conhecida como esquema de Crank-Nicholson) e totalmente implícita ($\theta = 1$). A Figura 3.3, extraída de Maliska (1995), ilustra o comportamento de θ durante o intervalo de tempo Δt . Pode-se notar que, na formulação explícita, o valor da variável não se altera até que se atinja o instante $t + \Delta t$. Com este comportamento, não há a necessidade de se calcular simultaneamente os termos vizinhos, pois apenas os valores do instante anterior são relevantes. Dessa forma, o valor da variável atualizada pode ser obtido por uma expressão algébrica simples, sem que seja necessário resolver um sistema linear, deixando o processo de cálculo extremamente mais rápido. Porém, essa rapidez é aparente, pois o passo de tempo é limitado por um critério de estabilidade e, dependendo do problema, este critério pode retardar o avanço da solução na direção do regime permanente.

Por outro lado, ao adotar uma formulação implícita ou totalmente implícita, considera-se que os valores das variáveis em todo o domínio estejam no mesmo instante de cálculo e sejam, igualmente, desconhecidas. A escolha deste tipo de discretização temporal leva invariavelmente a um sistema linear de equações, que deve ser resolvido para fornecer a distribuição da variável no domínio de cálculo.

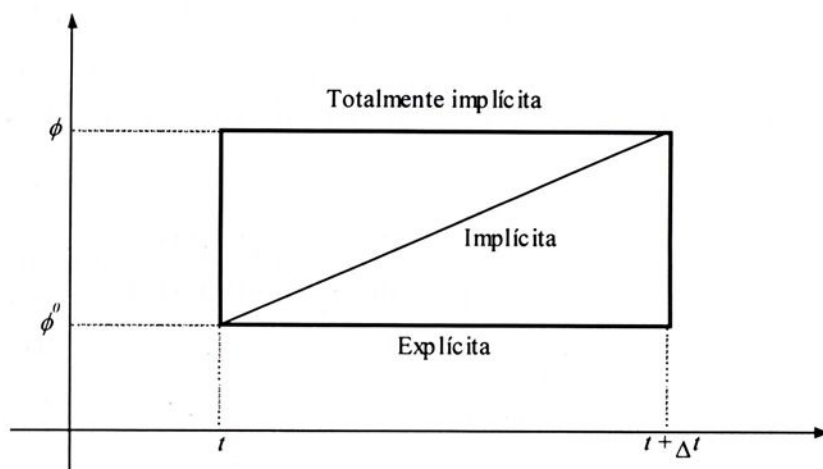


Figura 3.3 - Comportamento da função interpolação dada pela Equação (3.4).

Cada uma das funções de interpolação possui suas vantagens e desvantagens, que podem ser resumidas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1. Vantagens e desvantagens das funções de interpolação.

	Explícita ($\theta = 0$)	Totalmente Implícita ($\theta = 1$)
Passo de tempo	Limitado por critérios de estabilidade.	Suporta intervalos de tempos maiores.
Cálculo da variável	Expressão algébrica.	Solução de um sistema linear.
Atualização das variáveis	Uma variável é calculada de cada vez.	Uma vez tendo resolvido o sistema linear, todas as variáveis estão atualizadas.

Assim, a Equação (3.3) pode ser integrada no tempo, deixando o coeficiente θ como um parâmetro a ser escolhido:

$$\begin{aligned}
 &(\rho \phi - \rho^0 \phi^0) \Delta x \Delta y + \left(\rho u \phi \Big|_e^\theta - \rho u \phi \Big|_w^\theta \right) \Delta y \Delta t + \left(\rho v \phi \Big|_n^\theta - \rho v \phi \Big|_s^\theta \right) \Delta x \Delta t = \\
 &\left[\Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_e^\theta - \Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_w^\theta \right] \Delta y \Delta t + \left[\Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_n^\theta - \Gamma^\phi \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_s^\theta \right] \Delta x \Delta t + S^\phi \Delta x \Delta y \Delta t \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Na formulação explícita, o passo de tempo empregado para avançar a solução é limitado pelo critério de estabilidade, que leva em conta, entre outros fatores, o tamanho da malha. Quanto mais refinada a malhas menor o passo de tempo exigido para que o critério de estabilidade – via de regra, calculado automaticamente pelo próprio programa de simulação – seja satisfeito. No presente trabalho, malhas não-uniformes foram empregadas na maioria dos cálculos realizados. Para a captura de detalhes refinados do escoamento, procurou-se, na construção destas malhas, aumentar a densidade da grade nas regiões do domínio de cálculo onde se verificam os maiores gradientes. Nestas circunstâncias, uma formulação explícita pode levar à utilização de passos de tempo demasiadamente pequenos, aumentando significativamente o tempo para a obtenção de resultados. Em vista disso, uma formulação totalmente implícita foi adotada para todas as variáveis de interesse. Substituindo-se, então, o valor de $\theta = 1$ na Equação (3.5), tem-se:

$$\frac{M_p \phi_p}{\Delta t} - \frac{M_p^0 \phi_p^0}{\Delta t} + \dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w + \dot{M}_n \phi_n - \dot{M}_s \phi_s = D_e (\phi_E - \phi_p) - D_w (\phi_p - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_p) - D_s (\phi_p - \phi_S) + Sc \nabla^2 \phi_p \quad (3.6)$$

onde:

$$\begin{aligned} M_p &= \rho \Delta x \Delta y & M_p^0 &= \rho^0 \Delta x \Delta y \\ \dot{M}_e &= \rho_e u_e \Delta y & D_e &= \frac{\Gamma_e^\phi \Delta y}{\delta_e} & \dot{M}_w &= \rho_w u_w \Delta y & D_w &= \frac{\Gamma_w^\phi \Delta y}{\delta_w} \\ \dot{M}_n &= \rho_n v_n \Delta x & D_n &= \frac{\Gamma_n^\phi \Delta x}{\delta_n} & \dot{M}_s &= \rho_s v_s \Delta x & D_s &= \frac{\Gamma_s^\phi \Delta x}{\delta_s} \end{aligned}$$

A Equação (3.6) requer que o valor da propriedade ϕ seja avaliado nas faces do VC, ou seja, é necessária a estimativa de ϕ_e , ϕ_w , ϕ_n e ϕ_s . A escolha de um procedimento adequado para transferir o valor da propriedade no centro do volume de controle para suas faces é de suma importância, pois dele depende a estabilidade, a convergência e a consistência dos resultados.

3.3. Tratamento dos termos advectivos

O tratamento dos termos advectivos constitui um dos procedimentos que mais influenciam na solução das equações de Navier-Stokes, principalmente a altos números de Reynolds. Funções de interpolação são empregadas para estimar a magnitude das variáveis e de suas derivadas nas faces do volume de controle, a partir de seus respectivos valores nos pontos nodais. Se a malha computacional for suficientemente refinada, qualquer função de interpolação convenientemente definida tende a produzir resultados muito semelhantes entre si.

As funções de interpolação mais comuns estão classificadas em funções de primeira, segunda ou terceira ordem. A ilustração da Figura 3.4 será empregada como auxiliar na compreensão das diversas funções de interpolação. Como uma forma de se generalizar o procedimento para todas as variáveis, adotar-se-á uma variável genérica ϕ , considerando todas as velocidades previamente conhecidas.

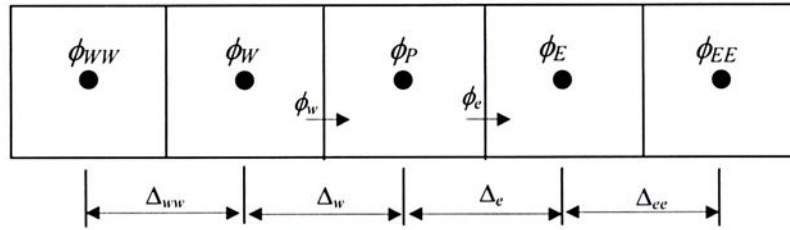


Figura 3.4 – Estêncil da aproximação numérica.

Dessa forma, a equação de advecção-difusão unidimensional:

$$\frac{\partial(\rho \phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + S^\phi \quad (3.7)$$

será integrada sobre o volume de controle que contém o P , gerando a expressão:

$$\frac{\rho \phi_P}{\Delta t} + \frac{\rho u_e \phi_e}{\Delta x_e} - \frac{\rho u_w \phi_w}{\Delta x_w} = \frac{\Gamma_e^\phi}{\Delta x_e} \phi_E - \frac{\Gamma_e^\phi}{\Delta x_e} \phi_P - \frac{\Gamma_w^\phi}{\Delta x_w} \phi_P + \frac{\Gamma_w^\phi}{\Delta x_w} \phi_W + \frac{\rho \phi_P^0}{\Delta t} + S^\phi \quad (3.8)$$

A forma como as variáveis serão avaliadas nas faces do volume de controle, ou seja, quantos e quais os pontos nodais que serão considerados nos cálculos, é definida pelo tipo de esquema advectivo adotado. No presente trabalho, cinco esquemas bastante populares foram estudados e implementados no programa aqui desenvolvido. Suas principais características são apresentadas a seguir.

3.3.1. Esquemas de transporte

a) Upwind

A forma mais simples de estimar o valor da propriedade ϕ nas faces de um volume de controle é dada pelo chamado esquema Upwind. Como exemplo, para calcular o valor da propriedade ϕ na face leste (ϕ_e), em um escoamento que, na Figura 3.4, se desloca da esquerda para a direita, o esquema Upwind atribui o valor da variável no ponto nodal imediatamente à montante da face e , ou seja, ϕ_P . Da mesma forma, o valor já conhecido da variável no ponto nodal W (ϕ_W) é empregado como melhor estimativa para extrapolar para a face w . Em outras palavras, o esquema Upwind realiza uma extrapolação da propriedade ϕ à jusante de um ponto nodal qualquer, com base no valor da propriedade no ponto nodal que se encontra imediatamente a montante da face. Tem-se, então, para as faces do volume de controle da Figura 3.4:

$$\phi_w = \phi_W \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad \phi_e = \phi_P \qquad \qquad \qquad (3.9)$$

que substituído na Equação (3.8), resulta:

$$\phi_P \left(\frac{\rho}{\Delta t} + \frac{\rho_e u_e}{\Delta x_e} + \frac{\Gamma_w^\phi}{\Delta x_w} + \frac{\Gamma_e^\phi}{\Delta x_e} \right) = \phi_E \left(\frac{\Gamma_e^\phi}{\Delta x_e} \right) + \phi_W \left(\frac{\rho_w u_w}{\Delta x_w} + \frac{\Gamma_w^\phi}{\Delta x_w} \right) + B \qquad (3.10)$$

Pode-se perceber, agora, que, para uma direção de escoamento da esquerda para a direita, não há mais nenhuma restrição quanto ao valor do número de Péclet na malha. Por outro lado, este tipo de discretização é de $O(\Delta x)$, podendo introduzir, o que freqüentemente ocorre, uma forte difusão numérica na solução do problema. Por outro lado, pode-se dizer que, para escoamentos a altos Pe , essa discretização tende a fornecer a solução exata do problema.

A Tabela 3.2 apresenta, de forma resumida, os valores das variáveis nas faces do volume de controle centrado em P representado na Figura 3.4, quando é empregada a interpolação Upwind.

Tabela 3.2 – Valores da variável ϕ nas faces do VC para o esquema Upwind.

Sentido do escoamento	Valor nas faces	
	ϕ_e	ϕ_w
Positivo	ϕ_P	ϕ_W
Negativo	ϕ_W	ϕ_P

b) Diferenças Centrais

O esquema de diferenças centrais (*Central Difference Scheme* - CDS), de $O(\Delta x^2)$, surgiu como uma das primeiras tentativas de se encontrar o valor da variável nas faces do volume de controle. Este método possui boa estabilidade numérica e representa, com bastante propriedade, os efeitos difusivos, por serem eles de natureza elíptica. Por intermédio deste esquema, tem-se:

$$\phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \qquad \qquad \qquad e \qquad \qquad \qquad \phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \qquad \qquad \qquad (3.11)$$

que, substituídos na Equação (3.8), produz:

$$\phi_P \left(\frac{\rho}{\Delta t} + \frac{\rho_e u_e}{\Delta x_e} - \frac{\rho_w u_w}{2 \Delta x_w} + \frac{\Gamma_e^\phi}{\Delta x_e} + \frac{\Gamma_w^\phi}{\Delta x_w} \right) = \phi_E \left(-\frac{\rho_e u_e}{2 \Delta x_e} + \frac{\Gamma_e^\phi}{\Delta x_e} \right) + \phi_W \left(\frac{\rho_w u_w}{2 \Delta x_w} + \frac{\Gamma_w^\phi}{\Delta x_w} \right) + B \quad (3.12)$$

Empregando-se uma aproximação em diferenças centrais para os termos de derivada primeira e derivada segunda na Equação (3.7) e considerando-se os coeficientes de difusão Γ e a largura dos volumes elementares constantes em todo o domínio, tem-se:

$$\phi_P \left(\frac{\rho}{\Delta t} + \frac{2 \Gamma^\phi}{\Delta x} \right) = \phi_E \left(-\frac{\rho u}{2 \Delta x} + \frac{\Gamma^\phi}{\Delta x^2} \right) + \phi_W \left(\frac{\rho u}{2 \Delta x} + \frac{\Gamma^\phi}{\Delta x^2} \right) + B \quad (3.13)$$

Adotando-se a velocidade u positiva, ou seja, o escoamento da esquerda para a direita, como forma de garantir a positividade do coeficiente A_e de ϕ_E , tem-se:

$$-\frac{\rho u}{2 \Delta x} + \frac{\Gamma^\phi}{\Delta x^2} \geq 0 \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho u \Delta x}{\Gamma^\phi} \leq 2 \quad (3.15)$$

O lado esquerdo da Equação (3.15) representa, para o transporte de quantidade de movimento, o conhecido número de Reynolds e, para problemas de convecção/condução de calor, o número de Péclet. Mesmo com a estabilidade maior do esquema CDS, é possível inferir que, para valores de $Pe \geq 2$, pode-se ter problemas de estabilidade no cálculo.

A título de ilustração, o gráfico da Figura 3.5 mostra o comportamento da Equação (3.13), para diferentes valores do número de Péclet, comparados com a função degrau, que representaria um escoamento isento de difusão. A função degrau, neste caso, foi definida de maneira que $\phi = 10$ para $0 \leq x \leq 0,5$ e $\phi = -10$ para $0,5 < x \leq 1$. É possível observar que, para $Pe = 2$, o valor da variável exibe oscilações numéricas, distanciando-se do perfil em degrau da propriedade ϕ , representado pela linha cheia. Para números de Pe maiores que 2, a oscilação tornam-se ainda mais severas, indicando uma degeneração importante dos resultados.

Se, por um lado, o esquema Upwind representa bem os termos advectivos em escoamentos a altos números de Péclet, na situação inversa, a baixos números de Peclet, onde os termos difusivos são dominantes, os esquemas de diferenças centrais são, em geral, mais

precisos. A partir desta constatação, surgiram na literatura diversos esquemas alternativos, procurando explorar as características positivas particulares de cada um destes esquemas. Contudo, nem um destes dois esquemas é capaz de fornecer bons resultados nas proximidades do ponto $Pe = 2$, pois, nesta região, a solução da Equação (3.13) aproxima-se de uma função exponencial.

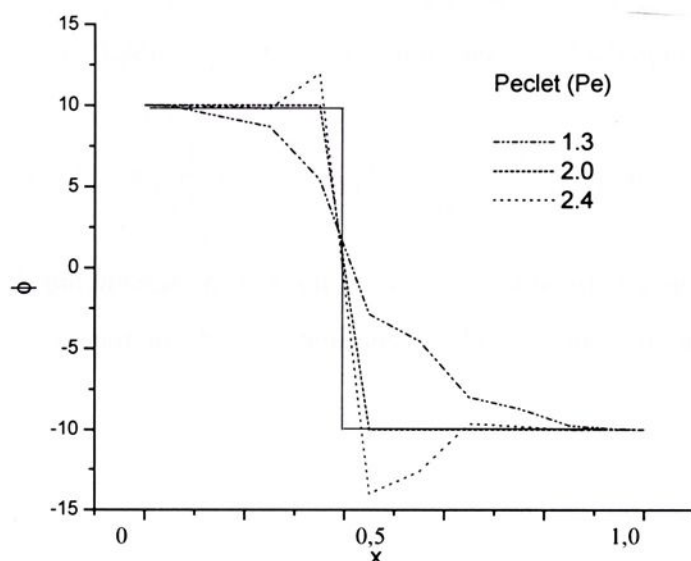


Figura 3.5 – Comportamento da variável ϕ em função do número de Péclet.

c) Power-Law

A função de interpolação exata para uma equação de convecção-difusão unidimensional em regime permanente, ou seja, a Equação (3.7) sem o termo transiente, pode ser escrita como uma função do número de Péclet:

$$\phi_e = \phi_P + (\phi_E - \phi_P) \frac{e^{\frac{Pe}{2}} - 1}{e^{Pe} - 1} \quad (3.16)$$

Essa função de interpolação dá origem ao esquema exponencial e fornece a interpolação exata para qualquer tamanho da malha. Porém, como se não bastassem os custos computacionais elevados para o cálculo das exponenciais em cada volume elementar, os problemas reais raramente são unidimensionais e a extensão do esquema exponencial para duas ou mais dimensões é impraticável, inviabilizando o seu emprego.

Alguns métodos procuram interpolar o valor da variável, buscando uma precisão equivalente à fornecida pela Equação (3.16), porém, limitando os esforços computacionais

requeridos. A idéia central é seguir a equação exponencial, imitando seu comportamento por faixas do número de Péclet. Esses esquemas são conhecidos como esquemas exponenciais e o seu representante mais famoso é o esquema Power-Law (Patankar, 1980).

Em rápidas palavras, o esquema Power-Law procura simular a Equação (3.16) para regiões onde $|Péclet| < 2$ e anular os efeitos difusivos para valores maiores do número de Péclet, atribuindo ao esquema um comportamento puramente Upwind.

Em suma, o coeficiente A_E pode ser avaliado da seguinte forma:

$$\text{Para } P_e < -10, \quad \frac{A_E}{D_e} = -P_e \quad (3.17a)$$

$$\text{Para } -10 < P_e < 0, \quad \frac{A_E}{D_e} = (1 + 0.1 P_e)^5 - P_e \quad (3.17b)$$

$$\text{Para } 0 < P_e < 10, \quad \frac{A_E}{D_e} = (1 - 0.1 P_e)^5 \quad (3.17c)$$

$$\text{Para } P_e > 10, \quad \frac{A_E}{D_e} = 0 \quad (3.17d)$$

Uma forma compacta de se escrever o conjunto de Equações (3.17) é:

$$A_E = D_e \left\| 0, \left(1 - \frac{0.1 |P_e|}{D_e} \right) \right\| + \left\| 0, -F_e \right\| \quad (3.18)$$

onde o símbolo $\| \|$ significa que apenas o maior dos dois valores é considerado.

d) Upwind de Segunda Ordem

Os esquemas de interpolação descritos até aqui utilizam apenas as informações contidas nos volumes de controle adjacentes aos pontos nodais de interesse. Esquemas de maior ordem necessitam, por sua vez, de um estêncil maior, ou seja, de mais pontos nodais, para que se possa aumentar a ordem da precisão. O esquema Upwind de Segunda Ordem (*Second Order Upwind - SOU*), apesar de apresentar, em alguns casos, maior oscilação numérica que o Upwind de primeira ordem, introduz menor difusão numérica.

Para o cálculo dos valores da propriedade na face leste do volume de controle, as expressões envolvidas no cálculo de uma propriedade ϕ para velocidades positivas, que na Figura 3.4 ocorrem da esquerda para a direita, e negativas, no sentido inverso, pode ser resumida da seguinte maneira:

$$\phi_e = \begin{cases} \frac{3}{2}\phi_P - \frac{1}{2}\phi_W, & \text{para velocidades} \geq 0 \\ \frac{3}{2}\phi_E - \frac{1}{2}\phi_{EE}, & \text{para velocidades} < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

Os valores para o coeficiente A_E são:

$$A_E = \begin{cases} D_e, & \text{para velocidades} \geq 0 \\ -\frac{3}{2}F_e - \frac{1}{2}F_w + D_e, & \text{para velocidades} < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

e) QUICK

O esquema QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*), Leonard (1979), constitui um esquema de terceira ordem, que emprega a equação de uma parábola, ajustada sobre o valor assumido pela variável ϕ em dois pontos à montante e um ponto à jusante do volume de controle centrado em P , para interpolar o valor na sua face.

A principal qualidade do esquema QUICK é o fato de ser $O(\Delta x^2)$. Porém, assim como todos os outros esquemas anteriormente apresentados, ele também não é monotônico, ou seja, na ausência de termo-fonte, não se pode garantir que estas interpolações não desenvolvam oscilações numéricas. Segundo Versteeg & Malalasekera (1995), tais oscilações começam a surgir quando $P_e > 8/3$, portanto, ligeiramente superior a 2, valor encontrado nos esquemas de diferenças centrais.

Para exemplificar a estimativa da variável ϕ na face leste do volume de controle, as expressões do esquema QUICK podem ser resumidas da seguinte forma:

$$\phi_e = \begin{cases} \frac{3}{8}\phi_E + \frac{3}{4}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_W, & \text{para velocidades} \geq 0 \\ \frac{3}{4}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE}, & \text{para velocidades} < 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

O termo A_E assume, então, os seguintes valores

$$A_E = \begin{cases} -\frac{3}{8} F_e + D_e, & \text{para velocidades} \geq 0 \\ \frac{3}{4} F_e + \frac{1}{8} F_w + D_e, & \text{para velocidades} < 0 \end{cases} \quad (3.22)$$

No Apêndice A encontram-se demonstrados os esquemas SOU e QUICK, aplicados para a malhas não-uniformes, que podem ser utilizadas no programa desenvolvido no âmbito do presente trabalho.

3.3.2. Difusão e oscilação numéricas

Como visto anteriormente, a escolha do esquema de interpolação empregado para representar os termos advectivos constitui uma tarefa que pode influenciar diretamente a estabilidade e a convergência da solução. Esquemas advectivos incapazes de lidar com coeficientes negativos, ou mesmo que amplifiquem as oscilações inerentes a alguns procedimentos numéricos, podem comprometer seriamente o processo de solução, originando as chamadas oscilações numéricas (*wiggles*). O esquema de diferenças centrais e todos os esquemas de segunda ordem ou superior podem originar tais oscilações. Por outro lado, esquemas do tipo Upwind são bastante estáveis, porém introduzem forte difusão numérica – Maliska (1995).

Segundo Patankar (1980), a partir de uma expansão em série de Taylor, pode-se demonstrar que o esquema de diferenças centrais tem um erro de truncamento da ordem de (Δx^2) , enquanto que o esquema Upwind possui ordem de (Δx) . Entretanto, uma vez que a solução exata para o problema passa por esquemas exponenciais, uma série de Taylor truncada não é uma boa aproximação para a solução, a não ser para valores de Δx extremamente pequenos. Além disso, analisando-se as Equações (3.10) e (3.12), pode-se notar que, em última análise, o efeito verificado sobre o esquema Upwind equivale à introdução de um termo $\rho_e u_e / 2\Delta x_e$ no esquema de diferenças centrais. Em outras palavras, o esquema Upwind parece inserir uma difusão artificial no coeficiente A_e , aumentando-a. É claro que esta análise está sendo feita comparando-se os esquemas Upwind e de diferenças centrais, pois, em relação à solução exata, o próprio esquema CDS também introduz uma falsa difusão, proveniente do truncamento da expansão em série de Taylor. Cabe, entretanto, salientar que, em muitas situações, a introdução de uma falsa difusão é benéfica para se estabilizar a solução e garantir resultados fisicamente consistentes, notadamente quando são simulados escoamentos a altos números de Reynolds, com malha

grosseira e sem modelagem da turbulência.

Além da aproximação dos termos difusivos por uma expansão truncada de uma série de Taylor, o fato da aproximação dos termos advectivos, empregada num escoamento bidimensional, ser originada de uma aproximação unidimensional também é fonte de difusão numérica, pois os gradientes normais ao escoamento já não são mais tão bem representados. Pode-se acrescentar ainda que, mesmo empregando-se uma discretização bidimensional, escoamentos oblíquos às linhas da grade sempre tendem a ser mal representados, pois exigiriam o emprego de muitos pontos nodais para oferecer uma boa aproximação.

3.3.3. A equação discretizada

Uma vez tendo-se explorado os esquemas de tratamento dos termos advectivos mais empregados na literatura, pode-se, agora, concluir a discretização interrompida na Seção 3.2. A título de exemplo, a Equação (3.6), rearranjada após a aplicação do esquema Upwind, pode ser colocada na forma:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (3.23)$$

onde:

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{M_P}{\Delta t} \quad (3.24a)$$

$$A_E = D_e + \left\| -F_e, 0 \right\| \quad A_W = D_w + \left\| F_w, 0 \right\| \quad (3.24b)$$

$$A_N = D_n + \left\| -F_n, 0 \right\| \quad A_S = D_s + \left\| F_s, 0 \right\| \quad (3.24c)$$

$$B = S_C \psi + \frac{M_P^0}{\Delta t} \phi_P^0 \quad \frac{M_P}{\Delta t} = \frac{\rho_P \psi}{\Delta t} \quad \frac{M_P^0}{\Delta t} = \frac{\rho_P^0 \psi}{\Delta t} \quad (3.24d)$$

3.4. A solução do sistema linear de equações

O sistema de equações gerado pela Equação (3.23) forma uma matriz pentadiagonal, com os coeficientes A_P posicionados na diagonal principal, os coeficientes A_e na subdiagonal superior e os coeficientes A_W na subdiagonal inferior. Os coeficientes para as faces norte (A_N) e sul (A_S) encontram-se nas diagonais mais afastadas da diagonal principal. Assim, uma representação do

sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ contendo, por exemplo, nove incógnitas, seria da forma:

$$\begin{bmatrix} A_P^1 & -A_E^2 & 0 & -A_N^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_W^1 & A_P^2 & -A_E^3 & 0 & -A_N^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_W^2 & A_P^3 & -A_E^4 & 0 & -A_N^6 & 0 & 0 & 0 \\ -A_S^1 & 0 & -A_W^3 & A_P^4 & -A_E^5 & 0 & -A_N^7 & 0 & 0 \\ 0 & -A_S^2 & 0 & -A_W^4 & A_P^5 & -A_E^6 & 0 & -A_N^8 & 0 \\ 0 & 0 & -A_S^3 & 0 & -A_W^5 & A_P^6 & -A_E^7 & 0 & -A_N^9 \\ 0 & 0 & 0 & -A_S^4 & 0 & -A_W^6 & A_P^7 & -A_E^8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -A_S^5 & 0 & -A_W^7 & A_P^8 & -A_E^9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_S^6 & 0 & -A_W^8 & A_P^9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \\ \phi_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

É fácil observar que, mesmo para um sistema tão pequeno quanto o apresentado acima, existe uma quantidade considerável de elementos nulos na matriz dos coeficientes. Isto acontece porque são considerados, nas discretizações, apenas os volumes que fazem fronteira com o volume principal. Se mais elementos fossem envolvidos no processo de interpolação da propriedade transportada, a matriz dos coeficientes tenderia a se tornar cada vez menos esparsa, até ser totalmente preenchida, no caso extremo em que todos os demais pontos nodais do domínio fossem empregados na avaliação do valor de uma propriedade nas faces do elemento principal P .

Como mostra a Tabela 3.3, extraída de Maliska (1995), mostra que o índice de esparsidade da matriz dos coeficientes cresce substancialmente com a ordem do sistema linear. Um bom *solver* para aplicação em problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor deve tirar o máximo de proveito desta característica, trabalhando apenas com os elementos não nulos da matriz.

Tabela 3.3 – Índices de esparsidade comumente encontrados na matriz de coeficientes.

Malha	10 x 10	20 X 20	40 X 40
Número de elementos da matriz	10 ⁴	16 x 10 ⁴	256 x 10 ⁴
Não-zeros	500	2000	8000
% Não-zeros	5%	1.25%	0.312%
Índice de esparsidade (E)	0.95	0.9875	0.9968

O índice de esparsidade pode ser calculado por:

$$E = 1 - \frac{nnz}{N^2} \quad (3.26)$$

onde nnz é o número de não-zeros e N , o número de elementos na matriz.

Existem diferentes formas possíveis de se solucionar o sistema de equações da forma $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ (Fortuna, 2000). Na primeira delas, determina-se a inversa de $\mathbf{A}$, ou seja, $\mathbf{A}^{-1}$, de forma que:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \quad (3.27)$$

obtendo-se, assim, o vetor solução $\mathbf{x}$ procurado. A desvantagem desse método reside no enorme custo computacional para se encontrar a inversa da matriz $\mathbf{A}$ dos coeficientes.

As opções alternativas a esta metodologia não necessitam da obtenção da inversa da matriz $\mathbf{A}$ e podem ser classificadas em dois grupos: os métodos diretos e os métodos iterativos. Nos métodos diretos, o sistema original é transformado, após um certo número de passos, em um sistema equivalente, cuja solução exata, caso exista, possa ser obtida mais facilmente. Nos métodos iterativos, por sua vez, a solução é obtida após uma sequência de correções aplicadas a uma estimativa inicial $\mathbf{x}^{k-1}$ para obter uma solução $\mathbf{x}^k$, até que $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}$, quando o número de iterações k tende a infinito.

O método direto mais comum é o método de eliminação de Gauss, que procura, através de operações sobre a matriz dos coeficientes, transformá-la numa matriz triangular superior, que é empregada para obter a solução do sistema pela técnica da substituição reversa (*backward substitution*). Infelizmente, no processo de busca de uma matriz diagonal superior, o método falha, por acabar preenchendo os espaços antes nulos das matrizes de coeficientes, não aproveitando a esparsidade característica da matriz. Além disso, nas sucessivas operações algébricas que lhe são inerentes, podem ocorrer erros de arredondamento de tal monta que, ao final do processo, a solução encontrada já não corresponda à solução original.

Uma opção atraente para contornar este problema seria fatorar a matriz de coeficientes, buscando uma decomposição $\mathbf{LU}$. Este procedimento é bastante facilitado pela disposição dos elementos da matriz de coeficientes, organizados em bandas paralelas à diagonal principal. Assim,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{LU} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow L \cdot (Ux) = b \Rightarrow L \cdot s = b$$

$$\Rightarrow U \cdot x = s \quad (3.28)$$

O TDMA (*Tri Diagonal Matrix Algorithm*), também conhecido como Algoritmo de Thomas (Patankar, 1980), enquadra-se dentro da classe dos métodos diretos, empregando a técnica de fatoração para obter a solução do sistema linear. Por ser de simples implementação e necessitar de pouco esforço computacional – o armazenamento é da ordem de N , ao contrário de N^2 , como ocorre no método de Gauss – foi escolhido para utilização no presente trabalho. Porém, deve-se ressaltar que, para problemas bi e tridimensionais, as matrizes de coeficientes geradas não são tridiagonais, mas sim penta e heptadiagonais, respectivamente. Dessa forma, a solução pelo TDMA passa a ser iterativa e não mais direta. Uma descrição mais detalhada do Algoritmo de Thomas pode ser encontrada no Apêndice B.

3.5 - O arranjo das variáveis no domínio

Antes de se apresentar o algoritmo para a solução do campo de escoamento, faz-se necessário definir como as variáveis serão armazenadas na malha computacional. Só existem duas opções para isto, que apresentam vantagens e desvantagens: o arranjo co-localizado e o arranjo deslocado.

No arranjo co-localizado, todas as variáveis de interesse – as componentes da velocidade e os demais escalares – encontram-se armazenadas no centro do volume de controle. A grande vantagem deste método é a facilidade para o armazenamento e a manipulação das variáveis, características importantes, sobretudo quando se deseja trabalhar com coordenadas generalizadas, onde os índices das equações de transformação podem ser manipulados mais facilmente.

Entretanto, este tipo de arranjo foi pouquíssimo empregado durante um longo tempo, pois, acreditava-se que o campo de velocidades pudesse ficar insensível a variações de pressão, sobretudo na presença de campos oscilatórios de pressão em malhas grosseiras.

Esta idéia pode ser mais bem compreendida com o auxílio da Figura 3.6, que representa um campo de pressões organizado numa configuração conhecida na literatura como *checkerboard*. Tomando-se como referência o ponto nodal P , nota-se que a diferença de pressão

produzida pelos pontos vizinhos é nula e, portanto, incapaz de impulsionar o escoamento. Em outras palavras, para se determinar o valor da velocidade u no ponto P (u_P), por meio de diferenças centradas, a formulação resultará em $(p_E - p_W)/(\delta x_e + \delta x_w)$. É fácil notar que os valores de p_E e p_W são idênticos, o que implica num gradiente de pressão nulo, que, por si só, não conseguirá afetar o movimento do fluido. Assim, pode-se avaliar as dificuldades para a convergência da solução, quando este tipo de cálculo é realizado em todo domínio. O campo *checkerboard* foi empregado, por diversos autores e durante vários anos, como um argumento forte e definitivo para justificar a incompatibilidade do arranjo co-localizado com o método dos volumes finitos.

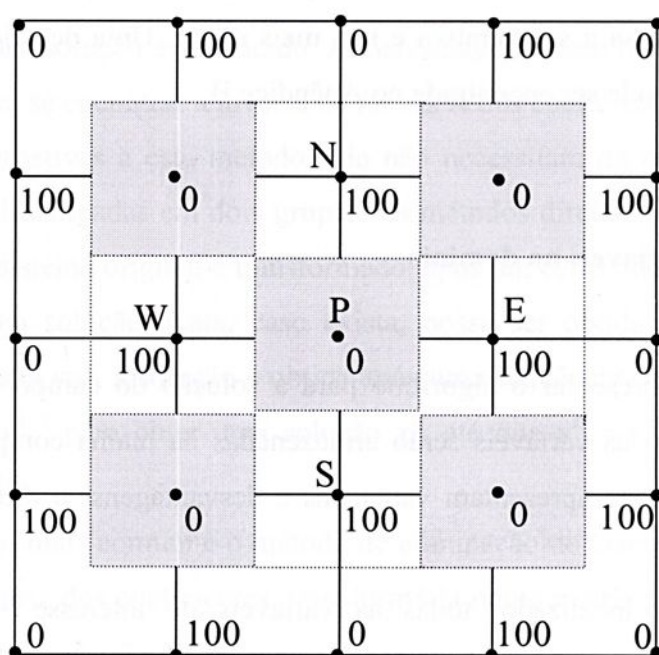


Figura 3.6 – Campo de pressões “checkerboard”.

Para evitar este tipo de problema, Harlow & Welch (1965), ao desenvolverem o método MAC (*Marker and Cell*), propuseram alocar as variáveis escalares e vetoriais de maneira entrelaçada, deslocando a posição da velocidade u de meia malha para a esquerda e a velocidade v de meia malha para baixo, como ilustrado na Figura 3.7. Com esta alteração, o escoamento pode, agora, ser impulsionado pelas diferenças de pressão entre os volumes adjacentes, mesmo que o campo de pressão seja oscilante como o da Figura 3.6. Este sistema de posicionamento das variáveis sobre a malha computacional popularizou-se com o trabalho de Patankar (1980), tornando-se conhecido como arranjo deslocado (*staggered grid*).

Pode-se perceber, analisando a Figura 3.7, que, numa geometria cartesiana

bidimensional, tal disposição não gera dificuldades maiores na manipulação dos índices que definem o posicionamento das variáveis no domínio. O mesmo não ocorre quando problemas geometricamente mais complexos devem ser tratados. Por outro lado, sabe-se, hoje em dia, que não existe nenhum impedimento técnico para a utilização de malhas co-localizadas e a escolha entre um ou outro tipo de arranjo depende, portanto, apenas da preferência que o numericista eventualmente tenha por uma destas configurações. No caso específico deste trabalho, o arranjo deslocado foi escolhido, em virtude da simplicidade geométrica dos problemas aqui tratados.

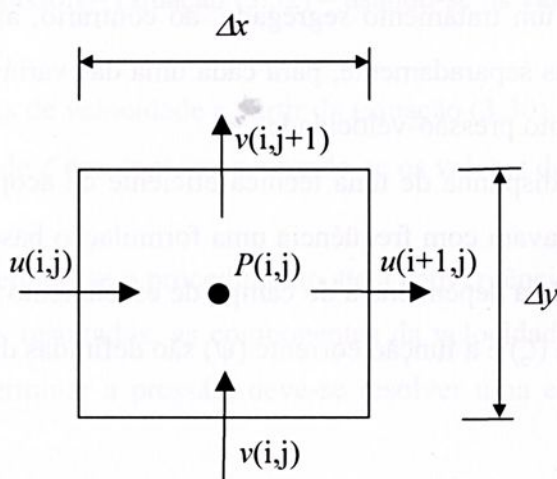


Figura 3.7 – Disposição das variáveis escalares e vetoriais no arranjo deslocado.

3.6 - O acoplamento pressão-velocidade

Antes de definir o método de acoplamento, deve-se decidir qual tipo de solução a ser adotado, simultâneo ou segregado. Na solução simultânea, não há a necessidade de se usar nenhum acoplamento pressão-velocidade e as variáveis são todas calculadas ao mesmo tempo, numa única matriz, como sugere a Figura 3.8. Apesar disso, as não linearidades intrínsecas ao problema permanecem e devem ser tratadas iterativamente, atualizando-se a matriz dos coeficientes até a convergência.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Navier-Stokes em } x & \rightarrow \\
 \text{Navier-Stokes em } y & \rightarrow \\
 \text{Equação da continuidade} & \rightarrow
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 [u] & 0 & [p] \\
 0 & [v] & [p] \\
 [u] & [v] & 0
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 u \\
 v \\
 p
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 b^u \\
 b^v \\
 0
 \end{bmatrix}$$

Figura 3.8 – Sistemas de equações para solução simultânea.

Apesar da aparente vantagem de se conseguir resolver todo o campo das variáveis com a solução de um único sistema de equações, em situações práticas o custo computacional decorrente da utilização deste método torna-se proibitivo. A título ilustrativo, considere-se um domínio tridimensional com 50.000 elementos. Tem-se, neste caso, 250.000 incógnitas – u, v, w, p, T –, originando um sistema com 62.500.000.000 elementos, dos quais apenas 0,0028% são não-nulos. A menos que se empregue um algoritmo poderoso para o tratamento de sistemas esparsos, o custo desta operação torna-se demasiadamente elevado.

Empregando-se um tratamento segregado, ao contrário, as equações da quantidade de movimento são resolvidas separadamente, para cada uma das variáveis, exigindo que se resolva o problema do acoplamento pressão-velocidade

Quando não se dispunha de uma técnica eficiente de acoplamento pressão-velocidade, os pesquisadores empregavam com frequência uma formulação baseada nas linhas de corrente e na vorticidade, eliminando a dependência do campo de escoamento com a pressão. Nesse tipo de abordagem, a vorticidade (ζ) e a função corrente (ψ) são definidas da seguinte forma:

– Vorticidade:

$$\zeta = \nabla \times \mathbf{V} \quad \Rightarrow \quad |\zeta| = |\nabla \times \mathbf{V}| \quad \Rightarrow \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.29)$$

– Função corrente:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (3.30)$$

Utilizando-se estas novas variáveis dependentes, as equações de quantidade de movimento nas direções x e y podem ser combinadas, fornecendo a expressão:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (3.31)$$

que representa uma equação de transporte para a vorticidade, onde não mais aparece o gradiente de pressão.

Adicionalmente, substituindo-se a Equação (3.30) na Equação (3.29), obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\zeta \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \psi = -\zeta \quad (3.32)$$

que é uma equação de Poisson para a função corrente.

De posse destas equações, é possível seguir os seguintes passos de marcha no tempo, para obter a solução de um campo de escoamento num dado instante - Anderson *et al* (1984):

1. Atribuem-se valores iniciais para ζ e ψ no tempo $t = 0$;
2. Resolve-se a equação de transporte para a vorticidade – Equação (3.31) - em cada ponto dentro do domínio de cálculo, no tempo $t + \Delta t$.
3. Resolve-se a equação de Poisson – Equação (3.32) – usando-se os valores de ζ' calculados no passo anterior.
4. Avaliam-se os componentes de velocidade a partir da Equação (3.30).
5. Determinam-se os valores de ζ nos contornos, usando-se os valores de ζ e de ψ nos pontos do interior do domínio.
6. Retorna-se ao ponto 2, repetindo-se o procedimento até a convergência.

Após a obtenção dos resultados, as componentes da velocidade estarão calculadas em todo o domínio. Para se determinar a pressão, deve-se resolver uma equação de Poisson para pressão, dada por:

$$\nabla^2 p = 2 \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3.33)$$

Esta técnica foi bastante empregada até a década de 80 e, ainda hoje, continua a ser estudada, embora por um número bem menor de pesquisadores. Se, por um lado, a técnica apresenta a grande vantagem de resolver o campo de escoamento com apenas duas propriedades (ζ e ψ) dependentes, ao invés de três (u , v e p), por outro lado, o seu emprego na solução de problemas tridimensionais mostra-se extremamente trabalhoso e com alto custo computacional. Além disso, existe grande dificuldade para se estabelecer as condições de contorno para a vorticidade e para a função corrente, restringindo a gama de problemas a serem resolvidos.

Existem, hoje, vários métodos de acoplamento pressão-velocidade. No caso específico deste trabalho dois algoritmos foram implementados, quais sejam, os métodos SIMPLE e SIMPLEC. Para melhor compreender os detalhes desta família de técnica de solução, apresentar-se-á, a seguir, o método de Chorin, que lhe deu origem.

3.6.1 - O método de Chorin

Nas situações de escoamento compressível, a densidade ρ do fluido constitui mais uma incógnita do problema, pois pode variar no tempo e no espaço, com a pressão. Neste caso, além das equações de conservação da massa e da quantidade de movimento, mais uma equação é necessária para o fechamento do sistema. Normalmente, uma equação de estado do tipo $p = p(\rho, T)$ é empregada para cumprir este papel. Dessa forma, avalia-se o campo de densidades usando a equação da conservação da massa e a temperatura usando a equação da energia. De posse de ρ e T , calcula-se a pressão, através da equação de estado. Avança-se, então, a solução de um intervalo de tempo Δt e os cálculos são reiniciados.

No caso de escoamentos incompressíveis, o recurso acima não mais pode ser empregado, pois, um pequeno erro no cálculo do campo de densidades, poderia resultar num campo de pressões completamente falso, acarretando fortes desvios no campo de velocidades, comprometendo a solução numérica. Por mais paradoxal que possa parecer, sob esta ótica, resolver problemas de escoamentos compressíveis pode ser numericamente mais simples que incompressíveis. Neste último caso, a grande dificuldade consiste em encontrar um procedimento adequado que permita calcular um campo de pressão P , que, inserido na equação da quantidade de movimento, dê origem a um campo de velocidades que satisfaça o princípio de conservação da massa.

Para contornar o problema, Chorin (1967) concebeu um método para tratar problemas onde apenas a solução em regime permanente era de interesse. Como as soluções intermediárias ao longo do tempo são distorcidas, ele usou o conceito de compressibilidade artificial, através do qual o escoamento é tratado como compressível, efeito que desaparece quando a solução em regime permanente é atingida. Desta forma, a formulação compressível pode ser usada. Para encontrar a solução de problemas seguindo o transiente real, Chorin (1971) propôs um segundo método, exemplificado a seguir, conforme Maliska (1995).

Considere-se a equação da quantidade de movimento na direção x , escrita na forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial p}{\partial x} = F_x u \quad (3.34)$$

onde ρ é assumido constante e todos os termos não explicitamente escritos estão agrupados em $F_x u$. Em um determinado instante, u é tomado como conhecido. Para o tempo $t + \Delta t$, a seguinte equação é resolvida:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^*) = F_x u \quad (3.35)$$

que leva o índice * por ter sido avaliado sem se considerar a pressão.

Decompondo-se $F_x u$ em um vetor de divergência zero e outro de rotacional zero, o que, por sua vez, deve ser igual a $\partial p / \partial x$. Substituindo a Equação (3.34) na Equação (3.35), tem-se:

$$\frac{1}{\Delta t}(\rho u - \rho u^*) = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \rho u = \rho u^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.36)$$

Como a pressão da equação acima não é conhecida, ela deve ser calculada de modo que a conservação da massa seja satisfeita. Chorin propôs que a pressão fosse calculada da forma iterativa:

$$p^{k+1} = p^k + \alpha \cdot \Delta p \quad (3.37)$$

Onde $k+1$ e k representam dois níveis iterativos dentro do mesmo intervalo de tempo Δt em que o campo de escoamentos está sendo calculado. Ao se atingir a convergência, Δp será igual a zero e $p^k = p^{k+1}$.

De maneira geral, pode-se dizer que um método para resolver as equações de Navier-Stokes é, basicamente, uma forma de ir “ajustando” o campo velocidades, dentro de um tempo computacional qualquer, de forma que este campo satisfaça uma certa “exigência” o que, no presente problema, é representada pela equação da continuidade. Uma vez obtido tal campo, o tempo é avançado para o instante computacional seguinte e o processo recomeça.

3.6.2 – O método SIMPLE

O método SIMPLE (Patankar & Spalding, 1972), derivado do método de Chorin, foi, por muito tempo, o método mais popular de acoplamento pressão-velocidade e se baseia num procedimento cíclico de estimativa e correção, para resolver as equações do movimento. Por intermédio dele, um campo de velocidade é primeiro calculado com base num campo inicial de pressão estimado. As pressões e as velocidades são, então, corrigidas para satisfazer a equação da continuidade.

Para se calcular o campo de velocidades u , emprega-se a Equação (3.23), escrita como:

$$A_p u_p = A_e u_e + A_w u_w + A_n u_n + A_s u_s + B + (p_w - p_p) (\mu / \delta_w) \quad (3.38)$$

$$A_p v_p = A_e v_e + A_w v_w + A_n v_n + A_s v_s + B + (p_s - p_p)(V/\delta_s) \quad (3.39)$$

Esta equação só fornecerá resultados fisicamente consistentes se um campo correto de pressão for imposto, caso contrário, o campo de velocidade obtido não corresponderá à realidade. Então, para um campo estimado p^* qualquer, as Equações (3.38) e (3.39) assumirão, respectivamente, a forma:

$$A_p u_p^* = A_e u_e^* + A_w u_w^* + A_n u_n^* + A_s u_s^* + B + (p_w^* - p_p^*)(V/\delta_w) \quad (3.40)$$

$$A_p v_p^* = A_e v_e^* + A_w v_w^* + A_n v_n^* + A_s v_s^* + B + (p_s^* - p_p^*)(V/\delta_s) \quad (3.41)$$

Definindo-se o campo correto de pressão como sendo a estimativa inicial p^* mais uma correção p' , tem-se:

$$p = p^* + \alpha p' \quad (3.42)$$

onde α é um coeficiente de relaxação para a variável p .

Subtraindo-se as Equações (3.40) e (3.41) das Equações (3.38) e (3.39), e desprezando-se as diferenças entre os termos vizinhos, tem-se para a direção x :

$$A_p (u_p - u_p^*) = [(p_w - p_w^*) - (p_p - p_p^*)](V/\delta_x) \quad (3.43)$$

$$\text{onde: } u' = u - u^* \quad (3.44)$$

Reescrevendo-se a Equação (3.43), tem-se:

$$A_p u_p' = (p_w' - p_p')(V/\delta_w) \quad (3.45)$$

e, finalmente,

$$u_p = u_p^* + d_p (p_w' - p_p') \quad (3.46)$$

Extrapolando-se o valor de u para a face leste do volume de controle, a Equação (3.46) pode ser escrita como:

$$u_e = u_e^* + d_e (p_p' - p_E') \quad (3.47)$$

$$\text{onde: } d_e = \frac{V/\delta_e}{A_e} \quad (3.48)$$

Similarmente, obtém-se para a velocidade na direção y :

$$v_n = v_n^* + d_n(p_P' - p_N') \quad (3.49)$$

$$\text{onde: } d_n = \frac{V/\delta_n}{A_n} \quad (3.50)$$

Na etapa seguinte, a equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.51)$$

é integrada sobre o volume de controle centrado em P , fornecendo:

$$\frac{(p_P - p_P^0) \Delta x \Delta y}{\Delta t} + [(\rho u)_e - (\rho u)_w] \Delta y + [(\rho v)_n - (\rho v)_s] \Delta x = 0 \quad (3.52)$$

Substituindo-se os valores das velocidades nas faces, pelas Equações (3.47) e (3.49), e rearranjando-se os termos, vem:

$$A_P p_P' = A_E p_E' + A_W p_W' + A_N p_N' + A_S p_S' + B \quad (3.53)$$

onde:

$$A_E = \rho_e d_e \Delta y; \quad A_W = \rho_w d_w \Delta y;$$

$$A_N = \rho_n d_n \Delta x; \quad A_S = \rho_s d_s \Delta x;$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S;$$

$$B = \frac{M_P^0}{\Delta t} - \frac{M_P}{\Delta t} + [(\rho u^*)_w - (\rho u^*)_e] \Delta y + [(\rho v^*)_n - (\rho v^*)_s] \Delta x$$

O termo-fonte B representa o divergente do vetor velocidade no volume de controle, que deve tender a zero quando o campo de velocidades satisfaz a equação da continuidade. Assim, a equação discretizada de conservação da massa – Equação (3.53) – constitui, na verdade, uma equação para a pressão, o que constitui a base do método SIMPLE, cujo algoritmo pode ser condensado nas etapas:

1. Dado um campo de pressão p^* , resolvem-se as equações do momento - Equação (3.40) e (3.41).
2. Resolve-se a equação para pressão p' - Equação (3.53).
3. Calcula-se p pela Equação (3.42).
4. Atualiza-se as velocidades pelas Equações (3.47) e (3.49)
5. Resolve-se as equações discretizadas para outros escalares de interesse (temperatura, concentração, k , ε , etc.)
6. Avança-se até o instante de tempo seguinte, usando-se o valor calculado de p como a estimativa inicial para o próximo passo e reinicia-se ao passo 1, iterando-se até que a solução atinja o regime permanente.

3.6.3 – O método SIMPLEC

O método SIMPLEC se diferencia do SIMPLE apenas pelo fato de que as diferenças entre as velocidades vizinhas não é mais desprezada. Neste caso, a expressão para a correção das velocidades também tem a forma:

$$u_e = u_e^* + d_e (p'_P - p'_E) \quad (3.54)$$

porém, agora,

$$d_e = \frac{V/\delta_e}{A_e - \sum A_{nb}} \quad (3.55)$$

Pode-se, então, perceber que a única diferença entre as expressões que fornecem d_e , no método SIMPLE e no SIMPLEC, é o termo $\sum A_{nb}$, subtraído de A_e no denominador da Equação (3.55). Esta modificação, aparentemente pequena, tem profundas implicações nos cálculos. A mais importante delas é que, agora, não existe mais a necessidade de se usar coeficientes de relaxação muito fortes para a atualização de p' . Aliás, em alguns testes realizados neste trabalho, nenhuma relaxação foi empregada e os resultados obtidos mostraram-se absolutamente coerentes.

Todos os procedimentos usados para o cálculo das variáveis, descritos até aqui, empregam um processo iterativo para a atualização dos seus valores. Essa técnica, entretanto, necessita de cuidados especiais para que o resultado obtido não interfira na real solução procurada. O principal deles é que não se deve sub-relaxar o novo valor calculado, mas sim, a diferença entre este novo valor calculado e o valor antigo da variável. Matematicamente, este

procedimento é representado pela equação:

$$\phi_{novo} = \phi_{antigo} + \alpha \cdot (\phi_{novo} - \phi_{antigo}) \quad (3.56)$$

Assim, ao se aproximar da convergência, espera-se que a diferença entre o valor novo calculado e o valor antigo torne-se cada vez menor, levando o segundo termo do lado direito da Equação (3.56) a se anular.

Para se introduzir o coeficiente de relaxação na equação discretizada – Equação (3.23) – é conveniente que ela seja reescrita na forma (Patankar, 1980):

$$a_p \phi_p = \sum A_{nb} \phi_{nb} + B \quad \Rightarrow \quad \phi_p = \frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + B}{A_p} \quad (3.57)$$

Adicionando-se e subtraindo-se o valor da iteração anterior (ϕ^0) nesta equação, resulta:

$$\phi_p = \frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + B}{A_p} + \phi_p^0 - \phi_p^0 \quad (3.58)$$

Rearranjando-se os termos, vem:

$$\phi_p = \phi_p^0 + \left(\frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + B}{A_p} - \phi_p^0 \right) \quad (3.59)$$

O termo que aparece entre parênteses representa a mudança da variável ϕ na iteração atual. Introduzindo-se o coeficiente de relaxação nesta mudança de variável, tem-se:

$$\phi_p = \phi_p^0 + \alpha \cdot \left(\frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + B}{A_p} - \phi_p^0 \right) \quad (3.60)$$

$$\Rightarrow \frac{A_p \phi_p}{\alpha} = \frac{A_p \phi_p^0}{\alpha} + \sum A_{nb} \phi_{nb} + B - \phi_p^0 \quad \Rightarrow \quad \frac{A_p \phi_p}{\alpha} = \sum A_{nb} \phi_{nb} + B + \phi_p^0 \left(\frac{A_p}{\alpha} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{A_p \phi_p}{\alpha} = \sum A_{nb} \phi_{nb} + B + (1 - \alpha) \frac{A_p}{\alpha} \phi_p^0 \quad (3.61)$$

A escolha do coeficiente α depende, entre outros fatores, da geometria e das condições de contorno do problema, além do tipo de acoplamento pressão-velocidade. Não há, portanto, um valor único a ser usado nas simulações e a experiência do numericista deve preponderar.

A título de ilustração, a Figura 3.9 mostra a variação do número de Strouhal de um cilindro de base quadrada, em função do coeficiente de relaxação α , obtida com o auxílio do programa comercial Fluent®. A reta horizontal traçada em $St = 0,14$ representa o valor do número de Strouhal obtido em laboratório. É interessante observar que os resultados da simulação tornam-se mais próximos do valor experimental, quando o coeficiente de relaxação α ultrapassa a 0,5 – valor que coincide com o recomendado no manual de utilização do programa ($\alpha = 0,7$ para u e v). Para coeficientes de relaxação inferiores a este valor, observa-se que a dependência temporal das variáveis passa a não ser bem representada e, dessa forma, parâmetros como o número de Strouhal, que refletem um fenômeno de natureza cíclica, tendem a ser seriamente afetados. Entretanto, deve-se ressaltar que o campo médio das propriedades do escoamento parece não sofrer grandes alterações, independentemente do valor de α .

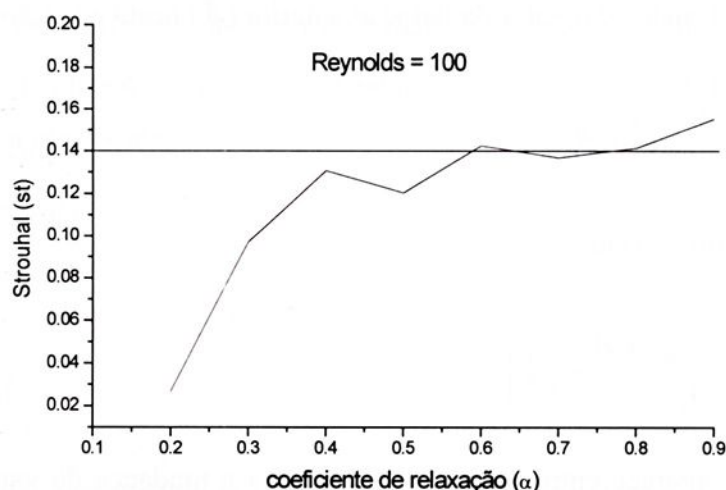


Figura 3.9 – Variação do numero de Strouhal obtido em função dos coeficientes de relaxação α .

Van Doormaal & Raithby (1984) propõem uma pequena alteração na Equação (3.61), substituindo o coeficiente de relaxação α por um coeficiente E , definido da seguinte forma:

$$E = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \quad (3.62)$$

que, substituído na Equação (3.61), produz:

$$A_P \left(1 + \frac{1}{E} \right) \phi_P = \sum A_{nb} \phi_{nb} + B + \frac{A_P}{E} \phi_P^0 \quad (3.63)$$

O argumento usado pelos autores para justificar o uso da Equação (3.61) no lugar da Equação (3.63) é que a primeira permite uma interpretação física mais direta da evolução temporal da variável. De fato, o intervalo de tempo de referência Δt^* passa de forma diferente para as diversas células do domínio. Este intervalo é calculado pela razão entre a massa do fluido no volume de controle pelo coeficiente A_p , ou seja:

$$\Delta t^* = \frac{\rho \cdot V}{A_p} \quad (3.64)$$

que se relaciona com o passo de tempo Δt através da expressão:

$$\Delta t = E \cdot \Delta t^* \quad (3.65)$$

Dessa forma, existe uma relação linear entre Δt e Δt^* , o que não ocorre com a utilização do coeficiente α .

Evidentemente, da mesma forma que α , o valor adotado para o coeficiente E também deve ser limitado, para impedir que o tempo passe de forma muito diferente para as diversas células, permitindo que a solução avance mais uniformemente em todo o domínio. Para formulação totalmente implícita, valores de E bem acima de 1 são desejáveis. Valores de E compreendidos entre 4 e 10 são bastante comuns, implicando em valores de α variando entre 0,8 e 0,91.

Para a equação da correção da pressão – Equação (3.42) – a literatura recomenda a utilização de $\alpha = 0,8$ e $\alpha = 1$, para acoplamento SIMPLE e SIMPLEC, respectivamente.

3.7 - As condições de contorno

Ao se resolver qualquer sistema de equações diferenciais parciais, as condições de contorno, juntamente com as condições iniciais, determinarão a solução particular do problema que está sendo estudado. Na maioria dos problemas envolvendo o escoamento de fluidos e transferência de calor, as duas condições de contorno mais comumente empregadas são as de Dirichlet e de Neumann.

Por intermédio das condições de contorno de Dirichlet, um valor constante e conhecido para a variável – velocidade, pressão, temperatura, concentração, etc – em questão é imposto nas

fronteiras do domínio. Com as condições de Neumann, a derivada da variável no contorno é prescrita, ou seja:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = C \quad (3.66)$$

onde n é a perpendicular à fronteira e C pode ser uma constante ou uma função conhecida. Neste último caso, apenas o gradiente normal de ϕ na fronteira é especificado. Desta forma, ϕ na fronteira também é uma incógnita que deve ser determinada como parte do processo de solução do problema.

3.7.1 – Condições de contorno na entrada do domínio

A velocidade na entrada do domínio é uma condição de contorno considerada conhecida, na grande maioria dos problemas de mecânica dos fluidos computacional. No presente trabalho, um perfil uniforme de velocidades foi empregado em todos os casos analisados. Embora não tenha sido usada nos testes realizados, o programa permite, ainda, que quaisquer valores para as velocidades u e v sejam prescritos, abrindo, portanto, a possibilidade para a imposição de um escoamento oblíquo na entrada do domínio.

É importante salientar aqui que, ao se inserir para as velocidades um perfil prescrito na entrada e uma condição de derivada nula na saída do domínio, cria-se um fluxo de massa que atravessa a região de simulação. Caso seja imposta, adicionalmente, uma condição de pressão prescrita, a solução do problema pode ser seriamente prejudicada, pois, do ponto de vista físico, duas forças motrizes distintas estariam agindo sobre o escoamento. Para a família de acoplamento SIMPLE/SIMPLEC, em geral, não há a necessidade de se impor uma condição de contorno de primeiro tipo para a pressão, uma vez que o campo de pressão é deixado livre para se ajustar ao campo de velocidade.

3.7.2 – Condições de contorno na saída do domínio

Para as equações de quantidade de movimento, é muito comum se encontrar a condição de Neumann na saída do domínio. Esta condição, empregada no presente trabalho, é nitidamente mais fraca que a condição de Dirichlet, e muito mais adequada para ser empregada junto a uma fronteira onde não se conheçam, *a priori*, os valores da variável. É interessante notar que uma implementação incorreta das condições de contorno na saída do domínio, pode afetar todo o campo de escoamento.

3.7.3 – Condições de contorno nas laterais do domínio

Nas faces superior e inferior do domínio, é possível assumir diferentes combinações de condições de contorno, dependendo do problema que está sendo tratado. Pode-se aplicar, por exemplo, uma condição de Neumann para a velocidade u em uma das laterais, ou em ambas, liberando o domínio da restrição de paredes. Esta condição ajusta o valor da velocidade v que atravessa o domínio lateral para zero.

A condição de Dirichlet, por sua vez, pode ser aplicada de duas formas distintas nas laterais do domínio: impondo-se velocidade nula, fazendo as vezes de uma parede sólida, ou prescrevendo-se um valor positivo ou negativo para a velocidade, situação freqüentemente utilizada na simulação do escoamento em cavidades (*lid driven cavity*).

3.7.4 – Obstáculos sólidos imersos no escoamento

Devido à dificuldade de se impor velocidade nula nas paredes de um obstáculo, sobretudo quando se empregam arranjos deslocados, uma solução alternativa, mas igualmente clássica e eficiente, foi adotada neste trabalho, que consiste na imposição de viscosidade infinita na região do domínio ocupada por corpos sólidos.

É interessante observar que, adotando-se um valor muito alto para a viscosidade no interior da célula – algo como 10^{30} , por exemplo –, o coeficiente A_P torna-se, automaticamente, da mesma ordem de grandeza. Assim sendo, na Equação (3.57):

$$\phi_P = \frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + B}{A_P} \quad (3.57)$$

ϕ_P irá tender a zero, uma vez que o valor de A_P tende a ∞ .

Numa outra situação, poder-se-ia desejar que o valor da variável ϕ – a temperatura, por exemplo – na célula em questão assumisse um valor finito imposto $\bar{\phi}$, ao invés de nulo. Neste caso, o procedimento consiste em impor ao termo Sc da Equação (3.24d) o valor $10^{30} \cdot \bar{\phi}$ e o valor de -10^{30} ao termo que acompanha ϕ_P da Equação (3.24a). Com isto, obtém-se:

$$\phi_P = \frac{\sum A_{nb} \phi_{nb} + 10^{30} \bar{\phi}_P}{\sum A_{nb} - (-10^{30})} \cong \frac{10^{30} \bar{\phi}_P}{10^{30}} = \bar{\phi}_P \quad (3.67)$$

3.8 - Modelagem da turbulência

A dedução das Equações (3.1) e (3.2) é baseada fundamentalmente na hipótese do contínuo. Em vista disso, tanto escoamentos laminares quanto turbulentos podem ser bem representados por estas equações, desde que o número de Mach seja inferior a 15. Nestas condições, mesmo as menores escalas turbulentas são muitas ordens de grandeza superiores ao livre caminho médio molecular.

Ocorre, porém, que o espectro de escalas presentes num escoamento turbulento é proporcional a $Re^{3/4}$. Uma vez que o tamanho dos grandes turbilhões é da ordem de grandeza da dimensão característica do sistema onde se dá o escoamento, quanto maior o número de Reynolds, menor o tamanho dos pequenos turbilhões. Assim, a correta representação de um escoamento turbulento, resolvendo-se diretamente as equações do movimento, só é possível com malhas extremamente refinadas, o que exige recursos computacionais via de regra proibitivos.

Diferentes metodologias existem atualmente, como alternativa para contornar este problema. No presente trabalho, implementou-se o modelo clássico de Smagorinsky (1963), para permitir a representação de escoamentos turbulentos através da metodologia de Simulação de Grandes Escalas (LES), através da qual as grandes estruturas são resolvidas diretamente e apenas as pequenas são modeladas.

No método proposto por Smagorinsky, a viscosidade turbulenta é expressa, em função da taxa de deformação e de uma escala de comprimento, como:

$$\nu_t = (C_s \ell)^2 \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (3.68)$$

onde: $\ell = \sqrt{\Delta x \Delta y}$ é o comprimento característico baseado no volume da malha e C_s é a constante de Smagorinsky.

O tensor das taxas de deformação pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$S_{ij} S_{ij} = S_{11}^2 + 2S_{12}^2 + S_{22}^2 \quad (3.69)$$

onde:

$$S_{11} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$S_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$S_{22} = \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dessa forma, a viscosidade efetiva (ν_{ef}) pode ser calculada como sendo a soma da viscosidade turbulenta (ν_t) calculada, mais a viscosidade dinâmica do fluido (ν).

$$\nu_{ef} = \nu_t + \nu \quad (3.70)$$

Mais detalhes sobre o método e sua implementação são fornecidos no trabalho de Almeida (2001).



CAPÍTULO 4 – O PROGRAMA COMPUTACIONAL

4.1 – Introdução

A grande maioria dos códigos comerciais para a solução de problemas de mecânica dos fluidos e transferência de calor apresenta alto custo de aquisição – alguns deles estão na casa das dezenas de milhares de dólares – e, também, de manutenção, pois muitos exigem renovação periódica da licença de utilização. Adicionalmente, a tendência de se tornar os *softwares* comerciais cada vez mais versáteis e abrangentes, oferecendo ao usuário várias opções de modelos matemáticos, geradores de malhas e pós-processadores de resultados, podem torná-los excessivamente pesados para computadores de pequeno porte, encarecendo sobremaneira os cálculos, em termos de tempo de CPU. Entretanto, o maior problema que se coloca na utilização de programas comerciais para uso científico está na impossibilidade de acesso ao programa fonte, o que, se não impede, ao menos dificulta a implementação de novos modelos. Por tudo isto, o desenvolvimento de seu próprio programa de simulação sempre constitui uma opção interessante para os laboratórios de mecânica dos fluidos computacional e similares.

Contudo, a elaboração de um programa voltado para a investigação científica de escoamentos não é uma tarefa trivial, exigindo que várias decisões e cuidados sejam tomados em todas as fases de sua elaboração. Com efeito, depois de decidir sobre o método numérico a ser empregado, vários outros detalhes devem, ainda, serem ponderados. Na escolha da linguagem de programação, por exemplo, é conveniente não apenas levar-se em conta a sua popularidade no meio científico, mas, principalmente, a cultura existente no laboratório onde o programa está sendo desenvolvido e onde, certamente, será utilizado e aprimorado por outros pesquisadores. Além disso, é importante que o programa requeira o mínimo possível de recursos computacionais, permitindo que problemas mais complexos, que necessitem uma maior

densidade de células, possam ser simulados. Caso se pretenda, ainda, que o programa seja de domínio público, ou possa ser utilizado por estudantes ou iniciantes na área, torna-se, também, interessante que a interface do usuário seja amigável e de operação intuitiva. Por último, é importante que a arquitetura do programa seja a mais simples e organizada possível, com comentários explicativos que facilitem sua utilização e futuros desenvolvimentos.

O programa de simulação aqui apresentado foi desenvolvido com estas características e pode ser dividido em dois blocos. O primeiro deles, escrito em linguagem Delphi®, contém todas as funcionalidades de pré-processamento, permitindo ao usuário, dentre outras coisas, gerar a malha computacional, controlar os parâmetros de simulação e monitorar as propriedades físicas do escoamento. No segundo bloco, por sua vez, encontra-se programado o *solver* propriamente dito, que foi escrito em linguagem Fortran 90.

De certa forma, a apresentação que se segue foi redigida para servir, também, como documentação do programa, batizado com o nome Fluids, facilitando sua utilização aos futuros usuários.

4.2 - O pré-processador

Ao ser inicializado, o programa abre sua janela principal, mostrada na Figura 4.1, de onde se tem acesso às demais janelas.

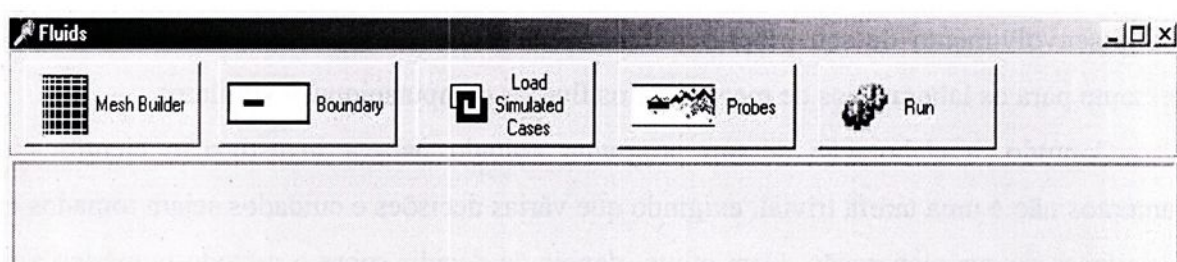


Figura 4.1 – Janela principal.

Antes que os cálculos sejam iniciados, alguns dados e informações devem ser introduzidos no programa de simulação, sempre se empregando o Sistema Internacional de Unidades. Dentre eles, destacam-se as condições de contorno e as características geométricas da malha que servirá de base para a solução das equações de Navier-Stokes.

4.2.1. Construção da malha

Para dar início à construção da malha, deve-se acionar o botão **Mesh Builder** na tela principal, abrindo-se a janela mostrada na Figura 4.2. Insere-se, então, as dimensões do domínio de cálculo e a quantidade, a localização e o tamanho de cada obstáculo sólido – cilindros de base quadrada ou retangular – ali contido, até um número máximo de cinco. É interessante observar que geometrias cartesianas bidimensionais mais complexas podem ser montadas compondo-se dois ou mais quadrados ou retângulos numa mesma malha.

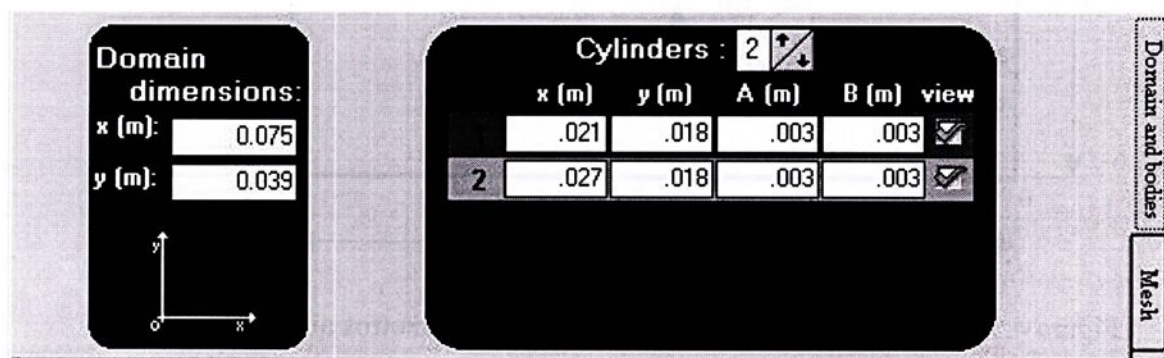


Figura 4.2 – Ajuste das dimensões do domínio computacional e inserção de obstáculos cartesianos no seio do escoamento.

A combinação dos parâmetros que aparecem no exemplo da Figura 4.2 produz um domínio de cálculo com as características mostradas na Figura 4.3.

Muitas vezes, torna-se interessante aumentar a quantidade de grades numa determinada região do domínio ou, mais ainda, concentrar essas grades, com uma determinada taxa de contração ou expansão, numa direção preferencial dentro desta região. Para esta finalidade, foi criado o conceito de zonas numéricas no programa, que podem ser definidas, tanto na direção horizontal quanto na vertical do domínio, sem possuir, em princípio, nenhuma limitação quantitativa. Estas zonas numéricas são inseridas e configuradas na paleta **Mesh**, representada na Figura 4.4, onde, da esquerda para a direita, identificam-se:

- o índice da zona numérica;
- o rótulo identificando a zona como vertical ou horizontal;
- a sua coordenada x (para as verticais) ou y (para as horizontais) finais da zona;
- a quantidade de grids dentro de cada zona;
- a taxa de compressão ou expansão dos grids (em %);

- a direção para o qual o sentido do vetor compressão aponta (esquerda ou direita, para zonas verticais, e para cima ou para baixo, nas zonas horizontais).

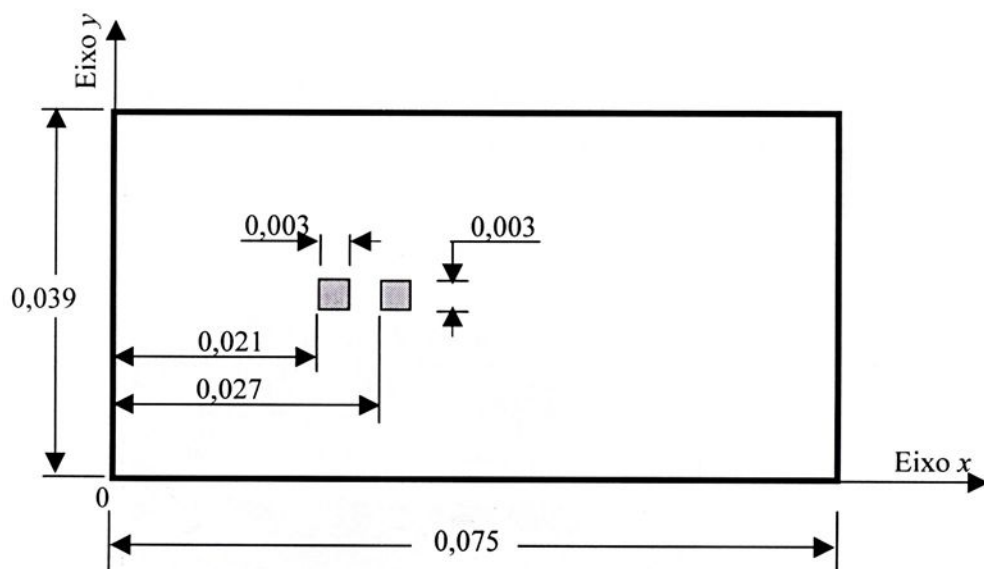


Figura 4.3 – Domínio e obstáculos gerados pelos parâmetros ajustados na janela da Figura 4.2.

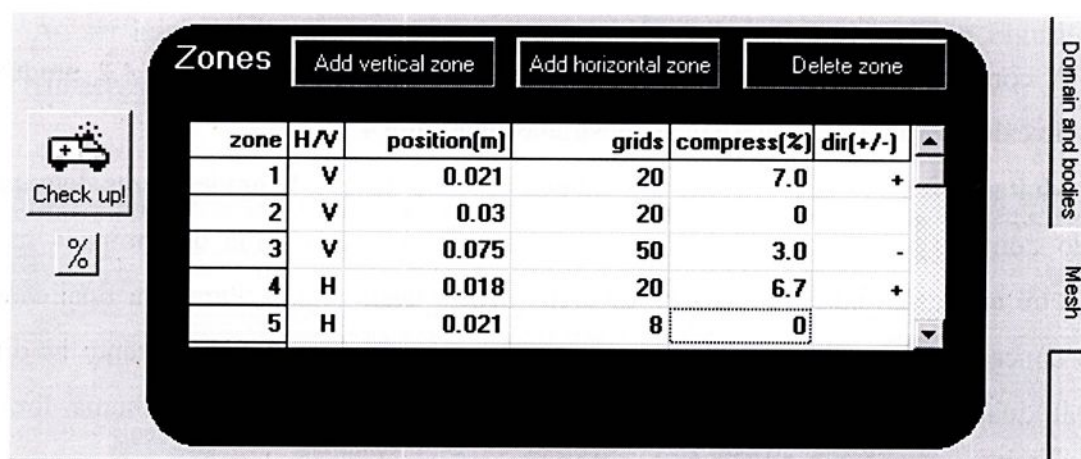


Figura 4.4 – Inserção e ajuste das zonas numéricas.

As informações inseridas nestas zonas são armazenadas no mesmo arquivo *.msh* que contém os demais dados referentes ao domínio, podendo ser nomeados e salvos pelo usuário, para que possam ser futuramente recuperados. O arquivo *.msh* gerado pelos dados que aparecem nas Figuras 4.2 e 4.4 são apresentados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Arquivo *.msh* contendo as informações para a geração do domínio e malhas numéricas.

Linha	
1	0.075
2	0.039
3	3
4	3
5	2
6	.021 .018 .003 .003
7	.027 .018 .003 .003
8	0.021 20 7.0 +
9	0.03 20 0 -
10	0.075 500 3.0 -
11	0.018 20 6.7 +
12	0.021 8 0 -
13	0.039 20 6.7 -

Comentários:

- Linhas 1 e 2:* Tamanho do domínio (m) no eixo *x* (linha 1) e no eixo *y* (linha 2).
- Linhas 3 e 4:* Quantidade de Zonas numéricas na direção *x* (Zonas Verticais) e na direção *y* (Zonas Horizontais), respectivamente.
- Linha 5:* Quantidade de cilindros no domínio.
- Linhas 6 e 7:* Quatro informações necessárias para a disposição dos cilindros no interior do domínio: localização do vértice inferior esquerdo nas coordenadas *x* e *y*, tamanho da largura *A* e da altura *B*. Todas as unidades estão em metros. O programa usa uma linha para registrar os dados de cada cilindro (até um máximo de cinco).
- Linhas 8 - 10:* Dados para a construção das 3 zonas numéricas verticais (definidas na linha 3): Posição na coordenada *x* (em metros) correspondente ao final da zona (a coordenada inicial é definida automaticamente), quantidade de grades que está subdividindo a zona (número inteiro), taxa de compressão (em %) para o tamanho das grades (em caso de malhas regulares, este valor será zero) e direção de compressão (no caso de zonas verticais, o sinal “+” indica compressão para a direita enquanto que o sinal “-” indica para a esquerda).
- Linhas 11 - 13:* Contêm as mesmas informações das linhas 8 – 10, porém, para as zonas horizontais. A principal diferença é que o sinal de “+” significa direção de compressão para cima e o sinal de “-” indica compressão para baixo.

O gerador de malhas possui, ainda, algumas funcionalidades, que permitem a detecção de erros cometidos pelo usuário, como, por exemplo, inserir regiões fora do domínio

estabelecido, incluir a direção de compressão em regiões com grades igualmente espaçadas, inserir números fracionários na quantidade de grades, dentre outros. Além disso, acionando-se a tecla **Check-up**, é possível contar, também, com uma função que auxilia na verificação de grandes descontinuidades entre as duas zonas numéricas adjacentes, o que poderia gerar fortes oscilações numéricas. O valor ajustado por *default*, como o máximo permitido para a diferença entre os tamanhos de duas zonas consecutivas é de 10%, porém, este limite pode ser reduzido a critério do usuário. A tela com os resultados do *check-up* e suas advertências é ilustrada na Figura 4.5.

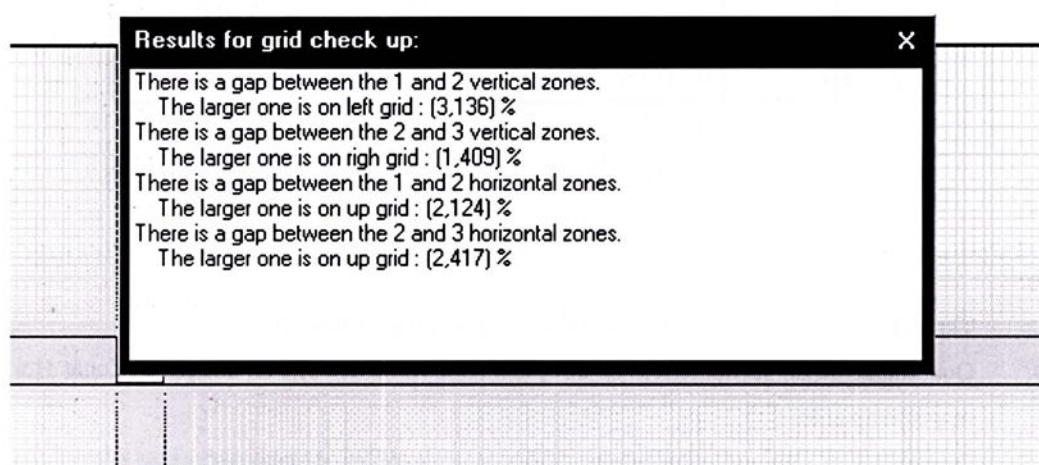


Figura 4.5 – Resultados do *check-up* das interfaces entre as zonas numéricas.

Pode-se observar, na Figura 4.6, as características da malha gerada pelas configurações ajustadas na Figura 4.4. Os valores entre colchetes representam a quantidade de grades contida em cada uma das zonas.

Nas regiões ocupadas por malhas irregulares, o fator de compressão determina o quanto uma dada grade, de tamanho δ_2 , deve ser maior ou menor que sua vizinha, de tamanho δ_1 . Na Figura 4.7, estão representadas duas regiões verticais, com taxas de compressão iguais, porém com seus respectivos vetores compressão apontados em sentidos opostos. Para as zonas horizontais, o sinal positivo posiciona o vetor compressão para cima, enquanto que o negativo aponta-o para baixo. A título de exemplo, a expressão:

$$f_c = \left(\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1} \right) \cdot 100 (\%) \quad (4.1)$$

fornece o fator de compressão de uma zona vertical, cujo vetor compressão aponta para a direita, como ilustrado na Figura 4.7(a), ou de uma zona horizontal apontando para cima.

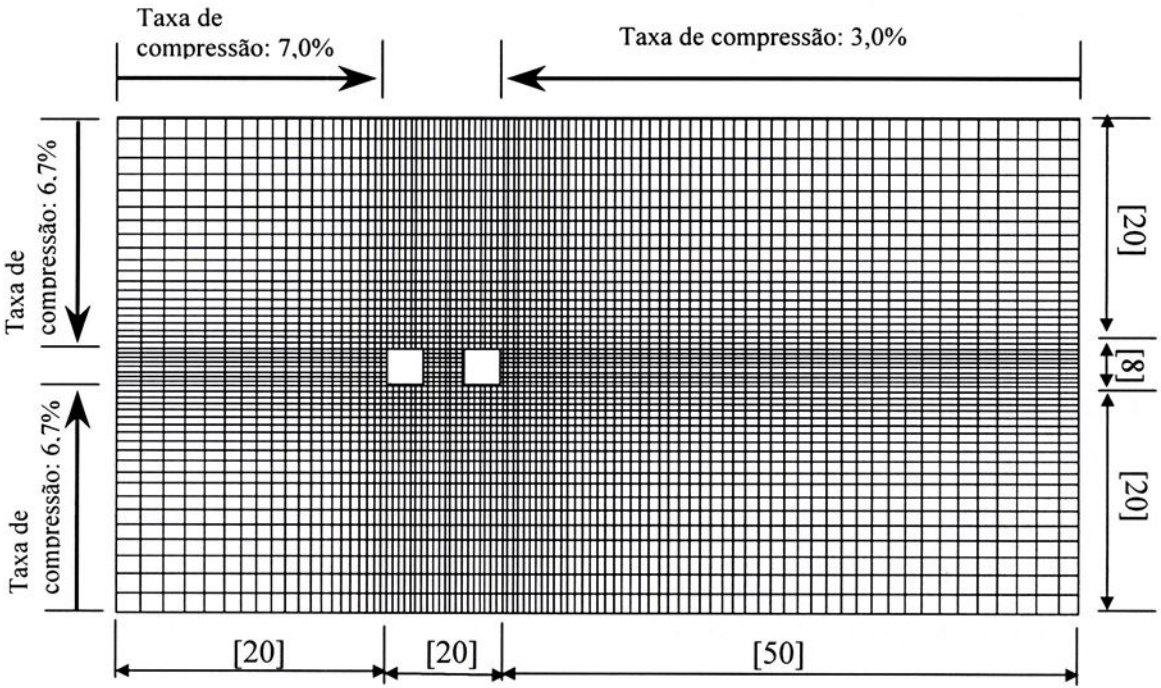


Figura 4.6 – Malha computacional gerada pela configuração mostrada na Figura 4.4.

Para uma quantidade n de grades contidas no interior de uma zona numérica de tamanho Δx , sujeita à mesma taxa de compressão f_c , pode-se calcular a largura x de cada grade p da malha, por:

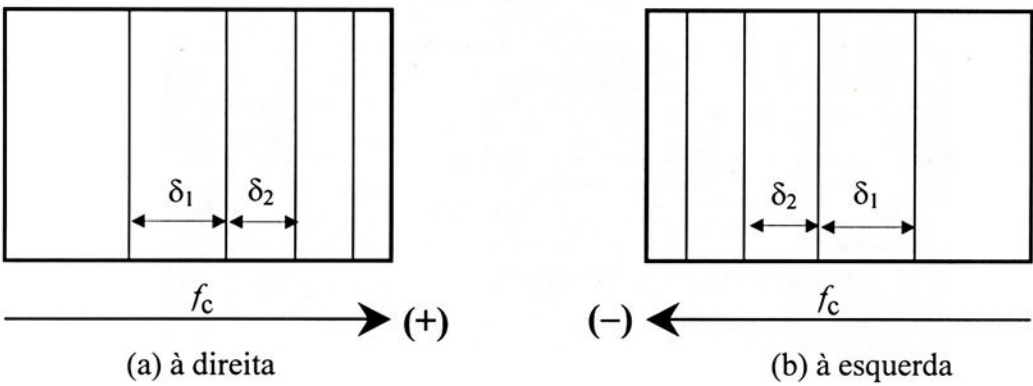


Figura 4.7 – Compressão de malhas irregulares.

$$x(p) = \ell \cdot (1 + S)^{p-1} \quad (4.2)$$

onde:

$$\ell = \frac{\Delta x}{1 + \sum_{k=1}^{n-1} (1 + S)^k} \quad (4.3)$$

$$S = -\frac{f}{100.0} \quad , \text{sentido de compressão para direita.}$$

$$S = +\frac{f}{100.0} \quad , \text{sentido de compressão para esquerda.}$$

4.2.2. Condições de contorno

As condições de contorno nas quatro fronteiras do domínio – *inflow*, *outflow*, *upper* e *lower wall* – são definidas na janela ilustrada na Figura 4.8, acionada pelo botão **Boundary**, também localizado na janela principal.

Na entrada do domínio, pode-se impor quaisquer valores para as componentes u e v da velocidade. Os valores definidos neste campo não sofrerão alteração durante toda a simulação, mantendo a vazão mássica constante. Embora seja de fácil implementação, a atual versão do programa ainda não permite a imposição de velocidades não uniformes ou que variem ao longo do tempo.

Nas paredes laterais pode-se impor velocidades nulas, velocidades positivas ou negativas e, até mesmo, condições de simetria.

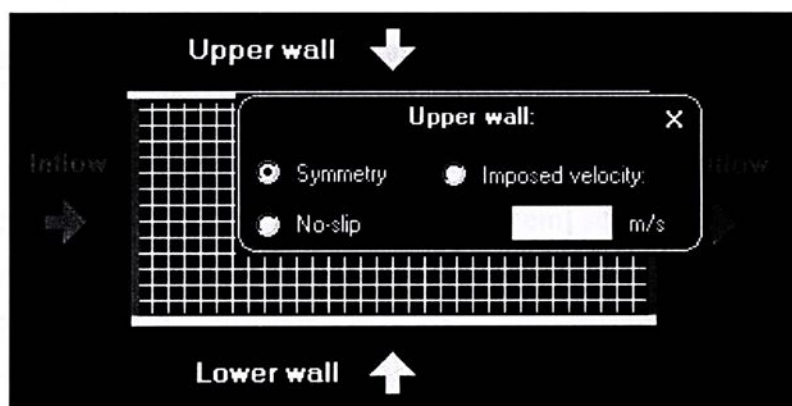


Figura 4.8 – Janela para a definição das condições de contorno.

Como condição para as velocidades na saída do domínio, no momento, só é possível impor-se a condição de Neumann, selecionando-se a opção $\partial u / \partial y = 0$. Entretanto, a condição de derivada segunda nula poderá ser implementada, sem grandes problemas, em futuras versões do programa.

No caso da pressão, nenhum ajuste deve ser feito pelo usuário, posto que todo o tratamento é feito automaticamente pelo programa, segundo o procedimento descrito por Patankar (1980).

Ainda no ambiente *Boundary*, o usuário deverá ajustar, na janela correspondente à paleta **Setting 1**, mostrada na Figura 4.9, o valor dos coeficientes de relaxação para as velocidades e para a pressão, o passo de tempo computacional, o número máximo de iterações permitidas em cada passo de tempo, o tempo total de escoamento a ser simulado, o número de varreduras do TDMA no domínio e, por último, decidir se a técnica de correção em bloco para o TDMA deve ou não ser habilitada.

Acionando a paleta **Setting 2**, o usuário terá acesso à janela ilustrada na Figura 4.10, onde deverá escolher o tipo de acoplamento pressão-velocidade, a esquema de tratamento dos termos advectivos e a precisão desejada para a convergência da equação da conservação da massa.

Finalmente, no painel aberto pela paleta **Setting 3**, representado na Figura 4.11, o usuário poderá ajustar os valores das propriedades físicas do fluido, mais especificamente, a densidade (ρ) e viscosidade absoluta (μ). Neste mesmo painel, é possível optar pelo emprego da metodologia de Simulação de Grandes Escalas para o cálculo de escoamentos turbulentos, devendo-se, neste caso, ajustar o valor da constante de Smagorinsky. Antes de deixar este ambiente, o usuário deverá, ainda, especificar o endereço e a frequência com a qual os resultados obtidos deverão ser armazenados.

Todos os dados ajustados na tela *Boundary* são gravados num arquivo de extensão *.bnd*, cuja listagem correspondente às configurações acima definidas pode ser vista na Tabela 4.2.

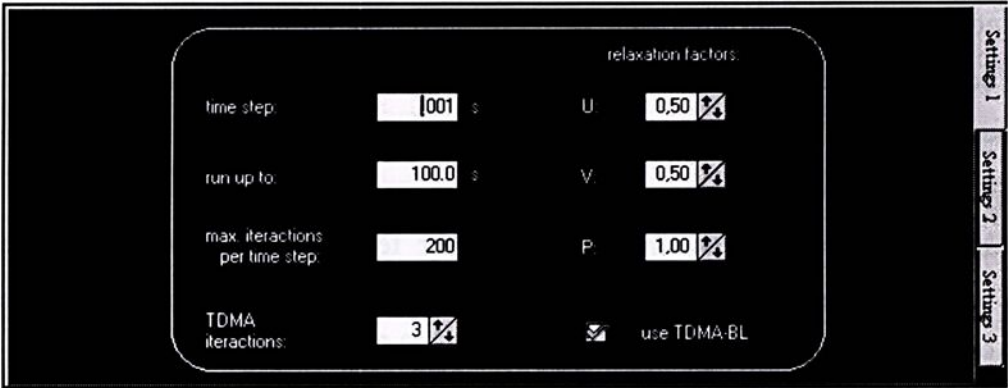


Figura 4.9 – Configurações para a solução das equações discretizadas.

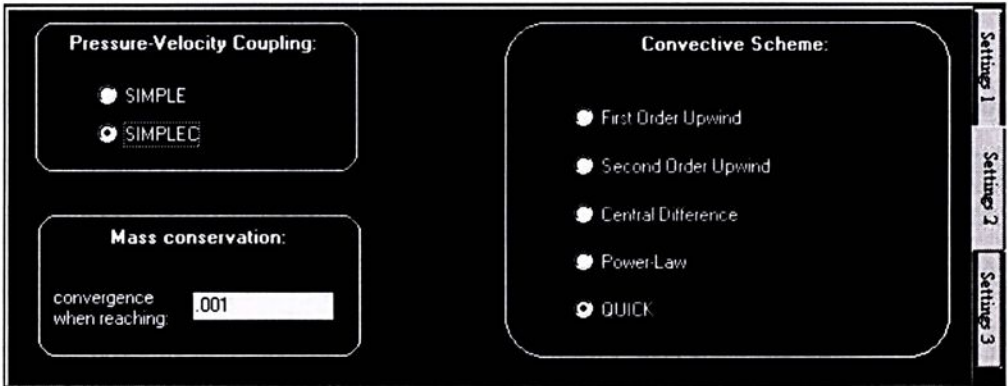


Figura 4.10 – Escolha do acoplamento pressão-velocidade, tratamento dos termos advectivos e precisão requerida para a convergência.

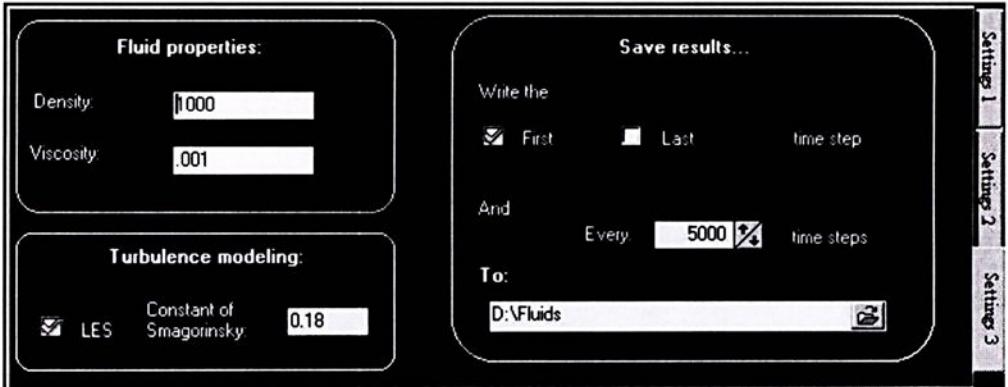


Figura 4.11 – Propriedades do fluido, opções da modelagem de turbulência e armazenamento do campo das variáveis calculadas.

Tabela 4.2 – Arquivo *.bnd* com informações para as condições de contorno, ajuste do solver numérico e propriedades do fluido.

Linha	
1	0.1667
2	0
3	1
4	1
5	5
6	2
7	2
8	.0001
9	200
10	15.0
11	0.001
12	6
13	10000
14	0.25
15	0.25
16	1
17	1000.0
18	.001
19	.TRUE.
20	0.2
21	.TRUE.
22	.TRUE.
23	.TRUE.
24	.TRUE.
25	.FALSE.
26	.FALSE.

Comentários:

Linhas 1 e 2: Velocidade (em m/s) na entrada do domínio para a componente **u** e **v**, respectivamente.

Linha 3: Condição de contorno na parede superior do domínio (número inteiro): (1) condição de fronteira livre; (2) condição de velocidade imposta (neste caso deve ser seguido de um número – em m/s – do valor da velocidade); (3) condição de não-deslizamento (neste caso, a imposição de velocidade zero é feita automaticamente).

Linha 4: Condição de contorno para a parede inferior: segue as mesmas indicações para a parede superior.

Linha 5: Tratamento dos termo advectivos (número inteiro): (1) upwind; (2) diferenças centrais; (3) upwind de segunda ordem; (4) Power-Law; (5) QUICK.

- Linha 6:* Acoplamento pressão-velocidade (número inteiro): (1) SIMPLE; (2) SIMPLEC.
- Linha 7:* Condição de contorno à saída do domínio (número inteiro): (1) derivada segunda nula; (2) derivada primeira nula.
- Linha 8:* Passo de tempo Δt (em segundos).
- Linha 9:* Quantidade máxima de iterações por passo de tempo (número inteiro > 1).
- Linha 10:* Tempo máximo (em segundos) de simulação.
- Linha 11:* Critério de convergência para a Conservação da Massa em todo o domínio.
- Linha 12:* Quantidade de passos a ser executado no TDMA.
- Linha 13:* Intervalo para a gravação dos campos das propriedades (em passos de tempo – número inteiro > 0).
- Linhas 14 - 16:* Coeficientes de relaxação para **u**, **v** e **p** (respectivamente).
- Linhas 17 e 18:* Viscosidade (ρ) e densidade (μ) do fluido, respectivamente (em unidades do SI).
- Linhas 19 e 20:* Uso (.TRUE.) ou não (.FALSE.) da modelagem de turbulência (LES) e o valor da constante de Smagorinsky, respectivamente. No caso de .FALSE., não se deve colocar nenhum valor para a constante.
- Linhas 21:* Uso (.TRUE.) ou não (.FALSE.) do algoritmo de correção em bloco para o TDMA.
- Linhas 22:* Grava (.TRUE.) ou não (.FALSE.) o campo de propriedades na primeira convergência.
- Linhas 23:* Grava (.TRUE.) ou não (.FALSE.) o campo de propriedades na última convergência.
- Linhas 24:* As propriedades são (.TRUE.) ou não (.FALSE.) atualizadas a cada passo de tempo.
- Linhas 25:* Existe (.TRUE.) ou não (.FALSE.) transferência de calor na simulação.
- Linhas 26:* Emite (.TRUE.) ou não (.FALSE.) um sinal sonoro a cada convergência.

4.2.3. Recuperação de cálculos

Abrindo-se a janela representada na Figura 4.12, o programa permite recuperar um campo de escoamento gravado, alimentar o domínio com este campo e reiniciar a simulação, até que se atinja o tempo computacional desejado. Este recurso torna-se muito interessante quando se deseja alterar, ao longo da simulação, os passos de tempo, os coeficientes de relaxação, o endereço de gravação dos campos calculados ou a frequência de coleta de dados das sondas numéricas. O acesso a esta facilidade é feito acionando-se o botão **Load Simulated Cases**, na tela principal.

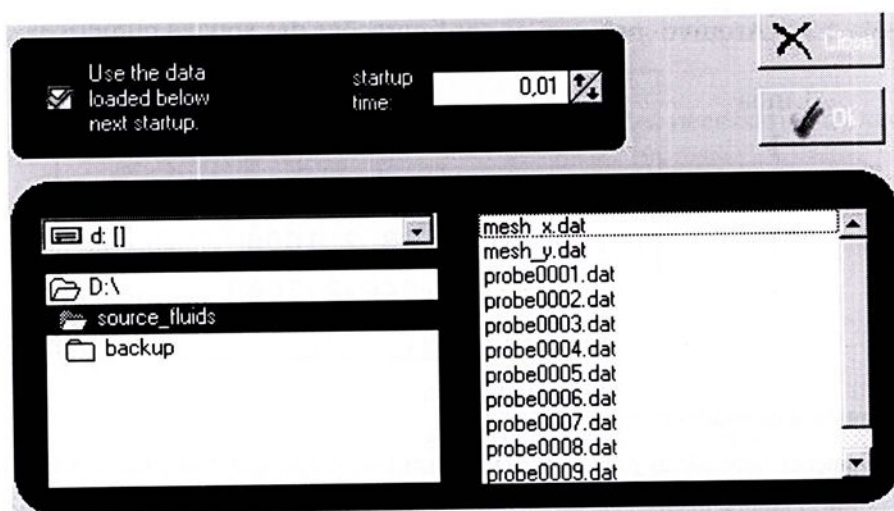


Figura 4.12 – Recuperando um campo de propriedades armazenado num arquivo.

4.2.4 - Sondas Numéricas

O programa permite ao usuário a inserção de um número ilimitado de sondas numéricas, para monitorar a evolução temporal das variáveis primitivas do escoamento – u , v ou p –, a uma determinada frequência de aquisição, especificada em Hz, tal como se faz experimentalmente.

O acesso ao ambiente de inserção e configuração das sondas numéricas é feito através do botão **Probes**, também localizado na janela principal do programa. A grade onde o usuário deve informar as coordenadas x e y de localização da sonda, a variável primitiva a ser monitorada e a frequência de aquisição do sinal é mostrada na Figura 4.13.

probe	x(m)	y(m)	prop	freq(Hz)	
1	0.0345	0.015	V	100	Add probe Delete probe ☒ Show probe caption
2	0.0345	0.024	V	100	
3	0.0255	0.0195	V	100	
4	0.0255	0.0195	U	100	
5	0.0285	0.015	V	100	
6	0.0285	0.024	V	100	

Figura 4.13 – Grade para a inserção e configuração de sondas numéricas.

Os registros de posicionamento das sondas podem ser salvos num arquivo de extensão *.prb*, para futura utilização, evitando o tedioso trabalho de inserção. Um exemplo de um arquivo contendo um conjunto de sondas previamente configuradas é apresentado na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Arquivo *.prb* com as configurações das sondas numéricas.

Linha	
1	3
2	1 1 0.081 0.039 2 1000
3	1 1 0.081 0.03 2 1000
4	1 1 0.081 0.048 2 1000

Comentários:

- Linhas 1:* Quantidade de sondas presentes no domínio.
- Linhas 2 - 4:* Informações necessárias para o programa distribuir e configurar as sondas: Coordenadas *i* e *j* no domínio computacional (pode ser qualquer número inteiro, este valor será encontrado e preenchido automaticamente pelo programa, baseado nas informações das coordenadas reais das sondas); Coordenadas *x* e *y* (m) da posição da sonda no domínio; propriedade a ser monitorada: (1) velocidade *u*, (2) velocidade *v* e (3) pressão *p*; frequência (Hz) de coleta de dados da sonda (número inteiro > 0). Quantidade de linhas (no atual exemplo são três) corresponde à quantidade de sondas numéricas no domínio.

Como as coordenadas que definem o posicionamento das sondas são dadas em números reais e as variáveis monitoradas estão dispostas num domínio discreto, nem sempre a posição (*x,y*) definida pelo usuário, irá coincidir precisamente com um nó (*i,j*) de pressão ou de velocidades na malha computacional. Existe portanto a necessidade de redefinição das coordenadas de posicionamento da sondas, localizando o ponto nodal mais próximo daquele definido pelo usuário. Esta tarefa é realizada automaticamente, através de um algoritmo criado e introduzido no código computacional.

Por último, antes de deixar o ambiente *Probes*, o usuário deve escolher o endereço onde deseja que os dados de pressão ou de velocidades coletados pelas sondas sejam gravados.

4.2.5 - Execução dos cálculos

Depois de ajustados todos os parâmetros necessários à simulação, os cálculos poderão ser iniciados, acionando-se o botão **Run**, localizado na janela principal do programa. A partir deste momento, o programa irá recuperar as informações gravadas num arquivo *main.txt*, ilustrado na Tabela 4.4, onde estão armazenados o nome e o endereço dos arquivos *.msh*, que detêm as configurações da malha, dos arquivos *.bnd*, contendo as condições de contorno, e dos arquivos *.prb*, definindo os dados necessários ao acionamento das sondas numéricas. Além disso, o arquivo *main.txt* ainda contém o endereço onde os dados coletados pelas sondas e os campos

calculados serão armazenados.

Tabela 4.4 – Arquivo *main.txt*, contendo as informações necessárias à execução do programa.

Linha

1	E:\2td_1b\2tand_1b_7.msh
2	E:\2td_1b\bound.bnd
3	E:\2td_1b\2tandem_1b_2.prb
4	E:\testes_les\re2000\probe
5	E:\testes_les\re2000\plot

Comentários:

- Linha 1:* Caminho e nome do arquivo de configuração do domínio e das malhas.
Linha 2: Caminho e nome do arquivo de configuração das condições de contorno.
Linha 3: Caminho e nome do arquivo de configuração das sondas.
Linha 4: Caminho e nome do arquivo onde as sondas deverão gravar os resultados.
Linha 5: Caminho e nome do arquivo onde deverão ser salvos os campos das propriedades.

Caso seja detectado algum problema durante a execução do programa, tais como arquivos corrompidos ou incompatibilidade de tipos, sinais de advertência serão emitidos.

Ao atingir o tempo de simulação preestabelecido, o programa é interrompido e volta automaticamente à tela principal. Todos os dados calculados pelo programa são armazenados em arquivos com a extensão *.dat*, para facilitar o pós-processamentos dos resultados com o auxílio de programas comerciais de análise de dados. Além disso, no arquivo contendo as informações dos campos das propriedades calculadas, o programa introduz, automaticamente, um cabeçalho padrão, tornando-o adequado para leitura pelo *software* Tecplot®, desenvolvido pela Amtec Inc.

4.3 – O Solver Numérico

O *solver*, que resolve as equações de Navier-Stokes através da metodologia dos Volumes Finitos, foi inteiramente organizado em módulos, o que facilita a inserção, exclusão ou alteração de trechos de subrotinas e funções. Além disso, durante a elaboração do código, diferentes recursos do Fortran 90 – alocações dinâmicas de memória, tipos definidos pelo usuário (UDT) e reaproveitamento de variáveis já declaradas – foram empregados, para minimizar o consumo de memória e otimizar sua capacidade de processamento. Esta

característica é fundamental para o desenvolvimento de qualquer programa simulação numérica de escoamentos, por natureza, muito exigente em termos computacionais.

Na apresentação a seguir, são fornecidas informações adicionais sobre os principais módulos empregados no programa.

4.4 – O bloco principal do programa

O corpo principal do código computacional, denominado *Main*, se encarrega de gerenciar a leitura de todos os valores previamente ajustados para a montagem da malha, de monitorar a alocação de espaço para as matrizes e vetores, de controlar os passos iterativos durante a execução dos cálculos e de promover a liberação da memória reservada ao final da execução do programa.

As informações sobre as diferentes zonas do domínio, os obstáculos sólidos e as sondas numéricas são armazenadas em vetores unidimensionais, compostos de tipos UDT.

O controle da frequência com a qual o sinal das sondas numéricas e os campos das propriedades devem ser gravados também é feito pelo bloco *Main*, que registra o tempo total de simulação e o número de passos de tempo.

Para melhor compreensão da estrutura lógica do programa, um fluxograma detalhado do programa principal é apresentado na Figura C.1 do Apêndice C. Suas sub-rotinas, acompanhadas de uma breve descrição funcional, estão relacionadas na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Subrotinas empregadas na rotina principal *Main*.

Sub-rotina	Descrição
<i>Read_main</i>	Lê o arquivo main.txt, que informa os nomes e caminhos dos demais arquivos importantes do programa
<i>read_mesh</i>	Lê os dados das zonas numéricas: quantidades, número de grids, taxa e direção de compressão.
<i>calc_values</i>	Calcula a quantidade total de grids nas direções horizontal e vertical.
<i>Create_mesh_arrays</i>	Aloca espaço na memória para os vetores que armazenam as coordenadas da malha.
<i>Create_flow_arrays</i>	Aloca espaço na memória para as matrizes que armazenam as variáveis primitivas e escalares passivos do escoamento.
<i>Create_fluid_arrays</i>	Aloca espaço na memória para armazenar as propriedades do fluido.
<i>Create_solver_arrays</i>	Aloca espaço na memória para as matrizes que armazenam os termos da equação discretizada.
<i>init_cond</i>	Fornece os dados iniciais para as variáveis.
<i>read_bound</i>	Lê a variável bound.bnd, onde estão armazenadas as condições de contorno (paredes do domínio, acoplamento, termos advectivos, passo de tempo, etc.).

<i>Startup</i>	Inicializa as variáveis do escoamento.
<i>calc_mesh</i>	Calcula todos os vetores com as coordenadas geométricas da malha.
<i>grid_faces</i>	Calcula as larguras e alturas dos volumes de controle.
<i>read_probe</i>	Lê informações nos arquivos .prb sobre configurações das sondas (coordenadas, variável a ser monitorada e frequência de aquisição).
<i>Probe</i>	Encontra os pontos nodais da malha mais próximos das coordenadas geométricas das sondas.
<i>solve_ns</i>	Monta os coeficientes e resolve as equações de Navier-Stokes e da Conservação da Quantidade de Movimento.
<i>write_probe</i>	Abre os arquivos e gerencia a gravação das sondas numéricas.
<i>build_bound</i>	Extrapolando os valores das variáveis nas fronteiras do domínio.
<i>Normalize</i>	Normaliza os valores de uma variável tomando como base um ponto escolhido no domínio.
<i>Tecplotime</i>	Abre o arquivo e grava o campo das variáveis primitivas do escoamento em um formato padronizado.

4.4.1 – A geração da malha computacional.

A rotina *read_mesh* encarrega-se da leitura das informações necessárias à construção da malha, enquanto que os cálculos correspondentes são realizados pela rotina *calc_mesh* e armazenados em vetores unidimensionais, como apresentado na Figura C-2 do Apêndice C.

Todas as malhas construídas no pré-processador são gravadas com a extensão *.msh*, para serem posteriormente lidas pelo *solver*. Dessa forma, a malha visualizada na tela do pré-processador, ao se clicar o botão **plot**, na janela *Build Mesh*, corresponde apenas a uma representação gráfica daquela que será empregada nos cálculos. A verdadeira malha utilizada na simulação é gerada pelo próprio *solver*, em linguagem Fortran, para oferecer maior precisão aos cálculos, já que as funções de desenho na tela trabalham em *pixels*, que são números inteiros e não em pontos flutuantes.

É interessante comentar que existem bibliotecas computacionais disponíveis em outras linguagens, desenvolvidas para oferecer maior acuracidade gráfica na representação de malhas e domínios computacionais. A implementação destes recursos no presente programa demandaria um razoável esforço de programação, e, por isto, não foi considerado prioritário.

4.4.2 – A solução numérica das equações de Navier-Stokes.

A sub-rotina *solve_ns*, inserida no módulo *solver*, é responsável pelo calculo dos coeficientes A_P , A_E , A_W , A_N , A_S e B das equações do movimento discretizadas, que se encontram armazenados em vetores bidimensionais. Esse sistema de equações serão resolvidos por

quaisquer um dos solvers numéricos presentes no módulo *abacus* – atualmente TDMA e TDMA com correção em bloco. A descrição das subrotinas usadas no módulo *solve_ns* está detalhada na Tabela 4.6 e o fluxograma correspondente está representado na Figura C.3 do Apêndice C.

Tabela 4.6 – Descrição das subrotinas empregadas no módulo *solve_ns*.

Sub-rotina	Descrição
<i>input</i>	Aplica as condições de contorno no domínio.
<i>solve_u</i>	Calcula os coeficientes para a solução da velocidade u.
<i>solve_v</i>	Calcula os coeficientes para a velocidade v.
<i>solve_p</i>	Calcula os coeficientes para o cálculo da equação da correção da pressão.
<i>mi_turb</i>	Calcula o valor da viscosidade turbulenta segundo Smagorinsky.

Para maior clareza dos procedimentos adotados na solução das equações de Navier-Stokes pelos métodos SIMPLE/SIMPLEC, são descritos, a seguir, os principais passos sobre os quais a sub-rotina *solve_ns* foi desenvolvida:

1. Dado um campo de pressão p^* , resolvem-se as equações de quantidade de movimento - Equação (3.40) e Equação (3.41).

Este passo é resolvido chamando-se as rotinas *solve_u* e *solve_v*. O campo inicial é carregado na subrotina *input* com os valores lidos em *read_bound*.

2. Resolver a equação para pressão p' – Equação(3.21).

A sub-rotina *solve_p* discretiza a equação para pressão e chama o solver do sistema linear.

3. Calcular p pela Equação (3.42).

O programa resolve a Equação (3.42) de acordo com a seguinte linha de código:

$$p(m,n) = p(m,n) + pc(m,n)*relax(3)$$

onde *relax(3)* é o coeficiente de relaxação para a variável p' (correção da pressão).

4. Atualizar as velocidades pelas Eqs. (3.47) e (3.49).

As velocidades são atualizadas com as instruções:

If ($m \neq 2$) $u(m,n) = u(m,n) + du(m,n)*(pc(m-1,n) - pc(m,n))$

If ($n \neq 2$) $v(m,n) = v(m,n) + dv(m,n)*(pc(m,n-1) - pc(m,n))$

A restrição de que m e n sejam diferentes de 2 deve-se ao fato de que, nas fronteiras de entrada do domínio, as velocidades são especificadas, não necessitando serem calculadas.

5. Resolver as equações discretizadas para outros escalares de interesse (temperatura, concentração, k , ϵ , etc.)

No presente trabalho, nenhum outro escalar está sendo resolvido. Embora, toda a estrutura do programa já esteja pronta para receber novas equações discretizadas para solução.

6. Avançar até o instante de tempo seguinte, usando o valor calculado de p como a estimativa inicial para o próximo passo e reiniciar ao passo 1, iterando até que a solução atinja o regime permanente.

Como é de interesse obter a variação temporal das propriedades do escoamento (para avaliar o número de Strouhal, por exemplo), as iterações só serão atualizadas para um nível de tempo novo quando a solução para o nível atual atingir convergência. Antes que isso ocorra, as iterações prosseguem no mesmo nível temporal.

O algoritmo para a solução da equação da velocidade u está representado na Figura C.4 do Apêndice C. A solução para a componente v é idêntica, com pequenas alterações nas variáveis jo e io , que agora valem 3 e 2, respectivamente, e nos coeficientes que multiplicam o gradiente de pressão, $dv(i,j)$.

Para a solução do sistema linear obtido na discretização da equação da conservação da massa, que fornecerá a variável pc , sub-rotina *solve_p*, representada na Figura C.5 do Apêndice C, é chamada. As sub-rotinas auxiliares empregadas na solução das equações do movimento estão descritas na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Sub-rotinas auxiliares na solução das equações de u, v e p .

Sub-rotina	Descrição
<i>walls</i>	Detecta a presença de paredes em volumes adjacentes.
<i>output</i>	Calcula o perfil de velocidades à saída do domínio seguindo as condições de contorno de Neumann.
<i>cylinder</i>	Encontra os valores de i e j correspondentes às dimensões e posições dos cilindros no domínio atribuindo o valor de viscosidade infinita aos volumes correspondentes.
<i>tdma</i>	Resolve o sistema de equações empregando o Algoritmo de Thomas.
<i>tdma_block</i>	O equivalente ao <i>tdma</i> com o recurso de correção em bloco.

CAPÍTULO 5 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

5.1 – Introdução

Antes de sua utilização nas aplicações para as quais foi concebido, todo programa computacional deve ser submetido a uma etapa de avaliação, onde são verificados os mais diferentes aspectos que lhe são inerentes, e que vão desde a sua facilidade de manuseio até a sua real capacidade em fornecer resultados confiáveis. Um programa de simulação numérica de escoamentos não foge a esta regra e, para que possa ser utilizado judiciosamente na solução de problemas de engenharia, deve ser submetido a um exaustivo processo de validação.

De maneira geral, a validação de um programa desta natureza começa por uma análise da consistência física dos resultados. Nesta etapa, são escolhidos, via de regra, problemas-teste de menor complexidade, que preferencialmente tenham soluções analíticas conhecidas ou que possam ser resolvidos numericamente com o auxílio de uma calculadora. Numa segunda fase, os resultados da simulação, obtidos para situações mais complicadas, devem ser confrontados com resultados numéricos e experimentais, a fim de avaliar os limites e potencialidades da ferramenta computacional.

Embora sejam apresentadas, aqui, discussões fenomenológicas dos problemas tratados – notadamente o escoamento em torno de cilindros quadrados e retangulares – com o código Fluids, desenvolvido no presente trabalho, o maior objetivo deste capítulo consiste em assegurar a confiabilidade do programa, mediante a comparação dos resultados obtidos com dados experimentais disponíveis ou simulações numéricas oriundas de outras fontes.



5.2 – Cilindro quadrado isolado

5.2.1. Testes iniciais de validação

Após os testes preliminares, realizados em domínios muito simples, discretizados com malhas grosseiras, e que permitiram verificar a consistência do programa, foi avaliado o escoamento em torno de um cilindro quadrado imerso num escoamento laminar. Neste caso, a configuração do domínio computacional, ilustrado na Figura 5.1, foi determinada com base nos estudos de Almeida (2001).

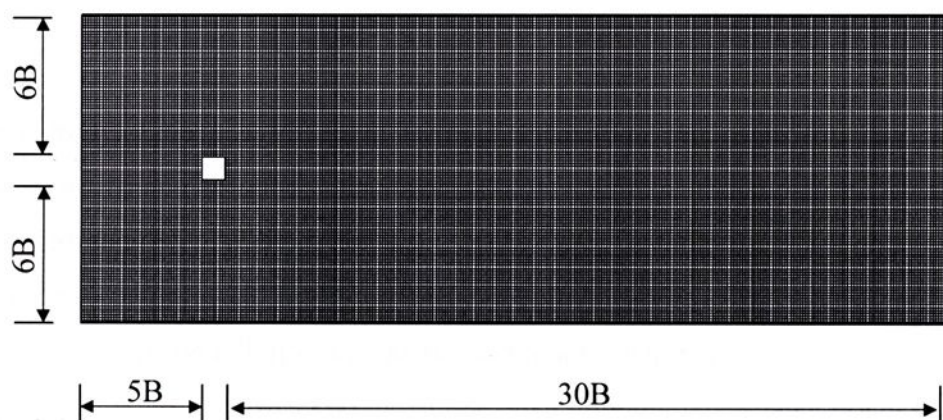


Figura 5.1 – Malha computacional uniforme, com 288 x 104 elementos.

Em linhas gerais, empregou-se uma malha uniforme em ambas as direções, com $\Delta x = \Delta y$, composta de 288 x 104 volumes, medindo $13B$ na direção y , por $36B$ na direção x . A exemplo da maioria dos demais cálculos realizados ao longo deste trabalho, as seguintes condições de contorno foram adotadas: perfil uniforme de velocidade na entrada do domínio ($u(y) = U_\infty$ e $v = 0$), condição de Neumann na saída ($\partial u / \partial x = 0$ e $v = 0$) e condição de simetria nas fronteiras laterais ($\partial u / \partial y = 0$ e $v = 0$). Além disso, uma condição de viscosidade infinita foi imposta no interior das células ocupadas pelo cilindro quadrado, para simular a presença do obstáculo sólido.

Como mostra a Figura 5.2, trinta e oito sondas numéricas foram dispostas em duas fileiras a jusante do cilindro, permitindo capturar a velocidade u , além de três outras sondas, para coletar a evolução temporal da componente v da velocidade, necessária ao cálculo do número de Strouhal. Nas duas situações, as sondas foram ajustadas para fazer a aquisição do sinal com uma frequência de 10 Hz.

Os cálculos foram realizados com um passo de tempo $\Delta t = 0,01$ s, para Reynolds

variando entre 100 e 1000, empregando-se o método SIMPLEC de acoplamento pressão-velocidade, com tratamento dos termos advectivos pelos esquemas Power-Law e QUICK.

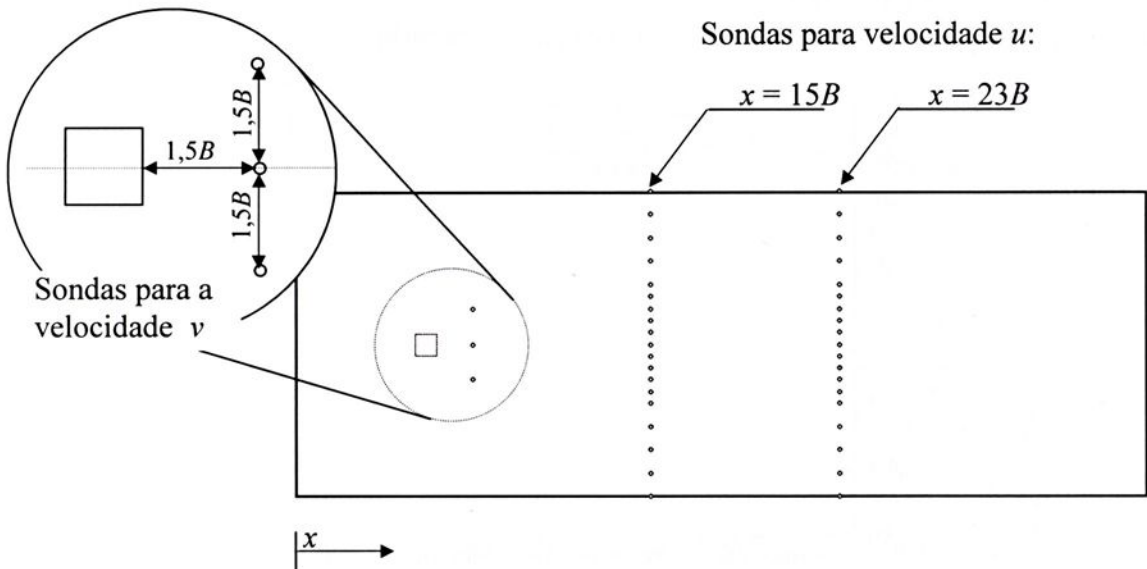


Figura 5.2 – Posição das sondas numéricas para u e v .

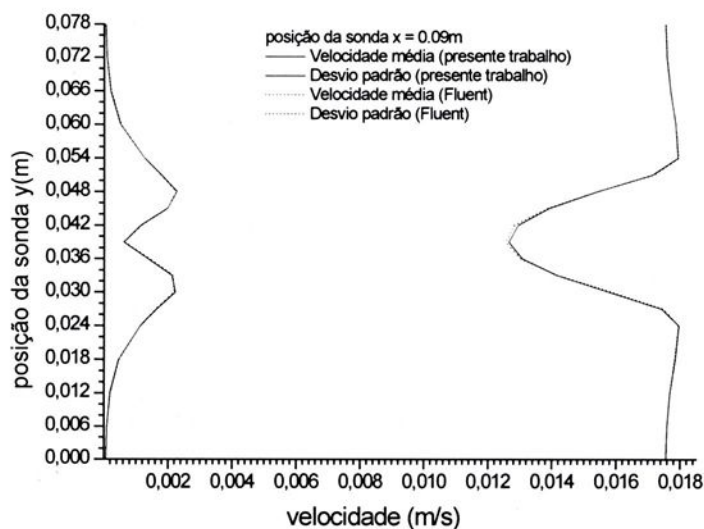
A Figura 5.3 mostra os perfis da componente u da velocidade e os correspondentes desvios-padrão, obtidos em duas posições a jusante do cilindro. Estes resultados representam a média temporal realizada sobre o sinal capturado pelas diversas sondas, em suas respectivas posições, e foram comparados com os dados fornecidos pelo programa Fluent®, exatamente nas mesmas condições, quais sejam: $U_{\infty} = 0,0167$ m/s, $\mu = 10^{-6}$ kg/m·s², $\rho = 1,0$ kg/m³ e $B = 0,006$ m, implicando em $Re = 100$. A concordância entre os resultados, tanto para a velocidade média, quanto para o desvio padrão, é excelente.

5.2.2. Cálculo do número de Strouhal

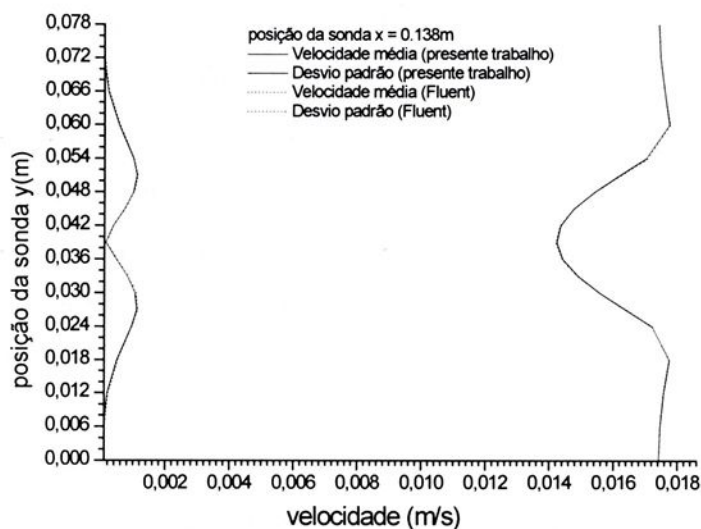
O comportamento do número de Strouhal em função de Reynolds, para esta mesma simulação, porém utilizando-se os esquemas Power-Law e QUICK, encontram-se na Figura 5.4. Neste caso, os resultados numéricos, além de serem comparados com os obtidos com o programa Fluent®, são, ainda, confrontados com os dados experimentais de Lindquist (2000). Aqui, também, a concordância é bastante satisfatória, sobretudo para Reynolds acima de 400, quando se utiliza o esquema QUICK.

Comparando-se os valores do número de Strouhal para $Re = 100$, fornecidos pelos programas Fluent® e Fluids, empregando o esquema Power-Law, mostra uma diferença em

torno de 10%. Estes resultados indicam que é mais fácil obter boa concordância analisando valores médios das propriedades, como os apresentados na Figura 5.3, do que parâmetros fortemente dependentes do tempo, tal como o número de Strouhal, da Figura 5.4, cujo cálculo leva em conta a frequência de emissão dos vórtices na esteira turbilhonar.



(a) Posição $x = 15B$



(b) Posição $x = 23B$

Figura 5.3 – Perfil médio da componente u da velocidade a jusante do cilindro: resultados obtidos com os programas Fluent® e Fluids, empregando o esquema Power-Law.

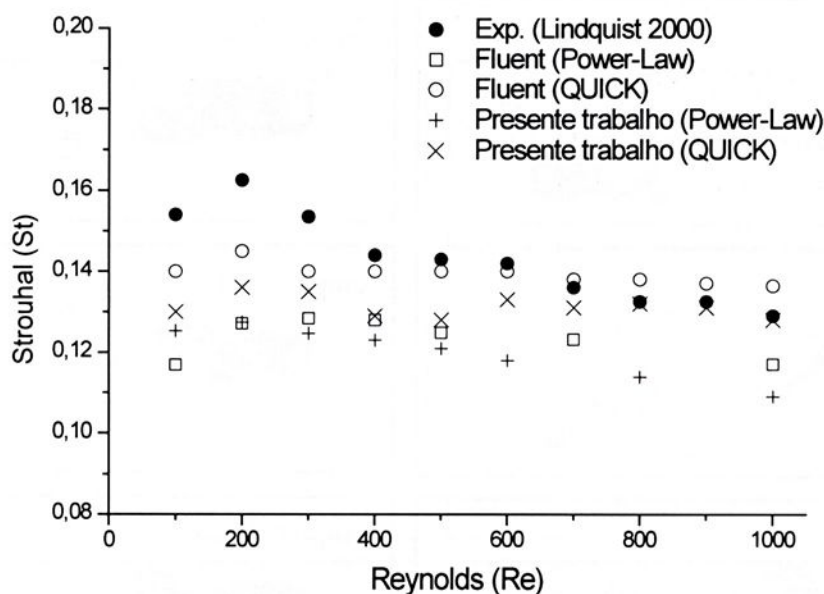


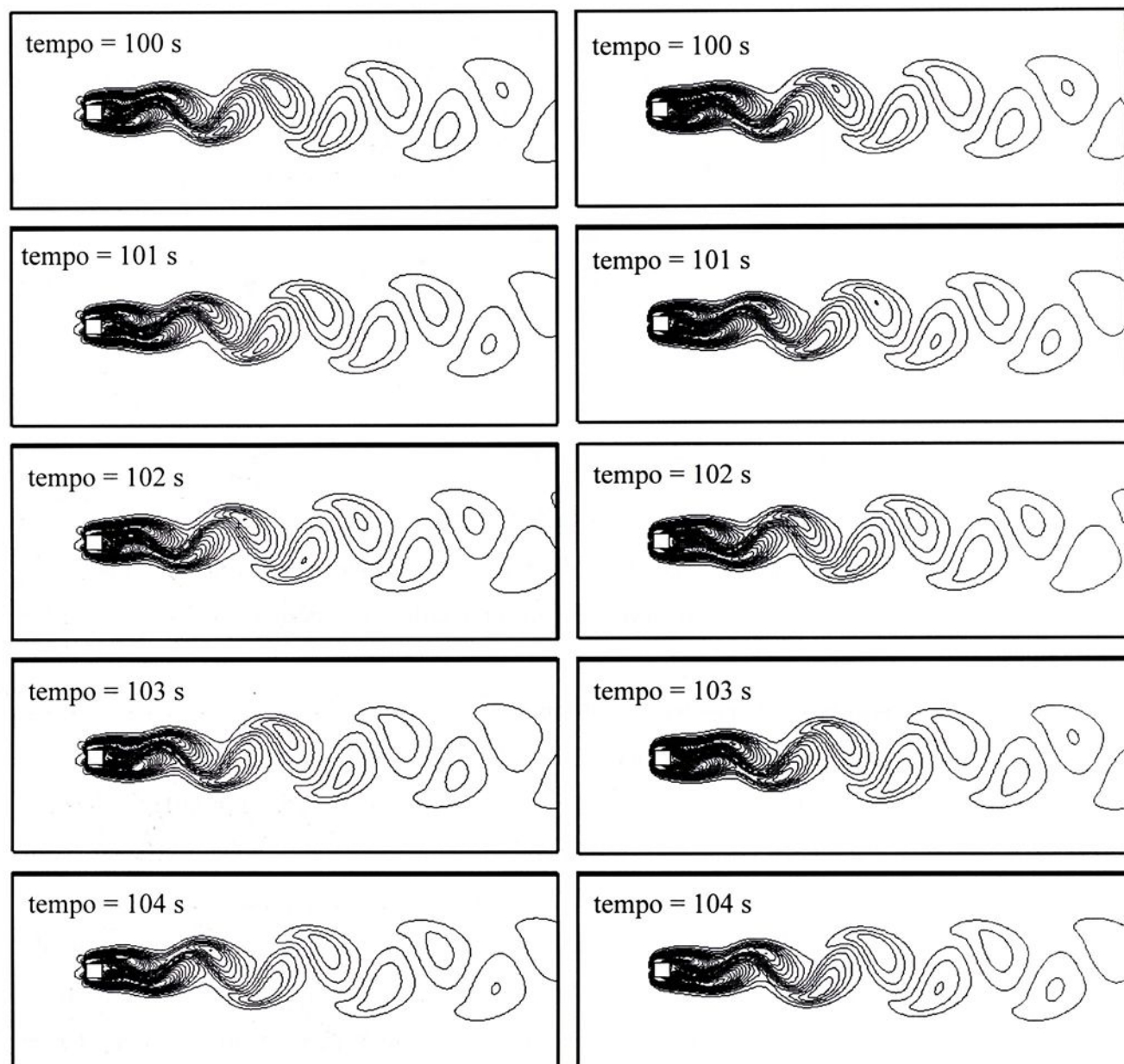
Figura 5.4 – Curva Strouhal *versus* Reynolds, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado: comparação entre resultados numéricos e experimentais.

5.2.3. Configurações da esteira turbilhonar

A dinâmica de emissão de vórtices foi analisada qualitativamente, comparando-se as curvas de isovorticidade entre os resultados do presente trabalho com os do programa Fluent®, como mostrado na Figura 5.5. Os campos foram gravados, em intervalos regulares de 1 s, a partir do instante $t = 100$ s, quando um regime estatisticamente permanente já havia sido atingido.

Esta sequência de imagens permite avaliar, ainda que grosseiramente em razão do pequeno número de quadros, o número de Strouhal, através da contagem de vórtices emitidos nos dez quadros consecutivos, tal como descrito no trabalho experimental de Mansur *et al.* (1996). Assim, tomando-se os resultados do presente trabalho, no intervalo compreendido entre 100 e 109 s, pode-se perceber a emissão de três vórtices inteiros, o que resulta, para uma velocidade na entrada $U_\infty = 0,0167$ m/s e $B = 0,006$ m, num Strouhal de aproximadamente 0,12. Este resultado mostra-se muito próximo do valor 0,117, obtido fazendo-se um tratamento do sinal dinâmico de velocidades, via Transformada Rápida de Fourier (FFT).

Comparando-se, agora, as imagens obtidas pelos dois programas – colunas da direita e da esquerda – nota-se uma pequena defasagem na velocidade de translação dos vórtices, que, evidentemente, se reflete no número de Strouhal, fornecendo $St = 0,117$ quando calculado pelo programa Fluids, contra $St = 0,125$ para o Fluent®. O método de acoplamento pressão-velocidade empregado foi o SIMPLEC, com tratamento dos termos advectivos pelo esquema Power-Law.



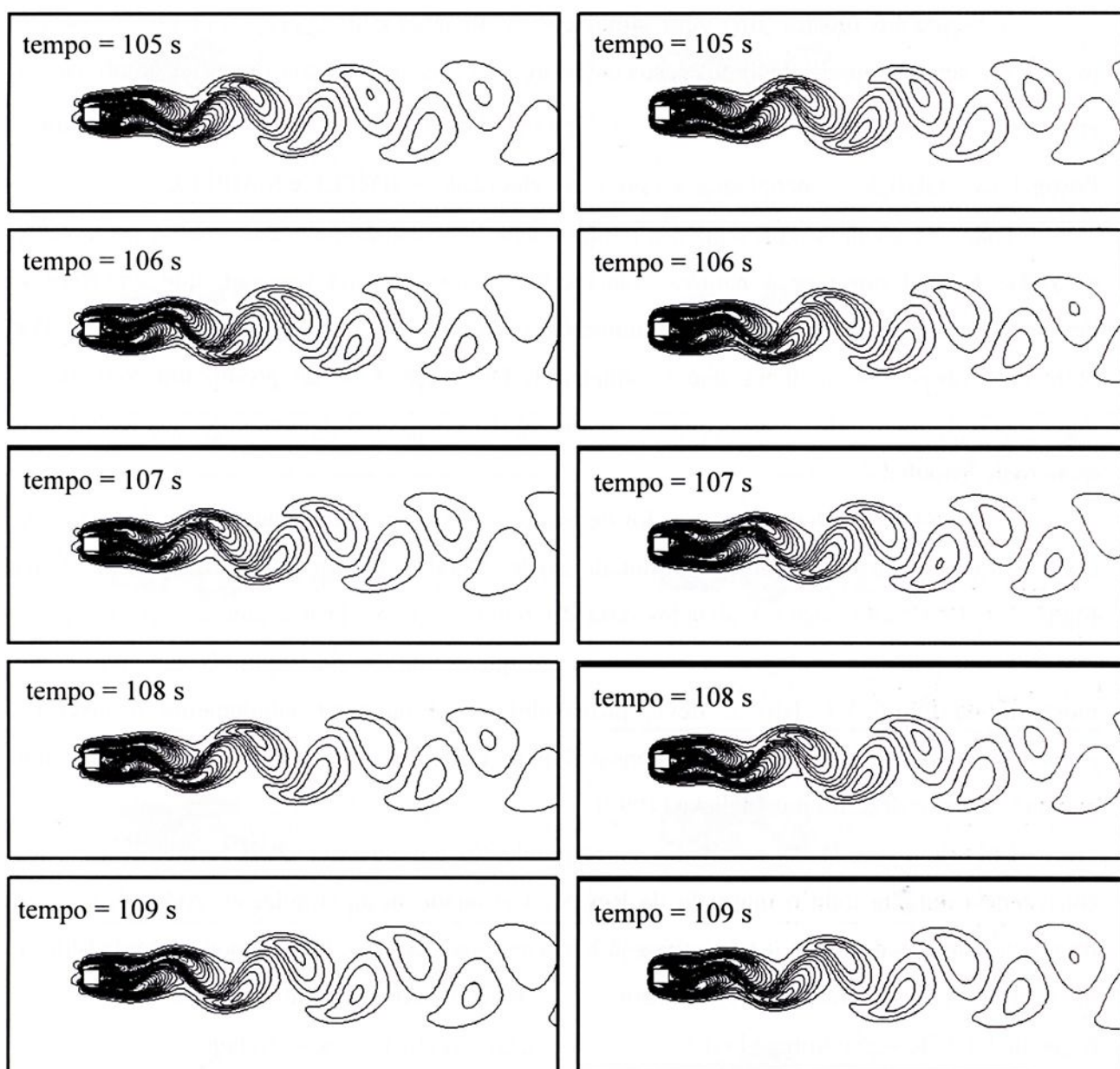
(a) Fluent®

(b) Presente trabalho - Fluids

Figura 5.5 – Evolução temporal das linhas de isovorticidade, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado a $Re = 100$.

(continua...)

(...continuação)



(a) Fluent®

(b) Presente trabalho - Fluids

Figura 5.5 – Evolução temporal das linhas de isovorticidade, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado a $Re = 100$.

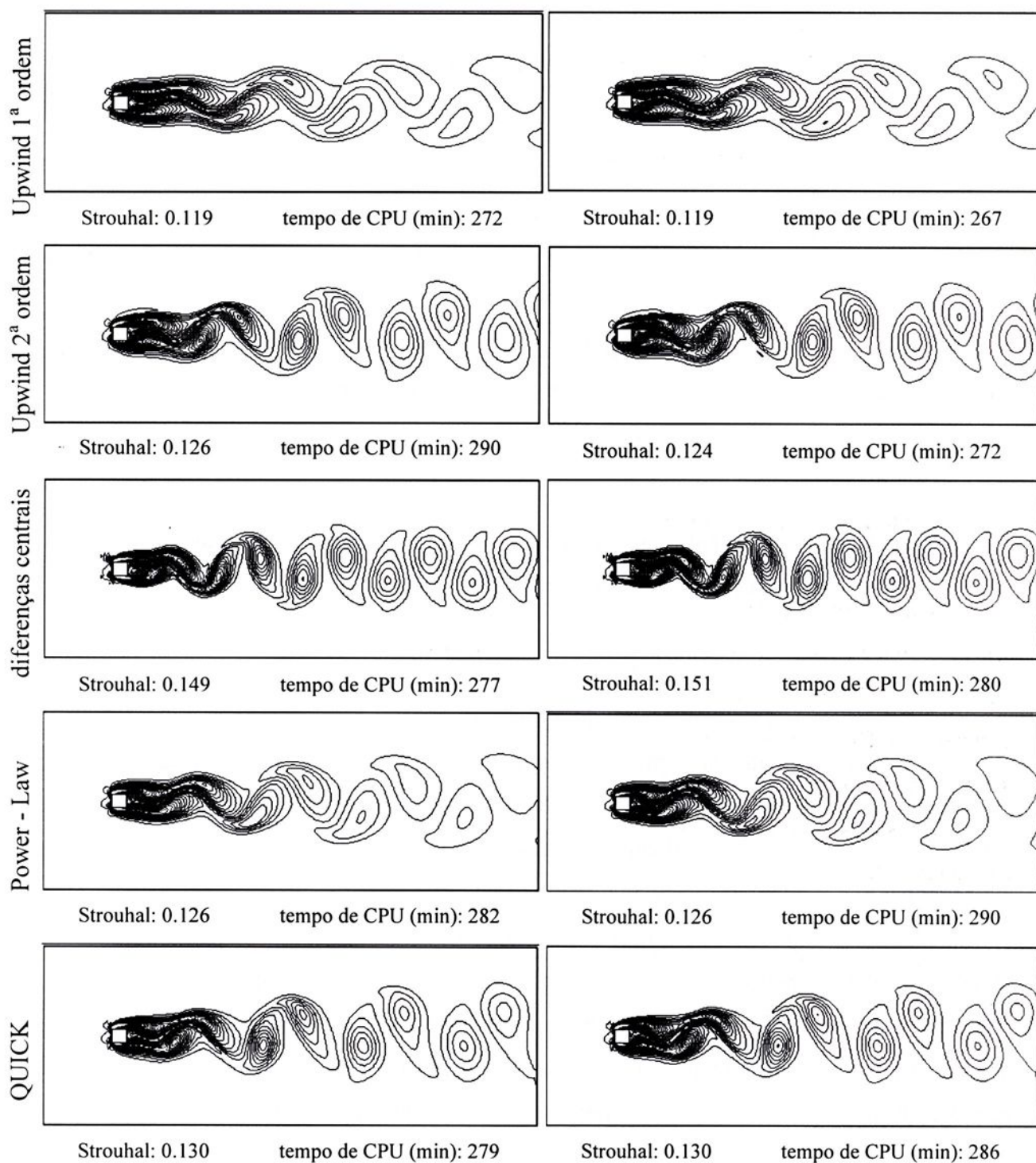
5.2.4. Esquemas de transporte advectivo e acoplamento pressão-velocidade

A Figura 5.6 mostra diferentes simulações realizadas com o programa Fluids, para o mesmo escoamento apresentado nos casos anteriores, empregando-se, agora, várias combinações entre esquemas de transporte advectivo – Upwind, Upwind 2^a ordem, Diferenças Centrais, Power-Law e QUICK – e acoplamentos pressão-velocidade – SIMPLE e SIMPLEC.

Todos os quadros representam a configuração apresentada pelo escoamento no instante $t = 100$ s. É fácil observar a natureza mais difusiva do esquema Upwind, que amortece o desenvolvimento da esteira, gerando um número de Strouhal bem mais baixo que os demais. Por outro lado, observa-se, também, que o esquema de Diferenças Centrais produz um escoamento mais instável, reduzindo o espaçamento entre vórtices e, conseqüentemente, aumentando o número de Strouhal.

É interessante observar que o valor de Strouhal obtido por Diferenças Centrais, para este caso, é o que melhor se aproxima do resultado experimental de Lindquist (2000), apresentado na Figura 5.4. Entretanto, testes realizados para diferentes regimes de escoamento, mostram que esta boa concordância se degenera na medida em que o número de Reynolds aumenta, como mostrado na Figura 5.7. Isto se deve, provavelmente, à natureza sabidamente instável do esquema de Diferenças Centrais, responsável pela introdução de oscilações numéricas nos resultados, como descrito por Maliska (1995).

Em contrapartida, os resultados correspondentes ao esquema QUICK mantiveram sua consistência durante todo o intervalo de Reynolds ensaiado nesta simulação. Além disso, este tipo de tratamento dos termos advectivos já havia sido amplamente testado por Almeida (2001), na solução de problemas análogos, fornecendo bons resultados. Em vista disso, apenas o esquema QUICK será empregado nas demais simulações realizadas neste trabalho.



(a) Método SIMPLE

(b) Método SIMPLEC

Figura 5.6 – Configuração do escoamento ao redor de um cilindro quadrado a $Re = 100$, no instante $t = 100$ s.

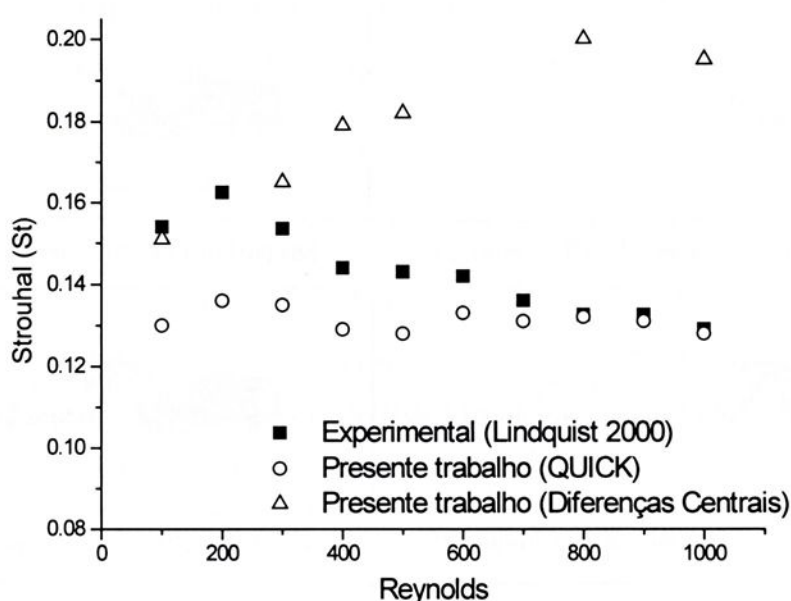


Figura 5.7 – Curva Strouhal *versus* Reynolds, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado: comparação entre resultados numéricos e experimentais.

5.2.5. Teste de compressão da malha

Para avaliar o comportamento do programa Fluids, com relação à estabilidade e à consistência dos resultados das simulações, empregando-se grades não uniformes, vários testes de compressão da malha foram realizados. Na execução deste ensaio, tomou-se como base a malha definida na Figura 5.1, variando-se gradativamente sua densidade na região da esteira, de 8 a 44 grades por B , sobre as faces do cilindro.

A Figura 5.8 apresenta, esquematicamente, as variáveis que foram alteradas para produzir os ensaios de compressão das malhas, enquanto seus respectivos valores estão reunidos e organizados na Tabela 5.1. Em todos os casos analisados, manteve-se sempre igual o número de malhas verticais (V_2) e horizontais (H_2) dispostas sobre as faces do cilindro. Estes valores são empregados na identificação da malha, feita na primeira coluna da Tabela 5.1.

Os resultados para o número de Strouhal, em função da densidade da malha, mostrados na Figura 5.9, foram obtidos com as mesmas condições de contorno definidas nos testes anteriores, empregando-se as diversas malhas especificadas na Tabela 5.1. É possível notar que, aumentando-se a densidade para aproximadamente 20 grades sobre o cilindro, a curva apresenta um comportamento monotonicamente crescente. A partir daí, ocorre uma nítida diminuição na taxa média de crescimento do número de Strouhal, acompanhada de oscilações.

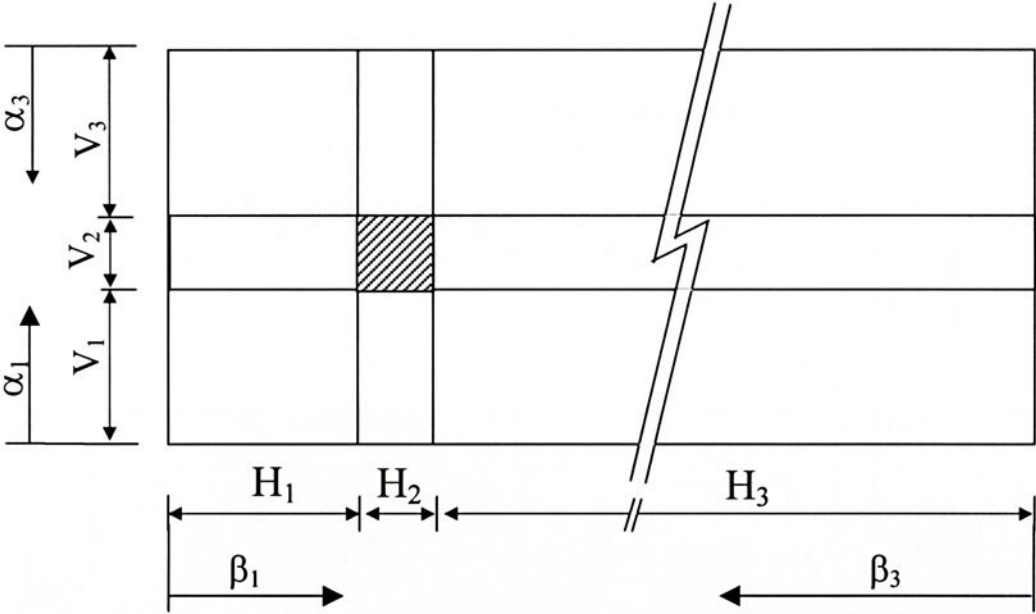


Figura 5.8 – Representação geométrica das diferentes regiões de um domínio computacional contendo um cilindro quadrado, para a construção de malhas não uniformes.

Tabela 5.1 – Valores empregados para o teste da malha.

Malha	H ₁	H ₂	H ₃	V ₁	V ₂	V ₃	β ₁ (%)	β ₃ (%)	α ₁ (%)	α ₃ (%)
8	40	8	240	48	8	48	0.0	0.0	0.0	0.0
10	39	10	239	47	10	47	1.4	0.2	0.9	0.9
12	38	12	238	46	12	46	2.1	0.3	1.7	1.7
14	37	14	237	45	14	45	3.2	0.42	2.4	2.5
16	36	16	236	44	16	44	3.8	0.55	3.2	3.2
18	35	18	235	43	18	43	4.6	0.67	3.8	3.8
20	34	20	234	42	20	42	5.3	0.73	4.2	4.5
22	33	22	233	41	22	41	6.0	0.77	4.8	5.0
24	32	24	232	40	24	40	6.7	0.82	5.4	5.6
26	31	26	231	39	26	39	7.1	0.9	6.0	6.2
28	30	28	230	38	28	38	8.2	0.95	6.5	6.8
30	29	30	229	37	30	37	9.0	1.0	7.1	7.4
32	28	32	228	36	32	36	9.8	1.1	7.6	8.0
34	27	34	227	35	34	35	10.8	1.1	8.0	8.6
36	26	36	226	34	36	34	11.5	1.15	8.5	9.3
38	25	38	225	33	38	33	12.5	1.2	9.3	10.0
40	24	40	224	32	40	32	13.3	1.25	9.8	10.8
42	23	42	223	31	42	31	14.5	1.3	10.4	11.6
44	22	44	222	30	44	30	15.8	1.3	10.9	12.4

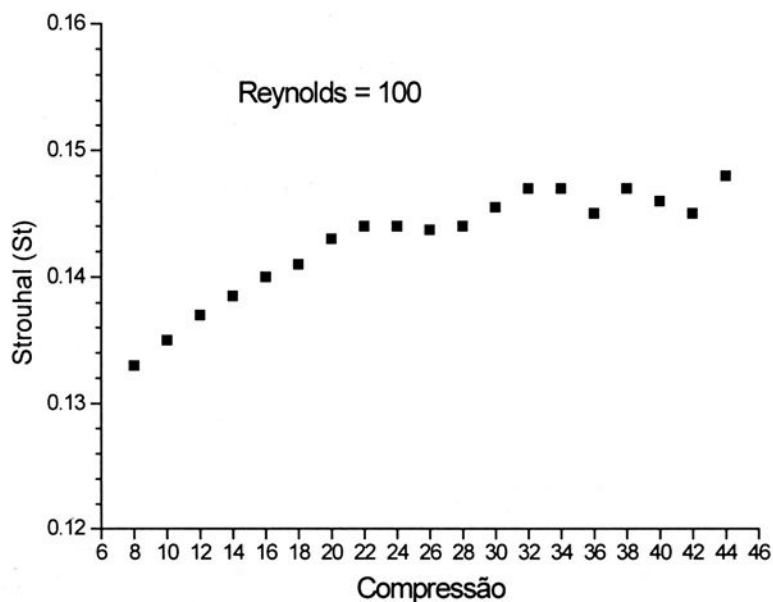


Figura 5.9 – Número de Strouhal *versus* densidade de grades, para o escoamento ao redor de um cilindro quadrado, a $Re = 100$.

5.3. Arranjos de cilindros

Quando dois ou mais cilindros são colocados suficientemente próximos uns dos outros, o escoamento ao redor de um deles pode afetar fortemente o movimento do fluido ao redor dos corpos adjacentes. Nestas situações, a dinâmica de formação e transporte dos vórtices torna-se ainda mais complexa que no caso de cilindros isolados. A representação satisfatória dos mecanismos de interação entre as estruturas turbilhonares originadas num escoamento deste tipo constitui um desafio interessante a qualquer programa de simulação.

Em problemas desta natureza, o espaçamento relativo entre os objetos – distância entre eixos, dividida pela dimensão característica do corpo sólido – influi significativamente na estrutura do escoamento. De maneira geral, à medida que a distância relativa diminui, a interação entre as estruturas turbilhonares aumenta, interferindo, conseqüentemente, no número de Strouhal. Todavia, se a distância entre dois sólidos for demasiadamente reduzida, do ponto de vista da dinâmica dos fluidos, eles podem atuar como um só corpo imerso no escoamento.

No presente trabalho, foram simulados dois diferentes arranjos de cilindros quadrados e retangulares, para os quais se dispunha de resultados experimentais para efeito de comparação.

5.3.1 Cilindros retangulares dispostos lado a lado

A Figura 5.10 mostra a malha computacional irregular, com densidade de grades 210x200, que corresponde a 42824 elementos, empregada nos cálculos referentes ao escoamento em torno de dois cilindros retangulares, com razão de forma $\phi = 5$, separados por uma distância de $1B$ e imersos num escoamento que vai da esquerda para a direita.

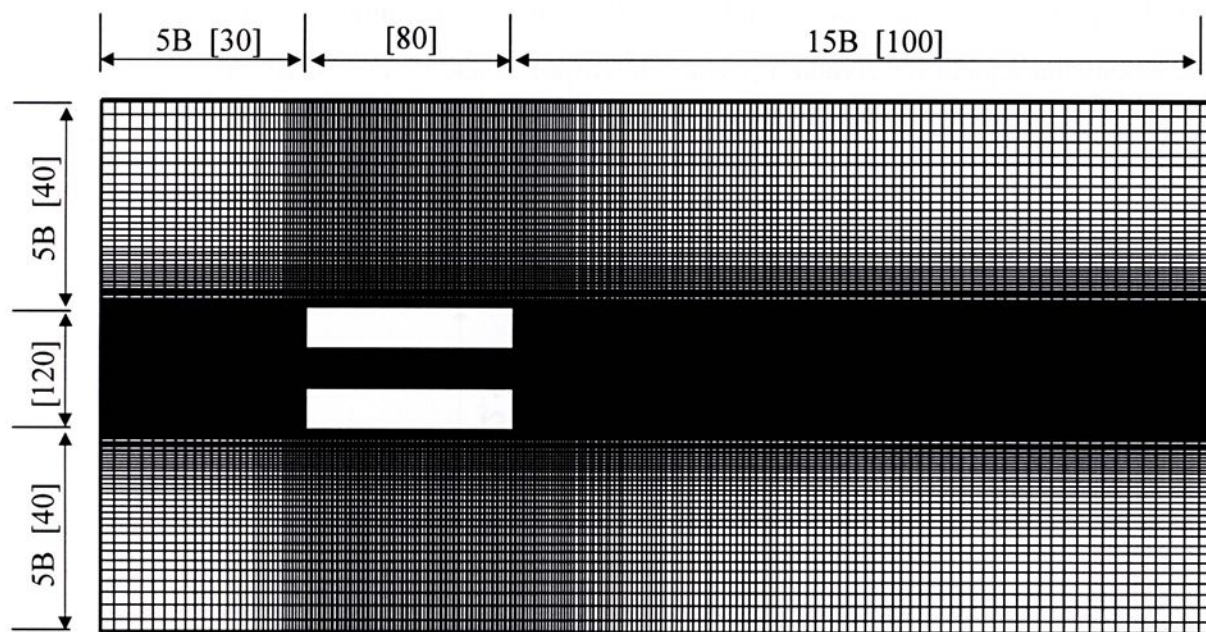


Figura 5.10 – Malha computacional utilizada na simulação de um arranjo de cilindros retangulares dispostos lado a lado.

Três sondas numéricas foram posicionadas na região da esteira, como mostra a Figura 5.11, para medir a componente v da velocidade. As condições de contorno nas fronteiras do domínio são basicamente as mesmas empregadas na simulação dos cilindros quadrados isolados. O passo de tempo empregado nos cálculos, por sua vez, variou de 10^{-2} a 10^{-4} s, conforme a necessidade. A fim de possibilitar a comparação com os resultados numéricos e experimentais de Campregher *et al.* (2001), as simulações foram realizadas para números de Reynolds variando na faixa de 100 à 1000, com intervalos de 100 em 100.

A Figura 5.12 mostra os gráficos gerados a partir dos sinais capturados pela Sonda 1, para os diferentes regimes de escoamento. Como era de se esperar, o padrão dos sinais obtidos passam gradativamente de um padrão oscilatório, com uma frequência bem definida, a $Re = 100$, para um comportamento bem mais caótico, a $Re = 1000$.

Um estudo qualitativo do padrão de emissão de vórtices pode ser realizado com base nos campos de vorticidade representados na Figura 5.13, obtidos no mesmo instante adimensional

$t^* = 278$, calculado por:

$$t^* = \frac{t U_\infty}{B} \quad (5.1)$$

É interessante notar que o nível de interação entre os vórtices aumenta com o número de Reynolds. De fato, o resultado correspondente a $Re = 100$ mostra uma esteira que, até certo ponto, se assemelha àquela observada a jusante de corpos isolados. Por outro lado, a partir de $Re = 500$, observa-se uma acentuada interação entre os vórtices gerados pelos dois cilindros, por uma notável deformação da esteira, decorrente do emparelhamento de turbilhões.

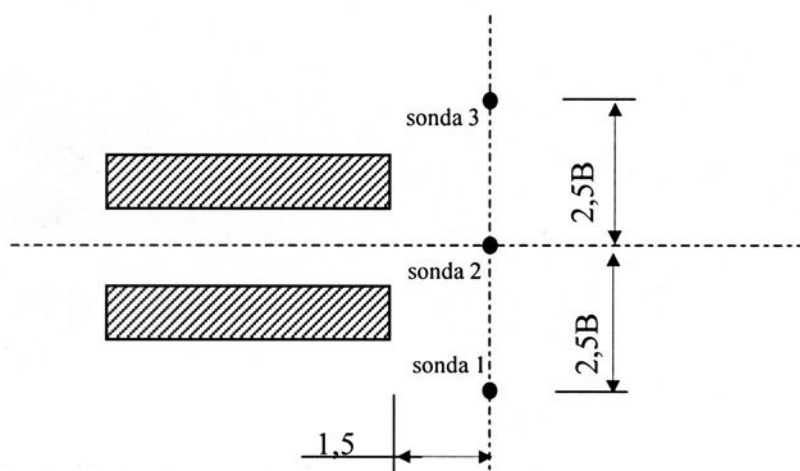


Figura 5.11 – Posição relativa das sondas numéricas para a aquisição do sinal da velocidade v a jusante dos corpos cilíndricos.

Na Figura 5.14, a curva do número de Strouhal em função do número de Reynolds é confrontada com os dados experimentais de Campregher *et al.* (2001), obtidos com uma sonda anemométrica de filme quente, num túnel hidrodinâmico vertical operado pela ação da gravidade. Em ambos os casos, numérico e experimental, a frequência de Strouhal é determinada exatamente da mesma forma, aplicando-se uma FFT ao sinal de velocidade previamente adquirido.

Nota-se, através da comparação destes resultados, uma boa concordância entre eles, na maior parte da faixa considerada. Apenas para $Re = 1000$, ocorre uma discrepância considerável. Deve-se observar, entretanto, que esta diferença não pode ser simplesmente atribuída a uma deficiência do código computacional. Ainda que o número de Reynolds já seja suficientemente elevado para justificar o emprego de um modelo de turbulência, não é insensato pensar que possa ter ocorrido falha na aquisição experimental do sinal de velocidade. Com efeito, sondas

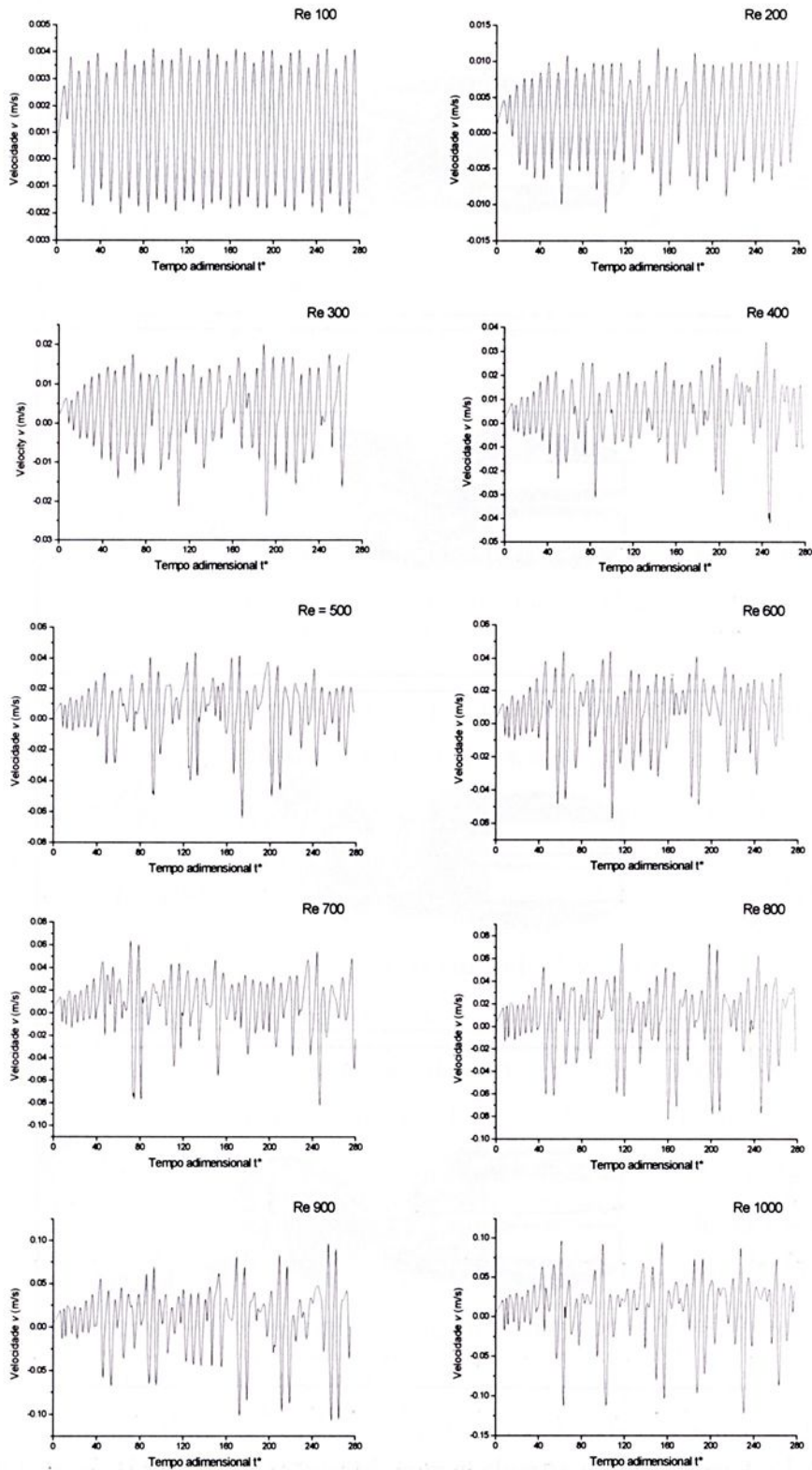


Figura 5.12 – Sinais numéricos de velocidade a jusante de um arranjo de cilindros retangulares posicionados lado-a-lado, captados pela Sonda 1.

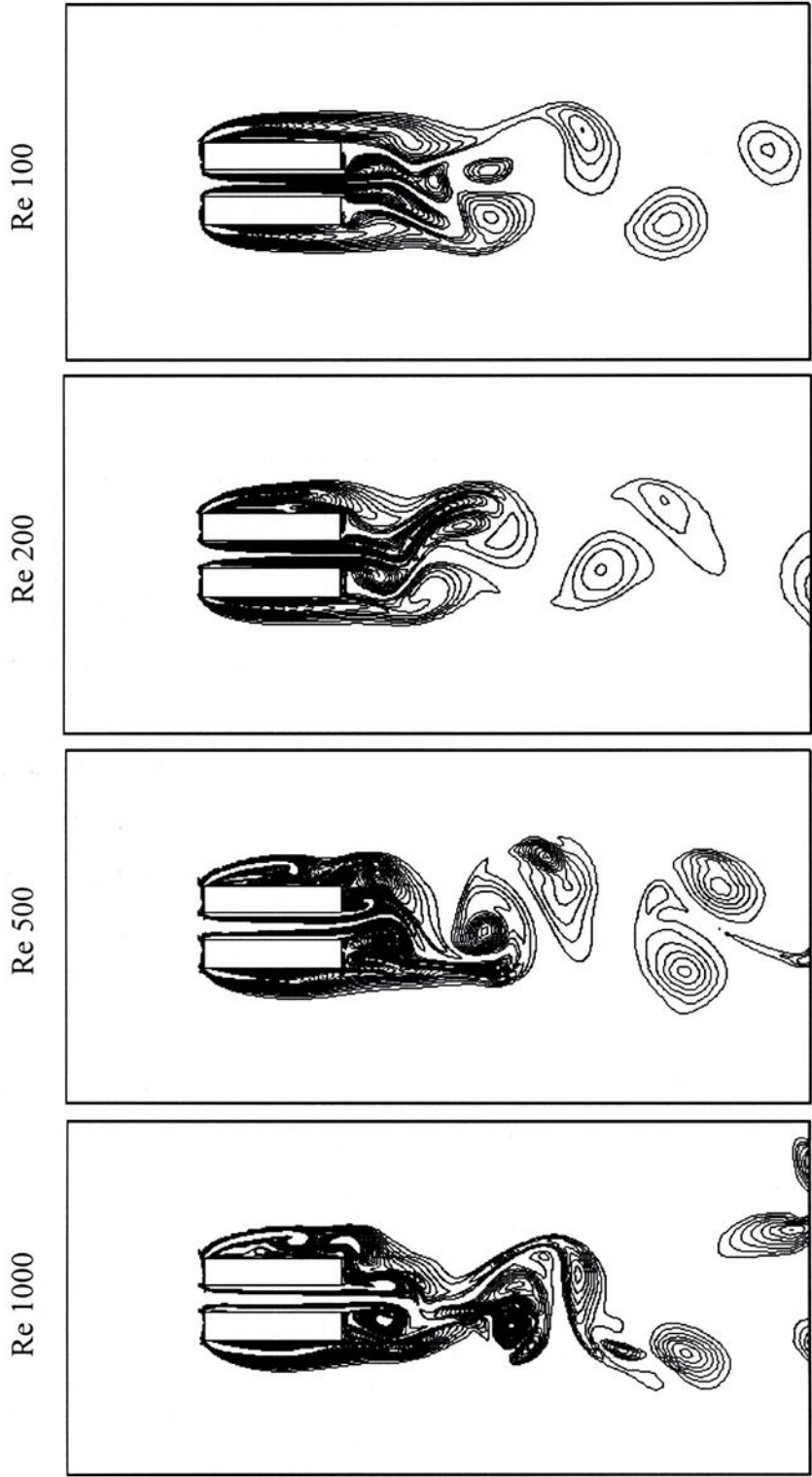


Figura 5.13—Curvas de isovorticidade para diferentes regimes de escoamento, obtidas no tempo adimensional $t^* = 278$.

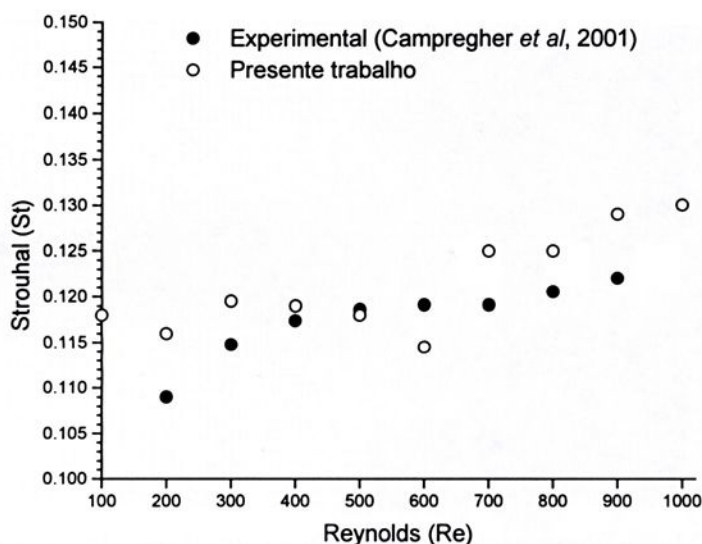


Figura 5.14 – Curva Strouhal *versus* Reynolds, para o escoamento ao redor de dois cilindros dispostos lado-a-lado: comparação entre resultados numéricos e experimentais.

anemométricas de filme quente operando em meio líquido estão sujeitas a fortes incrustações, que levam à perda freqüente de calibração. A queda brusca no número de Strouhal experimental faz pensar que uma impureza qualquer possa ter aderido à superfície do filme, provocando um erro na medição.

5.3.2. Três cilindros quadrados dispostos em linha (*tandem*).

A Figura 5.15 representa a malha computacional empregada nos cálculos referentes ao escoamento em torno de três cilindros quadrados dispostos em linha, separados entre si por uma distância de $1B$ e imersos num escoamento que vai da esquerda para a direita.

Ensaio experimentais de visualização de escoamentos realizados por Duarte (2002) mostraram que no espaço compreendido entre os cilindros, uma região de baixa velocidade pode ser identificada, onde belos vórtices permanecem estacionários. Na tentativa de bem representar este fenômeno, implementou-se uma malha computacional com 330×120 volumes, com alta densidade de grades sobre a região dos cilindros.

Uma comparação entre os resultados numéricos e experimentais pode ser vista na Figura 5.16, que revela um comportamento complexo da curva de Strouhal, com uma descontinuidade em torno de $Re \cong 260$, muito bem capturada pelo programa.

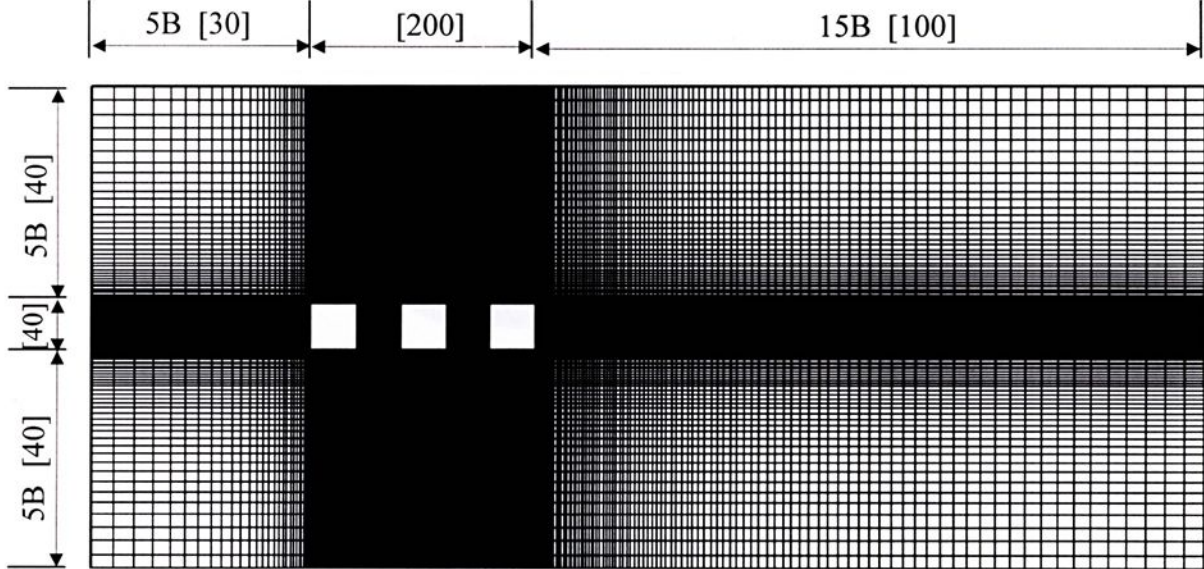


Figura 5.15 – Malha computacional utilizada na simulação de um arranjo de três cilindros quadrados posicionados em linha, separados de uma distância de $1B$ entre si.

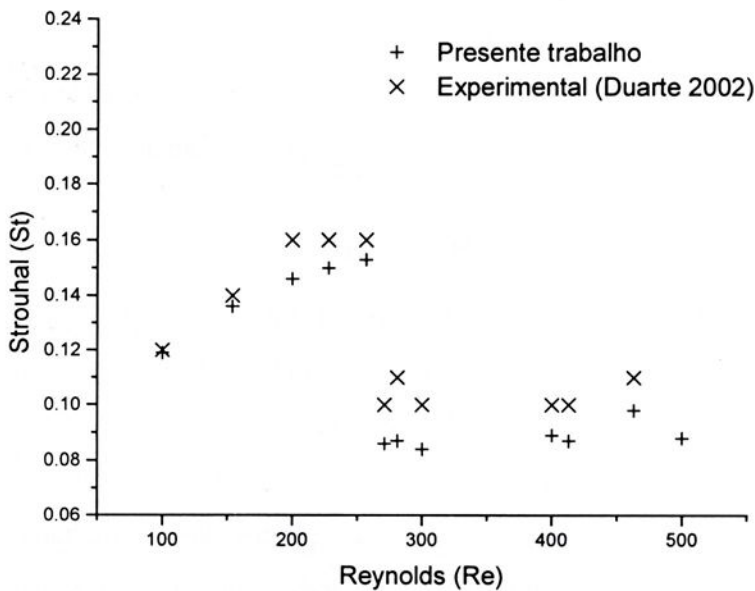


Figura 5.16 – Curva Strouhal *versus* Reynolds, para o escoamento ao redor de três cilindros quadrados dispostos em *tandem*.

Com o objetivo de melhor investigar a descontinuidade do número de Strouhal identificada na Figura 5.16, várias simulações foram efetuadas, com Reynolds variando de maneira mais refinada, entre 220 e 280. Na Figura 5.17, são colocados, lado a lado, os resultados qualitativos do campo de vorticidade e as curvas contendo as FFT do sinal de velocidade na esteira dos cilindros.

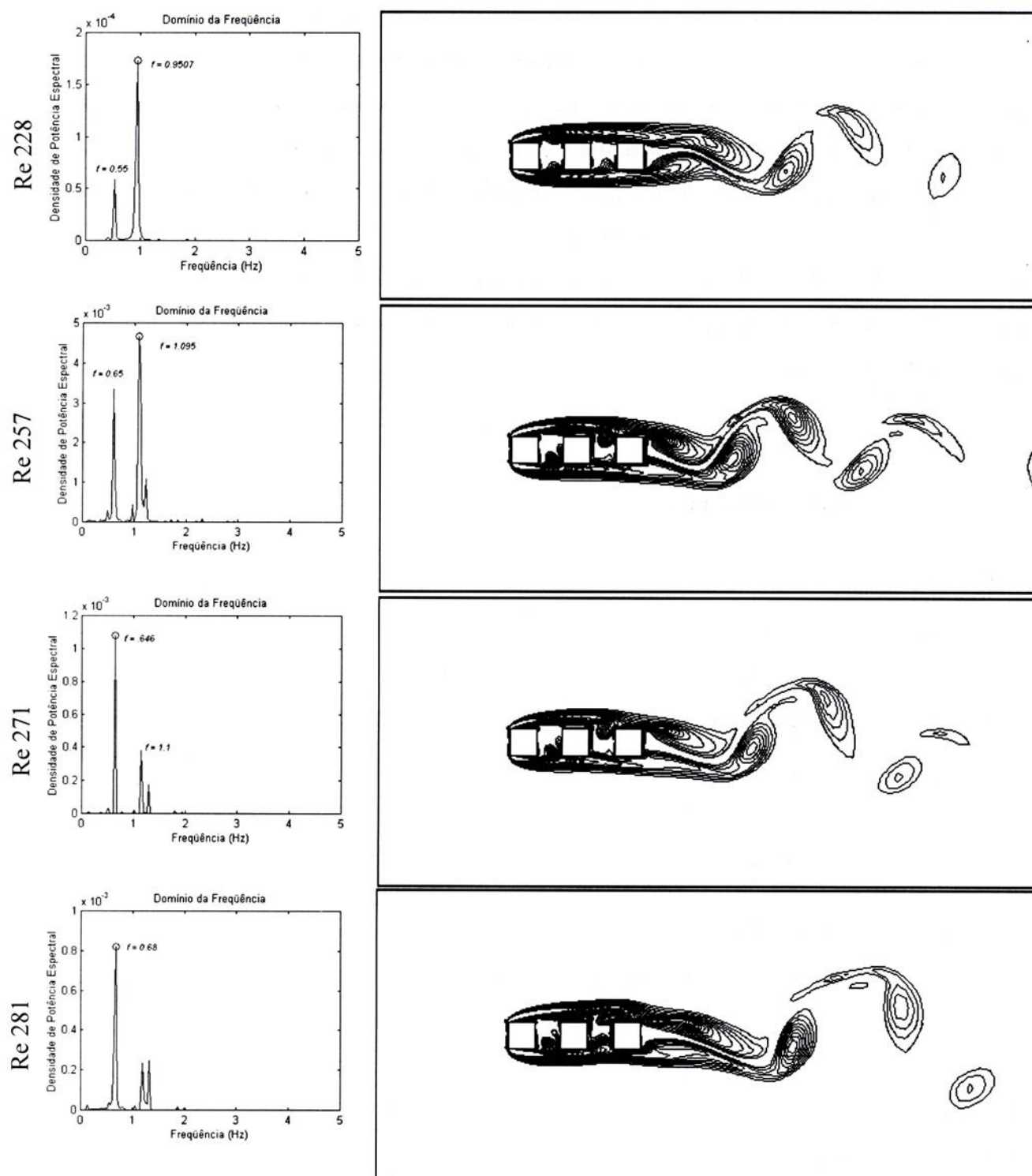


Figura 5.17 – Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade próximos à descontinuidade da curva de Strouhal, para o escoamento ao redor de três cilindros quadrados dispostos em *tandem*.

Uma análise das curvas FFT, que fornecem a frequência para o cálculo do número de Strouhal, mostram que, em $Re = 228$, a frequência predominante de emissão de vórtices é próxima de 1 Hz, porém, já é possível notar o aparecimento de um outro pico com menor densidade de potência espectral, próximo a 0,5 Hz. Entre $Re = 257$ e $Re = 271$ observa-se uma inversão do pico que determina a frequência predominante. Um fenômeno semelhante foi observado experimentalmente por Nakamura (1996) e Lindquist (2000), e reproduzido no estudo numérico de Almeida (2001), para o escoamento em torno de cilindros retangulares isolados, variando-se a razão de forma ϕ . Uma simulação análoga foi realizada também neste trabalho e é apresentada mais adiante.

5.4—Modelagem da turbulência

Estudos realizados por Almeida (2001) mostraram que, a baixos números de Reynolds, resultados numéricos e experimentais para o escoamento em torno de cilindros retangulares apresentam boa concordância, uma vez que a própria difusão numérica inerente à metodologia de cálculo introduz uma viscosidade artificial, que se soma à viscosidade absoluta do fluido, suavizando gradientes e permitindo uma boa representação do problema. A partir de um certo Reynolds, as curvas de Strouhal *versus* Reynolds se distanciam, colocando em evidência a necessidade de modelagem explícita da turbulência.

No presente trabalho, o modelo sub-malha de Smagorinsky (1963) foi empregado, para representar o escoamento turbulento em torno de geometrias cartesianas, através da metodologia de Simulação de Grandes Escalas (LES). Para testar esta simulação, foram escolhidos três regimes de escoamentos ao redor de um cilindro quadrado, a altos números de Reynolds, quais sejam: 5000, 14000 e 22000; e quatro valores distintos para a constante de Smagorinsky: 0,05, 0,10, 0,15 e 0,18. A grade computacional adotada foi a Malha 20, da Tabela 5.1, que propiciou uma boa representação do problema, para números de Reynolds moderados, sem o emprego de modelagem da turbulência.

Os resultados, mostrados na Tabela 5.2, são comparados com os dados experimentais de Okajima (1982), de Durão *et al.* (1991) e de Lyn *et al.* (1995). A melhor concordância entre os resultados ocorre com o uso do modelo de turbulência, atribuindo-se o valor 0,10 à constante de Smagorinsky C_s , para o qual o número de Strouhal cai de 0,168, sem modelagem, para 0,141, com modelagem, no caso de $Re = 14000$.

Tabela 5.2 – Resultados do número de Strouhal para simulações ao redor de um cilindro quadrado isolado, com e sem modelagem de turbulência.

Re	Δt [s]	Número de Strouhal					
		Experimental	Sem Modelagem	Com Modelagem (LES) – Const. de Smagorinsky (Cs)			
				0,05	0,10	0,15	0,18
5000	10^{-4}	0,133 ⁽¹⁾	0,144	0,144	0,143	0,141	0,142
5000	10^{-5}	0,133 ⁽¹⁾	0,141	-	0,139	-	0,139
14000	10^{-5}	0,138 ⁽²⁾	0,168	-	0,141	0,144	0,146
22000	10^{-6}	0,135 - 0,139 ⁽³⁾	0,141	-	0,140	-	-

⁽¹⁾ Okajima (1982); ⁽²⁾ Durão *et al.* (1991); ⁽³⁾ Lyn *et al.* (1995).

Cabe ressaltar, ainda, o importante papel exercido pelo passo de tempo empregado nos cálculos, que parece exercer uma influência sobre o número de Strouhal ainda maior que a própria constante de Smagorinsky, como se verifica para o caso de $Re = 5000$, onde dois passos de tempo, 10^{-4} e 10^{-5} s, foram empregados. Uma investigação mais profunda neste sentido seria, sem dúvida alguma, bastante interessante. Entretanto, deve-se considerar que o tempo despendido nos cálculos cresce de forma não linear com a diminuição do passo de tempo. A título de informação, as simulações realizadas para $Re = 22000$, com e sem modelagem, empregando-se um passo de tempo de 10^{-6} s, demandaram, em média, 210 horas de CPU, num microcomputador AMD-K7 de 700 MHz, com 512 MB de memória RAM.

5.5. Razão de Forma (ϕ)

A razão de forma constitui um dos parâmetros que maior influência exerce sobre o escoamento ao redor de cilindros de base retangular. No presente estudo, cilindros com razão de forma ϕ variando de 1 a 10 foram simulados numericamente, para um único número de Reynolds, fixo em 1000, com e sem o emprego de modelo de turbulência. Para permitir uma comparação consistente dos resultados obtidos, a mesma granulometria das grades sobre o cilindro foi mantida em todas simulações, implicando na construção de malhas com números



diferentes de nós, para cada um dos casos analisados. Nos cálculos onde o modelo de Smagorinsky foi empregado, o valor $C_s = 0,10$ foi adotado.

A Figura 5.18 mostra, para os diferentes casos avaliados, a evolução temporal das respectivas componentes v da velocidade. É fácil notar que, para este regime de escoamento, praticamente não há diferença entre as curvas obtidas com e sem modelagem, para $\phi = 6$, $\phi = 8$ e $\phi = 9$. O efeito do modelo no comportamento do sinal de velocidade parece só se tornar importante quando a razão de forma aumenta para 10. Nesta situação, o escoamento em torno do cilindro assume uma configuração mais complexa, com múltiplas estruturas turbilhonares se deslocando sobre as suas faces, como mostra a Figura 5.19.

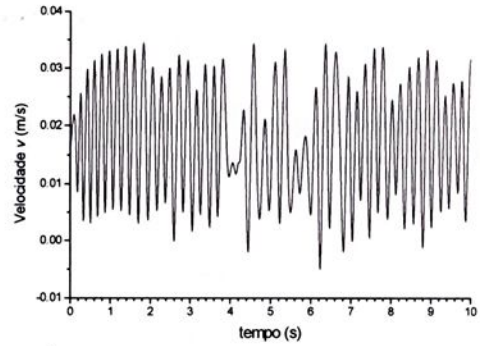
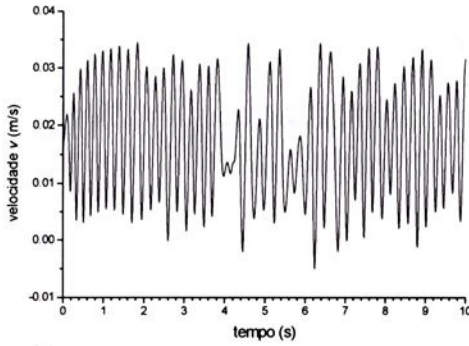
Como seria de se esperar, este efeito reflete-se diretamente sobre o número de Strouhal, mostrado na Figura 5.20, onde os resultados da presente simulação são comparados com os obtidos experimentalmente por Nakamura *et al.* (1996). É interessante, observar que, de maneira geral, o programa prediz, com boa aproximação, o comportamento em forma de degraus, apresentado pela curva de Strouhal em função da razão de forma ϕ . Deve-se notar, aí, o papel decisivo que a modelagem da turbulência exerce sobre o número de Strouhal, para cilindros com altos valores de razão de forma ($\phi = 10$), aproximando o valor calculado do experimental. Nestas circunstâncias, o escoamento em torno do obstáculo atinge um alto grau de complexidade, com a presença estruturas turbilhonares que galopam sobre as superfícies laterais do cilindro. Isto justifica a maior importância que a modelagem adquire, mesmo para números de Reynolds não muito elevados.

Nas Figuras 5.21 e 5.22 são apresentados os campos de vorticidade para $\phi = 6$ e $\phi = 10$, respectivamente, que permitem observar os efeitos de descolamento e recolamento sobre as paredes do cilindro, que caracterizam um escoamento deste tipo. A presença de vórtices sobre as faces do cilindro permite verificar um fato interessante, já identificado por alguns trabalhos da literatura, como descrito por Almeida (2001). A quantidade n de vórtices, presentes simultaneamente, sobre uma das superfícies laterais do cilindro e o número de Strouhal (St_A), baseado na dimensão A do cilindro, podem ser correlacionados pela expressão:

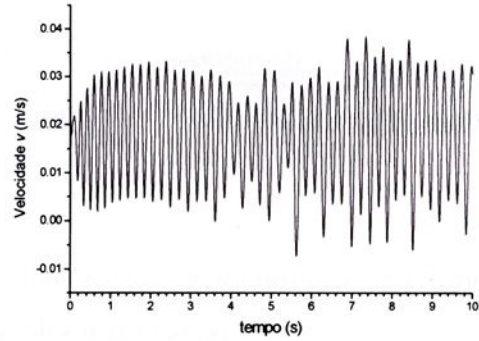
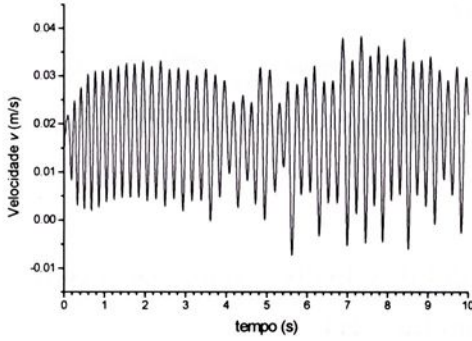
$$St_A \cong 0,6 n \quad (5.2)$$

Assim, $n = 1$ para cilindros com $\phi = 3$ a 5, $n = 2$ para cilindros com $\phi = 6$ a 8 e $n = 3$ para $\phi = 9$ a 12, coincidindo com os resultados experimentais de Ohya *et al.* (1992).

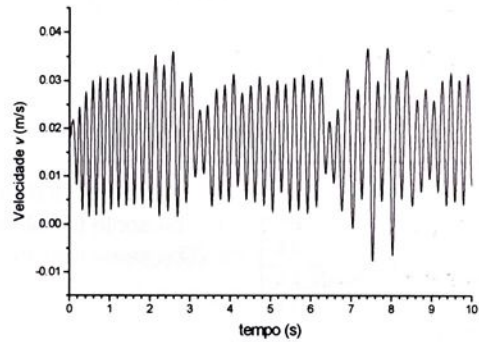
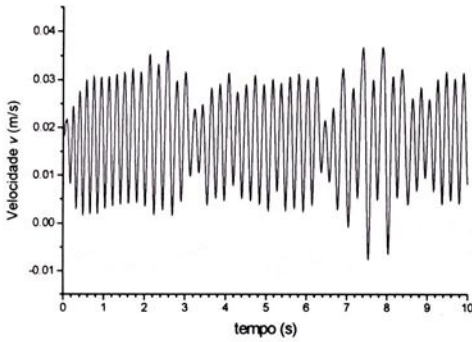
Razão de forma = 6



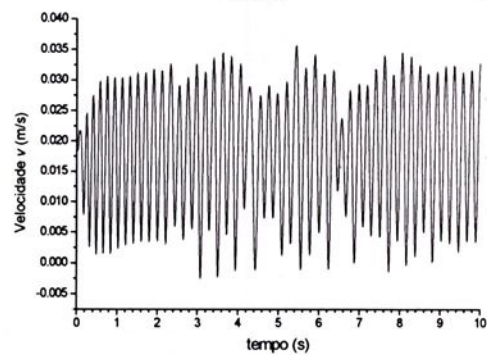
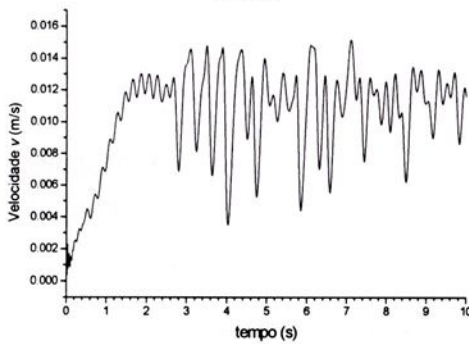
Razão de forma = 8



Razão de forma = 9



Razão de forma = 10



(a) Sem modelagem

(b) Com modelagem

Figura 5.18 – Sinais numéricos de velocidade a jusante de cilindros retangulares com diferentes razões de forma, para $Re = 1000$.

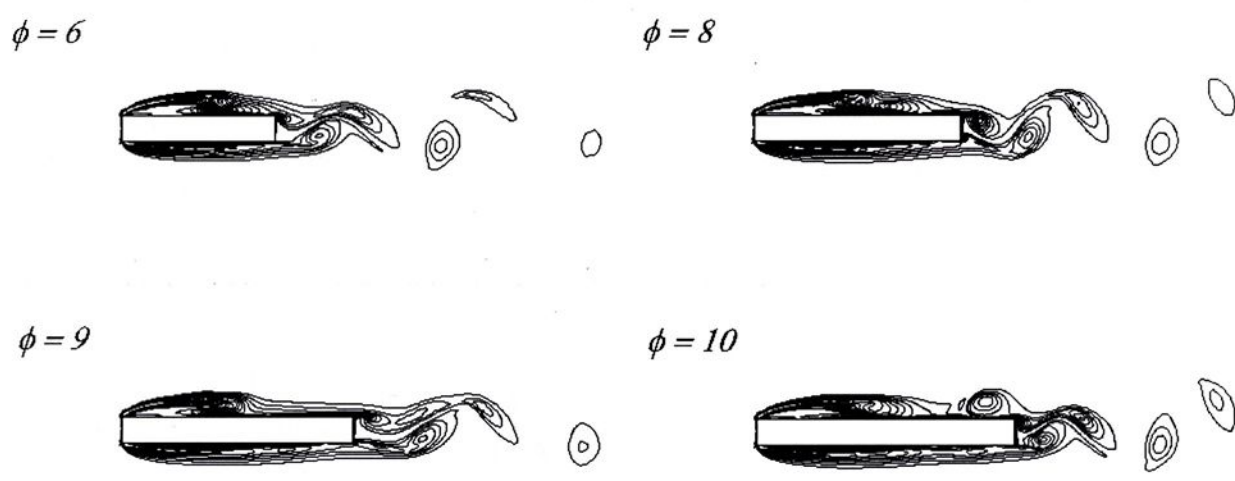


Figura 5.19 – Configurações do escoamento ao redor de cilindros retangulares com diferentes razões de forma, para $Re = 1000$.

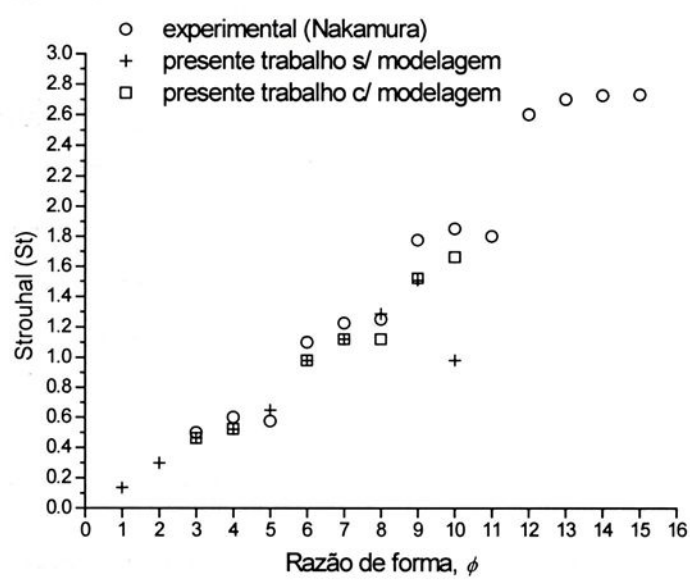


Figura 5.20 – Curva de Strouhal *versus* Razão de Forma, para $Re = 1000$.

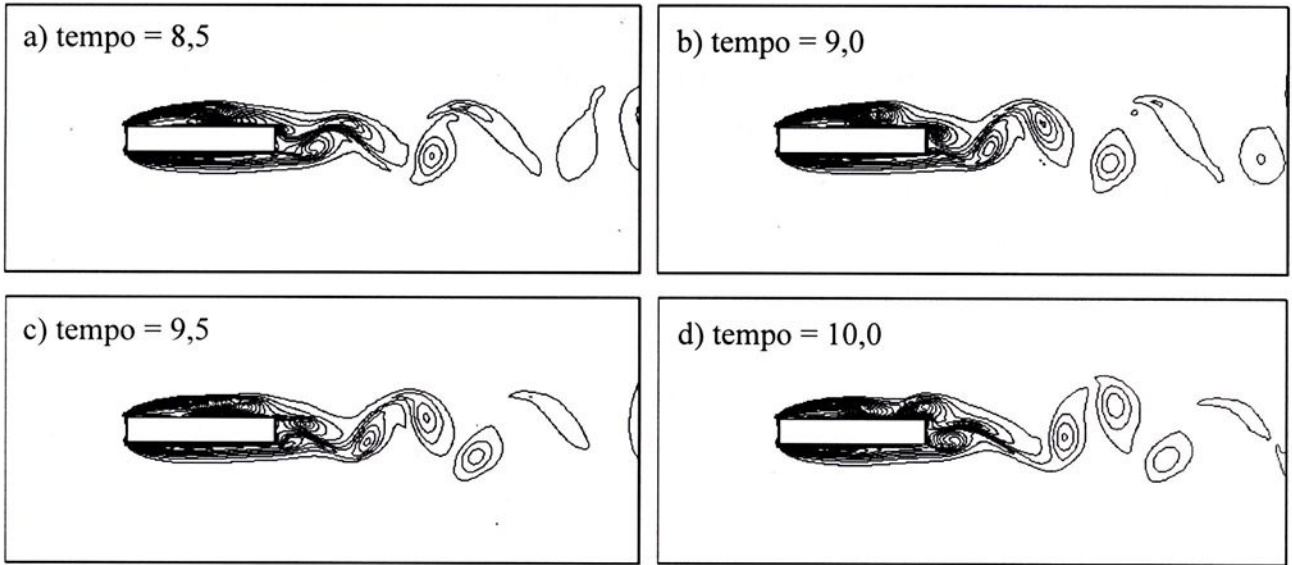


Figura 5.21 – Evolução temporal do campo de vorticidade em torno de um cilindro retangular com $\phi = 6$, para $Re = 1000$.

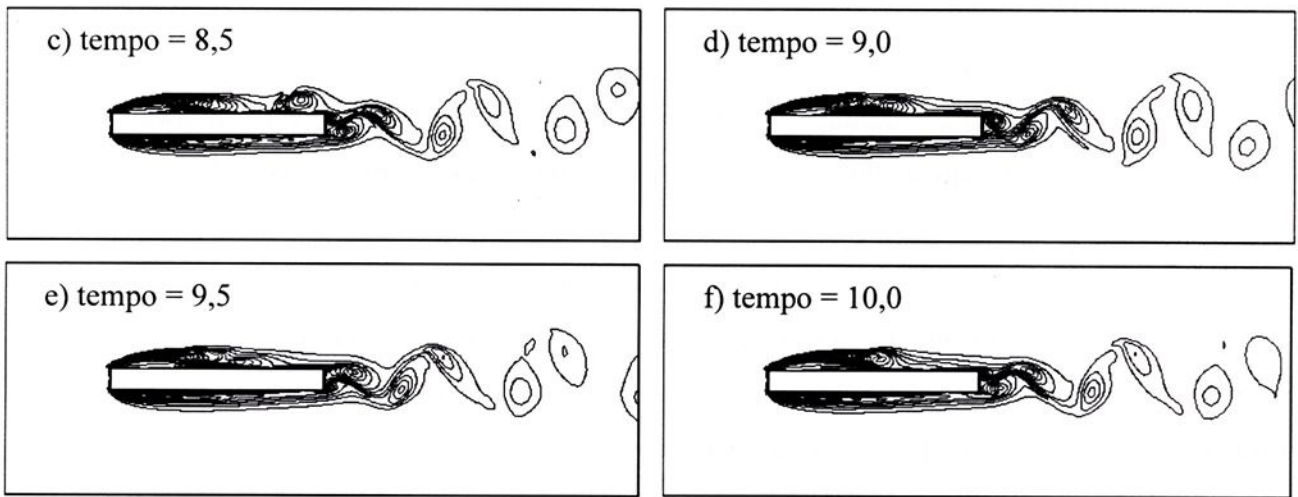


Figura 5.22 – Evolução temporal do campo de vorticidade em torno de um cilindro retangular com $\phi = 10$, para $Re = 1000$.

5.6 – Cilindro quadrado posicionado próximo a uma parede sólida

Escoamentos em torno de obstáculos posicionados próximos a paredes ocorrem freqüentemente em problemas de convecção forçada em circuitos eletrônicos, dentre vários

outros exemplos. Nas simulações realizadas neste trabalho, foram estudados cilindros de base quadrada, posicionados no domínio de cálculo próximos à fronteira lateral inferior, como observa-se na Figura 5.23. Cálculos com e sem modelagem de turbulência foram desenvolvidos. Em relação aos demais casos já apresentados, a única modificação no tipo de condição de contorno empregada encontra-se nas duas fronteiras laterais, agora substituídas por paredes sólidas, simulando o escoamento no interior de um canal.

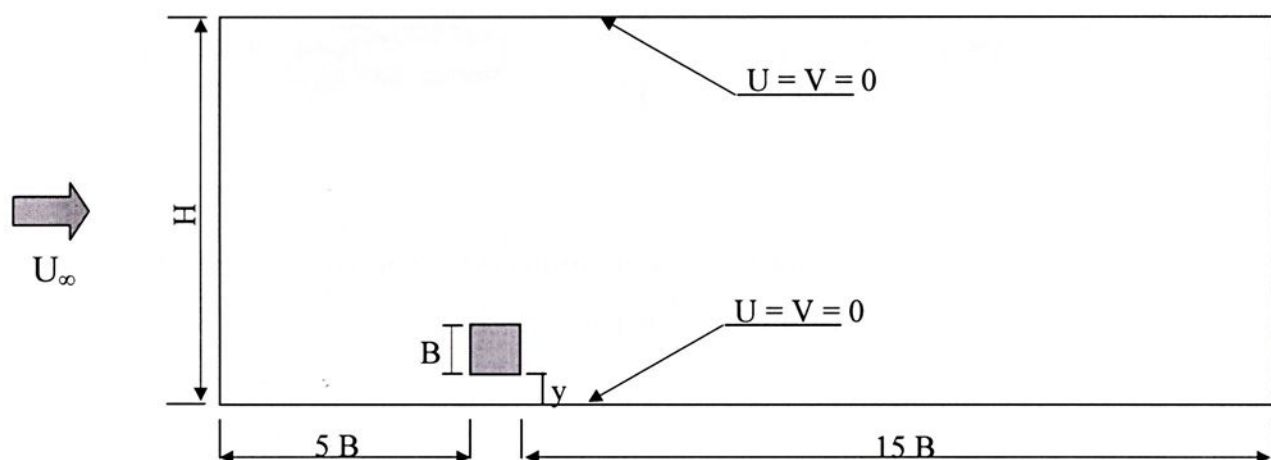


Figura 5.23 – Malha computacional utilizada na simulação do escoamento em torno de um cilindro quadrado posicionado nas proximidades de uma parede sólida.

A Figura 5.24 mostra o conjunto de dados obtidos nas diversas simulações realizadas para este problema, confrontados com os resultados experimentais de Durão *et al.* (1991). Deve-se ressaltar que, para melhor comparação dos resultados, todas as dimensões do problema estudado por Durão *et al.* (1991) foram respeitadas nas simulações, notadamente, a altura H do domínio (153 mm) e o diâmetro B do cilindro (20mm). O adimensional Y/B representa a distância da face inferior do cilindro até a parede, dividida pela dimensão característica do obstáculo. É interessante observar que a frequência de emissão dos vórtices, neste tipo de problema, varia linearmente com o número de Reynolds, enquanto o número de Strouhal permanece constante – $St = 0,133$ (experimental) e $St = 0,16$ (Fluids). Embora, quantitativamente, se observe uma diferença da ordem de 20% nos resultados, deve-se notar que o comportamento linear dos pontos experimentais foi adequadamente reproduzido nos cálculos.

Um fenômeno importante no contexto deste tipo de escoamento consiste na interrupção da emissão de vórtices periódicos, que ocorre, para um dado número de Reynolds, quando o

corpo sólido aproxima-se da parede, além de uma distância menor ou igual a $Y/B_{\text{crítico}}$, conhecida como espaçamento crítico.

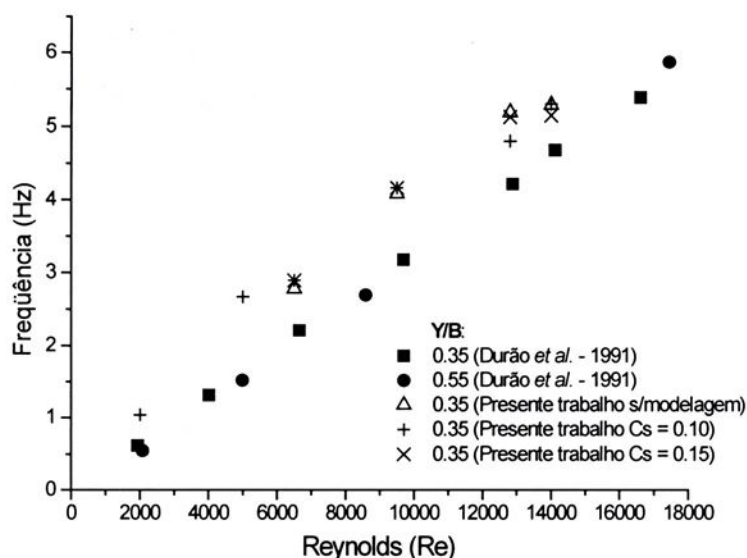


Figura 5.24 – Curva de frequência de emissão de vórtices versus numero de Reynolds, para cilindros quadrados próximos a uma parede sólida.

A Figura 5.25 mostra os padrões de escoamento obtidos numericamente, acompanhados dos gráficos de densidade de potência espectral, que permitem observar o surgimento do espaçamento crítico, que surge para valores em torno de $Y/B = 0,35$ e que coincidem com os resultados da literatura.

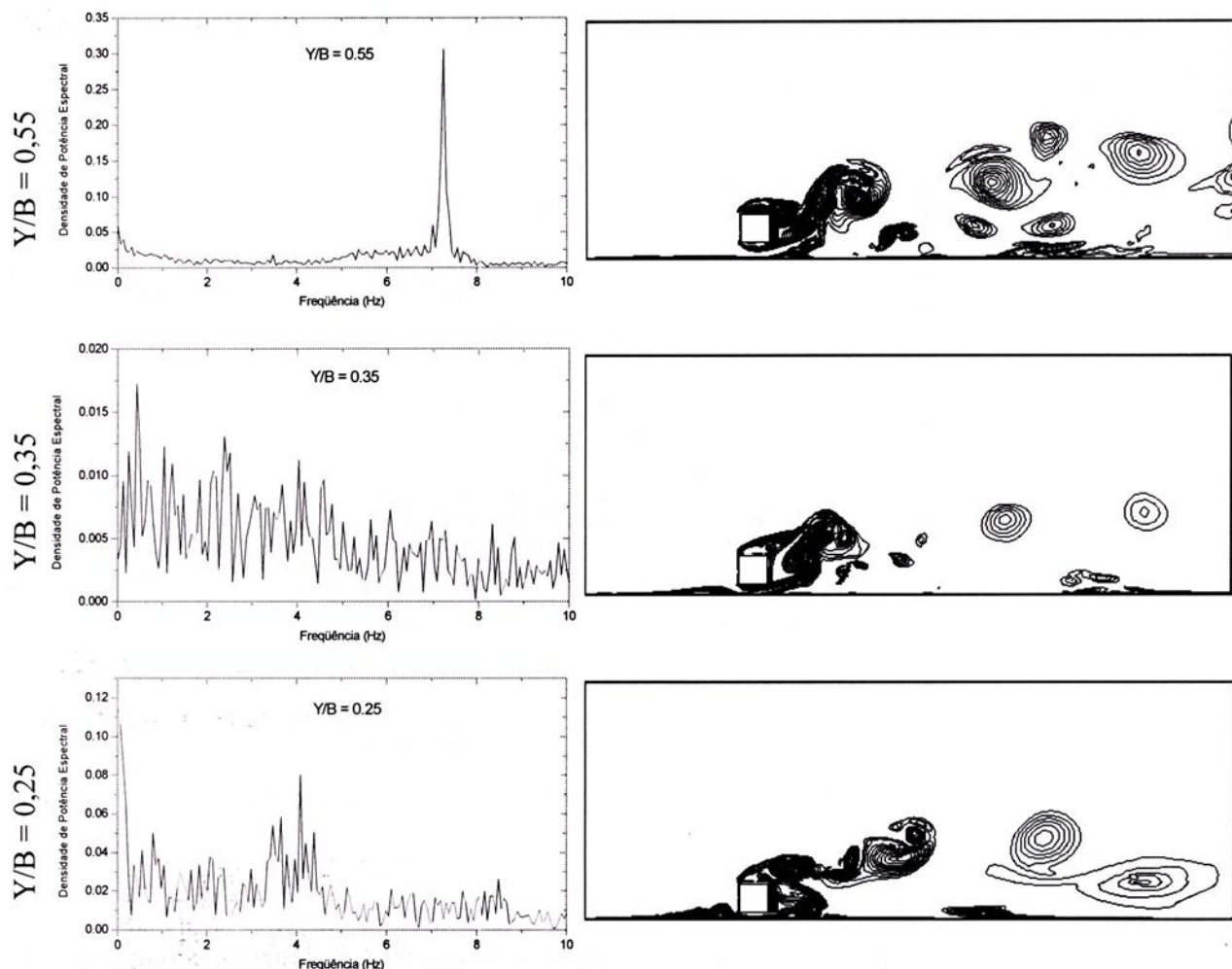


Figura 5.25 – Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade para as simulações correspondentes a um cilindro quadrado, posicionado próximo a uma parede sólida.

5.7 – Cilindros retangulares justapostos

Corpos de geometria relativamente complexas podem ser gerados a partir da justaposição de geometrias cartesianas simples, como cilindros quadrados e retangulares justapostos. Para ilustrar as potencialidades do código Fluids no tratamento deste tipo de problema, um caso-teste foi selecionado, que consiste de um corpo cilíndrico com seção transversal em forma de T, percorrido por um escoamento da esquerda para a direita. As variáveis que definem geometricamente este tipo de obstáculo são apresentadas na Figura 5.26.

O potencial desta geometria para utilização como *shedder* em medidores de vazão a efeito vórtice pode ser objeto de investigação.

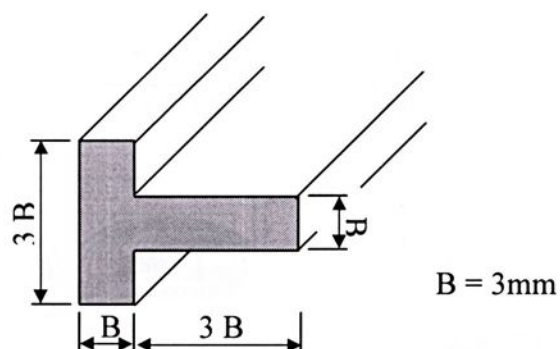


Figura 5.26 – Corte transversal do cilindro em forma de T.

A malha computacional empregada nesta simulação é representada na Figura 5.27. Como condições de contorno, a velocidade é imposta na entrada do domínio, com simetria nas fronteiras laterais e perfil desenvolvido na saída.

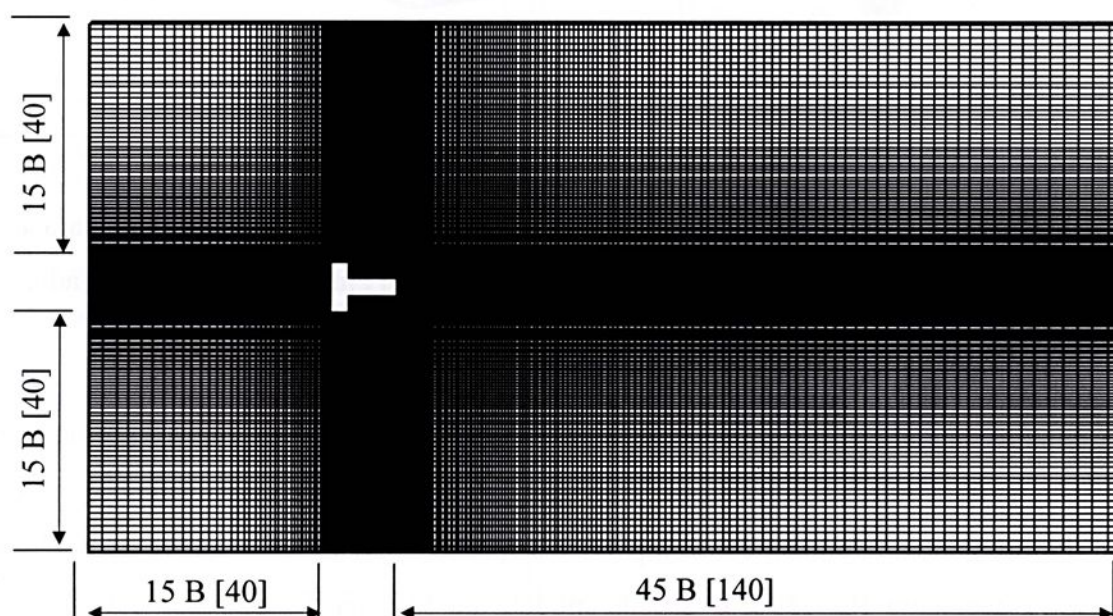


Figura 5.27 – Malha computacional utilizada na simulação de um cilindro com seção transversal em forma de T.

A Figura 5.28 mostra, através do campo de vorticidade, as configurações do escoamento para $Re = 100$ e 270 , obtidas sem o emprego de modelo de turbulência. As curvas de densidade

de potência espectral, que fornecem a frequência de emissão dos vórtices, foram obtidas aplicando-se uma FFT ao sinal de velocidade captado por uma sonda numérica posicionada na esteira turbilhonar.

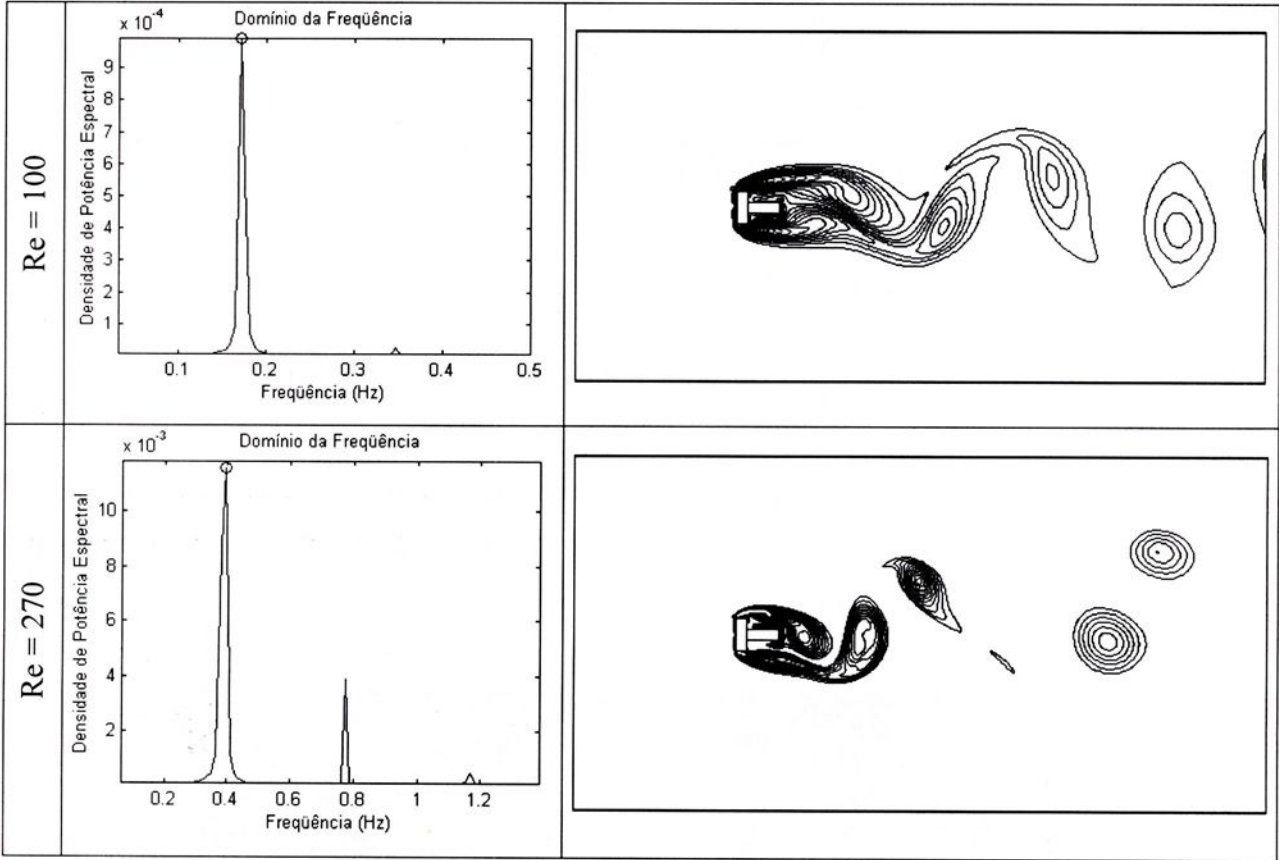


Figura 5.28 – Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade para as simulações correspondentes a um cilindro com seção transversal em forma de T - resultados obtidos sem modelo de turbulência.

Resultados análogos são apresentados na Figura 5.29, para três outros regimes de escoamento: $Re = 500, 750$ e 1000 . Desta vez, entretanto, o escoamento foi simulado com e sem modelagem da turbulência. Uma análise comparativa entre as curvas de densidade de potência espectral mostra que, para $Re = 500$, o uso de modelo de turbulência em nada interfere na determinação da frequência de emissão de vórtices. Para $Re = 750$ e 1000 , entretanto, o espectro de frequência na esteira do cilindro modifica-se substancialmente com o uso do modelo de Smagorinsky.

A importância da modelagem da turbulência para escoamentos com números de Reynolds mais elevados fica bastante evidente na Figura 5.30, onde os resultados desta simulação, para o número de Strouhal, são confrontados com dados experimentais obtidos num

túnel hidrodinâmico. Pode-se perceber claramente que, para $Re = 100$, os resultados numérico e experimental são praticamente coincidentes. Entretanto, sem modelagem da turbulência, à medida que o número de Reynolds aumenta, os resultados numéricos se degeneram, distanciando-se dos pontos experimentais. O emprego da metodologia da Simulação de Grandes Escalas corrige esta tendência, reaproximando resultados numéricos e experimentais.

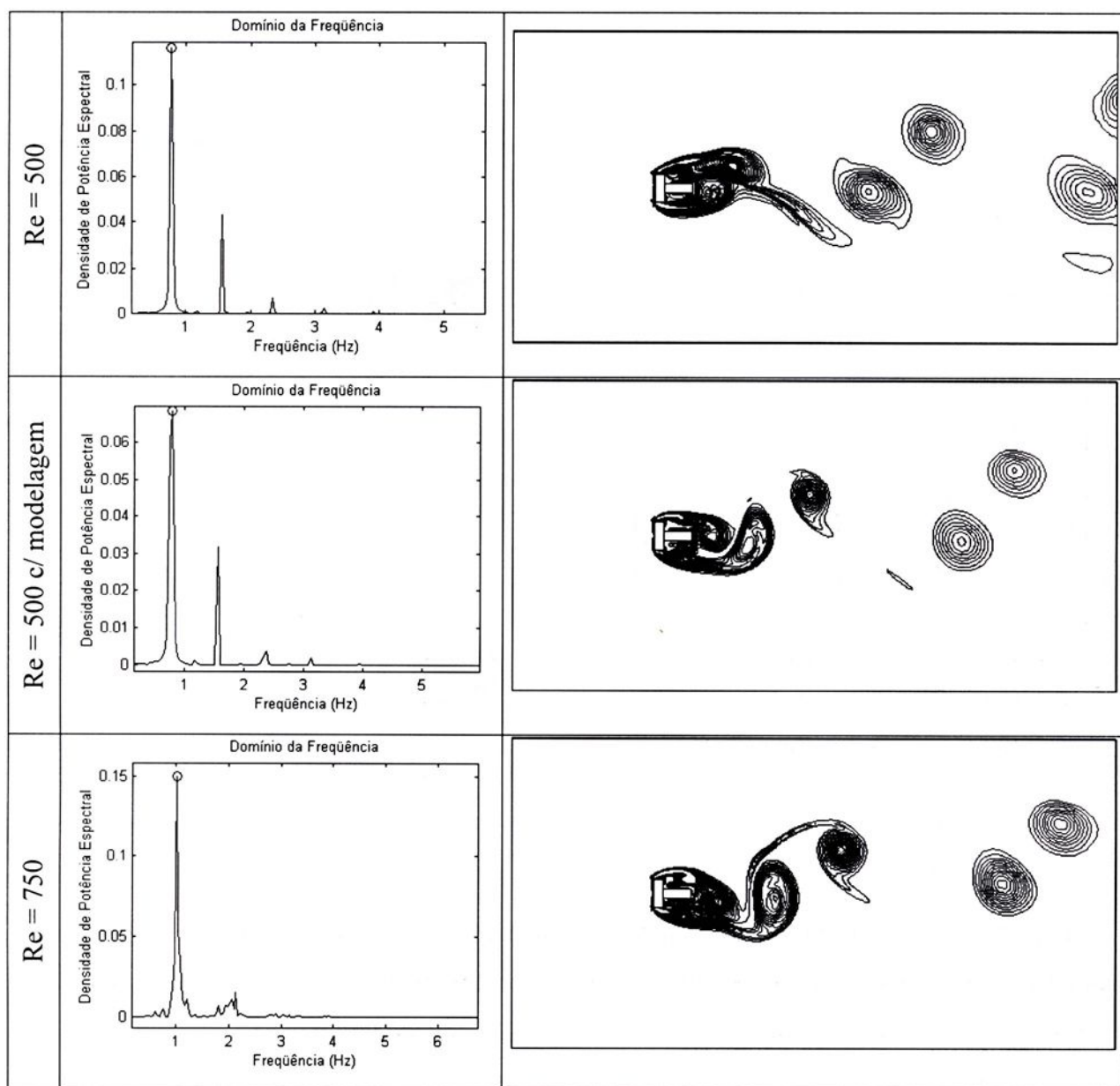


Figura 5.29 – Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade para as simulações correspondentes a um cilindro com seção transversal em forma de T - comparação entre resultados obtidos com e sem modelo de turbulência.

(continua...)

(...continuação)

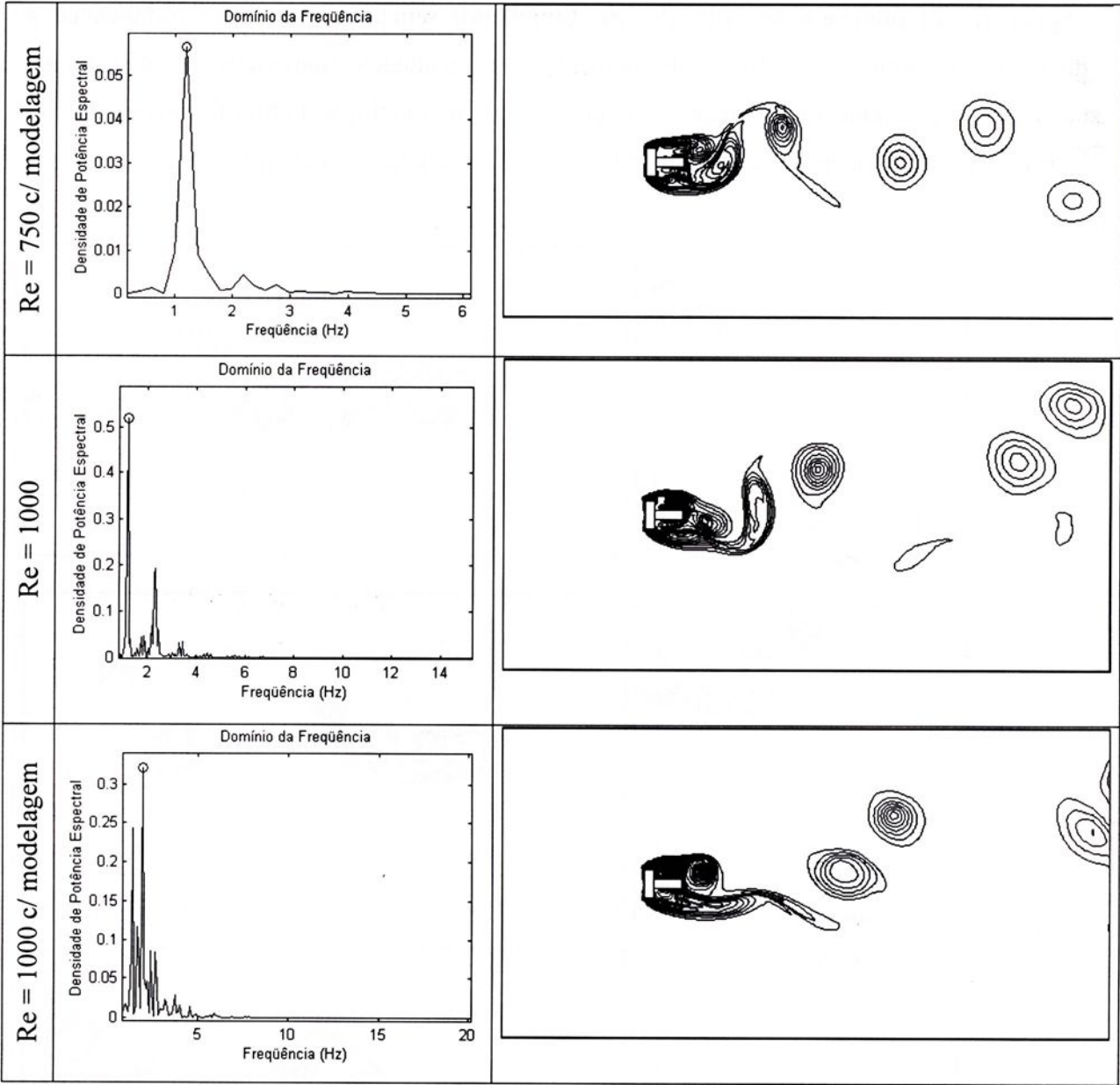


Figura 5.29 – Curvas de densidade de potência espectral e contornos de isovorticidade para as simulações correspondentes a um cilindro com seção transversal em forma de T - comparação entre resultados obtidos com e sem modelo de turbulência.

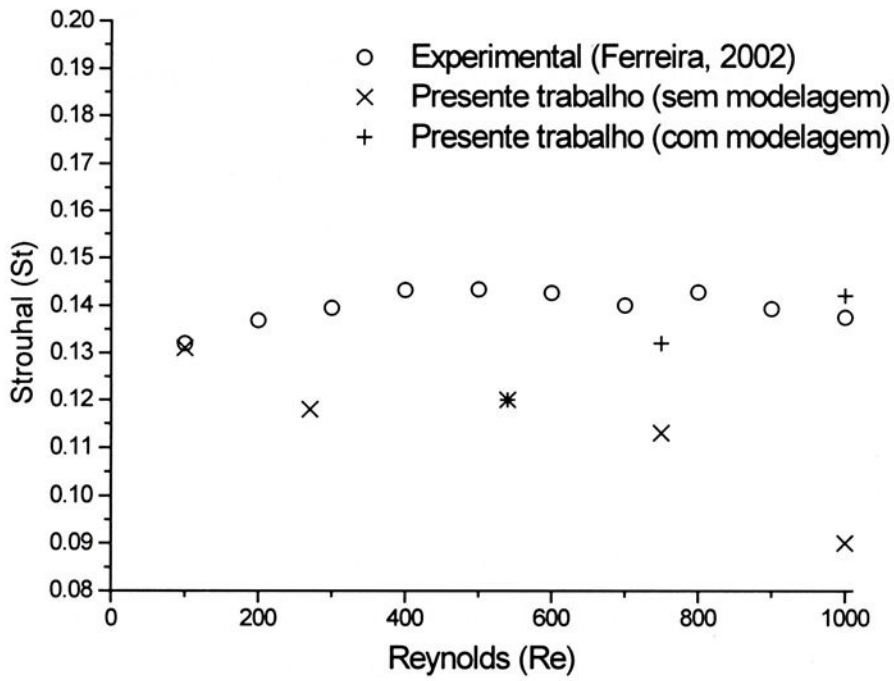


Figura 5.30 – Curva Strouhal *versus* Reynolds, para o escoamento ao redor de um cilindro com seção transversal em forma de T: comparação entre resultados numéricos e experimentais.

CAPÍTULO 6 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, um programa computacional – Fluids – baseado no Método dos Volumes Finitos foi desenvolvido, para realizar simulações numéricas de escoamentos transientes bidimensionais, em regime laminar ou turbulento, sobre geometrias cartesianas.

Uma das preocupações básicas na concepção do programa foi a de permitir ao usuário explorar diferentes tipos de problemas, escolhendo, dentre outras coisas, as condições de contorno, a configuração de malha, o método de acoplamento pressão-velocidade e o esquema de transporte advectivo. Além disso, procurou-se desenvolver uma interface entre o pré-processador e o processador que fosse simples e versátil, facilitando, ao usuário pouco experiente, a utilização intuitiva do programa.

Com o objetivo de assegurar a confiabilidade do programa, uma extensa parte do trabalho foi dedicada à depuração do código computacional e à validação de resultados numéricos, confrontados, sempre que possível, com dados da literatura. Além disso, por várias vezes, um mesmo caso-teste foi simulado, também, com o código comercial Fluent®, para efeito de comparação. Em todas as situações, as comparações foram consideradas satisfatórias sendo que, na maioria dos casos práticos, o tempo computacional foi cerca de 50% menor, a favor do Fluids. Numa etapa seguinte, foram extraídos resultados que evidenciam as potencialidades do programa como instrumento de análise de escoamentos complexos.

A experiência adquirida com as várias simulações realizadas durante o desenvolvimento deste trabalho permite formular algumas sugestões para futuras pesquisas, que poderão contribuir para aperfeiçoar a ferramenta aqui desenvolvida. Dentre elas, destacam-se:

- Implementação da equação da energia.

Trata-se de uma equação de transporte para um escalar, cuja inclusão no código computacional não deverá trazer grandes problemas. Por outro lado, aumentará, em muito, as potencialidades do programa, que estará habilitado a resolver problemas de escoamento com

transferência de calor, muito comuns nas aplicações de engenharia.

- Implementação de uma equação para o transporte de um escalar.

Um escalar passivo movimenta-se dentro de um escoamento ao sabor do campo de velocidade, sem exercer sobre ele nenhuma influência. O acompanhamento do caminho percorrido por este escalar ao longo do tempo constitui uma técnica extremamente eficiente para a visualização numérica de escoamentos. A implementação no programa de uma segunda equação de transporte para uma quantidade escalar, além da equação da energia, é, também, desejável.

- Expansão do código numérico para três dimensões.

A turbulência é, por natureza, um fenômeno tridimensional. Esta implementação será de grande valia para a simulação numérica de escoamentos turbulentos, mas exigirá recursos computacionais significativos, principalmente na etapa de validação de resultados. Na simulação de escoamentos turbulentos, cálculos tridimensionais só fazem sentido se forem realizados com malhas suficientemente finas. De fato, vários artigos na literatura mostram resultados de melhor qualidade obtidos em simulações numéricas bidimensionais, com malha refinada, do que com malha tridimensional, porém grosseira.

- Imposição de velocidades não uniformes e/ou variáveis no tempo na entrada do domínio.

Em sua atual versão, o programa só permite a imposição de um perfil uniforme de velocidade na entrada do domínio de cálculo. Para aumentar a gama de problemas que podem ser tratados com esta ferramenta, seria interessante contemplar a possibilidade de utilização de perfis não uniformes na fronteira de entrada. Além disso, seria, também, conveniente a imposição de velocidades variáveis com o tempo, o que daria ao usuário a possibilidade de simular escoamentos com diferentes níveis de turbulência residual, somando um ruído branco ao sinal de velocidade em cada grade da entrada.

- Introdução de novas opções de *solvers* para o sistema linear.

No presente momento, o TDMA constitui o único método de solução para o sistema linear, implantado no código. Outros métodos iterativos, notadamente o Gradiente Conjugado, deve ser programado, para oferecer maior robustez ao programa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Almeida, O., Simulação numérica de grandes escalas do escoamento turbulento ao redor de cilindros de base quadrada e retangular, *dissertação de mestrado*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira, Brasil, 236p, 2001.
- Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, 1984
- Boussinesq, J., Théorie de l'Écoulement Tourbillant, *Mem. Présentés par Divers Savants Acad. Sci. Inst. Fr.*, vol. 23, pp.46-50, 1877.
- Campregher, R., Almeida, O., Mansur, S.S., Vieira, E.D.R., Silveira-Neto, A., Numerical and experimental analysis of vortex shedding around an arrangement of parallel rectangular cylinders in cross-flow at Reynolds numbers up to 1000, CD-ROM Anais do XVI COBEM, Uberlândia, MG, 2001
- Chorin, A.J., A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *Journal of Computational Physics*, vol.2, p.12-26, 1967.
- Chorin, A.J., Numerical Solution of the Navier-Stokes equation, *Math. of Computation*, vol. 22, p. 745-762, 1971
- Davis, R.W., Moore, E.F. A numerical study of vortex shedding from rectangles, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 116, p.475-506, 1982
- Davis, R.W., Moore, E.F., Purtell, L. P., A numerical-experimental study of confined flow around rectangular cylinders, *Physics of Fluids*, vol. 27, n.1, p.46-59, 1984
- Deardorff, J. W., The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence, ASME, *Journal of Fluids Engineering*, vol. 95, p. 429-438, 1973.

Duarte, M.; "Estudo Experimental do Escoamento ao Redor de Arranjos de Cilindros Retangulares", Relatório Interno – UNESP/IS (Proc. Fapesp 00/11800-8), Ilha Solteira, SP, 2002

Durão, D.F.G., Gouveia, P.S.T., Pereira, J.C.F., Velocity characteristics of the flow around a square cross section cylinder placed near a channel wall, *Experiments in Fluids*, vol.11, p.341-350, 1991

Ferreira, R. L., Escoamento ao redor de corpos prismáticos para aplicação em medidores de vazão, Relatório Interno - UNESP/IS (Proc. Fapesp 01/02872-4), Ilha Solteira, SP, 2002

Finotti, L., Visualização de escoamentos através de fotografia de alta velocidade, Relatório de Iniciação Científica, Universidade Federal de Uberlândia – Faculdade de Engenharia Mecânica - Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos, Uberlândia - MG., 2001.

Fortuna, A.O., Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos, edusp, 2000.

Gonçalves, H.C., Determinação experimental da frequência de emissão de vórtices de corpos rombudos, *dissertação de mestrado*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, Ilha Solteira, Brasil, 177p, 2001.

Harlow, F.H., Welch, J.E., Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, vol.8, p.2182-2189, 1965.

Hayase, T., Humphrey, J.A.C., Greif, R., A consistently formulated QUICK scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures, *Journal of Computational Physics*, vol. 98, p. 108-118, 1992

Kelkar, K.M., Patankar, S.V., Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol.14, p. 327-341, 1992.

Kolmogorov, A.N., Equation of turbulent motion of an incompressible fluid, *Izvestia Academy of Sciences, USSR, Physics*, vol. 6, n.1 e 2, p. 56-68, 1942.

Leonard, B.P., A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, *Comp. Meth. Applied Mech. Eng.*, vol. 19, P.59-97, 1979



- Lindquist, C., Estudo experimental do escoamento ao redor de cilindros de base quadrada e retangular, *dissertação de mestrado*, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP, Ilha Solteira, Brasil, 188p, 2000.
- Lyn, D.A., Einav, S., Rodi, W., Park, J.H., A laser-doppler velocimetry study of ensemble averaged characteristics of the turbulent near wake of a square cylinder, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.304,p.285-319,1995.
- Maliska, C.R., Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional, Rio de Janeiro, LTC Editora, 1995.
- Mansur, S.S., Vieira, E.D.R., Saito, M. & Esperança, G.A.S. Visualização experimental do escoamento ao redor de cilindros de base quadrada posicionados transversalmente ao fluxo livre, in: Anais do VI Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciências Térmicas □ ENCIT'96, ABCM, v.1, pp.1103-1108, Florianópolis, 1996.
- Marchi, C.H., Esquemas de alta ordem para a solução de escoamentos de fluidos sem dispersão numérica., *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, vol. XV, n.3, p. 231-249, 1993.
- Nakamura, Y., Ohya, Y., Ozono, S., Nakayama, R. Experimental and numerical analysis of vortex shedding from elongated rectangular cylinders at low Reynolds numbers 200 – 1000, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 65, p. 301-308, 1996.
- Ohya, Y., Nakamura, Y., Ozono S., Tsuruta H., Nakayama R., An numerical study of vortex shedding from flat plates with square leading and trailing edges, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 236, p.445-460, 1992
- Okajima, A., Numerical simulation of flow around rectangular cylinders, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol33, pp. 171-180, 1990
- Okajima, A., Ueno H., & Sakay H., Numerical simulation of laminar and turbulent flows around rectangular cylinders, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, vol. 15, p. 999-1012, 1992
- Okajima, A., Strouhal numbers of rectangular cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*, vol.123, p379-98, 1982
- Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Ed. Hemisphere, 1980.



- Patankar, S.V., Spalding, D.B., A calculation procedure for Heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.15, p.1787, 1972.
- Prandtl, L., Über die ausgebildete Turbulenz, *ZAMM*, Vol.5, p. 136-139, 1925.
- Prandtl, L., Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl.*, p.6-19, 1945.
- Rahman, M.M., Miettinen, A., Siikonen, T., Modified SIMPLE formulation on a collocated grid with an assessment of the simplified QUICK scheme, *Numerical Heat Transfer*, Part. B, vol. 30, p. 291-314, 1996.
- Rodi, W., Large eddy simulations of the flow past bluff-bodies: State-of-the-art, *JSME International Journal*, vol. 41, n.2, p361-374, 1998.
- Shaw, C.T., Using computational fluid dynamics, *Prentice Hall*, 1992.
- Smagorinsky, J., General circulation experiments with the primitive equations I. The basic experiment, *Mon. Weather Rev.*, vol. 91, p.99-164, 1963.
- Sohankar, A., Davidson, L., Norberg, C., Vortex shedding: Numerical simulation of unsteady flow around a square two-dimensional cylinder., *12th Australian Fluid Mechanics Conference*, p. 517-520, 1995
- Van Doormaal, J.P., Raithby, G.D. , Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows, *Numerical Heat Transfer*, vol. 7, pp. 147-163, 1984.
- Versteeg, H.K., Malalasekera, W., An introduction to computational fluid dynamics, Harlow, Longman Scientific & Technical, 1995.
- Vieira, E.D.R, Estudo qualitativo e quantitativo do escoamento ao redor de corpos não-aerodinâmicos utilizando técnicas de visualização em meio hidrodinâmico, Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA, São José dos Campos, SP, Brasil, 200p, 1997

APÊNDICE A – TRATAMENTO DOS TERMOS ADVECTIVOS

A.1 – Introdução

O estêncil para os termos advectivos de mais alta ordem demonstrados nos dois subcapítulos seguintes encontra-se representado na Figura A.1.

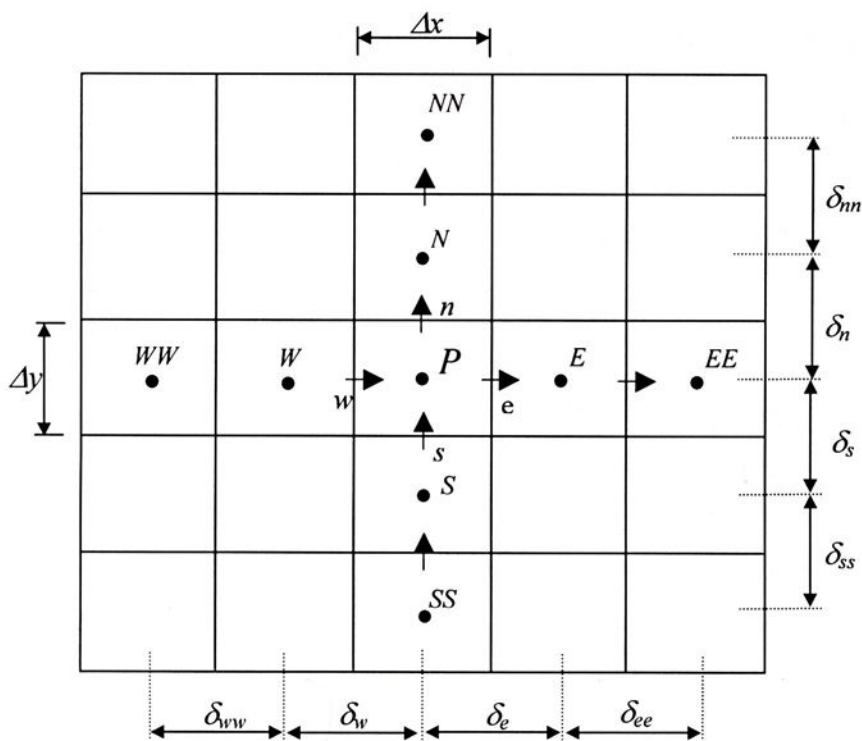


Figura A.1 – Estêncil para aproximação numérica dos termos advectivos.

A.2 – QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics)

Após o trabalho original de Leonard (1979) introduzindo o esquema QUICK de interpolação para tratamento dos termos advectivos, várias outras derivações do seu método

foram apresentadas por diversos autores. Hayase *et. al* (1992), apresentaram um esquema denominado QUICK Consistente, cuja proposta era interpolar o valor da variável na face do volume de controle por um termo composto de duas parcelas: uma aproximação Upwind mais uma parcela a ser acrescentada no termo-fonte da equação discretizada.

Vários autores, Marchi (1993); Rahman (1996) empregaram o QUICK–C em seus trabalhos por apresentar uma boa taxa de convergência e soluções fisicamente mais consistentes que a maioria dos outros modelos de QUICK. Por esta razão, este foi o método empregado no presente trabalho e que será demonstrado nas páginas seguintes.

O método QUICK emprega, para a interpolação, dois pontos localizados à montante do escoamento e um ponto à jusante ligados por uma parábola . Assim, tomando-se como base a Figura A.1, o valor de uma variável genérica ϕ , numa posição x , pode ser calculada a partir da parábola $\phi(x) = ax^2 + bx + c$, cujo estêncil está representado na Figura A.2. Como exemplo, o procedimento para a avaliação do valor da variável na face e será demonstrado para $\phi_e > 0$.

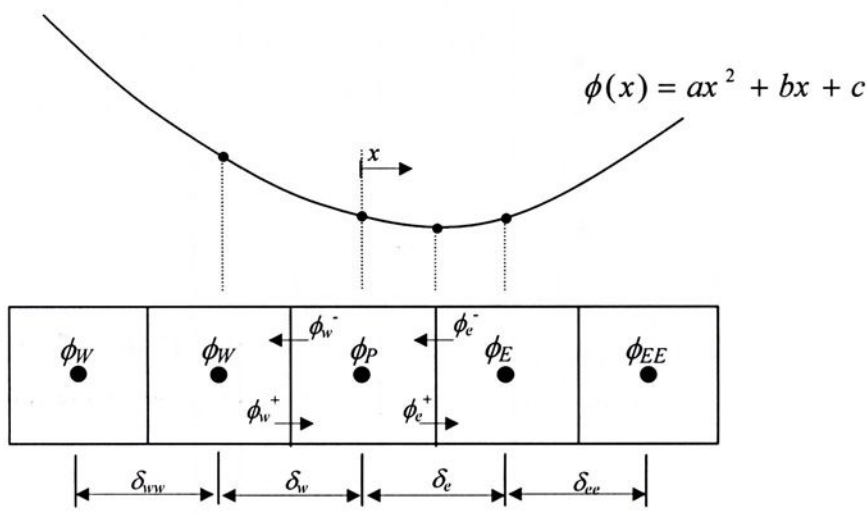


Figura A.2 – Função parábola empregada na interpolação do esquema QUICK.

Tomando-se a equação geral da parábola:

$$\phi(x) = a x^2 + b x + c$$

(A.1)

substituindo-se os valores para os pontos nodais, tem-se:

$$\phi(0) = c = \phi_P$$

(A.2a)

$$\phi(\delta_e) = a (\delta_e)^2 + b (\delta_e) + \phi_P = \phi_E$$

(A.2b)

$$\phi(-\delta_w) = a(-\delta_w)^2 + b(-\delta_w) + \phi_P = \phi_W \quad (\text{A.2c})$$

isolando-se b a Equação (A.2c), encontra-se:

$$b = \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta_w} + a \delta_w \quad (\text{A.3})$$

e substituindo-se na Equação (A.2b), obtém-se:

$$a \delta_e^2 + \left[\frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta_w} + a \delta_w \right] \delta_e + \phi_P = \phi_E \quad (\text{A.4a})$$

$$\Rightarrow a = \frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta_e(\delta_e + \delta_w)} - \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta_w(\delta_e + \delta_w)} \quad (\text{A.4b})$$

substituindo-se a Equação (A.4b) na Equação (A.3), vem:

$$b = \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta_w} + \left[\frac{(\phi_E - \phi_P)}{\delta_e(\delta_e + \delta_w)} - \frac{(\phi_P - \phi_W)}{\delta_e(\delta_e + \delta_w)} \right] \delta_w \quad (\text{A.5a})$$

$$\Rightarrow b = (\phi_P - \phi_W) \left[\frac{\delta_e}{\delta_w(\delta_e + \delta_w)} \right] + (\phi_E - \phi_P) \left[\frac{\delta_w}{\delta_e(\delta_e + \delta_w)} \right] \quad (\text{A.5b})$$

Com os valores de a , b e de c , é possível calcular o valor para ϕ_e^+ , que é o valor da variável ϕ na face e para uma velocidade positiva, substituindo-se as Equações (A.2a), (A.4b) e (A.5b) na equação geral da parábola, Equação (A.1):

$$\phi_e^+ = \phi \left(\frac{\delta_e}{2} \right) = a \left(\frac{\delta_e}{2} \right)^2 + b \left(\frac{\delta_e}{2} \right) + c \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \phi_e^+ = & \left\{ (\phi_E - \phi_P) \left[\frac{1}{\delta_e(\delta_e + \delta_w)} \right] - (\phi_P - \phi_W) \left[\frac{1}{\delta_w(\delta_e + \delta_w)} \right] \right\} \left(\frac{\delta_e^2}{4} \right) + \\ & \left\{ (\phi_P - \phi_W) \left[\frac{\delta_e}{\delta_w(\delta_e + \delta_w)} \right] + (\phi_E - \phi_P) \left[\frac{\delta_w}{\delta_e(\delta_e + \delta_w)} \right] \right\} \left(\frac{\delta_e}{2} \right) + \phi_P \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Rearranjando-se os termos, tem-se:

$$\phi_e^+ = \phi_P + S_e^+ \quad (\text{A.8})$$

$$\text{onde: } S_e^+ = \left[\frac{\delta_e^2}{4(\delta_w + \delta_e)\delta_w} \right] (\phi_p - \phi_w) + \left[\frac{2\delta_w + \delta_e}{4(\delta_w + \delta_e)} \right] (\phi_E - \phi_p) \quad (\text{A.9})$$

Dessa forma, o primeiro termo do lado direito da Equação (A.8), representa uma aproximação Upwind e o segundo termo, um acréscimo, a ser inserido no termo fonte da equação discretizada.

Para a mesma face e , porém, com velocidade negativa, a origem do eixo x passa a ser o ponto nodal E , com o sentido da esquerda para a direita. Dessa forma, a equação da parábola assume os seguintes valores:

$$\phi(0) = c = \phi_E \quad (\text{A.10a})$$

$$\phi(\delta_e) = a(\delta_e)^2 + b(\delta_e) + \phi_E = \phi_p \quad (\text{A.10b})$$

$$\phi(-\delta_{ee}) = a(-\delta_{ee})^2 + b(-\delta_{ee}) + \phi_E = \phi_{EE} \quad (\text{A.10c})$$

Isolando-se o termo b da Equação (A.10c), obtém-se:

$$b = \frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee}} + a\delta_{ee} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo-se a Equação (A.11) na Equação (A.10b), resulta:

$$a(\delta_e)^2 + \left[\frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee}} + a\delta_{ee} \right] (\delta_e) + \phi_E = \phi_p \quad (\text{A.12a})$$

$$a = \frac{(\phi_p - \phi_E)}{\delta_e(\delta_{ee} + \delta_e)} - \frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee}(\delta_{ee} + \delta_e)} \quad (\text{A.12b})$$

Inserindo-se a Equação (A.12b) na Equação (A.11), chega-se à expressão:

$$b = \frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee}} + \left[\frac{(\phi_p - \phi_E)}{\delta_e(\delta_{ee} + \delta_e)} - \frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee}(\delta_{ee} + \delta_e)} \right] \delta_{ee} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando-se a Equação (A.1) para o velocidade negativa na face e , tem-se

$$\phi_e^- = \phi\left(\frac{\delta_e}{2}\right) = a\left(\frac{\delta_e}{2}\right)^2 + b\left(\frac{\delta_e}{2}\right) + c \quad (\text{A.14})$$

Inserindo-se as Equações (A.12b), (A.13) e (A.10a) na Equação (A.14), tem-se

$$\phi_e^- = \left[\frac{(\phi_p - \phi_E)}{\delta_e (\delta_{ee} + \delta_e)} - \frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee} (\delta_{ee} + \delta_e)} \right] \left(\frac{\delta_e}{2} \right)^2 + \left\{ \frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee}} + \left[\frac{(\phi_p - \phi_E)}{\delta_e (\delta_{ee} + \delta_e)} - \frac{(\phi_E - \phi_{EE})}{\delta_{ee} (\delta_{ee} + \delta_e)} \right] \delta_{ee} \right\} \left(\frac{\delta_e}{2} \right) + \phi_E \quad (\text{A.15})$$

Rearranjando-se os termos:

$$\phi_e^- = \phi_E + S_e^- \quad (\text{A.16})$$

$$\text{onde: } S_e^- = \left[\frac{\delta_e^2}{4 (\delta_e + \delta_{ee}) \delta_{ee}} \right] (\phi_E - \phi_{EE}) + \left[\frac{2 \delta_{ee} + \delta_e}{4 (\delta_e + \delta_{ee})} \right] (\phi_p - \phi_E) \quad (\text{A.17})$$

Da mesma forma, pode-se demonstrar que, para a face w, o valor da propriedade para velocidades positivas é dado por:

$$\phi_w^+ = \phi_w + S_w^+ \quad (\text{A.18})$$

$$\text{onde: } S_w^+ = \left[\frac{\delta_w^2}{4 (\delta_{ww} + \delta_w) \delta_{ww}} \right] (\phi_w - \phi_{ww}) + \left[\frac{2 \delta_{ww} + \delta_w}{4 (\delta_{ww} + \delta_w)} \right] (\phi_p - \phi_w) \quad (\text{A.19})$$

e, para velocidades negativas:

$$\phi_w^- = \phi_p + S_w^- \quad (\text{A.20})$$

$$\text{onde: } S_w^- = \left[\frac{\delta_w^2}{4 (\delta_w + \delta_e) \delta_e} \right] (\phi_p - \phi_E) + \left[\frac{2 \delta_e + \delta_w}{4 (\delta_w + \delta_e)} \right] (\phi_w - \phi_p) \quad (\text{A.21})$$

Para auxiliar na demonstração dos procedimentos para encontrar as funções de interpolação dos termos cruzados, será empregada a Figura A.3.

O termo ϕ_n^+ , que significa o valor da propriedade ϕ , interpolado para a face norte, sendo transportado por uma componente vertical positiva da velocidade, também é calculado a partir da Equação (A.1), com origem do eixo x no volume elementar P .

Assim, atribuindo os valores à equação da parábola, tem-se

$$\phi(0) = c = \phi_p \quad (\text{A.22a})$$

$$\phi(\delta_n) = a(\delta_n)^2 + b(\delta_n) + \phi_p = \phi_N \quad (\text{A.22b})$$

$$\phi(\delta_s) = a(-\delta_s)^2 + b(-\delta_s) + \phi_p = \phi_S \quad (\text{A.22c})$$

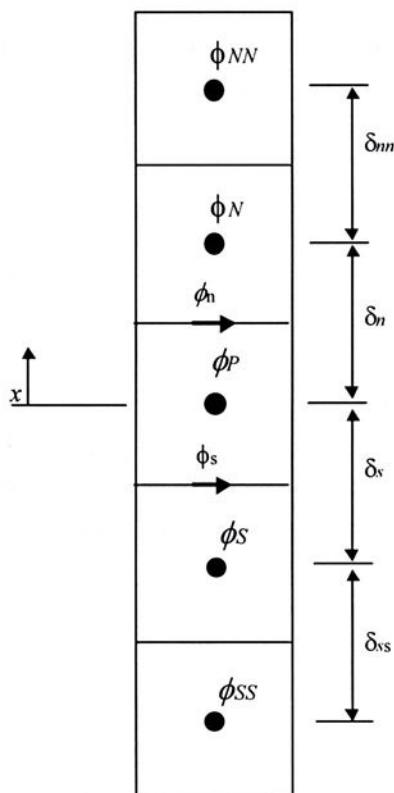


Figura A.3 – Estêncil para a avaliação dos termos cruzados ϕ_n e ϕ_s .

Isolando-se o termo b da Equação (A.22c), tem-se

$$b = \frac{(\phi_p - \phi_s)}{\delta_s} + a \delta_s \quad (\text{A.23})$$

Substituindo-se a Equação (A.23) na Equação (A.22b):

$$a(\delta_n)^2 + \left[\frac{(\phi_p - \phi_s)}{\delta_s} + a \delta_s \right] (\delta_n) + \phi_p = \phi_N \quad (\text{A.24a})$$

$$a = \frac{(\phi_N - \phi_p)}{\delta_n(\delta_n + \delta_s)} - \frac{(\phi_p - \phi_s)}{\delta_s(\delta_n + \delta_s)} \quad (\text{A.24b})$$

Agora, retornando-se à Equação (A.23), pode-se calcular o valor de b , empregando-se a Equação (A.24b), o que resulta em:

$$b = \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta_s} + \left[\frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta_n (\delta_n + \delta_s)} - \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta_s (\delta_n + \delta_s)} \right] \delta_s \quad (\text{A.25})$$

A equação geral da parábola empregada para o cálculo da propriedade ϕ na face norte, assume a forma

$$\phi_n^+ = \phi \left(\frac{\delta_n}{2} \right) = a \left(\frac{\delta_n}{2} \right)^2 + b \left(\frac{\delta_n}{2} \right) + c \quad (\text{A.26})$$

Inserindo as Equações (A.22a), (A.24b) e (A.25) na Equação (A.26), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_n^+ = & \left[\frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta_n (\delta_n + \delta_s)} - \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta_s (\delta_n + \delta_s)} \right] \left(\frac{\delta_n}{2} \right)^2 + \\ & \left\{ \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta_s} + \left[\frac{(\phi_N - \phi_P)}{\delta_n (\delta_n + \delta_s)} - \frac{(\phi_P - \phi_S)}{\delta_s (\delta_n + \delta_s)} \right] \delta_s \right\} \left(\frac{\delta_n}{2} \right) + \phi_P \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Rearranjando os termos, obtém-se

$$\phi_n^+ = \phi_P + S_n^+ \quad (\text{A.28})$$

$$\text{onde } S_n^+ = \left[\frac{\delta_n^2}{4 (\delta_s + \delta_n) \delta_s} \right] (\phi_P - \phi_S) + \left[\frac{2 \delta_s + \delta_n}{4 (\delta_s + \delta_n)} \right] (\phi_N - \phi_P) \quad (\text{A.29})$$

O procedimento para a encontrar a componente, desta vez com a velocidade transversal para baixo, é similar, porém, a origem do eixo x encontra-se no ponto nodal N , com sentido negativo (para baixo). Assim, a substituição dos valores na equação geral da parábola – Equação (A.1) – assume a forma:

$$\phi(0) = c = \phi_N \quad (\text{A.30a})$$

$$\phi(\delta_n) = a (\delta_n)^2 + b (\delta_n) + \phi_N = \phi_P \quad (\text{A.30b})$$

$$\phi(\delta_{nn}) = a (-\delta_{nn})^2 + b (-\delta_{nn}) + \phi_N = \phi_{NN} \quad (\text{A.30c})$$

Isolando-se o termo b da Equação (A.30c), tem-se:

$$b = \frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn}} + a \delta_{nn} \quad (\text{A.31})$$

que, substituído na Equação (A.30b), fornece:

$$a (\delta_n)^2 + \left[\frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn}} + a \delta_{nn} \right] (\delta_n) + \phi_N = \phi_P \quad (\text{A.32a})$$

$$a = \frac{(\phi_P - \phi_N)}{\delta_n (\delta_n + \delta_{nn})} - \frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn} (\delta_n + \delta_{nn})} \quad (\text{A.32b})$$

O valor de b , na Equação (A.31), pode ser calculado inserindo-se o valor da Equação (A.32b), obtendo-se:

$$b = \frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn}} + \left[\frac{(\phi_P - \phi_N)}{\delta_n (\delta_n + \delta_{nn})} - \frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn} (\delta_n + \delta_{nn})} \right] \delta_{nn} \quad (\text{A.33})$$

O valor de ϕ_n^- , a partir da equação da parábola, pode ser calculado da seguinte forma:

$$\phi_n^- = \phi \left(\frac{\delta_n}{2} \right) = a \left(\frac{\delta_n}{2} \right)^2 + b \left(\frac{\delta_n}{2} \right) + c \quad (\text{A.34})$$

Inserindo as Equações (A.32b), (A.33) e (A.30a) na Equação (A.34), tem-se

$$\begin{aligned} \phi_n^- = & \left[\frac{(\phi_P - \phi_N)}{\delta_n (\delta_n + \delta_{nn})} - \frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn} (\delta_n + \delta_{nn})} \right] \left(\frac{\delta_n}{2} \right)^2 + \\ & \left\{ \frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn}} + \left[\frac{(\phi_P - \phi_N)}{\delta_n (\delta_n + \delta_{nn})} - \frac{(\phi_N - \phi_{NN})}{\delta_{nn} (\delta_n + \delta_{nn})} \right] \delta_{nn} \right\} \left(\frac{\delta_n}{2} \right) + \phi_N \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Rearranjando-se os termos:

$$\phi_n^- = \phi_N + S_n^- \quad (\text{A.36})$$

$$\text{onde } S_n^- = \left[\frac{\delta_n^2}{4 (\delta_n + \delta_{nn}) \delta_{nn}} \right] (\phi_N - \phi_{NN}) + \left[\frac{2 \delta_{nn} + \delta_n}{4 (\delta_n + \delta_{nn})} \right] (\phi_P - \phi_N) \quad (\text{A.37})$$

Igualmente, é possível encontrar os valores para a face sul do volume de controle para velocidades positivas e negativas:

$$\phi_s^+ = \phi_S + S_s^+ \quad (\text{A.38})$$

$$\text{onde: } S_s^+ = \left[\frac{\delta_s^2}{4(\delta_{ss} + \delta_s)\delta_{ss}} \right] (\phi_s - \phi_{ss}) + \left[\frac{2\delta_{nn} + \delta_s}{4(\delta_{ss} + \delta_s)} \right] (\phi_p - \phi_s) \quad (\text{A.39})$$

$$\phi_s^- = \phi_p + S_s^- \quad (\text{A.40})$$

$$\text{onde: } S_s^- = \left[\frac{\delta_s^2}{4(\delta_s + \delta_n)\delta_n} \right] (\phi_p - \phi_n) + \left[\frac{2\delta_n + \delta_s}{4(\delta_s + \delta_n)} \right] (\phi_s - \phi_p) \quad (\text{A.41})$$

Para exemplificar a aplicação do esquema proposto, a Figura A.4 mostra as coordenadas empregadas no presente trabalho para se calcular o valor da velocidade u nas faces do volume de controle centrado em P . Na Figura A.5, as coordenadas estão representando a discretização para a velocidade v . Em seguida, os valores das coordenadas estão substituídos nos coeficientes já calculados.

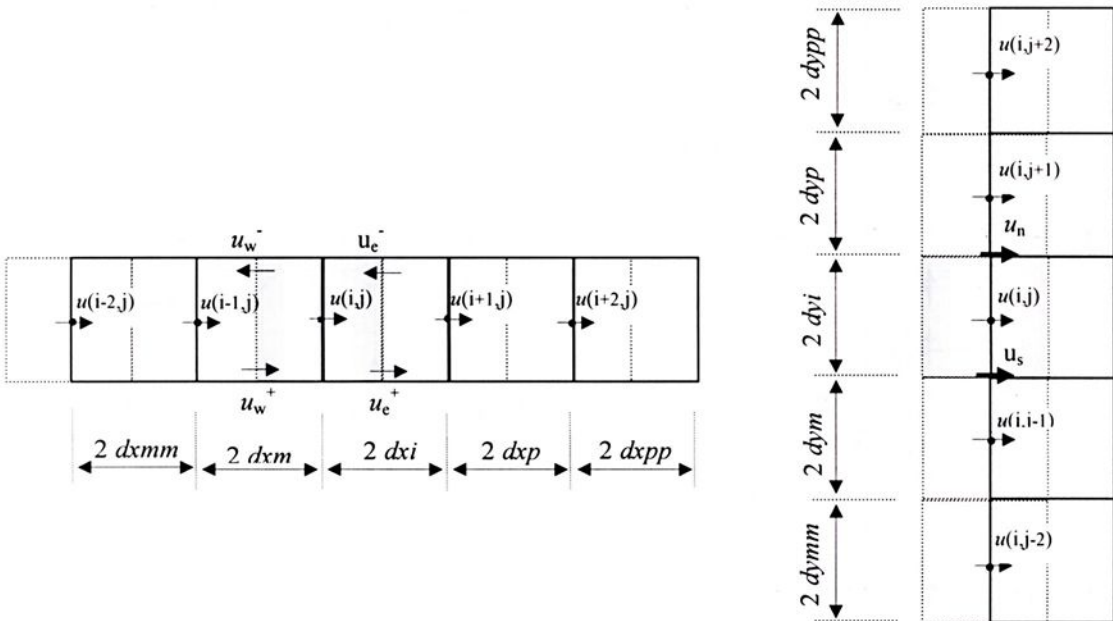


Figura A.4 – Representação dos volumes de controle para a velocidade u no eixo x (esquerda) e no eixo y .

De acordo com a Figura A.4, pode-se definir os coeficientes envolvidos na discretização do QUICK Consistente da seguinte forma:

$$\delta_{mm} = dyp + dypp$$

$$\delta_n = dy_i + dyp$$

$$\delta_s = dy_i + dym$$

$$\delta_{ee} = 2\,dx_{pp}$$

$$\phi_p = u(i, j)$$

$$\phi_{NN} = u(i, j + 2)$$

$$\delta_{ss} = dym + dymm$$
$$\delta_w = 2\ dxm$$
$$\delta_{ww} = 2\ dxmm$$
$$\delta_e = 2\ dxp$$

$$\phi_N = u(i, j + 1)$$
$$\phi_S = u(i, j - 1)$$
$$\phi_{SS} = u(i, j - 2)$$

As interpolações para a velocidade v seguem o mesmo procedimento mostrado acima. Porém, alguns cuidados devem ser tomados com os coeficientes geométricos pois, devido ao arranjo deslocado empregado, eles são também deslocados de meio volume para baixo, para se adaptarem à posição em que a componente v da velocidade está armazenada. Figura A.5 ilustra o procedimento.

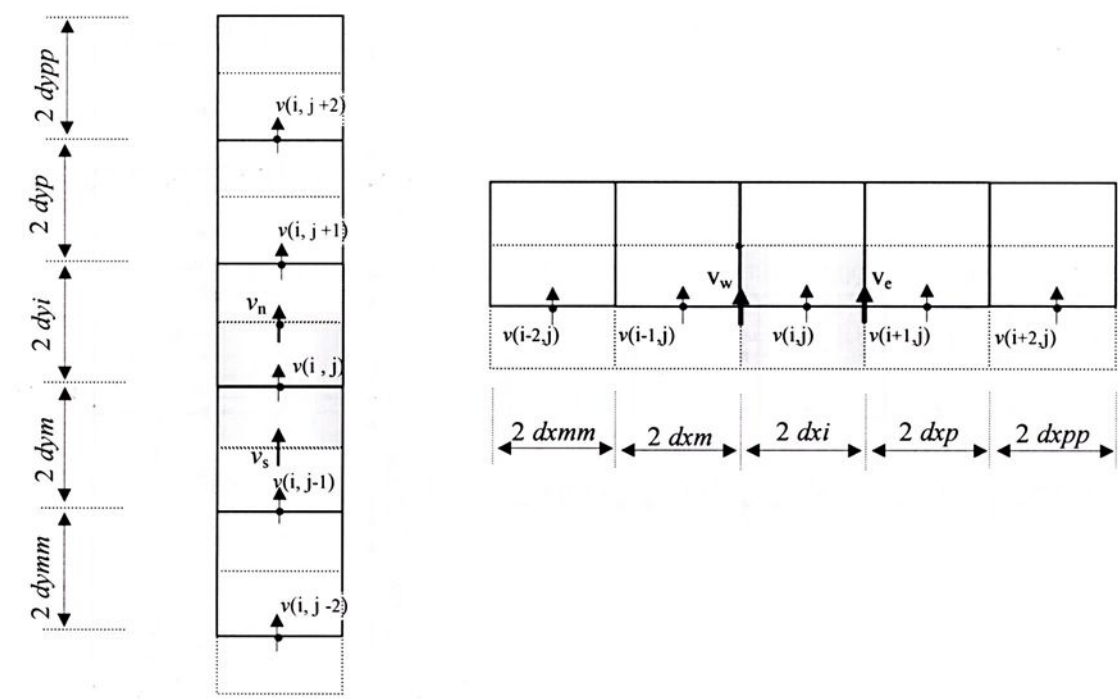


Figura A.5 – Volumes de controle para a velocidade v com a representação dos termos norte e sul (esquerda) e dos termos oeste e leste.

Assim, baseando-se na Figura A.5, é possível encontrar os valor dos coeficientes para a discretização QUICK como sendo:

$$\delta_w = dxi + dxm$$
$$\delta_{ww} = dxm + dxmm$$

$$\delta_e = dxi + dxp$$
$$\delta_{ee} = dxp + dxpp$$

$$\delta_{mm} = 2 \, dyp$$

$$\phi_p = v(i, j)$$

$$\delta_{nn} = 2 \, dyi$$

$$\phi_{NN} = v(i, j + 2)$$

$$\delta_s = 2 \, dym$$

$$\phi_N = v(i, j + 1)$$

$$\delta_{ss} = dymm$$

$$\phi_s = v(i, j - 1)$$

$$\phi_{ss} = v(i, j - 2)$$

Retornando-se à Figura A.1, é possível, agora, concluir a discretização para uma propriedade ϕ genérica empregando a metodologia dos Volumes Finitos com interpolação dos termos advectivos empregando o QUICK Consistente. A equação de Navier-Stokes, integrada sobre um volume de controle elementar, centrado em P , resulta em:

$$\begin{aligned} (\rho\phi - \rho^0\phi^0)\Delta x\Delta y + (F_e\phi_e - F_w\phi_w)\Delta t + (F_n\phi_n - F_s\phi_s)\Delta t = \\ \left[\Gamma^\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \right]_e - \Gamma^\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) \Big|_w \Delta y \Delta t + \left[\Gamma^\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \right]_n - \Gamma^\phi \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \Big|_s \Delta x \Delta t + Sc \Delta x \Delta y \Delta t \end{aligned} \quad (A.42)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{M_p}{\Delta t} \phi_p - \frac{M_p^0}{\Delta t} \phi_p^0 + F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s = \\ D_e (\phi_e - \phi_p) - D_w (\phi_p - \phi_w) + D_n (\phi_n - \phi_p) - D_s (\phi_p - \phi_s) + Sc \Delta V \end{aligned} \quad (A.43)$$

onde:

$$M_p = \rho_p \Delta V$$

$$M_p^0 = \rho_p^0 \Delta V$$

$$F_e = \rho_e u_e \Delta y$$

$$F_w = \rho_w u_w \Delta y$$

$$F_n = \rho_n v_n \Delta x$$

$$F_s = \rho_s v_s \Delta x$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e^\phi \Delta y}{\delta_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w^\phi \Delta y}{\delta_w}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n^\phi \Delta x}{\delta_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s^\phi \Delta x}{\delta_s}$$

Pode-se, ainda, representar os fluxos das variáveis nas faces do volume de controle como um balanço entre fluxos positivos e negativos:

$$F_e \phi_e = F_e^+ \phi_e^+ + F_e^- \phi_e^- \quad (A.44a)$$

$$F_w \phi_w = F_w^+ \phi_w^+ + F_w^- \phi_w^- \quad (A.44b)$$

$$F_n \phi_n = F_n^+ \phi_n^+ + F_n^- \phi_n^- \quad (A.44c)$$

$$F_s \phi_s = F_s^+ \phi_s^+ + F_s^- \phi_s^- \quad (A.44d)$$

Substituindo-se as Equações (A.44a) – (A.44d) nos termos advectivos da

Equação (A.43), tem-se:

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s = (F_e^+ \phi_e^+ + F_e^- \phi_e^-) - (F_w^+ \phi_w^+ + F_w^- \phi_w^-) + (F_n^+ \phi_n^+ + F_n^- \phi_n^-) - (F_s^+ \phi_s^+ + F_s^- \phi_s^-) \quad (\text{A.45})$$

Os valores das propriedades nas faces do volume P, tanto para fluxos negativos (onde o escoamento é da direita para a esquerda) quanto positivos, já estão definidos anteriormente (Equações A.8, A.16, A.18, A.20, A.28, A.36, A.38 e A.40). Substituindo-se esses termos na Equação (A.45):

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s = F_e^+ (\phi_p + S_e^+) + F_e^- (\phi_E + S_e^-) - F_w^+ (\phi_w + S_w^+) - F_w^- (\phi_p + S_w^-) + F_n^+ (\phi_p + S_n^+) + F_n^- (\phi_N + S_n^-) - F_s^+ (\phi_s + S_s^+) - F_s^- (\phi_p + S_s^-) \quad (\text{A.46})$$

Inserindo-se a Equação (A.46) na Equação (A.43) e rearranjando-se os termos, obtém-se:

$$\phi_p \left(\frac{M_p}{\Delta t} + F_e^+ - F_w^- + F_n^+ - F_s^- + D_e + D_w + D_n + D_s \right) = \phi_E (-F_e^- + D_e) + \phi_w (+F_w^+ + D_w) + \phi_N (-F_n^- + D_n) + \phi_s (+F_s^+ + D_s) + B \quad (\text{A.47})$$

Analisando-se a Equação (A.47), pode-se observar que $A_p \neq A_E + A_W + A_N + A_S$. Porém, acrescentando-se ao termo A_p a equação da conservação da massa multiplicada por $-\phi_p$, obtém-se:

$$\phi_p \left(\frac{M_p}{\Delta t} + F_e^+ - F_w^- + F_n^+ - F_s^- + D_e + D_w + D_n + D_s \right) - \phi_p (F_e - F_w + F_n - F_s) =$$

$$\phi_p \left(\frac{M_p}{\Delta t} + F_e^+ - F_w^- + F_n^+ - F_s^- + D_e + D_w + D_n + D_s \right) - \phi_p [(F_e^+ + F_e^-) - (F_w^+ + F_w^-) + (F_n^+ + F_n^-) - (F_s^+ + F_s^-)] \quad (\text{A.48a})$$

$$\text{assim, } A_p \phi_p = \left(\frac{M_p}{\Delta t} - F_e^- + F_w^+ - F_n^- + F_s^+ + D_e + D_w + D_n + D_s \right) \phi_p \quad (\text{A.48b})$$

Substituindo-se o novo valor de A_p na equação geral discretizada – Equação (A.47) – tem-se:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (\text{A.49})$$

$$\begin{aligned} \text{onde: } A_E &= -F_e^- + D_e & A_W &= +F_w^+ + D_w & A_N &= -F_n^- + D_n \\ A_S &= +F_s^+ + D_s & A_P &= A_E + A_W + A_N + A_S + \frac{M_P}{\Delta t} - (F_e - F_w + F_n - F_s) \end{aligned}$$

$$B = Sc \Delta V + \frac{M_P^0}{\Delta t} \phi_P^0 + S_P$$

$$S_P = -F_e^+ S_e^+ - F_e^- S_e^- + F_w^+ S_w^+ + F_w^- S_w^- - F_n^+ S_n^+ - F_n^- S_n^- + F_s^+ S_s^+ + F_s^- S_s^-$$

A.3 – SOU (Second Order Upwind)

Assim como no esquema QUICK, o Upwind de Segunda Ordem calcula valor da propriedade nas faces do volume de controle a partir da interpolação entre os pontos nodais seguindo uma função. Neste caso, entretanto, a função interpoladora é uma reta de equação $\phi(x) = ax + b$ representada na Figura A.6.

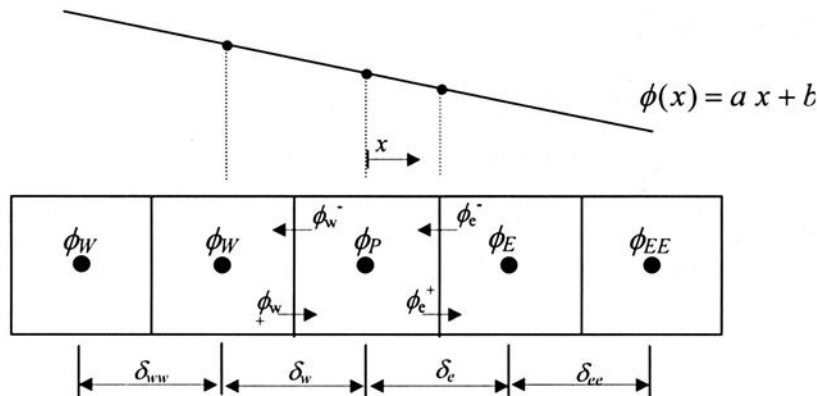


Figura A.6 – Estêncil da interpolação do termo Upwind de Segunda Ordem.

Assim, da a equação geral da reta:

$$\phi(x) = ax + b \quad (\text{A.50})$$

pode-se obter o valor da variável na face leste do volume de controle centrado em P, para uma velocidade positiva, da seguinte forma:

$$\phi(0) = b = \phi_P \quad (\text{A.51a})$$

$$\phi(-\delta_w) = a(-\delta_w) + \phi_p = \phi_w \quad (\text{A.51b})$$

Isolando-se a da Equação (A.51b), tem-se:

$$a = \frac{\phi_p - \phi_w}{\delta_w} \quad (\text{A.52})$$

Inserindo-se as Equações (A.51a) e (A.52) na Equação (A.50), resulta:

$$\phi(x) = \left(\frac{\phi_p - \phi_w}{\delta_w} \right) x + \phi_p \quad (\text{A.53})$$

Assim, o valor de ϕ na face leste, para velocidades positivas, é

$$\phi\left(\frac{\delta_e}{2}\right) = \phi_e^+ = \left(\frac{\phi_p - \phi_w}{\delta_w} \right) \left(\frac{\delta_e}{2} \right) + \phi_p \quad (\text{A.54})$$

$$\phi_e^+ = \phi_p + S_e^+ \quad (\text{A.55})$$

$$\text{onde } S_e^+ = (\phi_p - \phi_w) \left(\frac{\delta_e}{2\delta_w} \right) \quad (\text{A.56})$$

O emprego da Equação (A.55) é o mesmo da Equação (A.8), o valor da variável interpolada na face leste como uma parcela Upwind mais uma parcela acrescentada ao termo fonte da equação discretizada. Da mesma maneira, pode-se deduzir as demais expressões para a variável velocidade horizontal, como sendo:

$$\phi_e^- = \phi_E + S_e^-; \quad \text{onde: } S_e^- = (\phi_E - \phi_{EE}) \left(\frac{\delta_e}{2\delta_{ee}} \right) \quad (\text{A.57})$$

$$\phi_w^+ = \phi_W + S_w^+; \quad \text{onde: } S_w^+ = (\phi_W - \phi_{WW}) \left(\frac{\delta_w}{2\delta_{ww}} \right) \quad (\text{A.58})$$

$$\phi_w^- = \phi_P + S_w^-; \quad \text{onde: } S_w^- = (\phi_P - \phi_E) \left(\frac{\delta_w}{2\delta_e} \right) \quad (\text{A.59})$$

As interpolações dos termos cruzados (velocidades transversais ao escoamento) podem ser calculadas de forma idêntica à apresentada nas equações acima. A Figura A.7 será empregada para auxiliar na apresentação feita a seguir.

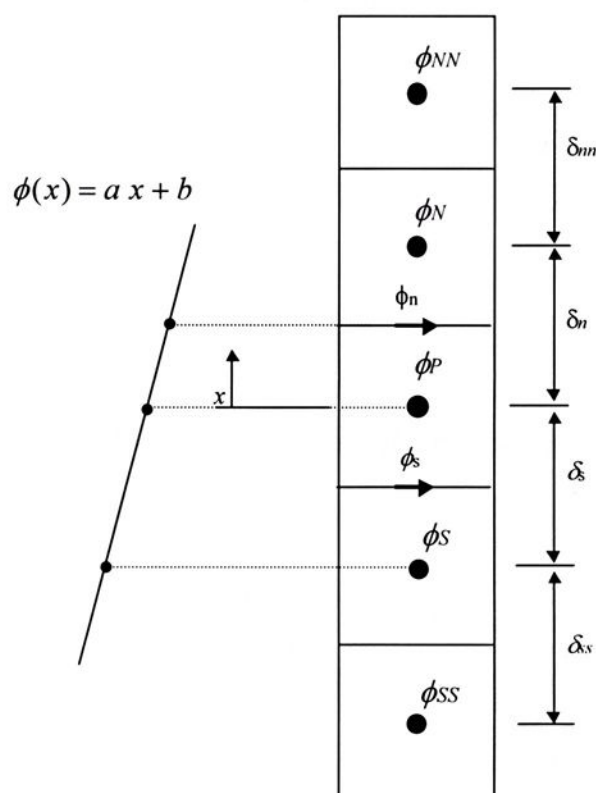


Figura A.7 - Estêncil para o cálculo da interpolação dos termos cruzados.

Para o cálculo da componente norte da propriedade ϕ , para velocidades transversais positivas, emprega-se também a equação de uma reta do tipo $\phi(x) = ax + b$, encontrando os coeficientes da forma:

$$\phi(0) = b = \phi_P \quad (\text{A.60a})$$

$$\phi(-\delta_s) = a(-\delta_s) + \phi_P = \phi_S \quad (\text{A.60b})$$

Isolando-se a da Equação (A.60b), tem-se:

$$a = \frac{\phi_P - \phi_S}{\delta_s} \quad (\text{A.61})$$

Inserindo-se as Equações (A.60a) e (A.61) na Equação (A.50), resulta:

$$\phi(x) = \left(\frac{\phi_p - \phi_s}{\delta_s} \right) x + \phi_p \quad (\text{A.62})$$

Encontra-se, então, o valor de ϕ_n^+ , como sendo:

$$\phi\left(\frac{\delta_n}{2}\right) = \phi_n^+ = \left(\frac{\phi_p - \phi_s}{\delta_s} \right) \left(\frac{\delta_n}{2} \right) + \phi_p \quad (\text{A.63})$$

$$\phi_n^+ = \phi_p + S_n^+ \quad (\text{A.64})$$

$$\text{onde: } S_n^+ = (\phi_p - \phi_s) \left(\frac{\delta_n}{2\delta_s} \right) \quad (\text{A.65})$$

Os demais termos podem ser calculados de forma semelhante e encontram-se descritos abaixo:

$$\phi_n^- = \phi_N + S_n^-; \quad \text{onde: } S_n^- = (\phi_N - \phi_{NN}) \left(\frac{\delta_n}{2\delta_{nn}} \right) \quad (\text{A.66})$$

$$\phi_s^+ = \phi_s + S_s^+; \quad \text{onde: } S_s^+ = (\phi_s - \phi_{ss}) \left(\frac{\delta_s}{2\delta_{ss}} \right) \quad (\text{A.67})$$

$$\phi_s^- = \phi_p + S_s^-; \quad \text{onde: } S_s^- = (\phi_p - \phi_N) \left(\frac{\delta_s}{2\delta_n} \right) \quad (\text{A.68})$$

Com todos os coeficientes calculados, a substituição na equação discretizada dá-se da mesma forma que no esquema QUICK, originando uma equação idêntica à Equação (A.49).

APÊNDICE B – A SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

B.1 – Introdução

Como foi visto anteriormente, o processo de discretização das Equações de Navier-Stokes, produz equações lineares da forma:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + B \quad (\text{B.1})$$

A aplicação desta equação a cada um dos volumes elementares do domínio computacional irá produzir o sistema de equações lineares abaixo, cuja solução fornece o campo da propriedade naquela iteração.

$$\begin{bmatrix} A_P^1 & -A_E^2 & 0 & -A_N^4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -A_W^1 & A_P^2 & -A_E^3 & 0 & -A_N^5 & & & \vdots \\ 0 & -A_W^2 & A_P^3 & -A_E^4 & 0 & & & \vdots \\ -A_S^5 & 0 & -A_W^3 & A_P^4 & -A_E^5 & & & 0 \\ 0 & -A_S^2 & 0 & -A_W^4 & A_P^5 & & & -A_N^n \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & -A_E^n \\ 0 & & & & & & & -A_P^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Para maior clareza, será descrito, a seguir, o procedimento de obtenção do Sistema de Equações (B.2), a partir da Equação (B.1). Por simplicidade, tome-se, a título de ilustração, uma malha de apenas 3 x 3 elementos, com as propriedades desconhecidas representadas pela letra ϕ , conforme apresentado na Figura B.1.

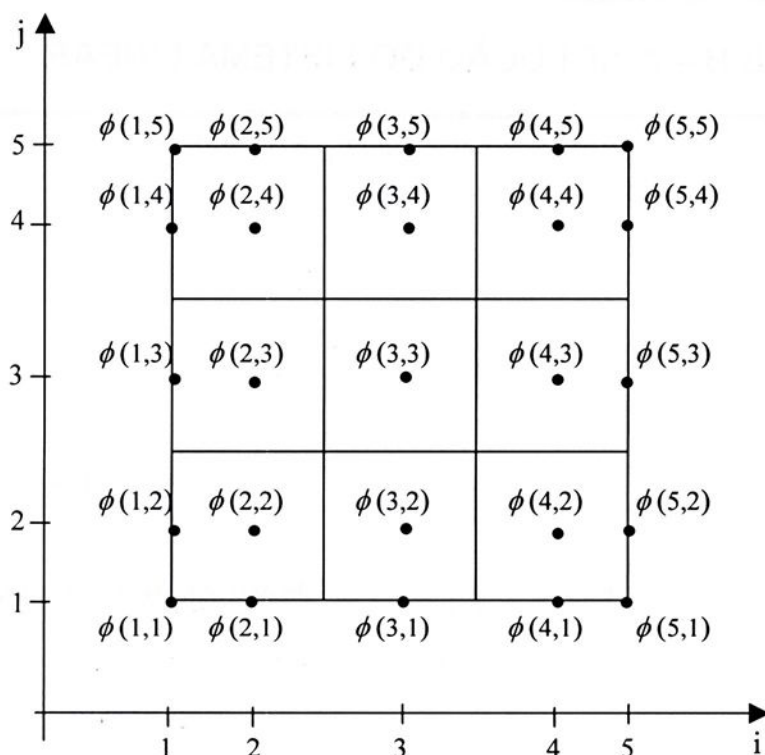


Figura B.1 – Malha de 25 nós e 9 elementos.

Os valores de ϕ nas fronteiras não podem ser considerados incógnitos, pois, quaisquer que sejam as condições de contorno empregadas (Von Neumann, Dirichlet ou uma combinação entre elas), terão seus valores conhecidos.

Dessa forma, tem-se, para os vinte e cinco nós da malha, apenas nove nós desconhecidos no interior do domínio, que comporão um sistema de nove equações lineares ($N = 9$) da forma $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, que pode ser representado como se segue:

$$\begin{aligned}
 A_p(2,2) \cdot \phi(2,2) - A_E(2,2) \cdot \phi(3,2) - A_N(2,2) \cdot \phi(2,3) &= B(2,2) \\
 A_p(3,2) \cdot \phi(3,2) - A_E(3,2) \cdot \phi(4,2) - A_W(3,2) \cdot \phi(2,2) - A_N(3,2) \cdot \phi(3,3) &= B(3,2) \\
 A_p(4,2) \cdot \phi(4,2) - A_W(4,2) \cdot \phi(3,2) - A_N(4,2) \cdot \phi(4,3) &= B(4,2) \\
 A_p(2,3) \cdot \phi(2,3) - A_E(2,3) \cdot \phi(3,3) - A_N(2,3) \cdot \phi(2,4) - A_S(2,3) \cdot \phi(2,2) &= B(2,3) \\
 A_p(3,3) \cdot \phi(3,3) - A_E(3,3) \cdot \phi(4,3) - A_W(3,3) \cdot \phi(2,3) - A_N(3,3) \cdot \phi(3,4) - A_S(3,3) \cdot \phi(3,2) &= B(3,3) \\
 A_p(4,3) \cdot \phi(4,3) - A_W(4,3) \cdot \phi(3,3) - A_S(4,3) \cdot \phi(4,2) &= B(4,3) \\
 A_p(2,4) \cdot \phi(2,4) - A_E(2,4) \cdot \phi(3,4) - A_S(2,4) \cdot \phi(2,3) &= B(2,4) \\
 A_p(3,4) \cdot \phi(3,4) - A_W(3,4) \cdot \phi(2,4) - A_E(3,4) \cdot \phi(4,4) - A_S(3,4) \cdot \phi(3,3) &= B(3,4) \\
 A_p(4,4) \cdot \phi(4,4) - A_W(4,4) \cdot \phi(3,4) - A_S(4,4) \cdot \phi(4,3) &= B(4,4)
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 B(2,2) &= B(2,2) + A_W(2,2) \cdot \phi(1,2) + A_S(2,2) \cdot \phi(2,1) \\
 B(3,2) &= B(3,2) + A_S(3,2) \cdot \phi(3,1) \\
 B(4,2) &= B(4,2) + A_E(4,2) \cdot \phi(5,2) + A_S(4,2) \cdot \phi(4,1) \\
 B(2,3) &= B(2,3) + A_W(2,3) \cdot \phi(1,3) \\
 B(4,3) &= B(4,3) + A_E(4,3) \cdot \phi(5,3) + A_N(4,3) \cdot \phi(4,4) \\
 B(2,4) &= B(2,4) + A_W(2,4) \cdot \phi(1,4) + A_N(2,4) \cdot \phi(2,5) \\
 B(3,4) &= B(3,4) + A_N(3,4) \cdot \phi(3,5) \\
 B(4,4) &= B(4,4) + A_E(4,4) \cdot \phi(5,4) + A_N(4,4) \cdot \phi(4,5)
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

B.2 – Algoritmo de Thomas (TDMA)

De forma resumida, pode-se descrever o seguinte procedimento para o método TDMA de solução do sistema linear, considerando-se uma varredura no sentido oeste - leste:

Num primeiro momento, rescreve-se a equação geral discretizada – Equação (B.1) – na forma:

$$A_m \phi_m + B_m \phi_{m+1} + C_m \phi_{m-1} = D_m \quad m = 1, \dots, n \tag{B.5}$$

onde: $D_m = A_N \phi_N + A_S \phi_S + B$

e $A_m = A_P; \quad B_m = -A_E; \quad C_m = -A_W$

A idéia é obter uma relação recursiva do tipo:

$$\phi_m = P_m \phi_{m+1} + Q_m \tag{B.6a}$$

$$\phi_m - P_m \phi_{m+1} - Q_m = 0 \tag{B.6b}$$

Isto seria possível fazendo-se uma varredura completa do domínio, de $m = 1$ até $m = n$, determinando-se, então, os coeficientes P_P e Q_m , que são conhecidos nos contornos. Em seguida, invertendo-se o processo, ou seja, diminuindo-se o índice m , desde $m = n$ até $m = 1$, pode-se encontrar valor de ϕ_m . Para maior clareza, diminuindo-se um índice da Equação (B.6a), tem-se:

$$\phi_{m-1} = P_{m-1} \phi_m + Q_{m-1} \tag{B.7}$$

Substituindo-se a Equação (B.7) na Equação (B.5), obtém-se:

$$A_m \phi_m + B_m \phi_{m+1} + C_m (P_{m-1} \phi_m + Q_{m-1}) = D_m \tag{B.8a}$$

$$\Rightarrow \phi_m (A_m + C_m P_{m-1}) + B_m \phi_{m+1} + C_m Q_{m-1} - D_m = 0 \tag{B.8b}$$

$$\Rightarrow \phi_m + \left(\frac{B_m}{A_m + C_m P_{m-1}} \right) \phi_{m+1} + \left(\frac{C_m Q_{m-1} - D_m}{A_m + C_m P_{m-1}} \right) = 0 \quad (\text{B.8c})$$

Comparando-se a Equação (B.8c) com a Equação (B.6b), vem:

$$P_m = \frac{-B_m}{A_m + C_m P_{m-1}} \quad Q_m = \frac{D_m - C_m Q_{m-1}}{A_m + C_m P_{m-1}} \quad (\text{B.9})$$

Assim, uma vez obtidos P_1 e Q_1 , através das relações:

$$P_1 = \frac{B_1}{A_1} \quad \text{e} \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1} \quad (\text{B.10})$$

pode-se, então, determinar todos os valores de P e de Q , por intermédio das Equações (B.9).

Na extremidade oposta do domínio, o coeficiente B_n vale zero, resultando, então, em:

$$\phi_n = Q_n \quad (\text{B.11})$$

Para uma varredura realizada no sentido sul - norte, uma pequena alteração faz-se necessária nos índices dos coeficientes da Equação (B.5), como segue:

$$D_m = A_W \phi_W + A_E \phi_E + B; \quad (\text{B.12a})$$

$$A_m = A_P; \quad (\text{B.12b})$$

$$B_m = -A_N; \quad (\text{B.12c})$$

$$C_m = -A_S \quad (\text{B.12d})$$

Em se trabalhando num domínio tridimensional, bastaria somar ao termo D_m os valores de $A_T \phi_T$ e $A_B \phi_B$. Porém, surgirá a necessidade de se estender a varredura do domínio, agora no sentido fundo - topo (*bottom - top*) também.

B.3 – TDMA com Correção em Bloco.

Para melhorar a convergência do Algoritmo de Thomas, a técnica de correção em bloco pode ser empregada. Em linhas gerais, o método consiste em fixar uma determinada linha i (ou coluna j) e varrer todas as colunas j (ou linhas i) de forma que todas as variáveis daquela linha (ou coluna) sejam atualizadas de uma só vez. Assim, as informações nas fronteiras são transmitidas de forma bem mais rápida para o interior do domínio, o que tende a acelerar a

convergência. Evidentemente, problemas em que as condições de contorno na fronteira exercem forte influência na solução são os mais beneficiados pela correção em bloco.

Existem, por outro lado, certas situações em que a técnica pode se tornar prejudicial à convergência, como nos casos em que há volumes internos ao domínio com geração de calor, por exemplo.

Para ilustrar a aplicação da correção em bloco, será fixada uma linha genérica i do domínio computacional, executando-se a varredura ao longo das colunas j . Assim, tem-se para o i -ésimo bloco:

$$\phi_{i,j} = \phi_{i,j}^* + \bar{\phi}_i \quad (\text{B.13})$$

onde $\phi_{i,j}^*$ é o valor obtido na iteração anterior e $\bar{\phi}_i$ é o valor médio da soma ao longo da linha i , que deverá, na convergência, tender a zero, por estar atuando, aqui, como uma correção para o valor anterior da variável ($\phi_{i,j}^*$).

Somando-se todos os valores das colunas j ao longo da linha i , tem-se

$$\begin{aligned} \sum_j (A_p) \phi_{i,j} = & \sum_j (A_w) \phi_{i-1,j} + \sum_j (A_E) \phi_{i+1,j} + \sum_j (A_S) \phi_{i,j-1} + \\ & \sum_j (A_N) \phi_{i,j+1} + \sum_j (B) + \sum_j (A_N) \phi_{i,j+1} + \sum_j (B) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

substituindo-se a Equação (B.13) na Equação (B.14), resulta:

$$\begin{aligned} \sum_j (A_p) (\phi_{i,j}^* + \bar{\phi}_i) = & \sum_j (A_w) (\phi_{i-1,j}^* + \bar{\phi}_{i-1}) + \sum_j (A_E) (\phi_{i+1,j}^* + \bar{\phi}_{i+1}) + \\ & \sum_j (A_S) (\phi_{i,j-1}^* + \bar{\phi}_i) + \sum_j (A_N) (\phi_{i,j+1}^* + \bar{\phi}_i) + \sum_j (B) \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Esta última equação pode ser rescrita na forma:

$$a_i \bar{\phi}_i = b_i \bar{\phi}_{i-1} + c_i \bar{\phi}_{i+1} + d_i \quad (\text{B.16})$$

$$\text{onde } a_i = \sum_j (A_p - A_S - S_N) \quad (\text{B.17a})$$

$$b_i = \sum_j (A_w) \quad (\text{B.17b})$$

$$c_i = \sum_j (A_E) \quad (\text{B.17c})$$

$$d_i = \sum_j [(A_W)\phi_{i-l,j}^* + (A_E)\phi_{i+l,j}^* + (A_S)\phi_{i,j-l}^* + (A_N)\phi_{i,j+l}^* - (A_P)\phi_{i,j}^* + B] \quad (\text{B.17d})$$

Os a_i, b_i e c_i da Equação (B.16) são os mesmos coeficientes do TDMA *standard*, ou seja, os mesmos das Equações (B.5), e são resolvidos de forma idêntica.

Por fim, deve-se ressaltar que, nas fronteiras, o valor da variável $\bar{\phi}$ deve ser zero, pois $\phi_{i,j}$ é prescrito, uma vez que as condições de contorno devem ser conhecidas.

Uma vez resolvidos todos os coeficientes da Equação (B.14), atualiza-se a variável $\phi_{i,j}$ empregando-se a Equação (B.13).

APÊNDICE C – FLUXOGRAMAS

Neste apêndice são apresentados os fluxogramas das principais subrotinas encontradas no *solver* numérico, acompanhados de uma breve descrição.

O primeiro dos fluxogramas corresponde ao bloco principal do programa – *Main* – que se encontra representado na Figura C.1. Esta rotina é responsável, inicialmente, pelo gerenciamento das funções de leitura das condições iniciais do problema físico e do domínio computacional, bem como das configurações do *solver*. Em seguida, ela procede a chamada às subrotinas que resolvem as equações de Navier-Stokes, até que o tempo total de simulação seja atingido.

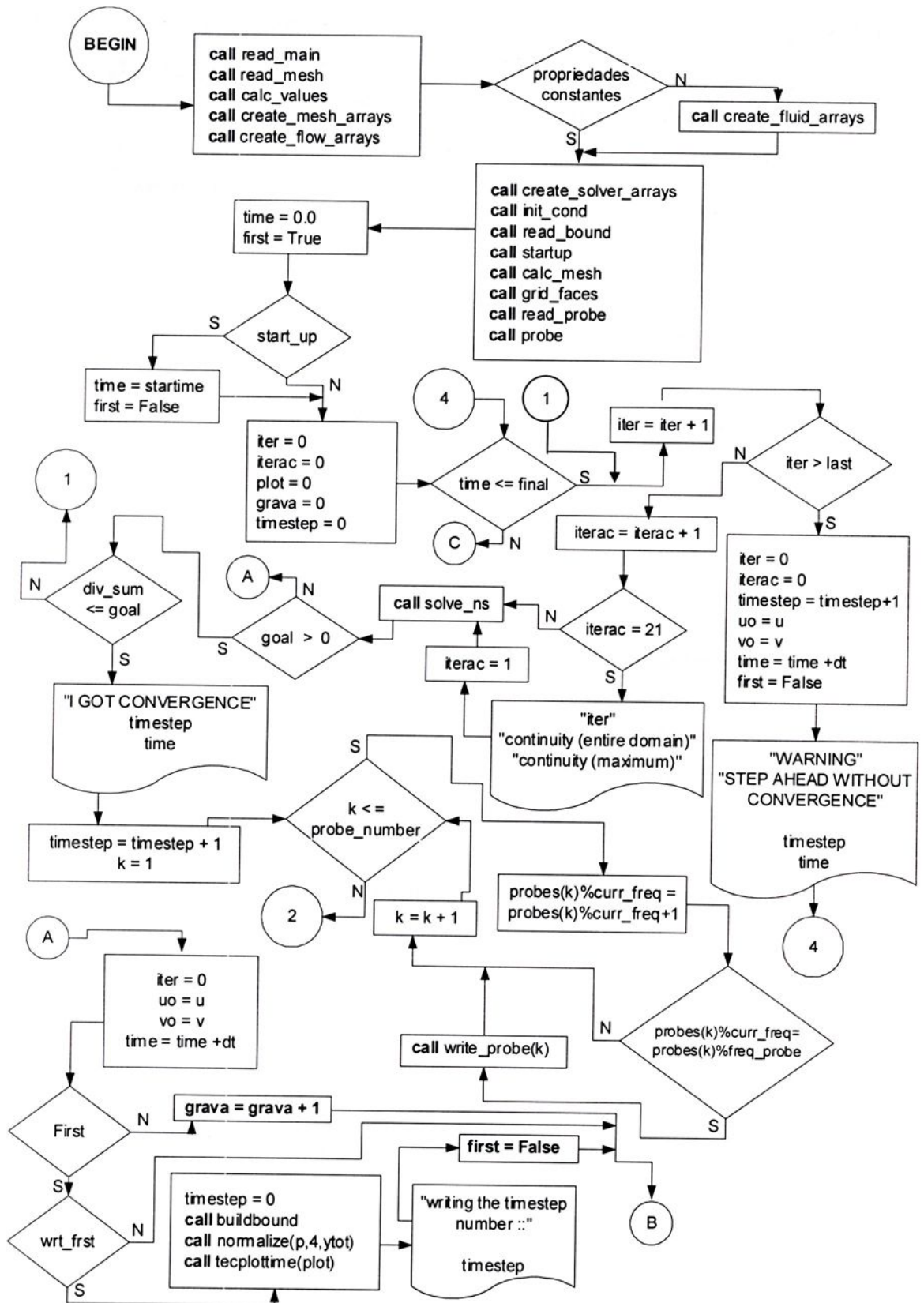
Na Figura C.2, está representada, também em forma de fluxograma, a subrotina que constrói a malha numérica, a partir da leitura das informações contidas em um arquivo no formato *.msh*, que é o formato padrão para o armazenamento dos dados referentes à malha. Todas as variáveis envolvidas nos cálculos possuem dupla precisão como tamanho da palavra, principalmente quando o problema a ser simulado ocorre na escala dos milímetros (o programa trabalha no SI), permitindo que se empregue malhas bastante densas, sem que se incorra em oscilações numéricas prejudiciais à solução.

O fluxograma correspondente à subrotina *solve_ns*, que gerencia a solução das equações da quantidade de movimento e de conservação da massa, é representado na Figura C.3. Esta subrotina aciona a solução das equações da quantidade de movimento em *u* (*solve_u*), cujo fluxograma é ilustrado na Figura C.4, e da quantidade de movimento em *v* (*solve_v*), que, pela semelhança com a solução para a variável *u*, não está sendo apresentado.

Na execução seguinte, o algoritmo invoca a solução da conservação da massa (*solve_p*), conferindo, dentro do termo fonte, o resíduo da massa (divergente do campo de velocidades) em cada célula e o resíduo total em todo o domínio. O valor do resíduo total é o parâmetro adotado

pelo programa para verificação do critério de convergência dentro de cada passo de tempo, sendo representado pelo fluxograma na Figura C.5.

Por fim, para melhor oferecer um panorama geral do programa Fluids, a Figura C.6 resume as principais tarefas executadas por cada uma de suas rotinas, enquanto a Tabela C.1 apresenta suas atribuições principais.

Figura C.1 – Fluxograma da estrutura *Main*.

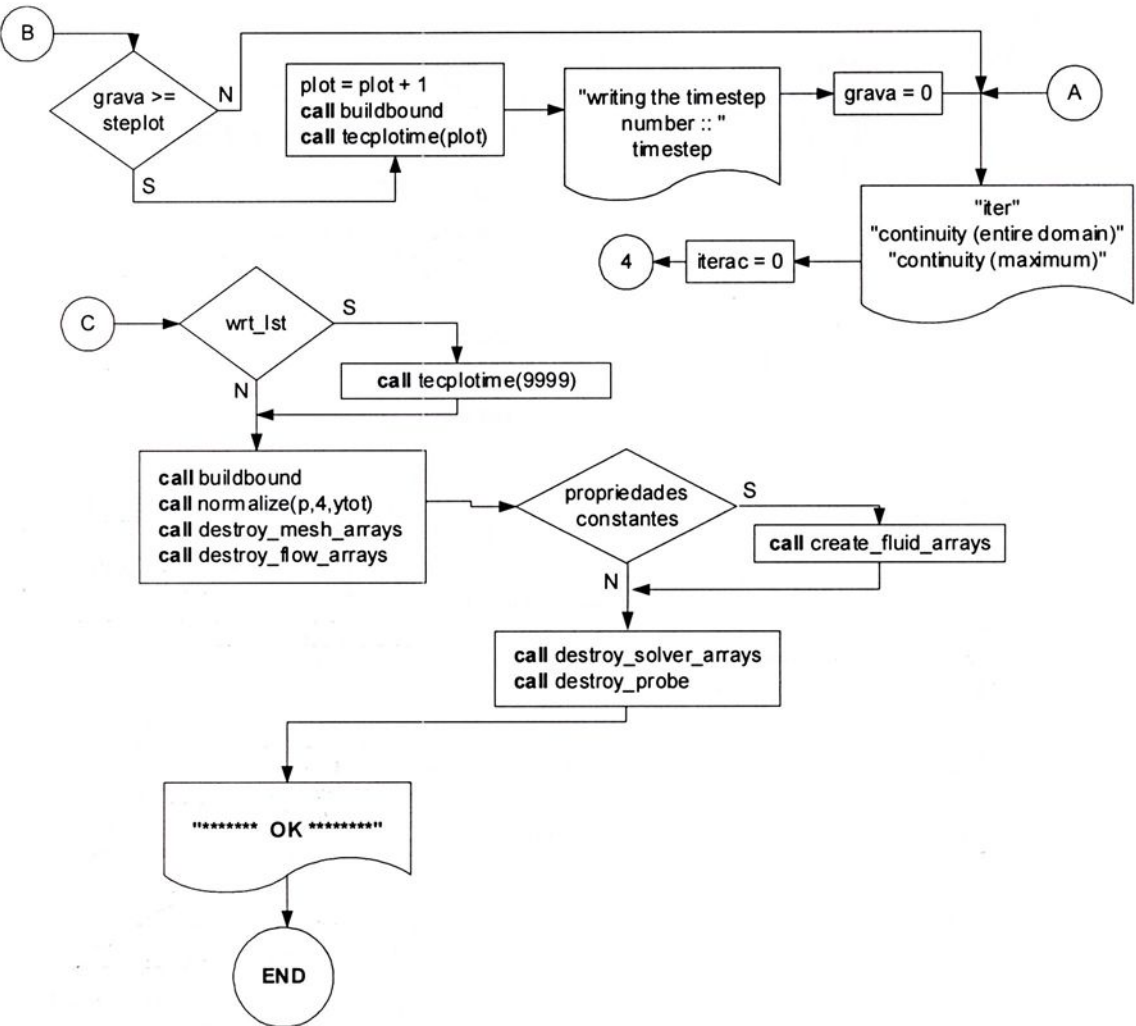


Figura C.1 – Fluxograma da estrutura *Main* (continuação).

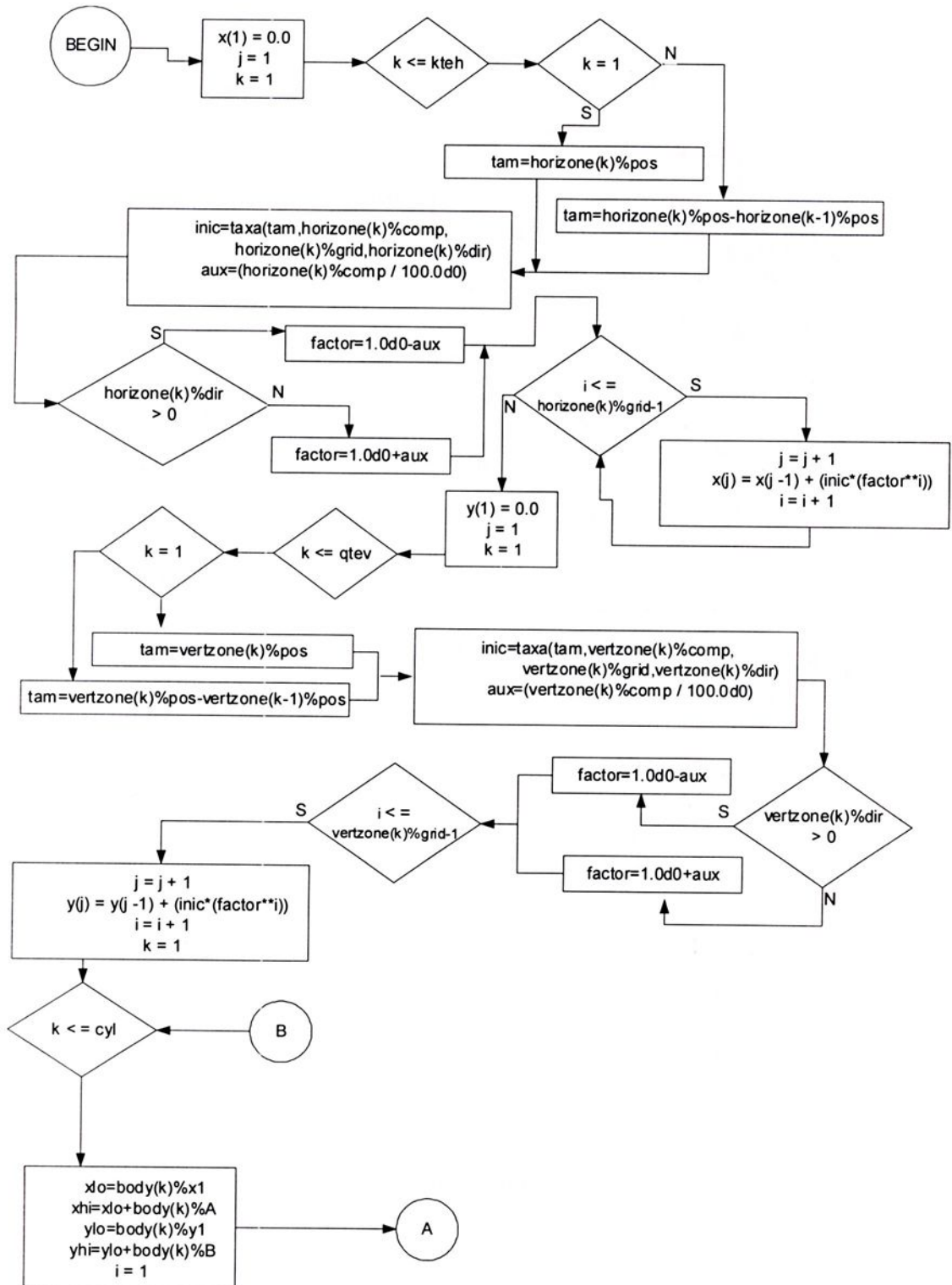


Figura C.2 – Geração de malhas computacionais.

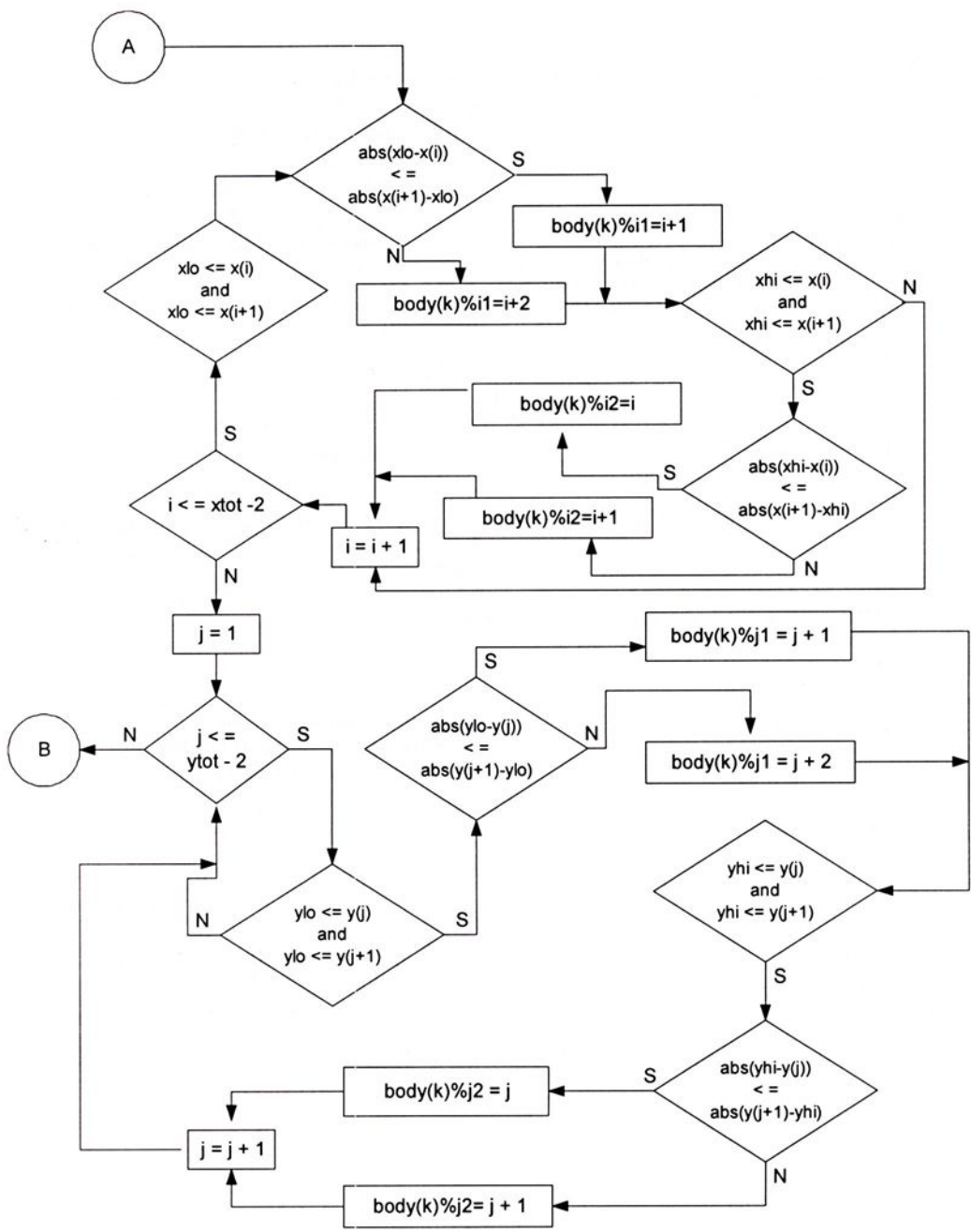


Figura C.2 – Geração das malhas computacionais (Continuação).

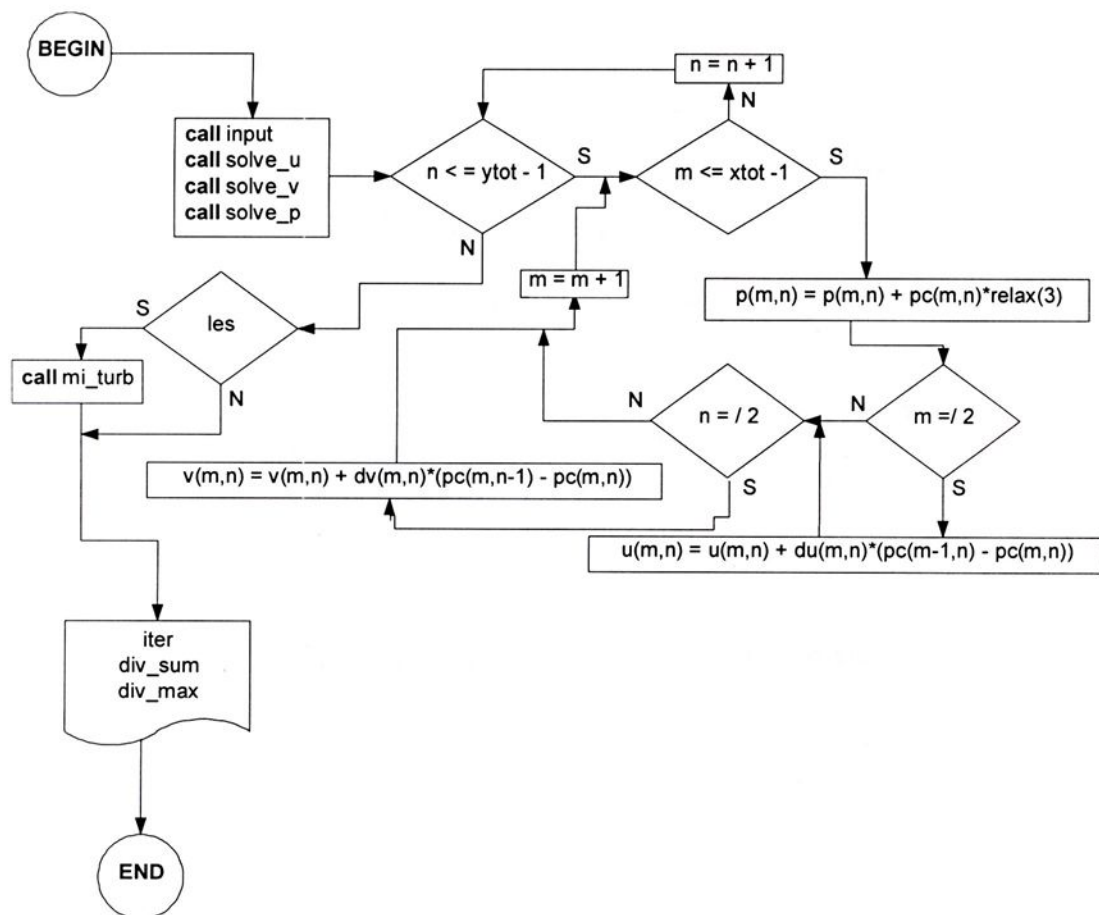


Figura C.3 – Fluxograma representativo da subrotina *solve_ns*.

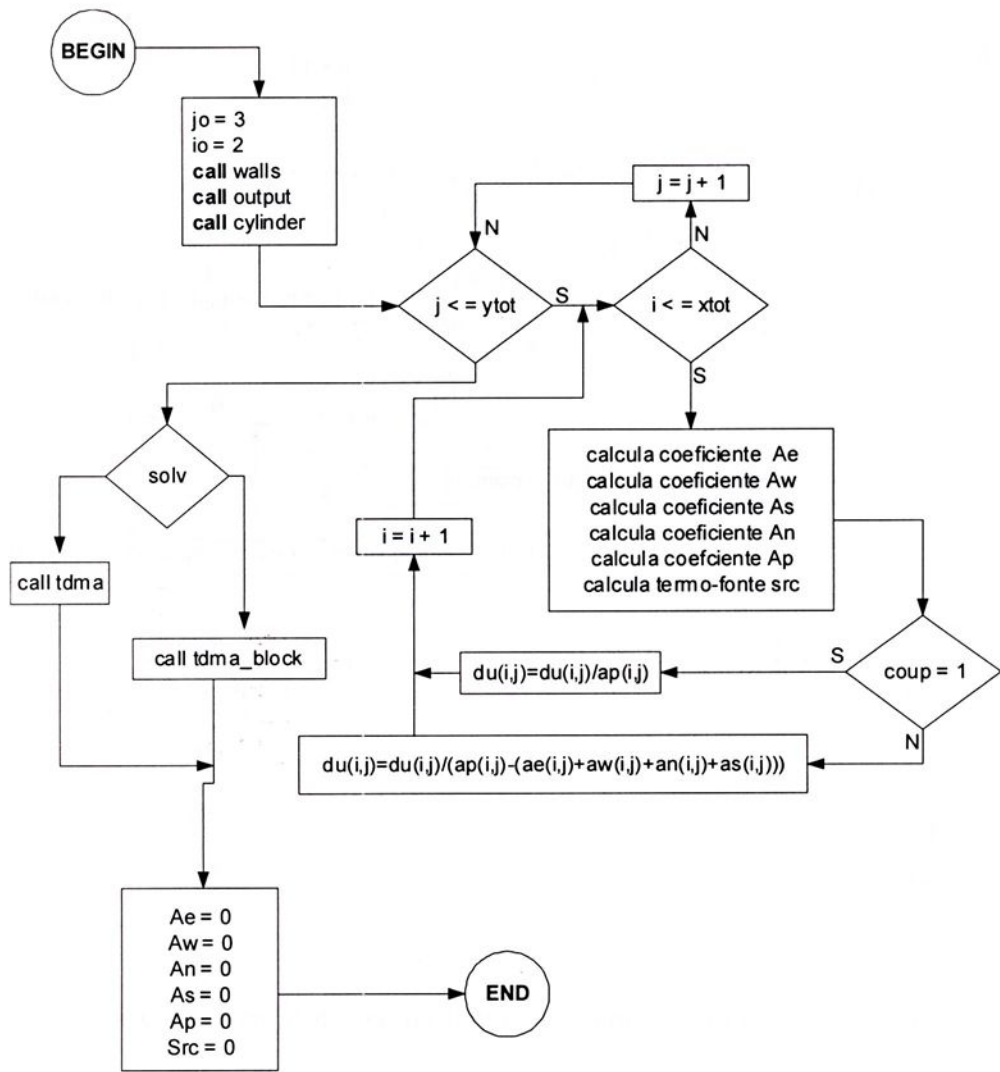


Figura C.4 – Algoritmo para solução das velocidades u e v .

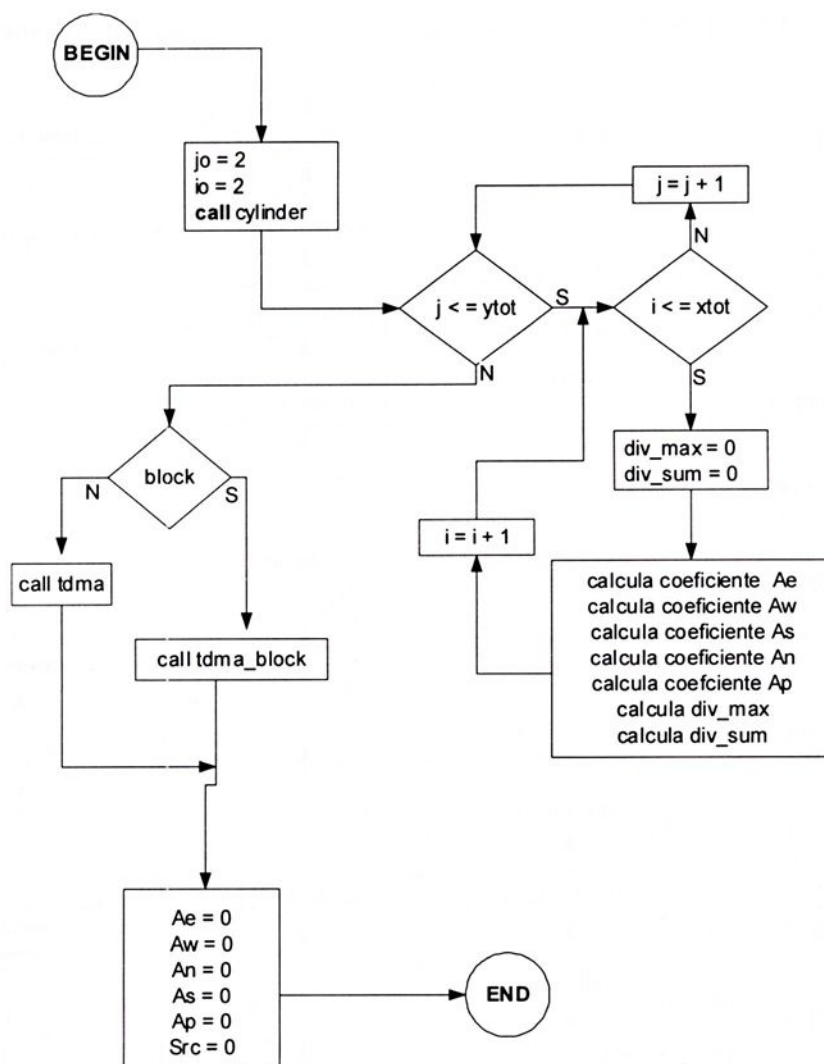


Figura C.5 – Algoritmo para a solução da variável p_c (correção da pressão).

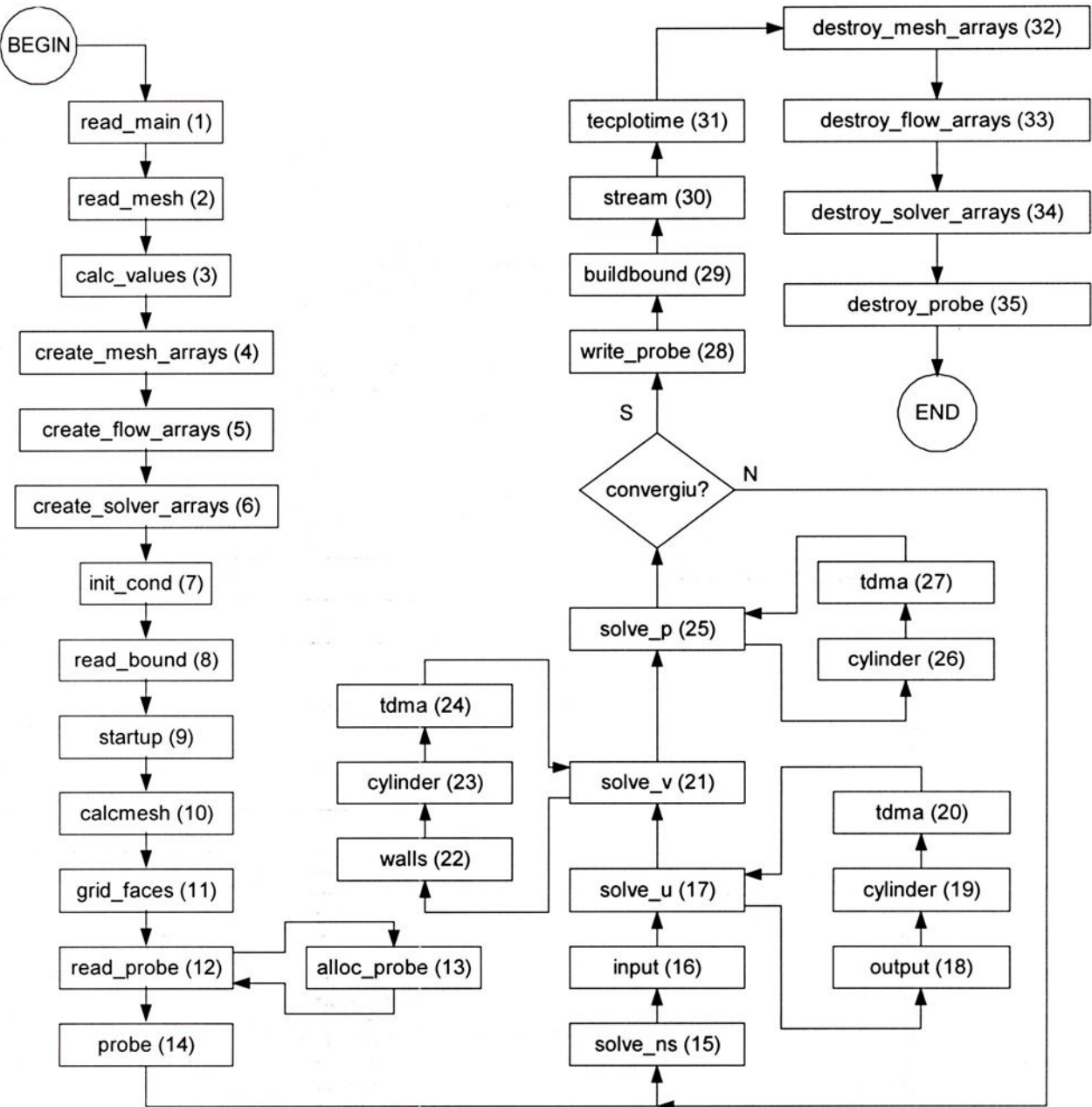


Figura C.6 – Algoritmo simplificado de funcionamento do programa Fluids.

Tabela C.1 – Descrição das rotinas apresentadas no algoritmo da Figura C.6

	TAREFA
1	Lê os nomes dos endereços onde se encontram armazenadas as informações sobre a simulação.
2	Lê as informações necessárias à construção da malha computacional.
3	Calcula a dimensão das matrizes envolvidas na simulação.
4	Aloca memória para os vetores e matrizes associados à construção da malha computacional.
5	Aloca memória para as matrizes que armazenarão os dados do escoamento.
6	Aloca memória para as matrizes envolvidas na solução dos sistemas lineares.
7	Define os valores dos números muito grandes e muito pequenos usados nos cálculos.
8	Lê as informações sobre as condições de contorno do problema.
9	Atribui os valores iniciais para as variáveis.
10	Calcula as coordenadas dos pontos da malha computacional.
11	Calcula as dimensões dos volumes elementares.
12	Lê informações sobre as sondas numéricas.
13	Aloca espaço na memória para as sondas numéricas.
14	Encontra as coordenadas discretas das sondas no domínio computacional.
15	Gerencia as chamadas às rotinas para a solução das equações de Navier-Stokes.
16	Atribui as condições de contorno para o problema físico.
17	Monta o sistema linear para a componente u da velocidade.
18	Aplica as condições de contorno na saída do domínio.
19	Atribui os valores de viscosidade infinita na região compreendida pelo(s) cilindro(s).
20	Função que resolve o sistema linear da variável u pelo algoritmo de Thomas (TDMA).
21	Monta o sistema linear para a componente v da velocidade.
22	Aplica as condições de contorno para as paredes do domínio (caso haja alguma).
23	Atribui os valores de viscosidade infinita na região compreendida pelo(s) cilindro(s).
24	Função que resolve o sistema linear da variável v pelo algoritmo de Thomas (TDMA).
25	Monta o sistema linear para a correção da pressão pc .
26	Atribui os valores de viscosidade infinita na região compreendida pelo(s) cilindro(s).
27	Função que resolve o sistema linear da variável pc pelo algoritmo de Thomas (TDMA).
28	Grava os dados monitorados pelas sondas numéricas.
29	Interpola os valores das variáveis nos contornos do domínio computacional.
30	Calcula os valores para a função corrente.
31	Salva os valores dos campos das propriedades no formato lido pelo Tecplot.
32	Libera a memória alocada para os vetores e matrizes da malha computacional.
33	Libera a memória alocada para as matrizes que armazenam as variáveis do escoamento.
34	Libera a memória alocada para as matrizes do <i>solver</i> .
35	Libera a memória alocada para as sondas numéricas.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"**

**Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dem.feis.unesp.br**

