



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Comparação de Modelos Estatísticos para Estimação do Intervalo de Tempos entre Ultrapasses de um Limiar de Temperatura na Cidade de P. Prudente-SP

Maria Magdalena Kcala Alvaro

Orientador: Prof. Dr. Mário Hissamitsu Tarumoto

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Comparação de Modelos Estatísticos para
Estimação do Intervalo de Tempos entre
Ultrapasses de um Limiar de Temperatura na
Cidade de P. Prudente-SP**

Maria Magdalena Kcala Alvaro

Orientador: Prof. Dr. Mário Hissamitsu Tarumoto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, fevereiro de 2019

A473c Alvaro, Maria Magdalena Kcala
Comparação de Modelos Estatísticos para Estimação do Intervalo de Tempos entre Ultrapasses de um Limiar de Temperatura na Cidade de P. Prudente-SP / Maria Magdalena Kcala Alvaro. -- Presidente Prudente, 2019
115 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Mário Hissamitsu Tarumoto

1. Modelos de Markov. 2. Cópulas. 3. Tempos entre ultrapasse. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: COMPARAÇÃO DE MODELOS ESTATÍSTICOS PARA ESTIMAÇÃO DO INTERVALO DE TEMPOS ENTRE ULTRAPASSES DE UM LIMIAR DE TEMPERATURA NA CIDADE DE PRESIDENTE PRUDENTE (SP)

AUTORA: MARIA MAGDALENA KCALA ALVARO

ORIENTADOR: MÁRIO HISSAMITSU TARUMOTO

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MÁRIO HISSAMITSU TARUMOTO

Departamento de Estatística / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente



Profa. Dra. ELIZABETH MIE HASHIMOTO

Campus Londrina / Universidade Tecnológica Federal do Paraná



Profa. Dra. VILMA MAYUMI TACHIBANA

Departamento de Estatística / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente - UNESP

Presidente Prudente, 28 de fevereiro de 2019

À minha mãe Sonia e meu pai Sergio, dedico!

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por minha vida, por me ouvir, abençoar, guardar e cuidar nesta caminhada e enquanto permaneço longe de minha família de estar sempre cuidando deles, eu devo todas as graças.

Agradeço aos meus pais Sergio e Sonia que incondicionalmente me apoiaram neste caminho desde o dia em que tomei a decisão de prosseguir os meus estudos de pós-graduação, mesmo sabendo que eu ia sair e ficar longe deles.

Gratidão aos meus irmãos Estefani, Abel, Angel, Summi, Jhojan por ser tão maravilhosos comigo que mesmo longe, me apoiaram e indiretamente contribuíram para que este trabalho se realizasse.

Agradeço muito ao meu orientador Professor Doutor Mário Hissamitsu Tarumoto, por ter me ajudado bastante em cada passo desta dissertação, por sua disponibilidade de tempo que sempre manifestou e a empatia com que recebeu minhas ideias me permitiu vencer minhas inseguranças neste processo.

Gratidão aos professores do PósMAC que fizeram parte da minha formação acadêmica nesta etapa, por me ajudar tirando minhas dúvidas nas disciplinas e pesquisa.

Os meus agradecimentos aos amigos e colegas do PósMAC, por sua vontade de me-ajudar não só tirando minhas dúvidas e sugestões sobre meu trabalho, mas também me-dando conselhos sobre outros aspectos da vida cotidiana.

Em fim agradeço a todas as pessoas que fizeram parte desta etapa da minha vida.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“O sucesso nasce do querer,
da determinação e persistência
em se chegar a um objetivo.
Mesmo não atingindo o alvo,
quem busca e vence obstáculos,
no mínimo fará coisas admiráveis”.*
José de Alencar

Resumo

A observação de fenômenos naturais, como as mudanças de temperatura é bastante frequente no mundo atual, de forma que vários estudos têm sido realizados com o intuito de prever a ocorrência delas tendo em vista o que ocorreu no passado. Estudos desta natureza, em que a coleta de dados ocorre de forma contínua, seja por medida horária ou diária, não apresenta independência entre as observações. Entre as possíveis formas de análise, há a aplicação de técnicas de séries temporais ou também a teoria dos valores extremos. No entanto, um dos objetivos deste estudo é construir uma matriz de transição, de tal forma que possamos determinar a probabilidade, por exemplo, de alta temperatura amanhã, dado que hoje foi observado este fenômeno. Para a obtenção deste resultado, uma possibilidade é construir um modelo baseado em dados dependentes que seguem um processo de Markov, em que a suposição é de que exista dependência somente com o dia anterior. Neste trabalho, pretendemos construir este modelo e realizar a aplicação em dados de temperatura na cidade de Presidente Prudente-SP no período de janeiro de 2011 a dezembro de 2016. Posteriormente vamos realizar comparações entre o modelo markoviano definido a partir da distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin e outros modelos markovianos definidos a partir das funções cópulas.

Palavras-Chave: *modelos de Markov, cópulas, tempos entre ultrapasse.*

Abstract

The observation of natural phenomena, such as temperature changes, is quite frequent in the world today, so that several studies have been carried out with the intention of predicting their occurrence in view of what has happened in the past. Data of this nature, in which the data collection occurs continuously, whether by hourly or daily measurement, does not present independence between observations. Among the possible forms of analysis is the application of time-series techniques, however, the purpose of this study is to construct a transition matrix, so that we can determine the probability, for example, of high temperature tomorrow, since today this phenomenon was observed. To obtain this result, one possibility is to construct a model based on dependent data that follows a Markov process, in which the assumption is that there is dependence only with the previous day. In this work, we intend to build this model and perform the application on temperature data in the city of Presidente Prudente-SP from January 2011 to December 2016. For which comparisons were made between the Markovian model defined from the distribution Weibull bivariate of Marshall and Olkin and other Markovian models defined from the copula functions.

Keywords: *markov model, copulas, interarrival time.*

Lista de Figuras

3.1	Mínimas temperaturas diárias na cidade de Presidente Prudente-SP no mês de dezembro de 2016.	26
3.2	Base de dados.	26
3.3	Tempos em dias entre ultrapasses das mínimas temperaturas diárias em relação ao limiar 22°C para a cidade de Presidente Prudente-SP no mês de dezembro de 2016.	27
4.1	Forma típica das funções de densidade de probabilidade, de distribuição acumulada, de sobrevivência e de risco da distribuição de Weibull para alguns valores dos parâmetros (α, β)	30
4.2	Curva da função de distribuição acumulada da distribuição Weibull <i>versus</i> a curva da sua função de distribuição acumulada empírica e a curva de sobrevivência estimada pela distribuição Weibull <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, para os valores estimados dos parâmetros $(\hat{\alpha} = 0,7038999, \hat{\beta} = 3,5936287)$	34
4.3	Curva da função de distribuição acumulada da distribuição exponencial generalizada <i>versus</i> a curva da sua função de distribuição acumulada empírica e a curva de sobrevivência estimada pela distribuição exponencial generalizada <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, para os valores estimados dos parâmetros $(\hat{\alpha} = 0,6451622, \hat{\beta} = 7,4681412)$	34
5.1	Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin <i>versus</i> a curva da função de distribuição acumulada empírica.	43
5.2	Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.	43
6.1	Gráficos das cópulas M, W e II.	51
9.1	Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula FGM <i>versus</i> a curva da função de distribuição acumulada empírica.	76
9.2	Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula FGM <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.	76
9.3	Tempo médio observado para o próximo ultrapasse <i>versus</i> o tempo observado até a ocorrência do atual ultrapasse.	78
9.4	Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Gumbel Barnett <i>versus</i> a curva da função de distribuição acumulada empírica.	86

9.5	Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Gumbel Barnett <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.	87
9.6	Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Frank <i>versus</i> a curva da função de distribuição acumulada empírica.	92
9.7	Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Frank <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.	92
9.8	Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Clayton <i>versus</i> a curva da função de distribuição acumulada empírica.	98
9.9	Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Clayton <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.	98
9.10	Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq <i>versus</i> a curva da função de distribuição acumulada empírica.	107
9.11	Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq <i>versus</i> a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.	107

Lista de Tabelas

4.1	Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição Weibull univariada e exponencial generalizada univariada. . . .	33
5.1	Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin.	42
5.2	Matriz de transição para o modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin.	45
9.1	Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula FGM.	75
9.2	Estimativa do tempo médio necessário para a ocorrência do próximo ultrapasse em função do número de dias entre o penúltimo e o atual ultrapasse.	78
9.3	Matriz de transição para o modelo markoviano via cópula FGM.	80
9.4	Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Gumbel Barnett.	86
9.5	Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Frank.	91
9.6	Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Clayton.	97
9.7	Matriz de transição para o modelo markoviano via cópula Clayton.	100
9.8	Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq.	106
9.9	Medidas de dependência entre os tempos T_{i+1} e T_i	108
9.10	Cálculo do AIC e AICc para o modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin e os modelos markovianos Weibull via cópulas FGM, Gumbel Barnett, Frank, Clayton e Ali-Mikhail-Haq.	108

Lista de Siglas

- BVW Weibull Bivariada.
- BVE Exponencial Bivariada.
- EMV Estimador de máxima verosimilhança.
- ECDF Função de distribuição acumulada empírica.
- f.d.p. Função densidade de probabilidade.
- f.d.a. Função distribuição acumulada.
- f.g.m. Função geradora de momentos.
- FGM Farlie-Gumbel-Morgenstern.
- GE Exponencial generalizada.
- MOBW Weibull Bivariada de Marshall e Olkin.
- V.a. Variável aleatória.

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	12
Lista de Siglas	15
Capítulos	
1 Introdução	19
2 Alguns Conceitos Básicos	21
2.1 Tempo de Falha	21
2.2 Censura	21
2.3 O Método de Máxima Verossimilhança	22
2.4 Métodos de Seleção de Modelos	22
2.4.1 Critério de Informação de Akaike (AIC)	22
2.4.2 Critério de Informação de Akaike Corrigido (AICc)	23
3 Descrição do Problema	25
4 Distribuição Weibull Univariada	29
4.1 Introdução	29
4.2 Estimação de Máxima Verossimilhança	31
4.3 Distribuição Exponencial Generalizada Univariada	32
4.4 Estimação de Máxima Verossimilhança	32
5 Modelo Markoviano via Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin	37
5.1 Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin	37
5.2 Estimação de Máxima Verossimilhança	40
6 Introdução à Teoria de Cópuas	47
6.1 Conceitos Preliminares	47
6.2 Cópuas	49
6.3 Teorema de Sklar	51
6.4 Cópuas e Variáveis Aleatórias	54

7	Conceitos de Dependência	57
7.1	O Coeficiente de Correlação Linear	58
7.2	Concordância	59
7.2.1	Coeficiente Tau de Kendall	59
7.2.2	Coeficiente Rho de Spearman	61
7.3	Dependência Caudal	62
7.4	Dependência de Quadrante Positivo	64
8	Principais Famílias de Cópulas Bivariadas	65
8.1	Cópulas Arquimedianas	65
8.1.1	Propriedades	66
8.1.2	Tau de Kendall	67
8.1.3	Dependência Caudal	67
8.1.4	Cópula Clayton	68
8.1.5	Cópula Frank	68
8.1.6	Cópula Gumbel Hougaard	68
8.1.7	Cópula Gumbel-Barnett	68
8.1.8	Cópula Ali-Mikhail-Haq (AMH)	68
8.2	Cópulas de Farlie-Gumbel-Morgenstern	69
8.2.1	Cópulas com Seções Quadráticas	69
8.2.2	Cópulas de FGM	69
9	Modelos Markovianos Weibull a Partir de Funções Cópulas	71
9.1	Modelo Markoviano Weibull via Cópula Farlie Gumbel Morgenstern	71
9.1.1	Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Farlie Gumbel Morgenstern	71
9.1.2	Estimação de Máxima de Verossimilhança	73
9.2	Modelo Markoviano Weibull via Cópula Arquimediana Gumbel Barnett	80
9.2.1	Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Gumbel Barnett	80
9.2.2	Estimação de Máxima Verossimilhança	83
9.3	Modelo Markoviano Weibull via Cópula Arquimediana Frank	87
9.3.1	Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Frank	87
9.3.2	Estimação de Máxima Verossimilhança	89
9.4	Modelo Markoviano Weibull via Cópula Arquimediana Clayton	93
9.4.1	Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Clayton	93
9.4.2	Estimação de Máxima Verossimilhança	95
9.5	Modelo Markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq	100
9.5.1	Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Ali-Mikhail- Haq	100
9.5.2	Estimação de Máxima Verossimilhança	103
9.6	Comparação do Modelo Markoviano via Distribuição Bivariada Weibull de Marshall e Olkin e os Modelos Markovianos Weibull via Cópulas FGM, Gumbel Barnett, Frank, Clayton e Ali-Mikhail-Haq.	108
10	Considerações	109
	Referências	109

Introdução

Atualmente, as mudanças de temperatura são um dos principais problemas que a população de forma geral enfrenta, pois afeta diretamente a saúde das pessoas. Doenças como paludismo (malária), dengue, desnutrição são sensíveis a mudanças de temperatura. Segundo a Organização Mundial da Saúde, temperaturas extremas do ar contribuem diretamente nas disfunções por doenças cardiovasculares e respiratórias, sobre tudo entre as pessoas de idade avançada e crianças. Altas temperaturas provocam também aumento dos níveis de ozônio e de outros contaminantes do ar que agravam as doenças cardiovasculares e respiratórias. Além disso, desempenham importante papel na produção agrícola, já que exercem uma influência significativa no processo de germinação das sementes. Outro exemplo de consequência de elevadas temperaturas é o consumo elevado de energia elétrica, pois fazem necessário a utilização de sistemas de climatização de ambientes, principalmente nos grandes centros urbanos. Por outro lado, temperaturas muito baixas também podem causar o mesmo problema, ou seja, as temperaturas extremas causam dificuldades de forma geral.

Desta forma, observamos que a informação da ocorrência de eventos desta natureza é uma importante aliada para poderes públicos ou empresas privadas que podem se preparar para estas ocorrências. Por exemplo, empresas privadas podem dimensionar mão de obra ou estoques de aparelhos de climatização tendo em vista altas temperaturas em determinados períodos do ano. Com estas considerações, a construção de modelos que possam emitir alertas ou realizar previsões sobre a ocorrência de ultrapasses de um certo limiar aceitável pode diminuir as consequências causadas por estes fenômenos naturais. Entre as várias possibilidades de análises, uma delas é considerar modelos em que o objetivo é o estudo de intervalos de tempos entre os ultrapasses das medições de temperatura de um determinado limiar fixado. Desta forma, ao considerar um limite de temperatura aceitável de acordo com o objetivo do estudo e de modo que temperaturas mínimas maiores à fixada são consideradas altas, é possível construir a base de dados para construção de modelos que possam encontrar a probabilidade de ultrapasses do limiar nos próximos dias. Por outro lado a presença de dependência entre os intervalos de tempos entre ocorrências do evento de interesse (ultrapassar o limite de temperatura fixada) é possível, pois geralmente a temperatura do ar depende pelo menos da temperatura do dia anterior já que existem dias frios ou quentes seguidos. Desta forma será necessária a utilização de modelos que, além de realizar previsões, permita o estudo da dependência entre os tempos. Existem algumas possibilidades para a construção de modelos desta natureza. Nesta pesquisa, foram construídos modelos através da suposição de que a sequência de intervalos de tempos segue um processo de Markov, ou seja, cada intervalo de tempos observado depende somente do anterior. Para a construção destes modelos foi necessário o estudo

de distribuições Weibull bivariadas de Marshall e Olkin e as derivadas de funções cópulas. Atualmente a construção de modelos por meio de cópulas está sendo bastante utilizada, pois permite a obtenção de modelos bivariados a partir de distribuições de probabilidades marginais independentes e também por suas boas propriedades, especificamente utilizadas para estudar a dependência existente entre as variáveis de estudo. Alguns dos trabalhos que utilizaram esta forma de estudo de um fenômeno natural podem ser citadas: Tarumoto et.al (2014) [44], Rodrigues et.al (2012) [37] e Sim (1992) [42].

A aplicação dos modelos foi realizada no conjunto de dados de temperaturas no período de janeiro a dezembro dos anos 2011 a 2016, da cidade de Presidente Prudente-SP, disponibilizadas pela Estação Meteorológica da FCT/UNESP com a autorização do Prof. Dr. José Tadeu Garcia Tommaselli do departamento de Geografia. Neste trabalho há duas fases: a primeira é comparar os modelos segundo o ajuste gráfico aos dados reais de interesse (tempos entre ocorrências de ultrapasse de um limiar de temperatura fixada), e na segunda fase é comparar os modelos utilizando os métodos do AIC e AICc.

Para atingir este objetivo, no capítulo 2 são revisados rapidamente alguns conceitos estatísticos já conhecidos que serão utilizados no decorrer deste trabalho. No capítulo 3 é apresentado a descrição do problema do estudo. No capítulo 4 são apresentados as distribuições Weibull univariada e uma breve apresentação da distribuição exponencial generalizada e o ajuste dos mesmos aos dados reais. No capítulo 5 é discutido o modelo markoviano via a distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin proposta por Marshall e Olkin (1967). No capítulo 6, é abordada uma introdução a teoria de cópulas. No capítulo 7 é apresentada os conceitos de dependência. No capítulo 8 as principais famílias de cópulas. No capítulo 9 são discutidos a construção e ajuste aos dados reais dos modelos markovianos via distribuições bivariadas Weibull derivadas das cópulas Farlie-Gumbel-Morgenstern, Gumbel-Barnett, Clayton, Frank e Ali-Mikhail-Haq e por último no capítulo 10 são apresentados os principais resultados e considerações finais e propostas futuras. Para a realização desta dissertação, estabeleceram-se os seguintes objetivos:

- Construção de modelos bivariados a partir de marginais independentes por meio de cópulas.
- Construção de um modelo com o intuito de estimar o intervalo de tempo entre ultrapasses assumindo um processo markoviano.
- Obtenção da matriz de transição entre os tempos de ultrapasses do limiar.
- Obtenção da esperança condicional do tipo $E[t_{i+1}/t_i]$.

Alguns Conceitos Básicos

2.1 Tempo de Falha

Tempo de falha é definido como o tempo até a ocorrência de um evento de interesse, podendo ser o tempo até a morte do paciente, bem como até a cura ou recidiva de uma doença, Colosimo e Giolo (2010)[19], ou como neste trabalho, o tempo até o ultrapasse do limite de temperatura fixada. O tempo de falha é constituído por três elementos:

- O tempo de origem, deve ser precisamente definido.
- A escala de medida, em geral é o tempo de relógio ou o tempo real.
- O evento de interesse, usualmente chamado de falha.

2.2 Censura

A censura é uma observação incompleta ou parcial que pode ocorrer por uma variedade de razões, dentre elas a não ocorrência do evento de interesse até o término do experimento, Colosimo e Giolo (2010)[19]. Além disso, a censura pode ser classificado como:

- Censura à direita:
 - Censura do Tipo I: O estudo será terminando após um período de tempo estabelecido. As observações cujo evento de interesse não foi observado até este tempo são ditas censuradas.
 - Censura do Tipo II: O estudo será terminado após ter ocorrido o evento de interesse para um número pré-estabelecido de observações.
 - Censura Aleatória: Ocorre se a observação for retirada no decorrer do estudo sem ter ocorrido o evento de interesse ou se o evento de interesse ocorrer por uma razão diferente da estudada.
- Censura à esquerda: Ocorre quando o tempo registrado é maior do que o tempo de falha. Isto é, o evento de interesse já aconteceu quando o individuo foi observado.
- Censura intervalar: É um tipo mais geral de censura, ocorre quando o tempo de falha não é conhecido exatamente, mas sim pertencem a um intervalo, isto é, $T \in (t_1, t_2]$.

2.3 O Método de Máxima Verossimilhança

Este método trata o problema de estimação da seguinte forma: baseado nos resultados obtidos pela amostra, qual é a distribuição, entre todas aquelas definidas pelos possíveis valores de seus parâmetros, com maior possibilidade de ter gerado tal amostra?

A seguir este método é traduzido para conceitos matemáticos, a fim de que seja possível obter estimadores para os parâmetros, no caso em que a amostra de observações t_1, t_2, \dots, t_n de uma população de interesse tem observações com Censura do Tipo I.

As observações podem estar divididas em dois conjuntos, um deles com as r observações não censuradas ($1, 2, \dots, r$) e, o outro, com as $n-r$ observações censuradas ($r+1, r+2, \dots, n$), sendo assim, $L(\boldsymbol{\theta})$ que denota a função de verossimilhança, assume a seguinte forma geral, Colosimo e Giolo (2010)[19]:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^r f(t_i; \boldsymbol{\theta}) \prod_{i=r+1}^n S(t_i; \boldsymbol{\theta}), \quad (2.1)$$

em que o segundo termo tem forma $\prod_{i=r+1}^n S(c; \boldsymbol{\theta}) = [S(c; \boldsymbol{\theta})]^{n-r}$, já que as censuras ocorrem em $T = C$, T variável aleatória do tempo de falha e C variável aleatória independente de T , representando o tempo de censura.

2.4 Métodos de Seleção de Modelos

2.4.1 Critério de Informação de Akaike (AIC)

O critério de informação de Akaike (AIC) (1974) [2] é bastante utilizado para a seleção de modelos estatísticos e é baseado na distância de Kullback-Leibler. A informação de Kullback-Leiber é considerada como uma medida de discriminação entre o modelo proposto $g(x)$ e o modelo verdadeiro $f(x)$ e é dado por:

$$I_{K-L}(f, g) = \int \log \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] f(x) dx.$$

Akaike ((1973) [1] p. 199, (1974) [2], (1985) [3], (1994) [4] p. 421) mostrou que a questão crítica para obter um rigoroso critério de seleção de modelos baseado em informações K-L é estimar

$$E_Y[E_X[\log(g(x/\hat{\theta}(y)))]],$$

onde $E_X[\log(g(x/\hat{\theta}(y)))] = E_f[\log(g(x/\theta))]$, com θ substituído pelo estimador de máxima verossimilhança de θ sobre uma amostra Y do modelo proposto g . É conveniente conceituar X e Y como amostras aleatórias independentes da mesma distribuição. Akaike ((1973) [1] p. 199, (1974) [2]) encontrou uma relação formal entre a informação K-L e a teoria da probabilidade. Ele descobriu que o valor do logaritmo da função de verossimilhança maximizada era uma estimativa tendenciosa de $E_Y[E_X[\log(g(x/\hat{\theta}(y)))]]$, com vício aproximadamente igual a K , que indica o número de parâmetros estimados no modelo proposto g (para detalhes, ver Burnham e Anderson (2002) [8]). Este é um resultado assintótico de importância fundamental. Assim, um estimador aproximadamente não viciado de $E_Y[E_X[\log(g(x/\hat{\theta}(y)))]]$, para amostras grandes e bons modelos é $\log[L(\hat{\theta}/\text{dados})] - K$. Este resultado é equivalente a

$$\log(L(\hat{\theta}/\text{dados})) - K = C - \hat{E}_{\hat{\theta}}[I(f, \hat{g})],$$

onde $\hat{g} = g(\cdot/\hat{\theta})$.

Esta descoberta torna possível combinar estimativa e seleção de modelos sob uma estrutura de otimização unificada. Akaike encontrou um estimador do esperado da informação

K-L com base no logaritmo da função de verossimilhança maximizada, corrigida para um viés assintótico:

$$\hat{E}(I_{K-L}) = \log(L(\hat{\theta}/\text{dados})) - K,$$

em que K é o termo de correção de vício assintótico e não é de forma alguma arbitrário. Akaike ((1973) [1] p. 199, (1974) [2]) multiplicou esse resultado por (-2) e isso se tornou no critério de informação de Akaike, dado por:

$$AIC = -2\log(L(\hat{\theta}/\text{dados})) + 2K.$$

2.4.2 Critério de Informação de Akaike Corrigido (AICc)

Quando o número de parâmetros (K) é grande em relação ao tamanho da amostra (n), os resultados que proporciona AIC podem não ser bons. Nestes casos, deveria utilizar-se o critério de segundo ordem a menos que $n/K >$ aproximadamente 40. Um erro generalizado na literatura de seleção de modelos é o uso de AIC quando o AICc realmente deveria ser usado. Como o AICc converge para o AIC, quando n é grande, na prática, deve ser usado o AICc que está dado como segue

$$AICc = -2\log(L(\hat{\theta})) + 2K + \frac{2K(K+1)}{n-K-1}.$$

Descrição do Problema

Segundo o sistema de classificação climática "SCC" de Köppen e Geiger (1928)[27], o clima de Presidente Prudente é caracterizado como tropical chuvoso, com verões chuvosos e quentes, invernos secos e mais frios, sendo a temperatura média normal do mês mais quente ($\geq 22^{\circ}\text{C}$) Rolim et al. (2007) [38]. Atualmente, as mudanças de temperatura são um dos principais problemas enfrentados por muitos dos grandes centros rurais e urbanos, pois afeta diretamente a saúde das pessoas. Doenças como paludismo (malária), dengue, desnutrição, são sensíveis a mudanças de temperatura. Segundo a Organização Mundial da Saúde, temperaturas extremas do ar contribuem diretamente nas disfunções por doenças cardiovasculares e respiratórias, sobretudo entre as pessoas de idade avançada e crianças. Altas temperaturas provocam também aumento dos níveis de ozônio e de outros contaminantes do ar que agravam as doenças cardiovasculares e respiratórias. Além disso, desempenham um papel importante na produção agrícola, já que exercem uma influência significativa no processo de germinação das sementes. É considerada como temperatura ótima, aquela na qual a mais alta porcentagem de germinação é obtida em menor espaço de tempo, enquanto temperaturas máximas e mínimas são pontos nos quais as sementes apresentam menor porcentagem de germinação, Mayer e Poljakoff (1989) [32]. Por exemplo, a faixa ótima de temperatura para germinação de espécies de regiões tropicais está entre 20°C e 35°C , Larcher (2000)[29].

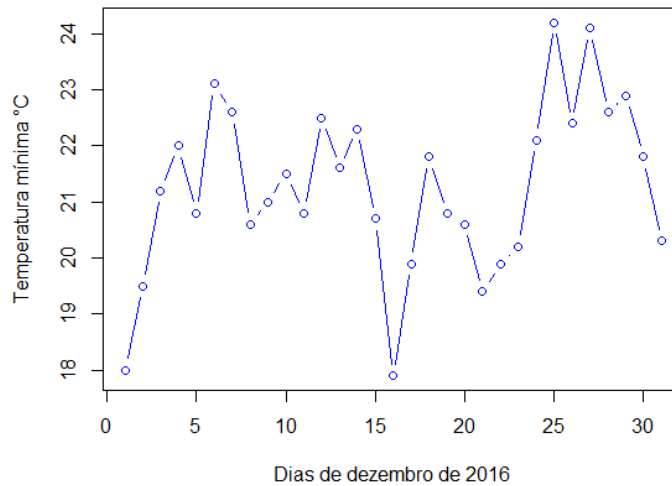
Desta forma, para controlar estes problemas gerados por fenômenos naturais, a causa de altas temperaturas, como as ondas de calor, ou mudanças de temperatura, políticas públicas devem ser constantemente implementadas e reformuladas com o intuito de prever a ocorrência de tais fenômenos naturais e proporcionar condições de vida adequada. Por exemplo, empresas privadas podem dimensionar mão de obra ou estoques de aparelhos de climatização, tendo em vista altas temperaturas em determinados períodos do ano, e com respeito à agricultura é interessante, por exemplo, prever o número de dias não favoráveis para germinação de sementes, para evitar o plantio num intervalo de tempo onde a faixa de temperatura não é ótima. Com estas considerações, a construção de modelos que possam emitir alertas ou realizar previsões sobre a ocorrência de ultrapasses de uma certa temperatura limiar aceitável pode diminuir as consequências causadas por fenômenos naturais relacionados a mudanças de temperatura.

Para este trabalho contamos com a disposição de dados climatológicos da estação Meteorológica da FCT/UNESP do Câmpus de Presidente Prudente-SP. As temperaturas são medidas em ($^{\circ}\text{C}$), cada hora durante o dia, para os quais podemos associar uma estatística de interesse que represente o comportamento da temperatura naquele dia, sendo que tal estatística pode ser a mínima, média ou máxima das temperaturas observadas.

Dessa forma, ao acompanhar os valores assumidos por tais estatísticas ao longo dos dias,


temos um conjunto de observações ordenadas no tempo, isto é, uma série temporal, Moratin e Tolo, 2006 [33]. Podemos ver, como exemplo, o gráfico na Figura 3.1 que representa as mínimas diárias das temperaturas (aferidas a cada hora) na cidade de Presidente Prudente-SP, no mês de dezembro do ano de 2016.

Figura 3.1: Mínimas temperaturas diárias na cidade de Presidente Prudente-SP no mês de dezembro de 2016.



Para ter uma ideia de como é o formato da base de dados disponibilizado, é apresentado um esquema na Figura 3.2:

Figura 3.2: Base de dados.

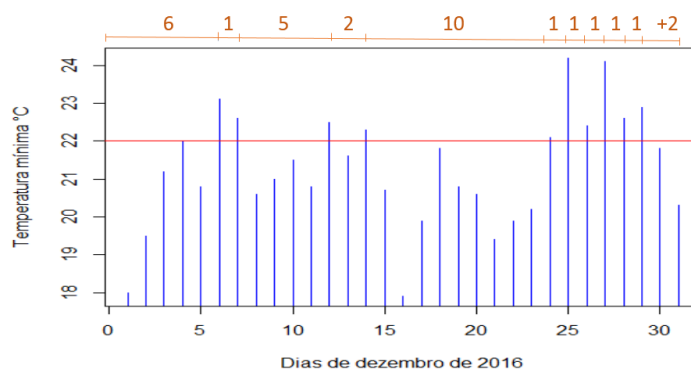
 A707 – Presidente Prudente – SP Lat: 22°07'S Long: 51°24'W Alt: 435,55m #N/A TEMPERATURA DO AR MÍNIMA (°C)		Hora UTC																							T min
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
01-dez-2016	22,9	21,9	20,9	20,1	19,3	18,7	18,4	18,2	18,1	18,0	18,1	19,0	21,0	22,9	24,7	26,6	27,2	28,1	28,2	27,6	27,8	27,4	26,4	25,8	18,0
02-dez-2016	24,9	24,4	23,2	22,2	21,5	20,7	20,2	20,0	19,6	19,5	19,6	20,0	21,6	23,9	26,3	28,6	29,8	30,9	31,4	31,8	32,0	30,8	28,0	25,1	19,5
03-dez-2016	25,3	25,3	25,2	24,2	23,6	23,9	23,7	23,5	23,4	23,0	23,0	22,4	21,2	21,9	21,7	22,0	22,8	25,3	27,1	28,4	29,2	28,9	23,2	23,0	21,2
04-dez-2016	23,5	23,5	23,6	23,3	23,1	22,5	22,0	22,4	22,0	22,2	22,6	23,2	23,7	25,2	26,4	27,6	28,2	27,4	29,1	30,6	30,8	30,3	28,6	27,0	22,0
05-dez-2016	25,8	24,5	23,8	23,7	23,5	23,2	22,6	21,7	21,2	20,8	21,1	23,2	24,1	26,1	28,6	29,8	30,5	31,6	32,0	32,5	33,5	33,0	30,8	29,1	20,8
06-dez-2016	28,4	27,1	26,6	25,8	25,1	24,1	23,4	23,1	23,3	23,5	24,0	26,1	28,0	29,6	30,9	32,1	32,9	33,3	33,3	33,7	33,5	30,0	29,0	28,2	23,1
07-dez-2016	25,3	25,1	25,4	24,8	24,1	23,6	23,1	22,7	22,6	22,7	22,8	23,8	25,9	27,9	30,0	31,1	32,0	33,2	33,2	33,1	26,8	25,7	25,5	24,5	22,6
08-dez-2016	23,9	23,7	68,0	23,2	23,2	23,0	22,2	22,5	22,7	21,6	21,7	23,1	25,1	27,1	29,9	31,2	31,5	32,4	32,4	32,8	32,3	30,1	21,9	20,6	20,6
09-dez-2016	21,1	21,0	21,1	21,1	21,4	22,5	22,4	22,1	22,2	22,2	21,8	22,1	22,9	23,8	25,3	27,4	28,9	30,1	30,8	31,0	22,5	22,1	22,2	21,8	21,0
10-dez-2016	21,6	21,6	21,8	21,7	22,0	21,9	22,0	21,9	21,9	21,9	21,9	22,2	21,7	21,8	22,9	23,9	25,6	27,6	28,6	29,1	21,5	22,5	23,1	22,8	21,5
11-dez-2016	22,8	21,2	21,2	21,0	21,0	20,9	20,8	20,9	21,1	21,5	22,0	22,5	21,0	21,1	21,6	23,1	26,2	27,4	28,8	29,2	28,9	28,2	26,6	25,7	20,8
12-dez-2016	24,2	23,7	23,2	23,3	23,1	22,7	22,6	22,5	22,5	22,5	22,9	23,2	24,0	24,3	25,8	26,9	28,6	29,1	29,3	29,9	28,6	26,6	26,7	26,4	22,5
13-dez-2016	26,6	26,2	25,6	25,6	24,9	24,1	24,0	24,2	23,7	23,4	23,7	24,8	26,3	27,9	27,9	26,6	27,7	23,4	21,6	23,8	23,3	23,9	24,2	24,1	21,6
14-dez-2016	24,3	24,1	23,9	23,6	23,4	23,3	22,6	22,3	22,3	22,5	22,9	23,5	24,9	26,0	27,3	29,1	29,9	30,4	31,4	32,3	32,2	31,5	29,3	27,7	22,3
15-dez-2016	27,2	26,6	25,5	24,9	23,3	22,8	21,8	21,4	21,3	20,7	20,7	20,9	22,3	23,7	24,5	25,9	26,9	27,6	27,9	28,2	27,9	27,3	25,6	23,5	20,7

Na base de dados como dito anteriormente, temos as medições de temperatura em °C, de janeiro a dezembro dos anos 2011, 2012, 2013, 2014, 2015 e 2016, na última coluna do lado direito na imagem dos dados, temos as temperaturas mínimas do dia. Nessa situação, o interesse é estudar o comportamento da temperatura em °C na cidade de Presidente Prudente. Existem diferentes maneiras de estudar este comportamento, uma primeira maneira é mediante o ajuste de um modelo de séries temporais. Outra forma, abordada em diferentes artigos (Achcar et al. 2008, 2009, 2010 e 2011), é a utilização de processos de Poisson não homogêneos considerando o número de dias em cada mês em que

se registrou uma concentração de ozônio considerada nociva a saúde pública na cidade de México e uma outra maneira é aplicar a teoria dos valores extremos.

Na abordagem adotada neste trabalho, o interesse é estudar o comportamento da temperatura através do estudo dos tempos entre ocorrências do evento de interesse (ultrapasse de um limiar de temperatura fixada). Neste caso, em primeiro lugar indicamos que ao invés de utilizar as estatísticas que representam as temperaturas máximas ou médias diárias, utilizamos a estatística que representa as temperaturas mínimas diárias pois segundo a pessoa responsável pelas medições de temperatura, seria prof. Tadeu, o aumento de temperatura na cidade de Presidente Prudente comparado com anos anteriores é devido ao aumento nas temperaturas mínimas diárias. Ele observou que a variância é maior nas temperaturas mínimas do que nas máximas. Podemos observar esse fato de maneira global nos dados e para obter os tempos de ocorrência do evento, fixamos 22°C como limiar, por ser a temperatura média normal do mês mais quente numa região tropical como a que está localizada a cidade de P. Prudente. Assim, um dia com temperatura mínima maior que 22°C é considerado um dia com temperatura elevada. Na Figura 3.3 é apresentado o gráfico que pode explicar melhor estas considerações no estudo.

Figura 3.3: Tempos em dias entre ultrapasses das mínimas temperaturas diárias em relação ao limiar 22°C para a cidade de Presidente Prudente-SP no mês de dezembro de 2016.



Observamos na Figura 3.3 que o estudo começa no dia 1 de dezembro de 2016 e finalizando dia 31 do mesmo mês, sendo que nos dias 6, 7, 12, 14, 24, 25, 26, 27, 28 e 29 ocorreram ultrapasse do limiar fixado 22°C (representado pela linha vermelha), de modo que são necessários **6** dias para que ocorra o primeiro ultrapasse após o início do estudo (tomando em conta que o $dia_0 = 0$); **1** dia para que ocorra o segundo ultrapasse após o primeiro ultrapasse; **5** dias para que ocorra o terceiro ultrapasse após o segundo ultrapasse, e assim por diante. A notação geral dos intervalos de tempos (em dias) entre ocorrências do evento de interesse é (T_i) e a fórmula para calcular os T_i é: $t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, onde assumimos que $d_0 = 0$ e d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse.

Retornando ao gráfico, também observamos que se consideramos o intervalo de tempo de 31 dias de dezembro como o tempo de estudo, existe censura à direita do tipo I, pois o ultrapasse não ocorreu no intervalo de tempo que restava desde o último ultrapasse até o dia 31 de dezembro, o que gera a observação incompleta em questão (no caso do exemplo abordado, a censura é representada por 2^+ dado que foi registrado **2** dias sem ocorrer o próximo ultrapasse até o dia 31 de dezembro).

Tendo claro que os dados de interesse são tempos entre ultrapasses do evento de interesse, indicamos que o grande problema é que devido a estarmos considerando um fenômeno cujos estados são interdependentes, os tempos também são dependentes. Como já menci-

onado na introdução, neste trabalho pretendemos construir o modelo através da suposição de que a sequência de tempos entre ultrapasses siga um processo de Markov, ou seja, que cada intervalo de tempos observado depende somente do anterior.

Distribuição Weibull Univariada

4.1 Introdução

A distribuição Weibull foi proposta originalmente por Weibull (1939) e sua ampla aplicabilidade foi também discutida por este mesmo autor (Weibull, 1951, 1954), em estudos relacionados ao tempo de falha devido a fadiga de metais. Desde então, a mesma vem sendo frequentemente usada em estudos biomédicos e industriais. A sua popularidade em aplicações práticas se deve ao fato dela apresentar uma grande variedade de formas, todas com uma propriedade básica: a sua taxa de falha é monótona, isto é, ela é estritamente crescente, decrescente ou constante, Colosimo e Giolo (2010) [19]. Sejam $S > 0$ e $K > 0$, números real e inteiro fixos, respectivamente. Aqui K é o número de vezes em que a medição de temperatura excede o limite de interesse (22°C) durante o intervalo de tempo $[0, S]$, e S é o tempo que o estudo dura. Sejam d_1, d_2, \dots, d_K os dias em que ocorreram os ultrapasses. Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_K\}$ um conjunto de dados observados. Desta forma, T_i , $i = 1, 2, \dots$ denota o tempo em dias entre o i -ésimo e o $(i - 1)$ -ésimo ultrapasse.

Consideramos dois casos de estudo, neste capítulo, tratamos o primeiro caso onde assumimos que os intervalos de tempos entre ocorrências do evento de interesse, os T_i , $i = 1, 2, \dots, K$ são independentes e identicamente distribuídos com a distribuição Weibull(α, β). Portanto, a função de densidade de probabilidade de T_i , $i = 1, 2, \dots, K$ é:

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right\}, \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

em que $\alpha > 0$ é o parâmetro de forma, e $\beta > 0$, o de escala. O parâmetro β tem a mesma unidade de medida de t e α não tem unidade.

Para esta distribuição, as funções de distribuição acumulada, de sobrevivência e de risco são, respetivamente,

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad (4.2)$$

$$S(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right\} \quad (4.3)$$

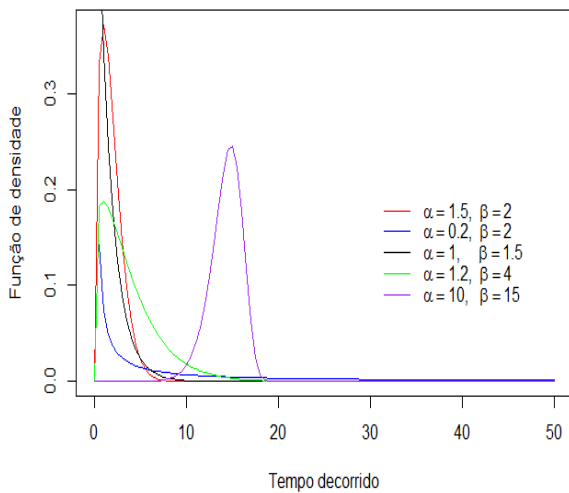
e

$$\lambda(t) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1}, \quad (4.4)$$

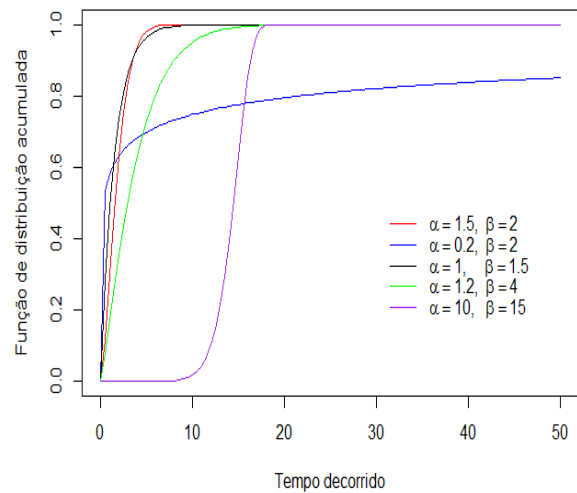
para $t \geq 0$, α e $\beta > 0$. Observe que, quando $\alpha = 1$, tem-se a distribuição exponencial e, sendo assim, a distribuição exponencial é um caso particular da distribuição de Weibull. Algumas formas das funções de densidade, de distribuição acumulada, de sobrevivência e

de risco de uma variável T com distribuição de Weibull são mostradas na Figura (4.1). Observe, a partir da Figura (4.1), que a função de risco $\lambda(t)$ é estritamente crescente para $\alpha > 1$, estritamente decrescente para $\alpha < 1$ e constante para $\alpha = 1$. Para $\alpha = 1$, tem-se a função de risco da distribuição exponencial que, como mencionado, é um caso particular da distribuição de Weibull. As expressões para a média e a variância da Weibull incluem

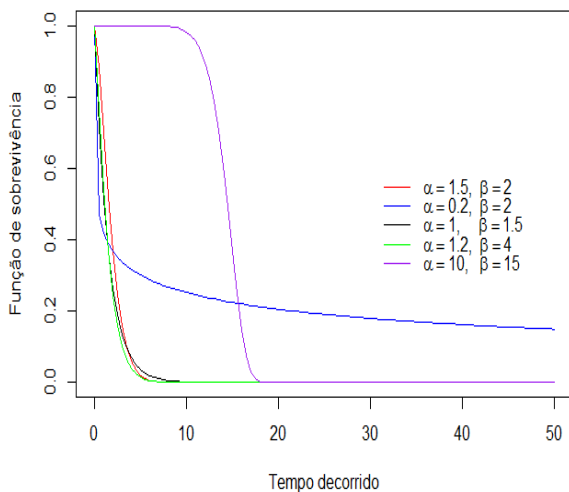
Figura 4.1: Forma típica das funções de densidade de probabilidade, de distribuição acumulada, de sobrevivência e de risco da distribuição de Weibull para alguns valores dos parâmetros (α, β) .



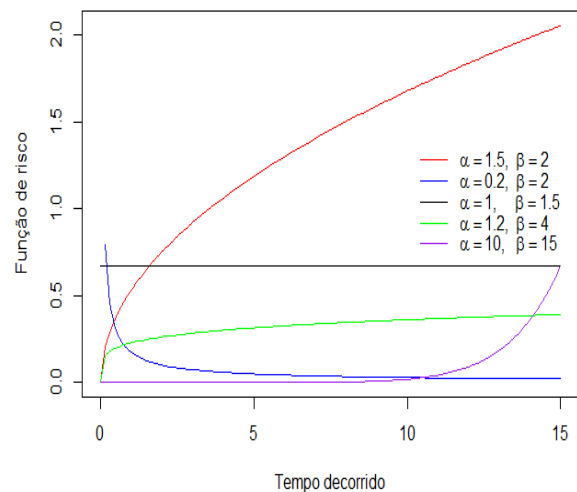
(a) Função de Densidade.



(b) Função de Distribuição Acumulada.



(c) Função de Sobrevivência.



(d) Função de Risco.

o uso da função gama, isto é,

$$E(T) = \beta\Gamma[1 + (1/\alpha)],$$

$$Var(T) = \alpha^2[\Gamma[1 + (2/\alpha)] - \Gamma[1 + (1/\alpha)]^2],$$

sendo a função gama, $\Gamma(k)$, definida por $\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} \exp\{-x\} dx$.

Neste trabalho, nos encontramos na procura de um modelo que explique melhor os dados de interesse (intervalos de tempos entre ultrapasses de um limiar de temperatura na cidade de P.Prudente). Então para tal efeito, primeiro vamos escolher um modelo univariado, assumindo a independência entre estes intervalos de tempos observados, que melhor se ajuste a tais dados de interesse, o qual será utilizado como marginal na construção de modelos bivariados através de cópulas.

Para dados relacionados à sobrevivência, além da distribuição Weibull existem distribuições como a gama e uma nova distribuição que está sendo bastante utilizada que é a distribuição exponencial generalizada. Essa última já foi utilizada como marginal na construção de modelos bivariados através de cópulas, em muitos trabalhos entre eles, Leandro (2014)[10].

Com o objetivo de escolha da marginal, vamos comparar as distribuições Weibull e exponencial generalizada, explicando brevemente o comportamento das suas funções de distribuição acumulada e sobrevivência de cada um dos modelos univariados.

4.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança para os tempos observados entre ocorrências do evento de interesse provenientes de uma distribuição de Weibull é obtida substituindo (4.1) e (4.3) em (2.1), mas neste caso temos censura só na última observação então $r = n - 1$. Assumindo $d_0 = 0$, os valores dos intervalos de tempo observados estão dados da forma: $t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, K = (n - 1)$, em que d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, sendo que $t_n = S - d_K$ e neste modelo como nos demais modelos considerados neste trabalho, n representa o número de intervalos de tempos entre ultrapasses do limiar de temperatura fixado ou seja número de dados utilizados no estudo. Então, a função de verossimilhança é dado por:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^{n-1} f(t_i; \boldsymbol{\theta}) S(t_n; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} \right\} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha}\right)^{n-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ t_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim, o respectivo logaritmo desta função é:

$$\begin{aligned} \ln(L(\boldsymbol{\theta})) &= \ln \left[\left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha}\right)^{n-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ t_i^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} \right\} \right] \\ &= (n-1)\ln(\alpha) - \alpha(n-1)\ln(\beta) - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ (\alpha-1)\ln(t_i) - \left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Derivando-se $\ln(L(\boldsymbol{\theta}))$ em relação aos parâmetros α e β e igualando-se as expressões resultantes a zero, obtêm-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(l(\alpha, \beta))}{\partial\alpha} &= (n-1)\frac{1}{\hat{\alpha}} - (n-1)\ln(\hat{\beta}) - \left(\frac{t_n}{\hat{\beta}}\right)^{\hat{\alpha}} \ln\left(\frac{t_n}{\hat{\beta}}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \ln(t_i) - \left(\frac{t_i}{\hat{\beta}}\right)^{\hat{\alpha}} \ln\left(\frac{t_i}{\hat{\beta}}\right) \right\} = 0, \\ \frac{\partial(l(\alpha, \beta))}{\partial\beta} &= -\hat{\alpha}(n-1)\frac{1}{\hat{\beta}} + \hat{\alpha}t_n^{\hat{\alpha}}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^{\hat{\alpha}+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \hat{\alpha}t_i^{\hat{\alpha}}\left(\frac{1}{\hat{\beta}}\right)^{\hat{\alpha}+1} \right\} = 0,\end{aligned}\tag{4.7}$$

com $l(\alpha, \beta) = \ln(L(\boldsymbol{\theta}))$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de α e β que satisfazem as equações acima ou equivalentemente maximizam o logaritmo da função de verossimilhança. A solução deste sistema de equações para o conjunto de dados (intervalos de tempos entre ultrapasses de 22°C de temperatura) é complicada, então foi obtida por meio de um método numérico iterativo de "Quase Newton". O programa R tem o pacote Optim que minimiza uma função, então temos que declarar como função objetivo o negativo do logaritmo da função de verossimilhança e especificar qual método utilizar. Neste caso, utilizamos o método de Quase Newton, para facilitar a comparação dos parâmetros estimados deste modelo com os da distribuição exponencial generalizada, os resultados são vistos somente na Tabela 4.1.

4.3 Distribuição Exponencial Generalizada Univariada

Vamos estudar brevemente a distribuição exponencial generalizada univariada (ver Gupta e Kundu, 1999 [21]), que é outra alternativa ao uso da distribuição Weibull. Seja T com distribuição $GE(\alpha, \beta)$ com parâmetros α e β então sua função distribuição acumulada é dada por:

$$F(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha}; t \geq 0, \alpha \geq 0, \beta > 0,\tag{4.8}$$

em que α e β são parâmetros de forma e escala, respectivamente. Tomando-se $\alpha = 1$, obtêm-se a função distribuição exponencial usual.

Dessa forma, sua função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t) = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha-1}; t \geq 0, \alpha \geq 0, \beta > 0.\tag{4.9}$$

A sua função de sobrevivência é dada por:

$$S(t) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{t}{\beta}}\right)^{\alpha}; t \geq 0, \alpha \geq 0, \beta > 0.\tag{4.10}$$

4.4 Estimação de Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança para uma amostra de tempos de falha provenientes de uma distribuição exponencial generalizada é obtida substituindo (4.9) e (4.10) em (2.1). Mas neste caso temos censura só na última observação, então $r = n - 1$ e $n - r = 1$; assumindo $d_0 = 0$, temos os tempos entre ocorrências do evento de interesse, da forma: $t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, K = (n - 1)$, em que d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, e tomando em conta que $t_n = S - d_k$. Então, a função de verossimilhança é

dado por:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}) &= \prod_{i=1}^{n-1} f(t_i; \boldsymbol{\theta}) S(t_n; \boldsymbol{\theta}) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{\alpha}{\beta} e^{-\frac{t_i}{\beta}} \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\beta}}\right)^{\alpha-1} \right\} \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\frac{t_n}{\beta}}\right)^{\alpha} \right\} \\
&= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\frac{t_n}{\beta}}\right)^{\alpha} \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ e^{-\frac{t_i}{\beta}} \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\beta}}\right)^{\alpha-1} \right\}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Assim, o respectivo logaritmo desta função é:

$$\begin{aligned}
\ln(L(\boldsymbol{\theta})) &= \ln \left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} \left\{ 1 - \left(1 - e^{-\frac{t_n}{\beta}}\right)^{\alpha} \right\} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ e^{-\frac{t_i}{\beta}} \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\beta}}\right)^{\alpha-1} \right\} \right] \\
&= (n-1)\ln(\alpha) - (n-1)\ln(\beta) + \ln \left[1 - \left(1 - e^{-\frac{t_n}{\beta}}\right)^{\alpha} \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ -\left(\frac{t_i}{\beta}\right) + (\alpha-1)\ln\left(1 - e^{-\frac{t_i}{\beta}}\right) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Derivando-se $\ln(L(\boldsymbol{\theta}))$ em relação aos parâmetros α e β e igualando-se as expressões resultantes a zero, obtêm-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(l(\alpha, \beta))}{\partial\alpha} &= \frac{(n-1)}{\hat{\alpha}} - \frac{\left(1 - e^{-\frac{t_n}{\hat{\beta}}}\right)^{\hat{\alpha}} \ln \left[1 - e^{-\frac{t_n}{\hat{\beta}}}\right]}{1 - \left(1 - e^{-\frac{t_n}{\hat{\beta}}}\right)^{\hat{\alpha}}} + \sum_{i=1}^{n-1} \ln \left[1 - e^{-\frac{t_i}{\hat{\beta}}}\right] = 0 \\
\frac{\partial(l(\alpha, \beta))}{\partial\beta} &= \frac{1-n}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\alpha} t_n \left(1 - e^{-\frac{t_n}{\hat{\beta}}}\right)^{\hat{\alpha}-1} e^{-\frac{t_n}{\hat{\beta}}}}{\hat{\beta}^2 \left(1 - \left(1 - e^{-\frac{t_n}{\hat{\beta}}}\right)^{\hat{\alpha}}\right)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{t_i}{\hat{\beta}^2} - \frac{(\hat{\alpha}-1)t_i e^{-\frac{t_i}{\hat{\beta}}}}{\hat{\beta}^2 \left(1 - e^{-\frac{t_i}{\hat{\beta}}}\right)} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

com $l(\alpha, \beta) = \ln(L(\boldsymbol{\theta}))$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de α e β que satisfazem as equações acima ou equivalentemente maximizam o logaritmo da função de verossimilhança. A solução deste sistema de equações para o conjunto de dados (intervalos de tempos entre ultrapasses de 22°C de temperatura) foi obtida também utilizando o método numérico de Newton Raphson do pacote Optim do programa R, desde que fornecido o negativo do logaritmo da função de verossimilhança. Dessa forma, na tabela 4.1 são apresentadas as estimativas dos parâmetros de cada modelo

Tabela 4.1: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição Weibull univariada e exponencial generalizada univariada.

Parâmetro	α	β
EMV Weibull	0,7038999	3,5936287
EMV GE	0,6451622	7,4681412

Em seguida, conhecendo os valores estimados dos parâmetros de interesse, vamos mostrar nos seguintes gráficos, a adequação dos ajustes dos modelos univariados Weibull e exponencial generalizada.

Figura 4.2: Curva da função de distribuição acumulada da distribuição Weibull *versus* a curva da sua função de distribuição acumulada empírica e a curva de sobrevivência estimada pela distribuição Weibull *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, para os valores estimados dos parâmetros ($\hat{\alpha} = 0,7038999$, $\hat{\beta} = 3,5936287$).

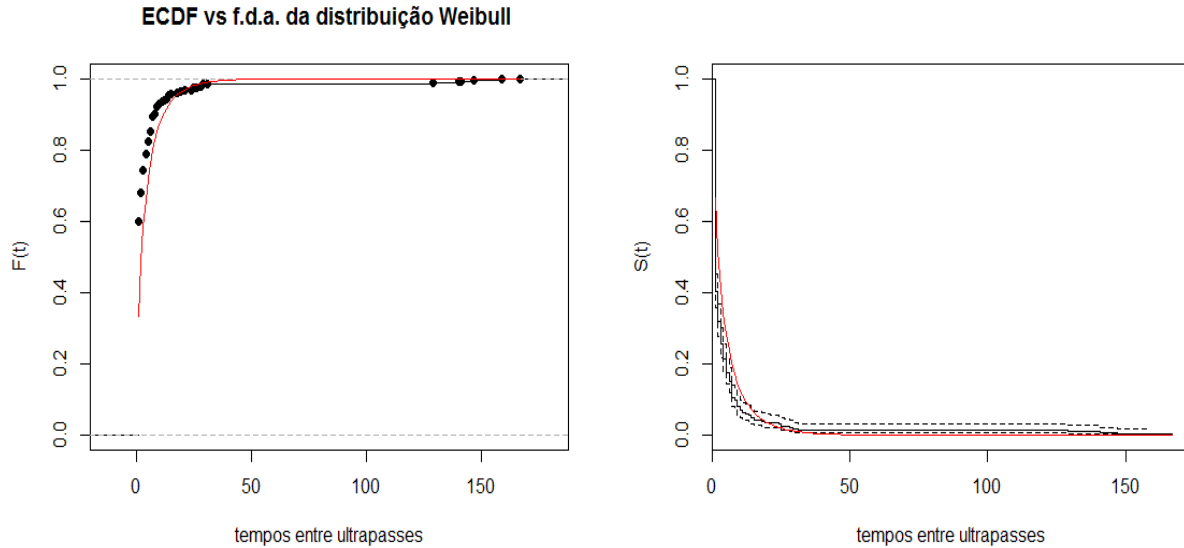
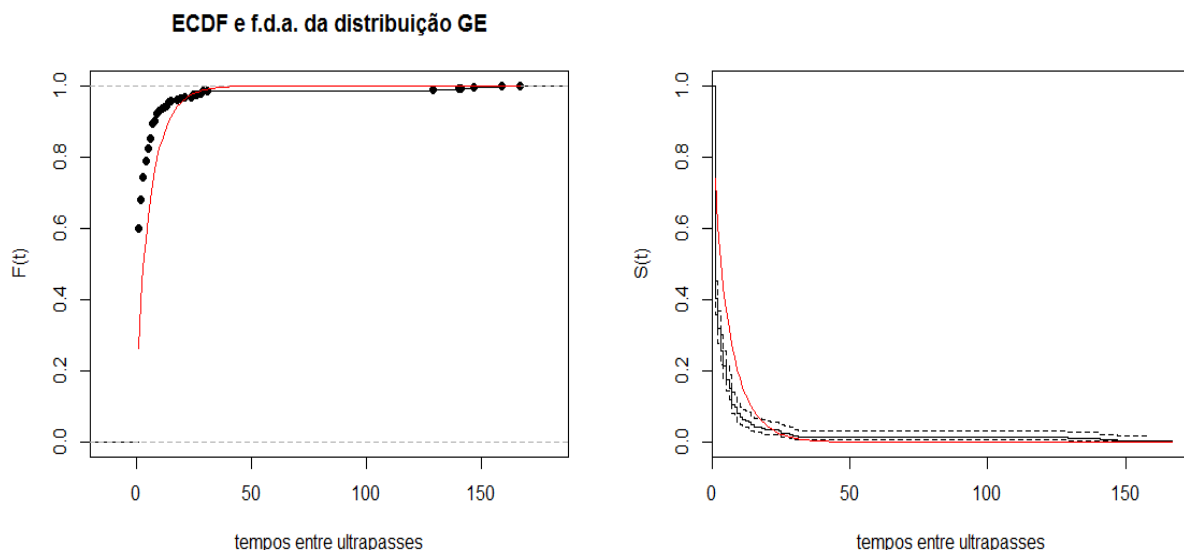


Figura 4.3: Curva da função de distribuição acumulada da distribuição exponencial generalizada *versus* a curva da sua função de distribuição acumulada empírica e a curva de sobrevivência estimada pela distribuição exponencial generalizada *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier, para os valores estimados dos parâmetros ($\hat{\alpha} = 0,6451622$, $\hat{\beta} = 7,4681412$).



Mediante as figuras de ajuste podemos observar que a distribuição Weibull explica melhor os intervalos de tempos observados entre ultrapasses das temperaturas mínimas do limiar de 22°C de temperatura, assumindo independência entre tais tempos, já que as curvas de função de distribuição acumulada e de sobrevivência da distribuição de Weibull estão se aproximando melhor das curvas de função de distribuição empírica e de sobre-

vivência estimadas por Kaplan-Meier, respectivamente. Explicando assim a escolha da distribuição Weibull univariada a ser utilizada como distribuição marginal na construção dos modelos bivariados que vamos estudar nos próximos capítulos.

Modelo Markoviano via Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin

Vamos descrever os modelos matemáticos markovianos considerados neste trabalho. Sejam $S > 0$ e $K > 0$, números real e inteiro fixados, respectivamente. K é o número de vezes em que a medição da temperatura ultrapassa o limite de interesse fixado no caso (22°C) durante o intervalo de tempo $[0, S]$.

Sejam d_1, d_2, \dots, d_K os dias em que ocorreram os ultrapasses (excederam o limite de interesse). Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ o conjunto de dias em que ocorreram os ultrapasses durante o tempo de estudo $[0, S]$. Seja $T_i, i = 1, 2, \dots$ o tempo em dias entre i -ésimo e o $(i - 1)$ -ésimo ultrapasse.

Neste capítulo, tratamos o segundo caso, onde mantemos a suposição de que os tempos entre ultrapasses $T_i, i = 1, 2, 3, \dots$ são identicamente distribuídos com distribuição Weibull(α, β), mas agora eliminamos a suposição de independência e além disso, se supõe que estes tempos seguem um processo de Markov. Para definir a função de densidade condicional de T_{i+1} dado T_i , primeiro vamos definir a função de densidade conjunta de T_i e T_{i+1} . A seção a seguir é baseado no resumo da formulação do modelo Weibull bivariado de Marshall e Olkin visto em Tarumoto (2001)[45].

5.1 Distribuição Weibull Bivariada de Marshall e Olkin

A distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin proposta por Marshall e Olkin (1967)[31], é obtida por meio de uma transformação de variáveis da distribuição exponencial bivariada (BVE). Esta distribuição não é absolutamente contínua, ou seja, $P(T_1 = T_2) > 0$, isto significa que a ocorrência do evento de interesse (morte ou falha) pode ser por causas simultâneas e é isso que nos interessa de acordo aos dados de estudo, já que temos intervalos de tempos entre ultrapasses repetitivos, ou seja é provável que o intervalo de tempo entre ultrapasse atual e o anterior seja igual ao intervalo de tempo entre ultrapasse atual e o próximo ultrapasse. Assim, denotamos a distribuição Weibull bivariada como BVW. Primeiramente na construção desta distribuição bivariada exponencial, Marshall e Olkin consideram um modelo de choque fatal e outro de choque não fatal.

No caso do modelo de choque fatal, suponha que os componentes de um sistema com dois componentes falham após receber um choque que é sempre fatal. Suponha ainda que processos de Poisson independentes $Z_1(t; \lambda_1), Z_2(t; \lambda_2)$ e $Z_{12}(t; \lambda_{12})$ governam a ocorrência de choques, onde $Z(t; \lambda) \equiv \{z(t), t \geq 0, \lambda\}$ representa um processo de Poisson homogêneo

com parâmetro λ . Os eventos no processo $Z_1(t; \lambda_1)$ são os choques no componente 1, eventos no processo $Z_2(t; \lambda_2)$ são os choques no componente 2 e $Z_{12}(t; \lambda_{12})$ são os choques em ambos os componentes. Portanto, se T_1 e T_2 denotam as variáveis aleatórias que representam os tempos de vida do primeiro e do segundo componentes, respectivamente, e levando em consideração que $Z_1(t; \lambda_1)$, $Z_2(t; \lambda_2)$ e $Z_{12}(t; \lambda_{12})$ são independentes, a função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 é dado como:

$$\begin{aligned} S(t_1, t_2) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = P\{Z_1(s; \lambda_1) = 0, Z_2(t, \lambda_2) = 0, Z_{12}(\max(s, t); \lambda_{12}) = 0\}, \\ &= P\{Z_1(s; \lambda_1) = 0\}P\{Z_2(t; \lambda_2) = 0\}P\{Z_{12}(\max(s, t); \lambda_{12}) = 0\}, \\ &= \exp\left\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)\right\}. \end{aligned}$$

No segundo caso, no modelo de choque não fatal, considere novamente três processos de Poisson independentes, $Z_1(t; \delta_1)$, $Z_2(t; \delta_2)$ e $Z_{12}(t; \delta_{12})$, governando a ocorrência de choques com a modificação de que estes choques não necessitam ser fatais. Os estados dos sistemas podem ser descritos pelos pares ordenados, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$, onde 1 no primeiro elemento do par ordenado indica que o componente está operante e 0 que ele já falhou, e analogamente para o segundo elemento do par ordenado. Os eventos no processo $Z_1(t; \delta_1)$ são choques no primeiro componente que causam uma transição do estado $(1, 1)$ para $(0, 1)$ com probabilidade p_1 e de $(1, 1)$ para $(1, 1)$ com probabilidade $(1 - p_1)$. Similarmente, os eventos no processo $Z_2(t; \delta_2)$ causam uma transição do estado $(1, 1)$ para $(1, 0)$ ou $(1, 1)$ com probabilidades p_2 e $(1 - p_2)$, respectivamente. Eventos no processo $Z_{12}(t, \delta_{12})$ causam uma transição do estado $(1, 1)$ para $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ ou $(1, 1)$ com probabilidades p_{00} , p_{10} , p_{01} e p_{11} respectivamente. Seja T_1 a variável aleatória que representa o tempo de vida do primeiro componente, e T_2 o do segundo componente. Neste trabalho, T_1 e T_2 representam o intervalo de tempos até o ultrapasse atual e o intervalo de tempos até o próximo ultrapasse, respectivamente. Como $Z_1(t; \delta_1)$, $Z_2(t; \delta_2)$ e $Z_{12}(t; \delta_{12})$ são independentes e com incrementos independentes, para $t_2 \geq t_1 \geq 0$, a função de sobrevivência conjunta pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} S(t_1, t_2) &= P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = P\{Z_1(s; \delta_1) = 0, Z_2(t, \delta_2) = 0, Z_{12}(\max(s, t); \delta_{12}) = 0\} \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta_1 t_1} \frac{(\delta_1 t_1)^k}{k!} (1 - p_1)^k \right\} \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} e^{-\delta_2 t_2} \frac{(\delta_2 t_2)^l}{l!} (1 - p_2)^l \right\} \\ &\quad \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left[e^{-\delta_{12} t_1} \frac{(\delta_{12} t_1)^m}{m!} (p_{11})^k \right] \left[e^{-\delta_{12} (t_2 - t_1)} \frac{(\delta_{12} (t_2 - t_1))^n}{n!} (p_{11} + p_{01})^k \right] \right\} \\ &= \exp\left\{-t_1 \left[\delta_1 p_1 + \delta_{12} p_{01} \right] - t_2 \left[\delta_2 p_2 + \delta_{12} (1 - p_{11} - p_{01}) \right]\right\}. \end{aligned}$$

Por simetria, para $t_1 \geq t_2 \geq 0$,

$$S(t_1, t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \exp\{-t_1 [\delta_1 p_1 + \delta_{12} (1 - p_{11} - p_{10})] - t_2 [\delta_2 p_2 + \delta_{12} p_{10}]\}.$$

Portanto: $S(t_1, t_2) = \exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)\}$,

onde $\lambda_1 = \delta_1 p_1 + \delta_{12} p_{01}$, $\lambda_2 = \delta_2 p_2 + \delta_{12} p_{10}$ e $\lambda_{12} = \delta_{12} p_{00}$.

As funções de sobrevivência marginais de T_1 e de T_2 são dadas por:

$$S_{T_1}(t_1) = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12} t_1)\} \quad e \quad S_{T_2}(t_2) = \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12} t_2)\},$$

a função de densidade da distribuição BVE é:

$$f(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 S(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_{12}) \lambda_2 \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1 - \lambda_2 t_2\}, & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ (\lambda_2 + \lambda_{12}) \lambda_1 \exp\{-\lambda_1 t_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2\}, & \text{se } t_1 < t_2 \end{cases},$$

e as densidades marginais exponenciais são:

$$f_{T_1}(t_1) = (\lambda_1 + \lambda_{12}) \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12}t_1)\} \text{ e}$$

$$f_{T_2}(t_2) = (\lambda_2 + \lambda_{12}) \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12}t_2)\}.$$

Esta distribuição não é absolutamente contínua, ou seja, sua função de sobrevivência pode ser decomposta em uma parte singular e a outra parte absolutamente contínua. Esta decomposição é dada como:

$$S(t_1, t_2) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda} S_\alpha(t_1, t_2) + \frac{\lambda_{12}}{\lambda} S_s(t_1, t_2),$$

onde $S_s(t_1, t_2) = \exp(-\lambda \max(t_1, t_2))$, é uma distribuição singular, e

$S_\alpha(t_1, t_2) = \frac{\lambda}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} \max(t_1, t_2)\} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1 + \lambda_2} \exp\{-\lambda \max(t_1, t_2)\}$ é a parte absolutamente contínua. Portanto $P(T_1 = T_2) > 0$.

Pelo Lema 3.2 de Marshall e Olkin (1967), a função geratriz de momentos é dada por:

$$\psi(t_1, t_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t_1 x - t_2 y} dF(x, y) = \frac{(\lambda + t_1 + t_2)(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12}) + t_1 t_2 \lambda_{12}}{(\lambda + t_1 + t_2)(\lambda_1 + \lambda_{12} + t_1)(\lambda_2 + \lambda_{12} + t_2)},$$

onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$. A covariância entre T_1 e T_2 é dada como: $Cov(T_1, T_2) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1 + \lambda_{12})(\lambda_2 + \lambda_{12})}$; o coeficiente de correlação é $\rho(T_1, T_2) = \lambda_{12}/\lambda$ e a distribuição de $T = \min(T_1, T_2)$ é exponencial, com parâmetro λ . A distribuição BVE pode ser representada por meio de variáveis aleatórias independentes, ou seja, (T_1, T_2) é uma BVE se e somente se existem variáveis aleatórias exponenciais independentes U, V e W tais que $T_1 = \min(U, W)$ e $T_2 = \min(V, W)$.

Esclarecemos antes que para a construção do modelo Weibull bivaridada de Marshall e Olkin utilizamos a função de densidade de T da seguinte forma:

$$f(t; \alpha, \lambda) = \alpha \lambda t^{\alpha-1} \exp\{-\lambda t^\alpha\}.$$

A distribuição Weibull bivariada é obtida por meio de uma transformação de variáveis, ou seja se (T_1, T_2) é BVE, então $(T_1^{1/\alpha_1}, T_2^{1/\alpha_2})$ é uma distribuição Weibull bivariada (MOBW), onde a função de sobrevivência é dado por:

$$S(t_1, t_2) = \exp\left\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12} \max(t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2})\right\}.$$

Para facilitar a utilização deste resultado temos:

$$S(t_2, t_1) = \exp\left\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12} \max(t_2^{\alpha_2}, t_1^{\alpha_1})\right\}. \quad (5.1)$$

Na situação da distribuição Weibull bivariada, $T = \min(T_1, T_2)$ tem distribuição Weibull somente se $\alpha_1 = \alpha_2$.

A função de densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_{12}) \lambda_2 \alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} \alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} \exp\left\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_1^{\alpha_1} \geq t_2^{\alpha_2} \\ (\lambda_2 + \lambda_{12}) \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} \alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12})t_2^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_1^{\alpha_1} < t_2^{\alpha_2}. \end{cases}$$

Para facilitar o uso deste último resultado temos:

$$f(t_2, t_1) = \begin{cases} (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} \exp\left\{-(\lambda_2 + \lambda_{12})t_2^{\alpha_2} - \lambda_1 t_1^{\alpha_1}\right\}, & \text{se } t_2^{\alpha_2} \geq t_1^{\alpha_1} \\ (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} \exp\left\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_2^{\alpha_2} < t_1^{\alpha_1}. \end{cases}$$

Da expressão anterior considerando a seguinte reparametrização: $\lambda_1 = 1/\beta_1^{\alpha_1}$, $\lambda_2 = 1/\beta_2^{\alpha_2}$ e $\lambda_{12} = \theta$, temos a função de densidade conjunta de (T_{i+1}, T_i) , i.e.

$$f(t_{i+1}, t_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2-1} \frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \alpha_1 t_i^{\alpha_1-1} \exp\left\{-\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} t_i^{\alpha_1} - \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \alpha_1 t_i^{\alpha_1-1} \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) t_i^{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Assim sendo de (4.1) e (5.2), temos a função de densidade condicional de T_{i+1} dado (T_i) , i.e.

$$f(t_{i+1}/t_i) = \frac{f(t_{i+1}, t_i)}{f(t_i)}.$$

$$f(t_{i+1}/t_i) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_{i+1}^{\alpha_2} - \theta t_i^{\alpha_1}\right\} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right)^{-1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1}. \end{cases} \quad (5.3)$$

A função de distribuição acumulada condicional de T_{i+1} dado T_i é dada por:

$$F(t_{i+1}/t_i) = \int_0^{t_{i+1}} f(t_{i+1}/t_i) dt_i$$

$$= \begin{cases} \int_0^{t_{i+1}} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_{i+1}^{\alpha_2}\right\} dt_{i+1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \int_{t_{i+1}}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_{i+1}^{\alpha_2} - \theta t_i^{\alpha_1}\right\} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right)^{-1} dt_{i+1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \exp\left\{-\theta t_i^{\alpha_1}\right\} \beta_1^{\alpha_1} \int_{t_{i+1}}^{\infty} \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\right\} dt_{i+1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1} \end{cases}$$

$$F(t_{i+1}/t_i) = \begin{cases} 1 - \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \exp\left\{-\theta t_i^{\alpha_1}\right\} \beta_1^{\alpha_1} \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\right\}\right), & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1}. \end{cases}$$

5.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

Temos visto no capítulo 1 que a primeira fase deste trabalho é modelar o conjunto de intervalos de tempos entre ultrapasses de um limiar de temperatura fixada na cidade de Presidente Prudente-SP. Para o conjunto de tempos observados (independente da temperatura medida), vamos construir sua função de verossimilhança, assumindo $d_0 = 0$, e tendo como valores dos intervalos de tempo como segue:

$t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, k = (n - 1)$, onde d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, e aclarando que $t_n = S - d_k$. Então, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta; t) = f(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (5.4)$$

onde T_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, são dependentes, então a expressão (5.4) ficaria da seguinte forma:

$$L(\theta; t) = f(t_1) f(t_2/t_1) f(t_3/t_1, t_2) \dots f(t_n/t_1, t_2, \dots, t_{n-1}) \quad (5.5)$$

Mas como neste trabalho supomos que os tempos seguem um processo de Markov o que indica que o tempo atual só depende do anterior e tendo em conta que os dados correm risco de ter censura do Tipo I somente no último valor observado, então teremos a seguinte expressão para a função de verossimilhança:

$$L(\theta; t) = f(t_1) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n / T_{n-1} = t_{n-1}). \quad (5.6)$$

Para sua especificação precisamos ajustar uma distribuição de probabilidades aos tempos quando são considerados estados anteriores e outra distribuição de probabilidade quando considerados estados posteriores. Nos falta calcular $P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1})$:

$$\begin{aligned} P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) &= \int_{t_n}^{\infty} f(t_n/t_{n-1}, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \theta) dt_n \\ &= \begin{cases} \int_{t_n}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) \alpha_2 t_n^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_n^{\alpha_2}\right\} dt_n, & \text{se } t_n^{\alpha_2} \geq t_{n-1}^{\alpha_1} \\ \int_{t_n}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_n^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_n^{\alpha_2} - \theta t_{n-1}^{\alpha_1}\right\} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right)^{-1} dt_n, & \text{se } t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 - \int_0^{t_n} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) \alpha_2 t_n^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_n^{\alpha_2}\right\} dt_n, & \text{se } t_n^{\alpha_2} \geq t_{n-1}^{\alpha_1} \\ \int_{t_n}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_n^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_n^{\alpha_2} - \theta t_{n-1}^{\alpha_1}\right\} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right)^{-1} dt_n, & \text{se } t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Neste último resultado, para $t_n^{\alpha_2} \geq t_{n-1}^{\alpha_1}$ temos uma integral conhecida que é igual à função de distribuição acumulada da distribuição Weibull univariada, para $t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1}$ colocamos em evidência as constantes da integral, i.e.

$$= \begin{cases} 1 - \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_n^{\alpha_2}\right\}\right), & \text{se } t_n^{\alpha_2} \geq t_{n-1}^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \exp\left\{-\theta t_{n-1}^{\alpha_1}\right\} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}}\right)^{-1} \int_{t_n}^{\infty} \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_n^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\right\} dt_n, & \text{se } t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1}. \end{cases}$$

Na expressão anterior para $t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1}$ temos uma integral conhecida que é igual à função de sobrevivência da distribuição Weibull, i.e.

$$P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_n^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_n^{\alpha_2} \geq t_{n-1}^{\alpha_1} \\ \beta_1^{\alpha_1} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \exp\left\{-\theta t_{n-1}^{\alpha_1}\right\} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Agora tendo todos os elementos da expressão (5.6), vamos construir a função de verossimilhança:

$$\begin{aligned} L(\theta; t) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\} \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) \\ &= \frac{\alpha_1}{\beta_1^{\alpha_1}} t_1^{\alpha_1-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1}\right\} \\ & * \begin{cases} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right)^{n-2} \alpha_2^{n-2} \prod_{i=1}^{n-2} t_{i+1}^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right)^{n-2} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}}\right)^{n-2} \alpha_2^{n-2} (\beta_1^{\alpha_1})^{n-2} \prod_{i=1}^{n-2} \exp\left\{-\theta t_i^{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_{i+1}^{\alpha_2}\right\} t_{i+1}^{\alpha_2-1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1} \end{cases} \\ & * \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_n^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_n^{\alpha_2} \geq t_{n-1}^{\alpha_1} \\ \beta_1^{\alpha_1} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \exp\left\{-\theta t_{n-1}^{\alpha_1} - \left(\frac{t_n}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1} \end{cases} \end{aligned}$$

Em função disso, podemos obter a função $l(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta; t) = \ln(L(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \theta; t))$:

$$\begin{aligned} l(\theta; t) &= \ln(\alpha_1) - \alpha_1 \ln(\beta_1) + (\alpha_1 - 1) \ln(t_1) - \left(\frac{t_1}{\beta_1}\right)^{\alpha_1} \\ & + \begin{cases} (n-2) \ln\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) + (n-2) \ln(\alpha_2) + \sum_{i=1}^{n-2} \left\{(\alpha_2 - 1) \ln(t_{i+1}) - \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right) t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ (n-2) \ln\left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) + (n-2)(-\alpha_2 \ln(\beta_2)) + (n-2) \ln(\alpha_2) + (n-2)(\alpha_1 \ln(\beta_1)) \\ + \sum_{i=1}^{n-2} \left\{\left(-\theta t_i^{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_{i+1}^{\alpha_2}\right) + (\alpha_2 - 1) \ln(t_{i+1})\right\}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1} \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ \begin{cases} -\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right)t_n^{\alpha_2}, & \text{se } t_n^{\alpha_2} \geq t_{n-1}^{\alpha_1} \\ (\alpha_1) \ln(\beta_1) + \ln\left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) - \theta t_{n-1}^{\alpha_1} - \left(\frac{t_n}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}, & \text{se } t_n^{\alpha_2} < t_{n-1}^{\alpha_1}. \end{cases} \quad (5.8)$$

Para encontrar os valores de $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \theta$ que maximizam a função dada em (5.8) é necessário utilizar métodos iterativos. Um método possível seria o algoritmo de Quase-Newton. O *software* R contém pacotes específicos que realizam esse procedimento, desde que fornecidas os logaritmos das funções de verossimilhança. Neste trabalho, utilizamos o pacote "Optim" em que se considera o negativo do logaritmo da função de verossimilhança, já que minimiza por padrão. Assim, na tabela 5.1 são apresentadas as estimativas dos parâmetros do modelo.

Tabela 5.1: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin.

Parâmetro	α_1	α_2	β_1	β_2	θ
EMV	0,948968	0,705371	2,531425	3,643994	$9,999999 * 10^{-21}$

O mais importante em relação aos resultados anteriores, da estimação dos parâmetros de interesse, é que o parâmetro de dependência θ tem um valor próximo a zero, o que explica a dependência fraca que existe entre os intervalos de tempo entre ultrapasses do evento de interesse.

Por outro lado, a partir de (5.7), podemos generalizar a função de sobrevivência para T_{i+1} dado T_i expresso por:

$$S(t_{i+1}/t_i) = P(T_{i+1} \geq t_{i+1}/T_i = t_i)$$

$$S(t_{i+1}/t_i) = \begin{cases} \exp\left\{-\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta\right)t_{i+1}^{\alpha_2}\right\}. & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \beta_1^{\alpha_1} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta\right) \exp\left\{-\theta t_i^{\alpha_1}\right\} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\right\}. & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1}. \end{cases} \quad (5.9)$$

Em seguida, conhecendo os valores estimados dos parâmetros de interesse, vamos mostrar nos seguintes gráficos a adequação de ajuste do modelo markoviano via a distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin.

Figura 5.1: Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin *versus* a curva da função de distribuição acumulada empírica.

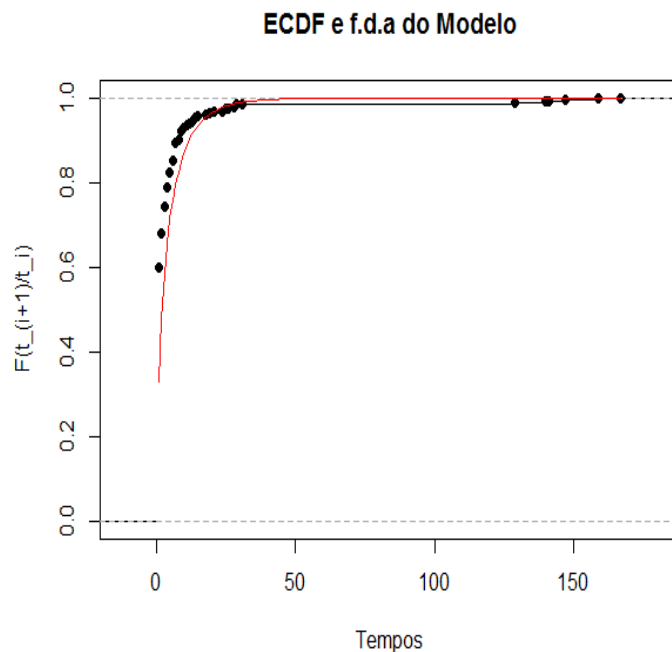
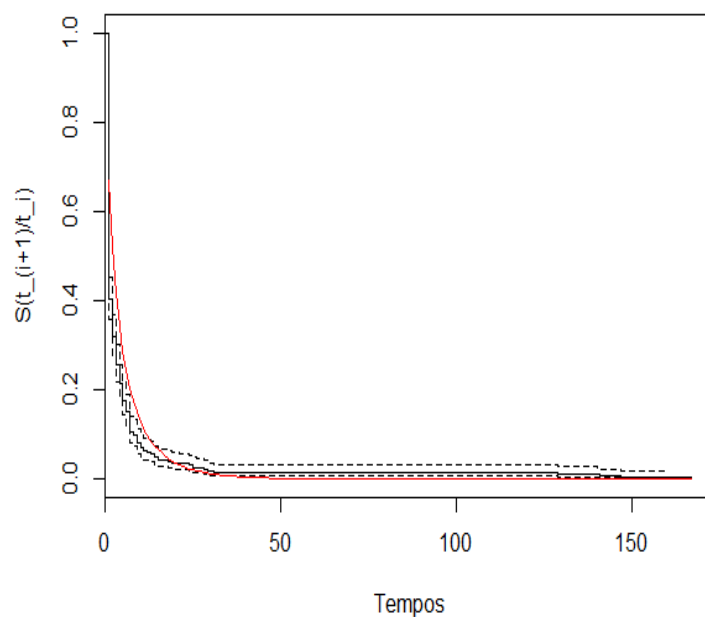


Figura 5.2: Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.



Nos gráficos (5.1) e (5.2) podemos observar uma bom ajuste, isto se deve a existência de dependência fraca entre os intervalos de tempo entre ocorrências do evento de interesse observados. A distribuição de Marshall e Olkin não é absolutamente contínua, então $P(T_i = T_{i+1}) > 0$, isto é verdade neste estudo já que ocorre que o tempo entre o ultrapasse anterior e o ultrapasse atual pode ser igual ao tempo entre o ultrapasse atual e o próximo ultrapasse. Essa é a razão pela qual observamos o bom ajuste deste modelo.

Além disso, podemos estimar o tempo médio a ser esperado para que ocorra o próximo ultrapasse em função do número de dias observado entre o ultrapasse anterior e o ultrapasse atual, isto é, a esperança de T_{i+1} dado $T_i = t_i$, dada por:

$$\begin{aligned} E[T_{i+1}/T_i = t_i] &= \int_0^\infty t_{i+1} f(t_{i+1}/t_i; \alpha, \beta, \theta) dt_{i+1} \\ &= \begin{cases} \int_0^\infty t_{i+1} \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right) \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right) t_{i+1}^{\alpha_2} \right\} dt_{i+1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \int_0^\infty t_{i+1} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta \right) \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} \alpha_2 t_{i+1}^{\alpha_2 - 1} \exp \left\{ - \frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} t_{i+1}^{\alpha_2} - \theta t_i^{\alpha_1} \right\} \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} \right)^{-1} dt_{i+1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\alpha_2}{\left(\sqrt[\alpha_2]{\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right)} \right)^{-1}} t_{i+1}^{\alpha_2} \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\sqrt[\alpha_2]{\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right)}} \right)^{\alpha_2} \right\} dt_{i+1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta \right) \exp \left\{ - \theta t_i^{\alpha_1} \right\} \beta_1^{\alpha_1} \int_0^\infty \frac{\alpha_2}{\beta_2^{\alpha_2}} t_{i+1}^{\alpha_2} \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta_2} \right)^{\alpha_2} \right\} dt_{i+1}, & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1}. \end{cases} \end{aligned}$$

Neste caso, os resultados das integrais anteriores são conhecidas e estão dadas pelo valor esperado de T_{i+1} distribuídos pela distribuição Weibull e obtemos a seguinte forma para a esperança condicional de T_{i+1} dado $T_i = t_i$.

$$E[T_{i+1}/T_i = t_i] = \begin{cases} \sqrt[\alpha_2]{\left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right)}^{-1} \Gamma[1 + (1/\alpha_2)], & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1} \\ \left(\frac{1}{\beta_1^{\alpha_1}} + \theta \right) \exp \left\{ - \theta t_i^{\alpha_1} \right\} \beta_1^{\alpha_1} \beta_2 \Gamma[1 + (1/\alpha_2)], & \text{se } t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1}, \end{cases}$$

conhecendo os parâmetros α_1 , α_2 , β_1 , β_2 e θ pela estimação feita, podemos calcular essas esperanças, que neste caso vão resultar constantes para ambas situações.

Outra informação importante e que pode ser útil é $P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l)$, $j = 0, 1, 2, \dots$; $l = 0, 1, 2, \dots$ isto é a probabilidade de que o tempo até o próximo ultrapasse assuma um determinado valor em função do tempo entre ultrapasse anterior, de modo que a partir disso poderíamos então construir uma matriz de transição, onde os estados seriam os números de dias entre os ultrapasses, desenvolvendo:

$$P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) = P(T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) - P(T_{i+1} < j/T_i = l, \theta) \quad (5.10)$$

- Para $t_{i+1}^{\alpha_2} \geq t_i^{\alpha_1}$

Para obter o resultado de (5.10) vamos resolver por partes:

Substituímos na expressão da função de distribuição condicional $F(t_{i+1}/t_i)$, t_{i+1} por $j + 1$,

$$P(T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right) (j + 1)^{\alpha_2} \right\} \quad (5.11)$$

para o seguinte resultado também substituímos na expressão da função de distribuição condicional $F(t_{i+1}/t_i)$, mas neste caso t_{i+1} por j ,

$$P(T_{i+1} < j/T_i = l, \theta) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right) (j)^{\alpha_2} \right\} \quad (5.12)$$

portanto, de (5.11)-(5.12) temos (5.10) e o resultado é como segue:

$$P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) = \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right) (j)^{\alpha_2} \right\} - \exp \left\{ - \left(\frac{1}{\beta_2^{\alpha_2}} + \theta \right) (j + 1)^{\alpha_2} \right\},$$

- Para $t_{i+1}^{\alpha_2} < t_i^{\alpha_1}$

Para obter o resultado de (5.10) nesta condição, vamos resolver por partes:

Substituímos na expressão da função de distribuição condicional $F(t_{i+1}/t_i)$, t_{i+1} por $j+1$,

$$P(T_{i+1} \leq j+1/T_i = l, \theta) = (1/\beta_1^{\alpha_1} + \theta) \exp\{-\theta l^{\alpha_1}\} \beta_1^{\alpha_1} (1 - \exp\{-((j+1)/\beta_2)^{\alpha_2}\}) \quad (5.13)$$

para o seguinte resultado também substituímos na expressão da função de distribuição condicional $F(t_{i+1}/t_i)$. Mas, neste caso t_{i+1} por j ,

$$P(T_{i+1} < j/T_i = l, \theta) = (1/\beta_1^{\alpha_1} + \theta) \exp\{-\theta l^{\alpha_1}\} \beta_1^{\alpha_1} (1 - \exp\{-(j/\beta_2)^{\alpha_2}\}), \quad (5.14)$$

portanto, de (5.13)-(5.14) temos (5.10) e o resultado é como segue:

$$P(j < T_{i+1} \leq j+1/T_i = l, \theta) = (1/\beta_1^{\alpha_1} + \theta) \exp\{-\theta l^{\alpha_1}\} \beta_1^{\alpha_1} \left[\exp\{-\left(\frac{j}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\} - \exp\{-\left(\frac{j+1}{\beta_2}\right)^{\alpha_2}\} \right]$$

Parte da matriz de transição (para $l, j = 1, 2, \dots, 12$) onde as "l" representa as linhas e "j" representa as colunas ficaria da forma como é ilustrada na Tabela 5.2:

Tabela 5.2: Matriz de transição para o modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
2	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
3	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
4	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
5	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
6	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
7	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
8	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
9	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
10	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
11	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
12	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01

Na matriz acima podemos observar que o elemento posicionado na intersecção da segunda linha e a segunda coluna indica que a probabilidade de que o próximo ultrapasse ocorra depois de amanhã dado que o tempo entre ultrapasses anterior foi igual a dois, é 0,10. Analogamente se faz interpretações com respeito aos demais elementos da matriz.

Introdução à Teoria de Cópulas

6.1 Conceitos Preliminares

O foco desta secção é a noção de funções "2-crescente", bidimensional, análoga a funções não decrescente de uma variável, mas primeiramente precisamos introduzir algumas notações. Denotemos por \mathbb{R} a reta real $(-\infty, +\infty)$, $\overline{\mathbb{R}}$ denota a reta real estendida $[-\infty, +\infty]$, e $\overline{\mathbb{R}^2}$ denota o plano real estendido $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. Um retângulo em $\overline{\mathbb{R}^2}$ é o produto cartesiano B de dois intervalos fechados $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Os vértices de um retângulo B são os pontos $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)$. O quadrado unitário I^2 é o produto $I \times I$ onde $I = [0, 1]$. Uma função bivariada H é uma função cujo domínio, $\text{Dom}H$, é um subconjunto de $\overline{\mathbb{R}^2}$ e cuja imagem, $\text{Im}H$, é um subconjunto de \mathbb{R} .

Definição 1 *Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathbb{R}}$, e seja H uma função bivariada real tal que $\text{Dom}H = S_1 \times S_2$. Seja $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ um retângulo cujos vértices pertencem ao $\text{Dom}H$. Então o H -volume de B é dado por*

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Note que se definimos as diferenças de primeira ordem de H no retângulo B como

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y) \text{ e } \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1),$$

então o H -volume de um retângulo B é a diferença de segunda ordem de H em B ,

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y).$$

Definição 2 *Uma função bivariada real H é 2-crescente se $V_H(B) \geq 0$ para todos os retângulos B cujos vértices pertencem ao $\text{Dom}H$.*

Quando H é 2-crescente, ocasionalmente referimos ao H -volume de um retângulo B como a H -medida de B . Alguns autores referem-se às funções 2-crescente como quase-monótonas. Notemos que se H é 2-crescente não implica que H é crescente em cada argumento, como segue no exemplo abaixo.

Exemplo 1 *Seja $H : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$H(x, y) := (2x - 1)(2y - 1),$$

e seja um retângulo qualquer $B \in I^2$ definido por $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$.

Então

$$V_H(B) = 4(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0,$$

pelo que H é 2-crescente. No entanto, para um valor fixo y_0 , temos que

$$F(x) := H(x, y_0) = [2(2y_0 - 1)]x - (2y_0 - 1),$$

isto é, uma reta com inclinação $2(2y_0 - 1)$ que é negativa para $y_0 < 1/2$, e nesse caso teríamos que H é decrescente em seu primeiro argumento, apesar de ser 2-crescente.

Os seguintes lemas serão úteis na próxima seção de subcópulas e cópulas. O primeiro é consequência direta das definições 1 e 2.

Lema 1 *Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathbb{R}}$ e seja H uma função 2-crescente com o domínio $S_1 \times S_2$. Sejam $x_1, x_2 \in S_1$ com $x_1 \leq x_2$, e sejam $y_1, y_2 \in S_2$ com $y_1 \leq y_2$. Então a função $t \rightarrow H(t, y_2) - H(t, y_1)$ é não decrescente em S_1 , e a função $t \rightarrow H(x_2, t) - H(x_1, t)$ é não decrescente em S_2 .*

Como aplicação imediata deste lema 1, podemos mostrar que, com uma hipótese adicional, uma função H 2-crescente é não decrescente em cada argumento.

Definição 3 *Sejam S_1, S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathbb{R}}$ tais que a_1 é o menor elemento de S_1 e a_2 é o menor elemento de S_2 . Dizemos que a função real $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada inferiormente se $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ para todo $(x, y) \in S_1 \times S_2$.*

Daqui temos:

Lema 2 *Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathbb{R}}$ e seja H uma função 2-crescente limitada inferiormente com o domínio $S_1 \times S_2$. Então H é não decrescente em cada argumento.*

Demonstração. *Sejam a_1 e a_2 os menores elementos de S_1 e S_2 , respectivamente, e sejam $x_1 = a_1, y_1 = a_2$ do Lema 1.*

■

Definição 4 *Sejam S_1, S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathbb{R}}$ tais que b_1 é o maior elemento de S_1 e b_2 é o maior elemento de S_2 . Dizemos que a função $H : S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tem marginais, e que as marginais de H são funções F e G dadas por:*

Dom $F = S_1$, e $F(x) = H(x, b_2)$ para todo $x \in S_1$;

Dom $G = S_2$, e $G(y) = H(b_1, y)$ para todo $y \in S_2$.

Exemplo 2 *Seja $H : [-1, 1] \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(1-e^{-y})}{2},$$

e seja o retângulo $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset \text{Dom}H$. Temos que

$$\begin{aligned} 2V_H(B) &= (x_2+1)(1-e^{-y_2}) - (x_2+1)(1-e^{-y_1}) - (x_1+1)(1-e^{-y_2}) + (x_1+1)(1-e^{-y_1}) \\ &= (x_2-x_1)(e^{-y_1} - e^{-y_2}) \geq 0, \end{aligned}$$

pelo que H é 2-crescente. Como $H(x, 0) = 0 = H(-1, y)$ então pela Definição 3 temos que H está limitada inferiormente. As marginais de H são

$$F(x) := H(x, \infty) = \frac{x+1}{2},$$

$$G(y) := H(1, y) = 1 - e^{-y},$$

que são funções crescentes, como garantido pelo Lema 2.

Fecharemos esta seção com um importante lema em torno de funções 2-crescente limitadas inferiormente e com marginais.

Lema 3 *Sejam S_1 e S_2 subconjuntos não vazios de $\overline{\mathbb{R}}$, e seja H uma função 2-crescente limitada inferiormente, com marginais, cujo domínio é $S_1 \times S_2$. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) quaisquer pontos pertencentes a $S_1 \times S_2$. Então,*

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Demonstração. Usando a desigualdade triangular, temos:

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Agora assumimos $x_1 \leq x_2$. Porque H é limitada inferiormente, 2-crescente, e tem marginais, Lemas 1 e 2 vale $0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1)$. Uma desigualdade análoga vale quando $x_2 \leq x_1$, assim que para quaisquer $x_1, x_2 \in S_1$, $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|$.

Semelhantemente para quaisquer $y_1, y_2 \in S_2$, $|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)|$. ■

6.2 Cópulas

Primeiramente, definiremos subcópulas como uma certa classe de funções 2-crescente e limitadas inferiormente com marginais; então definiremos cópulas como subcópulas com domínio em \mathbf{I}^2 .

Definição 5 *Uma subcópula bidimensional (ou 2-subcópula, ou somente, uma subcópula) é uma função C' com as seguintes propriedades:*

1. $DomC' = S_1 \times S_2$, onde S_1 e S_2 são subconjuntos de \mathbf{I} contendo 0 e 1;
2. C' é limitada inferiormente e 2-crescente;
3. Para todo $u \in S_1$ e todo $v \in S_2$,

$$C'(u, 1) = u \quad e \quad C'(1, v) = v. \quad (6.1)$$

Note-se que para todo $(u, v) \in DomC'$, $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, assim a ImC' é também um subconjunto de \mathbf{I} .

Definição 6 *Uma cópula bidimensional (ou 2-cópula, ou somente, uma cópula) é uma 2-subcópula C cujo domínio é \mathbf{I}^2 .*

Equivalentemente, uma cópula é uma função C de \mathbf{I}^2 em \mathbf{I} com as seguintes propriedades:

1. Para todo $u, v \in \mathbf{I}$,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (6.2)$$

e

$$C(u, 1) = u \quad e \quad C(1, v) = v; \quad (6.3)$$

2. Para todo u_1, u_2, v_1 e $v_2 \in \mathbf{I}$ tal que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (6.4)$$

Observação: $C(u, v) = V_c([0, u] \times [0, v])$ (ver Definição 1) e além disso a propriedade (6.4) é equivalente a que $V_c([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) \geq 0$.

A distinção entre uma subcópula e uma cópula (o domínio) pode parecer ser uma premissa, mas ficará coerente a importância na próxima seção quando discutiremos o teorema de Sklar. Em adição, muitas das propriedades de cópulas são propriedades de subcópulas.

Teorema 1 *Seja C' uma subcópula. Então para todo $(u, v) \in \text{Dom}C'$,*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v). \quad (6.5)$$

Demonstração. *Seja (u, v) um ponto arbitrário em $\text{Dom}C'$. Como $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ e $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$ temos $C'(u, v) \leq \min(u, v)$. Por outro lado, $V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$ implica que $C'(u, v) \geq u + v - 1$, que quando combinado com $C'(u, v) \geq 0$ temos $C'(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$. ■*

Como toda cópula é uma subcópula, as desigualdades no teorema acima valem para cópulas. Importante, os limites em (6.5) são também cópulas e são denotadas por $M(u, v) = \min(u, v)$ e $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$. Assim para toda cópula C e todo $(u, v) \in \mathbf{I}^2$,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v). \quad (6.6)$$

A desigualdade (6.6) é a versão cópula da desigualdade dos limites de Fréchet-Hoeffding. Referimos a M como o limite superior e W como o limite inferior de Fréchet-Hoeffding. Uma terceira cópula importante que será frequentemente utilizada é a cópula produto $\Pi(u, v) = uv$.

O teorema seguinte, que segue diretamente do Lema 3, estabiliza a continuidade de subcópulas e consequentemente de cópulas, via a condição de Lipschitz no \mathbf{I}^2 .

Teorema 2 *Seja C' uma subcópula. Então para todo $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in \text{Dom}C'$,*

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \quad (6.7)$$

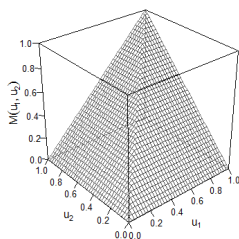
Logo, C' é uniformemente contínua no seu domínio.

Definição 7 *Seja C uma cópula, e seja a qualquer número pertencente a \mathbf{I} . A secção horizontal de C em a é uma função de \mathbf{I} em \mathbf{I} dada por $t \mapsto C(t, a)$; a secção vertical de C em a é uma função de \mathbf{I} em \mathbf{I} dada por $t \mapsto C(a, t)$; a secção diagonal de C é uma função δ_c de \mathbf{I} em \mathbf{I} definida por $\delta_c(t) = C(t, t)$.*

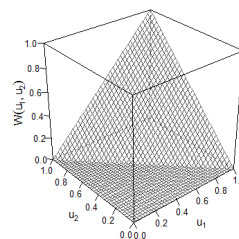
O corolário seguinte é uma consequência imediata do Lema 2 e do Teorema 2.

Corolário 1 *As secções vertical, horizontal e diagonal de uma cópula C são todas não decrescentes e uniformemente contínuas em \mathbf{I} .*

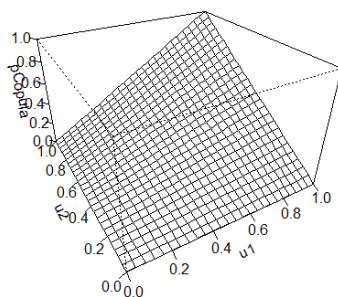
Várias aplicações de cópulas envolvem a forma do gráfico de uma cópula, isto é, a superfície $z = C(u, v)$. Segue da Definição 6 e do Teorema 2 que o gráfico de qualquer cópula é uma superfície $S = \{u, v, C(u, v)\}$ contínua dentro do cubo unitário \mathbf{I}^3 , cujo limite é o quadrilátero inclinado com vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, e $(0, 1, 0)$; e do Teorema 1 que o gráfico está entre os gráficos dos limites de Fréchet-Hoeffding, isto é, as superfícies $z = M(u, v)$ e $z = W(u, v)$. Na Figura 6.1 apresentamos os gráficos das cópulas M e W , assim como o gráfico de Π , uma porção do parabolóide hiperbólico $z = uv$, Hofer et al. 2016 [22].

Figura 6.1: Gráficos das cópulas M, W e Π .

(a) M



(b) W

(c) Π

Teorema 3 *Seja C uma cópula. Para qualquer $v \in \mathbf{I}$, a derivada parcial $\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ existe para todo u e para tais v e u ,*

$$0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \leq 1. \quad (6.8)$$

Semelhantemente, para qualquer $u \in \mathbf{I}$, a derivada parcial $\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ existe para todo v , e para tais u e v ,

$$0 \leq \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \leq 1. \quad (6.9)$$

Portanto, as funções $u \mapsto \partial C(u,v)/\partial v$ e $v \mapsto \partial C(u,v)/\partial u$ são definidas e não decrescente ao menos em \mathbf{I} .

Demonstração. Ver Nelsen (2006)[35].

Teorema 4 *Seja C uma cópula. Se $\partial C(u,v)/\partial v$ e $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v$ são contínuas em \mathbf{I}^2 e $\partial C(u,v)/\partial u$ existe para todo $u \in (0,1)$ quando $v = 0$, então $\partial C(u,v)/\partial u$ e $\partial^2 C(u,v)/\partial v \partial u$ existe em $(0,1)^2$ e $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v = \partial^2 C(u,v)/\partial v \partial u$.*

Demonstração. Ver Seeley (1961)[41].

6.3 Teorema de Sklar

O teorema desta seção é o teorema central da teoria de cópulas e é fundamental para muitas, se não todas, aplicações da teoria de cópulas ou talvez na estatística. O teorema

de Sklar elucida a regra que cópulas jogam nas relações entre função de distribuição multivariada e suas marginais. Assim iniciaremos esta seção com uma breve discussão sobre funções de distribuição.

Definição 8 Uma função distribuição é uma função F com domínio $\overline{\mathbb{R}}$ de modo que

1. F é não decrescente;
2. $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$.

Definição 9 Uma função distribuição conjunta é uma função H com domínio $\overline{\mathbb{R}}^2$ de modo que

1. H é 2-crescente;
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$, e $H(\infty, \infty) = 1$

Deste modo H é limitada inferiormente, e porque $\text{Dom}H = \overline{\mathbb{R}}^2$, H tem marginais F e G dada por $F(x) = H(x, \infty)$ e $G(y) = H(\infty, y)$. Por virtude do Corolário 1, F e G são funções de distribuição.

Lema 4 Seja H uma função de distribuição conjunta com marginais F e G . Então existe uma única subcópula C' tal que

1. $\text{Dom}C' = \text{Im}F \times \text{Im}G$.
2. Para todo $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$.

Demonstração. A função de distribuição conjunta H satisfaz a hipótese do Lema 3 com $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{R}}$. Assim para quaisquer pontos (x_1, y_1) e $(x_2, y_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Segue que $F(x_1) = F(x_2)$ e $G(y_1) = G(y_2)$, então $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$. Assim o conjunto de pares ordenados

$$\{(F(x), G(y)), H(x, y) \mid x, y \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

define uma função 2-real C' cujo domínio é $\text{Im}F \times \text{Im}G$. Esta função é uma subcópula que segue diretamente da propriedade de H . Por instante, para mostrar que satisfaz as propriedades da Definição 6, primeiro notemos que para cada $u \in \text{Im}F$, existe um $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = u$. Assim $C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u$. As verificações das outras propriedades da Definição 5 são semelhantes. ■

Lema 5 Seja C' uma subcópula. Então, existe uma cópula C tal que $C(u, v) = C'(u, v)$ para todo $(u, v) \in \text{Dom}C'$; isto é, qualquer subcópula pode ser estendida à uma cópula. A extensão geralmente não é única.

Demonstração. Ver Nelsen (2006) [35].

Teorema 5 (Teorema de Sklar) *Seja H uma função de distribuição conjunta com marginais F e G . Então existe uma cópula C tal que para todo $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$,*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (6.10)$$

Se F e G são contínuas, então a cópula C é única; caso contrário, C é unicamente determinada na $ImF \times ImG$. Inversamente, se C é uma cópula e F e G são funções de distribuição, então a função H definida por (6.10) é a função de distribuição conjunta com marginais F e G .

Demonstração.

1. *Pelo Lema 4 existe uma única subcópula C' tal que $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$ com $DomC' = ImF \times ImG$. Pelo Lema 5 C' pode ser estendido para uma cópula C . Se F e G são contínuas então $ImF = ImG = I$ e por tanto a única subcópula é uma cópula.*

2. *Seja C uma cópula e sejam F e G funções de distribuição. Definimos a função $H(x, y) := C(F(x), G(y))$. Utilizando a Definição 9:*

(a) *Seja $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Então*

$$\begin{aligned} V_H(B) &= C(F(x_2), G(y_2)) - C(F(x_2), G(y_1)) - C(F(x_1), G(y_2)) \\ &\quad + C(F(x_1), G(y_1)) \\ &= V_C([F(x_1), F(x_2)] \times [G(y_1), G(y_2)]) \geq 0, \end{aligned}$$

e por tanto H é 2-crescente.

(b) *$H(x, -\infty) = C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0$ e de maneira análoga $H(-\infty, y) = 0$. $H(\infty, \infty) = C(F(\infty), G(\infty)) = C(1, 1) = 1$. Por tanto H é função de distribuição conjunta com marginais*

$$H(x, \infty) = C(F(x), 1) = F(x), \quad H(\infty, y) = C(1, G(y)) = G(y).$$

■

Este teorema apareceu primeiro em (Sklar 1959 [43]). O nome "Cópula" foi escolhido para enfatizar a maneira que uma cópula "unifica" a função de distribuição conjunta e suas marginais.

A equação (6.10) fornece uma expressão para funções de distribuição conjunta em termos de uma cópula e duas funções de distribuição univariadas. Mas (6.10) pode ser invertido para expressar cópulas em termos de uma função de distribuição conjunta e as "inversas" das duas marginais. No entanto, se uma marginal não for estritamente crescente, ela não possui uma inversa no sentido usual. Assim, primeiro precisamos definir "quase-inversas" de funções de distribuição (relembrar Definição 8).

Definição 10 *Seja F uma função de distribuição. Então, a quase-inversa de F é qualquer função $F^{(-1)}$ com domínio \mathbf{I} tal que*

1. *Se $t \in ImF$, então $F^{(-1)}(t)$ é qualquer número $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, i.e., para todo $t \in ImF$, $F(F^{(-1)}(t)) = t$;*

2. *Se $t \notin ImF$, então $F^{(-1)}(t) = \inf\{x/F(x) \geq t\} = \sup\{x/F(x) \leq t\}$.*

Se F é estritamente crescente, então ela tem uma simples quase-inversa, que é a inversa ordinária, para a qual utilizaremos a seguinte notação F^{-1} .

Corolário 2 *Sejam H, F, G e C' como no Lema 4, e sejam $F^{(-1)}$ e $G^{(-1)}$ quase inversas de F e G , respectivamente. Então, para qualquer $(u, v) \in \text{Dom}C'$,*

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (6.11)$$

Quando F e G são contínuas, o resultado acima vale para cópulas e fornece um método de construção de cópulas a partir de funções de distribuição conjunta.

6.4 Cópulas e Variáveis Aleatórias

Vamos agora utilizar o Teorema de Sklar em termos de suas variáveis aleatórias e suas funções de distribuições.

Teorema 6 *Sejam X e Y variáveis aleatórias com funções de distribuição F e G , respectivamente, e com função de distribuição conjunta H . Então existe uma cópula C tal que $H(x, y) = C(F(x), G(y))$. Se F e G são contínuas, então C é única, caso contrário C é unicamente determinada em $\text{Im}F \times \text{Im}G$.*

Demonstração. *O resultado é imediato a partir do Teorema 5. ■*

A cópula C do Teorema 6 será chamada de cópula de X e Y , e denotada C_{XY} quando sua identificação com as variáveis aleatórias X e Y seja vantajosa.

O seguinte Teorema 7 mostra que a cópula produto $\Pi(u, v) = uv$ caracteriza variáveis aleatórias independentes quando as funções de distribuição são contínuas. Sua prova segue do Teorema 6 e a observação de que X e Y são independentes se e somente se $H(x, y) = F(x).G(y)$ para todo $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Teorema 7 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas. Então X e Y são independentes se e somente se $C_{XY} = \Pi$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} X, Y \text{ independentes} &\Leftrightarrow H(x, y) = F(x)F(y), \\ &\Leftrightarrow H(x, y) = C(F(x)F(y)), \end{aligned}$$

onde $C(u, v) = uv = \Pi(u, v)$, e como F e G são contínuas então C é única. ■

Uma das utilidades de cópulas no estudo de estatística não paramétrica deriva do fato de que para transformações estritamente monótonas de variáveis aleatórias, as cópulas são invariantes ou mudam de maneira previsível. Lembramos que se a função de distribuição de uma variável aleatória X é contínua, e se α é uma função estritamente monótona cujo domínio está contido na $\text{Im}X$, então a função de distribuição da variável aleatória $\alpha(X)$ é também contínua.

Trataremos o caso de transformações estritamente crescente primeiro.

Teorema 8 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula C_{XY} . Se α e β são estritamente crescentes na $\text{Im}X$ e $\text{Im}Y$, respectivamente, então $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Assim C_{XY} é invariante sobre transformações estritamente crescentes de X e Y .*

Demonstração. *Sejam F_1, G_1, F_2 e G_2 as funções de distribuição de $X, Y, \alpha(X)$ e $\beta(Y)$, respetivamente. Como α e β são estritamente crescente, $F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x))$ e igualmente $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$. Assim, para qualquer $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$,*

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

Como X e Y são contínuas, $\text{Im}F_2 = \text{Im}G_2 = \mathbf{I}$, logo segue que $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ em \mathbf{I}^2 .

■

Quando ao menos uma das α e β é estritamente decrescente, obtemos resultados em que a cópula das variáveis aleatórias $\alpha(X)$ e $\beta(Y)$ é uma simples transformação de C_{XY} .

Especificamente, temos:

Teorema 9 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com cópula C_{XY} . Sejam α e β estritamente monótonas na $\text{Im}X$ e $\text{Im}Y$, respectivamente.*

1. *Se α é estritamente crescente e β é estritamente decrescente, então*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

2. *Se α é estritamente decrescente e β é estritamente crescente, então*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

3. *Se α e β são estritamente decrescentes, então*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Conceitos de Dependência

Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos de dependência, tais conceitos encontram-se principalmente nos textos de Trivedi e Zimmer (2007) [46] e Nelsen (2006)[35].

Dada uma ampla gama de cópulas surgem as seguintes perguntas a responder: Como escolher um entre elas no trabalho empírico? Qual é a natureza da dependência que é capturado pelos parâmetros de dependência em diferentes cópulas? Como se relaciona o parâmetro de dependência com o conceito mais familiar de correlação? Estes problemas são relevantes para a seleção entre diferentes cópulas. Uma consideração chave é a capacidade de um modelo para capturar a dependência entre variáveis de uma maneira contextualmente satisfatória. Uma discussão apropriada deste tema requer estudo da dependência em maior detalhe, ver Drovot-Mari e Kotz (2001)[39]. Nesta seção restringiremos a discussão ao caso bivariado, além de ser possível a generalização a dimensões mais altas.

Definição 11 *As variáveis aleatórias X e Y são ditas comonotônicas se são positivamente dependentes perfeitamente (i.e., $X = Y$ quase certamente) e contramonotônicas se são negativamente dependentes perfeitamente (i.e., $X = -Y$ quase certamente), as mesmas são ditas dependentes ou associadas se elas não são independentes no sentido de que $F(X, Y) \neq F_1(X)F_2(Y)$. Apesar da multiplicidade de medidas de dependência, todas elas são norteadas por um conjunto de propriedades desejáveis para tais medidas. No caso bivariado, $\delta(X, Y)$ denota uma medida escalar de dependência. Embrechts et al. (2002)[14] enumeram quatro propriedades desta medida:*

1. $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ (Simetria);
2. $-1 \leq \delta(X, Y) \leq +1$ (Normalização);
3. $\delta(X, Y) = 1 \Leftrightarrow X, Y$ comonotônicas; $\delta(X, Y) = -1 \Leftrightarrow X, Y$ contramonotônicas;
4. Para uma transformação estritamente monotônica $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de X :

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) & T \text{ crescente} \\ -\delta(X, Y) & T \text{ decrescente.} \end{cases}$$

5. $\delta(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X, Y$ independentes.

As propriedades 4 e 5 acima são mutuamente excludentes, de modo que nenhuma medida de dependência tem essas propriedades simultaneamente. Cherubini et al. (2004)

[9] afirma que a associação pode ser medida usando vários conceitos alternativos e examinaremos quatro em particular: correlação linear, concordância, dependência caudal e dependência de quadrante positivo.

7.1 O Coeficiente de Correlação Linear

De longe, o conceito de associação (dependência) mais familiar é o coeficiente de correlação entre um par de variáveis (X, Y) , definido como:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}},$$

onde $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ é a covariância entre X e Y e $Var(X)$, $Var(Y)$ são as variâncias positivas finitas de X e Y , respectivamente.

As principais propriedades do coeficiente de correlação linear são:

(r1) $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$;

(r2) se X e Y são independentes, então $\rho(X, Y) = 0$;

(r3) $\rho(aX + b, cY + d) = \text{sign}(ac)\rho(X, Y)$ para todos os reais $a \neq 0, c \neq 0, b$ e d , onde $\text{sign}(\cdot)$ é a função sinal de (\cdot) .

O coeficiente $\rho(X, Y)$ é uma medida paramétrica da dependência linear entre as variáveis, sendo invariante sob transformações lineares estritamente crescentes.

Também, $\rho(X, Y)$ é uma medida de dependência natural nas distribuições normais multivariadas, e num contexto mais amplo nas famílias de distribuições esférica e elíptica.

Algumas falhas e interpretações errôneas da correlação linear são apresentados por Embrechts et al.(2002)[14], podem ser encontrados também da seguinte maneira resumida em Santos (2008) [40]:

Falha1: As variâncias de X e Y têm que ser finitas ou o coeficiente de correlação linear não é definido. Isto não é ideal para uma medida de dependência e causa problemas quando trabalhamos com distribuição com caudas pesadas. Por exemplo, a covariância e correlação entre duas componentes de um vetor aleatório bivariado com distribuição- t_v não são definidas para $v \leq 2$.

Falha2: Independência de suas variáveis aleatórias implica que elas não são correlacionadas, mas correlação zero em geral não implica independência.

Falha3: correlação linear é não-invariante sob transformações não lineares estritamente crescentes $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, isto é

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y).$$

Se tomarmos a distribuição normal bivariada com correlação ρ e a transformação $T(X) = \phi(X)$ (a função de distribuição normal padrão) temos:

$$\rho(T(X), T(Y)) = \frac{6}{\pi} \arcsen\left(\frac{\rho}{2}\right),$$

veja Joag-Dev (1984) [25]. Em geral, podemos mostrar (Ver Kendall e Stuart (1979), p. 600) que para vetores bivariados distribuídos normalmente e transformações arbitrárias

$T, \tilde{T} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ que

$$|\rho(T(X), T(Y))| \leq |\rho(X, Y)|.$$

Falha4: Distribuição marginal e o coeficiente de correlação linear determinam a distribuição conjunta. Apenas as distribuições multivariadas normais e distribuições elípticas. Por exemplo, sabendo que $(X, Y)^t$ tem distribuição normal bivariada, então a esperança e a variância de X e Y e o coeficiente de correlação $\rho(X, Y)$ são unicamente determinados pela distribuição conjunta. Porém, se somente conhecemos as distribuições marginais X e Y e o coeficiente de correlação, então existem muitas possibilidades para distribuição bivariada $(X, Y)^t$. A distribuição de $(X, Y)^t$ não é unicamente determinada por F_1 , F_2 e $\rho(X, Y)$.

Falha5: Dadas as distribuições marginais F_1 , F_2 de X e Y , todos os valores de correlação linear entre -1 e 1 não podem ser atingidos sem termos especificação da distribuição conjunta.

A afirmação acima é verdadeira.

7.2 Concordância

Informalmente, um par de variáveis aleatórias são concordantes se valores grandes de uma tendem a ser associados com valores grandes da outra e valores pequenos de uma com valores pequenos da outra. Para ser mais preciso, sejam (x_i, y_i) e (x_j, y_j) duas observações de um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Então (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$, ou se $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$. Similarmente, dizemos que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são discordantes se $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$ ou se $x_i > x_j$ e $y_i < y_j$. Observe a formulação alternativa: (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ e discordantes se $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$.

7.2.1 Coeficiente Tau de Kendall

A versão da amostra da medida de associação conhecida como Tau de Kendall é definida em termos de concordância como segue (Kruskal 1958 [28]; Hollander and Wolfe 2013 [23]; Lehmann 1975 [12]): Seja $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ uma amostra aleatória de n observações de uma vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Existem $\binom{n}{2}$ distintos pares (x_i, y_i) e (x_j, y_j) de observações na amostra, e cada par é concordante ou discordante, seja c que denota o número de pares concordantes e d o número de pares discordantes. Então, o Tau de Kendall para a amostra é definido como

$$t = \frac{c - d}{c + d} = (c - d) / \binom{n}{2}.$$

Equivalentemente, t é a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para um par de observações (x_i, y_i) e (x_j, y_j) que é escolhido aleatoriamente a partir da amostra. A versão populacional de Tau de Kendall para um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas com função de distribuição conjunta H é definido similarmente. Sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos, cada um com função de distribuição conjunta H . Então a versão populacional de Tau de Kendall é definido como a probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância:

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

(usaremos letras latinas para estatísticas de amostra e letras gregas para os parâmetros de população correspondentes).

A fim de demonstrar o papel que as cópulas desempenham na concordância e nas medidas de associação, tais como Tau de Kendall, primeiro definimos uma "Função de concordância" Q , a qual é a diferença de probabilidades de concordância e discordância entre dois vetores (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) de variáveis aleatórias contínuas com (possivelmente) diferentes distribuições conjuntas H_1 e H_2 , mas com marginais comuns F e G . Então mostramos que esta função depende da distribuição de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) somente através de suas cópulas.

Teorema 10 *Sejam (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) vetores independentes de variáveis aleatórias contínuas, com funções distribuições conjuntas H_1 e H_2 , respectivamente, com marginais comuns F (de X_1 e X_2) e G (de Y_1 e Y_2). Sejam C_1 e C_2 as cópulas de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , respectivamente, de modo que $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ e $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$. Seja Q a diferença entre a probabilidades de concordância e a de discordância de (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) , isto é, seja*

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Então

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1.$$

Demonstração: Ver (Nelsen 2006 P. 159)

Corolário 3 *Sejam C_1, C_2 , e Q como definidos no Teorema 10. Então*

1. Q é simétrica em seus argumentos: $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$.
2. Q é não decrescente em cada argumento: se $C_1 \prec C'_1$ e $C_2 \prec C'_2$ para todo $(u, v) \in I^2$, então $Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$, " \prec " é chamado de ordenação de concordância.
3. Cópulas podem ser substituídos por cópulas de sobrevivência em Q , isto é., $Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$.

Teorema 11 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas cuja cópula é C . Então a versão populacional de Tau de Kendall para X e Y (que denotaremos por $\tau_{X,Y}$ ou τ_C) está dado por*

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (7.1)$$

Portanto, o Tau de Kendall é o primeiro "eixo de concordância". Note que a integral que aparece em (7.1) pode ser interpretada como o valor esperado da função $C(U, V)$ de variáveis aleatórias uniformes $(0, 1)$ U e V cuja função de distribuição conjunta é C , ou seja,

$$\tau_C = 4E(C(U, V)) - 1. \quad (7.2)$$

Quando a cópula C é um membro de uma família paramétrica de cópulas (por exemplo, se C é denotado por C_θ ou $C_{\alpha,\beta}$), vamos escrever τ_θ e $\tau_{\alpha,\beta}$ em vez de τ_C e $\tau_{C_{\alpha,\beta}}$, respectivamente.

7.2.2 Coeficiente Rho de Spearman

De acordo com Nelsen (2006. p. 167)[35], assim como o Tau de Kendall, a versão populacional da medida de associação conhecida como Rho de Spearman é baseada na concordância e discordância. Para obter a versão populacional desta medida (Kruskal 1958 [28]; Lehmann 1966 [30]), agora dados (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) e (X_3, Y_3) vetores aleatórios independentes com distribuição conjunta comum H (cujas marginais são novamente F e G) e a cópula C . A versão populacional $\rho_{X,Y}$ de Rho de Spearman é definido como proporcional à probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para os vetores (X_1, Y_1) e (X_2, Y_3) , isto é, um par de vetores com as mesmas marginais, mas um deles tem função de distribuição H , enquanto os componentes do outro são independentes, desta forma:

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \quad (7.3)$$

(o par (X_3, Y_2) poderia ser usado igualmente também). Note que enquanto a função de distribuição de (X_1, Y_1) é $H(x, y)$, a função de distribuição conjunta de (X_2, Y_3) é $F(x)G(y)$ (porque X_2 e Y_3 são independentes). Assim a cópula de X_2 e Y_3 é Π , e usando o Teorema 10 e a parte 1 do Corolário 3, temos imediatamente

Teorema 12 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas cujas cópula é C . Então a versão populacional de Rho de Spearman para X e Y (que denotaremos por $\rho_{X,Y}$ ou ρ_C) está dado por*

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 3Q(C, \Pi), \quad (7.4)$$

$$= 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3, \quad (7.5)$$

$$= 12 \iint_{I^2} C(u, v) dudv - 3. \quad (7.6)$$

Assim o Rho de Spearman é essencialmente o segundo "eixo de concordância". O coeficiente "3" que aparece em (7.3) e (7.4) é a constante de "normalização", pois $Q(C, \Pi) \in [-1/3, 1/3]$. Como foi o caso com Tau de Kendall, vamos escrever ρ_θ e $\rho_{\alpha,\beta}$, em vez de ρ_{C_θ} e $\rho_{C_{\alpha,\beta}}$, respectivamente, quando a cópula C está dado por C_θ ou $C_{\alpha,\theta}$.

Definição 12 *Uma medida real k de dependência entre duas variáveis aleatórias contínuas X e Y com cópula $C(\cdot)$ é uma medida de concordância se ela satisfaz as seguintes propriedades (novamente nós escrevemos $k_{X,Y}$ ou k_C quando conveniente):*

1. k está definida para todo par X, Y de variáveis aleatórias contínuas;
2. $-1 \leq k_{X,Y} \leq 1$, $k_{X,X} = 1$ e $k_{X,-X} = -1$;
3. $k_{X,Y} = k_{Y,X}$;
4. Se X e Y são independentes, então $k_{X,Y} = k_\Pi = 0$;
5. $k_{-X,Y} = k_{X,-Y} = -k_{X,Y}$;
6. Se C_1 e C_2 são cópulas tais que $C_1 \prec C_2$, então $k_{C_1} \leq k_{C_2}$;
7. Se $\{(X_n, Y_n)\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias contínuas com cópulas C_n , e se $\{C_n\}$ converge ponto a ponto para C , então $\lim_{n \rightarrow \infty} k_{C_n} = k_C$.

Teorema 13 *Seja k uma medida de concordância para variáveis aleatórias contínuas X e Y :*

1. *se Y é quase certamente uma função crescente de X , então $k_{X,Y} = k_M = 1$;*
2. *e se Y é quase certamente uma função decrescente de X , então $k_{X,Y} = k_W = -1$;*
3. *se α e β são quase certamente funções estritamente monótonas em $Im(X)$ e $Im(Y)$ respectivamente, então $k_{\alpha(X),\beta(Y)} = k_{X,Y}$.*

Teorema 14 *Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas cuja cópula é C , então as versões populacionais do Tau de Kendall (7.1) e do Rho de Spearman (7.4) satisfazem as propriedades da Definição 12 e Teorema 13 para uma medida de concordância. Demonstração: Ver Nelsen (2006) p. 169 [35].*

Rho de Spearman é frequentemente chamado de "Grau" de coeficiente de correlação. Isto é, se x e y são observações de duas variáveis aleatórias X e Y com funções de distribuição F e G , respectivamente, então os graus de x e y estão dados por $u = F(x)$ e $v = G(y)$. Observe que os graus (u e v) são observações das variáveis aleatórias uniformes $(0, 1)$ $U = F(X)$ e $V = G(Y)$ cuja função de distribuição conjunta é C . Como U e V têm média $1/2$ e variância $1/12$, a expressão para ρ_C em (7.5) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 12 \iint_{I^2} uv dC(u, v) - 3 = 12E(UV) - 3, \quad (7.7)$$

$$= \frac{E(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{E(UV) - E(U)E(V)}{\sqrt{Var(U)}\sqrt{Var(V)}}. \quad (7.8)$$

Como consequência, o Rho de Spearman para um par de variáveis aleatórias contínuas X e Y é idêntico ao coeficiente de correlação produto-momento de Pearson para os graus de X e Y , isto é, as variáveis aleatórias $U = F(X)$ e $V = G(Y)$.

Para mais detalhes sobre os coeficientes de Tau de Kendall e Rho de Spearman pode-se consultar o livro de Nelsen (2006) [35].

7.3 Dependência Caudal

O conceito de dependência da cauda se relaciona com a quantidade de dependência na cauda quadrante superior direita ou na cauda quadrante inferior esquerda de I^2 de uma distribuição bivariada. É um conceito relevante para o estudo da dependência entre valores extremos. Acontece que a dependência da cauda entre duas variáveis aleatórias contínuas X e Y é uma propriedade da cópula e, portanto, a quantidade de dependência da cauda é invariante sob transformações estritamente crescentes de X e Y , Embrechts et al. (2001) [13]

Definição 13 *Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuição F e G , respectivamente. O **parâmetro de dependência da cauda superior** λ_U é o limite (se existir) da probabilidade condicional de que Y é maior que o percentil 100 de G , dado que X é maior que o percentil 100 de F , quando t se aproxima de 1, ou seja,*

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P[Y > G^{(-1)}(t) / X > F^{(-1)}(t)]. \quad (7.9)$$

*Similarmente, o **parâmetro de dependência da cauda inferior** λ_L é o limite (se existir) da probabilidade condicional de que Y é menor ou igual ao percentil 100 de G ,*

dado que X é menor que ou igual ao percentil 100^o de F , quando t se aproxima de 0, ou seja,

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P[Y \leq G^{(-1)}(t)/X \leq F^{(-1)}(t)]. \quad (7.10)$$

Estes parâmetros são não paramétricos e dependem apenas da cópula de X e Y , como o seguinte teorema demonstra.

Teorema 15 *Sejam X, Y, F, G, λ_U , e λ_L como na Definição 13, e seja C a cópula de X e Y , com seção diagonal δ_C . Se os limites em (7.9) e (7.10) existem, então*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t} = 2 - \delta'_C(1^-) \quad (7.11)$$

e

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{C(t, t)}{t} = \delta'_C(0^+). \quad (7.12)$$

Demonstração. *Provamos (7.11), a prova de (7.12) é semelhante.*

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{t \rightarrow 1^-} P[Y > G^{(-1)}(t)/X > F^{(-1)}(t)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} P[G(Y) > t/F(X) > t] \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(t, t)}{1 - t} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2t + C(t, t)}{1 - t} \\ &= 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t} = 2 - \delta'_C(1^-). \end{aligned}$$

■

Se λ_U está em $(0, 1]$, dizemos que C tem dependência da cauda superior; se $\lambda_U = 0$, dizemos que C não tem dependência da cauda superior; e similarmente para λ_L .

Agora, como as cópulas Arquimedianas são abordadas neste trabalho, o seguinte Corolário 4 indica que os parâmetros de dependência da cauda podem ser expressos em termos de limites envolvendo o gerador e seu inverso (Nelsen 1997) [36]:

Corolário 4 *Seja C uma cópula Arquimediana com gerador $\varphi \in \Omega$. Então*

$$\lambda_U = 2 - \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2\varphi(t))}{1 - t} = 2 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \varphi^{[-1]}(2x)}{1 - \varphi^{[-1]}(x)}$$

e

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\varphi^{[-1]}(2\varphi(t))}{t} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{[-1]}(2x)}{\varphi^{[-1]}(x)}.$$

Duas outras propriedades relacionadas à Dependência da Cauda são: Cauda Esquerda Decrescente (LTD) e Cauda Direita Crescente (RTI). Y é dito ser LTD em X se $P[Y \leq y/X \leq x]$ está diminuindo em x para todo y . Y é dito ser RTI em X se $P[Y > y/X > x]$ está aumentando em x para todo y . Uma terceira probabilidade condicional de interesse é $P[Y > y/X = x]$. Diz-se que Y está estocasticamente aumentando se esta probabilidade está aumentando em x para todo y .

7.4 Dependência de Quadrante Positivo

De acordo com Trivedi e Zimmer (2005) [46], outra medida de dependência é a dependência do quadrante positivo (**PQD**). Diz-se que duas variáveis aleatórias X, Y exibem PQD se a sua cópula é maior do que o seu produto, isto é, $C(u_1, u_2) > u_1 u_2$, para todo $(u_1, u_2) \in \mathbf{I}^2$ ou, simplesmente $C \succ C^\perp$, em que C^\perp denota a Cópula Produto (Π). Em termos de funções de distribuição, PQD implica $F(x, y) \geq F_1(x)F_2(y)$ para todo $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Suponhamos que x e y denotam duas perdas ou ganhos financeiros. A propriedade PQD implica que a probabilidade de que as perdas excedam alguns valores especificados seja maior quando (x, y) é um par dependente do que quando os dois são independentes para todos os x e y . A dependência do quadrante positivo implica correlação não-negativa. Mas todas essas propriedades são implicadas pela comonotonicidade, que é do tipo mais forte de dependência positiva. Note que as propriedades LTD e RTI implicam a propriedade do PQD.

Principais Famílias de Cópulas Bivariadas

As cópulas são agrupadas como: Cópulas Arquimedianas, FGM Cópulas, Cópulas Elípticas, Cópulas de Valor Extremo e outras. A lista não é completa, mas são as cópulas paramétricas mais utilizadas. A seguir apresentamos somente as duas primeiras classes de cópulas mencionadas, pois são as que foram trabalhadas para construir os modelos markovianos neste trabalho.

8.1 Cópulas Arquimedianas

Estas cópulas são muito importantes porque tem uma ampla variedade de aplicações e por diversos motivos: (1) A facilidade com que podem ser construídas; (2) A grande variedade de famílias de cópulas que pertencem a esta classe; e (3) As propriedades interessantes possuídas pelos membros desta classe, Nelsen (2006) [35]. As cópulas Arquimedianas são construídas a partir de uma função geradora denotada por φ .

Definição 14 (Pseudo-Inversa de φ). *Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ uma função contínua e estritamente decrescente tal que $\varphi(1) = 0$. A pseudo inversa de φ é a função $\varphi^{[-1]}$ com $\text{Dom}\varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ e $\text{Ran}\varphi^{[-1]} = I$ dada por*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \text{se } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \quad (8.1)$$

Com isso, perceba que $\varphi^{[-1]}$ é contínua e decrescente em $[0, \infty]$, e estritamente decrescente em $[0, \varphi(0)]$. Adicionalmente, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ em I , e

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & \text{se } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \text{se } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)). \end{aligned}$$

Finalmente, se $\varphi(0) = \infty$, então $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Lema 6 *Seja $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ uma função contínua e estritamente decrescente tal que $\varphi(1) = 0$ e $\varphi^{[-1]}$ a pseudo-inversa de φ definida por (8.1). Seja também uma função $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ dada por*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad (8.2)$$

então C satisfaz as condições de contorno (6.2) e (6.3) para uma cópula.

Demonstração. $C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$, e $C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$. Por simetria, $C(0, v) = 0$ e $C(1, v) = v$. ■

No seguinte Lema 7, obtemos uma condição necessária e suficiente para que a função C em (8.2) seja 2-crescente.

Lema 7 *Sejam φ , $\varphi^{[-1]}$ e C satisfazerem as hipóteses do Lema 6. Então C é 2-crescente se e somente se para todos v em I , sempre que $u_1 \leq u_2$,*

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1.$$

Demonstração. Ver Nelsen (2006) p. 111 [35].

Teorema 16 *Seja $\varphi : I \rightarrow [0, \infty]$ uma função contínua e estritamente decrescente tal que $\varphi(1) = 0$, e seja $\varphi^{[-1]}$ a pseudo-inversa de φ definida por (8.1). Então a função $C : I \rightarrow I$ dada por (8.2) é uma cópula se e somente se φ é convexo.*

A prova pode ser visto em Nelsen (2006) p. 111 [35], mas apresentada primeiramente em (Alsina et. al. 2005) [5].

As cópulas com a estrutura apresentada na equação (8.2) são denominadas Arquimedianas. Como já citado anteriormente, a construção das cópulas Arquimedianas são através da função φ , denominado de função geradora. Se $\varphi(0) = \infty$, isto é, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, então φ é denominada de função geradora estrita.

8.1.1 Propriedades

Teorema 17 *Seja C uma cópula Arquimediana com gerador φ . Então:*

- C é simétrica, i.e. $C(u, v) = C(v, u)$ para todo u, v em $[0, 1]$.
- C é associativa, i.e. $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para todo u, v e w em $[0, 1]$.

Demonstração. A primeira parte segue de (8.2):

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(u)) \\ &= C(v, u). \end{aligned}$$

A segunda parte:

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + (\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

■

A propriedade de associatividade de cópulas Arquimedianas não é compartilhada por cópulas em geral, como mostrado no exemplo a seguir:

Exemplo 3 Seja C_θ um membro da família de cópulas bivariadas Farlie-Gumbel-Morgenstern, i.e. $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$, para $\theta \in [-1, 1]$. Então:

$$C_\theta\left(\frac{1}{4}, C_\theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right) \neq C_\theta\left(C_\theta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{3}\right).$$

Para todo $\theta \in [-1, 0) \cup (0, 1]$.

Assim o único membro da família de cópulas bivariadas Farlie-Gumbel-Morgenstern que é arquimediana é Π , Paul Embrechts et.al (2001) [13].

8.1.2 Tau de Kendall

Lembre-se que o Tau de Kendall para uma cópula C pode ser expresso como uma integral dupla de C . Esta integral dupla na maioria dos casos não é fácil de avaliar. No entanto para uma cópula Arquimediana o Tau de Kendall pode ser expressa como uma integral (unidimensional) do gerador e sua derivada, como mostrado no seguinte Teorema de Genest e Mackay (1986a) [17]:

Teorema 18 Seja X e Y variáveis aleatórias com uma cópula Arquimediana C gerada por φ . Tau de Kendall de X e Y está dado por:

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (8.3)$$

8.1.3 Dependência Caudal

Para as cópulas Arquimedianas, a dependência caudal pode ser expressa em termos dos geradores.

Teorema 19 Seja φ um gerador estrito, tal que φ^{-1} pertença à classe de transformações de Laplace de variáveis aleatórias estritamente positivas. Se $\varphi^{-1}(0)$ é finita, então

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

não tem dependência da cauda superior. Se C tem dependência da cauda superior, então $\varphi^{-1}(0) = -\infty$ e o coeficiente de dependência da cauda superior é dado por

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \searrow 0} \left[\varphi^{-1}(2s) / \varphi^{-1}(s) \right].$$

A demonstração deste Teorema podemos ver em Joe (1997) [26].

A condição adicional no gerador pode aparecer um pouco estranha. Mas esta condição é satisfeita pela maioria das cópulas Arquimedianas comumente encontradas.

Teorema 20 Seja φ um gerador estrito, tal que φ^{-1} pertença à classe de transformações de Laplace de variáveis aleatórias estritamente positivas. O coeficiente de dependência da cauda inferior para a cópula $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ é igual a

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\varphi^{-1}(2s) / \varphi^{-1}(s) \right].$$

Algumas famílias de cópulas Arquimedianas importantes serão apresentadas a seguir, uma lista de 22 famílias podem ser encontradas em Nelsen (2006) [35]:

8.1.4 Cópula Clayton

$$C_\theta(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (8.4)$$

Com função geradora $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, onde $\theta \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$.

8.1.5 Cópula Frank

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\ln(\theta)} \ln \left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1} \right]. \quad (8.5)$$

Com função geradora $\varphi_\theta(t) = \ln \left[\frac{\theta^t - 1}{\theta - 1} \right]$, onde $\theta \geq 0$.

1. Para $0 < \theta < 1$, temos associação (positiva).
2. para $\theta \rightarrow 1$, temos independência.
3. Para $\theta > 1$, temos associação negativa.

Observação: A f.d.p. é simétrica, e conseqüentemente a cópula e a sua cópula de sobrevivência são as mesmas. De fato, esta família é a única que satisfaz o seguinte Balakrishnan e Lai (2009) [6]:

$$C(u, v) = \hat{C}(u, v).$$

8.1.6 Cópula Gumbel Hougaard

$$C_\theta(u, v) = \exp \left\{ -[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\}. \quad (8.6)$$

Com função geradora $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$, onde $\theta \in [1, \infty)$.

8.1.7 Cópula Gumbel-Barnett

$$C_\theta(u, v) = uv \exp \{-\theta \ln u \ln v\}. \quad (8.7)$$

Com função geradora $\varphi_\theta(t) = \ln(1 - \theta \ln t)$, onde $\theta \in (0, 1]$.

- Para $\theta \rightarrow 0$, temos independência.

8.1.8 Cópula Ali-Mikhail-Haq (AMH)

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}. \quad (8.8)$$

Com função geradora $\varphi_\theta(t) = \ln \left(\frac{1 - \theta(1-t)}{t} \right)$, onde $\theta \in [-1, 1)$.

- A cópia AMH exibe dependência da cauda esquerda para $\theta = 1$.

Alguns aspectos como caracterização das cópias, ordem e casos limitantes, cópias arqui-medianas com dois parâmetros e cópias arqui-medianas multivariadas não são abordados neste trabalho, mas podem ser encontrados em Nelsen (2006) [35].

8.2 Cópias de Farlie-Gumbel-Morgenstern

As cópias de Farlie-Gumbel-Morgenstern são construídas pelo método geométrico ou seja utilizando algumas informações de natureza geométrica, como uma descrição do suporte ou a forma dos gráficos das seções horizontais, verticais ou diagonais.

8.2.1 Cópias com Seções Quadráticas

Existem cópias com seções quadráticas em, digamos, u ? Se assim for, então C será dado por $C(u, v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v)$ para funções apropriadas a, b , e c . Novamente empregando as condições de contorno, obtemos

$$0 = C(0, v) = c(v) \quad \text{e} \quad v = C(1, v) = a(v) + b(v).$$

Se deixarmos $a(v) = -\psi(v)$, então $b(v) = v - a(v) = v + \psi(v)$, e temos

$$C(u, v) = uv + \psi(v)u(1 - u), \tag{8.9}$$

onde ψ é uma função tal que C é 2-crescente e $\psi(0) = \psi(1) = 0$ (de modo que $C(u, 0) = 0$ e $C(u, 1) = u$)

8.2.2 Cópias de FGM

Na família de cópias Farlie-Gumbel-Morgenstern, supomos que C é simétrico e tem seções quadráticas em u . Então C satisfaz (8.9) e $C(u, v) = uv + \psi(u)v(1 - v)$. Consequentemente, $\psi(v) = \theta v(1 - v)$ para algum parâmetro θ , de modo que

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v). \tag{8.10}$$

O C_θ -volume de um retângulo $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ é dado, após alguma simplificação, por

$$V_{C_\theta}([u_1, u_2] \times [v_1, v_2]) = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)[1 + \theta(1 - u_1 - u_2)(1 - v_1 - v_2)].$$

Como $(1 - u_1 - u_2)(1 - v_1 - v_2)$ está em $[-1, 1]$ para todo u_1, u_2, v_1, v_2 em I , segue-se que C_θ é 2-crescente, e, portanto uma cópia, se e somente se $\theta \in [-1, 1]$. Esta família é conhecida como a Família de Farlie-Gumbel-Morgenstern (geralmente abreviada "FGM") e contém como membros todas as cópias com seções quadráticas em ambos u e v . A família foi discutida por Morgenstern (1956) [34], Gumbel (1960) [20], e Farlie (1960) [16]; no entanto, parece que a primeira publicação com a forma básica funcional (4.2.2) foi por Eyraud (1938) [15]. Devido a sua simples forma analítica, as distribuições Farlie-Gumbel-Morgenstern têm sido amplamente utilizadas em modelagem, para testes de associação, e em estudos da eficiência de procedimentos não-paramétricos. Para listas extensas de aplicações e referências, veja (Conway (1983) [11]; Hutchinson e Lai (1990) [24]). No entanto, as cópias de FGM só podem modelar dependência relativamente fraca, Nelsen (2006) [35].

Modelos Markovianos Weibull a Partir de Funções Cópulas

Vamos descrever os modelos matemáticos markovianos derivados de distribuições bivariadas construídas através de cópulas. Neste capítulo continuamos com o segundo caso, onde mantemos a suposição de que os tempos entre ultrapasses $T_i, i = 1, 2, 3, \dots$ são identicamente distribuídos com Weibull (α, β) , e eliminamos a suposição de independência e além disso, supomos que estes tempos seguem um processo de Markov.

9.1 Modelo Markoviano Weibull via Cópula Farlie Gumbel Morgenstern

Sejam $S > 0$ e $K > 0$, números real e inteiro fixados, respectivamente. Aqui K é o número de vezes em que a medição da temperatura ultrapassa o limite de interesse fixado no caso (22°C) durante o intervalo de tempo $[0, S]$.

Sejam d_1, d_2, \dots, d_K os dias em que ocorreram os ultrapasses (excederam o limite de interesse). Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ o conjunto de dias em que ocorreram os ultrapasses durante o tempo de estudo $[0, S]$. Seja $T_i, i = 1, 2, \dots$ o tempo em dias entre i -ésimo e o $(i - 1)$ -ésimo ultrapasse.

Para descrever este modelo, definiremos primeiro a distribuição a seguir:

9.1.1 Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Farlie Gumbel Morgenstern

Com o objetivo de definir a função de distribuição bivariado, primeiramente supomos que C_θ é uma função distribuição com função de densidade c_θ em $[0, 1]^2$ para $\theta \in \mathbb{R}$.

Aqui consideramos os tempos de falhas (tempos entre ocorrências do evento de interesse) como as variáveis aleatórias. Então, sejam (T_1, T_2) os tempos de falhas pareados e, F_i e f_i , respetivamente, a função de distribuição e a função de densidade de $T_i, i = 1, 2$.

Se (T_1, T_2) provém da cópula C_θ para algum θ , então pelo Teorema de Sklar, a função de distribuição conjunta de (T_1, T_2) , é dada por (Nelsen, 2006)[35].

$$F(t_1, t_2) = C_\theta(F_1(t_1), F_2(t_2)), \quad t_1, t_2 > 0, \quad (9.1)$$

com marginais F_1 e F_2 .

Note que uso de cópulas nos permite separar o estudo da dependência do estudo dos

marginais, e esta estrutura de dependência é representada por uma cópula. Se a densidade $f(.,.)$ de $F(.,.)$ existe, pode-se derivar de (9.1), a relação entre a densidade f de F e c_θ de C_θ , (Drouet & Kotz, 2001)[39]:

$$f(t_1, t_2) = c_\theta(F_1(t_1), F_2(t_2))f_1(t_1)f_2(t_2), \quad t_1, t_2 > 0, \quad (9.2)$$

onde $f_1(t_1)$ e $f_2(t_2)$ são as densidades marginais de F .

A função de distribuição bivariada induzida pela cópula FGM é dada por

$$F(t_1, t_2) = F_1(t_1)F_2(t_2)[1 + \theta\{1 - F_1(t_1)\}\{1 - F_2(t_2)\}], \quad (9.3)$$

em que $\theta \in [-1, 1]$, é o parâmetro de dependência entre os tempos de falha. Observe que quando $\theta = 0$, $F(t_1, t_2) = F_1(t_1)F_2(t_2)$, levando à conclusão de que as variáveis aleatórias T_1 e T_2 são independentes.

Agora supomos que as variáveis aleatórias T_1 e T_2 têm uma distribuição Weibull com função de densidade e distribuição acumulada marginal dados por (4.1) e (4.2), respectivamente.

Então a função de distribuição conjunta via cópula FGM, utilizando (9.3), é:

$$F(t_1, t_2) = (1 - \exp\{-(t_1/\beta)^\alpha\})(1 - \exp\{-(t_2/\beta)^\alpha\})(1 + \theta \exp\{-(t_1/\beta)^\alpha - (t_2/\beta)^\alpha\}) \quad (9.4)$$

e a função de densidade conjunta além de ser determinada como em (9.2), pode ser determinada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{\partial F(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} \\ &= \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} \exp\{-(t_1/\beta)^\alpha\} \right) \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_2^{\alpha-1} \exp\{-(t_2/\beta)^\alpha\} \right) \\ &\quad \left(1 + \theta [1 - 2(1 - \exp\{-(t_1/\beta)^\alpha\})][1 - 2(1 - \exp\{-(t_2/\beta)^\alpha\})] \right). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Com $\alpha > 0, \beta > 0$ parâmetros de forma e escala, respectivamente e $\theta \in [-1, 1]$ parâmetro de dependência entre os tempos de falha.

O parâmetro θ é relacionado também às medidas de concordância Tau de Kendall e Rho de Spearman. A partir de (7.1), tem se:

$$\begin{aligned} \tau_{T_1, T_2} &= 4 \iint_{I^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 = 4E(C(U, V)) - 1 \\ &= 4 \iint_{I^2} (uv + \theta uv(1-u)(1-v))(1 + \theta(1-2u)(1-2v)) dudv - 1 \\ &= \frac{2\theta}{9}. \end{aligned}$$

e de (7.6):

$$\begin{aligned} \rho_{T_1, T_2} &= 12 \iint_{I^2} C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \iint_{I^2} uv + \theta uv(1-u)(1-v) dudv - 3 \\ &= \frac{\theta}{3}. \end{aligned}$$

A cópula FGM não tem dependência de cauda inferior nem superior, ou seja $\lambda_U = 0$ e $\lambda_L = 0$.

Em seguida definiremos a função de densidade condicional de T_{i+1} dado T_i .

$$f(t_{i+1}/t_i) = \frac{f(t_{i+1}, t_i)}{f(t_i)}. \quad (9.6)$$

de (4.1) para (T_i) e (9.5) para (T_{i+1}, T_i) em (9.6), para $i = 1, 2, \dots$ temos:

$$\begin{aligned}
f(t_{i+1}/t_i) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \\
&\quad * \left[1 + \theta \left[1 - 2 \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right) \right] \left[1 - 2 \left(1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right) \right] \right] \\
&= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \\
&\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha \right\} - 2\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} + 4\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right).
\end{aligned} \tag{9.7}$$

A função de distribuição acumulada condicional de T_{i+1} dado T_i , para $i = 1, 2, \dots$ é dada por:

$$\begin{aligned}
F(t_{i+1}/t_i) &= P(T_{i+1} \leq t_{i+1}/T_i = t_i) \\
&= \int_0^{t_{i+1}} f(t_{i+1}/t_i) dt_{i+1} \\
&= 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \\
&\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha \right\} + 2\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} - \theta \exp \left\{ \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right).
\end{aligned} \tag{9.8}$$

9.1.2 Estimação de Máxima de Verossimilhança

A função de verossimilhança está dada por $L(\theta; t) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Estes tempos são dependentes e seguem um processo de Markov, isto é, o intervalo de tempo atual só depende do intervalo de tempo anterior, tendo em conta que $d_0 = 0$, os valores dos intervalos de tempo observados são dados por:

$t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, k = (n - 1)$, onde d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, e esclarecemos que $t_n = S - d_k$, então a função de verossimilhança está dado por:

$$L(\theta; t) = f(t_1) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}). \tag{9.9}$$

Para sua especificação precisamos ajustar uma distribuição de probabilidades aos tempos quando são considerados estados anteriores e outra distribuição de probabilidade quando considerados estados posteriores.

Nos falta calcular $P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) &= \int_{t_n}^{\infty} f(t_n/t_{n-1}, \alpha, \beta, \theta) dt_n \\
&= \int_{t_n}^{\infty} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp \left\{ - \left(\frac{t_n}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right\} \\
&\quad * \left\{ 1 + \theta - 2\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_{n-1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} - 2\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_n}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right. \\
&\quad \left. + 4\theta \exp \left\{ - \left(\frac{t_{n-1}}{\beta} \right)^\alpha - \left(\frac{t_n}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right\} dt_n,
\end{aligned}$$

pelo fato da integral da soma é a soma das integrais:

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n + \theta \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n \\
&\quad - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n - 2\theta \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-2\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n \\
&\quad + 4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-2\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n,
\end{aligned}$$

colocando em evidência

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n \\
&\quad + \left(4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 2\theta\right) \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-2\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n.
\end{aligned}$$

Procurando integrais conhecidas

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n \\
&\quad + \left(2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta\right) \int_{t_n}^{\infty} \frac{\alpha}{\left(\frac{\beta}{2^{1/\alpha}}\right)^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\frac{\beta}{2^{1/\alpha}}}\right)^\alpha\right\} dt_n.
\end{aligned}$$

As integrais encontradas acima são funções de sobrevivência de T_n com parâmetros (α, β) e $(\alpha, \frac{\beta}{2^{1/\alpha}})$, respectivamente:

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad + \left(2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta\right) \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\frac{\beta}{2^{1/\alpha}}}\right)^\alpha\right\}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P(T_n \geq t_n / T_{n-1} = t_{n-1}) &= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right. \\
&\quad \left. - \theta \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}. \tag{9.10}
\end{aligned}$$

Agora tendo todos os elementos da expressão (9.9), vamos construir a função de verossimilhança:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}; t) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\} \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n / T_{n-1} = t_{n-1}) \\
&= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \right. \\
&\quad \left. + 4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \right\} \\
&\quad * \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)
\end{aligned}$$

simplificando temos:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}; t) &= \frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{(n-1)\alpha}} t_1^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+ 4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Em função disso, podemos obter a função $l(\alpha, \beta, \theta; t) = \ln(L(\alpha, \beta, \theta; t))$:

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}; t) &= (n-1) \ln(\alpha) - (n-1)\alpha \ln(\beta) + (\alpha-1) \ln(t_1) - \left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha \\
&\quad + \ln\left[1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} \left\{(\alpha-1) \ln(t_{i+1}) - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha + \ln\left[1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right.\right. \\
&\quad \left.\left.- 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\}, \tag{9.11}
\end{aligned}$$

com $l(\alpha, \beta, \theta) = \ln(L(\boldsymbol{\theta}))$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de α , β e θ que maximizam a função acima. A maximização para o conjunto de dados (tempos entre ultrapasses de 22°C de temperatura) foi obtida por meio de um método numérico "Quase Newton". O programa R tem o pacote Optim que por padrão minimiza uma função então temos que declarar como função objetivo o negativo do logaritmo da função de verossimilhança e especificar qual método utilizar. Neste caso utilizamos o método de Quase Newton, os resultados são vistos na Tabela 9.1.

Tabela 9.1: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula FGM.

Parâmetro	α	β	θ
EMV	0,7166911	3,8941768	0,7174575

De (9.10) temos a função de sobrevivência para T_{i+1} dado T_i , $i = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned}
S(t_{i+1}/t_i) &= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \\
&\quad * \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}, \tag{9.12}
\end{aligned}$$

em que α e β são parâmetros de forma e escala, respectivamente, e θ é o parâmetro de dependência.

Conhecendo os valores dos parâmetros estimados, podemos realizar o ajuste gráfico do modelo mediante as curvas da função de distribuição acumulada e de sobrevivência, isto mostramos nos gráficos seguintes.

Figura 9.1: Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula FGM *versus* a curva da função de distribuição acumulada empírica.

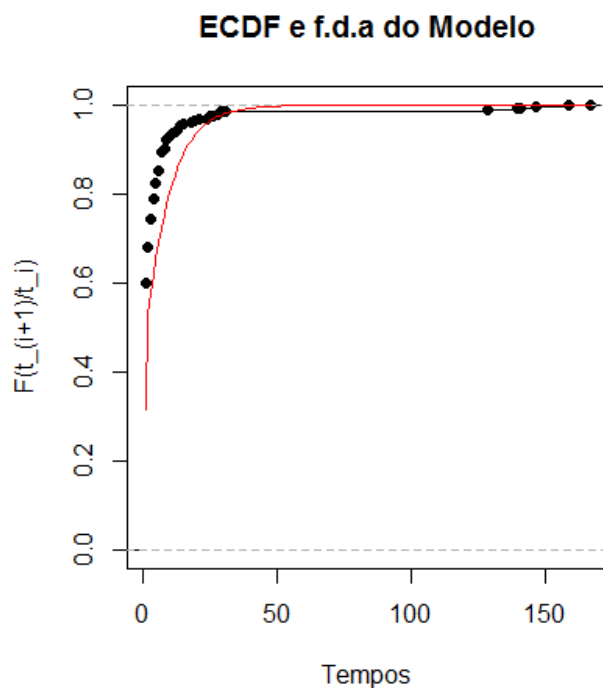
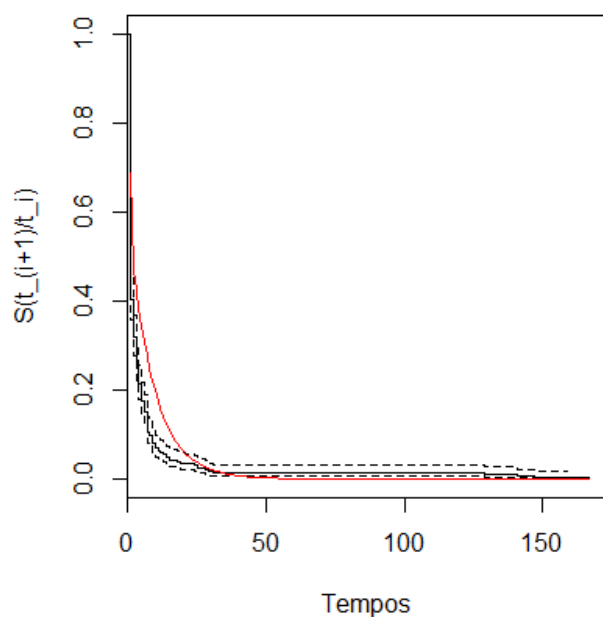


Figura 9.2: Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula FGM *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.



Ao observarmos a Figura 9.1, podemos perceber que a curva vermelha que é a função de distribuição do modelo avaliado em tempos gerados, não se aproxima da curva preta

que é a função de distribuição empírica avaliado nos tempos entre ultrapasse reais. Na Figura 9.2 podemos perceber uma situação parecida mas com respeito à função de sobrevivência, ou seja este modelo não explica bem os dados reais.

Além disso podemos estimar o tempo médio a ser esperado para que ocorra o próximo ultrapasse em função do número de dias observado entre o ultrapasse anterior e o ultrapasse atual, isto é, a esperança de T_{i+1} dado $T_i = t_i$.

$$\begin{aligned}
E[T_{i+1}/T_i = t_i] &= \int_0^\infty t_{i+1} f(t_{i+1}/t_i; \alpha, \beta, \theta) dt_{i+1} \\
&= \int_0^\infty t_{i+1} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right. \\
&\quad \left.- 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) dt_{i+1} \\
&= \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1} + \theta \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1} \\
&\quad - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1} \\
&\quad - 2\theta \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-2\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1} \\
&\quad + 4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-2\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1}.
\end{aligned}$$

Colocando em evidência as parcelas de termo comum

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1} \\
&\quad + \left(4\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 2\theta\right) \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-2\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1},
\end{aligned}$$

rearranjando de modo a termos as duas integrais conhecidas

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \int_0^\infty \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1} \\
&\quad + \left(2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta\right) \int_0^\infty \frac{\alpha}{(\beta/2^{1/\alpha})^\alpha} t_{i+1}^\alpha \exp\left\{-2\left(\frac{t_{i+1}}{\beta/2^{1/\alpha}}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1}.
\end{aligned}$$

Neste caso os resultados das integrais anteriores são conhecidas e estão dadas por o valor esperado de T_{i+1} distribuídos pela distribuição Weibull, com parâmetros $(\alpha; \beta)$ e $(\alpha; \beta/2^{1/\alpha})$, respectivamente, isto é.

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \left(2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta\right) \frac{\beta}{2^{1/\alpha}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \\
&= \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} + \frac{2\theta \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}}{2^{1/\alpha}} - \frac{\theta}{2^{1/\alpha}}\right] \\
&= \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[1 + \theta \left(1 - 2 \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2^{(1-1/\alpha)} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 2^{(-1/\alpha)}\right)\right] \\
&= \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[1 + \theta \left(1 - 2^{(-1/\alpha)} - 2 \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2^{\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)} \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right] \\
&= \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[1 + \theta \left(1 - 2^{(-1/\alpha)}\right) \left(1 - 2 \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right].
\end{aligned}$$

Logo, de acordo com a modelagem proposta, obtemos a seguinte forma para a esperança condicional de T_{i+1} dado $T_i = t_i$.

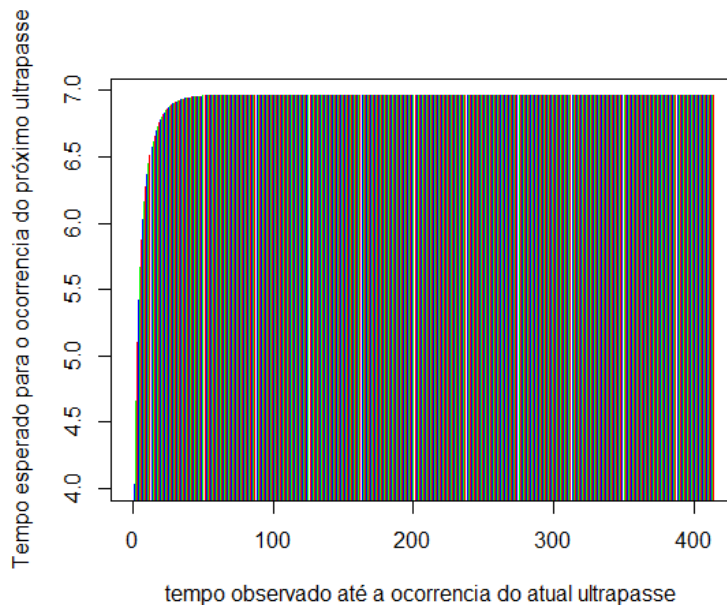
$$E[T_{i+1}/T_i = t_i] = \beta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \left[1 + \theta\left(1 - 2^{(-1/\alpha)}\right)\left(1 - 2 \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right]. \quad (9.13)$$

Então, conhecendo os parâmetros α , β e θ pela estimação feita, podemos calcular essas esperanças. Os valores las esperanças são apresentadas na Tabela 9.2.

Tabela 9.2: Estimativa do tempo médio necessário para a ocorrência do próximo ultrapasse em função do número de dias entre o penúltimo e o atual ultrapasse.

$T_i = t_i$	1	2	3	4	5	6	7
$E(T_{i+1}/T_i = t_i)$	4,026331	4,660375	5,095747	5,419438	5,670208	5,869628	6,031165
$T_i = t_i$	8	9	10	11	12	13	14
$E(T_{i+1}/T_i = t_i)$	6,163848	6,274031	6,366351	6,444285	6,510494	6,567054	6,615604
$T_i = t_i$	15	16	17	18	19	20	21
$E(T_{i+1}/T_i = t_i)$	6,657458	6,693679	6,725133	6,752535	6,776474	6,797444	6,815859
$T_i = t_i$	22	23	24	25	26	27	28
$E(T_{i+1}/T_i = t_i)$	6,832066	6,846359	6,858991	6,870174	6,880093	6,888904	6,896743
\vdots	\vdots	\vdots	3	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$T_i = t_i$	400	401	402	403	404	405	406
$E(T_{i+1}/T_i = t_i)$	6,966902	6,966902	6,966902	6,966902	6,966902	6,966902	6,966902
$T_i = t_i$	407	408	409	410	411	412	413
$E(T_{i+1}/T_i = t_i)$	6,967000	6,967000	6,967000	6,967000	6,967000	6,967000	6,967000
$T_i = t_i$	414						
$E(T_{i+1}/T_i = t_i)$	6,967000						

Figura 9.3: Tempo médio observado para o próximo ultrapasse *versus* o tempo observado até a ocorrência do atual ultrapasse.



Na Tabela 9.2 e no gráfico da Figura 9.3 acima podemos observar que conforme o tempo anterior de ultrapasse cresce a estimativa do modelo para o tempo médio para a ocorrência do próximo ultrapasse cresce e fica oscilando em torno de 6,967.

Outra informação importante que pode ser útil é $P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l)$, $j = 0, 1, 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots$ isto é a probabilidade de que o tempo até o próximo ultrapasse assuma um determinado valor em função do tempo entre ultrapasse anterior, de modo que a partir disso poderíamos então construir uma matriz de transição, onde os estados seriam os números de dias entre os ultrapasses, desenvolvendo:

$$P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \boldsymbol{\theta}) = P(T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \boldsymbol{\theta}) - P(T_{i+1} < j/T_i = l, \boldsymbol{\theta}). \quad (9.14)$$

Da expressão anterior resolvendo por partes, substituímos em (9.8), t_{i+1} por $j + 1$, isto é:

$$\begin{aligned} P(T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \boldsymbol{\theta}) &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ &\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right. \\ &\quad \left.+ 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta \exp\left\{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \end{aligned} \quad (9.15)$$

e para a segunda parte substituímos em (9.8), t_{i+1} por j , isto é:

$$\begin{aligned} P(T_{i+1} < j/T_i = l, \boldsymbol{\theta}) &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ &\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right. \\ &\quad \left.- \theta \exp\left\{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right). \end{aligned} \quad (9.16)$$

Portanto, de (9.14), temos:

$$\begin{aligned} P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \boldsymbol{\theta}) &= \exp\left\{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ &\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right. \\ &\quad \left.- \theta \exp\left\{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) - \exp\left\{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ &\quad * \left(1 + \theta - 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha\right\} + 2\theta \exp\left\{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha - \left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right. \\ &\quad \left.- \theta \exp\left\{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right). \end{aligned} \quad (9.17)$$

Parte da Matriz de transição (para $l, j = 1, 2, \dots, 14$) onde as "l" representa as linhas e "j" representa as colunas ficaria assim:

Tabela 9.3: Matriz de transição para o modelo markoviano via cópula FGM.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0,63	0,47	0,37	0,30	0,25	0,21	0,17	0,15	0,13	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
2	0,67	0,52	0,42	0,35	0,29	0,25	0,21	0,18	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09	0,08
3	0,71	0,56	0,46	0,38	0,32	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10	0,09
4	0,73	0,59	0,49	0,41	0,34	0,29	0,25	0,22	0,19	0,16	0,14	0,13	0,11	0,10
5	0,75	0,61	0,51	0,43	0,36	0,31	0,27	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12	0,10
6	0,76	0,62	0,52	0,44	0,38	0,32	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11
7	0,77	0,64	0,54	0,45	0,39	0,33	0,29	0,25	0,22	0,19	0,17	0,14	0,13	0,11
8	0,78	0,65	0,55	0,46	0,40	0,34	0,29	0,26	0,22	0,19	0,17	0,15	0,13	0,12
9	0,79	0,66	0,56	0,47	0,40	0,35	0,30	0,26	0,23	0,20	0,17	0,15	0,13	0,12
10	0,80	0,67	0,56	0,48	0,41	0,35	0,31	0,27	0,23	0,20	0,18	0,16	0,14	0,12
11	0,80	0,67	0,57	0,49	0,42	0,36	0,31	0,27	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12
12	0,81	0,68	0,58	0,49	0,42	0,36	0,31	0,27	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,12
13	0,81	0,68	0,58	0,50	0,43	0,37	0,32	0,28	0,24	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13
14	0,81	0,69	0,58	0,50	0,43	0,37	0,32	0,28	0,24	0,21	0,19	0,16	0,14	0,13

Na matriz acima podemos observar que o elemento posicionado na intersecção da segunda linha e a segunda coluna indica a probabilidade de que o próximo ultrapasse ocorra depois de amanhã dado que o tempo de ultrapasse anterior foi igual a 2. Analogamente se faz interpretações com respeito aos demais elementos da matriz. Caso se deseja saber a probabilidade de transição associada a outro par de estados, basta utilizar a equação (9.17) para a realização do cálculo.

9.2 Modelo Markoviano Weibull via Cópula Arquimediana Gumbel Barnett

Sejam $S > 0$ e $K > 0$, números real e inteiro fixados, respectivamente. Sejam d_1, d_2, \dots, d_K os dias em que ocorreram os ultrapasses (excederam o limite de interesse). Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ o conjunto de dias em que ocorreram os ultrapasses durante o tempo de estudo $[0, S]$. Seja $T_i, i = 1, 2, \dots$ o tempo em dias entre i -ésimo e o $(i - 1)$ -ésimo ultrapasse.

Para descrever este modelo, definiremos primeiro a distribuição a seguir:

9.2.1 Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Gumbel Barnett

As cópulas Arquimedianas desempenham um papel importante devido as suas boas propriedades matemáticas. Uma lista de cópulas Arquimedianas podemos ver na Tabela 4.1 do livro de Nelsen, 2006 [35]).

Gumbel (1960a)[20] sugeriu a seguinte distribuição exponencial bivariada:

$$F_{\theta}(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-(x+y+\theta xy)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases} \quad (9.18)$$

onde θ é um parâmetro em $[0, 1]$. Então as funções de distribuição marginal são exponenciais, com quase-inversas $F^{(-1)}(u) = -\ln(1 - u)$ e $G^{(-1)}(v) = -\ln(1 - v)$ para u, v em

$[0, 1]$. Consequentemente a cópula correspondente é

$$C_\theta(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v)e^{-\theta \ln(1-u) \ln(1-v)}. \quad (9.19)$$

Assim como a função de sobrevivência para as variáveis aleatórias distribuídas exponencialmente univariadas é funcionalmente mais simples que a função de distribuição acumulada, a mesma é frequentemente verdadeira no caso bivariado. Barnett (1980) [7] mostrou que a cópula de sobrevivência correspondente a (9.19) é :

$$\hat{C}_\theta(u, v) = uv e^{-\theta \ln(u) \ln(v)}. \quad (9.20)$$

A cópula anterior é conhecida como Gumbel-Barnett, Hutchinson e Lai (1990). A cópula de sobrevivência é igual à cópula unicamente quando se trata da cópula de Frank (ver Frank [1979, 1991]). Assim, para outras cópulas arquimedianas, a cópula de sobrevivência correspondente não é arquimediana. No entanto, podemos encontrar cópulas que não são arquimedianas, de modo que a cópula de sobrevivência seja arquimediana. Por exemplo, Genest e Mackay [1986a] [18] observam que a cópula de Gumbel-Barnett (9.20) é arquimediana enquanto a cópula de Gumbel (9.19) não é arquimediana.

Vamos mostrar como foi gerada a cópula arquimediana (9.20). Seja $\varphi_\theta(t) = \ln(1 + \theta \ln(t))$ para θ em $(0, 1]$. Porque $\varphi_\theta(t) = \infty$, $\varphi_\theta(t)$ é estrita, e $\varphi_\theta^{[-1]}(t) = \varphi_\theta^{-1}(t) = e^{\frac{(1-e^t)}{\theta}}$. se C_θ denota a cópula arquimediana gerada por φ_θ , então

$$C_\theta(u, v) = uv e^{-\theta \ln(u) \ln(v)}, \quad (9.21)$$

a cópula de sobrevivência para a exponencial bivariada de Gumbel. A sua respetiva função de densidade conjunta é:

$$c_\theta(u, v) = \frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v}$$

derivando (9.21), primeiro com respeito a u temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_\theta(u, v)}{\partial u} &= v \left[\exp\{-\theta \ln u \ln v\} + u \exp\{-\theta \ln u \ln v\} \left(-\theta \left(\frac{\ln v}{u} \right) \right) \right] \\ &= v \exp\{-\theta \ln u \ln v\} - \theta v \ln v \exp\{-\theta \ln u \ln v\}. \end{aligned}$$

Agora derivando esta ultima expressão com respeito a v , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_\theta(u, v)}{\partial u \partial v} &= \exp\{-\theta \ln u \ln v\} + v \exp\{-\theta \ln u \ln v\} \left(-\theta \left(\frac{\ln u}{v} \right) \right) \\ &\quad - \theta \left[(\ln v + 1) \exp\{-\theta \ln u \ln v\} + v \ln v \exp\{-\theta \ln u \ln v\} \left(-\theta \frac{\ln u}{v} \right) \right] \\ &= \exp\{-\theta \ln u \ln v\} + \theta \ln u \exp\{-\theta \ln u \ln v\} \\ &\quad - \theta \left[(\ln v + 1) \exp\{-\theta \ln u \ln v\} - \theta \ln u \ln v \exp\{-\theta \ln u \ln v\} \right] \\ &= \exp\{-\theta \ln u \ln v\} \left(1 - \theta \ln u - \theta \ln v - \theta + \theta^2 \ln u \ln v \right) \\ c_\theta(u, v) &= \exp\{-\theta \ln u \ln v\} \left((1 - \theta \ln u)(1 - \theta \ln v) - \theta \right). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Assumimos que as v.a.'s T_1 e T_2 possuam distribuições $T_1 \sim Weibull(\alpha, \beta)$ e $T_2 \sim Weibull(\alpha, \beta)$ com:

$$u = F_1(t_1) = P(T_1 \leq t_1) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\}. \quad (9.23)$$

$$v = F_2(t_2) = P(T_2 \leq t_2) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^\alpha\right\}. \quad (9.24)$$

De (9.21), a distribuição conjunta (T_1, T_2) é dada por:

$$F(t_1, t_2) = \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \\ * \exp\left\{-\theta \ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right\}. \quad (9.25)$$

De (9.22) em (9.2) a função de densidade de (T_1, T_2) está dado por:

$$f(t_1, t_2) = \exp\left\{-\theta \ln\left[F_1(t_1)\right] \ln\left[F_2(t_2)\right]\right\} \left(\left[1 - \theta \ln\left[F_1(t_1)\right]\right] \left[1 - \theta \ln\left[F_2(t_2)\right]\right] - \theta\right) f_1(t_1) f_2(t_2) \\ = \exp\left\{-\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\} \\ * \left(\left[1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right] \left[1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right] - \theta\right) \\ * \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha} t^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right). \quad (9.26)$$

O parâmetro θ é relacionado também às medidas de concordância Tau de Kendall e Rho de Spearman, Yela et al.(2018)[47]. A partir de (7.1), tem se:

$$\tau_{T_1, T_2} = \left[7 - \frac{2}{\theta}\right] e^{\frac{2}{\theta}} E_i\left(-\frac{2}{\theta}\right) - 4e^{\frac{1}{\theta}} E_i\left(-\frac{1}{\theta}\right) + 4e^{\frac{4}{\theta}} E_i\left(-\frac{4}{\theta}\right) - 1.$$

e de (7.6):

$$\rho_{T_1, T_2} = 12 \left[-\frac{e^{\frac{4}{\theta}}}{\theta} E_i\left(-\frac{4}{\theta}\right)\right] - 3,$$

onde $E_i(z) = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^t}{t} dt$ é a função integral exponencial. O que torna muito difícil calcular as expressões anteriores. As dependências de cauda inferior e superior para a cópula Gumbel Barnett são complicadas de obter e serão omitidas neste trabalho.

Agora conhecida a função de densidade bivariada anterior vamos definir a função de densidade condicional para T_{i+1} dado T_i a partir de

$$f(t_{i+1}/t_i) = \frac{f(t_i, t_{i+1})}{f(t_i)}.$$

Então,

$$f(t_{i+1}/t_i) = f(t_{i+1}) \exp\left\{-\theta \ln\left[F(t_i)\right] \ln\left[F(t_{i+1})\right]\right\} \left[\left(1 - \theta \ln\left[F(t_i)\right]\right) \left(1 - \theta \ln\left[F(t_{i+1})\right]\right)\right] \\ = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ * \exp\left\{-\theta \ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right) \ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right\} \\ * \left(\left[1 - \theta \ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right] \left[1 - \theta \ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right]\right). \quad (9.27)$$

A função de distribuição acumulada condicional de T_{i+1} dado T_i é:

$$\begin{aligned}
F(t_{i+1}/t_i) &= P(T_{i+1} \leq t_{i+1}/T_i = t_i) \\
&= \int_0^{t_{i+1}} f(t_{i+1}/t_i) dt_{i+1} \\
&= \int_0^{t_{i+1}} f(t_{i+1}) \exp\left\{-\theta \ln[F(t_i)] \ln[F(t_{i+1})]\right\} \\
&\quad * \left[\left(1 - \theta \ln[F(t_i)]\right) \left(1 - \theta \ln[F(t_{i+1})]\right)\right] dt_{i+1} \\
&= \int_0^{t_{i+1}} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \exp\left\{-\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\} \\
&\quad \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \left(\left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right)\right) \\
&\quad * \left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) dt_{i+1}.
\end{aligned}$$

Resolvendo a integral com o *software* WolframAlpha temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \left\{t_{i+1}^\alpha \left(\exp\left\{\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 1\right)\right. \\
&\quad * \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^{-\alpha} \left\{\theta + \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1\right)\right. \\
&\quad \left. + \theta \left(-\ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) + 1\right\} \\
&\quad * \left. \frac{\exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\}}{\alpha \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1\right)^2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(t_{i+1}/t_i) &= -\left(\exp\left\{\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 1\right) \\
&\quad * \left\{\theta + \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1\right)\right. \\
&\quad \left. - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] + 1\right\} \tag{9.28} \\
&\quad * \left\{\frac{\exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\}}{\left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right)}\right\}.
\end{aligned}$$

9.2.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança deste modelos está dada por $L(\theta; t) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Assumindo $d_0 = 0$, os valores dos intervalos de tempo observados são dados por: $t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, k = (n - 1)$, onde d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, e aclaramos que $t_n = S - d_k$.

$$L(\theta; t) = f(t_1) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}). \tag{9.29}$$

Nos falta calcular $P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) &= \int_{t_n}^{\infty} f(t_n/t_{n-1}, \alpha, \beta, \theta) dt_n \\
&= 1 - \int_0^{t_n} f(t_n) \exp\left\{-\theta \ln[F(t_{n-1})] \ln[F(t_n)]\right\} \\
&\quad * \left[\left(1 - \theta \ln[F(t_{n-1})]\right)\left(1 - \theta \ln[F(t_n)]\right)\right] dt_n \\
&= 1 - \left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) \int_0^{t_n} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad * \exp\left\{-\theta \frac{\ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]}{\left(\ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right)^{-1}}\right\} \\
&\quad * \left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) dt_n \\
&= 1 - \left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \int_0^{t_n} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad * \exp\left\{-\theta \frac{\ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]}{\left(\ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right)^{-1}}\right\} \\
&\quad * \left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) dt_n.
\end{aligned}$$

A integral anterior é complicada de resolver então utilizamos a plataforma WolframAlpha para determinar a integral e temos como resultado a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left\{\left(1 - \theta \ln\left(1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right)\right) \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^\alpha \left(\exp\left\{\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 1\right) \right. \\
&\quad * \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^{-\alpha} \left(\theta + \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1\right) \\
&\quad + \theta \left(-\ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right) + 1 \\
&\quad * \left. \frac{\exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\}}{\alpha \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1\right)^2}\right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) &= 1 - \left\{-\left(\exp\left\{\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 1\right) \right. \\
&\quad * \left\{\theta + \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\} \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1\right) \\
&\quad - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] + 1 \right\} \\
&\quad * \left. \frac{\exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\}}{\left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right)}\right\}. \tag{9.30}
\end{aligned}$$

Agora tendo todos os elementos da expressão (9.29) vamos construir a função de verossimilhança:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}; t) &= f_{T_1}(t_1/\boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i, \boldsymbol{\theta}) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
&= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \exp\left\{-\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\} \right. \\
&\quad * \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \left. \left((1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]) \right) \right. \right. \\
&\quad * \left. \left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \right) \right\} \left[1 - \left\{ -\left(\exp\left\{\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 1\right) \right. \right. \right. \\
&\quad * \left. \left\{ \theta + \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] + 1 \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. * \frac{\exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\}}{\left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right)} \right\} \right\}. \tag{9.31}
\end{aligned}$$

Em função disso, podemos obter a função $l(\alpha, \beta, \theta; t) = \ln(L(\alpha, \beta, \theta; t))$:

$$\begin{aligned}
l(\theta; t) &= (n-1) \ln(\alpha) - (\alpha(n-1)) \ln(\beta) + (\alpha-1) \ln(t_1) - \left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ (\alpha-1) \ln(t_{i+1}) - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha + \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \right. \right. \\
&\quad * \left. \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln\left[1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_i}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right] + \ln\left[1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right] \right\} \right. \\
&\quad + \ln\left[1 - \left\{ -\left(\exp\left\{\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} - 1\right) \right. \right. \\
&\quad * \left. \left\{ \theta + \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \left(\theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] - 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] + 1 \right\} \right. \\
&\quad \left. \left. * \frac{\exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right] \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right\}}{\left(1 - \theta \ln\left[1 - \exp\left\{-\left(\frac{t_{n-1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}\right]\right)} \right\} \right\}. \tag{9.32}
\end{aligned}$$

com $l(\alpha, \beta, \theta; t) = \ln(L(\boldsymbol{\theta}; t))$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de α , β e θ que maximizam a função acima. A maximização para o conjunto de dados (tempos entre ultrapasses de 22°C de temperatura) foi obtida por meio de um método numérico "Quase Newton" utilizando o pacote Optim do programa R da mesma maneira que para todos os modelos deste capítulo, os resultados são vistos na Tabela 9.4.

Tabela 9.4: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Gumbel Barnett.

Parâmetro	α	β	θ
EMV	0,7038999	3,593629	$1,000000 * 10^{-22}$

De (9.30) temos a função de sobrevivência para T_{i+1} dado T_i .

$$\begin{aligned}
 S(t_{i+1}/t_i) = & 1 - \left\{ - \left(\exp \left\{ \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} - 1 \right) \right. \\
 & * \left\{ \theta + \theta \ln \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right] \left(\theta \ln \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right] - 1 \right) \right. \\
 & \left. - \theta \ln \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right] + 1 \right\} \\
 & * \frac{\exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha - \theta \ln \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right] \ln \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right] \right\}}{\left(1 - \theta \ln \left[1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t_i}{\beta} \right)^\alpha \right\} \right] \right)} \left. \right\}, \tag{9.33}
 \end{aligned}$$

em que α e β são parâmetros de forma e escala, respectivamente, e θ é o parâmetro de dependência.

Conhecendo os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de interesse, vamos mostrar nos seguintes gráficos a adequação dos ajustes dos modelo Modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull derivada da cópula Gumbel Barnett.

Figura 9.4: Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Gumbel Barnett *versus* a curva da função de distribuição acumulada empírica.

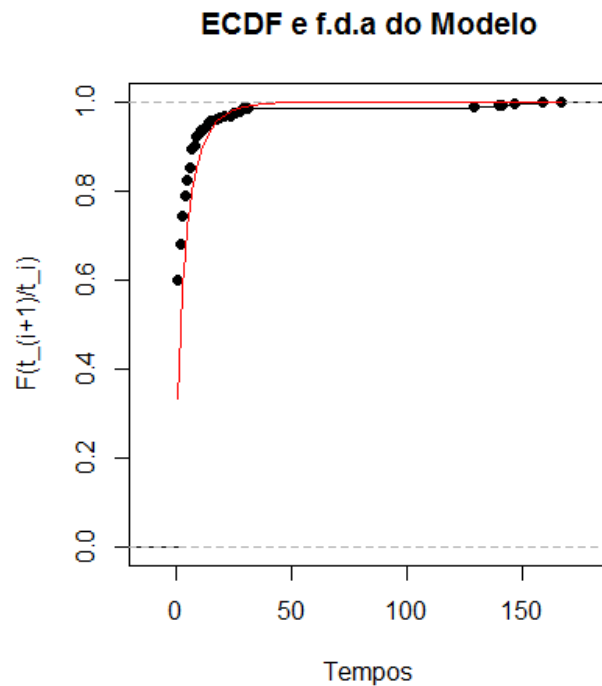
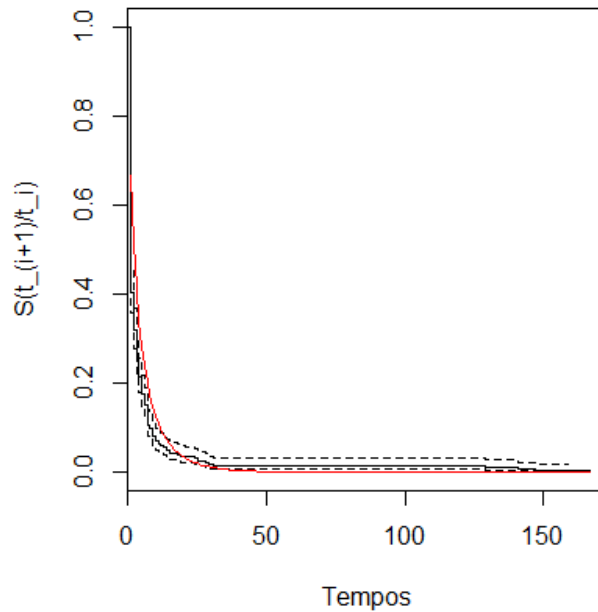


Figura 9.5: Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Gumbel Barnett *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.



Nas Figuras 9.4 e 9.5 podemos observar que existe um bom ajuste comparado com o modelo markoviano via cópula FGM. A diferença notável está no valor da estimativa do parâmetro de dependência θ .

9.3 Modelo Markoviano Weibull via Cópula Arquimediana Frank

Sejam $S > 0$ e $K > 0$, números real e inteiro fixados, respectivamente. Sejam d_1, d_2, \dots, d_K os dias em que ocorreram os ultrapasses (excederam o limite de interesse). Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ o conjunto de dias em que ocorreram os ultrapasses durante o tempo de estudo $[0, S]$. Seja $T_i, i = 1, 2, \dots$ O tempo em dias entre i -ésimo e o $(i-1)$ -ésimo ultrapasse.

Para descrever este modelo, definiremos primeiro a distribuição a seguir:

9.3.1 Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Frank

Outra maneira de obter a função de distribuição bivariada Weibull é através da cópula Frank, dada por:

$$C_\theta(u, v) = \frac{1}{\ln(\theta)} \ln \left[1 + \frac{(\theta^u - 1)(\theta^v - 1)}{\theta - 1} \right],$$

cujas função de densidade está dado por:

$$c_{\theta}(u, v) = \frac{\theta^{u+v} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^u - 1)(\theta^v - 1)]^2},$$

onde $\theta \geq 0$, assumindo (9.23) e (9.24), pelo Teorema de Sklar, a função de distribuição bivariada Weibull de (T_1, T_2) induzida pela cópula Frank é dada por:

$$F(t_1, t_2) = \frac{1}{\ln(\theta)} \ln \left[1 + \frac{(\theta^{1-e^{-(t_1/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_2/\beta)^\alpha}} - 1)}{\theta - 1} \right]. \quad (9.34)$$

A Função de Densidade Bivariada Weibull via cópula Frank de (T_1, T_2) é dado por:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{\theta^{F_1(t_1)+F_2(t_2)} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^{F_1(t_1)} - 1)(\theta^{F_2(t_2)} - 1)]^2} f_1(t_1) f_2(t_2) \\ &= \frac{\theta^{(1-e^{-(t_1/\beta)^\alpha})+(1-e^{-(t_2/\beta)^\alpha})} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^{(1-e^{-(t_1/\beta)^\alpha})} - 1)(\theta^{(1-e^{-(t_2/\beta)^\alpha})} - 1)]^2} \\ &\quad * \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha\right\} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_2^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_2}{\beta}\right)^\alpha\right\}, \end{aligned} \quad (9.35)$$

com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ parâmetros de forma e escala, respetivamente e $\theta \geq 0$, parâmetro de dependência entre os tempos de falha.

De (8.3) temos o Tau de Kendall para a cópula Frank:

$$\tau_{T_1, T_2} = 1 + 4(D_1(\theta^*) - 1)/\theta^*,$$

e de (7.6):

$$\rho_{T_1, T_2} = 1 - \frac{12}{\theta^*} [D_1(\theta^*) - D_2(\theta^*)],$$

onde $\theta^* = -\ln(\theta)$ e $D_k(x)$ é a função Debye, dada por:

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt, k = 1, 2.$$

Agora conhecida a função de densidade bivariada anterior vamos definir a função de densidade condicional para T_{i+1} dado T_i a partir de

$$f(t_{i+1}/t_i) = \frac{f(t_i, t_{i+1})}{f(t_i)},$$

assim,

$$\begin{aligned} f(t_{i+1}/t_i) &= \frac{\theta^{F(t_i)+F(t_{i+1})} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^{F(t_i)} - 1)(\theta^{F(t_{i+1})} - 1)]^2} f(t_{i+1}) \\ &= \frac{\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha})+(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha})} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha})} - 1)(\theta^{(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha})} - 1)]^2} \\ &\quad * \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\}, t_i, t_{i+1} > 0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Podemos obter em seguida a função de distribuição condicional para $T_i + 1$ dado T_i .

$$\begin{aligned}
F(t_{i+1}/t_i) &= P(T_{i+1} \leq t_{i+1}/T_i = t_i) \\
&= \int_0^{t_{i+1}} f(t_{i+1}/t_i) dt_{i+1} \\
&= \int_0^{t_{i+1}} \frac{\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha})+(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha)}} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha)} - 1)})(\theta^{(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha)} - 1)]^2} \\
&\quad * \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1} \\
&= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} (\theta - 1) \ln(\theta) \int_0^{t_{i+1}} \frac{\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha})+(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha)}}}{[(\theta - 1) + (\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha)} - 1)})(\theta^{(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha)} - 1)]^2} \\
&\quad * t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_{i+1}.
\end{aligned}$$

Pela complexidade que tem a função a integrar utilizamos a plataforma WolframAlpha, o resultado é o seguinte.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} (\theta - 1) \ln(\theta) \\
&\quad * \left[\frac{-t_{i+1}^\alpha (\beta/t_{i+1})^\alpha \theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}}}{\alpha \ln(\theta) (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1) (\theta + (\theta^{1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}} - 1) (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{-0^\alpha (\beta/0)^\alpha \theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}}}{\alpha \ln(\theta) (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1) (\theta + (\theta^{1-e^{-(0/\beta)^\alpha}} - 1) (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right].
\end{aligned}$$

Simplificando alguns termos temos finalmente o resultado:

$$= \left[\frac{\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1)} - (\theta - 1) \frac{\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1) (\theta + (\theta^{1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}} - 1) (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right]. \quad (9.37)$$

9.3.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança deste modelos está dada por $L(\theta; t) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Assumindo $d_0 = 0$, os valores dos intervalos de tempo observados são dados por: $t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, k = (n - 1)$, onde d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, e esclarecemos que $t_n = S - d_k$.

$$L(\theta; t) = f(t_1) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}). \quad (9.38)$$

Nos falta calcular $P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) &= \int_{t_n}^{\infty} f(t_n/t_{n-1}, \alpha, \beta, \theta) dt_n \\
&= 1 - \int_0^{t_n} \frac{\theta^{(1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha})+(1-e^{-(t_n/\beta)^\alpha)}} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^{(1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha)} - 1)})(\theta^{(1-e^{-(t_n/\beta)^\alpha)} - 1)]^2} \\
&\quad * \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_n}{\beta}\right)^\alpha\right\} dt_n.
\end{aligned}$$

A integral anterior é complicada de resolver então também utilizamos a plataforma WolframAlpha para determinar a integral e temos como resultado a seguinte expressão:

$$= 1 - \left\{ \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)} - (\theta - 1) \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta + (\theta^{1-e^{-(t_n/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right\} \quad (9.39)$$

uma outra forma de resolver a integral é utilizando o pacote (integrate) do R mas neste caso teríamos que definir os valores dos limites da integral.

Agora tendo todos os elementos da expressão (9.38) vamos construir a função de verosimilhança:

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}; t) &= f_{T_1}(t_1/\boldsymbol{\theta}) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i, \boldsymbol{\theta}) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}, \boldsymbol{\theta}) \\ &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha} \\ &\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \frac{\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha})+(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha})} \ln(\theta)(\theta - 1)}{[(\theta - 1) + (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}} - 1)]^2} \right. \\ &\quad * \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ &\quad * \left[1 - \left\{ \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\theta - 1) \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta + (\theta^{1-e^{-(t_n/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right\} \right] \end{aligned}$$

resolvendo o produto temos:

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{\alpha(n-1)}} (\theta - 1)^{n-2} (\ln(\theta))^{n-2} * t_1^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha} \\ &\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \frac{\theta^{(1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha})+(1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha})}}{[(\theta - 1) + (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}} - 1)]^2} \right. \\ &\quad * t_{i+1}^{\alpha-1} \exp\left\{-\left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha\right\} \\ &\quad * \left[1 - \left\{ \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\theta - 1) \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta + (\theta^{1-e^{-(t_n/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right\} \right] \end{aligned}$$

Em função disso, podemos obter a função $l(\alpha, \beta, \theta; t) = \ln(L(\alpha, \beta, \theta; t))$:

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}; t) &= (n-1) \ln(\alpha) - (\alpha(n-1)) \ln(\beta) + (n-2) \ln(\theta-1) \\
&+ (n-2) \ln(\theta) + (\alpha-1) \ln(t_1) - \left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha + \\
&+ \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ \left((1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}) + (1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}) \right) \ln(\theta) \right. \\
&- 2 \ln[\theta - 1 + (\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}} - 1)] + (\alpha-1) \ln(t_{i+1}) \\
&- (t_{i+1}/\beta)^\alpha \left. \right\} + \ln \left[1 - \left\{ \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)} \right. \right. \\
&\left. \left. - (\theta-1) \frac{\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta + (\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right\} \right], \tag{9.40}
\end{aligned}$$

com $l(\alpha, \beta, \theta) = \ln(L(\boldsymbol{\theta}))$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de α , β e θ que maximizam a função acima. A maximização para o conjunto de dados (tempos entre ultrapasses de 22°C de temperatura) foi obtida por meio de um método numérico "Quase Newton" utilizando o pacote Optim do programa R, os resultados são vistos na Tabela 9.5.

Tabela 9.5: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Frank.

Parâmetro	α	β	θ
EMV	0,6089615	3,2985651	50,929159

De (9.39) temos a função de sobrevivência para T_{i+1} dado T_i .

$$\begin{aligned}
S(t_{i+1}/t_i) &= 1 - \left\{ \frac{\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1)} \right. \\
&\left. - (\theta-1) \frac{\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}}}{(\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta + (\theta^{1-e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}} - 1)(\theta^{1-e^{-(t_i/\beta)^\alpha}} - 1) - 1)} \right\}, \tag{9.41}
\end{aligned}$$

em que α e β são parâmetros de forma e escala, respectivamente, e θ é o parâmetro de dependência.

Conhecendo os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de interesse, vamos mostrar nos seguintes gráficos a adequação dos ajustes dos modelo Modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull derivada da cópula de Frank.

Figura 9.6: Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Frank *versus* a curva da função de distribuição acumulada empírica.

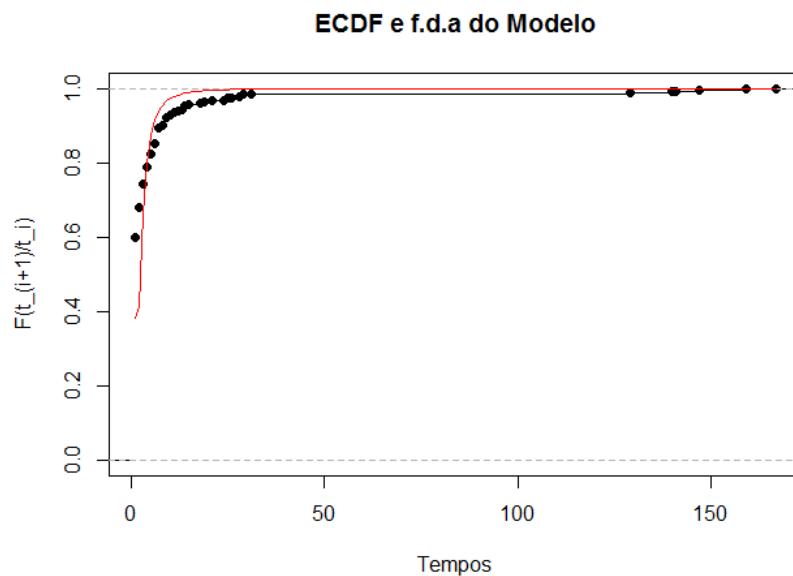
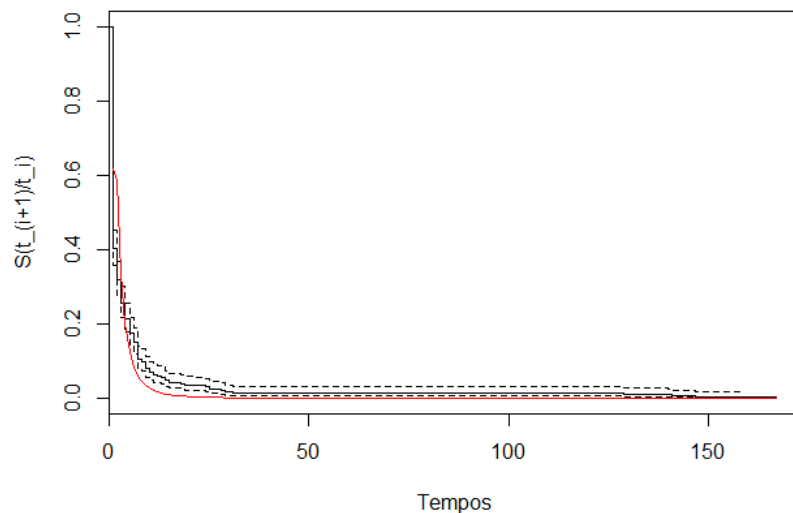


Figura 9.7: Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Frank *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.



Observamos na figura acima que não existe um bom ajuste da curva de sobrevivência, já que a curva vermelha que representa a curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Frank, está fora das bandas de confiança da curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.

9.4 Modelo Markoviano Weibull via Cópula Arquimediana Clayton

Sejam $S > 0$ e $K > 0$, números real e inteiro fixados, respectivamente. Sejam d_1, d_2, \dots, d_K os dias em que ocorreram os ultrapasses (excederam o limite de interesse). Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ o conjunto de dias em que ocorreram os ultrapasses durante o tempo de estudo $[0, S]$. Seja $T_i, i = 1, 2, \dots$ o tempo em dias entre i -ésimo e o $(i-1)$ -ésimo ultrapasse.

Para descrever este modelo, definiremos primeiro a distribuição a seguir:

9.4.1 Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Clayton

Outra maneira mais de obter a função de distribuição bivariada Weibull é através da cópula Clayton, dada por:

$$C_\theta(u, v) = \left[\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0) \right]^{-\frac{1}{\theta}},$$

cuja função de densidade está dado por:

$$c_\theta(u, v) = (u)^{-\theta-1}(v)^{-\theta-1}(1+\theta) \left[(u)^{-\theta} + (v)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}},$$

onde $\theta \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$, assumindo (9.23) e (9.24), pelo Teorema de Sklar, a função de distribuição bivariada Weibull de (T_1, T_2) induzida pela cópula Clayton é dada por:

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2) &= \left(F_1(t_1)^{-\theta} + F_2(t_2)^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta} \\ &= \left(\left(1 - e^{-(t_1/\beta)^\alpha} \right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_2/\beta)^\alpha} \right)^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta}. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Agora vamos determinar a função de densidade bivariada Weibull via cópula Clayton utilizando a função de densidade $c_\theta \in [0, 1]^2$ da cópula Clayton:

$$c_\theta(F_1(t_1), F_2(t_2)) = (F_1(t_1))^{-\theta-1}(F_2(t_2))^{-\theta-1}(1+\theta) \left[(F_1(t_1))^{-\theta} + (F_2(t_2))^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}}.$$

De (9.2) temos:

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= (F_1(t_1))^{-\theta-1}(F_2(t_2))^{-\theta-1}(1+\theta) \left[(F_1(t_1))^{-\theta} + (F_2(t_2))^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} f_1(t_1)f_2(t_2). \\ &= \left(1 - e^{-(t_1/\beta)^\alpha} \right)^{-\theta-1} \left(1 - e^{-(t_2/\beta)^\alpha} \right)^{-\theta-1} (1+\theta) \\ &\quad * \left[\left(1 - e^{-(t_1/\beta)^\alpha} \right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_2/\beta)^\alpha} \right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} \\ &\quad * \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} e^{-(t_1/\beta)^\alpha} \right\} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_2^{\alpha-1} e^{-(t_2/\beta)^\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ parâmetros de forma e escala, respectivamente e $\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, parâmetro de dependência entre os tempos de falha.

Para as cópulas Arquimedianas temos além de (7.1), outra forma de determinar o τ de

Kendall que é a partir de (8.3), isto é:

$$\begin{aligned}\tau_{T_1, T_2} &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \\ &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{(t^{-\theta} - 1)/\theta}{-t^{-\theta-1}} dt \\ &= \frac{\theta}{\theta + 2}.\end{aligned}$$

Já que a medida de ρ de Spearman para esta cópula é muito complicada de ser obtida e é omitida neste trabalho.

Seja $\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)/\theta$ o gerador da família de cópula Clayton. Segue que $\varphi^{-1}(s) = (1 + \theta s)^{-1/\theta}$. Para $\theta \geq 0$, pelos Teoremas 19 e 20 a cópula Clayton exhibe que $\lambda_U = 0$ e o coeficiente de dependência da cauda inferior dada por:

$$\begin{aligned}\lambda_L &= 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \left[\varphi^{-1'}(2s)/\varphi^{-1'}(s) \right] \\ &= 2 \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{(1 + 2\theta s)^{-1/\theta-1}}{(1 + \theta s)^{-1/\theta-1}} \right] \\ &= 2 * 2^{-1/\theta-1} = 2^{-1/\theta}.\end{aligned}$$

Agora conhecida a função de densidade bivariada anterior, vamos definir a função de densidade condicional para T_{i+1} dado T_i a partir de

$$f(t_{i+1}/t_i) = \frac{f(t_i, t_{i+1})}{f(t_i)}.$$

Então, temos que:

$$\begin{aligned}f(t_{i+1}/t_i, \theta) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} (1 + \theta) \\ &\quad \left[\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}}.\end{aligned}\quad (9.43)$$

Podemos obter em seguida a função de distribuição acumulada condicional de T_{i+1} dado T_i .

$$\begin{aligned}F(t_{i+1}/t_i) &= P(T_{i+1} \leq t_{i+1}/T_i = t_i) \\ &= \int_0^{t_{i+1}} f(t_{i+1}/t_i) dt_{i+1} \\ &= \int_0^{t_{i+1}} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} (1 + \theta) \\ &\quad \left[\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} d_{i+1} \\ &= (1 + \theta) \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \int_0^{t_{i+1}} t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \\ &\quad * \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \\ &\quad \left[\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} d_{i+1}.\end{aligned}$$

Resolvemos a integral utilizando a plataforma WolframAlpha, temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
&= (1 + \theta) \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \left\{ t_{i+1}^\alpha \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^{-\alpha} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \\
&\quad \left. \left(\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right\} \\
&\quad * \frac{\alpha(\theta + 1) \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta + \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(- \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) \right) + \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)}{\alpha(\theta + 1) \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta + \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(- \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) \right) + \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)} \\
&= \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \\
&\quad \left(\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \\
&\quad * \frac{\alpha(\theta + 1) \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)}{\alpha(\theta + 1) \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)} \tag{9.44}
\end{aligned}$$

9.4.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança deste modelo está dada por $L(\theta; t) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Assumindo $d_0 = 0$, os valores dos intervalos de tempo observados são dados por: $t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, k = (n - 1)$, onde d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, e aclaramos que $t_n = S - d_k$. Então, a função de verossimilhança é dada por:

$$L(\theta; t) = f(t_1) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}). \tag{9.45}$$

Nos falta resolver:

$$\begin{aligned}
P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}) &= \int_{t_n}^{\infty} f(t_n/t_{n-1}, \alpha, \beta, \theta) dt_n \\
&= 1 - \int_0^{t_n} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} e^{-(t_n/\beta)^\alpha} \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \\
&\quad * \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} (1 + \theta) \\
&\quad * \left[\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} dt_n \\
&= 1 - \left\{ (1 + \theta) \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \int_0^{t_n} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} e^{-(t_n/\beta)^\alpha} \right. \\
&\quad * \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \\
&\quad * \left[\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} dt_n \left. \right\}.
\end{aligned}$$

A integral anterior é complicada de resolver então utilizamos a plataforma WolframAlpha para determinar a integral e temos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left[(1 + \theta) \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \left(t_n^\alpha \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^{-\alpha} \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right. \\
&\quad \left. \left. * \frac{\alpha(\theta + 1) \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta + \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(- \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) \right)}{\alpha(\theta + 1) \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta + \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(- \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left[\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \\
&\quad \left. \left(\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right] \\
&\quad * \frac{\left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)}{\left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)} \quad (9.46)
\end{aligned}$$

Agora tendo todos os elementos da expressão (9.45), vamos construir a função de verosimilhança:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}; t) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_1}{\beta})^\alpha} \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \right\} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} (1 + \theta) \right. \\
&\quad * \left[\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} \left. \right\} \\
&\quad * \left\{ 1 - \left[\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right] \right\} \\
&\quad * \frac{\left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)}{\left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)} \left. \right\} \\
&= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_1}{\beta})^\alpha} \\
&\quad * \frac{\alpha^{n-2}}{\beta^{\alpha(n-2)}} (1 + \theta)^{n-2} \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \left\{ t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \right\} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \right. \\
&\quad * \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \left[\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} \left. \right\} \\
&\quad * \left\{ 1 - \left[\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right] \right\} \\
&\quad * \frac{\left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)}{\left[\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right]} \left. \right\}.
\end{aligned}$$

Simplificando alguns termos temos

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{\alpha(n-1)}} t_1^{\alpha-1} (1 + \theta)^{n-2} e^{-(\frac{t_1}{\beta})^\alpha} \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta-1} \right. \\
&\quad * \left[\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right]^{\frac{-1-2\theta}{\theta}} \left. \right\} \\
&\quad * \left\{ 1 - \left[\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right] \right\} \\
&\quad * \frac{\left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right)}{\left[\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right]} \left. \right\}. \quad (9.47)
\end{aligned}$$

Em função disso, podemos obter a função $l(\alpha, \beta, \theta; t) = \ln(L(\alpha, \beta, \theta; t))$:

$$\begin{aligned}
l(\boldsymbol{\theta}; t) &= (n-1) \ln(\alpha) - (\alpha(n-1)) \ln(\beta) + (\alpha-1) \ln(t_1) + (n-2) \ln(1+\theta) \\
&\quad - \left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha + \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ (-\theta-1) \ln\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right) + (-\theta-1) \ln\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right) \right. \\
&\quad + (\alpha-1) \ln(t_{i+1}) - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha \\
&\quad + \left(\frac{-1-2\theta}{\theta}\right) \ln\left(\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1\right) \left. \right\} \\
&\quad + \ln\left(1 - \left\{ \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. * \frac{\left(\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}}{\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta\right) + \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta} \right\} \right), \tag{9.48}
\end{aligned}$$

com $l(\alpha, \beta, \theta) = \ln(L(\boldsymbol{\theta}))$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de α , β e θ que maximizam a função acima. A maximização para o conjunto de dados (tempos entre ultrapasses de 22°C de temperatura) foi obtida por meio de um método numérico "Quase Newton" utilizando o pacote Optim do programa R, os resultados são vistos na Tabela 9.6.

Tabela 9.6: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Clayton.

Parâmetro	α	β	θ
EMV	0,71194508	3,76610975	-0,09511121

De (9.39) temos a função de sobrevivência para T_{i+1} dado T_i .

$$\begin{aligned}
S(t_{i+1}/t_i) &= 1 - \left[\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \right. \\
&\quad \left. \left(\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}} \right. \\
&\quad \left. * \frac{\left(\left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1 \right)^{\frac{-1}{\theta}}}{\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta\right) + \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right)^\theta} \right], \tag{9.49}
\end{aligned}$$

em que α e β são parâmetros de forma e escala, respectivamente, e θ é o parâmetro de dependência.

Conhecendo os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de interesse, vamos mostrar nos seguintes gráficos a adequação dos ajustes dos modelo Modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull derivada da cópula de Clayton.

Figura 9.8: Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Clayton *versus* a curva da função de distribuição acumulada empírica.

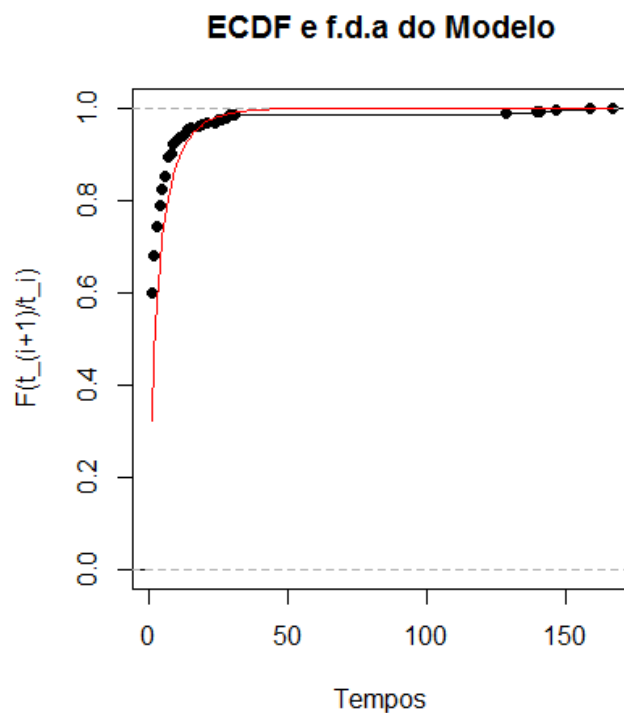
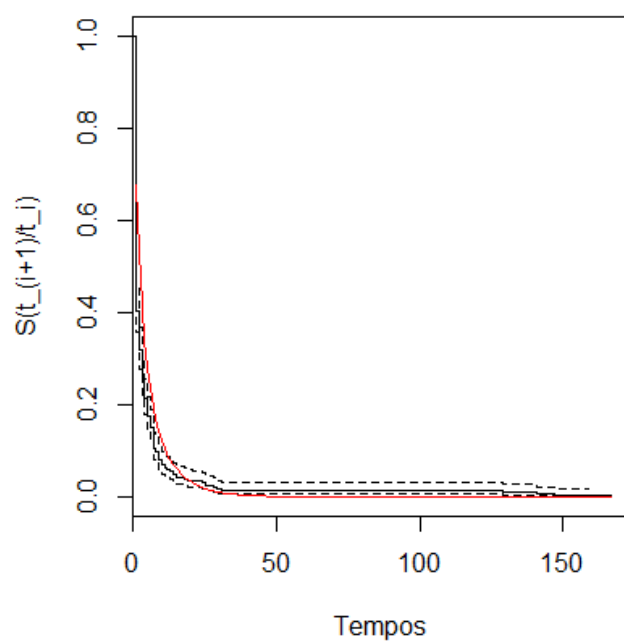


Figura 9.9: Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Clayton *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.



Nos gráficos acima podemos ver que há um bom ajuste em comparação com os outros modelos via cópulas, exceto o modelo via copula Gumbel-Barnett, isso ocorre devido ao baixo valor do parâmetro de dependência que apresenta este modelo, já que esse valor é pequeno para os tempos entre ultrapasse reais.

Para este modelo também obtemos a probabilidade de que o tempo até o próximo ultrapasse assuma um determinado valor em função do tempo entre ultrapasse anterior, isto é, $P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta), j = 0, 1, 2, \dots; l = 0, 1, 2, \dots$, de modo que a partir disso poderíamos então construir uma matriz de transição, onde os estados seriam os números de dias entre os ultrapasses, desenvolvendo:

$$P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) = P(T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) - P(T_{i+1} < j/T_i = l, \theta).$$

Da expressão anterior resolvendo por partes, substituímos em (9.44), t_{i+1} por $j + 1$, isto é:

$$P(T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) = \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \frac{\left(\left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta\right) + \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta} \quad (9.50)$$

e para a segunda parte substituímos em (9.44), t_{i+1} por j , isto é:

$$P(T_{i+1} < j/T_i = l, \theta) = \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \frac{\left(\left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta\right) + \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta} \quad (9.51)$$

Portanto, subtraindo (9.51) de (9.50), temos:

$$P(j < T_{i+1} \leq j + 1/T_i = l, \theta) = \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \frac{\left(\left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-\left(\frac{j+1}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta\right) + \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta} - \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-1} \left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \frac{\left(\left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} + \left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^{-\theta} - 1\right)^{\frac{-1}{\theta}}}{\left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta - \left(\left(1 - e^{-\left(\frac{j}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta\right) + \left(1 - e^{-\left(\frac{l}{\beta}\right)^\alpha}\right)^\theta} \quad (9.52)$$

Parte da Matriz de transição (para $l, j = 1, 2, \dots, 13$) onde as "l" representa as linhas e "j" representa as colunas ficaria assim:

Tabela 9.7: Matriz de transição para o modelo markoviano via cópula Clayton.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,15	0,10	0,08	0,06	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01
2	0,15	0,10	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
3	0,15	0,10	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
4	0,15	0,10	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
5	0,15	0,10	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
6	0,15	0,10	0,07	0,06	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
7	0,15	0,10	0,07	0,06	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
8	0,15	0,10	0,07	0,06	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
9	0,15	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
10	0,15	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
11	0,15	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
12	0,15	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01
13	0,15	0,10	0,07	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01

Na matriz acima podemos observar que o elemento posicionado na intersecção da segunda linha e a segunda coluna indica a probabilidade de que o próximo ultrapasse da medição de temperatura mínima, do limar de 22°C fixado, ocorra depois de amanhã dado que o tempo de ultrapasse anterior foi igual a 2. Analogamente se faz interpretações com respeito aos demais elementos da matriz. Caso se deseja saber a probabilidade de transição associada a outro par de estados, basta utilizar a equação (9.52) para a realização do cálculo.

9.5 Modelo Markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq

Sejam $S > 0$ e $K > 0$, números real e inteiro fixados, respectivamente. Sejam d_1, d_2, \dots, d_K os dias em que ocorreram os ultrapasses (excederam o limite de interesse). Seja $D = \{d_1, d_2, \dots, d_k\}$ o conjunto de dias em que ocorreram os ultrapasses durante o tempo de estudo $[0, S]$. Seja $T_i, i = 1, 2, \dots$ o tempo em dias entre i -ésimo e o $(i - 1)$ -ésimo ultrapasse.

Para descrever este modelo, definiremos primeiro a distribuição a seguir:

9.5.1 Distribuição Weibull Bivariada via Cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq

Uma última maneira considerada neste trabalho de obter a função de distribuição bivariada Weibull é através da cópula Ali-Mikhail-Haq, dada por:

$$C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}.$$

cuja função de densidade está dado por:

$$c_\theta(u, v) = \frac{1 - \theta + 2\theta \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)}}{[1 - \theta(1 - u)(1 - v)]^2},$$

onde $\theta \in [-1, 1)$, assumindo (9.23) e (9.24), pelo Teorema de Sklar, a função de distribuição bivariada Weibull de (T_1, T_2) induzida pela cópula Ali-Mikhail-Haq é dada por:

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2) &= \frac{F_1(t_1)F_2(t_2)}{1 - \theta(1 - F_1(t_1))(1 - F_2(t_2))} \\ &= \frac{(1 - e^{-(t_1/\beta)^\alpha})(1 - e^{-(t_2/\beta)^\alpha})}{1 - \theta(1 - (1 - e^{-(t_1/\beta)^\alpha}))(1 - (1 - e^{-(t_2/\beta)^\alpha}))} \\ &= \frac{(1 - e^{-(t_1/\beta)^\alpha})(1 - e^{-(t_2/\beta)^\alpha})}{1 - \theta(e^{-(t_1/\beta)^\alpha})(e^{-(t_2/\beta)^\alpha})}. \end{aligned}$$

Agora vamos determinar a função de densidade bivariada Weibull via cópula Ali-Mikhail-Haq utilizando a função de densidade $c_\theta \in [0, 1]^2$ da cópula Ali-Mikhail-Haq:

$$c_\theta(F_1(t_1), F_2(t_2)) = \frac{1 - \theta + 2\theta \frac{F_1(t_1)F_2(t_2)}{1 - \theta(1 - F_1(t_1))(1 - F_2(t_2))}}{[1 - \theta(1 - F_1(t_1))(1 - F_2(t_2))]^2}.$$

De (9.2) temos a função de densidade conjunta de (T_1, T_2) :

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{1 - \theta + 2\theta \frac{F(t_1)F(t_2)}{1 - \theta(1 - F(t_1))(1 - F(t_2))}}{[1 - \theta(1 - F(t_1))(1 - F(t_2))]^2} f(t_1)f(t_2) \\ &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} e^{-(t_1/\beta)^\alpha} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_2^{\alpha-1} e^{-(t_2/\beta)^\alpha} \\ &\quad * \frac{1 - \theta + 2\theta \frac{(1 - e^{-(t_1/\beta)^\alpha})(1 - e^{-(t_2/\beta)^\alpha})}{1 - \theta e^{-(t_1/\beta)^\alpha} e^{-(t_2/\beta)^\alpha}}}{[1 - \theta e^{-(t_1/\beta)^\alpha} e^{-(t_2/\beta)^\alpha}]^2}; t_1, t_2 > 0, \end{aligned} \tag{9.53}$$

com $\alpha > 0$, $\beta > 0$ parâmetros de forma e escala, respetivamente e $\theta \in [-1, 1) \setminus \{0\}$, parâmetro de dependência entre os tempos de falha.

Para as cópulas Arquimedianas temos além de (7.1) outra forma de determinar o τ de Kendall que é a partir de (8.3), com função geradora $\varphi(t) = \ln(1 - \theta(1 - t))/t$, isto é:

$$\begin{aligned} \tau_{T_1, T_2} &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \\ &= 1 + 4 \int_0^1 \frac{\ln(1 - \theta(1 - t))/t}{(d/dt) \ln(1 - \theta(1 - t))/t} dt \\ &= \frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1 - \theta)^2 \ln(1 - \theta)}{3\theta^2} \end{aligned}$$

e de (7.6):

$$\begin{aligned} \rho_{T_1, T_2} &= 12 \iint_{I^2} C(u, v) dudv - 3. \\ &= 12 \iint_{I^2} \frac{uv}{1 - \theta(1 - u)(1 - v)} dudv - 3 \\ &= 12 \left(\frac{-3\theta + \text{dilog}(1 - \theta)\theta + \text{dilog}(1 - \theta) - 2 \ln(1 - \theta) + 2(\ln(1 - \theta))\theta}{\theta^2} \right) - 3. \\ &= \frac{12(1 + \theta)\text{dilog}(1 - \theta) - 24(1 - \theta) \ln(1 - \theta)}{\theta^2} - \frac{3(\theta + 12)}{\theta}, \end{aligned}$$

onde a função $\text{dilog}(x)$ é:

$$\text{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1 - t} dt.$$

A cópula AMH exhibe dependência da cauda esquerda para $\theta = 1$, de (7.12) temos:

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{C(t, t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - \theta(1 - t)^2} \\ &= \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - \theta(1 - t)^2} = 0.5, & \text{para } \theta = 1, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 - \theta(1 - t)^2} = 0, & \text{para } \theta < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

e de (7.11) temos:

$$\begin{aligned}\lambda_U &= 2 - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1 - C(t, t)}{1 - t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{[1 - 2t + C(t, t)]}{1 - t} = \lim_{t \rightarrow 1} \left[1 - \frac{t[1 - \theta(1 - t)]}{1 - \theta(1 - t)^2} \right] = 0.\end{aligned}$$

Como $\lambda_L \neq 0$ para $\theta = 1$, o extremo esquerdo é assintoticamente dependente para $\theta = 1$. Para cada outro $\theta < 1$, os extremos são assintoticamente independentes.

Agora conhecida a função de densidade bivariada anterior vamos definir a função de densidade condicional para T_{i+1} dado T_i .

$$f(t_{i+1}/t_i) = \frac{f(t_i, t_{i+1})}{f(t_i)}.$$

Então,

$$\begin{aligned}f(t_{i+1}/t_i, \boldsymbol{\theta}) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \\ & * \frac{1 - \theta + 2\theta \frac{(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha})(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha})}{1 - \theta e^{-(t_i/\beta)^\alpha} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}}}{\left[1 - \theta e^{-(t_i/\beta)^\alpha} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right]^2}; t_i, t_{i+1} > 0.\end{aligned}\tag{9.54}$$

Podemos obter a função de distribuição acumulada condicional de T_{i+1} dado T_i a seguir.

$$\begin{aligned}
F(t_{i+1}/t_i) &= P(T_{i+1} \leq t_{i+1}/T_i = t_i), i = 1, 2, 3, \dots, n \\
&= \int_0^{t_{i+1}} f(t_{i+1}/t_i) dt_{i+1} \\
&= \int_0^{t_{i+1}} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \left\{ t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \right. \\
&\quad \left. (1 - \theta) \left(1 - \theta e^{-(t_i/\beta)^\alpha} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \right) + 2\theta \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha} \right) \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \right) \right\} dt_{i+1} \\
&\quad \left[1 - \theta e^{-(t_i/\beta)^\alpha} e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha} \right]^3 \\
&= \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} (-t_{i+1}^\alpha) \left(\frac{t_{i+1}}{\beta} \right)^{-\alpha} \right. \\
&\quad \left[\frac{-2\theta e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + (t_i/\beta)^\alpha} + (\theta + 1) e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + 2(t_i/\beta)^\alpha} - \theta e^{2(t_i/\beta)^\alpha} + \theta^2}{\alpha \left(e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + (t_i/\beta)^\alpha} - \theta \right)^2} \right] - \\
&\quad \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_i/\beta)^\alpha} - (\theta + 1) e^{2(t_i/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_i/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\alpha \left(e^{(t_i/\beta)^\alpha} - \theta \right)^2} \right] \right\} \\
&= \left\{ \left[\frac{2\theta e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + (t_i/\beta)^\alpha} - (\theta + 1) e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + 2(t_i/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_i/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + (t_i/\beta)^\alpha} - \theta \right)^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_i/\beta)^\alpha} - e^{2(t_i/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_i/\beta)^\alpha} - \theta \right)^2} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{9.55}$$

9.5.2 Estimação de Máxima Verossimilhança

A função de verossimilhança deste modelos está dada por $L(\theta; t) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$. Assumindo $d_0 = 0$, os valores dos intervalos de tempo observados são dados por: $t_i = d_i - d_{i-1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, k = (n - 1)$, onde d_i é o i -ésimo dia em que ocorre o evento de interesse, e aclaramos que $t_n = S - d_k$. Então, a função de verossimilhança é dado por:

$$L(\theta; t) = f(t_1) \prod_{i=1}^{n-2} f(t_{i+1}/t_i) P(T_n \geq t_n/T_{n-1} = t_{n-1}). \tag{9.56}$$

$$\begin{aligned}
P(T_n \geq t_n / T_{n-1} = t_{n-1}) &= \int_{t_n}^{\infty} f(t_n/t_{n-1}, \alpha, \beta, \theta) dt_n \\
&= 1 - \int_0^{t_n} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_n^{\alpha-1} e^{-(t_n/\beta)^\alpha} \right. \\
&\quad \left. 1 - \theta + 2\theta \frac{\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right) \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)}{1 - \theta e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha} e^{-(t_n/\beta)^\alpha}} \right\} dt_n \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \int_0^{t_n} \left\{ t_n^{\alpha-1} e^{-(t_n/\beta)^\alpha} \right. \\
&\quad \left. (1 - \theta) + 2\theta \frac{\left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right) \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)}{1 - \theta e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha} e^{-(t_n/\beta)^\alpha}} \right\} dt_n \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\beta^\alpha} \int_0^{t_n} \left\{ t_n^{\alpha-1} e^{-(t_n/\beta)^\alpha} \right. \\
&\quad \left. \frac{(1-\theta) \left(1 - \theta e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha} e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right) + 2\theta \left(1 - e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha}\right) \left(1 - e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)}{1 - \theta e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha} e^{-(t_n/\beta)^\alpha}} \right\} dt_n \\
&\quad * \frac{\left(1 - \theta e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha} e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right)^2}{\left[1 - \theta e^{-(t_{n-1}/\beta)^\alpha} e^{-(t_n/\beta)^\alpha}\right]^2}
\end{aligned}$$

A integral anterior é complicada de resolver então, utilizamos a plataforma WolframAlpha para determinar o resultado que é dado por:

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} (-t_n^\alpha) \left(\frac{t_n}{\beta}\right)^{-\alpha} \right. \\
&\quad * \left[\frac{-2\theta e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} + (\theta + 1)e^{(t_n/\beta)^\alpha + 2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta^2}{\alpha \left(e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \\
&\quad \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - (\theta + 1)e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\alpha \left(e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right\} \\
&= 1 - \left\{ \left[\frac{2\theta e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - (\theta + 1)e^{(t_n/\beta)^\alpha + 2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right\}. \tag{9.57}
\end{aligned}$$

Agora tendo todos os elementos da expressão (9.56) vamos construir a função de verossimilhança:

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}; t) &= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_1}{\beta})^\alpha} \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha} \right. \\
&\quad \left. \frac{1 - \theta + 2\theta \frac{\left(1 - e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha}\right) \left(1 - e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right)}{1 - \theta e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}}}{\left[1 - \theta e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right]^2}} \right\} \\
&\quad \left\{ 1 + \left\{ \frac{-2\theta e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} + (\theta + 1) e^{(t_n/\beta)^\alpha + 2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta^2}{\left(e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right\} \right\} \\
&= \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_1^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_1}{\beta})^\alpha} \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ \frac{\alpha}{\beta^\alpha} t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha} \right. \\
&\quad \left. \frac{(1 - \theta) \left(1 - \theta e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right) + 2\theta \left(1 - e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha}\right) \left(1 - e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right)}{\left[1 - \theta e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right]^3} \right\} \\
&\quad \left\{ 1 - \left\{ \left[\frac{2\theta e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - (\theta + 1) e^{(t_n/\beta)^\alpha + 2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Simplificando alguns termos temos

$$\begin{aligned}
L(\boldsymbol{\theta}; t) &= \frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{\alpha(n-1)}} t_1^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_1}{\beta})^\alpha} \\
&\quad * \prod_{i=1}^{n-2} \left\{ t_{i+1}^{\alpha-1} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha} \right. \\
&\quad \left. \frac{(1 - \theta) \left(1 - \theta e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right) + 2\theta \left(1 - e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha}\right) \left(1 - e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right)}{\left[1 - \theta e^{-(\frac{t_i}{\beta})^\alpha} e^{-(\frac{t_{i+1}}{\beta})^\alpha}\right]^3} \right\} \quad (9.58) \\
&\quad * \left\{ 1 - \left\{ \left[\frac{2\theta e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - (\theta + 1) e^{(t_n/\beta)^\alpha + 2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

De (9.58) podemos obter a função $l(\alpha, \beta, \theta; t) = \ln(L(\alpha, \beta, \theta; t))$:

$$\begin{aligned}
 l(\boldsymbol{\theta}; t) &= (n - 1) \ln(\alpha) - (\alpha(n - 1)) \ln(\beta) + (\alpha - 1) \ln(t_1) \\
 &\quad - \left(\frac{t_1}{\beta}\right)^\alpha + \sum_{i=1}^{n-2} \left\{ (\alpha - 1) \ln(t_{i+1}) - \left(\frac{t_{i+1}}{\beta}\right)^\alpha \right. \\
 &\quad + \ln\left((1 - \theta) \left(1 - \theta e^{-(t_i/\beta)^\alpha - (t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right) + 2\theta \left(1 - e^{-(t_i/\beta)^\alpha}\right) \left(1 - e^{-(t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right) \right) \\
 &\quad \left. - 3 \ln\left(1 - \theta e^{-(t_i/\beta)^\alpha - (t_{i+1}/\beta)^\alpha}\right) \right\} \\
 &\quad + \ln\left(1 - \left\{ \left[\frac{2\theta e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - (\theta + 1)e^{(t_n/\beta)^\alpha + 2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_n/\beta)^\alpha + (t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - e^{2(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_{n-1}/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right\} \right), \tag{9.59}
 \end{aligned}$$

com $l(\alpha, \beta, \theta) = \ln(L(\boldsymbol{\theta}))$.

Os estimadores de máxima verossimilhança são os valores de α , β e θ que maximizam a função acima. A maximização para o conjunto de dados (tempos entre ultrapasses das medições de temperatura mínima, de 22°C fixado) foi obtida por meio de um método numérico "Quase Newton" utilizando o pacote Optim do programa R. Os resultados são vistos na Tabela 9.8.

Tabela 9.8: Estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse do Modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq.

Parâmetro	α	β	θ
EMV	0,6643466	3,1171308	0,9999999

De (9.57) temos a função de sobrevivência para T_{i+1} dado T_i , definido como:

$$\begin{aligned}
 S(t_{i+1}/t_i) &= 1 - \left\{ \left[\frac{2\theta e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + (t_i/\beta)^\alpha} - (\theta + 1)e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + 2(t_i/\beta)^\alpha} + \theta e^{2(t_i/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_{i+1}/\beta)^\alpha + (t_i/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left[\frac{2\theta e^{(t_i/\beta)^\alpha} - e^{2(t_i/\beta)^\alpha} - \theta^2}{\left(e^{(t_i/\beta)^\alpha} - \theta\right)^2} \right] \right\}, \tag{9.60}
 \end{aligned}$$

em que α e β são parâmetros de forma e escala, respectivamente, e θ é o parâmetro de dependência.

Conhecendo os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros de interesse, vamos mostrar nos seguintes gráficos a adequação dos ajustes dos modelo Modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull derivada da cópula Ali-Mikhail-Haq.

Figura 9.10: Curva de função de distribuição acumulada estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq *versus* a curva da função de distribuição acumulada empírica.

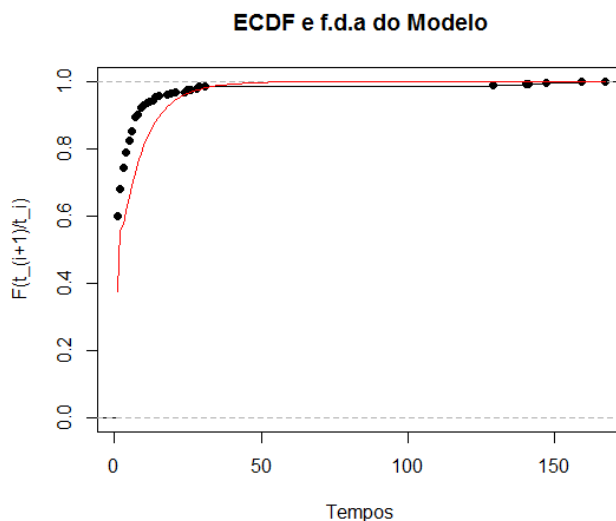
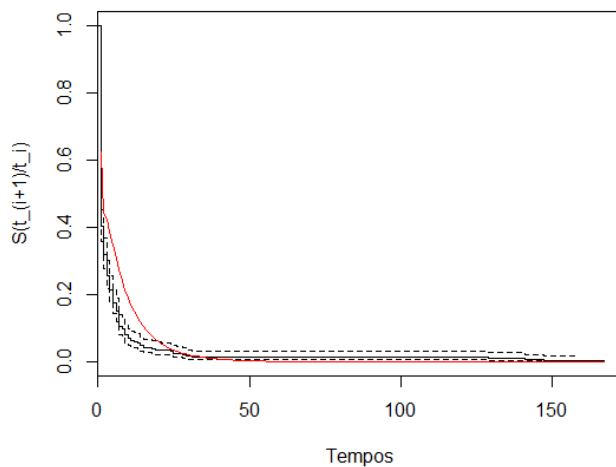


Figura 9.11: Curva de sobrevivência estimada pelo modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq *versus* a curva de sobrevivência estimada por Kaplan-Meier.



Podemos observar mediante os gráficos acima que o modelo markoviano Weibull via cópula Arquimediana Ali-Mikhail-Haq, não explica os tempos entre ultrapasses das medições de temperatura mínima, do limiar de 22°C fixado.

A seguir apresentamos algumas medidas de dependência para os dados reais (tempos entre ultrapasses das medições de temperatura mínima, do limiar de temperatura fixada de 22°C).

Tabela 9.9: Medidas de dependência entre os tempos T_{i+1} e T_i .

Correlação linear	0,0131564
Kendall	0,0998653
Spearman	0,1182364

Na tabela acima podemos ver que os valores de dependência em geral são pequenos, com isso podemos justificar o motivo para o bom ajuste dos modelos que possuem um valor baixo da estimativa do parâmetro de dependência.

Para concluir sobre quais modelos são os que explicam de melhor maneira os dados reais e a dependência existente, realizamos a seguinte comparação:

9.6 Comparação do Modelo Markoviano via Distribuição Bivariada Weibull de Marshall e Olkin e os Modelos Markovianos Weibull via Cópulas FGM, Gumbel Barnett, Frank, Clayton e Ali-Mikhail-Haq.

Tabela 9.10: Cálculo do AIC e AICc para o modelo markoviano via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin e os modelos markovianos Weibull via cópulas FGM, Gumbel Barnett, Frank, Clayton e Ali-Mikhail-Haq.

Modelo markoviano	AIC	AICc
Weibull via cópula Frank	59,7297	59,74068
Weibull via cópula Ali-Mikhail-Haq	-1933,688	-1933,677
Weibull via cópula FGM	-2016,064	-2016,053
via distribuição bivariada Weibull de Marshall e Olkin	-2018,897	-2018,87
Weibull via cópula Gumbel Barnett	-2022,698	-2022,687
Weibull via cópula Clayton	-2025,098	-2025,087

Na Tabela 9.10 podemos observar que o menor valor AIC e AICc é correspondente ao modelo markoviano via cópula Clayton seguidamente ao modelo markoviano via cópula Gumbel Barnett, portanto são os modelos que melhor se ajustam aos dados.

Considerações

O propósito desta dissertação de mestrado, foi na construção de um modelo que possa ser utilizado para prever o tempo entre ultrapasses de um limiar de temperatura. Para isto, foram considerados os modelos markovianos para a construção da função de verossimilhança, tendo em vista que os tempos entre ultrapasses podem apresentar dependência entre as observações. Foram utilizados o modelo Weibull bivariado de Marshall e Olkin e modelos baseados em cópulas. Obtemos resultados importantes, como o valor esperado do tempo para o próximo ultrapasse em função do tempo entre ultrapasse anterior, bem como a probabilidade de que o próximo ultrapasse ocorra daqui "m" dias dado o valor do tempo entre ultrapasses anterior para os modelos markovianos via cópula Farlie Gumbel Morgenstern e via distribuição bivariada de Marshall e Olkin.

Observamos graficamente um ajuste melhor para os modelos markovianos com parâmetro de dependência menor. Neste caso, o modelo markoviano via a distribuição bivariada Weibull derivada da cópula Arquimediana Gumbel Barnett seguidamente o modelo markoviano via distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin, isto pode estar ocorrendo porque os dados reais (tempos entre ultrapasses de um limiar) tem dependência fraca, mas a vantagem neste estudo de assumir dependência entre as variáveis de estudo é que temos os resultados importantes mencionados no parágrafo anterior.

Comparando os modelos pelo AIC concluímos que os modelos que melhor se ajustam aos nossos dados são o modelo markoviano via cópula Arquimediana Clayton seguidamente o modelo markoviano via cópula Arquimediana Gumbel Barnett, então podemos concluir que o tipo de dependência existente entre os tempos de estudo é a mesma do que as cópulas que utilizamos para construir os modelos de bom ajuste mencionados neste parágrafo, ou seja temos demonstrado que as cópulas Clayton e principalmente a Gumbel Barnett explicam melhor dados com dependência fraca, como diz na teoria.

Segundo os resultados observados nos modelos citados no parágrafo anterior podemos concluir que a probabilidade da temperatura mínima ultrapassar do limiar de 22°C no dia seguinte dado que ocorreu vários dias até o atual ultrapasse é alto em comparação com a probabilidade da temperatura mínima ultrapassar em vários dias dado que ocorreu um dia só até o atual ultrapasse, ou seja, o clima da cidade de Presidente Prudente é cálido, geralmente tem dias considerados quentes.

Como trabalhos futuros consideramos estudar o comportamento da temperatura mediante os tempos entre ultrapasse de um limiar de temperatura dado, mas neste caso trabalhando por períodos do ano como, período seco e chuvoso, acreditamos que serão obtidos bons resultados, já que deveria existir maior dependência entre os tempos dentro de cada período.

Referências

- [1] Hirotugu Akaike. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In *Selected papers of hirotugu akaike*, pages 199–213. Springer, 1998.
- [2] Hirotugu Akaike. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, 19(6):716–723, 1974.
- [3] Hirotugu Akaike. Prediction and entropy. In *Selected Papers of Hirotugu Akaike*, pages 387–410. Springer, 1985.
- [4] Hirotugu Akaike. Implications of informational point of view on the development of statistical science. In *Selected Papers of Hirotugu Akaike*, pages 421–432. Springer, 1994.
- [5] Claudi Alsina, Berthold Schweizer, and Maurice J Frank. *Associative functions: triangular norms and copulas*. World Scientific, 2006.
- [6] Narayanaswamy Balakrishnan and Chin Diew Lai. *Continuous bivariate distributions*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [7] Vic Barnett. Some bivariate uniform distributions. *Communications in statistics-theory and methods*, 9(4):453–461, 1980.
- [8] Kenneth P Burnham and David R Anderson. Multimodel inference: understanding aic and bic in model selection. *Sociological methods & research*, 33(2):261–304, 2004.
- [9] U CHERUBINII and Elisa Luciano. Water vecchiato. *Copula methods in Finance*, 2004.
- [10] Leandro Fernandes Coladello. Estimação bayesiana dos parâmetros da distribuição exponencial generalizada bivariada. 2014.
- [11] D Conway. Farlie gumbel morgenstern distributions, 1983.
- [12] HJM D’Abrera and EL Lehmann. *Nonparametrics: statistical methods based on ranks*. Holden-Day, 1975.
- [13] Paul Embrechts, Filip Lindskog, and Alexander McNeil. Modelling dependence with copulas. *Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich*, 2001.
- [14] Paul Embrechts, Alexander McNeil, and Daniel Straumann. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*, 1:176–223, 2002.
- [15] Henri Eyraud. Les principes de la mesure des correlations. *Ann. Univ. Lyon, III. Ser., Sect. A*, 1:30–47, 1936.

-
- [16] Dennis JG Farlie. The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika*, 47(3/4):307–323, 1960.
- [17] Christian Genest and Jock MacKay. The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 40(4):280–283, 1986.
- [18] Christian Genest and R Jock MacKay. Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données. *Canadian Journal of Statistics*, 14(2):145–159, 1986.
- [19] Suely Ruiz Giolo and Enrico Antônio Colosimo. Análise de sobrevivência aplicada. *Edgard Blucher*, 2006.
- [20] Emil J Gumbel. Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 55(292):698–707, 1960.
- [21] Rameshwar D Gupta and Debasis Kundu. Theory & methods: Generalized exponential distributions. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 41(2):173–188, 1999.
- [22] Marius Hofert, Ivan Kojadinovic, Martin Maechler, and Jun Yan. *copula: Multivariate Dependence with Copulas*, 2016. R package version 0.999-15.
- [23] Myles Hollander, Douglas A Wolfe, and Eric Chicken. *Nonparametric statistical methods*, volume 751. John Wiley & Sons, 2013.
- [24] Timothy P Hutchinson. Continuous bivariate distributions emphasising applications. Technical report, 1990.
- [25] Kumar Joag-Dev. 4 measures of dependence. *Handbook of statistics*, 4:79–88, 1984.
- [26] Harry Joe. *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. Chapman and Hall/CRC, 1997.
- [27] W Köppen and R Geiger. Klimate der erde. gotha: Verlag justus perthes. *Wall-map 150cmx200cm*, 1928.
- [28] William H Kruskal. Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 53(284):814–861, 1958.
- [29] W Larcher. *Ecofisiologia vegetal (são carlos: Rima)*. 2000.
- [30] Erich Leo Lehmann. Some concepts of dependence. *The Annals of Mathematical Statistics*, pages 1137–1153, 1966.
- [31] Albert W Marshall and Ingram Olkin. A multivariate exponential distribution. *Journal of the American Statistical Association*, 62(317):30–44, 1967.
- [32] AM Mayer and A Poljakoff-Mayber. *The germination of seeds*. 4? ed, 1989.
- [33] Pedro A Morettin and Clélia Toloi. Análise de séries temporais. In *Análise de séries temporais*. 2006.
- [34] Dietrich Morgenstern. Einfache beispiele zweidimensionaler verteilungen. *Mitteilungsblatt für Mathematische Statistik*, 8:234–235, 1956.

- [35] RB Nelsen. An introduction to copulas, 2nd. *New York: Springer Science Business Media*, 2006.
- [36] Roger B Nelsen. Dependence and order in families of archimedean copulas. *Journal of Multivariate Analysis*, 60(1):111–122, 1997.
- [37] Eliane Regina Rodrigues and Jorge Alberto Achcar. Modeling the time between ozone exceedances. In *Applications of Discrete-time Markov Chains and Poisson Processes to Air Pollution Modeling and Studies*, pages 65–78. Springer, 2012.
- [38] Glauco de Souza Rolim, Marcelo Bento Paes de Camargo, Daniel Grosseli Lania, and Jener Fernando Leite de Moraes. Classificação climática de köppen e de thornthwaite e sua aplicabilidade na determinação de zonas agroclimáticas para o estado de são paulo. *Bragantia*, pages 711–720, 2007.
- [39] Mari Dominique Drouet Kotz Samuel, Dominique Drouet Mari, and Samuel Kotz. *Correlation and dependence*. World Scientific, 2001.
- [40] Josivon Souza dos Santos. *Simulações de variáveis aleatórias dependentes: Aplicação ao risco subscrição*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- [41] RT Seeley. Fubini implies leibniz implies $\int f(yx) = \int f(xy)$. *The American Mathematical Monthly*, 68(1):56–57, 1961.
- [42] CH Sim. Point processes with correlated gamma interarrival times. *Statistics & probability letters*, 15(2):135–141, 1992.
- [43] M Sklar. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges. *Publ. inst. statist. univ. Paris*, 8:229–231, 1959.
- [44] Mário Tarumoto, Maicon Pinheiro, and Elaine Rodrigues. Estudo de funções de verossimilhança para modelagem de processos de markov aplicados ao estudo da concentração de poluição (pp. 481-485). *Revista da Estatística da Universidade Federal de Ouro Preto*, 3(3), 2014.
- [45] Mario Hissamitsu Tarumoto et al. Um modelo weibull bivariado para riscos competitivos. 2001.
- [46] Pravin K Trivedi, David M Zimmer, et al. Copula modeling: an introduction for practitioners. *Foundations and Trends® in Econometrics*, 1(1):1–111, 2007.
- [47] Jennyfer Portilla Yela and José Rafael Tovar Cuevas. Estimating the gumbel-barnett copula parameter of dependence. *Revista Colombiana de Estadística*, 41(1):53–73, 2018.