

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Influência da Fronteira em um Método Implícito para a Equação de Stokes

Claudio de Lima Menezes

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguette Junior

Presidente Prudente, Agosto de 2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Influência da Fronteira em um Método Implícito para a Equação de Stokes

Claudio de Lima Menezes

Orientador: Prof. Dr. Messias Meneguette Junior

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Agosto de 2012

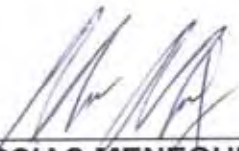
FICHA CATALOGRÁFICA

Menezes, Claudio de Lima.
M51i Influência da Fronteira em um Método Implícito para a Equação de Stokes / Claudio de Lima Menezes. - Presidente Prudente : [s.n], 2012
 xii, 69 f. : il.

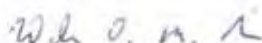
 Orientador: Messias Meneguette Júnior
 Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia
 Inclui bibliografia

 1. Estabilidade. 2. Equação de Stokes. 3. Formulação velocidade-pressão. 4. Análise modo-normal. 5. Fator de amplificação I. Meneguette Jr., Messias. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Influência da Fronteira em um Método Implícito para a Equação de Stokes.

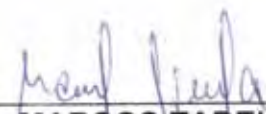
BANCA EXAMINADORA



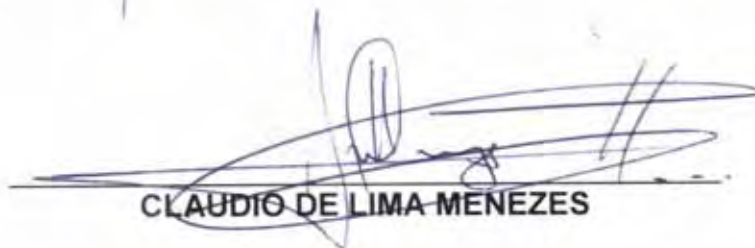
PROF. DR. MESSIAS MENEGUETTE JUNIOR
ORIENTADOR



PROFA. DRA. HELOISA HELENA MARINO SILVA
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO



PROF. DR. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA-UEL



CLAUDIO DE LIMA MENEZES

PRESIDENTE PRUDENTE (SP), 31 DE AGOSTO DE 2012.

RESULTADO: APROVADO

Dedicatória

*A minha mãe Vera Lúcia, in memoriam, pelo maior exemplo que tive de vida,
força, coragem, caráter e dignidade.
Aos meus irmãos Alessandra e Valter pelo amor e incentivos.
A minha esposa, Gislaine, a minha filha, Beatriz,
e a minha cunhada, Gabriely,
pela paciência, pelo amor, carinho e compreensão.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por ter me guiado em todos momentos de dificuldades, mas principalmente pelos momentos de alegrias que me proporcionou.

A minha mãe Vera Lúcia (in memoriam), aos meus irmãos Alessandra e Valter pelo apoio e incentivos nessa jornada que a cada dia tenho que seguir mais adiante.

A minha querida e amada esposa, Gislaine, a filha, Beatriz, a cunhada Gabriely pelo amor e pela compreensão quando mais estive ausente.

Aos professores da graduação da FCT/Unesp, em especial aos Drs. José Roberto Nogueira e Suetônio de Almeida Meira pela orientação, incentivo e amizade que me ajudaram a prosseguir nesta carreira acadêmica.

Aos professores do ICMC/USP de São Carlos/SP, especialmente a meu ex-orientador, professor Dr. José Alberto Cuminato, exemplo de dedicação e competência. Serei sempre grato por sua orientação, compreensão e acompanhamento durante o desenvolvimento inicial deste trabalho.

Aos professores da Pós-MAC da FCT/Unesp pelos conhecimentos transmitidos, em especial ao meu orientador e amigo Prof. Dr. Messias Meneguette, primeiramente por aceitar me orientar neste trabalho, e por não medir esforços para que esse trabalho fosse concluído. Além disso, considero um exemplo de pessoa e de profissional, pela confiança, honestidade, dedicação, apoio e serenidade.

A todos amigos, em especial aos amigos desde a graduação Alex Gimenes (Cabeça) e Glauber Colnago(Oreia), aos amigos do LCAD João Paulo Góis, Renato Ap. Pimentel da Silva e Cássio Oishi, aos amigos da república Flávio Dusse, Juliano Ribeiro de Oliveira e Marcos Pimenta, aos colegas de serviço (Caixa Econômica Federal), pelos momentos de descontração, apoio e amizade nos momentos de dificuldade.

Aos companheiros que junto a mim formaram a primeira turma da Pós-MAC da FCT-UNESP: Danilo (in memoriam), Diego, Marcelo, Marluce, Marluci, Marilaine e Tamiris pelas ajudas que de forma direta me ajudaram muito e contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação da FCT/Unesp pelo auxílio prestado no decorrer deste curso de mestrado.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (número de processo: 04/11330-2) durante a fase inicial deste projeto no LCAD-ICMC/USP de São Carlos/SP.

Enfim, meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de alguma forma, colaboraram na elaboração desta dissertação.

*“ Não possuir algumas das coisas que
desejamos é parte indispensável
da felicidade”.*

Bertrand Russell

Resumo

Neste trabalho é estudada a estabilidade para a equação de Stokes com diferentes condições de contorno em um esquema implícito. São consideradas análise pelo modo-normal (método de Fourier) e pela computação numérica do fator de amplificação.

Palavras chave: *estabilidade, equação de Stokes, formulação velocidade-pressão, análise modo-normal, fator de amplificação.*

Abstract

Title: The Boundary Influence in an Implicit Method for Stokes Equation.

In this work we studied the stability for the Stokes equation with different boundary conditions in an implicit scheme. The normal-mode analysis (Fourier method) and numerical computation of the amplification factor are considered.

Keywords: *stability, Stokes equation, velocity-pressure formulation, normal-mode analysis, amplification factor.*

Lista de Figuras

1.1	Características	5
2.1	Malha	36
2.2	A função $q(s)$ para valor real s no caso de $n = 15$, $\omega = 1$	43
2.3	A função $q_2(s)$ para valores reais ξ no caso de $n = 15$, $\omega = 1$	50
2.4	A função $q_3(s)$ para o valor real s no caso $n = 15$, $\omega = 1$, e $\Delta t = 2$	54
2.5	A função $q_4(\xi)$ para valor real no caso $n = 15$, $\omega = 1$, e $\Delta t = 1$	57
2.6	Os fatores de amplificação para a condição Acoplada.	63
2.7	Os fatores de amplificação para a condição Div-Grad.	63
2.8	Os fatores de amplificação para a condição Rotacional.	63

Lista de Tabelas

2.1	Tabela das CCP.	32
-----	-------------------------	----

Sumário

1	Conceitos Básicos	1
1.1	Considerações Iniciais	1
1.2	Funções Malha Periódica e Operadores Diferenças	2
1.3	Equação da Onda de Primeira Ordem, Convergência e Estabilidade	4
1.4	Métodos Implícitos	10
1.5	Equação de Convecção-Difusão	11
1.6	Estabilidade para Problemas Não-Lineares	14
1.7	Uso da Transformada de Laplace e Estabilidade	16
2	Estudo do Efeito da Fronteira	31
2.1	Motivação	31
2.2	O Caso Semidiscreto	35
2.2.1	Condição Acoplada	42
2.2.2	Condição Div-Grad	45
2.2.3	Condição Rotacional	46
2.3	O Caso Completamente Discreto	51
2.3.1	Condição Acoplada	53
2.3.2	Condição Div-Grad	53
2.3.3	Condição Rotacional	56
2.4	Computação Numérica do Fator de Amplificação	58
2.4.1	A Discretização Implícita das Equações de Stokes	59
3	Considerações Finais	65
	Referências Bibliográficas	69

Conceitos Básicos

1.1 Considerações Iniciais

Historicamente, as equações diferenciais parciais (EDPs) são provenientes da resolução de uma grande variedade de problemas da mecânica. A principal razão disto é que as equações diferenciais parciais expressam muitas leis fundamentais da natureza e surgem na análise matemática de diversos problemas em ciência e engenharia.

Nosso desenvolvimento destina-se a estudar a estabilidade da discretização implícita da equação de Stokes, sujeita a três diferentes condições de fronteira. Duas técnicas são usadas: análise pelo modo normal e pelo cálculo do fator de amplificação. Este estudo poderá servir no futuro para simulações computacionais de situações e aplicações mais realísticas.

No campo das equações diferenciais parciais as soluções numéricas é por si uma importante área, não apenas pelos resultados que se pode atingir, mas também por ser uma rica fonte de pesquisa. Na área de equações hiperbólicas, por exemplo, muito tempo foi preciso para se conseguir bons métodos, como os esquemas *upwind* TVD (*Total Variation Diminishing*) de Harten [13], porém a pesquisa continua em termos de esquemas centrais. Por outro lado, a solução de sistemas hiperbólicos ainda é uma fonte atual de pesquisa, principalmente em relação ao efeito que a fronteira pode causar na discretização. Salienta-se ainda que a própria física do problema pode não ser ainda totalmente estabelecida. É este o caso aqui, onde três possibilidades são consideradas como condições de fronteira, conforme Petersson [21].

Quando se pensa na simulação computacional, a literatura é mais ampla para métodos explícitos Strikwerda [26], Alves et al. [1], mas o caso implícito está apenas começando Oishi et al. [20].

Na literatura, a análise é, em geral, menos detalhada e por isso este estudo procura fazer um detalhamento mais teórico e considerando que a simulação numérica, que exige

um esforço de implementação muito exagerado, seja feita em trabalhos futuros. Desta forma temos um capítulo de conceitos básicos que constrói a fundamentação teórica para o outro capítulo que detalha o efeito da fronteira na discretização da equação de Stokes.

Neste capítulo então é feito um breve resumo dos principais conceitos que representam a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do próximo capítulo. A abordagem escolhida segue de perto o trabalho de Gustafsson et al. [11] que utiliza funções malha periódicas. Expansões em funções de Fourier são particularmente usadas para análise e construção de métodos numéricos para equações diferenciais parciais; os principais resultados desta teoria serão usados como base para o desenvolvimento desta dissertação. Vamos examinar algumas propriedades básicas de equações diferenciais, aproximações por diferenças e algumas abordagens para o estudo da estabilidade de métodos numéricos. O objetivo aqui será apresentar as principais ferramentas utilizadas no próximo capítulo, no qual se resume em definir a técnica para discretizar e estabelecer a condição necessária de estabilidade (Condição de Godunov-Ryaben'kii), conforme os trabalhos de Godunov & Ryaben'kii [9, 8] e Gustafsson et al. [11].

1.2 Funções Malha Periódica e Operadores Diferenças

Seja $h = 2\pi/(N+1)$, onde N é um número natural, denotando os intervalos da malha. Uma malha no eixo x é definida como sendo o conjunto de pontos da malha

$$x_j = jh, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

A discretização, com possíveis valores complexos, da função u definida sobre a malha é chamada uma função malha. Estamos interessado somente em funções malha 2π -periódica, ou seja,

$$u_j = u(x_j) = u(x_j + 2\pi) = u_{j+N+1}.$$

O produto e soma de funções malha são também funções malha. Seus valores na malha são

$$(uv)_j = u_j v_j, \quad (u+v)_j = u_j + v_j.$$

Denotamos o conjunto de todas as funções malha por P_h . Se $u, v \in P_h$, então $uv, u+v \in P_h$.

Agora introduziremos os operadores diferença. Eles representam uma parte fundamental do nosso estudo. Iniciamos com o operador translação E . Ele é definido por

$$(Ev)_j = v_{j+1}.$$

Se $v \in P_h$, então $Ev \in P_h$. Potências de E são definidas recursivamente,

$$E^p v = E^{p-1}(Ev).$$

Deste modo,

$$(E^p v)_j = v_{j+p}. \quad (1.1)$$

A inversa também existe, dada por

$$(E^{-1}v)_j = v_{j-1}.$$

Se definirmos E^0 por $E^0 v = v$, então (1.1) vale para todos inteiros p . E é um operador linear e

$$(aE^p + bE^p)v = aE^p v + bE^p v.$$

Os operadores avançado, atrasado e central são definidos por

$$\begin{aligned} D_+ &= (E - E^0)/h, & D_- &= (E^0 - E^{-1})/h = E^{-1}D_+, \\ D_0 &= (E - E^{-1})/(2h) = \frac{1}{2}(D_+ + D_-), \end{aligned} \quad (1.2)$$

respectivamente. Em particular, consideramos operadores aplicados em funções $e^{i\omega x}$. Então temos para todos $x = x_j$

$$\begin{aligned} hD_+ e^{i\omega x} &= (e^{i\omega x} - 1)e^{i\omega x} = (i\omega h + \mathcal{O}(\omega^2 h^2))e^{i\omega x}, \\ hD_- e^{i\omega x} &= (1 - e^{-i\omega x})e^{i\omega x} = (i\omega h + \mathcal{O}(\omega^2 h^2))e^{i\omega x}, \\ hD_0 e^{i\omega x} &= i \operatorname{sen}(\omega h)e^{i\omega x} = (i\omega h + \mathcal{O}(\omega^3 h^3))e^{i\omega x}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \left(D_+ - \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{i\omega x} \right| &= \mathcal{O}(\omega^2 h), & \left| \left(D_- - \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{i\omega x} \right| &= \mathcal{O}(\omega^2 h), \\ \left| \left(D_0 - \frac{\partial}{\partial x} \right) e^{i\omega x} \right| &= \mathcal{O}(\omega^3 h^2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Deste modo, afirmamos que D_+ , D_- possuem precisão de primeira ordem na aproximação de $\partial/\partial x$ visto que o erro é proporcional a h . D_0 possui precisão de segunda ordem.

Derivadas de alta ordem podem ser aproximadas por produtos dos operadores acima. Por exemplo,

$$\begin{aligned} (D_+ D_- v)_j &= (D_- D_+) v_j = h^{-2}((E - 2E^0 + E^{-1})v)_j \\ &= h^{-2}(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}), \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} h^2 D_+ D_- e^{i\omega x} &= (e^{i\omega x} - 2 + e^{-i\omega x} - 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)) e^{i\omega x} \\ &= (-\omega^2 h^2 + \mathcal{O}(\omega^4 h^4)) e^{i\omega x}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Portanto,

$$\left| \left(D_+ D_- - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{i\omega x} \right| = \mathcal{O}(\omega^4 h^2),$$

e assim $D_+ D_-$ possui precisão de segunda ordem na aproximação de $\partial^2/\partial x^2$. Note que todos os operadores acima são comutativos, visto que todos são definidos em termos de potências de E .

1.3 Equação da Onda de Primeira Ordem, Convergência e Estabilidade

A equação $u_t = u_x$ é uma simples equação *hiperbólica* (vide [4], [5], [18], entre outros). Consideramos o problema de valor inicial

$$\begin{aligned} u_t &= u_x, & -\infty < x < \infty, & \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde $f(x) = f(x + 2\pi)$ é uma função periódica de período 2π . Seja

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega)$$

uma onda. Tentaremos encontrar uma solução com tipo dado por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x} \hat{u}(\omega, t). \quad (1.7)$$

Substituindo a equação (1.7) na equação (1.6) teremos a equação diferencial ordinária

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = i\omega \hat{u}, \quad \hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega),$$

que é chamada a transformada de Fourier da equação (1.6). Portanto,

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{i\omega t} \hat{u}(\omega, 0) = e^{i\omega t} \hat{f}(\omega).$$

Segue que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega(x+t)} \hat{f}(\omega) = f(x+t) \quad (1.8)$$

é uma solução do nosso problema.

Se

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) \quad (1.9)$$

então

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x+t)} \hat{f}(\omega) = f(x+t) \quad (1.10)$$

é a solução do nosso problema e

$$\|u(\cdot, t)\|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |e^{i\omega t} \hat{f}(\omega)|^2 = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 = \|f(\cdot)\|^2. \quad (1.11)$$

O valor $\|u\|^2$ é também chamado de energia de u e (1.6) é chamada de conservação de energia ou conservação de norma. As linhas $x+t=c$ são chamadas *características* e um dado inicial, tal como uma crista de onda, é propagado ao longo destas características. Em nosso caso, a velocidade de propagação (ou velocidade da onda) é $dx/dt = -1$. No caso de sistema hiperbólico existem famílias de características, conforme figura 1.1, correspondendo a diferentes velocidades de onda para diferentes componentes.

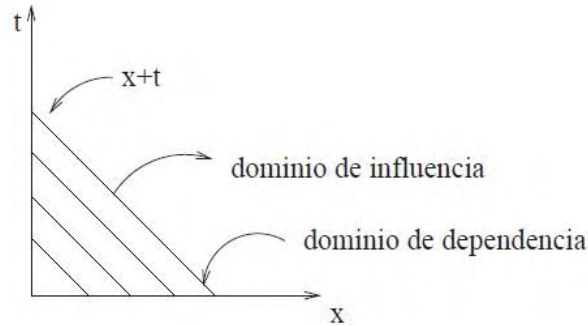


Figura 1.1: Características

Agora resolvemos o problema utilizando aproximação por diferença. Seja um passo espacial $h = 2\pi/(N+1)$, com N um número natural, e um passo temporal $k > 0$. Funções malhas são denotadas por $u_j^n = u(x_j, t_n)$. Uma aproximação simples de (1.6) baseada em diferenças avançadas no tempo e diferenças centradas no espaço, nos fornece:

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= (I + kD_0)v_j^n =: Qv_j^n, \\ v_j^0 &= f_j, \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (1.12)$$

Se v^n é conhecido no tempo $t_n = nk$, então podemos usar a equação (1.12) para calcular v_j^{n+1} para todos j . Assim, o dado inicial determina a solução única. Além disso, se v^n tem período 2π , então v^{n+1} também tem. Portanto, podemos restringir o cálculo para

$j = 0, 1, 2, \dots, N$ e usamos condições de periodicidade para estender a solução e considerar valores extras necessários na equação (1.12) em $j = 0, N$, que são, $v_{-1}^n = v_N^n, v_{N+1}^n = v_0^n$.

Poderemos calcular a solução analiticamente. Primeiro consideremos o caso onde f consiste de uma onda simples, isto é,

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{f}(\omega), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Como no caso contínuo podemos supor

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{v}^n(\omega) e^{i\omega x_j}, \quad (1.13)$$

isto é, assumimos que a solução também pode ser expressa em termos de uma componente de Fourier. Substituindo a equação (1.13) na equação (1.12) obtém-se

$$e^{i\omega x_j} \hat{v}^{n+1}(\omega) = \left(e^{i\omega x_j} + \frac{\lambda}{2} (e^{i\omega x_{j+1}} - e^{i\omega x_{j-1}}) \right) \hat{v}^n(\omega),$$

onde $\lambda = k/h$. Esta equação pode ser reescrita como

$$e^{i\omega x_j} \hat{v}^{n+1}(\omega) = (1 + i\lambda \operatorname{sen} \omega h) e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega),$$

e obtemos

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{Q} \hat{v}^n(\omega), \quad \hat{Q} = 1 + i\lambda \operatorname{sen} \xi. \quad (1.14)$$

$\hat{Q}$ é chamada de *símbolo*, ou *fator de amplificação*, de $(I + kD_0)$. Referenciamos a isto como a transformada de Fourier de $(I + kD_0)$ e a equação (1.14) como a transformada de Fourier da equação (1.12). A solução da equação (1.14) é

$$\hat{v}^n(\omega) = \hat{Q}^n \hat{v}^0(\omega) = \hat{Q}^n \hat{f}(\omega),$$

e isto deixa claro que

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{Q}^n e^{i\omega x_j} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + i\frac{k}{h} \operatorname{sen}(\omega h) \right)^n e^{i\omega x_j} \hat{f}(\omega)$$

resolve nosso problema.

Agora consideremos a sequência de intervalos de malha $k, h \rightarrow 0$. Procuraremos mostrar que v_j^n converge para a solução correspondente da equação diferencial. Temos

$$\begin{aligned} \left(1 + i\frac{k}{h} \operatorname{sen}(\omega h) \right)^n &= (1 + i\omega k + \mathcal{O}(kh^2\omega^3))^n \\ &= (e^{i\omega k} + \mathcal{O}(k^2\omega^2 + kh^2\omega^3))^n \\ &= (1 + \mathcal{O}((k\omega^2 + h^2\omega^3)t_n)) e^{i\omega t_n}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \mathcal{O}\left((k\omega^2 + h^2\omega^3) t_n\right)\right) e^{i\omega(x_j+t_n)} \hat{f}(\omega).$$

Deste modo, para cada ω fixo, obtemos

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} v_j^n = u(x_j, t_n)$$

em qualquer intervalo finito $0 \leq t \leq T$.

Em computações realistas devemos sempre esperar perturbações, ou na forma de erro da medida do dado ou dos erros de arredondamento provenientes da representação finita de números no computador. Portanto, consideramos somente sequências $k, h \rightarrow 0$, em que

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T, \omega, k, h} |\hat{Q}^n| \leq K(T), \quad (1.15)$$

e chamamos o método de *estável* para tal sequência.

Se escolhermos uma sequência com

$$k = ch^2, \quad c > 0 \text{ constante},$$

então

$$|\hat{Q}^n|^2 = \left|1 + \frac{k^2}{h^2} sch^2(\omega h)\right|^n \leq (1 + \lambda^2)^n = (1 + ck)^n \leq e^{ct_n},$$

e a equação (1.15) vale.

Observação 1 *Na prática este método não deve ser usado pois*

1. *Existem métodos estáveis com $k = ch$, que representa uma restrição mais razoável e menor esforço computacional.*
2. *Se queremos calcular v para t grande, então o fator de crescimento exponencial pode amplificar pequenas perturbações e arruinar a solução.*

Agora consideramos uma aproximação diferença bem geral da equação (1.6):

$$v_j^{n+1} = Q v_j^n, \quad Q = \sum_{p=-r}^s A_p(k, h) E^p, \quad v_j^0 = f_j. \quad (1.16)$$

Aqui A_p são funções racionais de k e h , e r, s são inteiros não-negativos. Deste modo, usamos $s + r + 1$ valores $v_{j-r}^n, \dots, v_{j+s}^n$ para calcular v_j^{n+1} . Novamente consideramos as soluções onda simples

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega x_j} \hat{v}^n(\omega).$$

Pela observação de que $Ee^{i\omega x} = e^{i\omega h}e^{i\omega x}$, obtemos

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{Q}(\omega h)\hat{v}^n(\omega), \quad \hat{Q} = \sum_{p=-r}^s A_p e^{ip\omega h},$$

isto é,

$$\hat{v}^n(\omega) = \hat{Q}^n(\omega h)\hat{v}^0(\omega). \quad (1.17)$$

Assumimos que o dado inicial pertence a L_2 , isto é, $f(x)$ pode ser expandido em séries de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}, \quad \sum_{\omega} |\hat{f}(\omega)|^2 < \infty. \quad (1.18)$$

Para a aproximação diferença usamos a restrição de $f(x)$ à malha. Denotamos por

$$\text{Int}_N f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=-N/2}^{N/2} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} \quad (1.19)$$

a interpolação trigonométrica da função malha. Assumimos que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\text{Int}_N f - f\| = 0. \quad (1.20)$$

Esta condição de convergência é satisfeita se f é uma função suave.

Agora queremos provar o teorema seguinte.

Teorema 1 *Considere a aproximação diferença mostrada na equação (1.16) em um intervalo finito $0 \leq t \leq T$ para uma sequência $h, k \rightarrow 0$. Assuma que*

1. *O dado inicial satisfaça as equações (1.18) e (1.20).*
2. *A aproximação é estável, isto é, existe uma constante K_s tal que para todos k e h*

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n| \leq K_s.$$

3. *A aproximação é consistente, isto é, para cada ω fixado*

$$\lim_{k, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} |\hat{Q}^n(\omega h) - e^{i\omega t_n}| = 0.$$

Então a interpolante trigonométrica $\text{Int}_N v$ da solução da aproximação diferença converge para a solução da equação diferencial,

$$\lim_{k, h \rightarrow 0} \sup_{0 \leq t_n \leq T} \|u(\cdot, t_n) - \text{Int}_N(v_j^n)\| = 0.$$

Demonstração. Para cada t_n fixado, podemos representar a solução da aproximação diferença por sua interpolante trigonométrica e, portanto, podemos pensar na solução como sendo representada em termos de ondas simples. Da equação (1.17), obtemos

$$\text{Int}_N(v_j^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=N/2} \hat{Q}^n(\omega h) \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x}.$$

Para $0 < M < N/2$ tem-se, usando a equação (1.10) e relação de Parseval [6]

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t_n) - \text{Int}_N(v_j^n)\|^2 &= \sum_{\omega=-N/2}^{N/2} |e^{i\omega t_n} \hat{f}(\omega) - \hat{Q}^n(\omega h) \tilde{f}(\omega)|^2 \\ &\quad \sum_{|\omega| > N/2} |\hat{f}(\omega)|^2 \leq I + II + III, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\omega=-M}^M |\hat{Q}^n(\omega h) \tilde{f}(\omega) - e^{i\omega t_n} \hat{f}(\omega)|^2, \\ II &= 2 \sum_{|\omega| > M} |\hat{f}(\omega)|^2, \\ III &= 2 \sum_{|\omega| > M} |\hat{f}(\omega)|^2 |\hat{Q}^n(\omega h)|^2. \end{aligned}$$

Pela equação (1.18),

$$\lim_{M \rightarrow \infty} II = 0.$$

Da equação (1.20) e da segunda suposição,

$$\lim_{M \rightarrow \infty} III \leq 4K_s^2 \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{|\omega| > M} (|\tilde{f}(\omega) - \hat{f}(\omega)|^2 + |\hat{f}(\omega)|^2) = 0.$$

Finalmente, para cada M fixado, a segunda e terceira suposições juntas com a equação (1.20) implica que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} I &\leq 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\omega=-M}^M \left(|\hat{Q}^n(\omega h) (\tilde{f}(\omega) - \hat{f}(\omega))|^2 \right. \\ &\quad \left. + |(\hat{Q}^n(\omega h) - e^{i\omega t_n}) \hat{f}(\omega)|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Agora segue facilmente a convergência. Seja $\epsilon > 0$ sendo uma constante. Escolha M grande tal que $II + III < \epsilon/2$. Para N suficientemente grande $I \leq \epsilon/2$ e segue a convergência. ■

Este teorema nos diz que a solução da aproximação diferença converge para a solução da equação diferencial se a aproximação é estável e consistente.

$$\boxed{\text{convergência} = \text{consistência} + \text{estabilidade}}$$

Este "*slogan*" é baseado no clássico Teorema de Equivalência de Lax [17].

1.4 Métodos Implícitos

Substituindo a diferença avançada no tempo da aproximação (1.12) pela diferença atrasada, vamos obter o *método de Euler atrasado*

$$(I - kD_0)v_j^{n+1} = v_j^n, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (1.21)$$

Introduzindo o vetor $\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_N)^T$, então podemos escrever a equação (1.21) na forma matricial

$$A\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^n, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -\beta & 0 & \dots & 0 & \beta \\ \beta & 1 & -\beta & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \beta & 1 & -\beta \\ -\beta & 0 & \dots & 0 & \beta & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

onde $\beta = k/2h$.

Isto é chamado de esquema *implícito*, pois ele acopla o valor solução de todos pontos no nível de tempo novo. Um sistema linear de $N + 1$ equações deve ser resolvido para avançar o esquema em cada passo temporal. O esforço computacional é maior, mas as propriedades do método podem permitir malha menos densa e ser mais estável.

Introduzindo de maneira familiar a componente de Fourier na equação (1.21), obtemos

$$(1 - i\lambda \text{sen}\xi)\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{v}^n(\omega),$$

isto é,

$$\hat{v}^{n+1}(\omega) = \hat{Q}\hat{v}^n(\omega), \quad \hat{Q} = \frac{1}{1 - \lambda \text{sen}\xi}.$$

Temos, $|\hat{Q}| \leq 1$, e a condição de estabilidade $|\hat{Q}| \leq 1$ (vide [17]) é satisfeita para *todos* valores de λ . Em outras palavras, o esquema é estável para qualquer tamanho do passo no tempo. Tais esquemas são chamados de *incondicionalmente estável*.

Esta aproximação é somente de primeira ordem de precisão, mas usando *regra trapezoidal* para diferenciação temporal, podemos obter um método de ordem dois, o chamado

método de Crank-Nicolson [3]

$$\left(I - \frac{k}{2}D_0\right)v_j^{n+1} = \left(I + \frac{k}{2}D_0\right)v_j^n, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

O fator de amplificação é

$$\hat{Q} = \frac{2 + i\lambda \operatorname{sen}\xi}{2 - i\lambda \operatorname{sen}\xi}. \quad (1.24)$$

Assim $|\hat{Q}| = 1$ para todos os valores de λ . O esquema é também incondicionalmente estável.

Aproximações explícita e implícita podem ser combinadas em um chamado *esquema* θ

$$(I - \theta k D_0)v_j^{n+1} = (I + (1 - \theta)k D_0)v_j^n, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (1.25)$$

Ele é incondicionalmente estável para $\theta \geq 1/2$. O parâmetro θ é usualmente escolhido para estar no intervalo $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. A introdução de tal aproximação é que saltos podem ser controlados pelo ajuste de θ .

Observação 2 *O sistema (1.22) é em geral resolvido por um método direto com número de operações aritméticas proporcional a N . Para problemas em uma dimensão espacial, o trabalho requerido para o método implícito é da mesma ordem que um método explícito. Para problemas em duas dimensões espaciais numa malha $N \times N$, o tamanho da banda é $\mathcal{O}(N)$, e teríamos um número de operações da ordem de N^4 . Neste caso os métodos iterativos pode ser considerados mais eficientes.*

1.5 Equação de Convecção-Difusão

Em muitas aplicações, as equações envolvem segunda ordem no espaço, mas o tratamento é bastante análogo ao já feito. Vamos então repetir a análise para o problema modelo para convecção-difusão

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= \eta u_{xx} \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \quad \eta = \text{constante} > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad -\infty < x < \infty, \end{aligned} \quad (1.26)$$

com dado inicial 2π -periódico. No espaço de Fourier, o problema correspondente é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}(\omega, t)}{\partial t} + ia\omega \hat{u}(\omega, t) &= -\eta\omega^2 \hat{u}(\omega, t), \\ \hat{u}(\omega, 0) &= \hat{f}(\omega), \end{aligned} \quad (1.27)$$

com soluções

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{-(ia\omega + \eta\omega^2)t} \hat{f}(\omega) \quad (1.28)$$

Considere a aproximação diferença

$$v_j^{n+1} = v_j^n + k(\eta D_+ D_- - a D_0) v_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (1.29)$$

O fator de amplificação é

$$\hat{Q} = 1 - 2\alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\omega h}{2} - i\lambda \operatorname{sen}(\omega h), \quad \alpha = \frac{2\eta k}{h^2}, \quad \lambda = \frac{ak}{h}. \quad (1.30)$$

A condição de estabilidade "parabólica" para o caso $a = 0$ é

$$\frac{\eta k}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \text{isto é, } \alpha \leq 1. \quad (1.31)$$

Para $a \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} |\hat{Q}|^2 &= 1 - 4\alpha \operatorname{sen}^2 \frac{\omega h}{2} + 4\alpha \operatorname{sen}^4 \frac{\omega h}{2} + 4\lambda^2 \frac{(\omega h)^2}{2} \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\omega h}{2}\right), \\ &= 1 - 4(\lambda^2 - \alpha^2) s^2 + 4(\lambda^2 - \alpha) s, \end{aligned} \quad (1.32)$$

onde $s = \operatorname{sen}^2(\omega h/2)$. Deste modo, $|\hat{Q}| \leq 1$ para todos ωh se, e somente se,

$$\phi(s) := -(\lambda^2 - \alpha^2)s + \lambda^2 - \alpha \leq 0, \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (1.33)$$

$\phi(s)$ é uma função linear de s e, portanto, a equação (1.33) vale se e somente se

$$\phi(0) = \lambda^2 - \alpha \leq 0, \quad \phi(1) = \alpha^2 - \alpha \leq 0,$$

isto é,

$$\lambda^2 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{ou} \quad a^2 k \leq 2\eta \leq h^2/k. \quad (1.34)$$

Conforme observa Gustafsson et al. [11] a condição na equação (1.34) pode ser interpretada no sentido de que o termo parabólico torna possível a estabilização da aproximação da parte hiperbólica, mas o coeficiente η deve ser suficientemente grande comparado a a (ou k suficientemente pequeno). A verdadeira taxa de decaimento parabólico para equação (1.26) não é preservada pela aproximação devido a estabilização da parte hiperbólica. Para η pequeno isto se torna mais restritivo.

Para problemas parabólicos, a restrição de estabilidade no passo temporal para esquemas explícito é geralmente muito severa, e aproximações implícitas devem ser usadas Cuminato & Meneguette [4]. Métodos puramente implícitos podem também ser usados quando derivadas de primeira ordem estão presentes. Por exemplo, o método de Crank-Nicolson

$$\begin{aligned} &\left(I + \frac{k}{2}(aD_0 - \eta D_+ D_-)\right) v_j^{n+1} \\ &= \left(I - \frac{k}{2}(aD_0 - \eta D_+ D_-)\right) v_j^n, \quad j = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1.35)$$

é incondicionalmente estável. Em aplicações, no entanto, a parte hiperbólica é geralmente não-linear, isto é, $a = a(u)$, e um sistema não-linear de equações deve ser resolvido em cada passo. Neste caso é conveniente usar o chamado método *semi-implícito*. Uma simples aproximação deste tipo para o nosso problema é

$$(I - k\eta D_+ D_-)v_j^{n+1} = -2kaD_0v_j^n + (I + k\eta D_+ D_-)v_j^{n-1}, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad (1.36)$$

que combina os métodos leap-frog e Crank-Nicolson. A "primeira linha" v_j^1 deve ser computada por outro método de um passo. No espaço de Fourier, a equação (1.36) resulta em

$$\begin{aligned} & \left(1 + 4\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\omega h}{2}\right) \hat{v}^{n+1}(\omega) \\ &= -i2\lambda(\operatorname{sen}(\omega h))\hat{v}^n(\omega) + \left(1 - 4\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\omega h}{2}\right) \hat{v}^{n-1}(\omega), \\ & \sigma = \frac{k\eta}{h^2}, \quad \lambda = \frac{ak}{h}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

A equação característica correspondente é

$$z^2 + \frac{i2\lambda \operatorname{sen}(\omega h)}{1 + \beta} z - \frac{1 - \beta}{1 + \beta} = 0, \quad \beta = 4\sigma \operatorname{sen}^2 \frac{\omega h}{2}, \quad (1.38)$$

com soluções

$$z_{1,2} = \frac{-i\lambda \operatorname{sen}(\omega h) \pm \sqrt{1 - \beta^2 - \lambda^2 \operatorname{sen}(\omega h)}}{1 + \beta} \quad (1.39)$$

Primeiro, assumamos que a raiz quadrada é real, isto é,

$$\beta^2 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2(\omega h) \leq 1. \quad (1.40)$$

Então,

$$|z_{1,2}|^2 = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \beta)^2} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \leq 1.$$

A seguir, assumamos que

$$\beta^2 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2(\omega h) > 1. \quad (1.41)$$

Então as raízes são imaginários puros, e temos, para $|\lambda| < 1$,

$$|z_{1,2}| = \left| \frac{\lambda \operatorname{sen}(\omega h) \pm \sqrt{\beta^2 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2(\omega h) - 1}}{1 + \beta} \right| \leq \frac{|\lambda| + \beta}{1 + \beta} < 1. \quad (1.42)$$

Assim $|z_{1,2}| \leq 1$ para $|\lambda| \leq 1$, mas $z_1 = z_2$ para $\beta^2 + \lambda^2 \operatorname{sen}^2(\omega h) = 1$. Então $\hat{v}^n(\omega) = \sigma_1 z_1^n + \sigma_2 z_2^n$ torna-se $\hat{v}^n(\omega) = (\sigma_1 + \sigma_2) z_1^n$. Porque $|z_1| \leq |\lambda| < 1$ neste caso, temos $n|z_1|^n \leq c$, independente de n . Assim, $|\hat{v}^n(\omega)|$ é limitado independente de ω, n , e o método é estável.

1.6 Estabilidade para Problemas Não-Lineares

A teoria de estabilidade foi desenvolvida para problemas lineares, mas se a solução u da equação diferencial não-linear é suficientemente suave, então para uma primeira aproximação a equação erro pode ser linearizada com relação a uma solução u , e a convergência segue se a equação erro linearizada é estável (vide Gustafsson et al.[11]).

Vamos, nesta seção, considerar os aspectos linearização e localização que são relevantes em estudos de estabilidade.

Linearização e Localização

Consideremos o chamado **problema de Cauchy** para um sistema de equações diferenciais parciais quase-linear

$$u_t = P(x, t, u, \partial/\partial x)u + F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.43)$$

com condição inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^s. \quad (1.44)$$

Aqui $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$ é um vetor de variáveis espaciais independentes e $u = u(x, t)$ denota a solução a ser determinada.

Na prática o problema apresenta também condições de contorno. Existem duas questões fundamentais:

1. Quando podemos garantir que o problema (1.43), (1.44) possui uma única solução, ao menos para um pequeno intervalo temporal?
2. Assumindo que (1.43), (1.44) possui uma única solução u para algum F, f , fixo, qual é a influência na solução quando adicionamos pequenas perturbações em F ou f ?

A segunda questão pode ser refeita como segue: Substituindo F por $F + \delta F$ em (1.43) e f por $f + \delta f$ em (1.44) temos o problema perturbado

$$v_t = P(x, t, v, \partial/\partial x)v + F + \delta F, \quad x \in \mathbb{R}^s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.45)$$

$$v(x, 0) = f(x) + \delta f(x), \quad x \in \mathbb{R}^s. \quad (1.46)$$

Se (1.43), (1.44) é "razoável fisicamente", podemos esperar que o problema com uma pequena perturbação (1.45), (1.46) também tenha solução única, e que esta solução pode ser escrita como

$$v = u + \delta u,$$

onde δu satisfaz a estimativa

$$\|\delta u\|_{(1)} \leq K(\|\delta F\|_{(2)} + \|\delta f\|_{(3)}). \quad (1.47)$$

Aqui $\|\delta u\|_{(1)}$, $\|\delta F\|_{(2)}$, $\|\delta f\|_{(3)}$ são certas normas no qual ainda devem ser especificadas. A constante K em (1.47) deve ser independente de δF e δf contanto que as perturbações permaneceram suficientemente pequenas.

Definição 1 Dizemos que o problema não-linear (1.43), (1.44), com solução única, é bem-posto em u se existe um $\epsilon > 0$ tal que para todas funções suaves δF e δf com

$$\|\delta F\|_{(2)} + \|\delta f\|_{(3)} \leq \epsilon,$$

o problema perturbado (1.45), (1.46) é também resolvido unicamente, e $\delta u := v - u$ satisfaz a estimativa (1.47) com K independente de δF e δf .

Como é difícil o estudo de problemas não lineares, existe o consenso prático de que o seguinte *princípio de linearização* vale: *Um problema não-linear é bem posto em u se o problema linear no qual é obtido linearizando todas funções próxima a u são bem-postas.*

Conforme Gustafsson et al. [11] é também suficiente tratar apenas o caso homogêneo, isto é, pode-se tomar $F \equiv 0$ em (1.43). Na prática, outro ponto muito importante é relacionar o bem-posto do problema de Cauchy para um equação de coeficientes *variáveis* com o bem-posto para equações com coeficientes *constantes*, ou seja, pelo congelamento dos coeficientes

$$A_\nu = A_\nu(x_0, t_0)$$

em pontos arbitrários mas fixos. Esta ideia é chamada de *localização*. O *princípio de localização* pode ser formulado como segue: *Se todos problemas de coeficientes congelados são bem posto então o problema de coeficiente variável correspondente é bem-posto também.* Este princípio é bastante utilizado na prática.

Linearização formal. Para explicar o processo de linearização, consideramos a equação de Burgers como um exemplo:

$$u_t = uu_x + \epsilon u_{xx}, \quad \epsilon > 0. \quad (1.48)$$

Suponha que $U = U(x, t)$ é uma função suave. Podemos pensar em U como sendo uma solução aproximada de (1.48). Substituindo

$$u = U + u', \quad u' = u'(x, t)$$

em (1.48), temos

$$u'_t = U_x u' + U u'_x + u' u'_x + \epsilon u'_{xx} + F, \quad F = U U_x + \epsilon U_{xx} - U_t.$$

Considerando u' como uma *pequena* correção de U , podemos descartar o termo de segunda ordem $u' u'_x$ e escrevemos v ao invés de u' . Deste modo obtemos a equação *linear*

$$v_t = U_x v + U v_x + \epsilon v_{xx} + F.$$

Esta equação é chamada de linearização de (1.48) em U , ou a *equação linearizada*. Note que $F \equiv 0$ se e somente se U resolve (1.48) exatamente. A equação linearizada governa a influência de pequenas perturbações em U . Isto é outra razão importante para estudar equações lineares.

1.7 Uso da Transformada de Laplace e Estabilidade

Problemas de Valor Inicial e de Contorno para sistemas com coeficientes constantes podem ser resolvidos utilizando a transformada de Laplace. O método da transformada de Laplace é frequentemente a única abordagem para o estudo da estabilidade de um dado esquema de diferença finita. Por outro lado é aplicável apenas para problemas com coeficientes constantes.

O material desta seção é teórico e tem interesse em ilustrar uma técnica importante para o estudo da estabilidade de métodos numéricos. Uma abordagem completa pode ser encontrada em Gustafsson et al. [11], Strikwerda [26] entre outros .

Solução de Sistemas Hiperbólicos

Consideremos o sistema

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u^I \\ u^{II} \end{bmatrix} = A \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u^I \\ u^{II} \end{bmatrix} + F, \quad 0 \leq x < \infty, t \geq 0, \quad (1.49)$$

onde A é diagonal e

$$A = \begin{bmatrix} \Lambda^I & \\ & \Lambda^{II} \end{bmatrix}, \quad \Lambda^I > 0, \Lambda^{II} < 0.$$

Prescrevemos o dado inicial

$$u(x, 0) = f(x), \quad (1.50)$$

e as condições de contorno

$$\begin{aligned} L^{II}u^{II}(0, t) + L^I u^I(0, t) &= g, \\ \|u(\cdot, t)\| &< \infty \text{ para cada } t \text{ fixo.} \end{aligned} \quad (1.51)$$

onde L^I e L^{II} são constantes matriciais. Aqui F, f , e g são funções suaves com suporte compacto.

O problema acima é bem posto se, e somente se, L^{II} é não singular Gustafsson et al. [11]. A abordagem pela transformada de Laplace é construtiva, nos dando um roteiro (técnica) a ser seguido.

Lema 1 *Consideremos o problema de valor inicial e de contorno (1.49)-(1.51) com $F \equiv g \equiv 0$. Este problema não é bem posto se existe um número complexo s com $\operatorname{Re} s > 0$ e valores iniciais $f(x)$ com $0 < \|f\| < \infty$ tal que*

$$w(x, t) = e^{st} f(x), \quad \operatorname{Re} s > 0 \quad (1.52)$$

é uma solução.

Demonstração. Assumimos que existe uma solução do tipo acima. Definimos a sequência $f_j(x)_{j=1}^\infty$ por

$$f_j(x) = \frac{f(jx)}{\|f(jx)\|}, \text{ ou seja, } \|f_j\| = 1.$$

Então

$$w_j(x, t) = e^{jst} f_j(x),$$

são também soluções satisfazendo

$$\|w_j(\cdot, t)\| = e^{j(\operatorname{Re} s)t}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Portanto, o problema não pode ser bem posto porque podemos construir soluções que crescem arbitrariamente rápida. Isto prova o lema. ■

Agora podemos impor condições que garantem a existência de soluções do tipo (1.52).

Teorema 2 *Uma solução do tipo (1.52) existe, se o problema de autovalor*

$$s\varphi = A \frac{d\varphi}{dx}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (1.53)$$

com condições de contorno

$$L^{II}\varphi^{II}(0) + L^I\varphi^I(0) = 0, \quad \|\varphi\|^2 < \infty, \quad (1.54)$$

possui um autovalor s com $\operatorname{Re} s > 0$. O problema de autovalor possui um autovalor s com $\operatorname{Re} s > 0$ se, e somente se, L^{II} é singular.

Demonstração. Se existe um autovalor s com $\operatorname{Re} s > 0$, então

$$w(x, t) = e^{st} \varphi(x)$$

é uma solução do tipo da equação (1.52). Assim, o problema não é bem posto. Agora, uma solução geral da equação (1.53) pode ser escrita da forma

$$\varphi^I(x) = e^{s(\Lambda^I)^{-1}} \varphi^I(0), \quad \varphi^{II}(x) = e^{s(\Lambda^{II})^{-1}} \varphi^{II}(0).$$

Para $\|\varphi\| < \infty$, uma condição necessária e suficiente é que

$$\varphi^I(0) = 0. \tag{1.55}$$

Então as relações (1.54) são satisfeitas se, e somente se,

$$L^{II} \varphi^{II}(0) = 0. \tag{1.56}$$

Existem duas possibilidades

1. L^{II} é Não-Singular. Então a única solução da equação (1.56) é $\varphi^{II}(0) = 0$, e não existe autovalor s com $\operatorname{Re} s > 0$ e o problema é bem posto.
2. L^{II} é Singular. Então a equação (1.56) tem um solução não trivial, e, desse modo, existe um autovalor s com $\operatorname{Re} s > 0$. Deste fato, todos s com $\operatorname{Re} s > 0$ são autovalores.

Isto prova o teorema. ■

Observação 3 Então, por esse resultado, o problema de valor de contorno é bem posto se, e somente se, o problema de autovalor (1.53)-(1.54) não possui autovalor s com $\operatorname{Re} s > 0$.

Desta maneira, para o problema ser bem posto, L^{II} deve ser não singular, e, portanto, podemos escrever as condições de contorno na forma

$$u^{II}(0, t) = R^I u^I(0, t) + g^{II}(t). \tag{1.57}$$

Podemos agora resolver o problema utilizando a transformada de Laplace. Sem restrições, podemos assumir que $f(x) \equiv 0$. De outra maneira, introduzimos uma nova variável $\tilde{u} = u - h(t)f(x)$, $h(0) = 1$, h suave com suporte compacto. Definimos a transformada de

Laplace por

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, s) &= \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt, \\ s &= i\epsilon + \eta, \quad \epsilon, \eta \text{ reais}, \quad \eta > 0.\end{aligned}\tag{1.58}$$

Pela equação (1.49)

$$\int_0^\infty e^{-st} u_t dt = A \int_0^\infty e^{-st} u_x dt + \int_0^\infty e^{-st} F dt = A\hat{u}_x + \hat{F}.$$

Conseqüentemente,

$$\int_0^\infty e^{-st} u_t dt = e^{-st} u \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-st} u dt$$

implica que (observe que $f \equiv 0$)

$$s\hat{u}^I = \Lambda^I s\hat{u}_x^I + \hat{F}^I, \quad s\hat{u}^{II} = \Lambda^{II} s\hat{u}_x^{II} + \hat{F}^{II}.\tag{1.59}$$

As condições de contorno são

$$\hat{u}^{II}(0, s) = R^I \hat{u}^I(0, s) + \hat{g}^{II}(s), \quad \|\hat{u}(\cdot, s)\|, \infty.\tag{1.60}$$

Por causa disso o problema de autovalor (1.53)-(1.54) possui somente uma solução trivial, a solução $\hat{u}$ do problema homogêneo (1.59)-(1.60) que é identicamente nula. Desta maneira, o problema não homogêneo (1.59)-(1.60) possui solução única. Podemos escrever abaixo a solução explicitamente:

$$\begin{aligned}\hat{u}^I(x, s) &= - \int_\infty^x e^{s(\Lambda^I)^{-1}(x-y)} (\Lambda^I)^{-1} \hat{F}^I(y, s) dy, \\ \hat{u}^{II}(x, s) &= \int_0^x e^{s(\Lambda^{II})^{-1}(x-y)} (\Lambda^{II})^{-1} \hat{F}^{II}(y, s) dy + e^{s(\Lambda^{II})^{-1}x} \hat{u}^{II}(0, s),\end{aligned}\tag{1.61}$$

onde $\hat{u}^{II}(0, s)$ é determinado pela equação (1.60).

Utilizando a equação (1.61) podemos estimar $\hat{u}(x, s)$ em termos de $\hat{F}, \hat{g}^{II}$. Tomemos o produto escalar da equação (1.59) com $\hat{u}^I$ e $\hat{u}^{II}$, respectivamente, e obtemos

$$(\hat{u}^I, s\hat{u}^I) + (s\hat{u}^I, \hat{u}^I) = (\hat{u}^I, \Lambda^I \hat{u}_x^I) + (\Lambda^I \hat{u}_x^I, \hat{u}^I) + (\hat{u}^I, \hat{F}^I) + (\hat{F}^I, \hat{u}^I),$$

ou

$$\eta \|\hat{u}^I\|^2 = \operatorname{Re} (\hat{u}^I, \Lambda^I \hat{u}_x^I) + \operatorname{Re} (\hat{u}^I, \hat{F}^I).$$

Integrando por partes obtemos

$$\operatorname{Re} (\hat{u}^I \Lambda^I \hat{u}_x^I) = -\frac{1}{2} \langle \hat{u}^I(0, s), \Lambda^I \hat{u}^I(0, s) \rangle,$$

e, portanto,

$$\eta \|\hat{u}^I\|^2 + \frac{1}{2} \langle \hat{u}^I(0, s), \Lambda^I \hat{u}^I(0, s) \rangle \leq \|\hat{u}^I\| \|\hat{F}^I\|.$$

Assim,

$$\|\hat{u}^I\| \leq \frac{1}{\eta} \|\hat{F}^I\|, \quad |\hat{u}^I(0, s)| \leq \frac{C}{\eta^{1/2}} \|\hat{F}^I\|.$$

Para $\hat{u}^{II}$, obtemos,

$$\begin{aligned} \eta \|\hat{u}^{II}\|^2 &\leq \|\hat{u}^{II}\| \|\hat{F}^{II}\| - \frac{1}{2} \langle \hat{u}^{II}(0, s), \Lambda^{II} \hat{u}^{II}(0, s) \rangle, \\ &\leq \frac{\eta}{2} \|\hat{u}^{II}\|^2 + \frac{1}{2\eta} \|\hat{F}^{II}\|^2 - \frac{1}{2} \langle \hat{u}^{II}(0, s), \Lambda^{II} \hat{u}^{II}(0, s) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\eta \|\hat{u}^{II}\|^2 \leq \text{constante} \left(\frac{1}{\eta} \|\hat{F}^{II}\|^2 + |\hat{u}^{II}(0, s)|^2 \right).$$

Usando a condição de contorno obtemos

$$|\hat{u}^{II}(0, s)|^2 \leq \text{constante} (|\hat{g}^{II}|^2 + |\hat{u}^I(0, s)|^2) \leq \text{constante} \left(|\hat{g}^{II}|^2 + \frac{1}{\eta} \|\hat{F}^I\|^2 \right).$$

Portanto,

$$\eta \|\hat{u}\|^2 \leq \text{constante} \left(\frac{1}{\eta} \|\hat{F}\|^2 + |\hat{g}^{II}|^2 \right), \quad (1.62a)$$

$$|\hat{u}(0, s)|^2 \leq \text{constante} \left(|\hat{g}^{II}|^2 + \frac{1}{\eta} \|\hat{F}\|^2 \right). \quad (1.62b)$$

Invertendo a transformada de Laplace temos a solução do nosso problema

$$e^{-\eta t} u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\epsilon t} \hat{u}(x, i\epsilon + \eta) d\epsilon,$$

e, pela relação de Parseval [6], obtemos, para qualquer $\eta > 0$ e $s = i\epsilon + \eta$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u(\cdot, t)\|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \|\hat{u}(\cdot, s)\|^2 d\epsilon, \\ &\leq \text{constante} \int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{\eta^2} \|\hat{F}(\cdot, s)\|^2 + \frac{1}{\eta} |\hat{g}^{II}(s)|^2 \right) d\epsilon, \\ &= \text{constante} \int_0^\infty e^{-2\eta t} \left(\frac{1}{\eta^2} \|F(\cdot, t)\|^2 + \frac{1}{\eta} |g(t)|^2 \right) dt. \quad (1.63) \end{aligned}$$

Correspondentemente, equação (1.62b) é equivalente a

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-2\eta t} \|u(0, t)\|^2 dt \\ & \leq \text{constante} \int_0^\infty e^{-2\eta t} \left(\frac{1}{\eta} \|F(\cdot, t)\|^2 + |g(t)|^2 \right) dt. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Desta maneira, podemos estimar a solução em termos dos dados iniciais.

Aproximações por Diferenças

Seja uma aproximação diferença para um sistema de equações diferenciais parciais com coeficientes constantes. Construir soluções na forma de ondas simples

$$u(x, t) = e^{i\langle \omega, x \rangle} \hat{u}(\omega, t)$$

é um teste rápido de estabilidade e podemos estimar a razão de crescimento de $\hat{u}(\omega, t)$. A condição de von Neumann é então uma condição de estabilidade necessária.

Agora adaptaremos o uso da transformada de Laplace para aproximações diferença. Aproximamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial x} + F, \quad 0 \leq x < \infty, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ \|u(\cdot, t)\| &< \infty \end{aligned} \quad (1.65)$$

por

$$\frac{dv_j}{dt} = D_0 v_j + F_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.66a)$$

$$v_j(0) = f_j, \quad (1.66b)$$

$$v_0 - 2v_1 + v_2 = g \quad (1.66c)$$

$$\|v\|_h < \infty. \quad (1.66d)$$

O produto escalar e a norma são definidas agora por

$$(v, w)_h = (v, w)_{1, \infty}, \quad \|v\|_h^2 = (v, v)_h. \quad (1.67)$$

Condições Necessárias para Estabilidade

O teste é dado pelo lema seguinte.

Lema 2 *Sejam $F \equiv g \equiv 0$. Se a equação (1.66) possui uma solução*

$$v_j = e^{st} f_j, \quad \|f\|_h < \infty \quad (1.68)$$

para algum número complexo s com $\operatorname{Re} s > 0$ e algum tamanho de passo h , então a aproximação não é estável em qualquer sentido. (Veja Lema 1.)

Observação 4 *Esta condição necessária para estabilidade é chamada de **condição de Godunov-Ryaben'kii**.*

Demonstração. Se tal solução existe, para algum $h = h_0$, $s = s_0$, $\operatorname{Re} s_0 > 0$, então

$$\begin{aligned} \tilde{s}_0 f_j &= \frac{1}{2}(f_{j+1} - f_{j-1}), \quad j = 1, 2, \dots, \quad \tilde{s}_0 = h_0 s_0, \\ f_2 - 2f_1 + f_0 &= 0, \\ \|f\|_h &< \infty. \end{aligned}$$

Portanto, para qualquer h ,

$$\tilde{v}_j = e^{(\tilde{s}_0/h)t} f_j$$

é também uma solução. Deste modo, como $h \rightarrow 0$, podemos construir soluções crescendo arbitrariamente rápido. ■

Podemos formular a condição anterior em termos do problema de autovalor

$$\tilde{s}\varphi_j = hD_0\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \tilde{s} = hs, \quad (1.69a)$$

$$\varphi_0 - 2\varphi_1 + \varphi_2 = 0 \quad (1.69b)$$

$$\|\varphi\|_h < \infty. \quad (1.69c)$$

Temos o seguinte lema.

Lema 3 *A aproximação (1.66) não é estável se a equação (1.69) possui um autovalor $\tilde{s}$ com $\operatorname{Re} \tilde{s} > 0$. (Veja o Teorema 2.)*

A equação (1.69a) é uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes, e sua solução possui a forma

$$\varphi_j = \sigma_1 \kappa_1^j + \sigma_2 \kappa_2^j,$$

onde κ_1 e κ_2 são duas soluções da equação característica

$$\kappa^2 - 2\tilde{s}\kappa - 1 = 0, \quad \tilde{s} = sh. \quad (1.70)$$

O próximo lema discute as propriedades de κ_1 e κ_2 .

Lema 4 Para $\operatorname{Re} \tilde{s} > 0$, a equação característica não possui solução com $|\kappa| = 1$, e existe exatamente uma solução com $|\kappa| < 1$,

$$\kappa_1 = \tilde{s} - \sqrt{1 + \tilde{s}^2}, \quad \tilde{s} = sh. \quad (1.71)$$

Demonstração. Assumimos que a equação (1.70) possui uma solução $\kappa = e^{i\xi}$ para $\operatorname{Re}(\tilde{s}) > 0$, ξ real. Então

$$\tilde{s} = \frac{1}{2}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) = i \operatorname{sen} \xi,$$

que representa uma contradição. Deste modo, não existem soluções com $|\kappa| = 1$. Por causa disto se as duas soluções κ_1 e κ_2 satisfazem $\kappa_1 \kappa_2 = -1$, então existe exatamente uma raiz, diga κ_1 , que está dentro do círculo unitário para todos $\tilde{s}$ com $\operatorname{Re} \tilde{s} > 0$. Um simples cálculo mostra que a equação (1.71) é a solução desejada. ■

O Lema 4 e a condição (1.69c) implicam que a solução possui a forma

$$\varphi_j = \sigma_1 \kappa_1^j, \quad (1.72)$$

e assim obtemos

$$\sigma_1(\kappa_1 - 1)^2 = 0. \quad (1.73)$$

Logo, existe uma solução não trivial se, e somente se, $\kappa_1 = 1$. Pelo lema 4, isto é impossível, e, portanto, não existe autovalor $\tilde{s}$ com $\operatorname{Re} \tilde{s} > 0$.

Observação 5 Na verdade, o mesmo resultado é obtido para qualquer ordem de extrapolação no contorno

$$(hD_+)^q v_0 = 0, \quad q = 1, 2, \dots \quad (1.74)$$

A única diferença da discussão acima é que a equação (1.73) torna-se

$$\sigma_1(\kappa_1 - 1)^q = 0.$$

Agora discutiremos aproximações diferença com coeficientes constantes para o sistema (1.49).

$$\frac{dv_j(t)}{dt} = Qv_j(t) + F_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.75a)$$

$$v_j(0) = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.75b)$$

$$L_0 v_0(t) = g(t), \quad (1.75c)$$

onde os $v_j(t)$ são funções vetoriais com m componentes e $\|f\| < \infty$, $\sup_t \|F\|_h < \infty$. O operador diferença no espaço tem a forma

$$Q = \frac{1}{h} \sum_{\nu=-r}^p B_\nu E^\nu, \quad (1.76)$$

onde E é o operador deslocamento. Em geral, $B_\nu = B_{\nu 0} + hB_{\nu 1}$ são matrizes $m \times m$. Aqui $B_{\nu 0}$ não pode depender de h , e $B_{\nu 1}$ não tem influência na estabilidade. Portanto, negligenciamos estes termos e assumimos que $B_\nu = B_{\nu 0}$. Assumimos que B_p e B_{-r} são não singulares. Outra suposição é que a equação (1.75a) é estável com condições de contorno periódicas. Finalmente, assumimos que as condições de contorno podem ser escritas como

$$v_{-\mu} = \sum_{j=1}^q L_{\mu j} v_j + g_{-\mu}, \quad \mu = 0, 1, \dots, r-1, \quad (1.77)$$

onde os $L_{\mu j}$ são matrizes constantes. Novamente, assumimos que $L_{\mu j}$ não depende de h . É sabido que podemos usar a condição de contorno para eliminar $v_0, \dots, v_{-r+1}$, e assim modificando Q para $\tilde{Q}$. Qualquer termo $\mathcal{O}(h)$ na condição de contorno cria um operador limitado e não possui influência na estabilidade Gustafsson et al. [11]. Observe que é possível ter derivadas temporais nas condições de contorno, mas consideramos que elas podem ser eliminadas pelo uso das equações (1.75a).

O problema de autovalor associado a nossa aproximação é

$$\tilde{s}\varphi = hQ\varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, \operatorname{Re}(\tilde{s}) = \operatorname{Re}(hs) > 0, \quad (1.78a)$$

$$L_0\varphi_0 = 0, \quad (1.78b)$$

$$\|\varphi\|_h < \infty. \quad (1.78c)$$

Usando o mesmo argumento do nosso exemplo anterior podemos provar o lema seguinte.

Lema 5 (Condição de Godunov-Ryaben'kii) *A aproximação não é estável se o problema de autovalor (1.78) possui um autovalor $\tilde{s}$ com $\operatorname{Re} \tilde{s} > 0$.*

Demonstração. Tome $\tilde{s}_0$ com $\operatorname{Re} \tilde{s}_0 > 0$ sendo um autovalor e φ_j a autofunção correspondente. Então

$$v_j = e^{(\tilde{s}_0/h)t} \varphi_j$$

forma uma sequência de soluções cuja razão de crescimento torna-se arbitrariamente grande quando $h \rightarrow 0$. Assim, a aproximação não é estável. ■

Agora derivaremos condições algébricas para a existência de autovalores.

Lema 6 *O problema de autovalor (1.78) não possui autovalores para $|\tilde{s}|$ suficientemente grandes.*

Demonstração. A equação (1.78) implica que

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_h^2 &= \frac{1}{|\tilde{s}|^2} \|hQ\varphi\|_h^2, \\ &\leq \frac{\text{constante}}{|\tilde{s}|^2} \left(\|\varphi\|_h^2 + \sum_{\mu=0}^{r-1} |\varphi_{-\mu}|^2 h \right) \leq \frac{\text{constante}}{|\tilde{s}|^2} \|\varphi\|_h^2.\end{aligned}$$

Aqui a constante depende somente dos coeficientes $|B_\nu|$ e $|L_{\mu j}|$. Portanto, $\|\varphi\|_h = 0$ para $|\tilde{s}|$ suficientemente grande. Isto prova o lema. ■

Agora discutiremos como resolver o problema de autovalor (1.78). Escrevemos a equação (1.78a) na forma

$$\varphi_{p+j} = \sum_{\nu=-r}^{p-1} \tilde{B}_\nu \varphi_{v+j}, \quad (1.79)$$

onde

$$\tilde{B}_\nu = -B_p^{-1} B_\nu, \quad \nu \neq 0, \quad \tilde{B}_0 = B_p^{-1} \tilde{s} - B_p^{-1} B_0.$$

Isto é um sistema de equações diferenciais ordinárias no espaço. Introduzindo

$$\varphi_j = (\varphi_{p+j-1}, \varphi_{p+j-2}, \dots, \varphi_{j-r})^T,$$

podemos escrever ele como um método de um passo

$$\varphi_{j+1} = M \varphi_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (1.80)$$

onde

$$M = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{B}_{-r} \\ I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & I & 0 \end{bmatrix}.$$

As condições de contorno podem ser escritas na forma

$$H \varphi_1 = 0, \quad (1.81)$$

porque podemos usar a equação (1.79) para eliminar todos φ_ν com $\nu > p$ de $L_0 \varphi_0 = 0$. Assim, $M = M(\tilde{s})$, $H = H(\tilde{s})$ são polinômios em $\tilde{s}$.

Os autovalores e autovetores de M são soluções de

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_{p-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \tilde{B}_{-r} \\ I & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdot & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & \cdot & \cdot & I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p+r} \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{p+r} \end{bmatrix}. \quad (1.82)$$

Podemos usar as soluções da equação (1.82) para resolver o problema de autovalor (1.78). Para demonstrar esse procedimento, primeiro derivaremos algumas propriedades de M .

Procuramos mostrar que $\kappa = 0$ não é um autovalor de M . Assumimos que $\kappa = 0$ é um autovalor. Então a equação (1.78) torna-se $y_1 = y_1 = \dots = y_{p+r-1} = 0$, $\tilde{B}_{-r}y_{p+r} = 0$. Por isto, pela suposição, $\tilde{B}_{-r}$ ser não singular, $y_{p+r} = 0$. Deste modo, chegamos a uma contradição e $\kappa = 0$ não pode ser um autovalor. Usando a relação

$$y_{j+1} = \kappa^{-1}y_j, \quad j = 1, 2, \dots, p+r-1,$$

podemos eliminar $y_2, \dots, y_{p+r}$ e obtemos

$$\left(\tilde{s}I - \sum_{\nu=-r}^p B_\nu \kappa^\nu \right) y_1 = 0. \quad (1.83)$$

Assim, os autovalores de M são soluções da equação característica

$$\text{Det} \left(\tilde{s}I - \sum_{\nu=-r}^p B_\nu \kappa^\nu \right) = 0. \quad (1.84)$$

Vamos precisar do lema seguinte.

Lema 7 *Para $\tilde{s}$ com $\text{Re } \tilde{s} > 0$, não existe solução da equação (1.84) com $|\kappa| = 1$ e existem exatamente rm soluções, de acordo com suas multiplicidades, com $|\kappa| < 1$.*

Demonstração. Assumimos que existe uma raiz de $\kappa = e^{i\xi}$. Então a equação (1.84) implica que $\tilde{s}$ é um autovalor de $\sum_{\nu=-r}^p B_\nu e^{i\nu\xi}$. Por termos assumido que a aproximação é estável para o caso periódico, necessariamente temos $\text{Re } \tilde{s} \leq 0$. Isto é uma contradição para hipótese $\text{Re } \tilde{s} > 0$; isto é, não existem soluções κ com $|\kappa| = 1$. As soluções κ são funções contínuas em $\tilde{s}$ e não podemos cruzar o círculo unitário. Portanto, o número de soluções com $|\kappa| < 1$ é constante para $\text{Re } \tilde{s} > 0$, e podemos determinar este número do limite $\text{Re } \tilde{s} \rightarrow \infty$. Neste caso, as soluções com $|\kappa| < 1$ converge para zero e são, para primeira aproximação, determinada por

$$\text{Det}(\tilde{s}I - B_{-r}\kappa^{-r}) = 0. \quad (1.85)$$

Pelo fato de B_{-r} ser não-singular, a equação (1.85) possui exatamente mr soluções $\kappa = \mathcal{O}(\tilde{s}^{-1/r})$. Isto prova o lema. ■

Assim existe uma transformação unitária $U = U(\tilde{s})$ tal que

$$U^*MU = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}.$$

Aqui os autovalores de M_{11} e M_{22} satisfazem $|\kappa| < 1$ e $|\kappa| > 1$ para $\text{Re } \tilde{s} > 0$, respectivamente. Assim M_{11} é uma matriz $rm \times rm$. Introduzindo uma nova variável

$$\psi_j = U^* \varphi_j$$

na equação (1.80)-(1.81) obtemos

$$\begin{bmatrix} \psi^I \\ \psi^{II} \end{bmatrix}_{j+1} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^I \\ \psi^{II} \end{bmatrix}_j \quad (1.86)$$

com condições de contorno

$$HU\psi_1 =: H^I\psi_1^I + H^{II}\psi_1^{II} = 0, \quad \|\psi\|_h < \infty. \quad (1.87)$$

Aqui H^I é novamente uma matriz $rm \times rm$.

Lema 8 *A condição de Godunov-Ryaben'kii é satisfeita se, e somente se, H é não singular para $\text{Re } \tilde{s} > 0$, isto é,*

$$\text{Det}|H^I| \neq 0, \quad \text{para } \text{Re } \tilde{s} > 0. \quad (1.88)$$

Demonstração. Pela equação (1.86),

$$\psi_j^{II} = M_{22}^{j-1} \psi_1^{II}.$$

Portanto, $\|\psi\|_h < \infty$ implica $\psi_1^{II} = 0$; isto é, $\psi^{II} \equiv 0$ e as soluções das equações (1.86) e (1.87) satisfazem

$$\psi_j^I = M_{11}^{j-1} \psi_1^I, \quad H^I \psi_1^I = 0.$$

Assim existe uma solução não-trivial se, e somente se, H^I é não singular. Isto prova o lema. ■

Temos, portanto, derivado algebricamente as exigências para a condição de Godunov-Ryaben'kii.

Note que para verificar a condição não necessitamos ir através da redução da equação (1.78) para a equação (1.80)-(1.81) e a construção de U , pois vimos que a solução da

equação (1.78a) com $\|\varphi\|_{h,\infty}$ é da forma

$$\varphi_j = \sum_{|\kappa_\nu| < 1} P_\nu(j) \kappa_\nu^j, \quad \kappa_\nu = \kappa_\nu(\tilde{s}), \quad \operatorname{Re} \tilde{s} > 0 \quad (1.89)$$

e dependem de rm parâmetros livres $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{rm})^T$. Aqui $P_\nu(j)$ é um polinômio em j com coeficientes vetoriais. Sua ordem é no máximo $m_\nu - 1$ onde m_ν é a multiplicidade de κ_ν .

Substituindo a equação (1.89) nas condições de contorno (1.78b) temos o sistema de equações

$$C(\tilde{s})\boldsymbol{\sigma} = 0, \quad (1.90)$$

e podemos reformular o lema 8 da seguinte forma.

Lema 9 *A condição de Godunov-Ryaben'kii é satisfeita se, e somente se,*

$$\operatorname{Det}|C(\tilde{s})| \neq 0, \quad \text{para } \operatorname{Re} \tilde{s} > 0.$$

Observação 6 *Uma consequência do lema 9 é que devemos ter rm parâmetros livres, pois o número de condições de contorno não podem ser menor do que rm para uma aproximação estável.*

Como um exemplo, aproximamos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a \neq 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad t \geq 0,$$

pelo esquema diferença de quarta-ordem

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} = a \left(\frac{4}{3} D_0(h) - \frac{1}{3} D_0(2h) \right) v_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.91)$$

Se $a > 0$, usamos as condições de contorno

$$D_+^q v_0 = D_+^q v_{-1} = 0. \quad (1.92)$$

Se $a < 0$, utilizamos a condição de contorno $u(0, t) = 0$ da equação diferencial para obtermos

$$u_{tt}(0, t) = a^2 u_{xx}(0, t) = 0.$$

Como condições de contorno para aproximação diferença usamos

$$v_0 = 0, \quad D_+ D_- v_0 = 0. \quad (1.93)$$

A equação (1.78a) possui a forma

$$\tilde{s}\varphi_j = a \left(\frac{2}{3}(\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) - \frac{1}{12}(\varphi_{j+2} - \varphi_{j-2}) \right), \quad (1.94)$$

e a equação característica é dada por

$$\tilde{s} = a \left(\frac{2}{3} \left(\kappa - \frac{1}{\kappa} \right) - \frac{1}{12} \left(\kappa^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \right). \quad (1.95)$$

Temos o seguinte lema.

Lema 10 *Temos:*

1. A equação característica (1.95) possui exatamente duas raízes

$$|\kappa_\nu| < 1, \quad \operatorname{Re} \tilde{s} > 0, \quad \nu = 1, 2.$$

2. Na vizinhança de $\tilde{s} = 0$, suas raízes são da forma

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -1 + \frac{\tilde{s}}{a} + \mathcal{O}(|\tilde{s}|^2), \quad \kappa_2 = 4 - \sqrt{15} + \mathcal{O}(|\tilde{s}|), \quad \text{se } a > 0, \\ \kappa_1 &= 1 - \frac{\tilde{s}}{a} + \mathcal{O}(|\tilde{s}|^2), \quad \kappa_2 = 4 - \sqrt{15} + \mathcal{O}(|\tilde{s}|), \quad \text{se } a < 0, \end{aligned}$$

Demonstração. A primeira afirmação segue do lema 7.

Para $\tilde{s} = 0$, as soluções das equações característica são

$$\kappa^{(1,2)} = \mp 1, \quad \kappa^{(3,4)} = 4 \pm \sqrt{15}.$$

Pelos argumentos de perturbação, determinamos qual destas quatro raízes são κ_1 e κ_2 . Temos, para pequeno $|\tilde{s}|$,

$$\kappa^{(1)} = -1 + \frac{3}{4} \frac{\tilde{s}}{a} + \mathcal{O}(|\tilde{s}|^2), \quad \kappa^{(2)} = 1 + \frac{\tilde{s}}{a} + \mathcal{O}(|\tilde{s}|^2).$$

Pela seleção das raízes satisfazendo $|\kappa| < 1$ para $\operatorname{Re} \tilde{s} > 0$, segue a segunda afirmação. Isto prova o lema. ■

Pelo lema 10, existem duas raízes κ_ν , $\nu = 1, 2$, com $|\kappa| < 1$ para $\operatorname{Re} \tilde{s} > 0$. Deste modo, a solução geral da equação (1.94) com $\|\varphi\|_h$ possui a forma

$$\varphi_j = \sigma_1 \kappa_1^j + \sigma_2 \frac{\kappa_2^j - \kappa_1^j}{\kappa_2 - \kappa_1}, \quad \text{se } \kappa_1 \neq \kappa_2.$$

Se $\kappa_1 = \kappa_2$ é uma raiz dupla, ela torna-se

$$\varphi_j = \sigma_1 \kappa_1^j + \sigma_2 j \kappa_1^{j-1}.$$

Substituímos esta expressão nas condições de contorno (1.92) usada para $a > 0$ e obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1 (\kappa_1 - 1)^q + \frac{\sigma_2}{\kappa_2 - \kappa_1} ((\kappa_2 - 1)^q - (\kappa_1 - 1)^q) &= 0, \\ \sigma_1 \frac{(\kappa_1 - 1)^q}{\kappa_1} + \frac{\sigma_2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{(\kappa_2 - 1)^q}{\kappa_2} - \frac{(\kappa_1 - 1)^q}{\kappa_1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.96)$$

O determinante deste sistema é

$$\text{Det} = -\frac{(\kappa_1 - 1)^q (\kappa_2 - 1)^q}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Pelo lema 10, $\kappa_1 \neq 1$, $\kappa_2 \neq 1$; isto é, não existe um autovalor com $\text{Re } \tilde{s} > 0$. Para as condições de contorno (1.93) usada para o caso $a < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \frac{\sigma_2}{\kappa_2 - \kappa_1} \left(\frac{(\kappa_2 - 1)^2}{\kappa_2} - \frac{(\kappa_1 - 1)^2}{\kappa_1} \right) &= \sigma_2 \left(1 - \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.97)$$

no qual, por causa de $|\kappa_1 \kappa_2| < 1$, possui somente a solução trivial. Portanto, não existe autovalor com $\text{Re } \tilde{s} > 0$.

Estudo do Efeito da Fronteira

Nosso trabalho tem como motivação o estudo de estabilidade da discretização por diferenças finitas das equações de Navier-Stokes incompressível transiente, mas estudamos aqui a estabilidade para a equação de Stokes, que é a equação de Navier-Stokes sem os termos não lineares. São estudadas diferentes condições de contorno para a pressão (CCP) e seu efeito na estabilidade de um método implícito, baseado nos estudos de Petersson [21] e Kress & Lötstedt [16]. A estabilidade é estudada pela análise do modo-normal (Método de Fourier) e pela computação numérica dos fatores de amplificação.

2.1 Motivação

Conforme Petersson [21] a literatura indica que a estabilidade é afetada pela escolha da condição de contorno para a pressão. Seguindo seu trabalho vamos detalhar um estudo sobre o efeito de três diferentes condições de contorno para a pressão em paredes não escorregadias (*no-slip*).

O modelo geral para um domínio bidimensional $(x, y) \in \Omega$, com formulação velocidade-pressão é dado pela equações de Navier-Stokes [7, 19, 23]

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}, & t \geq 0, \\ \nabla^2 p + \nabla u \cdot \mathbf{u}_x + \nabla v \cdot \mathbf{u}_y = \nabla \cdot \mathbf{f}, & t \geq 0, \\ \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y). \end{cases} \quad (2.1)$$

Aqui $\mathbf{u} = (u, v)^T$ é a velocidade, p é a pressão cinemática (pressão dividida pela densidade constante), ν é a constante de viscosidade cinemática, e $\mathbf{f} = (f^{(u)}, f^{(v)})^T$ é a força por unidade de massa. A condição de contorno "no-slip",

$$\mathbf{u}(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

A condição de contorno para a pressão ainda não está completamente estabelecida, mas três são as principais:

Condições de Contorno para a Pressão	
Div-Grad	$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \nu \mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$ $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$
Rotacional	$\frac{\partial p}{\partial n} = -\nu \mathbf{n} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$
Acoplada	$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

Tabela 2.1: Tabela das CCP.

A dedução dessas condições é dada na sequência:

Uma condição de contorno para a pressão pode ser obtida tomando o produto escalar entre a equação momento e a unidade normal do contorno, $\mathbf{n} = (n^{(1)}, n^{(2)})^T$. De (2.2) temos $\mathbf{u}_t = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$ e como que $\frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla p$ então $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f})$ no contorno não escorregadio, a condição torna-se

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \nu \mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

A condição de contorno com pressão não adiciona nenhuma informação nova ao sistema, visto que a equação já é satisfeita no contorno. Usando somente (2.3) o problema estaria indeterminado, conforme apontam Henshaw [14] e Strikwerda [24]. Para derivar outra condição de contorno apropriada para a pressão, consideremos as equações de Navier-Stokes incompressível na sua formulação velocidade-divergente [25]:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{f}, & t \geq 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & t \geq 0, \\ \mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y). \end{cases} \quad (2.4)$$

Derivar (2.1) de (2.4) é fácil. Basta tomar o divergente da equação momento em (2.4) e teremos:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_t + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \nabla p - \nu \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{f}. \quad (2.5)$$

Levando em conta que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, temos $\nabla \cdot \mathbf{u}_t = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$ e $\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla^2 \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$. Assim (2.5) torna-se

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \nabla p = \nabla \cdot \mathbf{f}.$$

Fazendo as seguintes contas

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \left(u \frac{\partial}{\partial x}, v \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) u \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} + u \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \mathbf{u} \\
&\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) v \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} + v \frac{\partial}{\partial y} \nabla \cdot \mathbf{u} \\
&= \nabla u \cdot \mathbf{u}_x + \nabla v \cdot \mathbf{u}_y
\end{aligned} \tag{2.6}$$

que substituindo em (2.5) temos a equação pressão $\nabla^2 p + \nabla u \cdot \mathbf{u}_x + \nabla v \cdot \mathbf{u}_y = \nabla \cdot \mathbf{f}$.

Deduzir que (2.4) poder ser derivado de (2.1) é um pouco mais elaborado. Para isto obtemos uma equação para o divergente, $\delta = \nabla \cdot \mathbf{u}$, e fazendo o divergente da equação momento e pressão em (2.1) obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{f} &= \nabla \cdot \mathbf{u}_t + \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla \cdot \nabla p - \nu \nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{u} \\
&= \nabla^2 p + \nabla u \cdot \mathbf{u}_x + \nabla v \cdot \mathbf{u}_y + \nabla^2 p
\end{aligned}$$

e utilizando as contas de (2.6) chegamos a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + u \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + v \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nu \nabla^2 (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Portanto, substituindo $\delta = \nabla \cdot \mathbf{u}$, isto resulta na equação convecção-difusão homogênea para δ :

$$\delta_t + u \delta_x + v \delta_y - \nu \nabla^2 \delta = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \geq 0.$$

Como (2.4) requer que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ para $t \geq 0$, então o campo de velocidade inicial também deve ter divergente nulo: $\nabla \mathbf{u}_0 = 0$. Portanto, o divergente deve ser nulo no contorno $\partial\Omega$. Por isto, uma alternativa para tornar as formulações velocidade-pressão e

velocidade-divergente equivalentes, é ter

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Isto ocorre, pois teremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \delta_t + u\delta_x + v\delta_y - \nu\nabla^2\delta = 0 \\ \delta_0 = 0 \quad (\text{Condição inicial}), \\ \delta_{\partial\Omega} = 0 \quad (\text{Condição de contorno}). \end{cases}$$

E isto garante que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ para $(x, y) \in \Omega$, $t \geq 0$.

Em um problema discretizado espacialmente, a condição de contorno (2.7) é utilizada para eliminar o valor dos pontos fantasma do lado direito da condição de Neumann (2.3). As condições de contorno (2.3) e (2.7) podem ser referidas como *condição Div-Grad*:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial n} = \nu \mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

Conforme Casulli [2], Gresho [10] e Guy [12], enquanto a condição Div-Grad é boa para esquemas explícitos, ela não funciona bem para métodos implícitos ou semi-implícitos, ou seja, o passo temporal necessita ser muito pequeno para que o esquema seja estável conforme indica a análise de von Neumann.

Uma alternativa para condição de Dirichlet (2.7), seria considerar a derivada normal do divergente igual a zero no contorno:

$$\frac{\partial \delta}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla \delta = 0, \quad (x, y) \text{ em } \Omega, \quad t \geq 0. \quad (2.9)$$

Pela identidade

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u},$$

o termo $\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}$ na condição de contorno para a pressão (2.3) pode ser escrita da seguinte forma

$$\mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \nabla \delta - \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}).$$

Assim, a partir desse resultado e (2.9) na condição de contorno para a pressão (2.3), temos

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\nu \mathbf{n} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{n} \cdot \mathbf{f}, \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad t \geq 0, \quad (2.10)$$

que é a chamada *condição Rotacional*. Esta condição de contorno é utilizada por Karniadakis et al. [15], que estuda a precisão dos métodos velocidade-pressão separados no contexto de discretizações de elementos espectrais.

A terceira alternativa é resolver a equação de pressão junto com a equação momento. Então, não é necessário explicitar a condição de contorno para a pressão e basta satisfazer (2.7), ou seja, o divergente de velocidade é zero no contorno. É a *condição Acoplada*.

Embora a motivação sejam as equações de Navier-Stokes, vamos trabalhar com o modelo simplificado que são as equações de Stokes com a formulação velocidade-pressão, mas considerando também a equivalência das formulações velocidade-pressão e velocidade-divergente, ou seja, forçar que o divergente de velocidade seja nulo no contorno.

Consideremos assim as equações de Stokes que são obtidas das equações de Navier-Stokes (2.4) desconsiderando os termos não-lineares, ou seja,

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + \nabla p &= \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \nabla^2 p &= \nabla \cdot \mathbf{f}, \\ \mathbf{u}(x, y, 0) &= \mathbf{u}_0(x, y). \end{cases} \quad (2.11)$$

2.2 O Caso Semidiscreto

Denotamos a função malha por $f_{j,k} = f(x_j, y_k)$ e definimos os operadores diferenças divididas por

$$D_+^x f_{j,k} = \frac{f_{j+1,k} - f_{j,k}}{\Delta x} \cong \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} \quad (\mathcal{O}(\Delta x)), \quad (2.12a)$$

$$D_-^x f_{j,k} = \frac{f_{j,k} - f_{j-1,k}}{\Delta x} = D_+^x f_{j-1,k} \cong \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} \quad (\mathcal{O}(\Delta x)), \quad (2.12b)$$

$$\begin{aligned} D_0^x f_{j,k} &= \frac{f_{j+1,k} - f_{j-1,k}}{2\Delta x} = \frac{1}{2} (D_+^x + D_-^x) f_{j,k} \\ &\cong \frac{\partial f(x_j, y_k)}{\partial x} \quad (\mathcal{O}(\Delta x^2)), \end{aligned} \quad (2.12c)$$

$$D_+^x D_-^x f_{j,k} = \frac{f_{j+1,k} - 2f_{j,k} + f_{j-1,k}}{\Delta x^2} \cong \frac{\partial^2 f(x_j, y_k)}{\partial x^2} \quad (\mathcal{O}(\Delta x^2)), \quad (2.12d)$$

$$\begin{aligned} D_0^x D_0^y f_{j,k} &= \frac{f_{j+1,k+1} - f_{j-1,k+1} - f_{j+1,k-1} + f_{j-1,k-1}}{4\Delta x \Delta y} \\ &\cong \frac{\partial^2 f(x_j, y_k)}{\partial x \partial y} \quad (\mathcal{O}(\Delta x \Delta y)) \end{aligned} \quad (2.12e)$$

e expressões correspondentes para os operadores diferenças divididas na direção y .

Nesta seção, deixaremos o tempo contínuo, mas discretizamos o espaço por diferenças divididas centrais de 2ª ordem. Vamos estudar o domínio semi-infinito $y \geq 0$ para uma função periódica de período 2π em x . Utilizamos uma malha cartesiana uniforme onde o tamanho do passo é $\Delta x = \Delta y = h = \frac{2\pi}{N}$. Os pontos da malha são dados por $x_j = (j-1)h$, $j = 1, 2, \dots, N$; $y_k = (k-1)h$, $k = 0, 1, \dots$. Vejamos a ilustração dessa malha na figura 2.1.

Em $y = 0$, impomos a condição "no-slip": $\mathbf{u}(x, 0, t) = 0$. Deste modo, na direção x em $y = 0$ as funções u e v são nulas (constantes) então as derivadas destas funções na

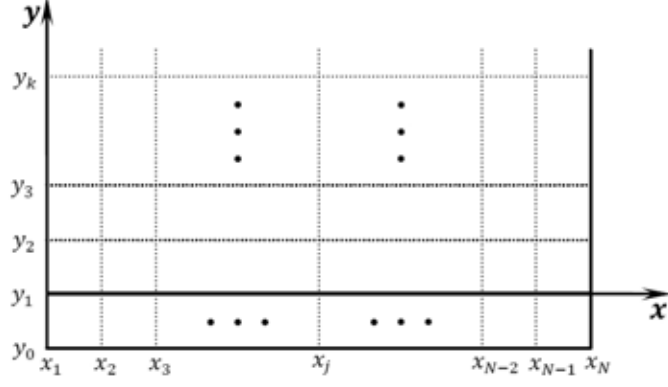


Figura 2.1: Malha

direção x são nulas. Vamos utilizar isto para simplificar a discretização das três condições de contorno acima citadas.

Discretizando a condição Acoplada (2.7) em $y = 0$ ($D_0^x u = 0$) obtemos

$$D_0^y v = 0, \quad y = 0. \quad (2.13)$$

Na análise da estabilidade podemos suprimir o termo fonte $\mathbf{n} \cdot \mathbf{f}$ e a constante ν . Além disso, consideramos o vetor normal à $y = 0$ como sendo $\mathbf{n} = (0, 1)$. Deste modo, em $y = 0$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Assim, a equação pressão na condição Div-Grad (2.8) discretizada é dada por

$$\begin{cases} D_0^y p = D_+^y D_-^y v \\ D_0^y v = 0, \end{cases} \quad y = 0. \quad (2.14)$$

A discretização da equação de conservação de massa na condição Div-Grad (2.8) nos fornece $v_{j,k-1} = v_{j,k+1}$, então

$$D_+^y D_-^y v_{j,k} = \frac{v_{j,k+1} - 2v_{j,k} + v_{j,k-1}}{h^2} = \frac{2}{h} \frac{v_{j,k+1} - v_{j,k}}{h} = \frac{2}{h} D_+^y v.$$

Portanto a condição Div-Grad pode ser escrita como

$$D_0^y p = \frac{2}{h} D_+^y v, \quad y = 0. \quad (2.15)$$

Agora utilizando a identidade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$ temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

e assim

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = (0, 1) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Conseqüentemente a condição de contorno Rotacional (2.10) discretizada torna-se

$$D_0^y p = -D_0^x D_0^y u, \quad y = 0. \quad (2.16)$$

Considere as condições de contorno para a pressão na seguinte forma compacta:

$$A^{(q)} D_0^y p = B^{(q)} \mathbf{u}, \quad y = 0, \quad (2.17)$$

para $q = 1, 2$, ou 3 . Na *condição Acoplada* temos $A^{(1)} = 0$ e $B^{(1)} \mathbf{u} = D_0^y v$; na *condição Div-Grad* $A^{(2)} = 1$ e $B^{(2)} \mathbf{u} = \frac{2}{h} D_+^y v$ e na *condição Rotacional* possui $A^{(3)} = 1$ e $B^{(3)} \mathbf{u} = D_0^x D_0^y u$.

Com a notação descrita acima, a discretização das equações de Stokes com as condições iniciais e de contorno (omitindo o índice do ponto na malha) são

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} u_t + D_0^x p &= D_+^x D_-^x u + D_+^y D_-^y u + f^{(u)}, \\ v_t + D_0^y p &= D_+^x D_-^x v + D_+^y D_-^y v + f^{(v)}, \\ D_+^x D_-^x p + D_+^y D_-^y p &= D_0^x f^{(u)} + D_0^y f^{(v)} := f^{(p)}, \end{aligned} \right\} \text{Equações de Stokes} \\ \left. \begin{aligned} \mathbf{u}(x, 0, t) &= 0, \end{aligned} \right\} \text{Condição no-slip} \\ \left. \begin{aligned} A^{(q)} D_0^y p(x, 0, t) &= B^{(q)} \mathbf{u}(x, 0, t), \quad q = 1, 2, \text{ ou } 3, \end{aligned} \right\} \text{CCP} \\ \left. \begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, 0) &= 0, \\ p(x, y, 0) &= 0. \end{aligned} \right\} \text{Condição inicial} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Note que, sem perda de generalidade, pode-se considerar o dado inicial nulo (homogêneo).

A transformada de Fourier discreta [22] de uma função malha $f(x_j, y_k)$ periódica de período 2π na direção x é dada por

$$f(x_j, y_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) e^{i\omega x_j}, \quad (2.19)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ e os números onda $\omega = 0, 1, \dots, N-1$ correspondem ao conjunto completo de autofunções $e^{i\omega x}$ da malha.

Agora, aplicando a transformada de Fourier (2.19) em (2.12c), obtemos

$$\begin{aligned} D_0^x f_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) \frac{e^{i\omega x_{j+1}} - e^{i\omega x_{j-1}}}{2h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) \frac{e^{i\omega(x_j+h)} - e^{i\omega(x_j-h)}}{2h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) e^{i\omega x_j} \frac{e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}}{2h}. \end{aligned}$$

Sabendo que $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, então

$$\begin{aligned} e^{i\omega h} - e^{-i\omega h} &= \cos(\omega h) + i \sin(\omega h) - \cos(-\omega h) - i \sin(-\omega h) \\ &= \cos(\omega h) + i \sin(\omega h) - \cos(\omega h) + i \sin(\omega h) \\ &= 2i \sin(\omega h). \end{aligned}$$

e conseqüentemente,

$$D_0^x f_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) e^{i\omega x_j} \frac{i}{h} \sin(\omega h). \quad (2.20)$$

Aplicando a transformada de Fourier (2.19) em (2.12d), obtemos

$$\begin{aligned} D_+^x D_-^x f_{j,k} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) \frac{e^{i\omega x_{j+1}} - 2e^{i\omega x_j} + e^{i\omega x_{j-1}}}{h^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) e^{i\omega x_j} \frac{e^{i\omega h} - 2 + e^{-i\omega h}}{h^2}. \end{aligned}$$

Visto que

$$\begin{aligned} e^{i\omega h} - 2 + e^{-i\omega h} &= \cos(\omega h) + i \sin(\omega h) - 2 + \cos(-\omega h) + i \sin(-\omega h) \\ &= 2(\cos(\omega h) - 1). \end{aligned}$$

e como $\cos(\omega h) = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)$, então

$$e^{i\omega h} - 2 + e^{-i\omega h} = -4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right).$$

Assim

$$D_+^x D_-^x f_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\omega=0}^{N-1} \tilde{f}(\omega, y_k) e^{i\omega x_j} \frac{-4}{h^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega h}{2}\right). \quad (2.21)$$

De modo análogo a (2.20) e (2.21) obtemos a transformada de Fourier para todos os operadores em (2.12).

Seja $g(t)$, $0 \leq t \leq \infty$, uma função contínua, e assumimos que existem constantes C e α tais que

$$|g(t)| \leq C e^{\alpha t}. \quad (2.22)$$

Assim, para $\eta > \alpha$, a transformada de Laplace de $g(t)$ é definida por

$$\mathcal{L}(g(t)) = \bar{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt, \quad (2.23)$$

onde $s = i\xi + \eta$, ξ, η reais.

Suponhamos que $f(t)$ tem uma derivada contínua e que df/dt também satisfaz a estimativa (2.22). Integrando por partes (2.23) para $s \neq 0$ ($u = g(t)$ e $dv = e^{-st} dt$), temos

$$\bar{g}(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt = -\frac{e^{-st}}{s} g(t) \Big|_0^\infty - \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} (dg/dt) dt,$$

portanto

$$\overline{dg/dt} = s\bar{g}(s) + g(0). \quad (2.24)$$

Para análise da estabilidade, aplicamos a transformada de Fourier na direção x (discreta) e transformada de Laplace no tempo (contínuo). As variáveis duais $\mathbf{u}(x, y, t)$ e $p(x, y, t)$ são denotados por $\hat{\mathbf{u}}(\omega, y, s)$ e $\hat{p}(\omega, y, s)$, respectivamente. Assim a transformada de Fourier-Laplace do sistema (2.18) é

$$\begin{aligned} s\hat{u} + \frac{i}{h} \operatorname{sen}(\omega h) \hat{p} &= -\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) \hat{u} + D_+^y D_-^y \hat{u} + \hat{f}^{(u)}, \\ s\hat{v} + D_0^y \hat{p} &= -\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) \hat{v} + D_+^y D_-^y \hat{v} + \hat{f}^{(v)}, \\ -\frac{4}{h^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) \hat{p} + D_+^y D_-^y \hat{p} &= \hat{f}^{(p)}, \\ \hat{\mathbf{u}}(\omega, 0, s) &= 0, \\ A^{(q)} D_0^y \hat{p}(\omega, 0, s) &= \hat{B}^{(q)} \hat{\mathbf{u}}(\omega, 0, s), \quad q = 1, 2, \text{ ou } 3, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde $\hat{B}^{(q)}$ é a transformada de Fourier-Laplace de $B^{(q)}$.

No problema de autovalor (2.25) podemos forçar $\mathbf{f} = 0$, pois na análise da estabilidade isto não influencia, uma vez que obtemos um problema de autovalor semelhante. Assim temos o seguinte problema de autovalor

$$s\hat{u} + \frac{i}{h}\text{sen}(\omega h)\hat{p} = -\frac{4}{h^2}\text{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\hat{u} + D_+^y D_-^y \hat{u}, \quad (2.26a)$$

$$s\hat{v} + D_0^y \hat{p} = -\frac{4}{h^2}\text{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\hat{v} + D_+^y D_-^y \hat{v}, \quad (2.26b)$$

$$-\frac{4}{h^2}\text{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\hat{p} + D_+^y D_-^y \hat{p} = 0, \quad (2.26c)$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega, 0, s) = 0, \quad (2.26d)$$

$$A^{(q)} D_0^y \hat{p}(\omega, 0, s) = \hat{B}^{(q)} \hat{\mathbf{u}}(\omega, 0, s), \quad q = 1, 2, \text{ ou } 3. \quad (2.26e)$$

Chamamos s de um autovalor se existe uma solução não trivial de (2.26) com Norma- L_2 no contorno.

Existem várias definições de estabilidade para aproximações por diferenças, mas a solução não pode ser estável se existir um autovalor onde $\text{Re}(s) > 0$, visto que ele corresponde a um crescimento temporal das variáveis originais. Estimativas padrões em termos das variáveis originais podem frequentemente ser obtidas se não existirem autovalores com $\text{Re}(s) \geq 0$ para o problema da transformada de Fourier-Laplace [11]. No entanto, somente vamos verificar se existem autovalores onde $\text{Re}(s) \geq 0$. Isto nos fornecerá condições necessárias para a estabilidade, mas não suficientes.

Algumas definições e propriedades das funções hiperbólicas são dadas por:

$$\text{senhx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (2.27a)$$

$$\text{coshx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (2.27b)$$

$$\text{tg}hx = \frac{\text{senhx}}{\text{coshx}}, \quad (2.27c)$$

$$\text{cosh}^2 x - \text{senh}^2 x = 1, \quad (2.27d)$$

$$\text{coshx} = 1 + 2\text{senh}^2\left(\frac{x}{2}\right). \quad (2.27e)$$

Na equação pressão (2.26c) impondo a solução da forma $\hat{p}(y) = Pe^{-\alpha y}$, temos

$$-\frac{4}{h^2}\text{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)Pe^{-\alpha y_k} + D_+^y D_-^y Pe^{-\alpha y_k} = 0 \quad (2.28)$$

Utilizando (2.27),

$$\begin{aligned}
D_+^y D_-^y e^{-\alpha y_k} &= \frac{e^{-\alpha y_{k+1}} - 2e^{-\alpha y_k} + e^{-\alpha y_{k-1}}}{h^2} \\
&= \frac{e^{-\alpha h} - 2 + e^{\alpha h}}{h^2} e^{-\alpha y_k} \\
&= \frac{2\cosh(\alpha h) - 2}{h^2} e^{-\alpha y_k} \\
&= \frac{4}{h^2} \sinh\left(\frac{\alpha h}{2}\right) e^{-\alpha y_k}.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

De (2.28) concluímos que $\alpha \geq 0$ deve satisfazer a condição

$$\sinh\left(\frac{\alpha h}{2}\right) = \sin\left(\frac{\omega h}{2}\right). \tag{2.30}$$

Agora substituindo $\hat{p}$ em (2.26a) e (2.26b) teremos

$$\begin{aligned}
s\hat{u} + \frac{i}{h} \sin(\omega h) P e^{-\alpha y_k} &= -\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) \hat{u} + D_+^y D_-^y \hat{u}, \\
s\hat{v} + D_0^y P e^{-\alpha y_k} &= -\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) \hat{v} + D_+^y D_-^y \hat{v},
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
D_0^y P e^{-\alpha y_k} &= \frac{P e^{-\alpha y_{k+1}} - P e^{-\alpha y_{k-1}}}{2h} = P e^{-\alpha y_k} \frac{e^{-\alpha h} - e^{\alpha h}}{2h} \\
&= -\frac{1}{h} \sinh(\alpha h) P e^{-\alpha y_k},
\end{aligned}$$

e após alguns cálculos algébricos

$$D_+^y D_-^y \hat{u} - \left(s + \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right) \hat{u} = \frac{i}{h} \sin(\omega h) P e^{-\alpha y}, \tag{2.31a}$$

$$D_+^y D_-^y \hat{v} - \left(s + \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right) \hat{v} = -\frac{1}{h} \sinh(\alpha h) P e^{-\alpha y}. \tag{2.31b}$$

Suponhamos que a parte homogênea de (2.31a) possui a solução da seguinte forma $\hat{u}_h(y) = e^{-\beta y}$, onde $\operatorname{Re} \beta > 0$. Substituindo (2.29) em (2.31a) podemos afirmar que $\hat{u}_h$ será solução da parte homogênea de (2.31a) se β for solução de

$$\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) = s + \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\omega h}{2}\right), \quad \operatorname{Re}(\beta) > 0. \tag{2.32}$$

Visto que a parte homogênea das equações em (2.31) são iguais, então $\hat{v}_h(y) = e^{-\beta y}$ com β satisfazendo (2.32), é solução da parte homogênea de (2.31b).

A solução particular de (2.31a) é da forma $\hat{u}_p(y) = Ae^{-\alpha y}$, e utilizando (2.29) tem-se

$$\frac{4}{h^2} \sinh^2 \left(\frac{\alpha h}{2} \right) Ae^{-\alpha y} - \left(s + \frac{4}{h^2} \sinh^2 \left(\frac{\omega h}{2} \right) \right) \hat{u} = \frac{i}{h} \sinh(\omega h) P e^{-\alpha y}.$$

Portanto

$$A = \frac{\frac{i}{h} \sinh(\omega h) P}{\frac{4}{h^2} \sinh^2(\alpha h/2) - \left(s + \frac{4}{h^2} \sinh^2(\omega h/2) \right)} \stackrel{(2.30), (2.32)}{=} -\frac{i}{hs} \sinh(\omega h) P. \quad (2.33)$$

Do mesmo modo, supondo a solução particular de (2.31a) da forma $\hat{v}_p(y) = Be^{-\alpha y}$, temos

$$B = \frac{-\frac{i}{h} \sinh(\alpha h) P}{\frac{4}{h^2} \sinh^2(\alpha h/2) - \left(s + \frac{4}{h^2} \sinh^2(\omega h/2) \right)} \stackrel{(2.30), (2.32)}{=} -\frac{i}{hs} \sinh(\omega h) P. \quad (2.34)$$

Conseqüentemente, a solução de (2.26a) é $\hat{u}(y) = c_1 \hat{u}_h(y) + A \hat{u}_p(y)$. Da condição "no-slip", $\hat{u}(0) = 0$, tem-se $c_1 = -A$. Assim temos a solução $\hat{u}(y) = A(e^{\alpha y} - e^{-\beta y})$. De modo análogo, $\hat{v}(y) = B(e^{-\alpha y} - e^{-\beta y})$. Portanto, impondo a condição de contorno $\hat{u}(\omega, 0, s) = 0$, temos a seguinte solução para (2.26):

$$\hat{u}(y) = -\frac{iP \sinh(\omega h)}{hs} (e^{-\alpha y} - e^{-\beta y}), \quad (2.35a)$$

$$\hat{v}(y) = \frac{P \sinh(\alpha h)}{hs} (e^{-\alpha y} - e^{-\beta y}), \quad (2.35b)$$

$$\hat{p}(y) = P e^{-\alpha y}, \quad (2.35c)$$

onde o coeficiente P deve ser determinado pela equação (2.26e).

2.2.1 Condição Acoplada

Considerando a solução $\hat{v}$ (2.35b), temos que

$$\begin{aligned} D_0^y \hat{v}(y_k) &= \frac{\hat{v}_{k+1} - \hat{v}_{k-1}}{2h} \\ &= \frac{P \sinh(\alpha h)}{hs} \left(\frac{(e^{-\alpha y_{k+1}} - e^{-\beta y_{k+1}}) - (e^{-\alpha y_{k-1}} - e^{-\beta y_{k-1}})}{2h} \right) \\ &= \frac{P \sinh(\alpha h)}{hs} \left(e^{-\alpha y_k} \left(\frac{e^{-\alpha h} - e^{\alpha h}}{2h} \right) + e^{-\beta y_k} \left(\frac{e^{\beta h} - e^{-\beta h}}{2h} \right) \right). \end{aligned}$$

Deste modo, utilizando as definições de funções hiperbólicas (2.27), a condição de contorno Acoplada $D_0^y \hat{v}(\omega, 0, s) = 0$ no contorno "no-slip" ($y_k = 0$) torna-se

$$P \frac{\sinh(\alpha h)}{hs} \left(\frac{\sinh(\beta h)}{h} - \frac{\sinh(\alpha h)}{h} \right) = 0. \quad (2.36)$$

Para $\omega = 0$, que corresponde a $\alpha = 0$, há uma solução não trivial P . Isto corresponde à uma constante indeterminada na pressão que pode ser fixada impondo a média da pressão igual a zero. Agora para estudarmos o caso $\omega > 0$ introduzimos

$$q(s) = \frac{1}{s}(\sinh(\beta(s)h) - \sinh(\alpha h)), \quad (2.37)$$

que representa o termo que pode ser zero em (2.36), isto é, (2.36) é nulo quando (2.37) é também. Isto ocorre, pois (2.36) é igual a $\frac{P}{h^2}q(s) = 0$.

Um exemplo da função $q(s)$ é mostrado na figura 2.2.

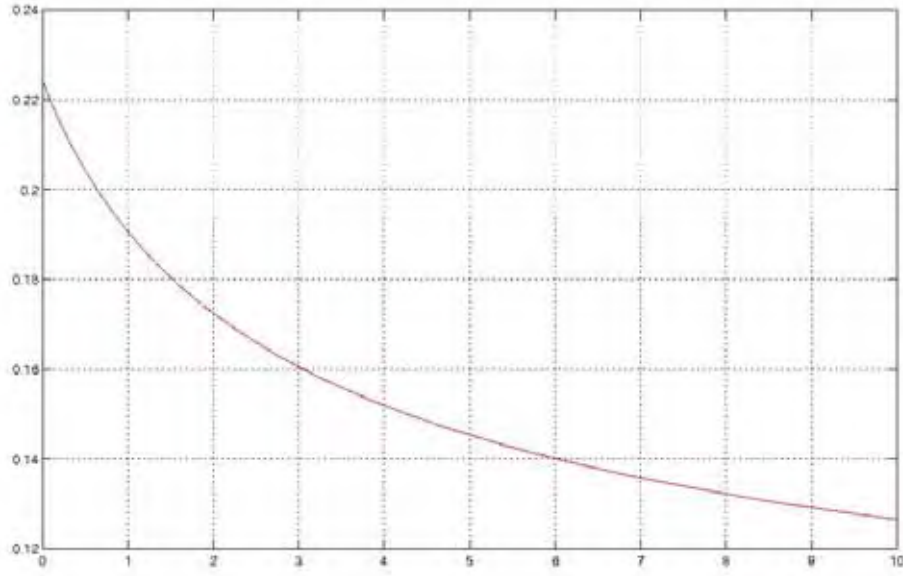


Figura 2.2: A função $q(s)$ para valor real s no caso de $n = 15$, $\omega = 1$.

Lema 11 A função $q(s)$ satisfaz $q(s) \neq 0$ para $\text{Re}(s) \geq 0$.

A demonstração desse resultado será por absurdo. Vamos supor que existe s onde $\text{Re}(s) \geq 0$ e tal que $q(s) = 0$. De $q(s) = 0$ chegamos a duas soluções, das quais somente uma satisfaz $\text{Re}(s) \geq 0$, $s = 0$. No entanto provamos que $\lim_{s \rightarrow 0} q(s) > 0$, ou seja, $q(s) \neq 0$. Portanto é absurdo supor $q(s) = 0$ se tivermos $\text{Re}(s) \geq 0$.

Demonstração. Da definição (2.32) de $\beta(s)$,

$$\sinh\left(\frac{\beta(s)h}{2}\right) = \sqrt{\frac{h^2 s}{4} + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)}. \quad (2.38)$$

A fórmula do ângulo duplo

$$\sinh(\beta h) = 2\sinh\left(\frac{\beta h}{2}\right)\cosh\left(\frac{\beta h}{2}\right) \quad (2.39)$$

juntamente com a propriedade de função hiperbólica (2.27e) resulta em

$$\sinh(\beta h) = 2\sinh\left(\frac{\beta h}{2}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.38) em (2.40) obtemos

$$\sinh(\beta h) = 2\sqrt{h^2 s/4 + \sinh^2(\omega h/2)} \sqrt{1 + h^2 s/4 + \sinh^2(\omega h/2)}. \quad (2.41)$$

Além disso, de (2.38) e (2.30) segue que, $\alpha = \beta(0)$, assim $q(s)$ só pode ser zero se

$$\sinh(\beta(s)h) = \sinh(\alpha h). \quad (2.42)$$

Igualando as equações (2.39) e (2.40) obtemos

$$2\sinh\left(\frac{\beta h}{2}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} = 2\sqrt{\frac{h^2 s}{4} + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)} \sqrt{1 + \frac{h^2 s}{4} + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)}$$

donde

$$\sinh^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \left(1 + \sinh^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) = \left(\frac{h^2 s}{4} + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right) \left(1 + \frac{h^2 s}{4} + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right).$$

Utilizando isto e as equações (2.30) e (2.42) temos

$$\left(\frac{h^2 s}{4} + \sinh^2(\omega h/2)\right) \left(1 + \frac{h^2 s}{4} + \sinh^2(\omega h/2)\right) = \sinh^2(\omega h/2)(1 + \sinh^2(\omega h/2)),$$

que após algumas contas, torna-se

$$\frac{h^4}{16}s^2 + \left(\frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2}\sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right)s = 0,$$

que possui as raízes $s = 0$ e $s = -\frac{4}{h^2}(1 + 2\sinh^2(\frac{\omega h}{2}))$. Porém, somente $s = 0$ satisfaz a condição $\text{Re}(s) \geq 0$. Entretanto, em $s = 0$, o denominador de $q(s)$ é também zero. Assim, usando a regra de l'Hospital, temos

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} q(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\cosh(\beta(s)h) h \frac{d\beta(s)}{ds} \right) \\ &= h \cosh(\beta(0)h) \frac{d\beta(s)}{ds} \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Derivando (2.32) com relação a s , utilizando (2.30) e (2.42) obtemos

$$\left. \frac{d\beta(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{h}{4\sinh\left(\frac{\alpha h}{2}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)}}.$$

Conseqüentemente

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} q(s) &= \frac{h^2 \cosh(\alpha h)}{4\sinh\left(\frac{\alpha h}{2}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)}} \\ &\stackrel{(2.40)}{=} \frac{h^2 \cosh(\alpha h)}{2\sinh(\alpha h)} \\ &= \frac{h^2}{2\operatorname{tgh}(\alpha h)} > 0, \end{aligned} \quad (2.44)$$

e assim $q(s) \neq 0$. Absurdo, pois supomos $q(s) = 0$. Portanto $q(s) > 0$ para todo $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. ■

Concluimos que o sistema (2.26) com a condição de contorno $D_0^y \hat{v}(\omega, 0, s) = 0$ não possui nenhum autovalor s tal que $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Isto significa que neste caso, a condição de contorno Acoplada não impõe nenhuma restrição de estabilidade ao sistema (2.26).

2.2.2 Condição Div-Grad

Utilizando as soluções dadas (2.35b) e (2.35c) na condição de contorno Div-Grad $D_0^y \hat{p}(\omega, y_k, s) = \frac{2}{h} D_+^y \hat{v}(\omega, y_k, s)$, $y_k = 0$, temos

$$D_0^y (P e^{-\alpha y_k}) = \frac{2}{h} D_+^y \left[\frac{P \sinh(\alpha h)}{h s} (e^{-\alpha y_k} - e^{-\beta y_k}) \right]$$

que resulta em

$$-P \frac{\sinh(\alpha h)}{h} = \frac{2P \sinh(\alpha h)}{h^3 s} (e^{-\alpha h} - e^{-\beta h}),$$

e que pode ser escrito

$$P \frac{\sinh(\alpha h)}{h} \left(1 + \frac{2(e^{-\alpha h} - e^{-\beta h})}{h^2 s} \right) = 0. \quad (2.45)$$

A equação (2.26a) no contorno, onde vale a condição "no-slip" (2.26d), nos fornece $D_0^y \hat{p} = D_+^y D_-^y \hat{v}$. Como a equação de contorno Div-Grad é dada por $D_0^y \hat{p} = \frac{2}{h} D_+^y \hat{v}$, obtemos a condição $D_+^y D_-^y \hat{v} = D_+^y \hat{v}$ em $y_k = 0$. Substituindo (2.35b) nesta equação chegamos a uma equação da forma (2.36). Portanto não é necessário analisar o caso $D_0^y \hat{p} = \frac{2}{h} D_+^y \hat{v}$ visto que ele é equivalente à condição Acoplada $D_0^y \hat{v} = 0$ e conseqüentemente gozam das mesmas propriedades.

2.2.3 Condição Rotacional

A condição de contorno $D_0^y \hat{p}(\omega, y_k, s) = -\frac{i}{h} \text{sen}(\omega h) D_0^y \hat{u}(\omega, y_k, s)$, com $y_k = 0$, conduz a

$$P \left(\frac{\text{senh}(\alpha h)}{h} - \frac{\text{sen}^2(\omega h)}{h^2 s} \left(\frac{\text{senh}(\beta h)}{h} - \frac{\text{senh}(\alpha h)}{h} \right) \right) = 0. \quad (2.46)$$

Para se obter esta equação basta substituir as equações (2.35a) e (2.35b) na equação condição de contorno e teremos

$$P \frac{e^{-\alpha y_{k+1}} - e^{-\alpha y_{k-1}}}{2h} = -\frac{i}{h} \text{sen}(\omega h) \frac{-i P \text{sen}(\omega h)}{h s} \left(\frac{(e^{-\alpha y_{k+1}} - e^{-\beta y_{k+1}}) - (e^{-\alpha y_{k-1}} - e^{-\beta y_{k-1}})}{2h} \right).$$

que após algumas operações algébricas fornece a equação (2.46).

Note que para $\omega = 0$, de (2.30), temos $\text{sen}(\frac{\alpha h}{2}) = 0$, donde $\alpha = 0$. Desse modo, a solução não trivial fica determinada a menos da constante P em (2.46). Isto é similar às duas condições de limite anteriores, onde as soluções não triviais para $\omega = 0$ são devidas à constante indeterminada na pressão.

No caso $\omega > 0$, estudaremos a expressão

$$q_2(s) = h^2 \text{senh}(\alpha h) - \text{sen}^2(\omega h) q(s). \quad (2.47)$$

Esta equação é introduzida para realizar a análise da equação (2.46), que como podemos ver possuem as mesmas raízes, pois a equação (2.46) equivale a $\frac{P}{h^3} q_2(s) = 0$.

Para o estudo da condição de contorno Rotacional necessitamos dos resultados apresentados a seguir.

Lema 12 *A função $q(s)$ satisfaz $\text{Im}(q(s)) = 0$ se e somente se $\text{Im}(s) = 0$.*

Esse lema será demonstrado de forma direta, ou seja, utilizamos a hipótese e após algumas contas provamos o desejado.

Demonstração. Se a parte imaginária de $q(s)$ for zero, $q(s)$ é um valor real. Assim há uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$q(s) = \frac{1}{s} (\text{senh}(\beta(s)h) - \text{senh}(\alpha h)) = C.$$

Logo,

$$(\text{senh}(\alpha h) + Cs)^2 = \text{senh}^2(\beta(s)h),$$

e utilizando a fórmula do ângulo duplo (2.40) temos

$$4\sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\left(1 + \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\right) + 4Cs\sinh\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)} \\ + C^2s^2 = 4\sinh^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\left(1 + \sinh^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)$$

Após introduzir as expressões (2.30) e (2.32) para α e $\beta(s)$, temos

$$\left(C^2 - \frac{h^4}{4}\right)s^2 + 4C\left(\sinh(\omega h/2)\sqrt{1 + \sinh^2(\omega h/2)} - h^2(1 + 2\sinh^2(\omega h/2))\right)s = 0,$$

que possui as seguintes raízes

$$\begin{cases} s_1 = 0, \\ s_2 = \frac{h^2(1 + 2\sinh^2(\omega h/2)) - 4C\left(\sinh(\omega h/2)\sqrt{1 + \sinh^2(\omega h/2)}\right)}{C^2 - \frac{h^4}{2}}. \end{cases}$$

Note que as duas soluções são números reais. Portanto, se $\text{Im}(q(s)) = 0$ então $\text{Im}(s) = 0$.

Agora supondo que $\text{Im}(s) = 0$, então $s \in \mathbb{R}$. Utilizando a fórmula do ângulo duplo (2.41) e equação (2.30) em (2.37) obtemos

$$q(s) = \frac{1}{s} \left(2\sqrt{\frac{h^2s}{4} + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)} \sqrt{1 + \frac{h^2s}{4} + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)} - \sinh(\omega h) \right).$$

Portanto $\text{Im}(q(s)) = 0$. Isto prova o lema. ■

Lema 13 *A parte imaginária do complexo $q(s)$ é negativa para $\text{Im}(s) > 0$ e positiva para $\text{Im}(s) < 0$.*

Demonstração. Provaremos para $s = i\epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$, pois, do lema 12 e da continuidade de $q(s)$, garantimos que vale para ϵ qualquer.

Substituindo a fórmula do arco duplo (2.39) na expressão de $q(s)$ e utilizando as equações (2.30) e (2.32) teremos

$$q(s) = \frac{2}{s} \left[\sqrt{\frac{h^2s}{4} + \frac{h^4s^2}{16} + \frac{h^2s}{4}\sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) + \frac{h^2s}{4}\sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right) + \sinh^4\left(\frac{\omega h}{2}\right)} \right. \\ \left. - \sqrt{\sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\left(1 + \sinh^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right)} \right] \quad (2.48)$$

Para s imaginário, $s = i\epsilon$, temos

$$q(i\epsilon) = -\frac{2i}{\epsilon} \left(\sqrt{a + \epsilon b + \epsilon^2 c} - \sqrt{a} \right),$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{sen}^2(\omega h/2)(1 + \operatorname{sen}^2(\omega h/2)), \\ b &= \frac{h^2 i}{4}(1 + 2\operatorname{sen}^2(\omega h/2)), \\ c &= -\frac{h^4}{16}. \end{aligned}$$

Para $0 < \epsilon \ll 1$, e expansão em série de Taylor em torno de 0, obtemos

$$q(i\epsilon) = q(0) + \epsilon q'(0) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Calculemos $q(0)$ e $q'(0)$. Temos

$$q(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} q(i\epsilon) = -2i \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + \epsilon b + \epsilon^2 c} - \sqrt{a}}{\epsilon},$$

que aplicando a regra de l'Hospital resulta em

$$q(0) = -\frac{bi}{\sqrt{a}}.$$

Além disso,

$$q'(i\epsilon) = -i \left(\frac{-2(a + \epsilon b + \epsilon^2 c) + 2\sqrt{a}\sqrt{a + \epsilon b + \epsilon^2 c} + \epsilon b + 2\epsilon^2 c}{\epsilon^2 \sqrt{a + \epsilon b + \epsilon^2 c}} \right).$$

Aplicando o limite e utilizando a regra de l'Hospital duas vezes, obtemos após alguns cálculos algébricos

$$q'(0) = -\frac{i}{4a\sqrt{a}}(4ac - b^2).$$

Conseqüentemente,

$$q(i\epsilon) = -\frac{ib}{\sqrt{a}} - \frac{i\epsilon}{4a\sqrt{a}}(4ac - b^2) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.49)$$

Como b é imaginário puro, o primeiro termo de $q(i\epsilon)$ é real. Além disso, após algumas contas, temos $4ac - b^2 = \frac{h^2}{4}$. Desse modo,

$$4ac - b^2 = \frac{h^2}{4},$$

assim

$$\operatorname{Im}(q(i\epsilon)) = -\frac{\epsilon h^4}{64a\sqrt{a}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) < 0, \quad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Portanto, $\operatorname{Im}(q(s)) < 0$ para todo $\operatorname{Im}(s) > 0$, pois $q(s)$ é contínua e pelo lema 12 temos que $\operatorname{Im}(q(s)) \neq 0$ para $\operatorname{Im}(s) \neq 0$.

Para provar que $\operatorname{Im}(q(s)) > 0$ para $\operatorname{Im}(s) < 0$ vamos utilizar o fato de que $q(\bar{s}) = \overline{q(s)}$. Substituindo (2.30) e (2.40) em (2.37) obtemos

$$q(s) = \frac{2}{s} \sqrt{\left(\frac{h^2 s}{4} + \operatorname{sen}\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right) \left(1 + h^2 s + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\omega h}{2}\right) \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega h}{2}\right)}}.$$

E além disso, dado $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{z}_1} &= \overline{\sqrt{z_1}} \\ \frac{1}{\bar{z}_1} &= \overline{\frac{1}{z_1}} \\ \frac{1}{\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2} &= \overline{\frac{1}{z_1 \cdot z_2}}. \end{aligned}$$

A demonstração destas propriedades para números complexos é trivial se utilizarmos a representação destes números em coordenadas polares, ou seja, $z_j = r_j e^{i\theta_j}$, $r_j, \theta_j \in \mathbb{R}$. Logo $q(\bar{s}) = \overline{q(s)}$. Consequentemente, supondo que $\operatorname{Im}(s) < 0$ então $\operatorname{Im}(\bar{s}) > 0$ e desta forma, pela primeira parte da demonstração, podemos afirmar que $\operatorname{Im}(\overline{q(s)}) = \operatorname{Im}(q(\bar{s})) < 0$, donde $\operatorname{Im}(q(s)) > 0$. Portanto, $\operatorname{Im}(q(s)) > 0$ para $\operatorname{Im}(s) < 0$. Note que acabamos de provar o lema para s puramente imaginário. No entanto, no caso $s = x + yi$ basta utilizarmos a transformação $t(z) = z - (x + iy) + (1 - z)iy = zx + iy$, $z \in [0, 1]$ para observamos que $\operatorname{Im}(q(s))$ não troca de sinal. Pois se isso ocorrer, então temos que $\operatorname{Im}(q(t(0))) < 0$ e $\operatorname{Im}(q(t(1))) > 0$ e logo podemos afirmar que existe z tal que $\operatorname{Im}(q(t(z))) = 0$. Pelo Lema 12 segue que $y = 0$, ou seja, $s = iy$. Isto prova o lema. ■

Agora, como de (2.47) $\operatorname{Im}(q_2(s)) = -\operatorname{sen}^2(\omega h)\operatorname{Im}(q(s))$ então pelo Lema 12 segue que $\operatorname{Im}(q_2(s)) = 0$ se e somente se $\operatorname{Im}(s) = 0$. Portanto, necessitamos somente considerar valores reais s e prosseguirmos estudando $q_2(s)$ para $s = \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$. Notemos que por (2.44),

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} q_2(\xi) = h^2 \operatorname{senh}(\alpha h) - \operatorname{sen}^2(\omega h) \frac{h^2}{2tgh(\alpha h)}. \quad (2.50)$$

Para mostrar que $q_2(\xi) > 0$ para $\xi \geq 0$, é suficiente mostrarmos que $q_2(0) > 0$ e q_2 é crescente para $\xi \geq 0$. Então apresentaremos os seguintes lemas.

Lema 14 *A função $q_2(\xi)$ satisfaz $q_2(0) > 0$.*

Demonstração. De (2.50) segue que

$$q_2(0) = \frac{h^2}{\sinh(\alpha h)} \left(\sinh^2(\alpha h) - \frac{\sin^2(\omega h) \cosh(\alpha h)}{2} \right).$$

As fórmulas do ângulo duplo e a equação (2.30) nos fornece

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha h) &= 1 + 2\sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right), \\ \sinh^2(\alpha h) &= \left(2\sinh\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\cosh\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\right)^2 = 4\sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\left(1 + \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\right), \\ \sin^2(\omega h) &= \left(2\sin\left(\frac{\omega h}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega h}{2}\right)\right)^2 \stackrel{(2.30)}{=} 4\sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\left(1 - \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Após alguns cálculos,

$$q_2(0) = \frac{2h^2\sinh^2(\alpha h/2)}{\sinh(\alpha h)} \left[1 + \sinh^2\left(\frac{\alpha h}{2}\right) + 2\sinh^4\left(\frac{\alpha h}{2}\right) \right].$$

Como todos os termos são positivos, $q_2(0) > 0$, que prova o lema. ■

Um exemplo da função $q_2(\xi)$ é mostrado na figura 2.3.

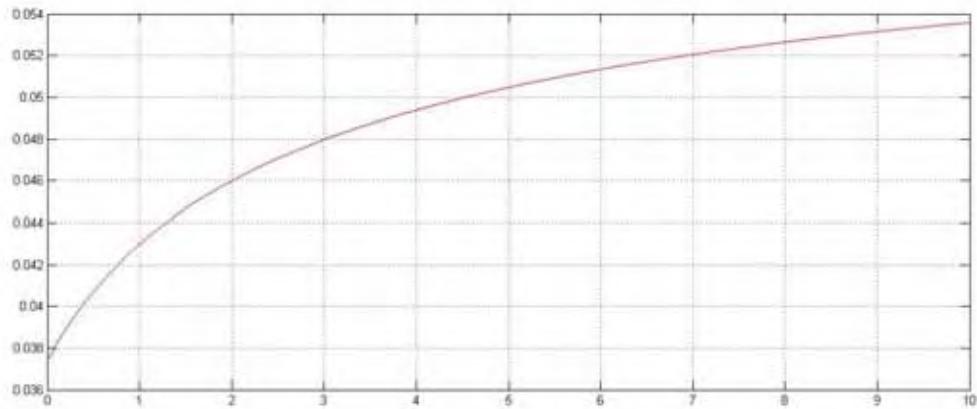


Figura 2.3: A função $q_2(s)$ para valores reais ξ no caso de $n = 15$, $\omega = 1$.

Temos que $q'_2(\xi) = -\sin^2(\omega h)q'(\xi)$, assim $q'_2(\xi)$ é positivo se $q'(\xi)$ é negativo.

Lema 15 A função $q(\xi)$ satisfaz $q'(\xi) < 0$ para $\xi \geq 0$.

Demonstração. De (2.48),

$$\begin{aligned} q(\xi) &= -\frac{2}{\xi} \sin(\omega h/2) \sqrt{1 + \sin^2(\omega h/2)} \\ &\quad + 2\sqrt{\frac{h^4}{16} + \frac{h^2}{4\xi} (1 + 2\sin^2(\omega h/2)) + \frac{1}{\xi^2} \sin^2(\omega h/2) (1 + \sin^2(\omega h/2))}. \end{aligned}$$

Assim a derivada de q pode ser escrita como

$$q'(\xi) = \frac{-I_1(\xi) + I_2(\xi)}{N(\xi)},$$

onde

$$\begin{aligned} I_1(\xi) &= \frac{h^2}{4\xi^2}(1 + 2\operatorname{sen}^2(\omega h/2)) + \frac{2}{\xi^3}\operatorname{sen}^2(\omega h/2)(1 + \operatorname{sen}^2(\omega h/2)), \\ I_2(\xi) &= \frac{2}{\xi^2}\operatorname{sen}(\omega h/2)\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(\omega h/2)}N(\xi), \\ N(\xi) &= \sqrt{\frac{h^4}{16} + \frac{h^2}{4\xi}(1 + 2\operatorname{sen}^2(\omega h/2)) + \frac{1}{\xi^2}\operatorname{sen}^2(\omega h/2)(1 + \operatorname{sen}^2(\omega h/2))}. \end{aligned}$$

Depois de alguns cálculos,

$$I_1^2(\xi) - I_2^2(\xi) = \frac{h^4}{16\xi^4} > 0,$$

e conseqüentemente, $I_1^2(\xi) > I_2^2(\xi)$. Como $I_1(\xi) > 0$ e $I_2(\xi) > 0$ para $\xi > 0$, então $I_1(\xi) > I_2(\xi)$. Lembrando que $N(\xi) > 0$, $\xi > 0$, segue que $q'(\xi) = (-I_1(\xi) + I_2(\xi))/N(\xi) < 0$ para $\xi > 0$. Fazendo uma expansão em série de Taylor de $q'(\xi)$ em torno de $\xi = 0$, podemos ver que $q'(0)$ é limitado e que $q'(0) < 0$. Isto prova o teorema. ■

Provamos que $q_2(0) > 0$ e que $q'_2(\xi) > 0$ para $\xi \geq 0$. Assim, se $q_2(\xi) > 0$ para $\xi \geq 0$, e usando o lema 12 concluímos que não há nenhuma solução não trivial de (2.46) com $\operatorname{Re}(s) \geq 0$. Não há pois restrição de estabilidade. Conseqüentemente, o sistema (2.26) com a condição de contorno $D_0^y \hat{p}(\omega, 0, s) = -\frac{i}{\Delta x} \operatorname{sen}(\omega h) D_0^y \hat{u}(\omega, 0, s)$ não tem nenhum autovalor em $\operatorname{Re}(s) \geq 0$.

2.3 O Caso Completamente Discreto

Utilizaremos Euler atrasado para discretizar as derivadas temporais do problema de Stokes (2.18) estudado na seção anterior, e assim obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + D_0^x p^{n+1} &= D_+^x D_-^x u^{n+1} + D_+^y D_-^y u^{n+1} + f^{(x)}, \\ \frac{v^{n+1} - v^n}{\Delta t} + D_0^y p^{n+1} &= D_+^x D_-^x v^{n+1} + D_+^y D_-^y v^{n+1} + f^{(y)}, \\ D_+^x D_-^x p^{n+1} + D_+^y D_-^y p^{n+1} &= f^{(p)}, \\ \mathbf{u}^n(x, 0) &= 0, \\ \mathbf{u}^0(x, y) &= 0, \\ p^0(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{2.51}$$

O sobrescrito n corresponde ao nível de tempo $t_n = n\Delta t$. Como anteriormente, necessitamos de uma condição de contorno adicional para a pressão e as três alternativas já consideradas tornam-se

1. A condição Acoplada: $D_0^y v^n = 0$.
2. A condição Div-Grad: $D_0^y p^{n+1} = \frac{2}{h} D_+^y v^n$. Note que a velocidade é deixada no tempo n a fim de calcular a pressão no tempo $n+1$ e assim utilizá-la para calcular as velocidades em (2.51).
3. A condição Rotacional: $D_0^y p^{n+1} = -D_0^x D_0^y u^n$. Note outra vez que a velocidade é deixada no tempo n pelo mesmo motivo já referido.

Para analisar a estabilidade faremos a seguinte consideração

$$\begin{pmatrix} u^n \\ v^n \\ p^n \end{pmatrix} = \kappa^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Aplicando a transformada de Fourier da solução na direção x , após considerar o termo forçante como sendo zero, e substituindo a solução da forma (2.52) adquirimos o problema de autovalor

$$\begin{aligned} \frac{\kappa-1}{\kappa\Delta t} \hat{u} + \frac{i}{h} \text{sen}(\omega h) \hat{p} &= -\frac{4}{h^2} \text{sen}^2(\omega h/2) \hat{u} + D_+^y D_-^y \hat{u}, \\ \frac{\kappa-1}{\kappa\Delta t} \hat{v} + D_0^y \hat{p} &= -\frac{4}{h^2} \text{sen}^2(\omega h/2) \hat{v} + D_+^y D_-^y \hat{v}, \\ -\frac{4}{h^2} \text{sen}^2(\omega h/2) \hat{p} + D_+^y D_-^y \hat{p} &= 0, \\ \hat{\mathbf{u}}(\omega, 0, \kappa) &= 0, \\ A^{(q)} \kappa D_0^y \hat{p}(\omega, 0, \kappa) &= \hat{B}^{(q)} \hat{\mathbf{u}}(\omega, 0, \kappa), \quad q = 1, 2, \text{ ou } 3. \end{aligned} \quad (2.53)$$

O κ é chamado de autovalor se houver uma solução não trivial de (2.53) com norma L_2 limitada. A condição de Godunov-Ryabenkii estabelece que a solução de (2.51) é instável se houver um autovalor κ de (2.53) onde $|\kappa| > 1$. Novamente, ausência dos autovalores com $|\kappa| > 1$ é somente uma condição necessária para a estabilidade.

Aqui, verificaremos somente se existem autovalores de (2.53) com $|\kappa| \geq 1$.

Note que fazendo $s = (\kappa - 1)/(\kappa\Delta t)$ em (2.53), obtemos o problema semidiscreto (2.26) analisado na seção anterior. Portanto, por (2.31), as soluções $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{p}$ das primeiras quatro equações em (2.53) são conseqüentemente

$$\hat{u}(y) = -\frac{iP \text{sen}(\omega h)}{h} \frac{\kappa\Delta t}{\kappa-1} (e^{-\alpha y} - e^{-\beta y}), \quad (2.54a)$$

$$\hat{v}(y) = \frac{P \text{senh}(\alpha h)}{h} \frac{\kappa\Delta t}{\kappa-1} (e^{-\alpha y} - e^{-\beta y}), \quad (2.54b)$$

$$\hat{p}(y) = P e^{-\alpha y}. \quad (2.54c)$$

Como no caso semidiscreto, o coeficiente P deve ser determinado pela condição de contorno para a pressão, que neste caso está na última expressão da equação (2.53).

Como $\kappa = 1/(1 - s\Delta t)$, $|\kappa| > 1$ corresponde a $|s\Delta t - 1| < 1$, temos o interior de um círculo unitário no plano complexo $s\Delta t$, centrado em $s\Delta t = 1$.

O passo temporal $\Delta t > 0$ pode ser arbitrariamente pequeno, assim para certificar-se de que não há nenhum autovalor em $|\kappa| \geq 1$ para qualquer Δt é necessário considerar $\text{Re}(s) > 0$ e $s = 0$.

2.3.1 Condição Acoplada

O caso aqui é basicamente o mesmo do semidiscreto. Assim, não há nenhum autovalor de (2.53) onde $|\kappa| \geq 1$ para $\Delta t > 0$. Ou seja, nesse caso o problema satisfaz a condição de Godunov-Ryabenkii para todo Δt .

2.3.2 Condição Div-Grad

Utilizando a definição (2.52) na condição de contorno $D_0^y p^{n+1} = \frac{2}{h} D_+^y v^n$ obtemos $\kappa D_0^y \hat{p}(0) = \frac{2}{\Delta x} D_+^y \hat{v}(0)$. Analogamente ao caso semidiscreto temos que

$$P \frac{\sinh(\alpha h)}{h} \left(\frac{1}{1 - s\Delta t} + \frac{2(e^{-\alpha h} - e^{-\beta h})}{h^2 s} \right) = 0.$$

Deste modo, existem soluções não triviais se

$$q_3(s) = \frac{h^2}{1 - s\Delta t} + \frac{2(e^{-\alpha h} - e^{-\beta h})}{s} \quad (2.55)$$

torna-se zero, pois caso contrário P deve ser nulo e teremos a solução trivial. O caso $n = 15$, $\omega = 1$ é mostrado na figura 2.4 e significa que a condição de contorno torna o esquema instável para certo Δt , pois, por exemplo, q_3 é ilimitado em $s = 0.5$ e possui um zero para $0.5 < s < 1$. Isto significa que $|\kappa| > 1$, de modo que conduz a uma instabilidade.

Agora devemos estudar $q_3(\xi)$ para $\xi \geq 0$.

Sabemos que $e^x = \sinh x + \cosh x$ e $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ e assim obtemos $e^x = \sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x}$, donde, $x = \ln(\sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x})$. Visto que $\sinh^{-1}(\sinh x) = x$, então $\sinh^{-1}(\sinh x) = \ln(\sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x})$ e portanto temos a identidade

$$\sinh^{-1}(\eta) = \log \left(\eta + \sqrt{\eta^2 + 1} \right). \quad (2.56)$$

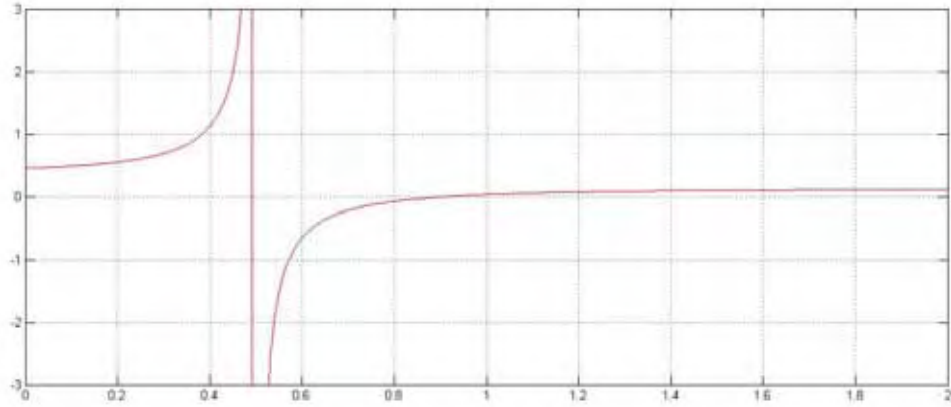


Figura 2.4: A função $q_3(s)$ para o valor real s no caso $n = 15$, $\omega = 1$, e $\Delta t = 2$.

Essa identidade é importante para calcular $e^{-\beta h}$ e $e^{-\alpha h}$. De (2.30) segue que $\alpha = \frac{2}{h} \sinh^{-1} \left(\sin \left(\frac{\omega h}{2} \right) \right)$ e utilizando (2.56) temos que

$$e^{-\alpha h} = \frac{1}{\left(\sin \left(\frac{\omega h}{2} \right) + \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\omega h}{2} \right) + 1} \right)^2}. \quad (2.57)$$

Por outro lado, de (2.32) podemos afirmar que $\beta = \frac{2}{h} \sinh^{-1} \left(\sqrt{\frac{h^2 s}{4} + \sin^2 \left(\frac{\omega h}{2} \right)} \right)$ e assim utilizando a identidade (2.56) obtemos

$$e^{-\beta h} = \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{h^2 s}{4} + \sin^2 \left(\frac{\omega h}{2} \right)} + \sqrt{\frac{h^2 s}{4} + \sin^2 \left(\frac{\omega h}{2} \right) + 1} \right)^2}. \quad (2.58)$$

Portanto,

$$q_3(\xi) = \frac{h^2}{1 - \xi \Delta t} + \frac{2}{\xi} \left(\frac{1}{\left(\sin(\omega h/2) + \sqrt{1 + \sin^2(\omega h/2)} \right)} - \frac{1}{\left(\sqrt{h^2 \xi/4 + \sin^2(\omega h/2)} + \sqrt{h^2 \xi/4 + \sin^2(\omega h/2) + 1} \right)^2} \right).$$

Para analisar q_3 vamos simplificar a expressão da seguinte forma:

$$q_3(\xi) = \frac{h^2}{1 - \xi \Delta t} + \frac{2}{\xi} \left(\frac{1}{(c_1 + \sqrt{c_2})^2} - \frac{1}{(\sqrt{c_3 + c_1^2} + \sqrt{c_3 + c_2})^2} \right). \quad (2.59)$$

onde $c_1 = \text{sen}(\omega h/2)$, $c_2 = 1 + \text{sen}^2(\omega h/2)$, $c_3 = h^2\xi/4$. Além disso note que para $\xi > 0$ temos que:

$$\frac{1}{(c_1 + \sqrt{c_2})^2} > \frac{1}{\left(\sqrt{c_3 + c_1^2} + \sqrt{c_3 + c_2}\right)^2}. \quad (2.60)$$

Vamos dividir a análise em três partes:

- $0 < \xi < 1/\Delta t$. É fácil notar que $q_3(\xi)$ é positivo, pois $1 - \xi\Delta t > 0$.
- $\xi = 1/\Delta t$. Agora q_3 tem um pólo, pois

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{1}{\Delta t}^-} q_3(\xi) &= \infty \\ \lim_{\xi \rightarrow \frac{1}{\Delta t}^+} q_3(\xi) &= -\infty \end{aligned}$$

e assim q_3 torna-se negativo para $1/\Delta t < \xi \leq 1/\Delta t + \epsilon$, $0 < \epsilon \ll 1$.

- ξ grande. Neste caso, consideramos $1 - \xi\Delta t \sim -\xi\Delta t$, então

$$1/\left(\sqrt{h^2\xi/4 + \text{sen}^2(\omega h/2)} + \sqrt{h^2\xi/4 + \text{sen}^2(\omega h/2) + 1}\right)^2 \sim 0$$

e assim

$$q_3(\xi) \sim \frac{1}{\xi} \left(-\frac{h^2}{\Delta t} + \frac{2}{\left(\text{sen}(\omega h/2) + \sqrt{1 + \text{sen}^2(\omega h/2)}\right)^2} \right), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Portanto q_3 é positivo para ξ grande se

$$\frac{h^2}{\Delta t} < \frac{2}{\left(\text{sen}(\omega h/2) + \sqrt{1 + \text{sen}^2(\omega h/2)}\right)^2},$$

que é equivalente a

$$\Delta t > \frac{h^2}{2} \left(\text{sen}(\omega h/2) + \sqrt{1 + \text{sen}^2(\omega h/2)} \right)^2 \geq \frac{h^2}{2}. \quad (2.61)$$

Visto que q_3 não possui pólos para $\xi > 1/\Delta t$, e q_3 muda de sinal quando o passo temporal satisfaz (2.61), então q_3 deve ter ao menos um zero para $\xi > 1/\Delta t$.

Lema 16 *Existe ao menos um zero de $q_3(s)$ em $\text{Re}(s) \geq 0$ se o passo temporal satisfaz (2.61)*

A demonstração disso segue as contas realizadas anteriormente para a obtenção da condição (2.61). Se $\Delta t \leq h^2/2$ então q_3 não possui nenhum valor real nulo. Aumentando

Δt tal que

$$\frac{h^2}{2} \left(\text{sen}(h/2) + \sqrt{1 + \text{sen}^2(h/2)} \right) < \Delta t < \frac{h^2}{2} \left(\text{sen}(2h/2) + \sqrt{1 + \text{sen}^2(2h/2)} \right)^2 \geq \frac{h^2}{2}$$

o zero ocorre somente para $\omega = 1$, que significa instabilidade para o menor modo de Fourier.

Na prática, segundo Peterson [21] a limitação do passo temporal é similar ao caso de um esquema explícito, que se torna insstável pelo efeito da condição de contorno $D_0^y p^{n+1} = \frac{2}{h} D_+^y v^n$.

2.3.3 Condição Rotacional

Utilizando a equação (2.52), a transformada de Fourier na direção x e a velocidade atrasada na condição de contorno $D_0^y p^{n+1} = -D_0^x D_0^y u^n$ teremos $\kappa D_0^y \hat{p}(0) = -\frac{i}{h} \text{sen}(\omega h) D_0^y \hat{u}(0)$. Substituindo as soluções dada em (2.54), a equação para P torna-se

$$P \left(\frac{\kappa \text{senh}(\alpha h)}{h} - \frac{\text{sen}^2(\omega h)}{h^2 s} \left(\frac{\text{senh}(\beta h)}{h} - \frac{\text{senh}(\alpha h)}{h} \right) \right) = 0,$$

que utilizando o fato de $\kappa = 1/(1 - s\Delta t)$ se torna equivalente a

$$P \left(\frac{\text{senh}(\alpha h)}{h(1 - s\Delta t)} - \frac{\text{sen}^2(\omega h)}{h^2 s} \left(\frac{\text{senh}(\beta h)}{h} - \frac{\text{senh}(\alpha h)}{h} \right) \right) = 0, \quad (2.62)$$

Para $\omega = 0$ temos $\alpha = 0$ e assim a equação (2.62) possui soluções não triviais, ou seja, temos uma constante indeterminada na pressão. Isto é removido impondo a média da pressão como sendo zero. Assim, para $\omega > 0$, vamos considerar

$$q_4(s) = \frac{h^2 \text{senh}(\alpha h)}{1 - s\Delta t} - \text{sen}^2(\omega h) q(s). \quad (2.63)$$

no qual (2.62) se equivale a $\frac{P}{h^3} q_4(s) = 0$.

Lema 17 *A função $q_4(s)$ satisfaz $\text{Im}(q_4(s)) = 0$ se e somente se $\text{Im}(s) = 0$.*

Note que para provar o lema basta mostrar que $\text{Im } s \neq 0$ equivale a $\text{Im}(q_4(s)) \neq 0$.

Demonstração. Sabendo que

$$\frac{h^2 \text{senh}(\alpha h)}{1 - s\Delta t} \stackrel{\text{conjugado}}{=} (1 + s\Delta t) \frac{h^2 \text{senh}(\alpha h)}{|1 - s\Delta t|^2}$$

segue de (2.63) que

$$\operatorname{Im}(q_4(s)) = \operatorname{Im}(s) \frac{h^2 \Delta t \operatorname{senh}(\alpha h)}{|1 - s \Delta t|^2} - \operatorname{sen}^2(\omega h) \operatorname{Im}(q(s)).$$

Para $\operatorname{Im}(s) > 0$, o primeiro termo é positivo, e pelo lema 13, o segundo termo também. Agora para $\operatorname{Im}(s) < 0$, ambos termos são negativo. Portanto temos provado o lema. ■

Prosseguimos estudando $q_4(s)$ para valor real $s = \xi$, $\operatorname{Im}(s) = 0$. Para isso vamos analisar três casos:

- $0 \leq \xi < 1/\Delta t$. Deste modo, $1/(1 - \xi \Delta t)$ e da equação (2.47) e da propriedade particular desta função q_2 ser positiva para $\xi > 0$ (provado nos lemas 14 e 15), adquirimos

$$q_4(\xi) \geq q_2(\xi) > 0, \quad 0 \leq \xi < \frac{1}{\Delta t}.$$

- $\xi > 1/\Delta t$. Neste caso temos que $1 - \xi \Delta t < 0$ e de (2.48) é fácil notar que para $\omega > 0$ temos $q(s) > 0$. Logo ambos os termos em q_4 são negativos, assim

$$q_4(\xi) < 0, \quad \xi > \frac{1}{\Delta t}.$$

- $\xi = 1/\Delta t$. Neste caso q_4 torna-se ilimitada. Isto pode ser visto calculando os limites laterais, dados por

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \frac{1}{\Delta t}^-} q_4(\xi) &= \infty \\ \lim_{\xi \rightarrow \frac{1}{\Delta t}^+} q_4(\xi) &= -\infty \end{aligned}$$

que pode ser facilmente calculado utilizando a expressão $q(s)$ dada por (2.48).

Assim concluímos que $q_4(\xi) \neq 0$ para $\xi \geq 0$.

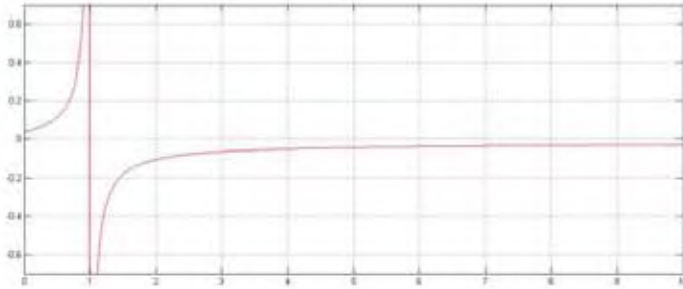


Figura 2.5: A função $q_4(\xi)$ para valor real no caso $n = 15$, $\omega = 1$, e $\Delta t = 1$.

Apresentamos um exemplo de $q_4(\xi)$ na figura 2.5. Note que existe um pólo em $\xi = 1$, onde q_4 se torna ilimitada. Assim, não existe nenhuma solução não trivial de (2.62) com $\text{Re}(s) \geq 0$. Portanto, não existem autovalores de (2.53) onde $|\kappa| \geq 1$ para $\Delta t > 0$ então a condição de contorno $D_0^y \kappa \hat{p}(\omega, 0, \kappa) = -\frac{i}{\Delta x} \text{sen}(\omega h) D_0^y \kappa \hat{u}(\omega, 0, \kappa)$ pode ser usada sem nenhuma restrição.

2.4 Computação Numérica do Fator de Amplificação

Agora vamos calcular numericamente os fatores de amplificação para as equações de Stokes discretizada por Euler atrasado no tempo.

Consideramos um domínio retangular $\Omega : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1$, onde a solução seja 2π -periódica na direção x , com condição de contorno "no-slip" em $y = 0$ e $y = 1$. A malha computacional é dada por $x_j = (j-1)h, \Delta x = 2\pi/N, 1 \leq j \leq N$, e $y_k = (k-1)\Delta y, \Delta y = 1/(M-1), 0 \leq k \leq M+1$. As linhas da malha $k = 0$ e $k = M+1$ fora das condições de contorno "no-slip" são usadas para ajudar a discretizar as condições de contorno. Aqui, as condições de contorno serão usadas para resolver um problema de autovalor correspondente a (2.53), assim eles serão expressos em variáveis transformadas $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$.

As equações do momento são consideradas em todos os pontos interiores $2 \leq h \leq M-1$ e as condições de contorno "no-slip" em $k = 1$ e $k = M$. A equação da pressão será aplicada em todos os pontos interiores e nos contornos: $1 \leq k \leq M$. Portanto, para adquirir o número das equações igual ao número de incógnitas desconhecidas, necessitaremos de três equações adicionais em cada contorno. Desse modo, iremos introduzir uma equação que será a extrapolação de u nos pontos fantasma. Usando uma extrapolação de quarta ordem, os valores nos pontos fantasma terão quarta ordem, assim as derivadas primeira e segunda podem ser aproximadas com segunda e terceira ordem de precisão, respectivamente. Estas derivadas são usadas na equação pressão e condição de contorno para a pressão.

No contorno $y = 0$ usaremos as seguintes condições de contorno:

1. **Condição de Contorno Acoplada.** Nesta condição consideramos a extrapolação de u de quarta-ordem, a condição de contorno Acoplada (2.7) e a equação momento v (2.53) multiplicada por κ no contorno não escorregadio ("no-slip") e assim obtemos:

$$\begin{cases} (D_+^y)^4 \hat{u}_{j,0} = 0, & \text{Extrapolação de } u \\ D_0^y \hat{v}_{j,1} = 0, & \text{Condição de contorno Acoplada} \\ D_0^y \kappa \hat{p}_{j,1} = D_+^y D_-^y \kappa \hat{v}_{j,1} & \text{Equação momento } v \text{ no contorno não escorregadio.} \end{cases} \quad (2.64)$$

Note que o valor de $\hat{u}$ no ponto fantasma não está sendo usado por nenhuma outra equação.

2. **Condição de Contorno Div-Grad.** Considerando a extrapolação de u de quarta-ordem e a condição de contorno Div-Grad (2.14) nos fornece:

$$\begin{cases} (D_+^y)^4 \hat{u}_{j,0} = 0, & \text{Extrapolação de } u \\ D_0^y \hat{v}_{j,1} = 0, & \text{Condição do divergente nulo} \\ D_0^y \kappa \hat{p}_{j,1} = D_+^y D_-^y \hat{v}_{j,1} & \text{Condição do contorno Div-Grad.} \end{cases} \quad (2.65)$$

Note que a única diferença comparada à condição Acoplada é a ausência do fator κ no lado direito da última equação. Na condição Div-Grad aparece esse κ pois como dissemos na seção 2.3 as velocidades são congeladas com relação a pressão.

3. **Condição de Contorno Rotacional.** Neste caso extrapolamos u e v e

$$\begin{cases} (D_+^y)^4 \hat{u}_{j,0} = 0, & \text{Extrapolação de } u \\ (D_+^y)^4 \hat{v}_{j,0} = 0, & \text{Extrapolação de } v \\ D_0^y \kappa \hat{p}_{j,1} = -\frac{i}{h} \text{sen}(\omega h) D_0^y \hat{u}_{j,1} & \text{Condição de contorno Rotacional.} \end{cases} \quad (2.66)$$

Note que o valor de $\hat{v}$ no ponto fantasma não está sendo usado por nenhuma outra equação.

Relações correspondentes são impostas no contorno $y = 1$, ou seja, nos índices da direção y (índices k), os $k = 0$ e $k = 1$ são substituídos respectivamente por $k = M + 1$ e $k = M$. Note que $k = 0$ e $k = M + 1$ são pontos fantasmas, e desse modo a extrapolação de u e v utilizadas no contorno $y = 1$ devem ser em direção contrária a realizada no contorno $y = 0$. Isto é feito substituindo a derivada avançada $(D_+^y)^4$ pela atrasada $(D_-^y)^4$.

Lembrando que em todas condições mencionadas foram usados a solução da forma (2.52) e a transformada de Fourier na direção x .

2.4.1 A Discretização Implícita das Equações de Stokes

Consideramos o problema de autovalor (2.53) da Seção 2.3, mas em uma canal de domínio periódico com uma das condições de contorno (2.64), (2.65) ou (2.66). Por conveniência computacional, multiplicamos por κ o problema (2.53) e introduzimos uma variável nova $\hat{q} = \kappa \hat{p}$ e fazendo $\lambda = (\kappa - 1)/\Delta t$ resolvemos o problema para $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{q})$. Dessa forma, adquirimos o problema de autovalor generalizado

$$\lambda \hat{u} - \lambda \Delta t L_h \hat{u} = -\frac{i}{h} \text{sen}(\omega h) \hat{q} + L_h \hat{u}, \quad 2 \leq k \leq M - 1, \quad (2.67a)$$

$$\lambda \hat{v} - \lambda \Delta t L_h \hat{v} = -D_0^y \hat{q} + L_h \hat{v}, \quad 2 \leq k \leq M - 1, \quad (2.67b)$$

$$L_h \hat{q} = 0, \quad 1 \leq k \leq M, \quad (2.67c)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{j,k} = 0, \quad k = 1, M, \quad (2.67d)$$

onde o L_h é a discretização, transformada de Fourier, do operador de Laplace:

$$L_{\Delta x} \hat{u} = -\frac{4}{\Delta x^2} \text{sen}^2(\omega \Delta x / 2) \hat{u} + D_+^y D_-^y \hat{u}.$$

Além disso, as autofunções são sujeitas a uma das condições de contorno (2.64), (2.65), ou (2.66). Na forma matricial, o problema de autovalor pode ser escrito como

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{M+1}, \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{M+1}, \hat{q}_0, \dots, \hat{q}_{M+1})^T.$$

Note que o vetor $\mathbf{x}$ possui somente os índices da direção y , pois na direção x é aplicado a transformada de Fourier. Para obtermos a estrutura das matrizes A e B vamos discretizar as condições de contorno e o problema de autovalor (2.67)

O sistema (2.67) discretizado torna-se

$$\begin{aligned} c\hat{u}_{k-1} + d\hat{u}_k + c\hat{q}_{k+1} + e\hat{q}_k &= \lambda [a\hat{u}_{k-1} + b\hat{u}_k + a\hat{u}_{k+1}], & 2 \leq k \leq M-1, \\ c\hat{v}_{k-1} + d\hat{u}_k + c\hat{q}_{k+1} + f\hat{q}_{k-1} - f\hat{q}_{k+1} &= \lambda [a\hat{v}_{k-1} + b\hat{u}_k + a\hat{u}_{k+1}], & 2 \leq k \leq M-1, \\ c\hat{q}_{k-1} + d\hat{q}_k + c\hat{q}_{k+1} &= 0, & 1 \leq k \leq M, \\ \hat{u}_1 = 0, \quad \hat{u}_M = 0, \quad \hat{v}_1 = 0, \quad \hat{v}_M = 0. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tau_y &= \frac{\Delta t}{\Delta y^2}, \\ \tau_x &= \frac{\Delta t}{\Delta x^2}, \\ a &= -\tau_y, \\ b &= 1 + 2\tau_y + 4\tau_x \text{sen}^2\left(\frac{\omega \Delta x}{2}\right), \\ c &= \frac{1}{\Delta y^2}, \\ d &= -\frac{4}{\Delta x^2} \text{sen}^2\left(\frac{\omega \Delta x}{2}\right) - 2c, \\ e &= -\frac{i}{\Delta x} \text{sen}(\omega \Delta x) \quad (i = \sqrt{-1}), \\ f &= \frac{1}{2\Delta y}. \end{aligned}$$

Agora discretizando a condição de contorno Acoplada (2.64) obtemos

$$\begin{aligned} \hat{u}_0 - 4\hat{u}_1 + 6\hat{u}_2 - 4\hat{u}_3 + \hat{u}_4 &= 0 \\ -\hat{v}_0 + \hat{v}_2 &= 0, \\ -2\hat{v}_0 + 4\hat{v}_1 - 2\hat{v}_2 - \Delta y \hat{q}_0 + \Delta y \hat{q}_2 &= \lambda (2\Delta t \hat{v}_0 - 4\Delta t \hat{v}_1 + 2\Delta t \hat{v}_2), \end{aligned}$$

e em $y = 1$ ($k = M$) temos

$$\begin{aligned} \hat{u}_{M-3} - 4\hat{u}_{M-2} + 6\hat{u}_{M-1} - 4\hat{u}_M + \hat{u}_{M+1} &= 0 \\ -\hat{v}_{M-1} + \hat{v}_{M+1} &= 0, \\ -2\hat{v}_{M-1} + 4\hat{v}_M - 2\hat{v}_{M+1} - \Delta y \hat{q}_{M-1} + \Delta y \hat{q}_{M+1} &= \lambda (2\Delta t \hat{v}_{M-1} - 4\Delta t \hat{v}_M + 2\Delta t \hat{v}_{M+1}), \end{aligned}$$

Assim obtemos o seguinte problema de autovalor generalizado com condição de contorno Acoplada:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_0 - 4\hat{u}_1 + 6\hat{u}_2 - 4\hat{u}_3 + \hat{u}_4 = 0 \\ \hat{u}_1 = 0 \\ c\hat{u}_{k-1} + d\hat{u}_k + c\hat{q}_{k+1} + e\hat{q}_k = \lambda [a\hat{u}_{k-1} + b\hat{u}_k + a\hat{u}_{k+1}], \quad 2 \leq k \leq M-1, \\ \hat{u}_M = 0 \\ \hat{u}_{M-3} - 4\hat{u}_{M-2} + 6\hat{u}_{M-1} - 4\hat{u}_M + \hat{u}_{M+1} = 0 \\ -\hat{v}_0 + \hat{v}_2 = 0, \\ \hat{v}_1 = 0 \\ c\hat{v}_{k-1} + d\hat{u}_k + c\hat{q}_{k+1} + f\hat{q}_{k-1} - f\hat{q}_{k+1} = \lambda [a\hat{v}_{k-1} + b\hat{u}_k + a\hat{u}_{k+1}], \quad 2 \leq k \leq M-1, \\ \hat{v}_M = 0, \\ -\hat{v}_{M-1} + \hat{v}_{M+1} = 0, \\ -2\hat{v}_0 + 4\hat{v}_1 - 2\hat{v}_2 - \Delta y \hat{q}_0 + \Delta y \hat{q}_2 = \lambda (2\Delta t \hat{v}_0 - 4\Delta t \hat{v}_1 + 2\Delta t \hat{v}_2), \\ c\hat{q}_{k-1} + d\hat{q}_k + c\hat{q}_{k+1} = 0, \quad 1 \leq k \leq M, \\ -2\hat{v}_{M-1} + 4\hat{v}_M - 2\hat{v}_{M+1} - \Delta y \hat{q}_{M-1} + \Delta y \hat{q}_{M+1} = \lambda (2\Delta t \hat{v}_{M-1} - 4\Delta t \hat{v}_M + 2\Delta t \hat{v}_{M+1}), \end{array} \right.$$

Matricialmente o problema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{M+1}, \hat{v}_0, \dots, \hat{v}_{M+1}, \hat{q}_0, \dots, \hat{q}_{M+1})^T. \quad (2.68)$$

sendo as matrizes A e B da forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O & A_2 \\ O & A_3 & A_4 \\ O & A_5 & A_6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & O & O \\ O & B_1 & O \\ O & B_2 & O \end{pmatrix},$$

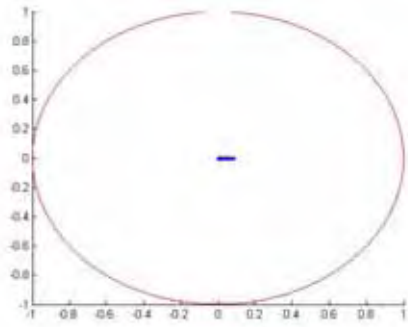
onde

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & 1 & & & \\ & c & d & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & d & c \\ & & & & 1 & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & e & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ & 1 & & & \\ & c & d & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & c & d & c \\ & & & & 1 & \\ & & & & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & f & 0 & -f & \\ & & \ddots & & \\ & & & f & 0 & -f \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \\
 A_5 &= \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -\Delta y & 0 & \Delta y \\ c & d & c \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & c & d & c \\ & & -\Delta y & 0 & \Delta y \end{pmatrix}, \\
 B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ & a & b & a \\ & & \ddots & \\ & & a & b & a \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2\Delta t & -4\Delta t & 2\Delta t \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 2\Delta t & -4\Delta t & 2\Delta t \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

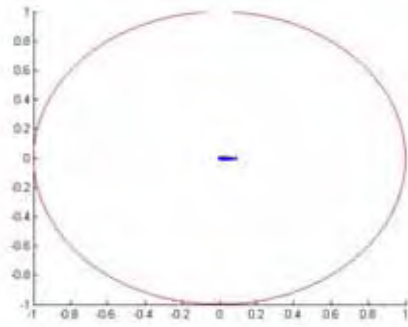
sendo O uma matriz nula. Além disso, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, B_1, B_2$ e O são matrizes $M+2 \times M+2$, e assim A e B são matrizes $3(M+2) \times 3(M+2)$. A forma do sistema (2.68) para as condições de contorno Div-Grad e Rotacional são obtidas de forma semelhante.

Resolvemos o problema de autovalores generalizado (2.68) para $1 \leq \omega \leq N-1$ usando o algoritmo-QZ no Matlab (para $\omega = 0$, o problema torna-se singular devido à constante indeterminada na pressão). Os fatores de amplificação $\kappa = 1 + \lambda\Delta t$ quando usamos a

condição Acoplada são mostrados na figura 2.6. O caso em que a condição Div-Grad (2.65) é aplicada é apresentado em figura 2.7. Finalmente, o caso em que a condição Rotacional (2.66) é usada é mostrada pela figura 2.8.

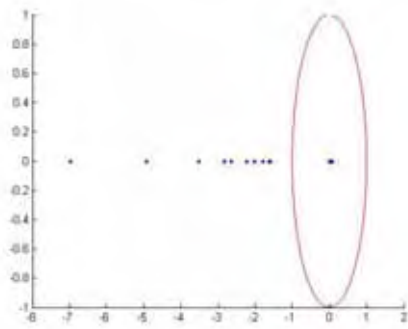


(a) $N = 10$ e $M = 11$

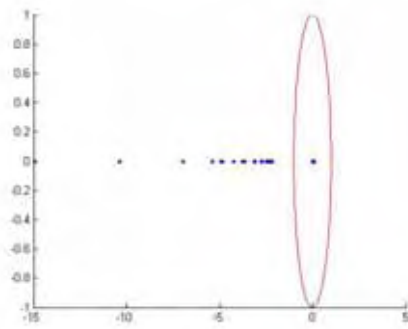


(b) $N = 20$ e $M = 21$

Figura 2.6: Os fatores de amplificação para a condição Acoplada.

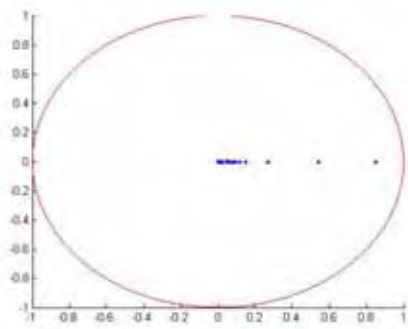


(a) $N = 10$ e $M = 11$

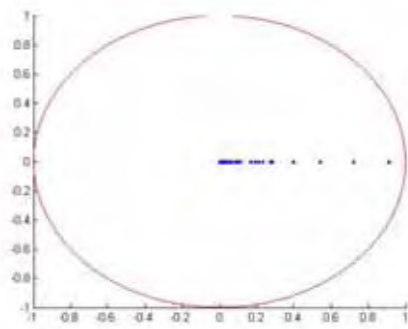


(b) $N = 20$ e $M = 21$

Figura 2.7: Os fatores de amplificação para a condição Div-Grad.



(a) $N = 10$ e $M = 11$



(b) $N = 20$ e $M = 21$

Figura 2.8: Os fatores de amplificação para a condição Rotacional.

De acordo com a análise na seção 2.3, estas computações indicam que a condição do Div-Grad (2.65) conduz a uma discretização instável (para o passo temporal $\Delta t = 1$),

enquanto que a condição Acoplada (2.64) e a condição Rotacional (2.66) ambas conduzem a discretizações estáveis.

Considerações Finais

A propriedade de estabilidade das três diferentes condições de contorno para a pressão nas paredes "*no-slip*" foram estudadas em detalhes. Primeiro, usamos a técnica de análise a modo-normal para análise da discretização das equações de Stokes por diferenças centrais no espaço e por Euler atrasado no tempo. Foi mostrado que a condição Div-Grad é instável para passo temporal $\Delta t > Ch^2$, onde h é o espaçamento da malha e C é uma constante. Para a condição Rotacional e condição Acoplada, mostramos que condição de estabilidade de Godunov-Ryabenkii necessária é satisfeita para todo $\Delta t > 0$.

Para um domínio constituído de um canal periódico com dois contornos "*no-slip*", executamos a computação numérica dos fatores de amplificação. Para as equações de Stokes, confirmamos resultados analíticos para o esquema de Euler atrasado.

De acordo com a análise e a computação do fator de amplificação, a condição Div-Grad somente é estável para o passo temporal $\Delta t \leq Ch^2$. Ao contrário, a condição Rotacional e a de Neumann homogênea são estáveis pelo passo temporal indicado pela análise de von Neumann baseada somente nos termos convectivos.

Como trabalhos futuros que podem seguir exatamente o que foi feito, mas certamente será bem mais trabalhoso, poder-se-a considerar a discretização mista Euler avançado/atrasado para as equações de Navier-Stokes linearizada. Neste caso, o termo convectivo é tratado explicitamente enquanto que o termo viscoso é tratado implicitamente. Peterson sugere um esquema em que a condição Rotacional e a Acoplada produzem estabilidade (para viscosidade positiva). A condição Div-Grad e Rotacional, bem como a condição homogênea de Neumann pode ser avaliada na resolução de Navier-Stokes no estudo de escoamento transiente. Além do cálculo do fator de amplificação para os esquemas de Navier-Stokes, a simulação computacional pode, em trabalhos futuros, mostrar ou sugerir caminhos mais seguros.

Este trabalho nos trouxe uma bagagem teórica importante para ir em frente com pesquisas em mecânica dos fluidos computacional, mas temos consciência de que a imple-

mentação numérica dos métodos para a simulação e visualização demandam um esforço que seria impossível nesta fase, sendo por isso uma meta no futuro.

Referências Bibliográficas

- [1] M. A. Alves, P. J. Oliveira, and F. T. Pinho. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 41:47–75, 2003.
- [2] V. Casulli. Semi-implicit finite difference methods for the two-dimensional shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 86:56–74, 1990.
- [3] J. Crank and P. Nicolson. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Proc. Camb. Phi. Soc.*, 43:50–67, 1947.
- [4] J. A. Cuminato and M. Meneguette Jr. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnica de Diferenças Finitas*, volume 1. SBAMC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [5] K. C. Estácio, C. L. Menezes, R. A. P. Silva, A. C. Pivem, A. A. Pereira, E. R. C. Góis, F. P. Barbosa, V. C. Oliveira, and V. G. Ferreira. Solução numérica de equações diferenciais a derivadas parciais por diferenças finitas. Technical report, Notas Didáticas - Solução Numérica de Equações Diferenciais a Derivadas Parciais por Diferenças Finitas, ICMC/USP, 2005.
- [6] D. G. Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. IMPA, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 4 edition, 2003.
- [7] A. O. Fortuna. *Técnicas Computacional para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. EDUSP, 2000.
- [8] S. K. Godunov and V. S. Ryaben'kii. *Theory of Difference Schemes - An Introduction*. North-Holland Publishing Company - Amsterdam, 1964.
- [9] S. K. Godunov and V. S. Ryben'kii. Spectral stability criteria for boundary-value problems for non-self-adjoint difference equations. *Russian Mth Surveys*, 18:1–12, 1963.

-
- [10] P. M. Gresho and R. L. Sani. On the pressure boundary conditions for the incompressible navier-stokes equations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 7:1111–1145, 1987.
 - [11] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, and L. Oliger. *Time dependent problems and difference methods*. Wiley-Interscience - New York, 1995.
 - [12] R. D. Guy and A. L. Fogelson. Stability of approximate projection methods on cell-centered grids. *Journal of Computational Physics*, 203:517–538, 2005.
 - [13] A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.
 - [14] W. D. Henshaw. A fourth-order accurate method for the incompressible navier-stokes equations on overlapping grids. *Journal of Computational Physics*, 113:13–35, 1994.
 - [15] G. E. Karniadakis, M. Israeli, and S. A. Orszag. High-order splitting methods for the incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 97:414–443, 1991.
 - [16] W. Kress and P. Lötstedt. Time step restrictions using semi-implicit methods for the incompressible navier-stokes equations. Technical report, Dept of Information Technology, Uppsala University, Uppsala, Sweden, <http://www.it.uu.se/research/reports/>, 2004.
 - [17] P. D. Lax and R. D. Richtmyer. Survey of the stability of linear finite difference equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 17:267–293, 1956.
 - [18] K. W. Morton and D. F. Mayers. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, 2 edition, 2005.
 - [19] C. L. M. H. Navier. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*. t. VI, Paris, 1822.
 - [20] C. M. Oishi, J. A. Cuminato, V. G. Ferreira, M. F. Tomé, A. Castelo, N. Mangiacchi, and S. McKee. A stable semi-implicit method for free surface flows. *Journal of Applied Mechanics - Transactions ASME*, 8:434–448, 2006.
 - [21] N. A. Petersson. Stability of pressure boundary conditions for stokes and navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 172:40–70, 2001.
 - [22] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 2 edition, 1992.

-
- [23] G. G. Stokes. On the theory of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids. *Trans. Cambridge Phil. Society, Cambridge, Inglaterra*, 8:287, 1845.
 - [24] J. C. Strikwerda. Finite difference methods for the stokes and navier-stokes equations. *SIAM Journal of Science Statistics Computational*, 5:56–67, 1984.
 - [25] J. C. Strikwerda. High-order-accurate schemes for incompressible viscous flow. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 24:715–734, 1997.
 - [26] J. C. Strikwerda. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. Siam, Philadelphia, 2 edition, 2004.