

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 03/08/2024.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

A Geometria de Gaspard Monge

Douglas Gonçalves Leite

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro – SP
2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Douglas Gonçalves Leite

A Geometria de Gaspard Monge

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira
Teixeira

Rio Claro - SP
2024

L533g Leite, Douglas Gonçalves
A Geometria de Gaspard Monge / Douglas Gonçalves
Leite. -- Rio Claro, 2024
288 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista
(UNESP), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio
Claro
Orientador: Dr. Marcos Vieira Teixeira

1. Gaspard Monge. 2. Geometria Descritiva. 3.
Geometria Diferencial. 4. História da Matemática. 5.
História da Geometria. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca
da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Geociências e
Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

DOUGLAS GONÇALVES LEITE

A GEOMETRIA DE GASPARD MONGE

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira
IGCE / UNESP/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Gerard Emile Grimberg
IM/UFRJ/ Rio de Janeiro (RJ)

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
DM/ PUC/ Rio de Janeiro (RJ)

Prof. Dr. Luis Manuel Ribeiro Saraiva
DM/FC/Lisboa (PT)

Prof^a. Dr^a. Sabrina Helena Bonfim
CPAR/UFMS/ Paranaíba (MS)

Conceito: Aprovado.

Rio Claro (SP), 03 de agosto de 2023.

AGRADECIMENTOS

A difícil tarefa de agradecer a todos os envolvidos traz o peso de deixar de apresentar nomes importantes que fazem parte não somente do processo de doutoramento, mas de toda a jornada que me trouxe até aqui. Me limitar a agradecer aos amigos e colegas que fizeram parte desses anos de pós-graduação é contar apenas uma parte da história, a outra parte, não cabe nestas páginas.

Quero agradecer aos familiares, minha esposa Weidy, meus pais em Rio Claro, Lúcia e Gumerindo, o carinho e preocupação deles sempre me deram forças para enfrentar os mais diversos desafios. Agradeço meus amigos de pós-graduação, Davidson, amigo de Minas Gerais que se tornou uma pessoa que trouxe muito carinho para toda a família. Ao querido Jorge, sempre disposto a uma boa conversa, agradeço pelos aprendizados e momentos vividos, grande parte deles em ótimas festas. Ao Kleyton, esse que me conhece antes mesmo de eu ter ingressado no mestrado, agradeço aos momentos de paciência e às parcerias em diversas pesquisas realizadas. Além de contribuir para minha formação profissional, se tornou um querido amigo da família que está em constante contato, o qual buscarei preservar. Ao Gustavo, agradeço a paciência nas primeiras lições de Latim, tenho certeza de que não foi uma tarefa fácil, hoje penso que sei ao menos uma coisa ou outra sobre uma coisa ou outra, essa sempre foi uma de suas frases preferidas.

Além de meus amigos de pós-graduação, agradeço também a quem me acompanha nessa jornada desde o início, minha mãe Joana e meu Pai Ignácio. Mesmo de maneira bastante simples, sempre me ensinaram a importância de cuidar da família e se dedicar àqueles a quem amamos, esses são valores que levarei para toda a vida.

Agradeço ao meu professor, orientador, amigo Dr. Marcos Vieira Teixeira, que em diversos momentos me ensinou muito mais que matemática, me ensinou sobre a importância de se dedicar a algo e ter paciência no processo. Sempre me recebendo da melhor forma possível, abriu sua casa para que eu pudesse conhecer sua família, isso sempre foi algo muito importante e de grande respeito para mim. Além do querido Marquinhos, agradeço ao Dr. Sérgio Nobre, que me apresentou o universo da História da Matemática o qual descobri ser um grande admirador.

Sou grato aos professores que me incentivaram e contribuíram para a melhoria desse trabalho, Dr. Gerard Grimberg, Dr. Luís Saraiva, Dr. João Bosco Pitombeira e Dra. Sabrina Helena Bonfim, as palavras de vocês são de grande importância para meu amadurecimento profissional, elas sempre foram ouvidas com muita atenção e respeito. Não posso deixar de agradecer à CAPES, CNPq, Unesp, Fapesp e diversas outras instituições que viabilizam a existência de ambientes de formação de alta qualidade e que nos auxiliam na permanência e desenvolvimento de pesquisas, assim como aprimoramento pessoal. Essas instituições mudam vidas.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O presente trabalho discorre a respeito da geometria de Gaspard Monge, com base na análise de duas de suas principais obras: *Géométrie Descriptive* (1799) e *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie* (1801). A análise dessas obras oferece um entendimento profundo do método de investigação de objetos geométricos adotado por Monge. Seus escritos cobrem uma diversidade de assuntos, incluindo técnicas de representação, equações diferenciais parciais e geração de curvas e superfícies. No contexto da História da Matemática, esta tese visa mostrar como os conceitos e métodos desenvolvidos pelo geômetra francês foram expressos em suas publicações. Utilizando elementos epistemológicos e obras contemporâneas para contextualizar a importância da geometria de acordo com Monge, são apresentadas construções geométricas e abordagens algébricas que enfatizam o uso de ferramentas do cálculo diferencial na resolução de problemas relacionados a curvas e superfícies. Ao examinar as fontes originais e os trabalhos predominantes daquele período, entendemos como parte do desenvolvimento da matemática se deu e quais foram as contribuições dos trabalhos de Monge.

Palavras-Chave: Gaspard Monge, Geometria Descritiva, Geometria Diferencial, História da Matemática, História da Geometria.

Abstract

The present work discusses Gaspard Monge's geometry, based on the analysis of two works: *Géométrie Descriptive* (1799) and *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie* (1801). The analysis of these works provides a profound understanding of the method of researching geometric objects adopted by Monge. His writings cover a variety of subjects, including representation techniques, partial differential equations, and the generation of curves and surfaces. In the context of the History of Mathematics, this thesis aims to show how the concepts and methods developed by the French geometer are expressed in his publications. Using epistemological elements and contemporary works to contextualize the importance of geometry according to Monge. Geometric constructions and algebraic approaches are presented that emphasize the use of tools from differential calculus in solving problems related to curves and surfaces. By examining the original sources and predominant works of that period, we understand how part of the development of mathematics occurred and what contributions Monge's works made to it.

Keywords: Gaspard Monge, Descriptive Geometry, Differential Geometry, History of Mathematics, History of Geometry.

Lista de Figuras

Figura 1: Representação de uma pedra no interior de um paralelepípedo.....	41
Figura 2: Fortificações de Vauban.....	83
Figura 3: Linhas de disparo a partir do ponto E.....	89
Figura 4: Representação de relevo de Meusnier e simulação de Carlevaris...	92
Figura 5: Plano tangente à curva de nível.....	95
Figura 6: Projeção ortogonal da reta AB.....	104
Figura 7: Plano tangente a uma superfície cilíndrica.....	115
Figura 8: Lugar geométrico dos vértices de cones.....	117
Figura 9: Três círculos e retas tangentes.....	119
Figura 10: Projeções perpendiculares da curva NA.....	123
Figura 11: Curva obtida a partir da interseção de dois cones.....	128
Figura 12: Reta tangente a uma elipse.....	132
Figura 13: Curva evoluta de uma curva MNO.....	140
Figura 14: Planos perpendiculares à curva.....	143
Figura 15: Superfície desenvolvível.....	145
Figura 16: Curvatura de uma superfície.....	147
Figura 17: Curvaturas de uma superfície.....	149
Figura 18: Quadro docente da Escola Normal Superior.....	159
Figura 19: Sombras de um Prisma	161
Figura 20: Projeção Perspectiva de um Cubo.....	164
Figura 21: Superfícies tangentes às esferas.....	166
Figura 22: Reta em dupla projeção.....	169
Figura 23: Plano Perspectivo de Lambert.....	170
Figura 24: Pirâmide em quadro de representação.....	171
Figura 25: Pirâmide em dupla projeção.....	172
Figura 26: Projeção horizontal de sólidos geométricos.....	174
Figura 27: Representação de Desargues do Método de Perspectiva.....	178
Figura 28: Projeção horizontal, gaiola de Desargues.....	179
Figura 29: Sistema de eixos de Monge.....	182
Figura 30: Segundo sistema de eixos de Monge.....	183
Figura 31: Sistema de Eixos, Euler.....	184
Figura 32: Sistema de Eixos de Euler.....	185

Figura 33: Sistema de eixos de Clairaut e Monge.....	187
Figura 34: Superfície Desenvolvível.....	191
Figura 35: Superfície gerada pelo movimento de uma reta	193
Figura 36: Pirâmide Desenvolvível.	195
Figura 37: Curvas e retas tangentes.	201
Figura 38: Curva de dupla curvatura e suas projeções.....	202
Figura 39: Diferenciação com relação a x e com relação a y	204
Figura 40: Equação Diferencial Parcial de segunda ordem.....	206
Figura 41: Aresta Cuspidal.....	234
Figura 42: Curvaturas de um elipsoide.....	240
Figura 43: Curvas obtidas pela vibração de uma corda.....	254

Sumário

0. MOTIVAÇÕES INICIAIS E QUESTÕES NORTEADORAS	9
1. INTRODUÇÃO.....	18
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	29
3. BIOGRAFIA.....	54
4. DESCRIÇÃO DE UM CENÁRIO.....	76
4.1 Desenfiamento – Do problema militar ao tratamento geométrico.....	85
5. GEOMETRIA DESCRITIVA – CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	97
5.1. Seção 1	101
5.2. Seção 2	111
5.3. Seção 3	119
5.4. Seção 4	132
5.5. Seção 5	136
6. GEOMETRIA DESCRITIVA – EDIÇÕES POSTERIORES.....	150
6.1 Geometria Descritiva 1811 – Suplementos de Hachette	151
6.2 Geometria Descritiva 1820 – Lições Complementares.....	156
6.3 Teoria da Perspectiva – Atividades Finais e Conexões com outros trabalhos.....	167
6.4 <i>Método de Perspectiva</i> de Girard Desargues e a representação de Monge	174
6.5 Monge e a representação geométrica do espaço	179
7. SUPERFÍCIES DESENVOLVÍVEIS	186
7.1 CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES À MANEIRA DE MONGE	197
7.2 DE QUAL ANÁLISE ESTAMOS FALANDO?	207
8. <i>FEUILLES D'ANALYSE</i>	215
8.2 Formação de Superfícies.....	222
8.3 Envoltórias, Características e <i>Arête de Rebroussement</i>	228
8.4 Superfície Desenvolvível	233
8.5 Curvatura de Superfície	236
8.6 Algumas considerações com relação às EDP's	241
9. APLICAÇÃO DA ANÁLISE À GEOMETRIA (1807).....	246
9.1 Aplicação da Análise à Geometria - (1809).....	251
9.2 Aplicação da Análise a Geometria - Edição de 1850, prelúdio à Geometria Diferencial.....	255
10. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	268
11. REFERÊNCIAS	275

1. INTRODUÇÃO

A presente pesquisa aborda os conteúdos matemáticos explorados em dois trabalhos de Gaspard Monge derivados de aulas ministradas na *École Normale Supérieure* (Escola Normal Superior) quanto a *École Centrale des Travaux Publics* (Escola Central de Trabalhos Públicos), mais tarde rebatizada como *École Polytechnique* (Escola Politécnica).

Essas instituições foram concebidas durante a Revolução Francesa com o propósito formar especialistas altamente competentes. Gaspard Monge, Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, também conhecido como Marquês de Condorcet (1743-1794), entre outros nomes, estiveram diretamente envolvidos na fundação dessas escolas francesas.

Gaspard Monge se destacou pelo desenvolvimento de técnicas de representação conhecidas como Geometria Descritiva. Seus estudos e descobertas tiveram aplicação direta na resolução de problemas complexos relacionados à construção de fortificações e estratégias militares. Devido ao seu valor para o campo bélico, seus conhecimentos foram mantidos em segredo por décadas, sendo considerados informações estratégicas de cunho militar.

Além disso, desenvolveu uma série de trabalhos dedicados ao tratamento de equações diferenciais parciais relacionados a problemas geométricos. Seu foco incluía a resolução de EDP's, determinação de funções contínuas ou descontínuas para a solução dessas equações, bem como a investigação de máximos e mínimos.

Durante as aulas na Escola Politécnica, Gaspard Monge pôde elaborar o que René Taton descreveu como Geometria Infinitesimal. Esse conhecimento envolvia a utilização de conceitos geométricos relacionados a tratamentos analíticos, resultando em uma abordagem investigativa de curvas e superfícies por meio do uso de equações diferenciais parciais e representações gráficas.

Compreendemos que os trabalhos de Monge, compilados para as instituições francesas de ensino e examinados pelo autor desta tese, abarcam quase três décadas de pesquisas matemáticas. Esses estudos incluem a exploração de curvas e superfícies, equações diferenciais parciais e métodos de representação.

O primeiro deles, texto, intitulado de *Géométrie Descriptive, Leçons donnés aux Écoles Normales, l'an 3 de la République* (Geometria Descritiva, Lições dadas nas Escolas Normais, no ano 3 da República) publicado em 1799, foi produzido a partir das lições de Monge em cursos de formação de professores. Esses profissionais seriam conduzidos para escolas secundárias em todo território francês, de modo a levar para esses locais, os conhecimentos obtidos durante sua formação da Escola Normal Superior.

O segundo trabalho, intitulado de *Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie* (Notas de Análise aplicada à Geometria) publicado em 1801, trata-se de um texto criado a partir das lições de Gaspard Monge na *École Centrale des Travaux Publics* (Escola Central de Trabalhos Públicas), instituição de ensino dedicadas à formação de engenheiros. Alguns anos mais tarde, o texto Notas de Análise foi renomeado de *Application de l'Analyse à la Géométrie* (Aplicação da Análise à Geometria), título apresentado pela primeira vez em 1807.

Desde a fundação dessas instituições em 1794, Monge atuou como professor em ambas, dedicando-se ao longo dos anos ao ensino de geometria. Com relação à Geometria Descritiva, seu interesse esteve voltado à representação de objetos tridimensionais sobre um plano bidimensional. Para ele, era necessário estabelecer um processo de representação que trouxesse a maior quantidade de informações possíveis de um determinado objeto, ao mesmo tempo que fosse possível desenvolver novas investigações com relação às formas produzidas, assim como a respeito de problemas de geometria.

Para ele a Geometria Descritiva era uma área da matemática que deveria fomentar a investigação por meios intuitivos e visuais, desenvolvendo assim a capacidade criar novas representações, cada vez mais detalhadas e com maior precisão.

Com relação ao trabalho Notas de Análise, encontramos aquilo que foi nomeado por alguns pesquisadores como Geometria Infinitesimal, área do conhecimento que relaciona equações diferenciais parciais ao tratamento geométrico de curvas e superfícies.

Sendo por meios gráficos ou por tratamento analítico, suas descobertas se tornaram reconhecidas por toda Europa Ocidental, esteve no centro de discussões de sociedades científicas daquele período e despertaram o interesse de pesquisadores até os dias atuais.

Monge, nascido em Beaune em 1746, introduziu um método de representação de objetos que fazia o uso de duas projeções ortogonais. Através de uma projeção superior e uma projeção lateral, ele desenvolveu uma série de procedimentos geométricos no plano descritivo. Esses métodos permitiram a representação de objetos tridimensionais em um ambiente bidimensional, tornando-se parte essencial da Geometria Descritiva.

As técnicas utilizadas por ele foram objeto de estudo de pintores, escultores e arquitetos dedicados ao campo da Perspectiva. O recurso de dupla projeção envolve a articulação de técnicas que consideram deformações visuais aparentes na representação, a criação de escalas e a determinação de relações proporcionais.

Diversos teóricos do Renascimento exploraram esses conceitos, e estão presentes em obras como *Della Pittura* (1435) de Leon Battista Alberti (1404-1472) e *De Prospectiva Pingendi* de Piero della Francesca (1414-1492). Mesmo no séc. XVIII, alguns matemáticos continuaram a investigar técnicas de representação, um exemplo é o trabalho de Johann Heinrich Lambert intitulado *La perspective affranchie de l'embaras du plan geometral* (A perspectiva liberta das amarras do plano geometral) publicado em 1759, texto dedicado a abordar possíveis soluções para questões relacionadas à perspectiva e à projeção de formas tridimensionais em superfícies planas.

Gaspard Monge, inserido na corrente iluminista, desenvolveu uma forma de investigação geométrica que, segundo ele, seria fundamental para o desenvolvimento da nação francesa e importante para o intelecto humano. Alguns de seus primeiros trabalhos foram representações de plantas de cidades, de fortificações e criação de mapas.

Biógrafos de Monge reconhecem que ele havia criado mapas e esboços de fortificações com uma riqueza de detalhes que o levaram a trabalhar em uma das mais prestigiadas escolas francesas de engenharia do séc. XVIII, a *École Royale du Génie de Mézières* (Escola Real de Engenharia de Mézières).

Durante o período que esteve em Mézières produziu trabalhos relacionados ao estudo de máximos e mínimos de superfícies, questões envolvendo problemas de isoperímetros assim como formas de integração de equações diferenciais parciais.

Além desses assuntos, desenvolveu também investigações com relação ao estudo de curvatura de curvas e superfícies, assim como experimentos no campo da Metalurgia, Química e Física. Sua ampla e diversificada formação lhe permitiu transitar entre diversas áreas do conhecimento. Com relação à matemática não foi diferente, no texto *Geometria Descritiva*, ao mesmo tempo que discorria a respeito de técnicas de representação de superfícies sobre um plano, considerava que uma dada superfície poderia ser obtida a partir do movimento de objetos como pontos, retas e outras curvas, propondo assim uma abordagem analítica para o mesmo problema.

A concepção de movimento desenvolvida por Monge possibilitou a percepção de que, ao investigar a formação de superfícies através do movimento de curvas, ele identificou que as equações dessas curvas poderiam ser integradas às equações de famílias de superfícies. Nesse contexto, as curvas desempenharam o papel de geratrizes.

Portanto, o tratamento geométrico/gráfico está diretamente relacionado com o analítico, desse modo, Monge aproxima essas duas áreas de uma forma que outros teóricos de seu período não fizeram. Para ele, o ato de projetar uma dada superfície sobre um plano, obtendo assim uma curva, está diretamente ligado a recursos como secções por planos ortogonais ou mesmo derivadas parciais.

Ao longo da leitura dos textos *Notas de Análise* e *Geometria Descritiva*, observou-se que, por meio de descrições que estimulavam a imaginação do leitor, Monge estabeleceu duas importantes concepções. A primeira consistia em empregar a dupla projeção, visando superar as dificuldades encontradas nas técnicas de representação em perspectiva, utilizadas naquela época. Em seguida, utilizava os objetos projetados para explorar a formação de superfícies por meio de métodos algébricos, contribuindo para o desenvolvimento da geometria analítica.

Conforme os tratamentos algébricos se tornaram parte integrante dos recursos usados nos estudos das projeções, notamos uma maior utilização de equações diferenciais parciais como forma de decomposição de superfícies em curvas, assim como um modo de representar as projeções de objetos que pudessem ser algebricamente expressados.

A segunda concepção proposta por Monge tratava da produção de superfícies geradas pelo movimento de curvas. Com essa abordagem, essas superfícies passaram a ser concebidas não mais como sólidos estáticos, mas como objetos formados pelo deslocamento de outros elementos, sejam curvas ou superfícies. Parte desses processos foram associados posteriormente ao campo que denominamos atualmente de Geometria Diferencial.

Esse entendimento elucida uma forma de compreensão do objeto matemático a partir de uma perspectiva dinâmica, trazendo para o centro da investigação, elementos como forma e movimento, fazendo com que conceitos como função se tornassem uma forma de representação de famílias de superfícies a partir da variação de parâmetros.

Além de matemático, Gaspard Monge foi um membro ativo da política francesa. Foi ministro da Marinha⁴, fez parte da equipe de Napoleão Bonaparte participando de diversas expedições entre as décadas de 1790-1810. Foi um dos responsáveis por organizar um sistema unificado de pesos e medidas⁵, tornou-se membro da Academia de Ciências de Paris, auxiliou na criação de instituições de ensino e de engenharia militar as quais tornaram-se referência e modelo para novas escolas em grande parte da Europa Ocidental ao longo do séc. XIX.

Com uma carreira bastante intensa, tanto científica quanto militar, contribuiu para o desenvolvimento da matemática francesa por mais três décadas. Tendo iniciado suas pesquisas ainda na Escola de Mézières na década de 1760, é possível observar pela trajetória de suas publicações, como alguns conceitos matemáticos se mantiveram presentes ao longo do tempo. Sua preocupação para com o ensino de geometria é alto latente em seus artigos, ao mesmo tempo que se torna evidente nos trabalhos desenvolvidos nas instituições francesas de ensino.

Durante a década de 1770 como professor em Mézières, teve oportunidade de trabalhar com Charles Bossut (1730-1814), teve contato com diversos trabalhos desenvolvidos por Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). Parte deles dedicados ao estudo de equações diferenciais parciais em problemas

⁴ Arago, p.35.

⁵ Boyer, 1989, p.347.

envolvendo cordas vibrantes, determinação de superfícies desenvolvíveis, problemas relacionados a geodésia e isoperímetros.

Com relação às instituições de ensino, participou da organização da *École Normale Supérieure* e da *École Centrale des Travaux Publics*, ambas criadas com o objetivo de fornecer uma educação técnica e científica de alta qualidade para a formação de profissionais capazes de atender às necessidades do novo estado emergente. De certo modo, ambas instituições foram um reflexo das mudanças sociais e políticas que estavam acontecendo naquele período.

Essas instituições foram destinadas a formação de professores e engenheiros militares respectivamente, e nelas haviam estudos práticos e teóricos, a intenção era formar, rapidamente, profissionais com grande prestígio que pudessem contribuir para o progresso da nação.

A partir das lições desenvolvidas em suas aulas, Jean Nicolas Pierre Hachette (1769-1834) que havia sido aluno de Monge e também professor auxiliar, organizou um caderno de lições que foi publicado com o título de *Géométrie Descriptive* em 1799. Esse material foi dividido em cinco seções contendo as nove primeiras lições ministradas por Monge na Escola Normal Superior no ano III da república (1795).

O texto *Geometria Descritiva* se tornou uma importante referência o estudo das técnicas de representação, foi traduzido para diversos idiomas e utilizado como modelo para a criação de novos textos para instituições de ensino italianas, alemãs, espanholas, portuguesas⁶, entre outras.

É sabido que, produções relacionadas ao campo das representações gráficas e estudos de perspectiva, haviam sido publicados desde o Renascimento. A teoria da perspectiva influenciou arquitetos, engenheiros e matemáticos, resultando, no séc. XVIII, no conhecimento de recursos específicos para ilustrações destinadas a criação da sensação de profundidade em quadros de representação. A projeção ortogonal, por exemplo, permitia representar superfícies com a mínima deformação possível.

Assim, percebe-se que Monge avançou nas pesquisas sobre representação ao aplicar uma teoria que propunha o uso da técnica de dupla projeção na criação de representações para diversas áreas, como metalurgia,

⁶ Barbin, 2019, p. xv.

arquitetura, carpintaria, entre outras. De acordo com Sakarovitch (2020) “a geometria descritiva é ao mesmo tempo o resultado de uma longa e lenta evolução dos diferentes métodos gráficos utilizados para representar o espaço e o fruto da imaginação fértil de um geômetra de talento, herdeiro do iluminismo”⁷.

No trabalho *Geometria Descritiva*, estão presentes conteúdos que tratam de técnicas de representação, determinação espacial de objetos geométricos, formas de se representar interseções entre sólidos e estudo de superfícies e curvas. Além da representação de objetos, Monge mostrou que era possível tratar de problemas da geometria euclidiana no plano descritivo, de acordo com Kirsti (2007) “Seu primeiro exemplo diz respeito ao problema de como construir uma reta através de um ponto dado, que seja paralela a uma reta dada, onde esta última não contenha o ponto dado” (p. 708, tradução nossa)⁸, trata-se de um problema clássico da geometria euclidiana.

Para Monge a forma como havia organizado os processos de construção/representação apresentava ao leitor, um caminho intuitivo para a investigação de outros problemas. Para ele, a Geometria Descritiva seria uma nova forma de investigação de problemas matemáticos. Com ela, seria possível criar representações geométricas de processos algébricos os quais dificultavam a visualização de diversas soluções.

Como evidência da reconhecida relevância dessa geometria, o texto foi amplamente estudado e replicado. O próprio Nicolas Hachette havia produzido e publicado em 1822 um trabalho denominado de *Traité de géométrie descriptive* (Tratado de Geometria Descritiva) trazendo novas considerações e um maior número de exemplos e construções, ao mesmo tempo que preservava as técnicas desenvolvidas por seu mentor.

Dez anos mais tarde, o sucessor de Hachette na Escola Politécnica, Charles-François Antoine Leroy (1780-1854) deu continuidade às novas versões do texto de Monge e em 1832 publicou o trabalho *Traité de géométrie descriptive*

⁷ La géométrie descriptive est à la fois l'aboutissement d'une longue et lente évolution de méthodes graphiques disparates utilisées pour représenter l'espace et le fruit de l'imagination fertile d'un géomètre de talent, héritier des Lumières. Acessado em : <https://books.openedition.org/pufc/13063>.

⁸ His very first example concerns the problem of how to construct the line through a given point that is parallel to a given line - where the latter does not contain the given point.

(Tratado de geometria descritiva) acrescentando, assim como fizera Hachette, uma série de exemplos não explorados por Monge.

Esse trabalho de Monge foi utilizado como fonte para a criação de materiais que foram produzidos e utilizados em instituições militares brasileiras. A primeira versão do *Geometria Descritiva* publicada no Brasil é de 1812 criada pelo capitão José Victorino dos Santos e Souza com o título de “Elementos de Geometria Descritiva; com aplicações às artes. Extrahidos das Obras de Monge”⁹.

No Brasil Monge é reconhecido como o fundador de um método de representação, o trabalho *Geometria Descritiva* contribuiu para a criação de uma disciplina específica para tratar das técnicas apresentadas pelo geômetra francês. Por outro lado, o segundo trabalho aqui analisado, “Notas de Análise”, não recebeu maiores atenções e foi pouco discutido e investigado em território nacional. Publicado em 1801, assim como o *Geometria Descritiva*, foi organizado por Hachette a partir das aulas ministradas na *École Centrale des Travaux Publics*.

De modo geral, o *Notas de Análise* discorre a respeito da utilização de equações diferenciais parciais para formação de superfícies, bem como para a determinação de curvatura de curvas e superfícies. Grande parte dos conteúdos apresentados na edição de 1801 foi produzida no período em que Monge lecionava na Escola de Engenharia de Mézières.

Entre os anos de 1766 e 1785, Monge desenvolveu uma série de publicações relacionadas ao estudo de superfícies utilizando equações diferenciais parciais. Alguns resultados foram publicados nas chamadas *Mémoires de Mathématique et de Physique* (Memórias de Matemática e Física), que eram cadernos com textos de diversos pesquisadores, em sua maioria, membros da Academia de Ciências de Paris.

Assim como Lawrence (2010) entendemos que o *Notas de Análise* trata-se de um livro que traduz propriedades de curvas e superfícies em uma linguagem analítica a partir da utilização de equações diferenciais parciais e ferramentas do cálculo diferencial.

⁹ Xavier, Santos, Pinho, 2019, p.98.

A alteração do nome para *Application de l'analyse à la géométrie*, (Aplicação da Análise à Geometria) foi realizada na segunda edição desse material, sendo publicada pela primeira vez em 1807. Nessa nova versão, foram introduzidas algumas lições iniciais com problemas relacionados à determinação da equação da reta no espaço, equações de planos e superfícies de segundo grau. Parte dos conteúdos apresentados nessa nova edição foi proposta por Leonhard Euler (1707-1783) na década de 1740.

A seção introdutória que foi acrescentada na edição de 1807 recebeu o nome de Aplicação da Álgebra à Geometria. De modo geral, os conteúdos apresentados fazem parte do campo que denominamos atualmente de Geometria Analítica Espacial.

Além da segunda edição, ao menos outras três edições foram produzidas e, assim como a de 1807, trouxeram complementações à teoria das equações diferenciais parciais relacionadas ao estudo de curvas e superfícies. Como exemplo, a quinta edição publicada em 1850 continha observações de Joseph Liouville (1809-1882) a respeito dos resultados obtidos por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) com relação aos invariantes geométricos.

A publicação de Gauss intitulada *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas* (Considerações gerais sobre as Superfícies Curvas) publicada em 1827 foi inserida no texto *Aplicação da Análise à Geometria* de 1850. Tendo apenas o título traduzido para o francês sob a forma *Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes* (Investigações sobre a teoria geral das superfícies curvas), o corpo do texto se manteve em escrita original (latim).

De acordo com Liouville, a realização de uma tradução desse trabalho para o idioma francês, poderia diminuir a elegância da escrita do autor.

Além da contribuição de Gauss que havia sido publicada na década de 1820, Liouville inseriu uma série de comentários e demonstrações de matemáticos como Joseph Louis François Bertrand (1822-1900), Joseph-Alfred Serret (1819-1885) e Victor Puiseux (1820 – 1883), que, assim como ele, produziram novos resultados a partir das demonstrações de Gauss. Esses resultados foram apresentados inicialmente no Jornal de Matemática Pura e aplicada na edição de 1848.

Na edição organizada por Liouville do *Aplicação da Análise à Geometria*, é apresentada uma nova abordagem para o estudo das superfícies. Nessa

edição, é possível encontrar duas formas de investigação das superfícies. A primeira delas, descrita por Monge, toma um sistema extrínseco como ponto de referência para obter resultados e propriedades dos objetos investigados.

Por outro lado, por meio das pesquisas conduzidas por Gauss e das teorias associadas ao campo da geodésia, surge a adoção de um sistema intrínseco. Nesse contexto, as próprias expressões das superfícies produzem um novo sistema de referência a ser empregado.

Além disso, a edição do *Aplicação da Análise à Geometria* de 1850 contém mais de quinhentas páginas que discorre a respeito de uma diversidade de conteúdos como formação de superfícies, curvatura de superfícies, integração de equações diferenciais parciais relacionadas a problemas de geodésia e teoria das cordas vibrantes.

Essa diversidade de assuntos trouxe para o escopo do trabalho, problemas que foram considerados cientificamente relevantes. Produzindo assim, além da continuidade do trabalho iniciado por Monge, uma obra com caráter de divulgação do conhecimento matemático para os alunos da Escola Politécnica.

Diante disso, entendemos que, assim como o texto de Geometria Descritiva, esse trabalho envolvendo o estudo de curvas e superfícies possui certo reconhecimento dentro da comunidade matemática, principalmente na Escola Politécnica.

Portanto, ao analisarmos os conteúdos matemáticos presentes em ambas as publicações, estaremos investigando a significativa contribuição de Gaspard Monge para o desenvolvimento da matemática. Ao longo da tese será evidenciado que os dois textos aqui analisados, são resultados de décadas de investigações e publicações envolvendo o estudo de superfícies.

De modo geral, ambos os trabalhos tratam dos mesmos objetos: superfícies, curvas e curvaturas. Entretanto, como cada texto foi organizado para um determinado público, entendemos que houve adaptações na forma como esses temas foram tratados.

Com isso, entende-se que as duas publicações aqui analisadas representam uma forma de construção de geometria em um determinado período histórico. Amplamente reconhecido por suas contribuições para o ensino, Gaspard Monge dedicou grande parte de sua vida ao desenvolvimento

do conhecimento em suas mais variadas formas, atuando em outras áreas além da matemática.

Nossa responsabilidade é organizar e expor como os conceitos matemáticos se interligam para formar uma geometria que una o tratamento analítico aos processos geométricos. Isso nos permite retratar a perspectiva de Gaspard Monge em relação à geometria, bem como o percurso que ele trilhou para gerar e disseminar resultados significativos para essa área.

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para entendermos a estrutura da Geometria de Gaspard Monge, foi imprescindível examinar diversos trabalhos por ele produzidos entre 1770 e 1800. Em meio a um conjunto de textos que abordam temas como equações diferenciais parciais, construção de famílias de superfícies, continuidade de funções, assim como representações geométricas, identificamos dois textos que consolidam a maior parte dos resultados alcançados por Monge.

Esses textos, *Geometria Descritiva* e o *Notas de Análise Aplicada à Geometria* foram criados para serem utilizados em duas instituições francesas de ensino. Desse modo, entendemos que um dos principais objetivos para a criação desses materiais foi a produção de um trabalho voltado ao ensino de teorias relacionadas ao estudo de curvas e superfícies.

Considerando que a maioria dos artigos matemáticos de Monge aborda o tratamento analítico de problemas geométricos, o conteúdo do *Geometria Descritiva* inclui, entre suas propostas, a representação gráfica de alguns dos resultados obtidos de maneira analítica em publicações anteriores.

No trabalho *Geometria Descritiva*, Monge oferece descrições detalhadas e representações gráficas de diversos conceitos apresentados no artigo publicado em 1780 sobre superfícies desenvolvíveis com aplicação à teoria das sombras e penumbras²¹². Por meio da construção de uma sequência de planos normais a uma curva ou superfície, Monge apresentou uma forma de representação dessa superfície que fomenta a imaginação e percepção visual do leitor.

Outro exemplo envolve o artigo de 1785 que trata de curvas evolutas, involutas e os raios de curvatura de uma superfície²¹³. Novamente, parte das ideias apresentadas nesse trabalho, foram acrescentadas nas lições finais do texto de *Geometria Descritiva*. Monge, frequentemente descreve com detalhes a construção gráfica desses elementos, assim como o desenvolvimento de uma percepção visual da formação desses objetos para a continuidade das investigações para as mais variadas superfícies.

²¹² *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles des Surfaces développables, avec une application à la Théorie des Ombres et des Pénombres*

²¹³ *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure.*

Compreendemos que essa ênfase foi atribuída em consideração ao público-alvo para o qual a obra foi elaborada. Destinado ao uso na Escola Normal Superior, assim como na Escola Politécnica, esse texto fez parte dos cursos de formação de professores e engenheiros militares.

Através das obras analisadas, observa-se que Gaspard Monge se dedicou a oferecer às instituições de ensino onde lecionou, uma abordagem para representação e investigação de curvas e superfícies. Ele fundamentou essa abordagem em uma teoria estruturada, abrangendo conhecimentos como de equações diferenciais parciais, estereotomia, estudo de projeções, perspectiva e geometria analítica.

Por meio de descrições que estimulavam a imaginação do leitor, Monge estabeleceu duas concepções importantes. A primeira consistia em trabalhar com dupla projeção, visando a redução das dificuldades relacionadas às técnicas de representação em perspectiva, ao mesmo tempo que implementou recursos algébricos para o desenvolvimento da geometria analítica.

A segunda concepção proposta por ele refere-se à criação de superfícies geradas pelo movimento de curvas. Com isso, essas superfícies passaram a ser concebidas não como sólidos estáticos, mas sim como objetos formados através do deslocamento de outros elementos, sejam curvas ou superfícies. Essa dinâmica de geração foi representada por meio de equações diferenciais parciais. À medida que os tratamentos algébricos se tornaram integrados aos recursos utilizados nos estudos das projeções, observamos um aumento na utilização de equações diferenciais parciais como meio de decompor superfícies em curvas, além de representar as projeções de objetos que pudessem ser expressos de forma algébrica. Alguns desses processos foram posteriormente associados ao campo da Geometria Diferencial.

Nessa abordagem, deparamo-nos com dois caminhos. O primeiro sugere que, ao projetar uma dada superfície sobre dois planos, surgem curvas geradoras que dão origem a famílias de superfícies. Por outro lado, ao considerarmos um par de curvas, cada uma projetada em um plano perpendicular ao outro, e observando seu movimento conforme uma determinada lei, essas curvas podem resultar em uma família de superfícies no espaço tridimensional. Entendemos que ambos os processos constituem o que

consideramos ser a decomposição de uma superfície, conforme apresentado nos trabalhos de Monge.

Cada procedimento conduz à formulação de equações diferenciais parciais que resultam em famílias de superfícies, as quais satisfazem as condições determinadas pelas curvas geradoras. Da mesma forma, as curvas geradoras obtidas por meio das projeções, atendem às condições estabelecidas pelas superfícies sobre as quais foram projetadas. Essa correspondência biunívoca entre curvas e superfícies foi alcançada mediante projeções ortogonais associadas a investigações geométricas e operações algébricas.

É necessário destacar que, parte dessas concepções envolvendo o tratamento analítico e o geométrico, estão presentes no texto *Geometria Descritiva* pois, mesmo sendo um trabalho voltado ao estudo da representação gráfica pelo método de dupla projeção, encontramos diversas considerações relacionadas à formação de superfícies, estudo de curvatura, assim como curvas evolutas e involutas.

Compreendemos que esses conceitos se afastaram da abordagem voltada para representações gráficas e aproximaram-se de discussões que incluem o uso de operações algébricas. Por exemplo, na segunda seção do *Geometria Descritiva*, ao investigar a formação de curvas de dupla curvatura, Monge propõe a construção de planos paralelos que intersectam duas superfícies. Durante essa construção, ele descreve algumas relações algébricas que estariam associadas a esse processo.

Esse tipo de construção possui uma forma gráfica e analítica para sua execução, Monge buscou aproximar essas duas áreas, por vezes distanciadas em diversos trabalhos de sua época. Conforme descrito, “fazemos mover os pontos, as linhas curvas, as superfícies, esses movimentos podem sempre ser descritos por operações analíticas; e os novos objetos a que dão origem são expressos pelos próprios resultados das operações” (MONGE, 1799, p.62, tradução nossa).

Portanto, ao mesmo tempo que era fomentada a decomposição de superfícies em elementos “simples”, por meios gráficos, discorria-se com relação à possibilidade de interpretações algébricas das operações realizadas. Um exemplo desse tipo de construção foi apresentado no texto de 1786 intitulado *Sobre a expressão analítica da geração de superfícies curvas*.

Nessa publicação, o geômetra classifica determinadas famílias de superfícies através de equações diferenciais obtidas por meio dos processos geométricos realizados.

O tratamento algébrico empregado nesses processos, por meio de equações diferenciais parciais, foi o que ele denominou de Análise. De acordo com Monge, seria viável estabelecer uma interação entre essas duas áreas do conhecimento. De modo que a Geometria Descritiva e a Análise pudessem ser desenvolvidas simultaneamente. Isso permitiria que a primeira incorporasse às operações analíticas e as representações gráficas, enquanto a segunda conferiria à geometria um caráter de generalidade peculiar.

Nas últimas atividades do Geometria Descritiva, especialmente aquelas dedicadas ao estudo da perspectiva, observamos uma maior aproximação com trabalhos como os de Girard Desargues. Além de apresentar processos de representação bastante próximos daqueles empregados por Desargues, Monge também adotou uma configuração de eixos semelhante àquela descrita no texto de 1636. Essa disposição de eixos e a representação do espaço tridimensional tornaram-se ilustrações padronizadas nas publicações de Monge.

A adoção de um sistema de eixos perpendiculares dois a dois, originando-se do mesmo ponto, foi implementada por Monge no final da década de 1770. Além disso, nos trabalhos de Euler, observamos que a própria representação do espaço tridimensional ainda não estava unificada no séc. XVIII. Isso destaca outro aspecto relevante na obra de Monge: uma forma de representação do espaço geométrico, desenvolvida a partir das contribuições do campo da perspectiva, bem como das representações de Clairaut.

Desse modo, entendemos que Gaspard Monge, por meio de sua abordagem de representação do espaço geométrico, oferece aos alunos da Escola Politécnica uma estrutura que concilia simultaneamente um sistema de coordenadas e um ambiente para a projeção de objetos. Ambos os elementos fazem uso de operações analíticas, permitindo assim a representação tanto algébrica quanto gráfica de entidades geométricas.

Com relação ao Notas de Análise Aplicada à Geometria de 1801, entendemos que, por se tratar de um material direcionado apenas a alunos da Escola Politécnica, o modo como os conteúdos foram apresentados, assim como o escopo da obra, se distanciaram do trabalho de 1799. Dessa vez, ele relaciona

a técnica de dupla projeção ao tratamento analítico. Com isso, ao projetar uma superfície são obtidas equações de curvas e consequentemente são desenvolvidas equações diferenciais parciais como representantes de famílias de superfícies.

No contexto dos procedimentos apresentados, adquirimos uma compreensão mais aprofundada do que Gaspard Monge designou como Análise. Acreditamos que, ao contrário das discussões em vigor naquela época sobre o uso de uma Análise proposicional, a visão de Monge estava próxima das ideias apresentadas pelos enciclopedistas ao descreverem a Nova Análise. Domínio que articulou as ferramentas do cálculo infinitesimal às investigações de problemas geométricos.

Para Monge, a Análise representa um método de investigação que emprega as ferramentas do Cálculo Diferencial e integral, especialmente associadas ao estudo de equações diferenciais parciais, nos procedimentos de composição e decomposição de curvas e superfícies. O conjunto de instrumentos algébricos incorporados durante a investigação de problemas geométricos formava o que ele interpretava como Análise aplicada à Geometria.

Isso é apresentado, por exemplo, para o caso das superfícies desenvolvíveis, assim como para a superfície envoltória, a qual determina a construção de uma superfície que envolve um conjunto de superfícies ou família de curvas criadas pelo movimento de um dado objeto.

Além disso, torna-se evidente que Monge não se dedicou a propor processos rigorosos para a resolução de problemas. Em muitas ocasiões, as situações investigadas foram apresentadas de maneira descritiva, sem a inclusão de procedimentos demonstrativos que conferissem um maior formalismo às soluções. Além disso, embora tenha fornecido alguns exemplos de aplicação em ambas as obras analisadas, como na metalurgia, cartografia e outras áreas. Compreendemos que o escopo principal de ambas as publicações foi o tratamento matemático de objetos geométricos.

De modo geral, os conteúdos existentes no Notas de Análise Aplicada à Geometria de 1801 se mantiveram inalterados por mais de cinco décadas. Até mesmo a ordem das lições e problemas foram preservadas nas edições 6 posteriores. As novas edições do Aplicação da Análise à Geometria que foram publicadas posteriormente trouxeram como elemento central, os conteúdos

apresentados na edição de 1801. Evidenciando assim, a importância que essa produção tivera, com relação ao estudo de curvaturas e superfícies na Escola Politécnica.

Além disso, entendemos que, com as complementações teóricas que foram acrescentadas nas edições posteriores, o trabalho iniciado por Monge havia se tornado um meio de divulgação do conhecimento matemático para os ingressantes na Escola Politécnica. Trazendo para o escopo do trabalho problemas que foram considerados, naquele período, cientificamente relevantes.

Com isso, as edições posteriores passaram a conter um número maior de lições dedicadas à teoria das cordas vibrantes e a resolução de problemas de equações diferenciais parciais.

Com relação à edição de 1850, esse caráter de divulgação se tornou ainda mais evidente pois, além de trazer a versão original do *artigo Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas* (Investigações Gerais sobre Superfícies Curvas), acrescentou uma série de artigos que foram publicados no Jornal de Matemática Pura e Aplicada na década de 1840.

Na edição de 1850 da obra *Aplicação da Análise à Geometria*, organizada por Liouville, foram inseridas por este, contribuições de matemáticos como Bertrand, Puiseux entre outros. Essas contribuições representam uma continuidade às investigações apresentadas por Gauss, especialmente aquelas relacionadas ao Teorema Egrégio, assim como outros resultados relacionados às curvaturas, assim como questões envolvendo isometria local.

Na edição de 1850 do *Aplicação da Análise* organizado Liouville, observamos uma nova abordagem para a investigação de superfícies sendo inserida nesse material. Nessa edição, são apresentadas duas formas distintas para a realização de investigações desses objetos. A primeira, proposta por Monge, utiliza um sistema extrínseco como referência. Em contraste, as investigações desenvolvidas por Gauss, em conjunto com teorias do campo da geodésia, adotam um sistema intrínseco de referência, dando continuidade aos estudos cartográficos iniciados no séc. XVIII.

Resultando em uma obra com mais de quinhentas páginas, abordando uma variedade de investigações que incluem a formação de superfícies, curvatura dessas superfícies, a integração de equações diferenciais parciais

associadas a problemas de geodésia, bem como a resolução de questões relacionadas ao estudo das cordas vibrantes.

Compreendemos que as contribuições de Monge constituem uma parte significativa do desenvolvimento da Geometria do séc. XVIII. Suas pesquisas, centradas no estudo de superfícies em conexão com equações diferenciais parciais, revelaram uma abordagem pouco explorada até então. Além disso, seu método de projeção, em conjunto com construções geométricas, apontava para uma maneira bastante intuitiva de obter equações diferenciais parciais, enquanto propunha uma certa generalidade para os resultados alcançados.

Gaspard Monge elaborou um extenso material que tratou, de maneira abrangente, o estudo de geometria. Esse material poderia ser utilizado tanto por aqueles que almejavam aprofundar seus conhecimentos com relação ao estudo das representações gráficas, assim como para aqueles que buscavam compreender como operações algébricas poderiam estar relacionadas com construções geométricas.

Sua forma de descrição bastante intuitiva buscava criar no imaginário do leitor, um modo de identificação das mais variadas formas de se criar um objeto geométrico, fosse pelo movimento ou pela decomposição. Como resultado, suas obras continuam a ser examinadas há mais de duzentos anos, revelando novas informações a cada nova incursão no estudo.

11. REFERÊNCIAS

AMADEO, M; SCHUBRING, G. **A École Polytechnique de Paris: mitos, fontes e fatos**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 29, p. 435-451, 2015. Disponível em <https://www.13snhct.sbhct.org.br/resources/anais/10/1345056941_ARQUIVO_artigoEP-13snhct-MARCELLOAMADEO.pdf> Acessado em 29 de Maio de 2018.

ANDERSEN, K. **The Geometry of an Art. The History of the Mathematical Theory of Perspective From Alberti to Monge**. Nova Iorque: Springer. 2007.

ARAGO, F, J, D. **Biographie de Gaspard Monge, ancien membre de l'Académie des Sciences**. Paris : Firmin Didot Frères, 1853.

ARBELLOT, G. **La grande mutation des routes de France au XVIIIe siècle**. Annales Économies, Sociétés, Civilisations. Paris, V. 28, n. 3, p.765 – 791, 1973.

BARBIN, E. **La révolution mathématique au XVIIe siècle**. Paris: Ellipses, 2006.

BARBIN, E. **Monge's Descriptive Geometry: His Lessons and the Teachings Given by Lacroix and Hachett**. In. Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art : The Legacy of Gaspard Monge. Gewerbestrasse: Springer, p.3-18, 2019.

BARBIN, E. **Descriptive Geometry in France: Circulation, Transformation, Recognition (1795–1905)**. In. Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art : The Legacy of Gaspard Monge. Gewerbestrasse: Springer, p.19-38, 2019.

BARDINI, G. GIANELLA, G.M. **A Historical Walk along the Idea of Curvature, from Newton to Gauss Passing from Euler**. International Mathematical Forum. V. 11, p. 259-278, 2016.

BARROS, José D'Assunção. **O campo da história: especialidades e abordagens**. Petrópolis: Vozes, 2004.

BELHOSTE, B. PICON, A. SAKAROVITCH, J. **Les exercices dans les écoles d'ingénieurs sous l'Ancien Régime et la Révolution**. Histoire de l'éducation. N. 46. p. 53-109, 1990.

BELHOSTE, B. **Les Origines de l'École polytechnique. Des anciennes écoles d'ingénieurs à l'École centrale des Travaux publics**. Histoire de l'éducation. Paris, n.42, p. 13-53, 1989. Disponível em: https://www.persee.fr/doc/hedu_0221-6280_1989_num_42_1_3341. Acesso em: 20 mar. 2024.

_____. **Du Dessin d'ingénieur à la Géométrie descriptive, l'enseignement de Chastillon à l'École royale du génie de Mézières**. In *extenso*, p. 103-135, 1990. Disponível em : https://www.academia.edu/17136577/Du_dessin_ding%C3%A9nieur_%C3%A0_la_g%C3%A9om%C3%A9trie_descriptive_L'enseignement_de_Chastillon_%C3%A0_l'Ecole_royale_du_g%C3%A9nie_de_M%C3%A9zi%C3%A8res
Acesso em: 26, mar 2024.

_____. **La Révolution et l'éducation : Dernier bilan**. Histoire de l'éducation, n. 53, p. 41-51, 1992.

_____. **Le bicentenaire de l'Ecole normale supérieure: Entre histoire et mémoire.** Histoire de l'éducation. N. 69, p. 81-86, 1996.

_____. **De l'École Polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet.** Bulletin de la Sabix. Société des amis de la Bibliothèque et de l'Histoire de l'École polytechnique. N. 19, p. 9-29, 1998. Disponível em: <<https://journals.openedition.org/sabix/854>>. Acesso em: 03 fev. 2020.

BELTRAN, M, H, R; SAITO, F; TRINDADE, L, S, P. **História da Ciência para formação de professores.** São Paulo: Livraria da Física, v. 128, 2014

BERTRAND, J. **Démonstration d'un théorème de M. Gauss.** Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Paris, T. 13, p. 80-82, 1848.

BIOT, J. B. **Essai de Géométrie Abalytique, Appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre.** Paris, Bachelier, 1826.

BLOCH, M. **Apologia da História.** Tradução: André Telles. Rio de Janeiro: Zahar, 2002.

BORGATO, M.T, PEPE, L. **Gaspard Monge (1746-1818): Application of geometry to Analysis.** Eurasian Mathematical Journal. V.11, N.1, p. 13-24, 2020. Disponível em : https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=emj&paperid=354&option_lang=eng Acesso em: 20 mar, 2024.

BOSSE, A. **Manière universelle de Mr Desargues pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral,** Paris, Pierre Des-Hayes, 1648.

BOULESTEIX, P. **Ancêtre peu connue de l'École Polytechnique, l'École royale du génie de Mézières et sa belle descendance (1784-1794).** La Jaune et la Rouge. Paris, 1n.553, p.21-28, 2000. Disponível em : <https://www.lajauneetlarouge.com/wp-content/uploads/2013/05/553-page-021-027.pdf> Acessado em: 15 fev. 2023.

BOYER, C. B. **The History of Analytic Geometry.** Dover Publications. Mineola, New York, 1956.

_____. **História da Matemática.** Tradução: de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 2ª Ed, 1989, 1ª ed. 1968.

BURKE, P. **O que é História Cultural.** Tradução: Sergio Goes de Paula. Rio de Janeiro. Editora Zahar, 2ª Ed. 2008, 1a ed. 2004.

CAJORI, F. **Generalizations in Geometry as Seen in the History of Developable Surfaces.** The American Mathematical Monthly. Abingdon, v. 36, n. 8. p 431 – 437. 1929.

_____. **A History of Mathematical Notations.** Chicago: The Open Court Publishing Company, v.2, 1929.

CANGUILHEM, G. **Estudos de História e de Filosofia das Ciências. Concernentes aos vivos e à vida.** Tradução: Abner Chiquieri. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012. 1ª ed.1968.

CARLEVARIS, L. **Nicolas-François-Antoine de Chastillon: The Défilement of Fortifications at the Roots of Descriptive Geometry.** Nexus Network Journal. V. 16, n.3, p. 631 - 652, 2014.

_____. **La rappresentazione del território e lo studio de *Défilement* delle fortificazioni alle origini della geometria descrittiva.** Ricerche 2013-2018.

Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro della Architettura. Roma: Gangemi Editore, 2018.

CARLYLE, T. **The French Revolution: A History.** Prabhat Prakashan, 1837. The Project Gutenberg ebook, Disponível em: https://www.gutenberg.org/cache/epub/1301/pg1301-images.html#link2H_4_0001. Acesso em: 15 mar, 2024.

CAYLEY, A. **On Monge's "Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais.** Proceeding of London Mathematical Society. Londres, v.1, n.1, p.139- 143, 1882.

CHARDON, N. **Les fortifications de Vauban.** Le Réseau des sites majeurs Vauban. Besançon, Dossiê apresentado em 7 de julho de 2008. Disponível em: http://www.donnees.franche-comte.developpement-durable.gouv.fr/infos_geo/fiches_cartes/unesco/dpresse-vauban.pdf Acesso em: 20 mar, 2024.

CHASLES, M. **Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie.** Bruxelas, M. Bayez, imprimeur de l'Académie royale, 1837.

_____. **Sur l'enseignement de la Géométrie Supérieure – Discours d'introduction au Cours de Géométrie Supérieure fondé à la Faculté de Sciences de l'Académie de Paris.** Séance d'ouverture, le 22 décembre 1846. Paris, Journal de Mathématiques Pures et appliquées, v. 12, p. 1-40, 1847.

CHASTILLON, N. F. A. **Traité des ombres dans le dessin géométral (1763).** In Applications de Géométrie Descriptive aux Ombres, à la perspective, à la gnomonique et aux Engranges, ed. Théodore Olivier, 5–26. Paris: Carilian-Goeury et V. Dalmont, 1847.

CLAIRAUT, A. **Recherches sur les courbes à Double Courbure.** Paris : chez Nyon, 1731.

CONDILLAC, E. B. **Essai sur l'origine des connaissances humaines.** Amsterdam, Chez Pierre Montier, Amsterdam, 1746.

CONVENTION NATIONALE, **Développemens sur l'enseignement adopté pour l'École Centrale des Travaux Publics.** Paris, 1794.

COOLIDGE, J. **A History of Geometrical Methods.** Oxford: University Press Oxford. 1940.

CRAMER, G. **Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques.** Genebra, chez les frères Cramer et C. Philibert, 1750.

CUREL, **Essai sur la Perspective Linéaire et sur les Ombres.** Estrasburgo, Christmann et Levrault, 1766.

D'ALEMBERT, J, R. **Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration** (1747). Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres. Classe de mathématique. Paris, T. III, pp. 214-219, 1747.

_____. **Traité de Dynamique**. Paris, chez David l'aîné, Libraire, 1743.

D'ALEMBERT, J, R., BOSSUT, A., LANDE, CONDORCET. **Encyclopédie Méthodique Mathématiques**. Paris, T.I, 1784.

DEAR, P. **Mixed Mathematics. Wrestling with Nature**. Chicago: Universidade de Chicago, p. 149-172, 2011.

DELCOURT, J. **Analyse et géométrie : les courbes gauches de Clairaut à Serret et Frenet**. 2007. 302p. Tese (Doutorado em Matemática). Universidade Paris VI. 2007

_____. **Analyse et géométrie, histoire des courbes gauches De Clairaut à Darboux**. Archive for History of Exact Sciences. Springer, v. 65, p. 229-293, 2011.

DEMIDOV, S, S. **The Study of Partial Differential Equations of the First Order in the 18th and 19th Centuries**. Archive for History of Exact Sciences, v. 26, n. 4, p. 325-350, 1982. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/41133658> Acessado em: 21, mar. 2023.

DESARGUES, G. **Exemple de l'une des manières universelles du SGDL touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage**. Paris, 1636.

DHOMBRES, J,G.; DHOMBRES,N. Lazare Carnot. Revue d'histoire des sciences. T.52, n.3-4, p. 517-518, 1997, publicado em 1999.

DIAS, L, S. GRIMBERG, G, E. **O jornal de Liouville e a teoria geral das superfícies de GAUSS**. 16º Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia. Campina Grande, Paraíba, 2018.

DUPIN, C. **Développements de géométrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc.** ouvrage approuvé par l'institut de France, pour faire suite à la géométrie descriptive et à la géométrie analytique de M. Monge. Paris, Courcier imprimeur-libraire pour les mathématiques, 1813.

_____. **Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge**. Paris, Bachelier, Libraire, quai des Augustins, 1819.

DUPIN, Charles. **Applications de géométrie et de mécanique, à la marine, aux ponts et chaussées**. Pour faire suite aux développements de géométrie. Paris, Bachelier, successeur de Mrs. Courcier, 1822.

EULER, L. **Introductio in analysin infinitorum**. Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, Lausane, 1748.

_____. **De integratione aequationum differentialium Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae**. São Petersburgo, Academiae Scientiarum Petropolitanae, T.VIII, p. 3-63, 1763.

EULER, L. **De solidis quorum superficiem in planum explicare licet**, Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. Academia de Ciências, T.XVI, São Petersburgo, p. 3-34, 1772.

_____. **De motu turbinatori chordarum musicarum; ubi simul universa, teoria tam aequilibrii quam motus corporum flexibilium simulque etiam elasticorum breviter explicatur**. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae. São Petersburgo, Academia de Ciências, T.XIX, p.340-370, 1775.

FAVRE, A. **Les origines du système métrique**. Revue Philosophique de la France et de l'Etranger. Presses Universitaires de France. Paris, p. 43-170, 1931.

FERRAZ, M. H. M.; ALFONSO-GOLDFARB, A. M.; WAISSE, S. **Reflexões sobre a constituição de um corpo documental para a história da ciência: um estudo de caso do brasil colônia e brasil reino**. Acervo - Revista do Arquivo Nacional, v. 26, n. 1, p. 42-53, 2013. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/20.500.11959/brapci/40400>>. Acesso em: 03 fev. 2020.

FIGUIER, L. **Les aérostats**. Paris, Jouvet & Cie. Librairie Furne. 2ªed. 1887.

FRÉZIER, A. F. **La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des Bâtiments Civils & Militaires, ou traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture**. T. 1. Strasbourg: Doulsseker, 1737.

GASCHEAU, G. **Géométrie descriptive. Traité des surfaces réglées**. Paris, chez Bachelier, 1828.

GERGONNE, M. **Philosophie Mathématique. De l'analyse et de la synthèse, dans les sciences mathématiques**. Annales de Mathématiques pures et appliquées. T. 7, p. 345-372, 1816.

GLAS, E. **On the Dynamics of Mathematical Change in the Case of Monge and the French Revolution**. Studies in History and Philosophy of Science. V. 17, Elsevier, p.249-268, 1986.

GRAY, J. **Change and Variations. A History of Differential Equations to 1900**. Ed. Springer. Suíça. Springer Nature, 2021.

GRIMBERG, G. E. **A constituição da Teoria das Funções de Várias Variáveis no Século XVIII: O Início da Análise Moderna**. Orientador: Newton C. A. da Costa. 2000. 296 p. Tese (Doutorado em Filosofia) - Universidade de São Paulo, Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas Departamento de Filosofia, São Paulo, 2000.

GUGGENHEIMER, H. W. **Differential Geometry**. Nova Iorque : Dover Publications, 1973.

HACHETTE, J. P. N. **Éléments de Géométrie a trois dimensions**. Paris, Courcier, 1817.

_____. **Second Supplément de La Géométrie Descriptive**. Paris, Firmin Didot, 1818.

_____. **Traité de Géométrie Descriptive**. Paris : Mallet-Bachelier, 1822.

HINARD, **Dictionnaire Napoléon ou Recueil alphabétique des opinions et jugements de l'Empereur Napoléon I.** Paris, Plon Frères, Éditeurs, 1854.

HOUZEL, C. **Les équations aux dérivées partielles, 1740 – 1780.** Disponível em : [\(PDF\) Les équations aux dérivées partielles, 1740-1780 \(researchgate.net\)](#). Acessado em: 20 mar. 2023.

ISRAEL, G. **The Analytical Method in Descartes' Géométrie. Analysis and Synthesis in Mathematics History and Philosophy.** Londres : Kluwer Academic Publishers, p.3-34, 1997.

JAENEM, C, J. **Le Colbertisme.** Revue d'histoire de l'Amérique Française. Quebec : Institut d'histoire de l'Amérique Française, v.18, n.1, p.64-84, 1964.

LACROIX, F. **Essais sur l'enseignement en Général, et sur celui des Mathématiques.** Paris, Mrs. Courcier, Imprimeur-Libraire, 1816.

LAGRANGE, J. L. **Mécanique Analytique.** Paris, Ed. Albert Blanchard, 1788.

_____. **Théorie des fonctions analytiques.** Contenant Les Principes du Calcul Différentiel. Paris, Imprimerie de la République, 1797.

LAMBERT, J. H. **La perspective affranchie de l'embaras du plan géométral,** Zurique, chez Heidegger et Comp. 1759.

LAMÉ, G. **Mémoire sur les coordonnées curvilignes.** Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Paris, v. 5, p. 313-347, 1840.

LANGVIN, R. **Gaspard Monge, de la planche à dessin aux lignes de courbure. De la méthode :** De la méthode : recherches en histoire et philosophie des mathématiques. Ed. Presses universitaires de Franche-Comté, p. 135-157, 2002.

LAWRENCE, S. **Developable Surfaces : Their History and Application.** Nexus Network Journal. Turim, v. 13. p. 701 – 714, 2011.

LECESTRE, L. **Lettres inédites de Napoléon 1er: An VIII-1815.** Paris, E.Plon.Nourrit et c^{ie}, imprimeurs-éditeurs. 1897.

LEPAGE, G.G, DENIS, J. **Vauban and the French Military Under Louis XIV: an illustrated history of fortifications and strategies.** McFarland & Company, Carolina do Norte, 2010.

LEVI, G. Sobre Micro-história. In. BURKE, P. **A Escrita da História Novas Perspectivas.** São Paulo, Ed. UNESP, p. 133-163, 1992.

LIOUVILLE, J. **De la ligne géodésique sur un ellipsoïde quelconque.** Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris, v. 9, p. 401-408, 1844.

LIOUVILLE, J. **Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer.** Journal de mathématiques pures et appliquées. Paris, v. 11, p. 345-378, 1846.

_____. **Démonstration géométrique relative à l'équation des lignes géodésiques sur les surfaces du second degré.** Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Paris, v. 11, p. 21-24, 1846.

LOGET, F. **Entre l'analyse des Anciens et l'algèbre des Modernes: Y a-t-il une place pour Pierre de La Ramée.** Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences. N. 25, p. 131-154, 2021.

LÓPEZ, J.C. **Stereotomy: Stone Construction and Geometry in Western Europe 1200 – 1900.** Springer. Suíça, 2020.

LUTZEN, J. **Joseph Liouville 1809-1882 Master of Pure and Applied Mathematics.** Dinamarca: Springer-Verlag, 1990.

MEUSNIER, J, B. **Mémoire sur la Détermination du Plan de Site.** 1777, Paris, Arquivos da Escola de Pontes e Estradas. Ms. Archives de l'Inspection du Génie, art. 21, section 1.

MICHELET, J. **História da Revolução Francesa – Da queda da Bastilha à festa da federação.** Tradução Maria Lucia Machado. São Paulo, Companhia da Letras, 1989 1a ed. 1847.

MIGLIARI, R. **Descriptive Geometry: From its Past to its Future.** Nexus Network Journal. Turim, v. 14, n.3, p.555-571, 2011.

MONGE, G. **Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires dans les intégrales de quelques équations aux différences partielles.** Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin Pour les Années 1770-1773. Turim, Imprimerie Royale, T.V, p.16-78, 1773.

_____. **Seconde mémoire sur le calcul intégral de quelques équations aux différences partielles.** Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin Pour les Années 1770-1773. Turim, Imprimerie Royale. T.V, p.79-122, 1773.

_____. **Mémoire sur la construction des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles.** Mémoire de Mathématique et de Physique. Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ses Assemblées. Paris, l'imprimerie Royale, T.VII, p. 267-300. 1776.

_____. **Mémoire sur la détermination des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différences partielles.** Mémoire de Mathématique et de Physique. Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ses Assemblées. Paris, l'imprimerie Royale, T.VII, p. 305-327, 1776.

_____. **Mémoire sur les fonctions arbitraires continues ou discontinues qui entrent dans les intégrales des équations aux différences finies.** Mémoire de Mathématique et de Physique. Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ses Assemblées. Moutard, Imprimeur-Libraire de la Reine, & des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Paris, t.IX, p. 345-381. 1780.

_____. **Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une Application à la**

Théorie des Ombres & des Pénombres. Mémoire de Mathématique et de Physique. Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ses Assemblées. Moutard, Imprimeur-Libraire de la Reine, & des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Paris, T.IX, p. 382-440. 1780.

_____. **Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais.** Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, Imprimerie Royale, p. 666-704. 1784.

_____. **Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différens genres d'inflexions des courbes à double courbure** Mémoire de Mathématique et de Physique. Présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans, & lûs dans ses Assemblées. Moutard, Imprimeur-Libraire de la Reine, & des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences. Paris, T.X, p. 511-550. 1785.

_____. **Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes.** Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin. Première Partie. Turin, Chez Jean-Michel Briolo, p. 19-30. 1786.

_____. **Sur l'intégration de l'équation aux différences partielles $Lddzdx^2 + Mddzxdx + Nddzdy^2 = 0$ dans laquelle les coefficients L, M, N sont quelconques.** Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin. Première Partie. Turin, Chez Jean-Michel Briolo, p. 31-33. 1786.

_____. **Mémoire sur une méthode d'intégrer les équations aux différences ordinaires, lorsqu'elles sont élevées, & dans les cas où leurs intégrales complètes sont algébriques.** Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, Imprimerie Royale, p. 719-724. 1786.

_____. **Mémoire sur l'intégration des équations aux différences finies qui ne sont pas linéaires.** Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, Imprimerie Royale, p. 725-730. 1786.

_____. **Sur la construction des Fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des Équations aux différences partielles.** Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers savans, & lûs dans ses Assemblées. Paris, Imprimerie Royale, p.267-300, 1786.

_____. **Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes.** Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, Imprimerie Royale, p. 85-117. 1787.

_____. **Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles.** Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, Imprimerie Royale, p. 118-192. 1787.

_____. **Supplément où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires, pour lesquelles les conditions d'intégration ne sont pas satisfaites, sont susceptibles d'une véritable intégration, & que c'est de cette intégration que dépend celle des équations aux différences partielles élevées.** Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Paris, Imprimerie Royale, p. 502-576. 1787.

_____. **Développemens sur l'enseignement adopté pour l'Ecole centrale des Travaux publics.** Cf. J. Langins, op. cit. ci-dessus, Annexe I, Paris, p. 227-269, 1794.

_____. **Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoïde.** Journal de l'École polytechnique ou Bulletin du Travail Fait a cette École. Imprimerie de la République. Paris, Cad. 2, p. 145-165. 1796.

_____. **Des courbes à double courbure.** Journal de l'École polytechnique ou Bulletin du Travail Fait a cette École. Imprimerie de la République. Paris, Cad. 6, p.345-363, 1799.

_____. **Géométrie Descriptive. Leçons données aux Écoles Normales, l'an 3 de la République.** Paris, Baudouin Imprimeur du Corps Législatif et de l'Institut National, 1799.

_____. **Feuilles d'analyse appliquée à la Géométrie.** Paris, Baudouin Imprimeur du Corps Législatif, du Tribunat, et de l'Institut National, 1801.

_____. **Application de l'analyse à la géométrie.** Paris, Bernard librairie de l'Ecole Impériale Polytechnique, 1807.

_____. **Application de l'analyse à la géométrie à l'usage de l'Ecole impériale Polytechnique.** Paris, Veuve Bernard, 1809.

_____. **Géométrie Descriptive.** Quatrième Édition. Augmentée d'une théorie des ombres et de la Perspective, extraite des papiers de l'auteur, Par M. Brisson. Paris, 1820.

_____. **Application de l'analyse a la géométrie.** Cinquième édition revue, corrigée et annotée par M. Liouville. Paris, Bachelier, 1850.

MOUSSARD, G. **Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891).** Tese de Doutorado, Université de Nantes-Faculté des Sciences et Techniques, 2015.

NABONNAND, P. **Contributions à l'Histoire de la géométrie projective in 19e Siècle.** Disponível em < <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01082207/document> > Acessado em : 14 de março de 2018.

NEUEN, A, C. **Lambert 's Work on Geographic Map Projections.** Mathematical Geography in the Eighteenth Century: Euler, Lagrange and Lambert. Cagliari : Springer, p. 183 – 202, 2022.

NICERON, J, F. **La Perspective Curieuse.** Avec L'opique et la Catoptrique du R.P. Mersenne du mesme Ordre, mise in lumiere après la mort de l'Autheur. Paris, Chartres, 1652.

PALARE, O. **Geometria Descritiva** História e didática - novas perspectivas. 2013. 323f. Tese (Doutorado em Belas Artes) – Universidade de Lisboa. Lisboa, 2013.

PANOFSKY, E. **A Perspectiva como Forma Simbólica.** Lisboa: Edições 70, 1999. Primeira edição 1927.

PARENT, A. **Des affections des superficies. De leurs plans tangents.** Recherches de Mathématique et de Physique. Paris, T.1, Florentin Delaulne, p.181-184, 1705.

PASINI, E. **Arcanum Artis Inveniendi: Leibniz and Analysis. Analysis and Synthesis in Mathematics History and Philosophy.** Londres, Kluwer Academic Publishers. p.35-44. 1997

PAUTET, S. **Produire une élite savante et technicienne à l'École du génie de Mézières : dispositions techniques et scientifiques des élèves ingénieurs.** Étude de cas Mécaniciens et ingénieurs, p.119–133, 2016. Disponível em <<https://journals.openedition.org/artefact/369>> Acessado em: 14 de julho de 2021.

POITREY, F. F, HAUFMANN, J. B. **Le corps des ponts et chaussées du génie civil à l'aménagement du territoire.** 2018. Disponível em: <https://hal.science/hal-01885870/document> Acessado em: 10, mar. 2023.

PUISEUX, V. **Problème de géométrie.** Journal de Mathématiques pures et appliquées. Paris, V. 7, p. 65-69, 1842.

RISKIN, J. **The Defecating Duck, or The Ambiguous Origins of Artificial Life.** Critical Inquiry. Chicago : Universidade de Chicago, V.29, n.4, p. 599-633, 2003.

ROBERTS, M. **Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoïde.** Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Paris, v.11, p.1-4, 1846.

ROBERVAL, G. P. **Observations sur la composition des mouvements, et sur le moyen de trouver les touchantes.** Divers ouvrages de M. de Roberval. Académie Royale des Sciences, Paris, p.69-113, 1693.

SAKAROVITCH, J. **La Taille des pierres et la Géométrie Descriptive.** Bulletin d'information de l'École d'Architecture. Paris, p. 117-138. 1993.

_____. **Aux origines de la géométrie descriptive: entre histoire des sciences et histoire de l'architecture.** Bulletin d'information de l'École d'Architecture. Paris, p. 31-33. 1999.

_____. **Gaspard Monge, géométrie descriptive, (1795).** Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940. Elsevier Science, p. 225-241, 2005. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/book/9780444508713/landmark-writings-in-western-mathematics-1640-1940?via=ihub> Acesso em 20 mar, 2024.

_____. **Gaspard Monge Founder of “Constructive Geometry”.** Third International Congress on Construction History. Cottbus, p.1293-1300, 2009.

_____. **Le fascicule de coupe des pierres de Girard Desargues.** Bulletin d'information de l'École d'Architecture. Paris, p.121-147, 2010.

_____. **La géométrie descriptive et l'oeuvre de Gaspard Monge.** Sciences : concepts et problèmes. Besançon, 2015. Disponível em <[I](#)> Acessado em: 14 de março de 2021.

SALVATORE, M. **Prodromes of Descriptive Geometry in the Traité de stéréotomie by Amédée François Frézier.** Nexus Network Journal, v. 13, p. 671–699, 2011.

_____. **La stereotomia scientifica in Amédée François Frézier Prodromi della geometria descrittiva nella scienza del taglio delle pietre.** Florença: Firenze University Press, 2012.

SCHUBRING, G. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition.** Springer, Nova Iorque, 2005.

SERGESCU, P. **Le Bicentenaire de Gaspard Monge.** Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. Paris, T.1, n.2, p.162-170, 1947.

SERRET, J, A. **Sur l'intégration de l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$.** Journal de Mathématiques pures et appliquées. Paris, V. 13, p. 353-360, 1848.

SOTOMAYOR, Jorge. **Elipsoide de Monge.** Matemática Universitária, Rio de Janeiro, n. 15, p. 33-47, 1993. Disponível em: < https://rmu.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/27/2018/03/n15_Artigo04.pdf > Acessado em: 20. Jan. 2022.

SOUZA, J, V, S. **Elementos de Geometria Descrittiva; com aplicações às artes. Extrahidos das Obras de Monge.** Rio de Janeiro, Impressam Regia, 1812.

STOKER, J. J. **Differential Geometry.** Nova Iorque: Wiley-Interscience, 1963.

STRIJK, D.J. **Outline of a History of Differential Geometry. History of Science Society.** Chicago Journal. Chicago, v. 20, N. 1, p. 161-191. 1933.

_____. **Lectures on Classical Differential Geometry.** Second Ed. Dover Publications, Nova Iorque. 1950.

TATON, R. **Un texte inédite de Monge: Réflexions sur les équations aux différences partielles.** Osiris, v. 9, p. 44-61, 1950.

_____. **L'œuvre Scientifique de Gaspard Monge.** Paris, Presses Universitaires de France, 1951.

_____. **Découvert d'un exemplaire original du « Brouillon project » sur les coniques de Desargues.** Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. T.4, n° 2, p.176-181, 1952.

TAYLOR, B. **New Principles of Linear Perspective; Or the Art of Designing on a Plane, the Representations of All Sorts of Objects, in a more general and simple method.** Londres, John Ward, 1749.

_____. **New Principles of Linear Perspective; Or the Art of Designing on a Plane, the Representations of All Sorts of Objects, in a more general and simple method.** Londres, Taylor, 4ª ed., 1811.

TEISSIER, B. **Apparent Contours from Monge to Todd.** In: BOI, D. et al. (Ed.). A Century of Geometry Epistemology, History and Mathematics. 1ª ed. Berlin. Ed. Springer-Verlag. p. 55-65, 1992

TROMPOWSKY, R. L. **Geometria Diferencial.** Rio de Janeiro, Imprensa Nacional, 1904.

VAULEZARD, J, L. **Perspective cylindrique et conique**. Paris, 1630.

XAVIER, J, P. SANTOS, J. C. PINHO, E, M. Portuguese Textbooks on Descriptive Geometry. In. **Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art : The Legacy of Gaspard Monge**. Gewerbestrasse, Springer, p.97-112, 2019.

WISNIAK, J. **Gaspard Monge**. Revista CENIC Ciências Químicas. V. 44, p 164 – 178, 2013.

ZAMOYSKI, A. **Napoleão: O homem por trás do mito**. Tradução: Rogério Galindo Ed. Crítica. Rio de 2020. 1ª ed. 2018.