IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO IFT-D.005/20

Estrutura simplética em sistemas singulares *à la* Faddeev-Jackiw

Luis Gabriel Caro Mendoza

Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar

Março de 2020

Caro Mendoza, Luis Gabriel
C292e Estrutura simplética em sistemas singulars à la Faddeev-Jackiw / Luis Gabriel Caro Mendoza. – São Paulo, 2020
224 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar

1. Teoria clássica de campos. 2. Mecânica analítica. 3. Geometria simplética. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo autor(a).

ESTRUTURA SIMPLÉTICA EM SISTEMAS SINGULATES *À LA* FADDEEV-JACKIW

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física Teórica do Câmpus de São Paulo, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do título Mestre em Física, Especialidade Física Teórica.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR (Orientador)
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Faculdade de Engenharia/UNESP

Prof. Dr. RICARDO IVÁN MEDINA BASCUR
Instituto de Matemática e Computação/UNIFEI

Conceito: Aprovado

São Paulo, 30 de março de 2020.

Para Yuly.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a minha mãe pelo grande apoio, pelos conselhos e pelos sacrifícios que teve que fazer para eu poder continuar com minha formação.

Quero agradecer também a Yuly, que esteve comigo tanto nos bons momentos quanto nos mais difíceis e sempre me deu coragem para não desistir.

Agradeço ao professor Pimentel por sua orientação, paciência e pela confiança depositada em mim.

Agradeço ao Dr. Germán Enrique Ramos Zambrano por me fornecer o material *"Estructura canónica para una teoría de fotones masivos"* que serviu de guia para a elaboração de uma parte deste trabalho.

Agradeço também a meus colegas Oscar Acevedo, Iván Burbano, Luis Ypanaqué e Luis Rabanal pelas discussões que foram de grande ajuda para meu aprendizado.

Agradeço muito a meus grandes amigos Dean Valois e Rosana Mol por ter me ajudado muito com as correções na língua portuguesa, não só neste trabalho, e pela grande acolhida.

Não posso deixar de agradecer às grandes pessoas que conheci durante meu tempo no IFT e que fizeram mais confortáveis meus dias do mestrado.

Agradeço enormemente ao IFT pelas ótimas instalações que me permitiram estudar comodamente.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro durante a duração deste mestrado.

Resumo

As teorias de vínculos são de grande interesse para a física teórica, pois praticamente todas as teorias de interação são teorias com liberdade de gauge, que é um tipo de sistema vinculado. Além disso, uma vez que a teoria quântica apresenta, em princípio, uma estrutura hamiltoniana, o processo de quantização canônica (via o princípio de correspondência) é o mais apropriado; assim, surge a necessidade de obter os parênteses de Poisson (PP) da teoria clássica a ser quantizada. O presente trabalho estuda a proposta de Faddeev e Jackiw para obter os PP em teorias com vínculos por meio de uma abordagem geométrica em vez de algébrica. O processo foi implementado tanto no caso discreto (mecânica analítica) quanto no caso contínuo (teoria relativística de campos clássicos) e foram obtidos os PP de diferentes teorias, deixando assim o terreno pronto para a quantização.

Palavras Chaves: Mecânica analítica, teoria clássica de campos, sistemas singulares, quantização canônica.

Áreas do conhecimento: Física; teoria clássica de campos.

Abstract

Constrained theories are of great interest to theoretical physics, since practically all theories of interaction have gauge freedom, which is a type of constrained system. Besides, since quantum theory has, in principle, a Hamiltonian structure, the canonical quantization process (by the correspondence principle) is the most appropriate; thus, the necessity to obtain the Poisson brackets (PB) of the classical theory to be quantized arises. The present work studies the proposal of Faddeev and Jackiw to obtain the PB in theories with constraints through a geometric, rather than an algebraic, approach. The process was implemented both in the discrete case (analytical mechanics) and in the continuous case (relativistic theory of classical fields) and the PB of different theories were obtained, thus building the setup for quantization.

Keywords: Analitical mechanics, Classical field theory, Constrained systems, Canonical quantization.

Knowledge areas: Physics; Classical field theory.

Índice

1 Introdução **1**

2 Mecânica Analítica **6**

2.1 Formulação Lagrangiana 8

2.1.1 Coordenadas generalizadas e a variedade de configuração . 8

2.1.2 Equações de Lagrange 13

2.1.3 Velocidades como vetores tangentes e a variedade TQ . . . 16

2.1.4 Princípio de Hamilton 20

2.1.5 Invariância das equações E-L 22

2.1.6 Condição de não-singularidade 25

2.2 Formulação hamiltoniana 26

2.2.1 Momentos canônicos e equações de Hamilton 27

2.2.2 Hamiltoniana e energia mecânica 30

2.2.3 Fibrado cotangente: a variedade de fase 31

2.2.4 Coordenadas unificadas e forma simplética em $\mathbb{F}$ 35

2.2.5 Parênteses de Poisson 44

2.2.6 Condições de não-singularidade 49

3 Método de Faddeev-Jackiw para sistemas singulares **53**

3.1 Contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek ao método F-J 61

3.2 Exemplos 64

3.2.1 Exemplo 1 64

3.2.2 Exemplo 2 68

3.2.3 Exemplo 3 71

3.2.4 Exemplo 4 77

3.2.5 Exemplo 5 81

4 Mecânica analítica com graus de liberdade grassmannianos **90**

4.1 Álgebras de Grassmann 90

4.1.1 Álgebra de Grassmann de dimensão finita 91

4.1.2 Álgebra de Grassmann de dimensão infinita 94

4.2 Supermatrizes 99

4.3 Superfunções . . . 102
4.4 Formulações lagrangiana e hamiltoniana . . . 104
4.5 Formulação *à la* Faddeev-Jackiw . . . 109
4.6 Procedimento para o caso singular . . . 116
4.7 Exemplos . . . 119
4.7.1 Exemplo 1 . . . 119
4.7.2 Exemplo 2 . . . 121
4.7.3 Exemplo 3 . . . 123

5 Teoria clássica de campos na dinâmica instantânea 126
5.1 Espaço-tempo de Minkowski . . . 126
5.2 Campos clássicos e funções de campo . . . 133
5.3 Formulação lagrangiana . . . 136
5.4 Formulação hamiltoniana . . . 145
5.4.1 Parênteses de Poisson . . . 150

6 Método de Faddeev-Jackiw na dinâmica instantânea 154
6.1 Exemplos . . . 158
6.1.1 Exemplo 1: Campo eletromagnético livre . . . 158
6.1.2 Exemplo 2: Campo vetorial real massivo (Proca) livre . . . 166
6.1.3 Exemplo 3: Campo de Proca complexo livre . . . 170
6.1.4 Exemplo 4: Campo vetorial complexo massivo livre com liberdade de gauge (Stückelberg) . . . 173
6.1.5 Exemplo 5: Eletrodinâmica escalar . . . 180

7 Conclusões e perspectivas 190
7.1 Conclusões . . . 190
7.2 Perspectivas . . . 191

A Algumas definições úteis 193

B Elementos de Cálculo Variacional 195

C Teorema de Euler de las funciones homogéneas 207

D Expressões locais das 1-formas θ e $\Lambda^*\theta$ 208

E Prova das propriedades dos parênteses de Poisson 211

F Prova das propriedades dos parênteses de Poisson no superespaço **215**
F.1 Propriedades do setor ímpar dos PP 215
F.2 Propriedades dos PP $\mathbb{Z}_2-$graduados 218

Referências **220**

Capítulo 1

Introdução

A física de altas energias (conhecida também como física de partículas) é uma área da física que estuda a dinâmica das partículas subatômicas e as interações fundamentais (que resultam ser processos que involucram quantidades altíssimas de energias) que permitem explicar o comportamento delas, tais interações estão associadas a objetos conhecidos como campos. O principal suporte teórico da física de altas energias é a teoria quântica de campos, a qual modela às partículas como estados excitados dos chamados campos quânticos de matéria e também associa partículas quânticas aos próprios campos também no sentido de estados excitados deles.

Uma teoria quântica é usualmente obtida a partir de uma teoria clássica análoga, tal processo é chamado de *quantização*. A primeira teoria que foi obtida por meio da quantização canônica[1] é a mecânica quântica, cuja formulação inicial é estritamente hamiltoniana[2].

Dentro do estudo das interações fundamentais que aparecem na natureza, aparecem as chamadas *teorias de gauge*, pelo qual elas cobram uma gigantesca importância na física de altas energias. Uma teoria de gauge é caracterizada porque diferentes configurações dos campos envolvidos determinam os mesmos observáveis e quando é possível escolher uma configuração particular, diz-se que há liberdade de gauge e as transformações que levam de uma formulação para outra são chamadas de transformações de gauge. De fato, todas as interações fundamentais conhecidas (gravitacional, eletromagnética, fraca e forte) são descritas

[1] Proposta por Dirac no ano 1925 [1].

[2] Isto devido a que a mecânica clássica analítica possui duas principais abordagens: a formulação lagrangiana, que é uma teoria variacional baseada em uma função escalar das coordenadas e velocidades generalizadas chamada de lagrangiana, e a hamiltoniana, cujo ingrediente principal é uma função escalar das coordenadas generalizadas e os momentos canônicos chamada de função hamiltoniana. Embora a segunda abordagem é obtida a partir da primeira, ambas formulações são equivalentes.

por teorias cuja formulação matemática apresenta invariância por transformações de gauge (ou simplesmente invariância de gauge), o que se traduz no fato de que a teoria não fornece uma única descrição do sistema físico. O melhor exemplo que deixa em manifesto a importância das teorias de gauge na física é o enorme sucesso que teve o modelo padrão, que fornece de uma abordagem unificada que permite descrever as teorias quânticas (de campos) do eletromagnetismo, e as interações fraca e forte por meio de uma teoria de gauge sob o grupo[3] $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Mais ainda, outras teorias como a relatividade geral e inclusive a teoria de cordas podem ser vistas como teorias de gauge. Por outro lado, nos intentos de obter um limite clássico para teorias quânticas que envolvem tanto operadores bosônicos (associados a partículas de spin inteiro) quanto fermiônicos (associados a partículas de spin semi-inteiro), Berezin, Marinov [2, 3] e Cassalbouni [4, 5] desenvolveram uma teoria que foi chamada por este último de pseudomecânica e faz uso de variáveis grassmannianas, as quais têm a propriedade de anticomutar, e encontrou-se que os sistemas envolvidos, em geral também são sistemas hamiltonianos vinculados.

As teorias de gauge pertencem às chamadas teorias singulares (ou sistemas vinculados); tais teorias são caracterizadas porque não é possível construir a formulação hamiltoniana a partir da lagrangiana da maneira padrão devido a que não todas as velocidades generalizadas podem ser expressas como funções das coordenadas generalizadas e os momentos canonicamente conjugados[4]. Assim, uma vez que a quantização canônica demanda a existência do formalismo hamiltoniano da teoria clássica correspondente, é imprescindível formular uma teoria hamiltoniana para sistemas singulares e logo estabelecer um procedimento consistente para a quantização deles.

Os trabalhos de Bergmann [6] em colaboração com, Brunings [7], Penfield, Schiller, Zatzkis [8] e Anderson [9] entre os anos 1949 e 1950 permitiram entender a conexão entre os vínculos e as propriedades de invariância de uma teoria singu-

[3] As transformações de gauge formam um grupo de Lie, o qual tem associado um conjunto de geradores, os quais junto à uma operação chamada de parênteses de Lie determinam uma álgebra de Lie. Nas teorias de gauge cada um desses geradores tem associado um campo vetorial chamado de campo de gauge e eles devem ser incluídos na teoria para assegurar a invariância de gauge local.

[4] Isto é consequência de que tais variáveis da teoria não são completamente independentes, o que demonstra que existem relações entre elas que foram chamadas de vínculos; daí o nome de sistemas vinculados.

lar; todos esses trabalhos foram desenvolvidos no contexto de teorias de campos. Contudo, Dirac mostrou no ano 1950 que o método para estudar sistemas com vínculos pode ser estudado em sistemas com finitos graus de liberdade (sistemas discretos) [10]. O método desenvolvido por Dirac foi realizado no contexto de uma teoria puramente hamiltoniana, pois o objetivo principal era a quantização canônica. Um dos principais aportes do método de Dirac foi a classificação dos vínculos em primeira e segunda classe e mais ainda, ele demostrou que os vínculos de primeira classe são os geradores (no sentido clássico) de transformações que no caso contínuo seriam as transformações de gauge. A maior contribuição do método de Dirac é a introdução dos parênteses de Dirac, que são a versão corrigida dos parênteses de Poisson da formulação hamiltoniana padrão que permitem a correta passagem à teoria quântica. Dirac também estendeu o método dele à teoria de campos [11].

Embora a análise dos sistemas singulares desenvolvida por Dirac e Bergmann tiveram um grande sucesso, vários anos mais tarde, Faddeev e Jackiw (F-J) apresentaram uma proposta, bastante geral, para estudar sistemas singulares [12] sem a necessidade de fazer a classificação dos vínculos em primeira ou segunda classe estabelecida no método de Dirac. O método F-J, conhecida também como *método simplético*[5] pode ser visto como um caminho geométrico para a obtenção dos parênteses a serem quantizados. Além do fato de evadir a classificação dos vínculos, uma vantagem do método F-J é que ele fornece os *verdadeiros* vínculos da teoria e são perfeitamente consistentes com as equações de movimento e também permite distinguir os graus de liberdade físicos da teoria. Poucos anos depois, Barcelos-Neto e Wotzasek (BN-W) propuseram uma extensão (um pouco mais algébrica) do método F-J [13, 14] que permite incorporar os próprios vínculos de maneira iterativa para obter a estrutura simplética desejada.

O presente trabalho está focado na construção do método F-J com a contribuição de BN-W e a aplicação a diferentes sistemas, tanto mecânicos e pseudomecânicos quanto teorias de campos (livres e de interação) e está estruturado em sete capítulos:

- O capítulo 2 é uma revisão, com certo grau de detalhe, da mecânica clássica analítica desde uma perspectiva geométrica, isto envolve o uso de objetos

[5] Isto devido a que o principal objetivo é construir uma forma simplética (e por tanto, invertível) no espaço de fase, cuja inversa determine a estrutura de Poisson associada aos parênteses buscados.

como variedades diferenciáveis, campos vetoriais e formas diferenciais. O principal objetivo é a construção das formulações lagrangiana e hamiltoniana para sistemas regulares (não-singulares) e estabelecer a relação entre a estrutura simplética definida sobre os espaço de fase e os parênteses de Poisson. Finalmente se estuda sob quais condições um sistema é regular, tanto na formulação lagrangiana quanto na hamiltoniana.

- O capítulo 3 trata sobre a construção do método F-J para sistemas singulares discretos (sistemas mecânicos); são desenvolvidas tanto a proposta original de Faddeev e Jackiw quanto a contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek. Finalmente o método é aplicado a vários sistemas para apresentar diferentes propriedades que podem ser resgatadas de cada exemplo; em particular, o exemplo 3 (subseção 3.2.3) a obtenção de uma hamiltoniana modificada que já contém todas as informações dos vínculos e desempenha o papel de gerador da evolução temporal dos graus de liberdade físicos e, por último, o exemplo 5 (subseção 3.2.5) é um sistema com simetria interna e requer da inclusão de uma condição auxiliar para fixar a dinâmica.

- O capítulo 4 tem por objetivo fazer uma extensão da mecânica analítica estudada no capítulo 2 para sistemas que envolvem graus de liberdade grassmannianos, buscando obter um modelo clássico não-relativístico de uma partícula com spin $1/2$. Nas primeiras três seções se introduzem os conceitos de álgebras de Grassmann e supernúmeros, bem como as ferramentas matemáticas necessárias para trabalhar com esse tipo de objetos. A seção 4.4 é basicamente o estudo da pseudomecânica em suas formulações lagrangiana e hamiltoniana, enquanto que as seções 4.5 e 4.6 estão destinadas à introdução da abordagem F-J tanto para sistemas regulares quanto singulares. A última seção mostra alguns poucos exemplos, entre eles o modelo de uma partícula puramente espinorial $(1/2)$.

- O capítulo 5 tem duas partes: A primeira seção é uma rápida revisão das principais ideias e elementos da relatividade especial de Einstein na dinâmica instantânea, enquanto que as seguintes seções são uma tentativa de uma abordagem geométrica, com um grande paralelismo à mecânica analítica, da teoria clássica de campos. São estudadas as formulações lagrangiana e hamiltoniana (fazendo uso do conceito de funcionais espaciais) de sistemas não-singulares.

- O capítulo 6 apresenta a extensão do método de Faddeev-Jackiw, estudado no capítulo 3 para sistemas contínuos, isto é, a teoria clássica de campos. Seguidamente o método é aplicado a diferentes teorias de campos que envolvem apenas campos bosônicos (de spin inteiro), tanto livres quanto de interação. A exceção dos exemplos 2 e 3 (subseções 6.1.2 e 6.1.3), as teorias estudadas apresentam simetria interna.

- O capítulo 7 mostra as conclusões do aprendido nos capítulos anteriores e as perspectivas de futuros estudos que poderiam ser realizados para enriquecer o presente trabalho.

Capítulo 2

Mecânica Analítica

Chama-se de matéria tudo que está presente em nosso universo e parte dessa matéria é percebida com nossos sentidos; foi o que permitiu ao ser humano refletir sobre diferentes comportamentos que se apresentam naturalmente na vida cotidiana, talvez o mais acessível deles seja o que é conhecido como *movimento*. Em termos gerais a matéria toda está em constante movimento e interação, mas a forma mais simples de movimento é o chamado *movimento mecânico*, que no caso de uma partícula, se refere à mudança contínua na posição (em relação a um determinado observador) com o passar do tempo. Muitas pessoas contribuíram ao estudo e análise do movimento mecânico, e foi assim que a primeira abordagem bem sucedida foi proposta por Sir Isaac Newton na sua obra *Philosophiæ naturalis principia mathematica* em 1687 [16]. Nessa formulação, o estado mecânico de um sistema é dado pela configuração[1] e velocidades respectivas; além disso, a dinâmica do sistema partindo de um estado dado (o que é conhecido na literatura como *condições iniciais*) pode ser obtida fazendo uso da expressão matemática da segunda lei de Newton:

$$\ddot{\vec{x}}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i} \qquad , \qquad (i = 1, \cdots, N). \tag{2.1}$$

Na equação acima $\ddot{\vec{x}}_i$ e m_i são a aceleração e a masa da $i-$ésima partícula, respectivamente; enquanto que $\vec{F}_i$ é a força resultante sobre ela. N é o número de partículas do sistema (para uma distribuição discreta de pontos materiais). A equação (2.1) é uma equação diferencial de segunda ordem para a função de posição com o tempo como variável independente. Para dar solução a essa equação precisa-se dispor das condições iniciais do sistema. Por outro lado, existem muitos sistemas que apresentam certas restrições (geométricas ou cinemáticas) ao movimento das partículas que os constituem; matematicamente tais restrições podem ser expressas

[1] Chama-se de configuração ao conjunto de posições de todos os constituintes de um sistema em um instante dado.

por meio de equações que envolvem as coordenadas e o tempo (e possivelmente também as velocidades) que são conhecidas na literatura como *vínculos*. Uma consequência imediata da presença de vínculos é que nem todas as coordenadas serão independentes. Quando os vínculos podem ser reduzidos a equações que envolvem apenas as coordenadas e o tempo são chamados de *vínculos holonômicos* e aqueles sistemas que apresentam só vínculos holonômicos permitem a escolha de um novo conjunto de variáveis totalmente independentes umas das outras tais que determinem univocamente as configurações do sistema e que os vínculos sejam trivialmente satisfeitos, essas novas variáveis são chamadas de *coordenadas generalizadas* e habitualmente denotam-se por $q^1, \cdots, q^n$. A quantidade de coordenadas generalizadas, n, normalmente é conhecida como *graus de liberdade* do sistema. Por exemplo, para um sistema de N partículas em um espaço 3-dimensional dispõe-se de $3N$ coordenadas, não necessariamente independentes, mas os graus de liberdade (que correspondem às coordenadas generalizadas) cumprirão sempre que $n \leqslant 3N$. Na formulação newtoniana para um sistema com restrições no seu movimento aparecem as chamadas *forças de vínculos* que fazem com que o movimento do sistema fique restrito, tais forças devem ser incluídas na obtenção das equações de movimento.

Além da formulação newtoniana existem outras formulações que tiveram grande sucesso na descrição dos sistemas mecânicos, as mais conhecidas são as formulações lagrangiana e hamiltoniana. Na formulação desenvolvida por Joseph-Louis Lagrange em 1788 [17] a descrição foi feita totalmente em termos das coordenadas e velocidades[2] generalizadas e tem a vantagem de não envolver as forças de vínculos. Nessa abordagem as equações de movimento se constroem a partir de uma função escalar das coordenadas e velocidades generalizadas chamada de *função lagrangiana* do sistema. Posteriormente Leonard Euler conseguiu obter as mesmas equações de movimento por meio do cálculo variacional e é por isso que essas equações de movimento são conhecidas como equações de Euler-Lagrange (E-L). Assim como na formulação newtoniana, as equações E-L são equações diferenciais de segunda ordem e é preciso conhecer de antemão as condições iniciais respectivas[3]. Em vista desse fato, Sir William Rowan Hamilton desenvolveu uma abordagem em 1834 [18] na qual as n equações E-L são substituídas por $2n$ equações diferenciais de primeira ordem. Para atingir esse

[2] As velocidades generalizadas são as derivadas temporais das coordenadas generalizadas.
[3] Neste caso são dadas pelos valores das posições e velocidades em um dado instante.

propósito é necessário fazer uma transformação de Legendre à função lagrangiana em relação às velocidades generalizadas, e as variáveis conjugadas respectivas são chamadas de *momentos canônicos conjugados* e são usualmente denotados por $p_1, \cdots, p_n$; as coordenadas generalizadas e os momentos canônicos conjugados, em conjunto, são conhecidos como *variáveis canônicas*. As equações de movimento nesta abordagem são, com efeito, de primeira ordem e são conhecidas como equações canônicas de Hamilton que podem ser obtidas também a partir de uma função escalar chamada de *função hamiltoniana*[4].

Nas seguintes seções deste capítulo serão apresentadas as formulações lagrangiana e hamiltoniana desde o ponto de vista tradicional, mas também desde uma perspectiva um pouco mais moderna que envolve fazer uso de alguns elementos básicos de geometria diferencial, tais como variedades diferenciáveis, fibrados tangente e cotangente, formas diferenciais, entre outros.

2.1 Formulação Lagrangiana

A formulação para a mecânica desenvolvida por Lagrange foi a primeira abordagem puramente analítica[5] que foi feita com sucesso para a descrição e estudo dos sistemas mecânicos. Ela foi publicada no livro titulado *"Mécanique Analytique"* no ano 1788, onde as equações de Lagrange foram vistas pela primeira vez. Talvez uma das maiores diferenças em relação à mecânica newtoniana seja que nesta formulação não é necessário introduzir quantidades vetoriais; de fato, as equações de movimento são construídas a partir de uma função escalar chamada função lagrangiana que, em geral, depende das coordenadas e velocidades generalizadas e também do tempo. Assim, um conceito fundamental para esta abordagem é o das coordenadas generalizadas, que será detalhado a seguir.

2.1.1 Coordenadas generalizadas e a variedade de configuração

O conceito de coordenadas generalizadas está atrelado ao que na literatura se conhece como graus de liberdade, que está relacionado à ideia de vínculos[6]. Considere-se, por exemplo, uma partícula livre que se move em um espaço 3-

[4]Que vem a ser a transformada de Legendre da função lagrangiana

[5]Isto é, que não precisa se apoiar em raciocínios geométricos (no sentido elementar).

[6]Serão considerados sistemas com apenas vínculos holonômicos, pois são estes os que permitem definir as coordenadas generalizadas.

dimensional, evidentemente ela terá três graus de liberdade, mas se for imposta uma restrição ao seu movimento, isto é, um vínculo da forma $S_1 : f_1(t;\vec{x}) = 0$, a partícula ficaria obrigada a se mover sobre a superfície S_1, descrita por f_1; então, diz-se que a partícula agora tem $3-1=2$ graus de liberdade. Se, adicionalmente, outro vínculo $S_2 : f_2(t;\vec{x}) = 0$ for imposto, o movimento da partícula ficaria restrito à curva gerada pela interseção das superfícies S_1 e S_2, e com isso o movimento teria $3-2=1$ grau de liberdade. Assim, em geral, para um sistema de N partículas com vetores de posição $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N$ sujeitas a K vínculos (holonômicos) $f_1(t;\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N), \cdots, f_K(t;\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N)$, diz-se que o sistema possui $n = 3N-K$ graus de liberdade.

Seja um espaço $3N-$dimensional cujos elementos estão constituídos pelas posições das N partículas:

$$x \stackrel{!}{=} (\vec{x}_1;\cdots;\vec{x}_N) \in \mathbb{R}^{3N} \,,$$

neste caso os K vínculos $\{f_j(t;x)\}_{j=1}^{K}$ podem ser vistos como equações paramétricas de uma superfície $(3N-K)-$dimensional imersa no espaço $\mathbb{R}^{3N}$, a qual será denotada por $\mathbb{Q}$. Considere-se um ponto fixo (mas arbitrário) x na superfície $\mathbb{Q}$, será definido um novo conjunto de coordenadas $\{q^\alpha\}_{\alpha=1}^{3N}$ em um entorno B_x (aberto) de x com a condição de que os q^α sejam funções contínuas invertíveis dos $\vec{x}_i$ e (pelo menos) duas vezes diferenciáveis, em relação ao tempo, com derivadas também contínuas. É requerida a existência dos $\ddot{q}^\alpha$ para garantir que as acelerações presentes nas equações de movimento sejam bem definidas, assim como a invertibilidade é necessária para poder recuperar as coordenadas originais univocamente. Dessa forma são obtidas as seguintes equações:

$$\begin{cases} q^\alpha = q^\alpha(t;\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N) & ; \quad \alpha = 1,\cdots,3N \\ \vec{x}_i = \vec{x}_i(t;q^1,\cdots,q^{3N}) & ; \quad i = 1,\cdots,N \end{cases} .$$

Até este ponto, foram construídas $3N-$uplas para rotular cada ponto pertencente ao conjunto $B_x \subset \mathbb{Q}$; mas, como $\mathbb{Q}$ é uma superfície coordenada $(3N-K)-$dimensional são requeridas apenas $(3N-K)$ coordenadas independentes que, sem perda de generalidade, podem ser escolhidas como as primeiras componentes de $(q^1;\cdots;q^{3N})$. Além disso, as outras componentes são dadas por:

$$q^{n+j}(x) = R_j\big(f_1(x);\cdots;f_K(x)\big) \qquad ; \qquad j = 1,\cdots,K \,.$$

Por outro lado, devido à invertibilidade dos q^α, deve ser possível resolver essas equações para $f_j = f_j(q^{n+1}; \cdots ; q^{n+K})$. Então, quando impostos os K vínculos nas novas coordenadas q^α obter-se-á:

$$q^{n+j} = R_j(0; \cdots ; 0) = \text{constante} .$$

Daqui, observa-se que os vínculos são identicamente satisfeitos nestas novas coordenadas. Além disso, como os q^{n+j} permanecem constantes, o ponto x fica restrito a permanecer em $\mathbb{Q}$, o que garante que os vínculos sejam sempre satisfeitos.

Em sistemas que apresentam apenas vínculos holonômicos definem-se as **coordenadas generalizadas** como um conjunto de variáveis tais que satisfazem o seguinte:

(i). Os vetores de posição de todas as partículas do sistema são univocamente determinados por estas variáveis para todo instante.

(ii). Os vínculos, expressos em termos destas variáveis, são trivialmente satisfeitos.

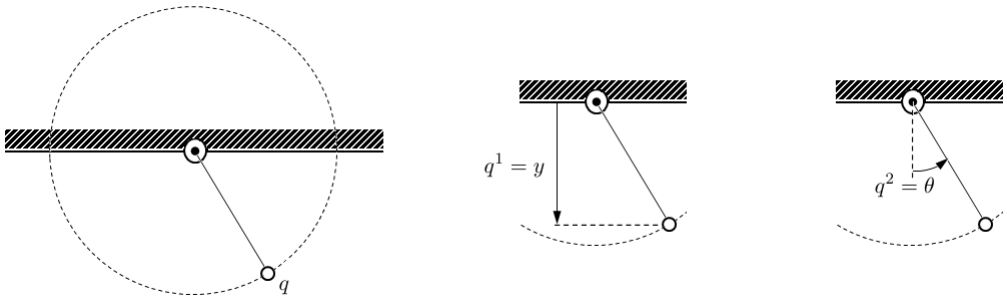
Assim, de toda a construção anterior, se observa que as funções q^a, com $a = 1, \cdots , n$ satisfazem os requerimentos para ser as coordenadas generalizadas do sistema. Cada conjunto de valores das coordenadas generalizadas determina uma configuração do sistema, isto é, as posições de todas as partículas em um instante dado. O espaço cartesiano $n-$dimensional cujos eixos coordenados se correspondem com as coordenadas generalizadas é chamado de *espaço de configuração* do sistema. Além disso, por um teorema[7] da álgebra linear, esse espaço é isomorfo a $\mathbb{R}^n$ e consequentemente é possível representar seus elementos com as $n-$uplas $(q^1; \cdots ; q^n) \in \mathbb{R}^n$.

Observe-se que o conjunto de todas as configurações possíveis para um determinado sistema estabelece uma estrutura geométrica de forma natural, pois elas obedecem tacitamente os vínculos que restringem de maneira única o movimento de cada sistema; isto é, os vínculos são intrinsecamente satisfeitos devido à própria geometria estabelecida pelas configurações acessíveis do sistema. O conjunto composto por todas as configurações possíveis, o qual foi denotado por $\mathbb{Q}$ e até agora considerado como uma superfície coordenada estabelecida pelos vínculos

[7] O teorema estabelece que todo espaço vetorial real $n-$dimensional é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

imersa em um espaço euclidiano maior ($\mathbb{R}^{3N}$), tem a estrutura matemática de uma variedade diferenciável $n-$dimensional [19], razão pela qual também é conhecida como **variedade de configuração.**

Note-se que é possível escolher diferentes sistemas de coordenadas para descrever as configurações de um sistemada dado; por exemplo, para o caso de um pêndulo que se move em um plano vertical (que é um sistema com um grau de liberdade[8]) pode-se trabalhar em coordenadas cartesianas retangulares, tomando por exemplo como coordenada generalizada q^1 a posição vertical da partícula em relação ao ponto de suspensão, ou coordenadas polares, elegendo como coordenada generalizada q^2 o ângulo varrido pela corda em relação à linha vertical que passa pelo ponto de suspensão. Ambas escolhas são igualmente boas para rotular as configurações do sistema e são conhecidas como *coordenadas locais*, que em geral vêm sendo denotadas por q^a. Assim, cada configuração do sistema, que de aqui em diante será denotada por $\boldsymbol{q}$, é um elemento do conjunto abstrato $\mathbb{Q}$, enquanto que as coordenadas locais q^a são a representação em algum sistema de coordenadas (locais) para cada configuração.



Na figura acima se mostra uma configuração particular, denotada por $\boldsymbol{q}$, para o sistema *pêndulo plano* e as duas coordenadas locais possíveis mencionadas no parágrafo anterior. O conjunto das configurações factíveis deste sistema conforma uma circunferência, ou $1-$esfera ($\mathbb{S}^1$), este lugar geométrico, dotado de uma estrutura topológica, seria a variedade de configuração para esse sistema.

Em um caso geral, dado um elemento $\boldsymbol{q}$ na variedade de configuração $\mathbb{Q}$ pode-se considerar um entorno aberto $\mathscr{U}_1$ desse ponto e pode ser obtida uma representação local para todos os pontos de $\mathscr{U}_1$ em um determinado sistema de

[8]Devido a que existem duas restrições para seu movimento: o plano no qual se move a partícula e a distância constante ao ponto de suspensão (comprimento da corda).

coordenadas locais, o que vai determinar um conjunto aberto $\mathcal{O}_1$ incluído em um espaço euclidiano[9] $\mathbb{R}^n$, de modo que as coordenadas locais do ponto $q \in \mathbb{Q}$ serão $(q^1; \cdots ; q^n)$. Além disso, para ter uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{O}_1$ deve existir um mapa bijetivo $\phi_1 : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{O}_1$. Então:

$$\begin{aligned} \phi_1 : \mathcal{U}_1 &\longrightarrow \phi_1(\mathcal{U}_1) \\ \boldsymbol{q} &\longmapsto (q^1; \cdots ; q^n) \end{aligned}$$

Mas ainda, pela própria definição de movimento mecânico, é claro que o mapeamento entre as configurações e as coordenadas locais (ou vice-versa) deve ser contínuo. Assim, se deve exigir também que o mapa ϕ_1 (e o inverso dele) seja contínuo. Um mapa que verifica as condições anteriores é conhecido como *homeomorfismo*.

Por outro lado, se for selecionado outro sistema de coordenadas locais para representar os pontos de alguma vizinhança de $\boldsymbol{q}$, a representação local respectiva, $\mathcal{O}_2$, em geral não coincidirá com $\mathcal{O}_1$ e se além disso for considerado que é a imagem de uma bijeção $\phi_2 : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{O}_2$, a vizinhança $\mathcal{U}_2$ também não coincidirá completamente com $\mathcal{U}_1$. As coordenadas locais de $\boldsymbol{q}$ em $\mathcal{O}_2$ serão denotadas por $(\tilde{q}^1; \cdots ; \tilde{q}^n)$.

Até este ponto foram construídos dois subconjuntos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \subset \mathbb{Q}$, em cuja interseção se encontra o ponto $\boldsymbol{q}$. As coordenadas locais nos dois diferentes sistemas foram obtidas por meio dos mapas bijetivos ϕ_1 e ϕ_2 :

$$\phi_1(\boldsymbol{q}) = (q^1; \cdots ; q^n) \in \mathcal{O}_1 \qquad , \qquad \phi_2(\boldsymbol{q}) = (\tilde{q}^1; \cdots ; \tilde{q}^n) \in \mathcal{O}_2 \, .$$

Mas, como se trata de apenas diferentes representações locais de um mesmo ponto, deve ser possível passar de um sistema de coordenadas para o outro mediante uma transformação não singular; uma condição suficiente é que o jacobiano da função de transformação seja distinto de zero. Por exemplo, para passar das coordenadas $(q^1; \cdots ; q^n)$ às coordenadas $(\tilde{q}^1; \cdots ; \tilde{q}^n)$ a função de transformação

[9] Lembre-se que a dimensão do sistema de coordenadas locais é determinado pelos graus de liberdade do sistema.

é $\Phi_{21} \equiv \phi_2{}^o\phi_1^{-1}$ e as seguintes condições devem ser atendidas:

$$\frac{\partial(\tilde{q}^1;\cdots;\tilde{q}^n)}{\partial(q^1;\cdots;q^n)} \equiv det\left(\frac{\partial[\Phi_{12}]^a}{\partial q^b}\right) \neq 0 \quad , \quad \Phi_{21} : \phi_1(\mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2) \to \phi_2(\mathscr{U}_1 \cap \mathscr{U}_2) \; ;$$

donde fica manifesta a necessidade de que Φ_{12} seja diferenciável. Além disso, é claro que para cada configuração sempre será possível encontrar um conjunto $\mathscr{U}$ que a contenha (e que possa ser mapeado para um sistema de coordenadas locais), ou seja que ter-se-á uma coleção de conjuntos $\mathscr{U}_\alpha$ cuja união será o próprio conjunto $\mathbb{Q}$.

De toda a análise anterior pode se destacar o seguinte:

(i). Para cada $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$ existe um subconjunto (aberto) $\mathscr{U}_\alpha \subset \mathbb{Q}$ tal que $\boldsymbol{q} \in \mathscr{U}_\alpha$ e consequentemente $\bigcup_\alpha \mathscr{U}_\alpha = \mathbb{Q}$.

(ii). Existem homeomorfismos $\phi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to \mathcal{O}_\alpha$ tais que os $\mathcal{O}_\alpha$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.

(iii). Se $\boldsymbol{q} \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$, a função de transformação $\Phi_{\beta\alpha} : \phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta) \to \phi_\beta(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta)$, com $\Phi_{\beta\alpha} \equiv \phi_\beta{}^o\phi_\alpha^{-1}$, é diferenciável.

Estas três características permitem afirmar que o conjunto $\mathbb{Q}$ é, com efeito, uma variedade diferenciável $n-$dimensional. Os pares $(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ são chamados de *cartas* e uma coleção de cartas é chamada de *atlas.*

2.1.2 Equações de Lagrange

Na mecânica newtoniana as variáveis de estado de um sistema de N partículas são $\vec{x}_i$ e $\vec{v}_i \equiv \dot{\vec{x}}_i$ $(i = 1, \cdots, N)$ e são características das partículas que mostram como o sistema evolui a partir de certas condições iniciais, enquanto que o efeito da influência externa resultante se vê refletida nas acelerações $\vec{a}_i \equiv \ddot{\vec{x}}_i$ que adquire cada partícula do sistema. As equações que relacionam $\vec{a}_i$, $\vec{v}_i$ e $\vec{x}_i$ (para a $i-$ésima partícula) são conhecidas como equações de movimento. Analogamente, na abordagem que envolve as coordenadas generalizadas diz-se que as equações de movimento são aquelas que relacionam as quantidades[10] $\ddot{q}$, $\dot{q}$ e q.

[10] De aqui em diante será empregada a notação $q \overset{!}{=} (q^1;\cdots;q^n)$, similarmente para $\dot{q}$ e $\ddot{q}$. Não se deve confundir com $\boldsymbol{q}$, que é a notação para as configurações.

As equações de movimento podem ser obtidas em termos das coordenadas generalizadas (e das derivadas delas) partindo das equações de movimento na mecânica newtoniana e levando em conta que as coordenadas generalizadas determinam univocamente as posições de todas as partículas que constituem o sistema. Com isto, a posição da $i-$ésima partícula tem a forma:

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i(t; q^1, \cdots, q^n) \qquad ; \qquad i = 1, \cdots, N \, .$$

Considere-se um sistema sem forças não-conservativas, de modo que a força externa resultante possa ser escrita na forma $\vec{F} = -\nabla V$, onde V é uma função de energia potencial. Dessa maneira ter-se-á que para a $i-$ésima partícula do sistema, a equação de movimento correspondente se escreve como:

$$m_i \frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \qquad ; \qquad i = 1, \cdots, N \, .$$

Convenientemente, pode-se fazer o seguinte:

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{\mathrm{v}}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a} = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a} \, , \tag{2.2}$$

Logo, é possível reescrever o lado esquerdo de (2.2) em termos da derivada de $\left(\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \dfrac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a} \right)$. Por outro lado, levando em conta que a função de energia potencial V depende apenas das posições $\vec{x}_i = (x_{i1}; x_{i2}; x_{i3})$ e cada componente x_{ij} $(j = 1, 2, 3)$ é função de $(t; q^1; \cdots; q^n)$, em virtude da regra da cadeia ter-se-á:

$$\frac{\partial V}{\partial q^a} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_i} \cdot \frac{\vec{x}_i}{\partial q^a} \, ,$$

que coincide com o lado direito de (2.2). Com isso, (2.2) adotará a forma:

$$\sum_i m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a} \right) - \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a} \right) \right] = -\frac{\partial V}{\partial q^a} \, . \tag{2.3}$$

Agora, tem que se levar em conta o seguinte[11]:

$$\vec{\mathrm{v}}_i = \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^b} \dot{q}^b + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial t} \, .$$

[11] Aqui foi usada a convenção de Einstein de índices repetidos nos somatórios nas variáveis q^a. Enquanto não houver ambiguidade, dita convenção será usada daqui em diante.

Logo, derivando (parcialmente) em relação a $\dot{q}_a$ ter-se-á:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\left(\frac{\vec{x}_i}{\partial q^b}\dot{q}^b\right) + \cancelto{\vec{0}}{\frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial \dot{q}^a \partial t}} = \left[\cancelto{\vec{0}}{\frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}}\dot{q}^b + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^b}\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^a}\right] = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^b}\delta^b_a = \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a}\,. \tag{2.4}$$

Por outro lado, observe-se o seguinte:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial q^a} = \left[\frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q^a \partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^b}\cancelto{0}{\frac{\partial \dot{q}^b}{\partial q^a}}\right] + \frac{\partial^2 \vec{x}_i}{\partial q^a \partial t} = \frac{\partial}{\partial q^b}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q^a}\right)\,. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.4) y (2.5) em (2.3) resulta:

$$\sum_i m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial \dot{q}^a}\right) - \vec{\mathrm{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial q^a}\right] = -\frac{\partial V}{\partial q^a}\,.$$

Usando o fato de que $\dfrac{\partial v_i^2}{\partial q^a} \equiv \dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i^2}{\partial q^a} = \dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i^2}{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}\cdot\dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial q^a} = 2\vec{\mathrm{v}}_i \cdot \dfrac{\partial \vec{\mathrm{v}}_i}{\partial q^a}$, a equação anterior pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\sum_i \frac{m_i}{2}v_i^2\right) - \frac{\partial}{\partial q^a}\sum_i \frac{m_i}{2}v_i^2 = -\frac{\partial V}{\partial q^a}\,;$$

logo, identificando que $T = \dfrac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$ é a energia cinética do sistema, a última equação adota a forma:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial}{\partial q^a}(T - V) = 0\,,$$

mas, como $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}^a} = 0$, também é possível escrever a equação anterior como:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}(T - V)\right] - \frac{\partial}{\partial q^a}(T - V) = 0\,. \tag{2.6}$$

Neste ponto define-se a **lagrangiana local** do sistema por:

$$L \doteq T - V\,.$$

Com isto, as equações de movimento (2.6) se escrevem como:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) = 0 \qquad ; \qquad a = 1, \cdots, n \; ; \tag{2.7}$$

onde $L = L(q^1, \cdots, q^n; \dot{q}^1, \cdots, \dot{q}^n; t) \equiv L(q; \dot{q}; t)$. Estas equações foram obtidas por Joseph-Louis Lagrange e viram a luz pela primeira vez em 1788 [20].

Neste ponto é preciso fazer um comentário de grande importância: A função L recentemente definida é uma função das coordenadas e velocidades generalizadas, as quais têm caráter local; portanto, a sua regra de correspondência dependerá das coordenadas escolhidas. Em consequência, L é apenas uma representação local de uma outra função que atribui um valor real para cada terna $(\boldsymbol{q}; \dot{\boldsymbol{q}}; t)$. Rigorosamente falando, aquela função, que será denotada por $\mathscr{L}$, é a *verdadeira* função lagrangiana e é chamada de **função de Lagrange**.

Devido ao último comentário, a função de Lagrange $\mathscr{L}$ depende tanto das configurações $\boldsymbol{q}$ quanto dos objetos $\dot{\boldsymbol{q}}$ (os quais serão chamados simplesmente de *velocidades*) e também do tempo, isto é:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}(\boldsymbol{q}; \dot{\boldsymbol{q}}; t) \; .$$

Entretanto, o conjunto $\mathbb{Q}$ contém apenas às configurações $\boldsymbol{q}$, o que sugere que a função de Lagrange é uma função definida em um conjunto maior[12] cujos elementos sejam $(\boldsymbol{q}; \dot{\boldsymbol{q}})$. Em primeiro lugar, note-se que para cada configuração $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$ é possível obter diferentes velocidades $\dot{\boldsymbol{q}}$, as quais são determinadas pelas diferentes formas que o sistema pode evoluir a partir da configuração $\boldsymbol{q}$. Prova-se que o conjunto dessas velocidades tem a estrutura de um espaço vetorial (associado à configuração em consideração) denominado ***espaço tangente*** *à variedade* $\mathbb{Q}$ *no ponto* $\boldsymbol{q}$, e é denotado por $T_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$.

2.1.3 Velocidades como vetores tangentes e a variedade $T\mathbb{Q}$

Os elementos dos espaços $T_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$ são chamados de *vetores tangentes* e podem ser definidos em termos de *curvas* na variedade, que são mapas da forma $\lambda : I \to \mathbb{Q}$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. Um exemplo simples é o das curvas que provêm das

[12] Em geral, as velocidades não moram na variedade mesma, mas nos chamados espaços tangentes.

curvas integrais das equações do movimento[13], pois nesse caso as configurações tornam-se funções do tempo, isto é $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$. Para introduzir o conceito de vetor tangente considere-se um ponto fixo $\boldsymbol{q_0} = \lambda(t_0) \in \mathbb{Q}$ e uma função suave $\mathscr{F} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Agora, define-se a seguinte operação:

$$v_{\boldsymbol{q_0},\lambda}(\mathscr{F}) \doteq \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (\mathscr{F}^o\lambda) \ . \tag{2.8}$$

O operador $v_{\boldsymbol{q_0},\lambda} : C^\infty(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}$ é chamado de **vetor tangente** (em relação à curva λ) à variedade $\mathbb{Q}$ no ponto $\boldsymbol{q_0}$. Diz-se que $v_{\boldsymbol{q_0},\lambda} \in T_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$.

Às vezes também é usada a notação $v_{\boldsymbol{q_0},\lambda} \overset{!}{=} \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_{t_0}$. Para o caso particular que o vetor tangente é construído em relação a uma curva em $\mathbb{Q}$ que provém de uma das curvas integrais das equações de movimento (i.e., $\lambda(t) \overset{!}{=} \boldsymbol{q}(t)$) ter-se-á:

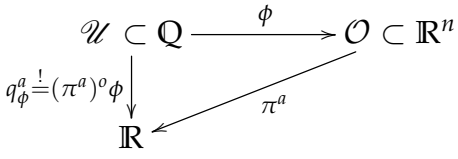
$$v_{\boldsymbol{q_0},\boldsymbol{q}} = \left(\frac{d\boldsymbol{q}}{dt}\right)_{t_0} \equiv \dot{\boldsymbol{q}}(t_0) \ . \tag{2.9}$$

Assim, as velocidades $\dot{\boldsymbol{q}}$ resultam ser os vetores tangentes em relação às curvas obtidas ao resolver as equações de movimento.

Não se deve perder de vista que dado um ponto $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$ contido em um conjunto $\mathscr{U}$, o mapa ϕ lhe atribui coordenadas locais segundo:

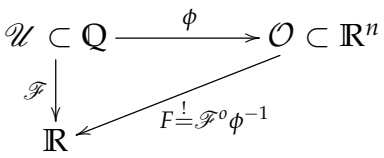
$$\phi(\boldsymbol{q}) = (q^1; \cdots ; q^n) \in \mathcal{O} \ ,$$

onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Considere-se a função $\pi^a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que mapeia a $n-$upla de coordenadas locais para a $a-$ésima componente; define-se a *função de projeção local*, $q^a_\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, como $q^a_\phi = (\pi^a)^o\phi$, a qual mapeia diretamente uma configuração em $\mathbb{Q}$ na sua $a-$ésima coordenada local atribuída pela carta $(\mathscr{U}, \phi)$.



[13] Lembre-se que dada uma equação diferencial chamamos de *curvas integrais* às soluções dessa equação; então, posto que as equações E-L são escritas em termos das coordenadas locais, as curvas integrais correspondentes terão também caráter local; mas para cada um delas é possível obter univocamente (via a inversa do mapa ϕ) uma curva na variedade $\mathbb{Q}$.

Por outro lado, dada uma função suave $\mathscr{F} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, a sua *representação local* é dada pela composição $F = \mathscr{F} \circ \phi^{-1}$, como é mostrado no diagrama seguinte:



Além disso, define-se a derivada de uma função $\mathscr{F} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, em relação à função q^a_ϕ, no ponto $\boldsymbol{q_0} \in \mathbb{Q}$ segundo:

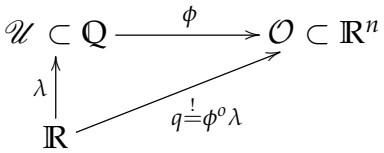
$$\left.\frac{\partial}{\partial q^a_\phi}\right|_{\boldsymbol{q_0}} \mathscr{F} \doteq \left.\frac{\partial F}{\partial q^a}\right|_{\phi(\boldsymbol{q_0})} , \tag{2.10}$$

Note-se que todos os objetos no lado esquerdo de (2.10) são definidos sobre a própria variedade $\mathbb{Q}$, enquanto que no lado direito aparecem as representações locais deles.

Pode-se ver que localmente o vetor tangente definido em (2.8) adota o sentido usual: Em primeiro lugar, se deve expressar (2.8) em termos das coordenadas locais[14]:

$$v_{\boldsymbol{q_0},\lambda}(\mathscr{F}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (\mathscr{F} \circ \lambda) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \left[(\mathscr{F} \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \lambda)\right] \overset{14}{\equiv} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} F = \left.\frac{\partial F}{\partial q^a}\right|_{\phi(\boldsymbol{q_0})} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} q^a , \tag{2.11}$$

onde $q(t) \overset{!}{=} (\phi \circ \lambda)(t)$, como é mostrado no diagrama embaixo:



Com isso $q^a(t)$ é a $a-$ésima componente local de $\boldsymbol{q}(t) = \lambda(t)$, e pode-se reescrever fazendo uso da função de projeção local q^a_ϕ. Então:

[14] Aqui se deve levar em conta que dada uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a sua *derivada total* $\frac{df}{dt}$ pode ser definida enquanto os elementos do argumento de f sejam funções do parâmetro t, isto é, $x^i = x^i(t)$. Isso último quer dizer que $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é realmente uma curva em $\mathbb{R}^n$. Em consequência, ter-se-á: $\frac{d}{dt} f(\vec{x}(t)) = \frac{d}{dt}(f \circ \vec{x})(t) \overset{!}{=} \frac{df}{dt}$.

$$v_{\boldsymbol{q}_0,\lambda}(\mathscr{F}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\left(q^a_\phi \circ \lambda\right)\frac{\partial F}{\partial q^a}\Big|_{\phi(\boldsymbol{q}_0)} \overset{(2.10)}{=} \left[\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\left(q^a_\phi \circ \lambda\right)\right]\frac{\partial}{\partial q^a_\phi}\Big|_{\boldsymbol{q}_0}\mathscr{F}\,. \tag{2.12}$$

De (2.8) se identifica que o fator entre colchetes na equação anterior corresponde a:

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t_0}\left(q^a_\phi \circ \lambda\right) = v_{\boldsymbol{q}_0,\lambda}(q^a_\phi) \overset{!}{=} v^a_{\boldsymbol{q}_0,\lambda}. \tag{2.13}$$

Com isso, (2.12) pode-se escrever simplesmente como:

$$v(\mathscr{F}) = v^a_{\boldsymbol{q}_0,\lambda}\frac{\partial}{\partial q^a_\phi}\Big|_{\boldsymbol{q}_0}\mathscr{F} \quad \Rightarrow \quad v_{\boldsymbol{q}_0,\lambda} = v^a_{\boldsymbol{q}_0,\lambda}\frac{\partial}{\partial q^a_\phi}\Big|_{\boldsymbol{q}_0}\,. \tag{2.14}$$

Evidentemente os $\dfrac{\partial}{\partial q^a_\phi}\Big|_{\boldsymbol{q}_0}$ são linearmente independentes, y como qualquer vetor tangente pode-se escrever na forma (2.14), ter-se-á que o conjunto $\left\{\dfrac{\partial}{\partial q^a_\phi}\Big|_{\boldsymbol{q}_0}\right\}_{a=1}^{n}$ constitui uma base local para o espaço tangente $T_{\boldsymbol{q}_0}\mathbb{Q}$.

Por outro lado, de (2.11) se tem que as componentes do vetor tangente $v_{\boldsymbol{q}_0,\lambda} \in T_{\boldsymbol{q}_0}\mathbb{Q}$, na base $\left\{\dfrac{\partial}{\partial q^a}\Big|_{\boldsymbol{q}_0}\right\}_{a=1}^{n}$, resultam ser $v^a_{\boldsymbol{q}_0,\lambda} = \dfrac{d}{dt}\Big|_{t_0} q^a = \dot{q}^a(t_0)$ (com $\lambda(t_0) = \boldsymbol{q}_0$) e lembrando que a definição usual de vetor tangente a uma curva $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ é dada pela expressão $\vec{T}(t) = \dfrac{d}{dt}\vec{\lambda}(t) = \dfrac{d}{dt}(q^1(t); \cdots ; q^n(t))$ encontra-se que, com efeito, as componentes locais dos elementos dos espaços tangentes $T_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$ coincidem com as componentes dos vetores tangentes às curvas (locais) no sentido usual.

Pelo explicado nos parágrafos anteriores, conclui-se que, fixado um ponto $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$, os $\dot{q}^a$ são as componentes dos vetores tangentes (no sentido usual) às representações locais das curvas (suaves) em $\mathbb{Q}$ que passam pelo ponto $\boldsymbol{q}$ e que têm como parâmetro ao tempo t.

Até este ponto, fica claro que cada $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$ tem associado um espaço vetorial $T_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$, denominado *espaço tangente*, que contém todas as velocidades possíveis a partir de uma dada configuração $\boldsymbol{q}$. Mais ainda, é possível definir um novo conjunto $T\mathbb{Q}$, que está composto de $\mathbb{Q}$ junto a todos os espaços tangentes $T_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$, da seguinte

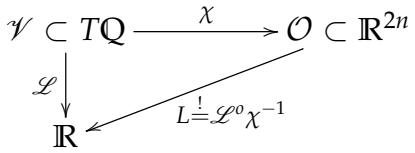
maneira:

$$T\mathbb{Q} \doteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\} \times T_q\mathbb{Q} \equiv \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{(q;\dot{q}) : \dot{q} \in T_q\mathbb{Q}\} \ .$$

Esse conjunto denomina-se **fibrado tangente** da variedade de configuração e pode-se provar que tem a estrutura de uma variedade $2n-$dimensional [21]. Devido a como foi construído, cada ponto de $T\mathbb{Q}$ é especificado pela dupla $(q;\dot{q})$.

Neste ponto é preciso fazer o seguinte comentário: Dado o par $(q;\dot{q}) \in T\mathbb{Q}$, é sabido que $\dot{q}$ é um elemento[15] do espaço tangente $T_q\mathbb{Q}$; isto é, trata-se de um vetor tangente em relação a alguma das curvas que passam pelo ponto $q \in \mathbb{Q}$. Então, posto que as configurações tornam-se funções do tempo quando são imagens de uma curva determinada $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, é precisamente essa curva que fixa o vetor tangente $\dot{q}$.

Com este novo conceito, a função de Lagrange $\mathscr{L}$ poder ser vista como um mapa do fibrado tangente da variedade de configuração para os reais, isto é: $\mathscr{L} : T\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, enquanto não seja explícita no tempo.



No diagrama acima $(\mathscr{V},\chi)$ é uma carta de $T\mathbb{Q}$. Como último comentário, se for o caso de uma lagrangiana dependente do tempo: $\mathscr{L} : \mathbb{R} \times T\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

2.1.4 Princípio de Hamilton

As equações de movimento de Lagrange foram também obtidas por Leonard Euler por meio do que hoje é conhecido como *cálculo variacional*, onde é considerado o seguinte funcional:

$$S[q(t)] \doteq \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t);\dot{q}(t);t\big)dt \ , \tag{2.15}$$

o qual recebe o nome de **ação** e tem dimensão de energia $\times$ tempo. Aqui novamente $q \equiv (q^1;\cdots;q^n)$, mas neste caso os $q^a(t)$ são as coordenadas paramétricas

[15] Lembre-se que $\dot{q}$ se refere á notação inserida em (2.9).

de alguma das trajetórias possíveis e a função $L = L(q; \dot{q}; t)$ é a lagrangiana local.

O princípio variacional considerado nesta abordagem é chamado **principio de Hamilton** e estabelece o seguinte:

"Dadas duas configurações nos instantes t_1 e t_2, de todas as trajetórias possíveis que as conectam, o sistema percorrerá aquela na qual a ação apresenta um valor extremo (habitualmente mínimo[16])".

A trajetória obtida ao resolver o problema variacional é chamada de *trajetória física*.

Em virtude da condição necessária para um valor extremo fornecida pelo cálculo variacional se deve exigir que a variação do funcional ação seja nula. No apêndice B é mostrado que tanto para transformações ativas quanto para transformações passivas para o sistema físico em estudo, as equações que determinam a solução para o problema variacional acabam sendo as mesmas.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta \dot{q}^a \right) dt = 0 \, ,$$

levando em conta que $\delta \dot{q}^a = \dfrac{d}{dt} \delta q^a$, pode-se fazer:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a \right] dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^a} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right] \delta q^a dt = 0 \, ; \end{aligned}$$

devido à condição de extremos fixos o primeiro termo na equação acima é zero. Logo, em virtude do lema fundamental do cálculo variacional, e tendo em mente que os δq^a são independentes, terão sido obtidas as equações:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) = 0 \qquad ; \qquad a = 1, \cdots, n \, ;$$

as quais coincidem com (2.7), razão pela qual habitualmente são chamadas de **equações de Euler-Lagrange**. Estas equações podem ser escritas de maneira mais compacta por meio da *derivada funcional* (em relação a alguma das funções que

[16] É por essa razão que é muito comum encontrar na literatura o nome *princípio da ação mínima* para o princípio de Hamilton.

estão no argumento) do funcional ação, a qual está relacionada com a variação do próprio funcional da seguinte maneira:

$$\delta S[q^1, \cdots, q^n] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta}{\delta q^a} S[q^1, \cdots, q^n] \right) \delta q^a dt \ .$$

Logo, comparando com $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \right] \delta q^a dt$, encontramos:

$$\frac{\delta}{\delta q^a} S[q^1, \cdots, q^n] \equiv \frac{\delta S}{\delta q^a} = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \ .$$

Vale ressaltar que para resolver essas equações são requeridas n condições iniciais para as coordenadas generalizadas e n condições iniciais para as velocidades generalizadas; quer dizer, precisa-se dispor de $2n$ condições iniciais que caracterizem o estado do sistema em um instante dado.

2.1.5 Invariância das equações E-L

Uma vez que trata-se de um problema variacional com extremos fixos, a expressão da lagrangiana local poderia não ser única. Considere-se uma nova lagrangiana da forma:

$$L'(q; \dot{q}; t) = L(q; \dot{q}; t) - \frac{d}{dt} f(q; t) \ ,$$

onde f é qualquer função (é claro, diferenciável) das coordenadas generalizadas e do tempo. O funcional ação associado a essa lagrangiana será:

$$S'[q] = \int_{t_1}^{t_2} L'(q; \dot{q}; t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q; \dot{q}; t) dt - f(q; t) \Big|_{t_1}^{t_2} = S[q] - f\big(q(t_2); t_2\big) + f\big(q(t_1); t_1\big) \ .$$

Usando que a variação de um funcional é dada segundo segundo (B.2) ter-se-á:

$$\begin{aligned} \delta S' &= \frac{\partial}{\partial \alpha} S'[q(t) + \alpha \delta q(t)] \Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} S[q + \alpha \delta q] \Big|_{\alpha=0} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big[f\big(q(t_2) + \alpha \delta q(t_2); t_2\big) - f\big(q(t_1) + \alpha \delta q(t_1); t_1\big) \Big] \Big|_{\alpha=0} \ . \end{aligned}$$

Imediatamente reconhece-se que o primeiro somando na expressão anterior corresponde à variação da ação associada à lagrangiana local L (ou seja, δS), enquanto que o segundo somando resulta ser nulo devido à condição de extremos fixos

($\delta q^a(t_1) = \delta q^a(t_2) = 0$); assim, se obtém que $\delta S' = \delta S$. Do anterior, pode-se concluir que impondo a condição necessária para determinar a trajetória física percorrida pelo sistema, ambas lagrangianas fornecerão as mesmas equações de movimento.

Inclusive, desenvolvendo a condição $\delta S' = 0$ (ou partindo das equações E-L para a lagrangiana L') se recupera naturalmente as equações de movimento para a lagrangiana L :

$$\frac{\partial L'}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^a}\right) = 0 \quad , \quad L' = L - \left(\frac{\partial f}{\partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial f}{\partial t}\right).$$

Logo, substituindo a expressão para L':

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^b}\dot{q}^b - \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial t} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial f}{\partial q_b}\delta^b_a\right) &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^b}\dot{q}^b - \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial t} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial f}{\partial q^a}\right) &= 0 \\
\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial q^b}\dot{q}^b - \frac{\partial^2 f}{\partial q^a \partial t} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial q^b \partial q^a}\dot{q}^b - \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q^a} &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Dessa maneira, foi mostrado que a transformação $L \to L' = L - \dfrac{df}{dt}$, com $f = f(q;t)$ é uma condição suficiente para que as equações de movimento fiquem invariantes sob essa transformação. Além disso, pode-se provar que também é uma condição necessária:

Considere-se que as lagrangianas locais L e L' fornecem as mesmas equações de movimento; também, definam-se as seguintes funções de $(q;\dot{q};\ddot{q};t)$:

$$\Lambda_a \equiv -\frac{\delta S}{\delta q^a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} \qquad , \qquad \Lambda'_a \equiv -\frac{\delta S'}{\delta q^a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q^a}\,.$$

Assim, para que as equações de movimento sejam exatamente as mesmas se deve cumprir que $\Lambda_a = \Lambda'_a$. Chame-se $\Psi = L - L'$, então:

$$\Lambda_a - \Lambda'_a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial \Psi}{\partial q^a} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a}\ddot{q}^b + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^b \partial \dot{q}^a}\dot{q}^b + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \dot{q}^a} - \frac{\partial \Psi}{\partial q^a} = 0\,. \quad (2.16)$$

A equação (2.16) deve ser válida para valores quaisquer das variáveis locais q^a, $\dot{q}^a$ e $\ddot{q}^a$. Ademais, uma vez que Ψ é definida como a diferença de duas lagrangianas, é claro que dependerá apenas das variáveis q^a, $\dot{q}^a$ e t. Note-se que o único termo que contém acelerações generalizadas é o primeiro (que na verdade é uma combinação linear, já que há soma sobre os índices b), e pelo último comentário se deve exigir que os coeficientes respectivos sejam todos zero, ou seja:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a} = 0 \ , \text{ para quaisquer } a, b = 1, \cdots, n \ .$$

Em particular, se $a = b$ ter-se-á que $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^a} = 0$, o qual implica que Ψ deve ter a forma:

$$\Psi(q; \dot{q}; t) = \dot{q}^a M_a(q; t) + N(q; t) \ .$$

Substituindo em (2.16) se obtém:

$$\frac{\partial M_a}{\partial q^b}\dot{q}^b + \frac{\partial M_a}{\partial t} - \dot{q}^b \frac{\partial M_b}{\partial q^a} - \frac{\partial N}{\partial q^a} = \dot{q}^b \left(\frac{\partial M_a}{\partial q^b} - \frac{\partial M_b}{\partial q^a} \right) + \frac{\partial M_a}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial q^a} = 0 \ .$$

Uma vez que tanto M_a quanto N independem das velocidades $\dot{q}^a$ se deve cumprir que $\dfrac{\partial M_a}{\partial q^b} - \dfrac{\partial M_b}{\partial q^a} = 0$, em consequência:

$$M_a = \frac{\partial f}{\partial q^a} \qquad , \qquad M_b = \frac{\partial f}{\partial q^b} \ .$$

Com isto:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial q^a} \right) = \frac{\partial N}{\partial q^a} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \frac{\partial f}{\partial q^a} = \frac{\partial \varphi}{\partial q^a} \ .$$

Das expressões obtidas para M_a e N, a função Ψ resulta:

$$\Psi = \dot{q}^a \frac{\partial f}{\partial q^a} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \dot{q}^a \frac{\partial \varphi}{\partial q^a} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \ .$$

Claramente a expressão obtida para Ψ corresponde à derivada total (em relação a t) de uma função $\varphi = \varphi(t; q)$. Então:

$$\Psi = L - L' = \frac{d\varphi}{dt} \ .$$

Assim, se conclui que uma condição necessária e suficiente para que duas lagrangi-

anas locais forneçam as mesmas equações de movimento é que essas lagrangianas difiram na derivada total de uma função das coordenadas locais q^a e da variável t.

Aqui um comentário adicional: Pode ser que a lagrangiana local seja construída tendo escolhido coordenadas sujeitas a vínculos holonômicos;[17] se prova que essa lagrangiana pode ser reescrita extraindo um somando que seja uma derivada total (em relação ao tempo) de alguma função. De modo que, pelo explicado no parágrafo anterior, o outro somando pode ser considerado também como outra lagrangiana e será função de apenas as *verdadeiras* coordenadas e velocidades generalizadas.

Outro detalhe importante é que para um sistema de partículas independentes a lagrangiana local do sistema será simplesmente a soma das lagrangianas locais de cada uma das partículas; isto é, para subsistemas que não interagem uns com outros, as lagrangianas são aditivas.

2.1.6 Condição de não-singularidade

Como último comentário, é possível encontrar uma condição que deve ser atendida pela lagrangiana para garantir que o sistema constituído pelas equações de movimento seja solúvel.

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial \dot{q}^a}\dot{q}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a}\ddot{q}^{\,b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\ddot{q}^{\,b} = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\dot{q}^b \,. \tag{2.17}$$

Nesta última expressão pode-se identificar que o termo $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}$ corresponde ao elemento (ab) da matriz hessiana da lagrangiana local. Desta maneira, as equações

[17] Consequentemente, essas coordenadas não são propriamente generalizadas; então, isso sugere que pode-se *melhorar* a escolha das coordenadas generalizadas.

em (2.17) podem ser expressas matricialmente, como é mostrado a seguir:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}^1 \\ \vdots \\ \ddot{q}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial q^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial q^n} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial q^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial q^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial q^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Da equação (2.18) fica claro que para que o sistema constituído pelas equações de Euler-Lagrange possa ser resolvido para as acelerações é suficiente que a matriz hessiana seja invertível. Nesses casos diz-se que o sistema é regular ou não-singular[18].

2.2 Formulação hamiltoniana

Para um sistema de n graus de liberdade as equações de movimento fornecidas pela formulação lagrangiana são n equações diferenciais independentes de segunda ordem, para as quais são requeridas $2n$ condições iniciais. A abordagem proposta por Hamilton consiste em transformar as n equações de Euler-Lagrange em $2n$ equações diferenciais de primeira ordem para as quais também serão requeridas $2n$ condições iniciais. É preciso destacar que o fato de que as equações E-L sejam de segunda ordem é devido ao termo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial \dot{q}^a}\ddot{q}^b + \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial \dot{q}^a}\dot{q}^b \ ;$$

então, a fim de não ter termos de segunda ordem nas derivadas, é requerido substituir as n velocidades generalizadas $\dot{q}^a$ por novas variáveis, mas sem perda de informação. Além disso, espera-se que as soluções das novas equações de movimento determinem a mesma dinâmica obtida na abordagem lagrangiana. O procedimento que permite atingir esse objetivo, e por conseguinte estabelece uma correspondência biunívoca entre ambas abordagens, é o que em matemática é conhecido como *transformação de Legendre*, a qual será desenvolvida em relação às variáveis $\dot{q}^a$, substituindo-as pelas novas *variáveis conjugadas* p_a. É muito importante ressaltar que a transformação de Legendre está bem definida apenas no caso

[18] Outra forma de entender a não-singularidade é em termos do posto: Uma matriz $n \times n$ é invertível se e somente se o posto dela é igual a n.

regular; isto é, quando a lagrangiana é não-singular; em consequência supor-se-á que essa condição é atendida.

2.2.1 Momentos canônicos e equações de Hamilton

Em conformidade com a teoria da transformação de Legendre para uma função multivariável, considerando apenas os $\dot{q}^a$ como variáveis ativas[19], a transformada de Legendre da função lagrangiana local $L(q;\dot{q};t) : Q \times T \to \mathbb{R}$ é uma nova função[20] $H(q;p;t) : Q \times T^* \to \mathbb{R}$ é chamada de **função hamiltoniana local** do sistema e é dada por[21]:

$$H(q;p;t) \doteq p_a \dot{q}^a(q;p) - L\big(q;\dot{q}(q;p)\big) \,, \tag{2.19}$$

onde os p_a são as variáveis conjugadas relativas às variáveis ativas $\dot{q}^a$, e são definidas segundo:

$$p_a \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \,, \tag{2.20}$$

essas variáveis recebem o nome de *momentos canônicos conjugados*. Note-se que as velocidades generalizadas dentro do argumento da função lagrangiana são expressas como funções das coordenadas e os momentos e consequentemente L será função de apenas as coordenadas generalizadas e os momentos canônicos. Logo, é possível escrever:

$$dL\big(q;\dot{q}(q;p)\big) = \frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}}_{p_a} d\dot{q}^a(q;p) + \frac{\partial L}{\partial t} dt \,. \tag{2.21}$$

[19] Denominam-se assim aquelas variáveis que, no caso de fazer a transformação de Legendre em relação a apenas algumas das variáveis no argumento da função, serão substituídas pelas variáveis conjugadas.

[20] Aqui Q é o espaço cujos elementos são as coordenadas locais q^a (espaço de configuração) enquanto T é o espaço das componentes locais das velocidades. Cada um desses espaços é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

[21] Similarmente a como foi feito para as coordenadas e velocidades generalizadas, será usada a notação $p \overset{!}{=} (p_1;\cdots;p_n)$.

Tomando o diferencial de (2.19) e substituindo (2.20) obter-se-á[22]:

$$dH(q;p;t) = p_a d\dot{q}^a + dp_a \dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a - p_a d\dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^a} dq^a + dp_a \frac{\partial H}{\partial p_a} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a + dp_a \dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial t} dt \,,$$

Com isto pode-se escrever:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial q^a} + \frac{\partial H}{\partial q^a}\right) dq^a + dp_a \left(\frac{\partial H}{\partial p_a} - \dot{q}^a\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t}\right) dt = 0 \,,$$

e levando em conta que nesta abordagem as variáveis q^a, p_a e t são independentes umas das outras, ter-se-ão as seguintes igualdades:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial q^a} = -\dfrac{\partial H}{\partial q^a} \quad , & (2.22) \\ \dot{q}^a = \dfrac{\partial H}{\partial p_a} \quad , & (2.23) \\ \dfrac{\partial L}{\partial t} = -\dfrac{\partial H}{\partial t} \quad . & (2.24) \end{cases}$$

Por outro lado, derivando (2.20) em relação ao tempo se obtém: $\dot{p}_a = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right)$; logo, em conformidade com as equações E-L ter-se-á:

$$\dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial q^a} \,, \tag{2.25}$$

e fazendo uso de (2.22) resulta:

$$\dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \,. \tag{2.26}$$

As equações (2.23) e (2.26) são de primeira ordem e determinam a evolução temporal das variáveis canônicas q e p em termos das derivadas parciais da hamiltoniana local. Essas equações são chamadas de **equações canônicas de Hamilton:**

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad , \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \,. \tag{2.27}$$

As equações em (2.27) são as equações de movimento nesta formulação e determi-

[22] Foi omitido o argumento $(q;p)$ nos $\dot{q}^a$ para simplificar a escrita.

nam a dinâmica do sistema.

Resulta interessante ver que as equações canônicas de Hamilton também podem ser obtidas a partir do princípio variacional da ação estacionária (ou princípio de Hamilton) que foi usado na formulação lagrangiana, o qual estabelece que a trajetória física do sistema é obtida quando o funcional ação $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ tem variação nula, isto é, $\delta S = 0$. Em conformidade com (2.19) a ação pode ser escrita na seguinte forma:

$$S[q,p] = \int_{t_1}^{t_2} \left(p_a \dot{q}^a - H(q;p)\right) dt \ .$$

Então, a variação dessa ação será dada por:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta(p_a \dot{q}^a) dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta H dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} (p_a \delta \dot{q}^a + \delta p_a \dot{q}^a) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial H}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial H}{\partial p_a} \delta p_a \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(p_a \frac{d}{dt} \delta q^a + \dot{q}^a \delta p_a \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial H}{\partial p_a} \delta p_a \right) \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} (p_a \delta q^a) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left[\dot{p}_a \delta q^a - \dot{q}^a \delta p_a + \frac{\partial H}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial H}{\partial p_a} \delta p_a \right] dt \\
&= p_a \delta q^a \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{p}_a + \frac{\partial H}{\partial q^a} \right) \delta q^a dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta p_a \left(\dot{q}^a - \frac{\partial H}{\partial p_a} \right) dt \ .
\end{aligned}$$

Da condição de extremos fixos é imediato ver que o primeiro somando do lado direito da última equação torna-se zero. Logo, impondo que $\delta S = 0$ ter-se-á:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta p_a \left(\dot{q}^a - \frac{\partial H}{\partial p_a} \right) - \left(\dot{p}_a + \frac{\partial H}{\partial q^a} \right) \delta q^a \right] dt = 0 \ ,$$

donde, sendo independentes δq^a y δp_a, se obtém:

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a} \qquad , \qquad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a}$$

As quais são precisamente as equações de Hamilton apresentadas em (2.27). Este fato deixa em evidência a equivalência entre as abordagens lagrangiana e hamiltoniana. É importante ressaltar que neste caso foi aplicado o princípio de Hamilton em um espaço que tem por elementos às variáveis canônicas $(q;p)$, as quais são, por definição nesta abordagem, independentes umas com as outras; por sua vez,

na formulação lagrangiana, o princípio de Hamilton foi desenvolvido em uma representação local da variedade de configuração ($\mathbb{Q}$) que tem como coordenadas independentes os q^a, o qual foi chamado de espaço de configuração (Q).

2.2.2 Hamiltoniana e energia mecânica

Pela forma na que está definida, a hamiltoniana local H tem a mesma dimensão que a lagrangiana local L, e sendo essa última a diferença entre as energias cinética e potencial, a dimensão dela é também de energia. Mais ainda, lembrando que já tinha sido obtido:

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial q^a}dq^a + dp_a\dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial t}dt \ ,$$

e fazendo uso de (2.25), pode-se escrever:

$$dH = -\dot{p}_a dq^a + dp_a\dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial t}dt = -\dot{p}_a(\dot{q}^a dt) + (\dot{p}_a dt)\dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial t}dt = -\frac{\partial L}{\partial t}dt \overset{(2.24)}{=} \frac{\partial H}{\partial t}dt \ .$$

Assim, a seguinte relação foi obtida:

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial}{\partial t}H \ . \tag{2.28}$$

A equação (2.28) mostra que a hamiltoniana local resulta ser uma quantidade conservada enquanto não dependa explicitamente do tempo[23].

Por outro lado, enquanto a energia cinética seja uma função quadrática nas velocidades é fácil ver que é uma função $2-$homogênea de $\dot{q}$, pois:

$$T(\dot{q}) \sim \dot{q}^2 \quad \Rightarrow \quad T(\alpha\dot{q}) \sim \alpha^2\dot{q}^2 = \alpha^2 T(\dot{q}) \ .$$

Então, em virtude do teorema de Euler para funções homogêneas[24], ter-se-á:

$$\dot{q}^a\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = 2T \ . \tag{2.29}$$

Além disso, levando em conta que para um sistema sem forças não-conservativas a lagrangiana é $L = T - V$, (onde a energia potencial V independe explicitamente

[23] Além disso, em conformidade com (2.24), vemos que o fato de ter uma lagrangiana não-explicita no tempo é uma condição suficiente para garantir que a hamiltoniana correspondente seja conservada no tempo.

[24] A declaração e a prova deste teorema são apresentadas no apêndice C.

das velocidades $\dot{q}$) pode-se afirmar que $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^a} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$, e substituindo em (2.29) ter-se-á que $\dot{q}^a \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = 2T$. Dessa maneira, a hamiltoniana de um sistema fechado pode ser escrita como:

$$H(q;p) = p_a \dot{q}^a - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^a - L = 2T - L = 2T - (T - V) = T + V \ ,$$

o qual corresponde à energia mecânica do sistema, que sob as condições impostas é uma quantidade conservada. Isto quer dizer que para um sistema no qual estão presentes apenas forças conservativas a hamiltoniana local coincide com a energia mecânica do sistema.

2.2.3 Fibrado cotangente: a variedade de fase

Na formulação lagrangiana se viu que a lagrangiana L é apenas uma representação local de outra função $\mathscr{L}$, definida sobre o conjunto $T\mathbb{Q}$, que foi chamada de função de Lagrange. Da mesma maneira, a hamiltoniana H também é uma representação local de outra função $\mathscr{H}$ que será chamada de **função de Hamilton** e está definida sobre uma variedade $2n-$dimensional conhecida como *variedade de fase*.

Lembre-se que quando a função de Lagrange não é explícita no tempo, a sua representação local (via o mapa χ) L tem no seu argumento à $2n-$upla $(q;\dot{q})$, a qual pertence a um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$ estabelecido pela carta $(\mathscr{V},\chi)$, onde $(\boldsymbol{q};\dot{\boldsymbol{q}}) \in \mathscr{V}$. Na presente abordagem, uma hamiltoniana local que não depende explicitamente do tempo terá no seu argumento à $2n-$upla $(q;p)$ que pertence a um espaço $2n-$dimensional que recebe o nome de *espaço de fase*[25]. Por outro lado, já é sabido que cada ponto $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$ tem associado um espaço tangente $T_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$ cujos elementos (vetores tangentes) têm por componentes a todas as possíveis velocidades generalizadas associadas a esse ponto; por outro lado, a transformação de Legendre atribui a cada velocidade generalizada $\dot{q}^a$ o momento canônico conjugado p_a, o qual sugere a existência de uma coleção de espaços vetoriais cujos elementos $\boldsymbol{p}$ sejam objetos que tenham por componentes locais a todos os momentos canônicos conjugados que correspondem, via a transformação de Legendre, às velocidades generalizadas na família de espaços tangentes $T_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$ que constituem $T\mathbb{Q}$. Esses novos espaços vectoriais são chamados de *espaços cotangentes* à variedade $\mathbb{Q}$ e são

[25] Em analogia com o espaço de configuração, o espaço de fase é isomorfo a $\mathbb{R}^{2n}$ y é nesse sentido que diz-se que $(q;p)$ são as componentes dos elementos do espaço de fase.

denotados por $T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$, para cada $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$. É possível provar que estes espaços resultam ser duais aos espaços tangentes[26]. Os elementos do espaço cotangente $T^*_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ são chamados de *vetores cotangentes* ou simplesmente *covetores* e são aplicações lineares que mapeiam vetores de $T_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ em números reais.

A base local $\left\{ e_a(\boldsymbol{q_0}) \overset{!}{=} \left.\dfrac{\partial}{\partial q^a_\phi}\right|_{\boldsymbol{q_0}} \right\}_{a=1}^{n}$ do espaço tangente $T_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ induz uma base local $\left\{ \tilde{e}^a(\boldsymbol{q_0}) \right\}_{a=1}^{n}$ para o espaço cotangente $T^*_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ segundo a condição:

$$\tilde{e}^a(\boldsymbol{q_0})\big(e_b(\boldsymbol{q_0})\big) = \delta^a_b \ .$$

Lembre-se que dada uma função $\mathscr{G} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, a diferencial dela no ponto $\boldsymbol{q_0}$ (às vezes erroneamente chamada de *pushforward* e denotada por $\mathscr{G}_{*\boldsymbol{q_0}}$) é o mapa[27] $d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}} : T_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q} \to T_{\mathscr{G}(\boldsymbol{q_0})}\mathbb{R}$, definido por:

$$d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}(v_{\boldsymbol{q_0},\lambda}) = v_{\boldsymbol{q_0},\lambda}(\mathscr{G}) \ . \tag{2.30}$$

Em particular, para a função de projeção local $q^a_\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$:

$$dq^a_\phi(v_{\boldsymbol{q_0},\lambda}) = v_{\boldsymbol{q_0},\lambda}(q^a_\phi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} (q^a_\phi \ {}^o\lambda) \overset{(2.13)}{=} v^a_{\boldsymbol{q_0},\lambda} \ .$$

Considere-se agora um covetor $\varphi_{\boldsymbol{q_0}} \in T^*_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$, então[28]:

$$\varphi_{\boldsymbol{q_0}}(v_{\boldsymbol{q_0}}) \overset{28}{\equiv} \varphi(v) = \varphi(v^a e_a) = \varphi(e_a)v^a = \varphi(e_a)\big(dq^a_\phi(v)\big) = \big(\varphi(e_a)dq^a_\phi\big)(v) \ ;$$

logo, fazendo $\varphi_a \overset{!}{=} \varphi(e_a)$ se obtém:

$$\varphi(v) = \big(\varphi_a dq^a_\phi\big)(v) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi_a dq^a_\phi \ .$$

Assim, resulta que um elemento arbitrário de $T^*_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ pode ser escrito como combinação linear dos objetos $\left. dq^a_\phi \right|_{\boldsymbol{q_0}}$, os quais são evidentemente linearmente independentes.

[26] De fato, a própria definição de transformação de Legendre estabelece que o espaço conformado pelos espaços cotangentes é o dual do espaço que foi denotado por T no começo da subseção 2.2.1, pois $H : Q \times T^* \to \mathbb{R}$.

[27] Chamado também por vários autores de mapa tangente.

[28] A fim de fazer mais simples a escrita serão omitidos os índices $\boldsymbol{q_0}$.

Além disso, note-se o seguinte:

$$dq^a_\phi\left(\frac{\partial}{\partial q^b_\phi}\right) = \frac{\partial}{\partial q^b_\phi}(q^a_\phi) \overset{(2.10)}{=} \frac{\partial q^a}{\partial q^b} = \delta^a_b \ ,$$

que é a condição que permite afirmar que os $\tilde{e}^a(\boldsymbol{q_0}) = dq^a_\phi\Big|_{\boldsymbol{q_0}}$, com efeito, constituem uma base para o espaço cotangente $T^*_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$.

Ademais, observe-se o seguinte:

$$\varphi(v) = (\varphi_a\tilde{e}^a)(v^b e_b) = \varphi_a v^b \tilde{e}^a(e_b) = \varphi_a v^b \delta^a_b = \varphi_a v^a \ . \tag{2.31}$$

Isto é, a aplicação do covetor $\varphi \in T^*_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ sobre o vetor $v \in T_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ pode-se expressar como uma contração das componentes locais desses objetos.

A partir da definição do mapa $d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}} : T_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ apresentada em (2.30) é possível mostrar que se trata de uma aplicação lineal, pois para $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in T_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$ arbitrários ter-se-á:

$$d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}(c_1v_1 + c_2v_2) = (c_1v_1 + c_2v_2)\mathscr{G} = c_1v_1(\mathscr{G}) + c_2v_2(\mathscr{G}) = c_1 d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}(v_1) + c_2 d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}(v_2) \ .$$

Com isto, $d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}$ se comporta como um *vetor dual* ou *covetor*, e por tanto $d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}} \in T^*_{\boldsymbol{q_0}}\mathbb{Q}$. Então:

$$d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}} = (d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}})_a dq^a_\phi\Big|_{\boldsymbol{q_0}} \ , \text{ com } \ (d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}})_a = d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}\left(\frac{\partial}{\partial q^a_\phi}\Big|_{\boldsymbol{q_0}}\right) \overset{(2.30)}{=} \frac{\partial}{\partial q^a_\phi}\Big|_{\boldsymbol{q_0}}\mathscr{G} \overset{(2.10)}{=} \frac{\partial G}{\partial q^a}\Big|_{\phi(\boldsymbol{q_0})} \ ,$$

onde $G = \mathscr{G}^o\phi^{-1}$ é a representação local de $\mathscr{G}$ nas coordenadas locais q^a atribuídas pelo mapa $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^n$. Daqui que o covetor $d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}$ se escreve como:

$$d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}} = \frac{\partial G}{\partial q^a}\Big|_{\phi(\boldsymbol{q_0})} dq^a_\phi\Big|_{\boldsymbol{q_0}} \ , \tag{2.32}$$

donde as componentes locais de $d\mathscr{G}_{\boldsymbol{q_0}}$ resultam ser as mesmas componentes do gradiente da sua representação local G no ponto $\phi(\boldsymbol{q_0}) \in \mathbb{R}^n$.

Por outro lado, em analogia a como foi construído o fibrado tangente $T\mathbb{Q}$, define-se o *fibrado cotangente* da variedade de configuração, ou **variedade de fase**,

$T^*\mathbb{Q}$ como:

$$T^*\mathbb{Q} \doteq \bigcup_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Q}} \{\boldsymbol{q}\} \times T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q} \equiv \bigcup_{\boldsymbol{q}\in\mathbb{Q}} \{(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p}) : \boldsymbol{p} \in T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}\}.$$

É possível mostrar que o conjunto $T^*\mathbb{Q}$ também tem estrutura de uma variedade diferenciável $2n-$dimensional, para isso bastará construir o seguinte atlas [22]:

Seja $(\mathscr{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ uma carta local em $\mathbb{Q}$, defina-se a seguinte bijeção[29]:

$$\varphi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \bigcup_{\boldsymbol{q}\in\mathscr{U}_\alpha} \{\boldsymbol{q}\} \times T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q} \quad , \quad (\boldsymbol{q}; p_1, \cdots, p_n) \overset{\varphi_\alpha}{\longmapsto} \Big(\boldsymbol{q}\ ;\ p_a \tilde{e}^a(\boldsymbol{q})\Big)\ ,$$

onde $(p_1; \cdots; p_n)$ são as coordenadas locais de $\boldsymbol{p} \in T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$ na base $\{\tilde{e}^a_\alpha(\boldsymbol{q}) = dq^a_{\phi_\alpha}\big|_{\boldsymbol{q}}\}_{a=1}^n$. Logo define-se a seguinte função[30]:

$$\psi_\alpha = (\phi_\alpha, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})^o \varphi_\alpha^{-1} : \bigcup_{\boldsymbol{q}\in\mathscr{U}_\alpha} \{\boldsymbol{q}\} \times T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q} \longrightarrow \phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^n\ ,$$

onde $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$ é a função identidade no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Fazendo $\mathscr{W}_\alpha \overset{!}{=} \bigcup_{\boldsymbol{q}\in\mathscr{U}_\alpha} \{\boldsymbol{q}\} \times T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$, ter-se-á que $(\mathscr{W}_\alpha, \psi_\alpha)$ é uma carta para $T^*\mathbb{Q}$ tal que para $\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{q};\boldsymbol{p}) \in \mathscr{W}_\alpha$ se tem que $\psi(\boldsymbol{q};\boldsymbol{p}) = (q^1, \cdots, q^n; p_1, \cdots, p_n)$. Por outro lado, note-se que dadas duas cartas $(\mathscr{U}_\alpha; \phi_\alpha)$ e $(\mathscr{U}_\beta; \phi_\beta)$ de $\mathbb{Q}$, se satisfaz o seguinte:

$$\psi_\alpha(\mathscr{W}_\alpha \cap \mathscr{W}_\beta) = \phi_\alpha(\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta) \times \mathbb{R}^n\ ,$$

que é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Agora considere-se um $\boldsymbol{q} \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ tal que:

$$\phi_\alpha(\boldsymbol{q}) = (q^1; \cdots; q^n) \qquad , \qquad \phi_\beta(\boldsymbol{q}) = (q'^1; \cdots; q'^n)\ .$$

Considerando a função de projeção local $q^a_{\phi_\alpha} : \mathscr{U}_\alpha \subset \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ em (2.32), ter-se-á:

$$dq^a_{\phi_\alpha}\big|_{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial}{\partial q'^b}(q^a_{\phi_\alpha}\ {}^o\phi_\beta^{-1})\Big|_{\phi_\beta(\boldsymbol{q})} dq^b_{\phi_\beta}\big|_{\boldsymbol{q}} \quad \text{ou} \quad \tilde{e}^a_\alpha(\boldsymbol{q}) = \underbrace{\frac{\partial q^a}{\partial q'^b}\Big|_{\phi_\beta(\boldsymbol{q})}}_{M^a{}_b} \tilde{e}^b_\beta(\boldsymbol{q})\ .$$

[29] Essa bijeção é similar à que usualmente é usada para provar que um $\mathbb{R}-$espaço vetorial $n-$dimensional é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

[30] Sendo $\phi_\alpha, \mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$ e φ_α bijeções, ψ_α também sera uma bijeção.

Então, para um $\boldsymbol{p} \in T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$:

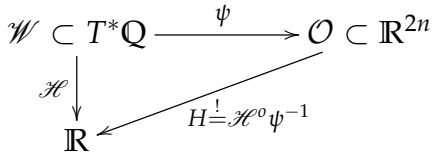
$$\boldsymbol{p} = p_a \tilde{e}^a_\alpha(\boldsymbol{q}) = p_a\Big(M^a{}_b \tilde{e}^b_\beta(\boldsymbol{q})\Big) = p'_b \tilde{e}^b_\beta(\boldsymbol{q}) \quad \Rightarrow \quad p'_b = M^a{}_b p_a = \frac{\partial q^a}{\partial q'^b}\Big|_{\phi_\beta(\boldsymbol{q})} p_a \, .$$

Com isto, o mapa $\psi_\beta \, {}^o\psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(\mathscr{W}_\alpha \cap \mathscr{W}_\beta) \to \psi_\beta(\mathscr{W}_\alpha \cap \mathscr{W}_\beta)$ será tal que:

$$\psi_\beta \, {}^o\psi_\alpha^{-1}(q^1, \cdots, q^n; p_1, \cdots, p_n) = (q'^1, \cdots, q'^n; \frac{\partial q^a}{\partial q'^1} p_a, \cdots, \frac{\partial q^a}{\partial q'^2} p_a) \, .$$

Note-se que os $M^a{}_b$ não são outra coisa que os elementos da inversa da matriz jacobiana da transformação das coordenadas q^a nas coordenadas q'^b. Assim, levando em conta que M é suave e invertível, a função $\psi_\beta \, {}^o\psi_\alpha^{-1}$ também será suave com inversa suave e assim, pode-se afirmar que o conjunto $\{(\mathscr{W}_\alpha; \psi_\alpha)\}$ constitui um atlas para $T^*\mathbb{Q}$.

Finalmente, em analogia a como foi feito na seção anterior para ilustrar a relação estabelecida entre a função de Lagrange $\mathscr{L}$ e a sua representação local $L = \mathscr{L}\,{}^o\chi^{-1}$ (onde $(\mathscr{V}, \chi)$ é uma carta em $T\mathbb{Q}$), o diagrama embaixo mostra a dependência entre as funções $\mathscr{H}$ (não-local) e H (local).



Novamente, se for o caso de uma função de Hamilton (não local) dependente explicitamente do tempo, ela seria tal que:

$$\mathscr{H} : \mathbb{R} \times T^*\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \, .$$

Por uma questão de comodidade de aqui em diante variedade de fase será denotada simplesmente por $\mathbb{F}$, isto é: $\mathbb{F} \overset{!}{=} T^*\mathbb{Q}$.

2.2.4 Coordenadas unificadas e forma simplética em $\mathbb{F}$

É sabido que os elementos do espaço de fase são dados pelas $2n-$uplas $(q; p)$; então, é possível introduzir umas *coordenadas unificadas* ξ que permitirão escrever as equações de Hamilton de uma maneira mais compacta. Considere-se uma

matriz coluna ξ cujos elementos são:

$$\xi^a = q^a \quad , \quad \xi^{n+a} = p_a \qquad\qquad (a = 1, \cdots, n) \tag{2.33}$$

Em termos das coordenadas ξ^a escreve-se:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi^a} = \frac{\partial H}{\partial q^a} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial \xi^{n+a}} = \frac{\partial H}{\partial p_a} \, . \tag{2.34}$$

As equações de Hamilton (2.27), em termos das $\xi-$coordenadas locais, adotam a forma:

$$\dot{\xi}^a = \frac{\partial H}{\partial \xi^{n+a}} \quad , \quad -\dot{\xi}^{n+a} = \frac{\partial H}{\partial \xi^a} \, .$$

Escrito de maneira matricial ter-se-á:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ \hline +1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & +1 & & & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \dot{\xi}^1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}^n \\ \dot{\xi}^{n+1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}^{2n} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \partial H/\partial \xi^1 \\ \vdots \\ \partial H/\partial \xi^n \\ \partial H/\partial \xi^{n+1} \\ \vdots \\ \partial H/\partial \xi^{2n} \end{array}\right) \, . \tag{2.35}$$

Introduzindo *a matriz simplética* $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, as equações de Hamilton escritas na forma (2.35) podem ser expressas sucintamente como:

$$\Omega \, \dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \, . \tag{2.36}$$

É imediato ver que a matriz Ω satisfaz as seguintes propriedades:

$$\Omega^2 = -I_n \quad , \quad \Omega^T \Omega = \Omega \Omega^T = I_n \quad , \quad \Omega^T = -\Omega \quad , \quad det(\Omega) = 1 \, .$$

Denotem-se por $\omega_{\mu\nu}$ os elementos de Ω e, por $\omega^{\mu\nu}$ os elementos de Ω^{-1}; logo, (2.36) pode-se expressar em termos dessas componentes:

$$\omega_{\mu\nu} \dot{\xi}^\nu = \frac{\partial H}{\partial \xi^\mu} \quad ; \quad \mu, \nu = 1, \cdots, 2n \, . \tag{2.37}$$

Multiplicando por Ω^{-1} pela esquerda em (2.37):

$$\underbrace{\omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho}}_{\delta^{\mu}_{\rho}}\dot{\xi}^{\rho} = \omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^{\nu}} \quad \Rightarrow \quad \dot{\xi}^{\mu} = \omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^{\nu}} \, . \tag{2.38}$$

Note-se que a hamiltoniana local H é uma função das coordenadas locais ξ^{μ}, e consequentemente as equações de Hamilton apresentadas em (2.38) são da forma:

$$\dot{\xi}^{\mu} = \Delta^{\mu}(\xi) \, . \tag{2.39}$$

O lado esquerdo de (2.39) pode-se interpretar como a $\mu-$ésima componente local de um vetor tangente[31] pertencente ao espaço $T_{\xi}\mathbb{F}$ enquanto que o lado direito pode ser visto como a $\mu-$ésima componente local, na mesma base[32] $\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}_{\psi}}\Big|_{\xi} \right\}$ (com $\boldsymbol{\xi}$ fixo mas arbitrário), de um objeto cujas componentes locais são funções das coordenadas locais $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$. Assim, observa-se que, globalmente, Δ é um mapa que atribui a cada ponto $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{F}$ um vetor em $T_{\xi}\mathbb{F}$, isto é:

$$\Delta(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{!}{=} \Delta_{\xi} = \dot{\boldsymbol{\xi}} \, .$$

Aquela aplicação que mapeia um ponto de uma variedade em um vetor no espaço tangente associado a esse ponto é chamado de *campo vetorial*[33]; com isso, o objeto Δ resulta ser um campo vetorial definido sobre a variedade de fase $\mathbb{F}$. Se as funções componentes de um campo vetorial são diferenciáveis, diz-se que o campo vetorial é também diferenciável e o conjunto de campos vetoriais diferenciáveis tem a estrutura de espaço vetorial cuja base local é dada pelos objetos $\dfrac{\partial}{\partial \xi^{\mu}_{\psi}}$, onde desta vez o ponto de avaliação não é especificado devido a que é arbitrário. Com isto, o

[31] Em analogia a como foi apresentado que as velocidades $\dot{\boldsymbol{q}}$ são vetores tangentes do espaço $T_{q}\mathbb{Q}$.

[32] Aqui $\xi^{\mu}_{\psi} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ são as funções de projeção local em relação à carta $(\mathscr{W}, \psi)$ que fornece as coordenadas locais $\psi(\boldsymbol{\xi}) = (\xi^{1}; \cdots ; \xi^{2n})$, para $\boldsymbol{\xi} \in \mathscr{W}$. Também é importante destacar que as funções $q^{a}_{\psi} = \xi^{a}_{\psi}$ $(a \leqslant n)$ não são as mesmas que as q^{a}_{ϕ}, pois as primeiras são funções em $\mathbb{F}$ enquanto que as segundas estão definidas em $\mathbb{Q}$; contudo, elas estão relacionadas por meio da função de projeção natural $\pi : \mathbb{F} \to \mathbb{Q}$, como é apresentado na nota do rodapé 41.

[33] Mais geral, um campo vetorial Δ é um mapa de pontos da variedade $\mathbb{F}$ para elementos do fibrado tangente $T\mathbb{F}$. Também, diz-se que um campo vetorial é uma seção do fibrado tangente.

campo Δ pode-se expressar na seguinte forma:

$$\Delta = \Delta^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}_{\psi}} \overset{(2.39)}{=} \dot{\xi}^{\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^{\mu}_{\psi}} \, . \tag{2.40}$$

Um conceito análogo ao de campo vetorial é o de $1-$forma, uma $1-$forma é uma aplicação que mapeia cada ponto de uma variedade para um covetor no espaço cotangente associado a esse ponto. Uma $1-$forma é dita diferenciável se as suas componentes são funções diferenciáveis. O conjunto de $1-$formas diferenciáveis tem a estrutura de um espaço vetorial com base local dada pelos objetos $d\xi^{\mu}_{\psi}$, onde novamente não é necessário especificar o ponto de avaliação porque ele é arbitrário.

Neste ponto é conveniente lembrar que a diferencial de uma função $\mathscr{G} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ avaliada no ponto $\boldsymbol{\xi_0} \in \mathbb{F}$ comporta-se como um covetor, isto é, $d\mathscr{G}_{\boldsymbol{\xi_0}} \in T^{*}_{\boldsymbol{\xi_0}}\mathbb{F}$; ou seja, a diferencial $d\mathscr{G}$ atribui a um ponto $\boldsymbol{\xi_0}$ um covetor em $T^{*}_{\boldsymbol{\xi_0}}\mathbb{F}$. Assim, conclui-se que $d\mathscr{G}$ é uma $1-$forma definida em $\mathbb{F}$. Além disso:

$$d\mathscr{G}_{\boldsymbol{\xi_0}} \overset{(2.32)}{=} \frac{\partial G}{\partial \xi^{\mu}}\Big|_{\psi(\boldsymbol{\xi_0})} d\xi^{\mu}_{\psi}\Big|_{\boldsymbol{\xi_0}} \quad \Rightarrow \quad d\mathscr{G} = \frac{\partial G}{\partial \xi^{\mu}} d\xi^{\mu}_{\psi} \, . \tag{2.41}$$

Uma *função dinâmica local* é uma função local das variáveis canônicas q^a e p_a quando estas são funções do tempo. Correspondentemente, uma função $\mathscr{G} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ torna-se uma **função dinâmica** por meio da composição $(\mathscr{G}^{o}\boldsymbol{\xi})(t) \equiv \mathscr{G}\big(\boldsymbol{\xi}(t)\big)$, onde $\boldsymbol{\xi}(t)$ representa a uma curva na variedade de fase; isto é, uma curva que provém de uma das curvas integrais das equações de movimento. Agora observe-se o seguinte: Seja t_0 tal que $\boldsymbol{\xi}(t_0) = \boldsymbol{\xi_0}$. Então:

$$\Delta_{\boldsymbol{\xi_0}}(\mathscr{G}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (\mathscr{G}^{o}\boldsymbol{\xi}) \quad \overset{34}{\Rightarrow} \quad \Delta(\mathscr{G}) = \frac{d}{dt}\mathscr{G}\big(\boldsymbol{\xi}(t)\big) \, . \tag{2.42}$$

Em (2.42) se observa que a aplicação[34] do mapa Δ sobre uma função $\mathscr{G}$ definida sobre a variedade de fase $\mathbb{F}$ determina a evolução temporal da função dinâmica associada, é por esse motivo que Δ é conhecido como *campo vetorial dinâmico*.

[34] Rigorosamente falando não é o campo vetorial Δ quem atua sobre a função $\mathscr{G}$; porém prova-se que todo campo vetorial diferenciável tem biunivocamente associado um operador (derivação) $\tilde{\Delta}$ que mapeia funções suaves em outras funções suaves sob a condição $\big(\tilde{\Delta}(\mathscr{G})\big)(\boldsymbol{\xi_0}) = \Delta_{\boldsymbol{\xi_0}}(\mathscr{G})$. [23][24]

O seguinte será analisar as equações de Hamilton apresentadas em (2.37):

$$\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\nu} = \frac{\partial H}{\partial \xi^{\mu}}.$$

De (2.40) se observa que os $\dot{\xi}^{\nu}$ são as componentes locais do campo vetorial dinâmico Δ, enquanto que de (2.41) se tem que $\dfrac{\partial H}{\partial \xi^{\mu}}$ são as componentes locais da $1-$forma $d\mathscr{H}$. Então, os $\omega_{\mu\nu}$ devem ser as componentes locais de algum objeto que operado com um campo vetorial (sob certa operação que permita conectar esses elementos) o resultado seja uma $1-$forma. Por outro lado, os $\omega_{\mu\nu}$ foram introduzidos como os elementos de uma matriz antissimétrica e consequentemente o objeto ω é antissimétrico; além disso, é sabido que toda matriz (por exemplo Ω) corresponde-se biunivocamente com uma forma bilinear. Logo, poderia-se considerar que ω é uma forma bilinear antissimétrica (alternada[35]). Também é importante ressaltar que as equações (2.37) são válidas para um ponto fixo (mas arbitrário) sobre a variedade de fase; em consequência, fixado um ponto $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{F}$, a forma bilinear ω deverá ser um mapa $\omega\big|_{\boldsymbol{\xi}} : T_{\boldsymbol{\xi}}\mathbb{F} \times T_{\boldsymbol{\xi}}\mathbb{F} \to \mathbb{R}$. O conjunto das formas bilineares alternadas definidas sobre um espaço vetorial V com valores de chegada no corpo (habitualmente $\mathbb{R}$) é denotado por $\bigwedge^2(V^*)$ e os elementos desse conjunto também são chamados de $2-$covetores. Com isto, $\omega\big|_{\boldsymbol{\xi}} \in \bigwedge^2(T^*_{\boldsymbol{\xi}}\mathbb{F})$. Uma vez que ω atribui um $2-$covetor a cada ponto de $\mathbb{F}$ diz-se que ω é uma $2-$forma. Pode-se provar [23] que toda $2-$forma diferenciável tem associada biunivocamente uma aplicação, também bilinear e alternada, que mapeia pares de campos vetoriais diferenciáveis para funções na variedade[36]; devido a essa correspondência habitualmente tais objetos são tratados indistintamente. Além disso, é possível provar que qualquer $2-$forma pode ser escrita como a seguinte combinação linear [21][23]:

$$\omega = \sum_{\mu<\nu} \omega_{\mu\nu} d\xi^{\mu}_{\psi} \wedge d\xi^{\nu}_{\psi} = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} d\xi^{\mu}_{\psi} \wedge d\xi^{\nu}_{\psi} \,, \tag{2.43}$$

onde o operador $\wedge$ corresponde à operação de *multiplicação exterior* que é definida como:

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1; v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1) \,,$$

[35] Seja f uma aplicação $r-$linear entre dos espaços vetoriais; diz-se que f é alternada se $f(v_1; \cdots; v_r) = 0$ toda vez que dois vetores no argumento dela são iguais.

[36] Sob a condição $\big[\tilde{\omega}(\Delta_1; \Delta_2)\big](\boldsymbol{\xi}) = \omega_{\boldsymbol{\xi}}\big((\Delta_1)_{\boldsymbol{\xi}}; (\Delta_2)_{\boldsymbol{\xi}}\big)$, onde $\tilde{\omega}$ é a aplicação bilinear alternada associada à 2-forma ω e Δ_1 e Δ_2 são campos vetoriais diferenciáveis em $\mathbb{F}$.

sendo α e β formas lineares alternadas (ou covetores) e v_1 e v_2 são vetores[37]. Note-se que com essa definição a seguinte propriedade[38] é satisfeita:

$$\alpha \wedge \beta = -(\beta \wedge \alpha) \, .$$

Por outro lado, aquela operação que envolve um campo vetorial (Δ) e uma $2-$forma (ω) para dar como resultado uma $1-$forma ($d\mathscr{H}$) é chamada de *multiplicação interior*[39] e é dada por:

$$i_\Delta \omega(X) = \omega(\Delta; X) \, . \tag{2.44}$$

Note-se que na equação (2.44) $i_\Delta \omega = \omega(\Delta; \, \cdot \,)$ atua sobre o campo vetorial X, o que sugere que é uma $1-$forma. De fato, essa suposição pode ser provada:

$$i_\Delta \omega = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} d\xi^\mu_\psi \wedge d\xi^\nu_\psi \left(\Delta^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha_\psi}; \, \cdot \, \right) = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Delta^\alpha d\xi^\mu_\psi \wedge d\xi^\nu_\psi \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha_\psi}; \, \cdot \, \right) ,$$

onde:

$$d\xi^\mu_\psi \wedge d\xi^\nu_\psi \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha_\psi}; \, \cdot \, \right) = d\xi^\mu_\psi \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha_\psi} \right) d\xi^\nu_\psi - d\xi^\mu_\psi d\xi^\nu_\psi \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha_\psi} \right) = \delta^\mu_\alpha d\xi^\nu_\psi - d\xi^\mu_\psi \delta^\nu_\alpha \, .$$

Logo:

$$\begin{aligned} i_\Delta \omega &= \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\Delta^\alpha (\delta^\mu_\alpha d\xi^\nu_\psi - d\xi^\mu_\psi \delta^\nu_\alpha) = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}(\Delta^\mu d\xi^\nu_\psi - \Delta^\nu d\xi^\mu_\psi) \\ &= \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu}\Delta^\mu d\xi^\nu_\psi - \omega_{\mu\nu}\Delta^\nu d\xi^\mu_\psi) = \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu}\Delta^\mu d\xi^\nu_\psi + \omega_{\nu\mu}\Delta^\nu d\xi^\mu_\psi) \\ &= \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu}\Delta^\mu d\xi^\nu_\psi + \omega_{\mu\nu}\Delta^\mu d\xi^\nu_\psi) = \omega_{\mu\nu}\Delta^\mu d\xi^\nu_\psi \, . \end{aligned}$$

Assim, o objeto $i_\Delta \omega$ realmente é uma $1-$forma cuja componente ν é $\omega_{\mu\nu}\Delta^\mu = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\mu$. Agora, note-se que a equação (2.37) pode ser escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi^\mu} = \omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu = -\omega_{\nu\mu}\Delta^\nu .$$

[37] Em geral, a multiplicação exterior é uma aplicação $\wedge : \bigwedge^p(V^*) \times \bigwedge^q(V^*) \to \bigwedge^{p+q}(V^*)$, com $(\alpha; \beta) \mapsto \alpha \wedge \beta$. Aqui $\bigwedge^r(V^*)$ é o conjunto de formas $r-$lineares e alternadas sobre V.

[38] Mais geral, seja V um espaço vetorial e sejam $\alpha \in \bigwedge^p(V^*)$, $\beta \in \bigwedge^q(V^*)$; então: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq}\beta \wedge \alpha$. Diz-se que a multiplicação exterior tem comutatividade graduada, que é uma versão da anticomutatividade que depende dos graus dos covetores.

[39] Em geral, esta operação mapeia $p-$formas em $(p-1)-$formas e verifica uma regra tipo Leibniz para o produto exterior de formas diferenciais.

O extremo esquerdo dessa equação corresponde à componente μ da $1-$forma $d\mathscr{H}$, enquanto que o extremo direito corresponde à componente μ da $1-$forma $-i_\Delta\omega$. Com isto, as equações de Hamilton podem ser escritas simplesmente como:

$$i_\Delta\omega + d\mathscr{H} = 0\ , \tag{2.45}$$

que é completamente independente das coordenadas locais.

Uma vez que a $2-$forma ω pode ser escrita na forma (2.43), levando em conta que as componentes $\omega_{\mu\nu}$ foram introduzidas como os elementos da matriz simplética Ω ter-se-á:

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 & ;\ \mu = n+\nu \ \text{ com } \ \nu = 1,\cdots,n \\ -1 & ;\ \nu = n+\mu \ \text{ com } \ \mu = 1,\cdots,n \\ 0 & ;\ \text{qualquer outro caso} \end{cases} .$$

Com isto[40]:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\left(d\xi^{n+1}_\psi \wedge d\xi^1_\psi + \cdots + d\xi^{2n}_\psi \wedge d\xi^n_\psi\right) - \frac{1}{2}\left(d\xi^1_\psi \wedge d\xi^{n+1}_\psi + \cdots + d\xi^n_\psi \wedge d\xi^{2n}_\psi\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(d\xi^{n+1}_\psi \wedge d\xi^1_\psi + \cdots + d\xi^{2n}_\psi \wedge d\xi^n_\psi\right) + \frac{1}{2}\left(d\xi^{n+1}_\psi \wedge d\xi^1_\psi + \cdots + d\xi^{2n}_\psi \wedge d\xi^n_\psi\right) \\ &= d\xi^{n+1}_\psi \wedge d\xi^1_\psi + \cdots + d\xi^{2n}_\psi \wedge d\xi^n_\psi \overset{40}{\equiv} d\xi^{n+1} \wedge d\xi^1 + \cdots + d\xi^{2n} \wedge d\xi^n\ . \end{aligned}$$

Assim, se obtém:

$$\omega = dp_1 \wedge dq^1 + \cdots + dp_n \wedge dq^n = dp_a \wedge dq^a\ . \tag{2.46}$$

Em geometria, uma forma diferencial é dita *fechada* se ela tem derivada exterior nula. A derivada exterior de uma $(p+q)-$forma dada pelo produto exterior de uma $p-$forma α e uma $q-$forma β é uma $(p+q+1)-$forma dada por:

$$d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta\ ,$$

[40] De aqui em diante será omitido o índice inferior ψ nos objetos $d\xi^\mu_\psi$ e $\dfrac{\partial}{\partial\xi^\mu_\psi}$ a fim de simplificar a escrita.

Então, para a $2-$forma $\omega = dp_a \wedge dq^a$:

$$d\omega = d(dp_a) \wedge dq^a - dp_a \wedge d(dq^a) \, . \tag{2.47}$$

É possível provar que a derivada exterior aplicada duas vezes sobre uma forma diferencial é sempre zero, ou seja, $d(d\alpha) = 0$, se α é uma $p-$forma, com p arbitrário. Então, em (2.47):

$$d\omega = 0 \wedge dq^a - dp_a \wedge 0 = 0 \, .$$

Do acima, ω é uma $2-$forma fechada.

Por outro lado, sejam X e Y dois campos vetoriais diferenciáveis na variedade de fase $\mathbb{F}$; e agora suponha-se que para X fixo é satisfeito o seguinte:

$$i_X\omega(Y) = \omega(X;Y) = 0 \, ,$$

então:

$$\begin{aligned}\omega(X;Y) &= dp_a \wedge dq^a \left(X^b \frac{\partial}{\partial q^b} + X_b \frac{\partial}{\partial p_b}; Y^c \frac{\partial}{\partial q^c} + Y_c \frac{\partial}{\partial p_c} \right) \\ &= X_b \delta^b_a Y^c \delta^a_c - Y_c \delta^c_a X^b \delta^a_b = X_a Y^a - Y_a X^a = 0 \, .\end{aligned}$$

Mas, como os Y^a e Y_a são independentes, necessariamente $X^a = 0$ e $X_a = 0$. Em consequência:

$$i_X\omega = 0 \quad \Rightarrow \quad X = 0 \, . \tag{2.48}$$

Em dimensão finita, uma forma bilinear $f : V \times V \to \mathbb{R}$ diz-se que é *não-degenerada* se e somente se $f(x;y) = 0$ implica que $x = 0_V$, para qualquer $y \in V$. Então, de (2.48) a $2-$forma ω é não-degenerada. Uma $2-$forma fechada e não-degenerada denomina-se **forma simplética**. Desta maneira, a $2-$forma ω resulta ser uma forma simplética e uma variedade diferenciável equipada com uma forma simplética se denomina **variedade simplética**. Assim, ter-se-á que a dupla $(\mathbb{F}, \omega)$ é uma variedade simplética.

Existe um teorema fundamental, chamado de **teorema de Darboux**, que estabelece que para cada ponto $\boldsymbol{\xi}$ de uma variedade simplética $(\mathbb{F}, \omega)$ $2n-$dimensional existe uma carta $(\mathscr{W}, \psi)$ em torno de $\boldsymbol{\xi}$, com $\psi(\boldsymbol{\xi}) = (q^1, \cdots, q^n; p_1, \cdots, p_n)$ tal que:

$$\omega\big|_{\mathscr{W}} = dp_{a,\psi} \wedge dq^a_\psi \overset{!}{=} dp_a \wedge dq^a \, , \tag{2.49}$$

onde $q^a_\psi = \xi^a_\psi$ e $p_{a,\psi} = \xi^{n+a}_\psi$ $(a \leqslant n)$ são as funções de projeção local sobre $\mathbb{F}$. A prova deste teorema encontra-se na referência [25].

Outro conceito de grande importância na presente abordagem que deixa em evidência que a variedade de fase tem uma estrutura simplética natural é o seguinte: Dada uma variedade diferenciável $\mathbb{Q}$, define-se a $1-$*forma de Liouville*, denotada por θ, como aquela $1-$forma em $T^*\mathbb{Q}$ cuja derivada exterior define uma forma simplética, chamada de $2-$forma de Liouville (ou $2-$forma simplética canônica).

Seja α uma $1-$forma (arbitrária) em $\mathbb{Q}$ com $\alpha(\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{q}, \alpha_{\boldsymbol{q}})$, pela definição de fibrado cotangente é sabido que $\alpha_{\boldsymbol{q}} \in T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$. Defne-se a *função de projeção natural*[41] π como:

$$\pi : T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad , \qquad \pi(\boldsymbol{q}; \alpha_{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{q} \ . \tag{2.50}$$

Com isto, a $1-$forma de Liouville é dada por:

$$\theta = \pi^* \alpha \ , \tag{2.51}$$

onde $\pi^*\alpha$ é conhecido como *pullback*[42] de α em relação ao mapa π.

Usando propriedades do *pullback* se encontra que a expressão local da $1-$forma de Liouville é dada por[43]:

$$\theta = p_{a,\psi} dq^a_\psi \overset{!}{=} p_a dq^a \ . \tag{2.52}$$

O seguinte será determinar a derivada exterior da $1-$forma de Liouville, para isso se deverá fazer uso da seguinte propriedade:

$$d(f\alpha) = (df) \wedge \alpha + f d\alpha \ , \tag{2.53}$$

onde f é uma função escalar (ou $0-$forma) e α é uma forma diferencial. Com isto,

[41] Com esta função as funções $q^a_\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ e $q^a_\psi : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ estão relacionadas segundo $q^a_\psi = q^a_\phi \, {}^o \pi$.

[42] Chamado também de *imagem inversa* é tal que, dada uma função suave $f : M \to N$ entre duas variedades diferenciáveis, permite obter uma $1-$ forma $f^*\alpha$ em M a partir de uma $1-$forma α em N.

[43] A construção correspondente encontra-se no apêndice D.

a 2−forma de Liouville vem dada por:

$$d\theta = d(p_a dq^a) = dp_a \wedge dq^a + p_a d(dq^a) = dp_a \wedge dq^a \ ,$$

que coincide com a expressão para a forma simplética ω obtida em (2.46). Logo, a seguinte importante relação foi obtida:

$$\omega = d\theta \ , \tag{2.54}$$

ou seja, a 2−forma ω que foi construída a partir da matriz Ω que permitiu inserir as coordenadas unificadas nas equações de Hamilton resulta ser a 2−forma de Liouville e além disso, é consistente com o teorema de Darboux.

Por outro lado, devido à não-degenerescência da forma simplética ω pode-se afirmar que a função de Hamilton $\mathscr{H}$ determina univocamente o campo vetorial dinâmico Δ : Com efeito, sejam Δ_1 e Δ_2 campos vetoriais tais que satisfazem (2.45), isto é, $i_{\Delta_1}\omega = i_{\Delta_2}\omega = -d\mathscr{H}$; então:

$$i_{\Delta_1}\omega - i_{\Delta_2}\omega = \omega(\Delta_1;\ \cdot\ ) - \omega(\Delta_2;\ \cdot\ ) = \omega(\Delta_1 - \Delta_2;\ \cdot\ ) = i_{(\Delta_1-\Delta_2)}\omega = 0 \ ,$$

o qual, em conformidade com (2.47), implica que $\Delta_1 = \Delta_2$. Mais ainda, uma vez que o produto interior de ω com campos vetoriais na variedade de fase resulta em 1−formas (também em $\mathbb{F}$), para cada $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{F}$ ter-se-á que cada vetor $v \in T_{\boldsymbol{\xi}}\mathbb{F}$ se corresponde biunivocamente com um covetor $\varphi \in T^*_{\boldsymbol{\xi}}\mathbb{F}$, e sendo isomorfos esses espaços; em geral, observa-se que ω estabelece um *isomorfismo de fibras* entre os fibrados $T\mathbb{F}$ y $T^*\mathbb{F}$.

2.2.5 Parênteses de Poisson

O estudo da evolução temporal de uma função dinâmica motiva uma definição local dos chamados parênteses de Poisson (PP). Seja a função[44] $\mathscr{F} : \mathbb{F} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e seja a curva[45] $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)$. A derivada total, em relação ao tempo, de $\mathscr{F}$ composta

[44] Em um caso geral, encontra-se que certas funções dinâmicas podem ser também explícitas no tempo, e é por isso que o seu domínio deve ser contido em $\mathbb{F} \times \mathbb{R}$ e não só em $\mathbb{F}$.

[45] Rigorosamente falando, para este caso geral aquela *curva* é realmente um mapa $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{F} \times \mathbb{R}$, com $\lambda(t) = (\boldsymbol{\xi}(t); t)$.

com dita curva será dada por:

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}\big(\boldsymbol{\xi}(t);t\big) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\mathscr{F} = \dot{\mathscr{F}} = \frac{\partial F}{\partial \xi^{\mu}}\dot{\xi}^{\mu} + \frac{\partial F}{\partial t}\,,$$

onde os ξ^{μ} são coordenadas locais. Das equações de Hamilton na forma (2.38) se obtém:

$$\dot{\mathscr{F}} = \frac{\partial F}{\partial \xi^{\mu}}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^{\nu}} + \frac{\partial F}{\partial t}\,. \tag{2.55}$$

É precisamente neste ponto onde os **parênteses de Poisson** (PP) são introduzidos:

Dadas duas funções suaves $\mathscr{f}$ e $\mathscr{g}$ na variedade de fase, definem-se os seus parênteses de Poisson como uma nova função na variedade de fase, denotada por $\{\mathscr{f}\,;\mathscr{g}\}$, que satisfaz o seguinte:

1. **Antissimetria:** $\{\mathscr{f}\,;\mathscr{g}\} = -\{\mathscr{g};\mathscr{f}\}$.
2. **Bilinearidade:** $\{\mathscr{f}\,;\alpha\mathscr{g}+\beta\mathscr{h}\} = \alpha\{\mathscr{f}\,;\mathscr{g}\}+\beta\{\mathscr{f}\,;\mathscr{h}\}$ (linearidade direita), $\{\alpha\mathscr{f}+\beta\mathscr{g}\,;\mathscr{h}\} = \alpha\{\mathscr{f}\,;\mathscr{h}\}+\beta\{\mathscr{g};\mathscr{h}\}$ (linearidade esquerda).
3. **Identidade de Jacobi:** $\Big\{\mathscr{f};\{\mathscr{g};\mathscr{h}\}\Big\}+\Big\{\mathscr{g};\{\mathscr{h};\mathscr{f}\}\Big\}+\Big\{\mathscr{h};\{\mathscr{f}\,;\mathscr{g}\}\Big\} = 0$.
4. **Regra de Leibniz:** $\{\mathscr{f};\mathscr{g}\mathscr{h}\} = \mathscr{g}\{\mathscr{f}\,;\mathscr{h}\}+\{\mathscr{f}\,;\mathscr{g}\}\mathscr{h}$.

Onde $\mathscr{f}, \mathscr{g}$ e $\mathscr{h}$ são funções[46] suaves na variedade de fase e α e β são números reais.

Os parênteses (ou estrutura) de Poisson são definidos sobre o conjunto de funções suaves na variedade de fase, que denota-se por $C^{\infty}(\mathbb{F})$ e tem a estrutura de um $\mathbb{R}-$espaço vetorial. As três primeiras propriedades apresentadas acima constituem o que é conhecido como *Parênteses de Lie* (PL) e a dupla do espaço vetorial onde são definidos os PL junto com os próprios PL chama-se de *álgebra de Lie*. Com isto, os parênteses de Poisson podem ser definidos como uma operação bilinear em $C^{\infty}(\mathbb{F})$ tal que $\big(C^{\infty}(\mathbb{F}),\{\cdot\,;\cdot\}\big)$ é uma álgebra de Lie que satisfaz a regra de Leibniz. Além disso, uma variedade dotada de uma estrutura de Poisson é chamada de *variedade de Poisson*.

[46] Foram usadas letras minúsculas para evitar confusões entre alguma função arbitrária $\mathscr{H}$ e a função de Hamilton.

Dadas duas funções $\mathscr{F},\mathscr{G} \in C^\infty(\mathbb{F})$ a representação local[47] dos seus PP, $\{\mathscr{F};\mathscr{G}\}\big|_{\mathscr{W}}{}^{o}\psi^{-1}$, que será denotada como $\{F;G\}$, pode ser obtida fazendo uma expansão de Taylor até a primeira ordem ao redor de um ponto $\xi_0 = \psi(\boldsymbol{\xi_0})$, com $\boldsymbol{\xi_0} \in \mathscr{W}$ [26]:

$$F(\xi) \approx F(\xi_0) + \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\mu - \xi_0^\mu) \quad , \quad G(\xi) \approx G(\xi_0) + \frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\,.$$

Com isto:

$$\begin{aligned}
\{F;G\}(\xi) &= \Big\{F(\xi_0) + \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\mu - \xi_0^\mu)\,;\, G(\xi_0) + \frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\Big\} \\
&= \{F(\xi_0);G(\xi_0)\} + \Big\{F(\xi_0);\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\Big\} + \Big\{\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\mu - \xi_0^\mu);G(\xi_0)\Big\} \\
&\qquad + \Big\{\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\mu - \xi_0^\mu);\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\Big\} \\
&= F(\xi_0)G(\xi_0)\{1;1\} + F(\xi_0)\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}\{1;(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\} + \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}G(\xi_0)\{(\xi^\mu - \xi_0^\mu);1\} \\
&\qquad + \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}\{(\xi^\mu - \xi_0^\mu);(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Neste ponto convém fazer uso da regra de Leibniz para obter um resultado muito útil:

$$\{F;1\} = \{F;1\cdot 1\} = 1\cdot\{F;1\} + \{F;1\}\cdot 1 = 2\{F;1\} \quad \Rightarrow \quad \{F;1\} = 0\,.$$

Este resultado é válido para qualquer função F; então, em (2.56):

$$\{F;G\}(\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}\{(\xi^\mu - \xi_0^\mu);(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\}, \quad \text{onde:}$$

$$\{(\xi^\mu - \xi_0^\mu);(\xi^\nu - \xi_0^\nu)\} = \{\xi^\mu;\xi^\nu\} - \xi_0^\nu\{\xi^\mu;1\} - \xi_0^\mu\{1;\xi^\nu\} + \xi_0^\mu\xi_0^\nu\{1;1\} = \{\xi^\mu;\xi^\nu\}.$$

Com isto: $$\{F;G\}(\xi) = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}\{\xi^\mu;\xi^\nu\}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}\,.$$

Logo, para $\xi = \xi_0$:

$$\{F;G\}(\xi_0) = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\Big|_{\xi_0}\{\xi_0^\mu;\xi_0^\nu\}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\Big|_{\xi_0}\,,$$

[47] Obviamente em relação à mesma carta $(\mathscr{W},\psi)$ que estabelece as coordenadas locais ξ^μ.

e devido à arbitrariedade de ξ_0 pode-se estabelecer:

$$\{F;G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\{\xi^\mu;\xi^\nu\}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\,, \tag{2.57}$$

onde o objeto $\{\xi^\mu;\xi^\nu\}$ deve ser tal que satisfaça: $\{\xi^\nu;\xi^\mu\} = -\{\xi^\mu;\xi^\nu\}$ (antissimetria) e $\Big\{\xi^\mu;\{\xi^\nu;\xi^\rho\}\Big\} + \Big\{\xi^\nu;\{\xi^\rho;\xi^\mu\}\Big\} + \Big\{\xi^\rho;\{\xi^\mu;\xi^\nu\}\Big\} = 0$ (identidade de Jacobi).

Por outro lado, observe-se que:

$$\Big\{\xi^\rho;\{\xi^\mu;\xi^\nu\}\Big\} = \frac{\partial \xi^\rho}{\partial \xi^\lambda}\{\xi^\lambda;\xi^\sigma\}\frac{\partial\{\xi^\mu;\xi^\nu\}}{\partial \xi^\sigma} = \delta^\rho_\lambda\{\xi^\lambda;\xi^\sigma\}\frac{\partial\{\xi^\mu;\xi^\nu\}}{\partial \xi^\sigma} = \{\xi^\rho;\xi^\sigma\}\frac{\partial\{\xi^\mu;\xi^\nu\}}{\partial \xi^\sigma}\,,$$

e substituindo na identidade de Jacobi se obtém:

$$\{\xi^\mu;\xi^\theta\}\frac{\partial\{\xi^\nu;\xi^\rho\}}{\partial \xi^\theta} + \{\xi^\nu;\xi^\phi\}\frac{\partial\{\xi^\rho;\xi^\mu\}}{\partial \xi^\phi} + \{\xi^\rho;\xi^\sigma\}\frac{\partial\{\xi^\mu;\xi^\nu\}}{\partial \xi^\sigma} = 0\,,$$

donde se observa que é suficiente que os $\{\xi^\mu;\xi^\nu\}$ sejam constantes. Assim, uma possibilidade para esses objetos é que sejam antissimétricos nos seus índices e que sejam constantes. Tais requerimentos são satisfeitos pelas componentes locais da inversa da forma simplética ω; então, se propõe o seguinte:

$$\{\xi^\mu;\xi^\nu\} = \omega^{\mu\nu}\,. \tag{2.58}$$

Logo, substituindo em (2.57) ter-se-á:

$$\{F;G\} \doteq \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\,. \tag{2.59}$$

A equação (2.59) define os parênteses de Poisson em relação à forma simplética ω. Pode-se provar que os PP definidos em (2.59) satisfazem as quatro condições que definem uma estrutura de Poisson[48].

Logo, conclui-se que se $(\mathbb{F},\omega)$ é uma variedade simplética, então $\big(C^\infty(\mathbb{F}),\{\cdot\,;\,\cdot\}\big)$, sob a condição (2.58), é uma álgebra de Poisson [25].

Fazendo uso dos PP definidos em (2.59), a equação (2.55) pode-se escrever

[48] A prova correspondente é feita no apêndice E.

como:

$$\dot{\mathscr{F}} = \{F; H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \,, \tag{2.60}$$

donde observa-se que a evolução temporal da função dinâmica $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\boldsymbol{\xi}(t); t)$ é determinada pela hamiltoniana local por meio dos PP.

Em termos das coordenadas locais $(q; p)$ a definição dos PP apresentada em (2.59) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\{F; G\} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \xi^1}\frac{\partial G}{\partial \xi^{n+1}} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi^n}\frac{\partial G}{\partial \xi^{2n}}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \xi^{n+1}}\frac{\partial G}{\partial \xi^1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial \xi^{2n}}\frac{\partial G}{\partial \xi^n}\right) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial q^1}\frac{\partial G}{\partial p_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial q^n}\frac{\partial G}{\partial p_n}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial G}{\partial q^1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial p_n}\frac{\partial G}{\partial q^n}\right) \\
&= \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q^a} \qquad ; \qquad a = 1, \cdots, n \,.
\end{aligned}$$

Logo, foi obtida a seguinte expressão:

$$\{F; G\} = \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial G}{\partial q^a}\frac{\partial F}{\partial p_a} \,, \tag{2.61}$$

que é como comumente são apresentados os parênteses de Poisson.

Os PP (2.59) também satisfazem as seguintes propriedades complementárias:

1. $\{\xi^\mu; f\} = \omega^{\mu\nu}\dfrac{\partial f}{\partial \xi^\nu}$, onde ξ^μ e f são as representações locais das funções ξ^μ_ψ e $\not{f}$, respectivamente.
2. $\{f; M(g_1; \cdots, g_A)\} = \dfrac{\partial M}{\partial g_\alpha}\{f; g_\alpha\} \qquad ; \qquad \alpha = 1, \cdots, A.$
3. $\dfrac{\partial}{\partial t}\{f; g\} = \left\{f; \dfrac{\partial g}{\partial t}\right\} + \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t}; g\right\}.$
4. $\dfrac{d}{dt}\{f; g\} = \{f; \dot{g}\} + \{\dot{f}; g\}.$

As demonstrações dessas propriedades estão no apêndice F.

Uma função dinâmica $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\boldsymbol{\xi}(t); t)$ é dita *constante de movimento* se ela é tal que $\dot{\mathscr{F}} = 0$, que em virtude de (2.55) e (2.59) leva à condição:

$$\{F; H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \,. \tag{2.62}$$

Em particular, se $\mathscr{F}$ não depende explicitamente do tempo, ter-se-á simplesmente que $\{F;H\} = 0$.

Por outro lado, a antissimetria dos PP implica que a hamiltoniana local H é uma quantidade conservada enquanto que não seja explícita no tempo, pois $\{H;H\} = 0$, o que é consistente com o apresentado em (2.28).

Aqui um comentário adicional: Existe um importante resultado, chamado de *teorema de Poisson*[49], o qual estabelece que se $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ são duas constantes de movimento, então $\{\mathscr{F};\mathscr{G}\}$ é também uma constante de movimento, ou seja, $\frac{d}{dt}\{F;G\} = 0$.

2.2.6 Condições de não-singularidade

Na formulação lagrangiana foi apresentada uma condição suficiente para garantir que o sistema de equações de Euler-Lagrange é não singular; isto é, a solução existe e é única. Naturalmente, também é possível obter condições de não-singularidade na abordagem hamiltoniana; além disso, encontra-se que tais condições estão fortemente relacionadas com a condição obtida na abordagem lagrangiana.

De maneira similar a como foi definida a função de projeção natural $\pi : T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ em (2.50), define-se a função:

$$\tau : T\mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \qquad , \qquad \tau(\boldsymbol{q};\dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{q}\ .$$

Agora define-se o mapa $\Lambda : T\mathbb{Q} \to T^*\mathbb{Q}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{Q} & \xrightarrow{\ \Lambda\ } & T^*\mathbb{Q} \\ & {\scriptstyle\tau}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\pi} & \\ & \mathbb{Q} & \end{array} \tag{2.63}$$

seja comutativo (isto é: $\tau = \pi^o\Lambda$ e $\pi = \tau^o\Lambda^{-1}$).

Lembre-se que os mapas que atribuem as coordenadas locais em $T\mathbb{Q}$ e $T^*\mathbb{Q}$ são

[49] A prova deste teorema encontra-se no apêndice E.

dados por:

$$\begin{aligned} \chi : \ T\mathbb{Q} \to \quad & Q \quad \times \quad T \\ (\boldsymbol{q};\dot{\boldsymbol{q}}) \mapsto & (q^1,\cdots,q^n;\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n) \stackrel{!}{=} \zeta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : \ T^*\mathbb{Q} \to \quad & Q \quad \times \quad M \\ (\boldsymbol{q};\boldsymbol{p}) \mapsto & (q^1,\cdots,q^n;p_1,\cdots,p_n) \stackrel{!}{=} \xi \quad \text{com} \quad p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \, . \end{aligned}$$

Encontra-se que Λ induz um mapa entre as coordenadas locais tal como é mostrado no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{Q} & \xrightarrow{\Lambda} & T^*\mathbb{Q} \\ \chi \downarrow & & \downarrow \phi \\ Q \times T & \xrightarrow{\tilde{W}} & Q \times M \end{array}$$

Mais ainda, observa-se que $\tilde{W}$ tem a forma $(\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}, W)$, pois não muda as primeiras n componentes. Então, resulta que $W : T \to M$, é essencialmente um mapa de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$. Logo, em virtude do teorema da função inversa, o sistema de equações $p_a = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}$ terá solução única para os $\dot{q}^1,\cdots,\dot{q}^n$ em termos dos $p_1,\cdots,p_n$ (em pequenas vizinhanças abertas de $\dot{q}$ e p) só se a matriz jacobiana de W, com elementos $DW_{ab} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}$, é invertível. Assim, novamente a invertibilidade da matriz hessiana da lagrangiana local L é uma condição suficiente para a não-singularidade do sistema.

Por outro lado, o objeto θ, definido em (2.51), é uma $1-$forma[50] em $T^*\mathbb{Q}$; então, é possível obter uma $1-$forma em $T\mathbb{Q}$ segundo $\tilde{\theta} = \Lambda^*\theta$. No apêndice D é mostrado que, em termos das coordenadas locais acima, a nova 1-forma $\tilde{\theta}$ se escreve como:

$$\tilde{\theta} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^a_\chi} dq^a_\chi \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} dq^a \, .$$

Logo, usando a propriedade do pullback $F^*(d\phi) = d(F^*\phi)$ (sendo $F : M \to N$ um

[50] Que no caso não-singular é chamada de $1-$forma de Liouville, mas em geral pode ser chamada de $1-$forma canônica.

mapa entre variedades diferenciáveis e ϕ uma $1-$forma em N) se obtém:

$$\Lambda^*(d\theta) = d(\Lambda^*\theta) \quad \Rightarrow \quad \Lambda^*(\omega) = d\tilde{\theta} \ .$$

Assim, se tem que o pullback da $2-$forma $\omega \stackrel{!}{=} d\theta$ determina uma $2-$forma em $T\mathbb{Q}$, que será denotada por $\tilde{\omega}$ ($\tilde{\omega} \stackrel{!}{=} d\tilde{\theta}$), e é dada por:

$$\tilde{\omega} = d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b}\right) \wedge dq^b + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} \cancelto{0}{d(dq^b)} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} dq^a \wedge dq^b + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} d\dot{q}^a \wedge dq^b \ .$$

Uma condição necessária e suficiente para que uma 2-forma ω em uma variedade M $2n-$dimensional seja simplética é que a sua $n-$ésima potência exterior $\omega^n = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (com n fatores) seja tal que $\omega^n(p) \neq 0$ para qualquer $p \in M$.

Observe-se que no cálculo de $\tilde{\omega}^n$ o termo $\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} dq^a \wedge dq^b$ não contribue devido a que sempre houverá dq repetidos (inclusive para os termos cruzados), pois só há n objetos dq diferentes. Com isto, a n-ésima potência exterior da $2-$forma $\tilde{\omega}$ é dada segundo [27]:

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}^n &\cong \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} d\dot{q}^a \wedge dq^b\right)^n = \left(W_{ab} d\dot{q}^a \wedge dq^b\right)^n \\
&= W_{a_1 b_1} \cdots W_{a_n b_n} \dot{q}^{a_1} \wedge dq^{b_1} \wedge \cdots \wedge \dot{q}^{a_n} \wedge dq^{b_n} \\
&\sim W_{a_1 b_1} \cdots W_{a_n b_n} \dot{q}^{a_1} \wedge \cdots \wedge \dot{q}^{a_n} \wedge dq^{b_1} \wedge \cdots \wedge dq^{b_n} \\
&= W_{a_1 b_1} \cdots W_{a_n b_n} \epsilon^{a_1 \cdots a_n} \epsilon^{b_1 \cdots b_n} \wedge d\dot{q}^1 \wedge \cdots \wedge d\dot{q}^n \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \\
&= n!\ det(W) d\dot{q}^1 \wedge \cdots \wedge d\dot{q}^n \wedge dq^1 \wedge \cdots \wedge dq^n \ ,
\end{aligned}$$

donde se observa que $\tilde{\omega}$ é uma forma simplética se e somente se o determinante da matriz hessiana da lagrangiana local é diferente de zero, ou seja que $\tilde{\omega}$ é simplética apenas nos sistemas não-singulares.

Também pode-se provar que a não-degenerescência de $\tilde{\omega}$ é condição necessária e suficiente para que ω também seja não-degenerada. Ademais, levando em conta que $\tilde{\omega}$ é uma forma fechada (pois foi definida como una forma exata), a não-degenerescência dela implica que é uma forma simplética. Então, em vista de que ω também é uma forma fechada, a não-degenerescência de $\tilde{\omega}$ é condição suficiente para garantir que ω é uma forma simplética. Assim, ter-se-á o seguinte:

ω é simplética $\Leftrightarrow$ $\tilde{\omega}$ é simplética $\Leftrightarrow$ $det(W) \neq 0$ $\Rightarrow$ O sistema é regular.

Assim, graças à transitividade, encontra-se que, o fato de a $2-$forma ω (no espaço de fase $T^*\mathbb{Q}$) ser uma forma simplética é condição suficiente para garantir a não-singularidade do sistema. Além disso, devido ao resultado anterior, observa-se que nem sempre a dupla $(T^*\mathbb{Q}, \omega)$ é uma variedade simplética, mas apenas quando a condição de regularidade da matriz hessiana é atendida.

Capítulo 3

Método de Faddeev-Jackiw para sistemas singulares

No capítulo anterior, correspondente à formulação hamiltoniana para sistemas não-singulares, foi apresentado que a expressão local para a $1-$forma de Liouville é dada pela equação (2.51):

$$\theta = p_{a,\psi} dq^a_\psi \stackrel{!}{=} p_a dq^a \ ,$$

onde não se deve perder de vista que $q^a_\psi \, , p_{a,\psi} : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ são funções de projeção local em relação à carta $(\mathscr{W}, \psi)$. É possível reescrever θ em termos das funções $\xi^\mu_\psi : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ associadas às coordenadas unificadas procedendo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \theta &= p_a dq^a + 0 dp_a = \frac{1}{2}(p_a + p_a) dq^a + \frac{1}{2}(q^a - q^a) dp_a \\ &= \frac{1}{2}\big(\, p_a dq^a - q^a dp_a + \underbrace{p_a dq^a + q^a dp_a}_{d(p_a q^a)} \, \big) \ , \end{aligned}$$

neste ponto é preciso lembrar que a $1-$forma de Liouville está definida como uma $1-$forma cuja derivada exterior dá uma forma simplética; então, uma vez que para qualquer forma diferencial α é satisfeito que $d^2\alpha = d(d\alpha) = 0$, qualquer forma exata não terá contribuição. Em consequência:

$$\begin{aligned} \theta &\cong \frac{1}{2}\big(\, p_a dq^a - q^a dp_a \, \big) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} p & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq \\ dp \end{pmatrix} \quad , \quad \text{com} \quad \begin{matrix} q & \stackrel{!}{=} & \begin{pmatrix} q^1 & \cdots & q^n \end{pmatrix} \\ p & \stackrel{!}{=} & \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix} \end{matrix} \ ; \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dq \\ dp \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \xi^\mu \omega_{\mu\nu} d\xi^\nu \ . \end{aligned} \tag{3.1}$$

Logo, ter-se-á:

$$\theta = \frac{1}{2}\xi^{\mu}\omega_{\mu\nu}d\xi^{\nu} \equiv \theta_{\nu}d\xi^{\nu} \ . \tag{3.2}$$

É simples mostrar que exprimindo a derivada exterior de (3.2) se recupera a forma simplética escrita como em (2.46). Levando em conta que os $\omega_{\mu\nu}$ são constantes, usando a propriedade (2.53) ter-se-á:

$$d\theta = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}d(\xi^{\mu}d\xi^{\nu}) = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\left[d\xi^{\mu}\wedge d\xi^{\nu} + \xi^{\mu}\cancelto{0}{d(d\xi^{\nu})}\right] = \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}d\xi^{\mu}\wedge d\xi^{\nu} = \omega \ .$$

Por outro lado, lembre-se que na definição da hamiltoniana local apresentada na equação (2.19) a função lagrangiana é vista como uma função dos $(q;p)$, pois $L = L\big(q;\dot{q}(q;p)\big)$; ou seja, é função das variáveis canônicas q e p. A lagrangiana escrita dessa forma será denotada por L_c. Logo, em termos das coordenadas unificadas, em princípio, ter-se-á que $L_c = L_c(\xi)$. Também é possível escrever L_c apenas em termos dos ξ^{μ} (e possivelmente das suas derivadas temporais) partindo de (2.19):

$$L_c = p_a\dot{q}^a - H(q;p) \ ,$$

Neste ponto é preciso usar um importante resultado apresentado na subseção 2.1.5: Uma condição necessária e suficiente para que duas lagrangianas locais associadas a um mesmo sistema forneçam as mesmas equações de movimento é que elas difiram na derivada total (em relação à variável temporal) de uma função $f = f(q;t)$. Esse resultado é valido no espaço de configuração que tem às coordenadas generalizadas q^a como coordenadas independentes. No entanto, a lagrangiana empregada para obter as equações canônicas de Hamilton a partir do princípio variacional no final da subseção 2.2.1 é uma função no espaço de fase, no qual as coordenadas independentes são tanto os q^a quanto os p_a. Então, por um raciocínio análogo, no espaço de fase as equações E-L permanecem invariantes se e somente se as lagrangianas diferem na derivada total de uma função $g = g(q;p;t)$. Logo, pode-se fazer o seguinte:

$$\begin{aligned} L_c = p_a\dot{q}^a - H(q;p) &\cong p_a\dot{q}^a - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p_aq^a) - H(q;p) \\ &= \frac{1}{2}\left\{p_a\dot{q}^a - \left[\frac{d}{dt}(p_aq^a) - p_a\dot{q}^a\right]\right\} - H(q;p) \\ &= \frac{1}{2}(p_a\dot{q}^a - \dot{p}_aq^a) - H(q;p) \overset{(3.1)}{=} \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\xi^{\mu}\dot{\xi}^{\nu} - H(\xi) \ . \end{aligned}$$

Comparando este último resultado com (3.2) observa-se que a lagrangiana L_c pode ser escrita em termos das componentes locais da $1-$forma de Liouville segundo:

$$L_c(\xi;\dot{\xi}) = \theta_\nu(\xi)\dot{\xi}^\nu - H(\xi)\ . \tag{3.3}$$

Aqui cabe um comentário de grande importância: Dadas as coordenadas ξ^μ do espaço de fase, diz-se que a lagrangiana está escrita em sua **forma canônica** (3.3) quando ela é **linear nas "velocidades"**[1], $\dot{\xi}^\nu$. O método de Faddeev-Jackiw que será apresentado a seguir, é desenvolvido para uma lagrangiana escrita na forma canônica.

Até este ponto, toda a construção acima foi feita para o caso particular no qual a forma simplética ω provém da matriz Ω inserida na equação (2.35).

O seguinte será considerar o caso mais geral possível, no qual o conjunto $(T^*\mathbb{Q},\omega)$, com $\omega = d\theta$, não necessariamente é uma variedade simplética. Lembre-se que em (2.63) foi definido o mapa $\Lambda : T\mathbb{Q} \to T^*\mathbb{Q}$ que permitiu obter a $1-$forma em $T\mathbb{Q}$, $\tilde{\theta} = \Lambda^*\theta$. Agora, de maneira similar a como foi introduzido o campo vetorial dinâmico Δ (que é um campo vetorial em $T^*\mathbb{Q}$) na equação (2.40), define-se o seguinte campo vetorial em $T\mathbb{Q}$:

$$\tilde{\Delta} = \dot{\zeta}^\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha_\chi} = \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q^b_\chi} + \ddot{q}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b_\chi}\ .$$

É possível provar que os campos $\tilde{\Delta}$ e Δ estão relacionados segundo:

$$\Delta_\xi = \Lambda_{*\zeta}\big(\tilde{\Delta}_\zeta\big)\ , \tag{3.4}$$

onde $\Lambda_* : T_\zeta(T\mathbb{Q}) \to T_{\Lambda(\zeta)}(T^*\mathbb{Q})$ corresponde à operação chamada de *pushforward*, que indiretamente permite obter um campo vetorial em $T^*\mathbb{Q}$ a partir de um em $T\mathbb{Q}$. Por outro lado, dado um mapa entre variedades diferenciáveis $F : M \to N$, se α é uma $1-$forma em N, o seu pullback por F é a $1-$forma $F^*\alpha$ em M definida como:

$$(F^*\alpha)_p(v) = \alpha_{F(p)}\big(F_{*p}(v)\big) \qquad , \qquad \text{para } p \in M \text{ e } v \in T_pM.$$

[1] Os $\dot{\xi}^\nu$ são chamados de velocidades no sentido de que são as derivadas temporais das coordenadas do espaço de fase.

Então, para $F = \Lambda$, $\alpha = \theta$ e $v = \tilde{\Delta}_\zeta$, a seguinte relação é satisfeita:

$$(\Lambda^*\theta)_\zeta(\tilde{\Delta}_\zeta) = \theta_{\Lambda(\zeta)}\big(\Lambda_{*\zeta}(\tilde{\Delta}_\zeta)\big) \ ,$$

ou também, usando (3.4):

$$\tilde{\theta}_\zeta(\tilde{\Delta}_\zeta) = \theta_\xi(\Delta_\xi) \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{\theta}(\tilde{\Delta}) = \theta(\Delta) \ .$$

Em termos das coordenadas locais em $T\mathbb{Q}$ o termo no lado esquerdo resulta:

$$\tilde{\theta}(\tilde{\Delta}) = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} dq^a\right)\left(\dot{q}^b \frac{\partial}{\partial q^b} + \ddot{q}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^b dq^a \left(\frac{\partial}{\partial q^b}\right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^b \delta^a_b = p_a \dot{q}^a \ ;$$

enquanto que o termo do lado direito é:

$$\theta(\Delta) = \theta_\nu \Delta^\nu \overset{(2.39)}{=} \theta_\nu \dot{\xi}^\nu \ .$$

Com isto, a seguinte igualdade foi obtida:

$$p_a \dot{q}^a = \theta_\nu \dot{\xi}^\nu \ .$$

Assim, se tem que, em geral, a lagrangiana canônica L_c pode ser escrita como:

$$L_c = p_a \dot{q}^a - H_c(q;p) = \theta_\nu \dot{\xi}^\nu - H_c(\xi) \ ,$$

que coincide com o que foi obtido na equação (3.3). Com isto, é demonstrado que, em geral, qualquer lagrangiana pode ser escrita na sua forma canônica. Por outro lado, note-se que aqui foi usada a notação H_c, que representa à *hamiltoniana canônica*, que é simplesmente o nome que recebe a função construída da mesma maneira que a hamiltoniana no caso regular, mas para sistemas singulares.

Por outro lado, também é possível obter as componentes $\omega_{\mu\nu}$ da $2-$forma ω em termos das derivadas dos θ_ν; para isso basta determinar a derivada exterior de $\theta = \theta_\nu d\xi^\nu$:

$$d\theta = d\theta_\nu \wedge d\xi^\nu + \theta_\nu \cancelto{0}{d(d\xi^\nu)} = \frac{\partial \theta_\nu}{\partial \xi^\mu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \ . \tag{3.5}$$

Aqui se deve levar em conta que $\{d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu\}_{\mu<\nu}$ é uma base para o espaço de $2-$formas em $\mathbb{F}$; mas, por definição, o produto exterior essencialmente é um produto tensorial antissimetrizado e consequentemente qualquer $2-$forma é também

um tensor $(0,2)$. Em consequência, os objetos $\dfrac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu}$ podem ser considerados como as componentes de um tensor $(0,2)$. Por outro lado, uma vez que qualquer tensor de segunda ordem pode ser escrito como a suma das suas partes simétrica e antissimétrica, pode-se fazer o seguinte:

$$\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} + \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\right) \ .$$

Observe-se que na equação (3.5) as componentes $\dfrac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu}$ estão contraídas com a forma antissimétrica $d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu$, e consequentemente somente a parte antissimétrica contribuirá ao produto. Com isto, (3.3) adota a forma:

$$d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\right) d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \ ;$$

mas, como $d\theta = \omega = \dfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu$, se identifica:

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu} \ . \tag{3.6}$$

Neste ponto é muito importante ressaltar que uma vez que a lagrangiana canônica apresentada em (3.3) é função de ξ e $\dot{\xi}$, a ação será um funcional definido sobre as curvas $\xi = \xi(t)$:

$$S[\xi] = \int_{t_1}^{t_2} L_c(\xi;\dot{\xi};t)dt. \tag{3.7}$$

Lembre-se que a ação apresentada na equação (2.15) é um funcional das curvas $q = q(t)$, que são representações locais de curvas sobre a variedade de configuração $\mathbb{Q}$. Então, fazendo uma razoável analogia, observa-se que a ação (3.7) é construída de maneira similar, mas *"tomando como variedade de configuração"* à variedade de fase $\mathbb{F}$. Logo, em virtude do princípio de Hamilton, as equações de movimento correspondentes serão:

$$\frac{\delta S}{\delta\xi^\mu} = \frac{\partial L_c}{\partial\xi^\mu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_c}{\partial\dot{\xi}^\mu}\right) = 0 \ ,$$

Com isto:

$$\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu}\dot{\xi}^\nu - \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu} - \frac{d}{dt}(\theta_\nu\delta^\nu_\mu) = 0$$
$$\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu}\dot{\xi}^\nu - \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\dot{\xi}^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \Big(\underbrace{\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}}_{\omega_{\mu\nu}}\Big)\dot{\xi}^\nu = \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu}\,,$$

Logo, a seguintes equações foram obtidas:

$$\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^\nu = \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu}\,, \tag{3.8}$$

que coincidem com as equações de Hamilton apresentadas em (2.37) no caso não-singular. Porém, está sendo considerado o caso geral, no qual a $2-$forma ω não necessariamente é simplética e por essa razão, não se deve assumir a existência da sua inversa.

É interessante observar que as equações de movimento permanecem inalteradas sob a seguinte transformação:

$$\theta_\nu \quad \longrightarrow \quad \theta'_\nu = \theta_\nu + \frac{\partial G}{\partial\xi^\nu}\,,$$

onde $G = G(\xi)$ é a representação local de uma função em $T^*\mathbb{Q}$. Devido a essa transformação a lagrangiana canônica muda segundo:

$$L_c \quad \longrightarrow \quad L'_c = \theta'_\nu\dot{\xi}^\nu - H = L_c + \frac{\partial G}{\partial\xi^\nu}\dot{\xi}^\nu = L_c + \frac{dG}{dt}\,,$$

mas como L'_c e L_c diferem apenas na derivada total de uma função, são lagrangianas equivalentes, no sentido de que conduzem às mesmas equações de movimento.

Agora considere-se o caso de um sistema singular, no qual a lagrangiana canônica se escreve como:

$$L_c(\xi;\dot{\xi}) = \theta_\nu(\xi)\dot{\xi}^\nu - H_c(\xi)\,, \tag{3.9}$$

neste caso a $2-$forma ω é degenerada e consequentemente não é uma forma simplética, mas pré-simplética (pois desde que $\omega = d\theta$, ω é uma forma fechada). Então, a matriz associada Ω, cujos elementos são $\omega_{\mu\nu}$ não será invertível, o

que implica que o posto de Ω é menor que a sua dimensão $2n \stackrel{!}{=} N$ e assim $N = posto(\Omega) + M$.

Existe uma versão generalizada do teorema de Darboux que estabelece o seguinte: Sejam M uma variedade $(2R + M)-$dimensional e ω, uma $2-$forma fechada de posto $2R$ (constante). Para todo $p \in M$ existe uma carta $(\mathscr{W}, \varphi)$ ao redor de p tal que:

$$\omega\big|_{\mathscr{W}} = dP_{r,\varphi} \wedge dQ^r_{\varphi} \ ,$$

onde as coordenadas locais nessa carta são $(Q^1, \cdots, Q^R; P_1, \cdots, P_R; Z^1, \cdots, Z^M)$, chamadas também de coordenadas de Darboux [31].

O método de Faddeev-Jackiw (F-J) faz uso das coordenadas de Darboux, pois com elas as primeiras $2R$ filas e $2R$ colunas da matriz associada à $2-$forma pré-simplética ω (denotada por Ω) formarão um bloco na forma $\begin{pmatrix} 0 & -I_R \\ I_R & 0 \end{pmatrix}$ e assim M graus de liberdade (que correspondem às coordenadas Z^m) poderão ser tirados da nova $1-$forma canônica (cuja derivada exterior dá a forma simplética $2R \times 2R$ contida na matriz Ω); contudo, eles permanecem na lagrangiana L_c escrita em termos dessas coordenadas:

$$L_c = P_r \dot{Q}^r - H'(Q; P; Z) \ .$$

As equações de movimento associadas às variáveis Z^m são:

$$\frac{\partial H'}{\partial Z^m} = 0 \qquad (m = 1, \cdots, M), \tag{3.10}$$

e permitem eliminar, em um caso geral, ao máximo $M_1 < M$ coordenadas Z^m, podendo expressá-las como funções das outras coordenadas:

$$Z^{m_1} = Z^{m_1}(Q; P; Z^{M_1+1}, \cdots, Z^M) \qquad , \qquad (m_1 = 1, \cdots, M_1) \ . \tag{3.11}$$

As outras $K = M - M_1$ equações obtidas a partir de (3.10) serão relações que envolvem apenas às coordenadas Q^r e P_r :

$$\vartheta_{m_2}(Q; P) = 0 \qquad , \qquad (m_2 = M_1 + 1, \cdots, M) \ .$$

Aliás, o fato de que as variáveis Z^{m_2} não possam ser eliminadas nas equações

(3.10) sugere que elas aparecem linearmente em H'. Logo, substituindo (3.11) em L_c obter-se-á:

$$L_c = P_r\dot{Q}^r - H''(Q;P) - Z^{m_2}\vartheta_{m_2}(Q;P)\ ,$$

fazendo $\lambda^k \overset{!}{=} Z^{M_1+k}$, a equação acima pode ser escrita simplesmente como:

$$L_c = P_r\dot{Q}^r - H''(Q;P) - \lambda^k\vartheta_k(Q;P) \qquad (k=1,\cdots,K)\ ,$$

Uma vez que só estão presentes as coordenadas $(P;Q;\lambda)$, a lagrangiana acima pode ser vista como o resultado de impor as condições

$$\vartheta_k(Q;P) = 0 \tag{3.12}$$

ao problema variacional sobre o espaço de fase (reduzido) com coordenadas locais $(Q;P)$ por meio dos multiplicadores de Lagrange $\lambda^k = \lambda^k(t)$. A presença das restrições (3.12) implica que não todas as coordenadas $(Q;P)$ são independentes. Depois de ter sido identificadas as coordenadas independentes, elas podem ser tomadas como novas coordenadas unificadas ξ no espaço de Fase. O procedimento anterior deve ser repetido até que desapareçam as coordenadas do tipo Z obtidas na transformação para obter as coordenadas de Darboux; o objetivo é obter um sistema sem restrições (ou seja, não singular) que permita obter uma forma simplética, cuja inversa permitirá obter os parênteses de Poisson das variáveis remanentes, as quais representarão os verdadeiros graus de liberdade (físicos) do sistema. O processo anterior é conhecido como **redução de Faddeev-Jackiw**.

Se bem, em princípio, o método F-J fornece um algoritmo eficiente que permite reduzir os graus de liberdade de um sistema singular até identificar os graus de liberdade com conteúdo físico e cujos parênteses de Poisson podem ser diretamente determinados, a principal dificuldade são as transformações necessárias para obter as coordenadas de Darboux, pois, o teorema de Darboux (generalizado) apenas garante a existência dessas coordenadas, mas não especifica como obtê-las. Frente a essa situação, Barcelos-Neto e Wotzasek (BN-W) desenvolveram um algoritmo [13] que conduz aos mesmos resultados mas sem a necessidade de fazer as transformações de Darboux, e consequentemente, não reduzindo iterativamente o espaço de fase, mas expandindo-o em cada etapa. Na seguinte seção será apresentada a proposta de BN-W para facilitar o método F-J.

3.1 Contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek ao método F-J

No caso singular, a $2-$forma $\omega = d\theta$ (onde θ é a $1-$forma canônica cujas componentes são obtidas a partir da lagrangiana escrita na sua forma canônica (3.9)) é uma forma pré-simplética, pois é degenerada. Em consequência, o posto da matriz associada Ω é menor que a dimensão do espaço de fase $\mathbb{F}$; isto é, se $(\xi^1; \cdots ; \xi^N)$ são as coordenadas locais de $\mathbb{F}$, ter-se-á que $N = posto(\Omega) + M$.

A singularidade de Ω implica que a matriz transposta Ω^T também é singular; então, Ω^T tem $M < N$ autovetores v_m linearmente independentes tais que:

$$\Omega^T v_m = 0\,, \quad \text{ou também} \quad [v_m]^T \Omega = 0 \qquad (m = 1, \cdots, M)\,.$$

Logo, pode-se fazer:

$$[v_m]^T \Omega \dot{\xi} \overset{(3.8)}{=} [v_m]^T \frac{\partial H_c}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left([v_m]^1 \quad \cdots \quad [v_m]^N\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial H_c}{\partial \xi^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H_c}{\partial \xi^N} \end{pmatrix} = 0\,.$$

Assim, se obtêm as seguintes M equações:

$$\Gamma_m(\xi) \overset{!}{=} [v_m]^\mu \frac{\partial H_c}{\partial \xi^\mu} = 0 \qquad ; \qquad m = 1, \cdots, M\,.$$

Essas equações na presente abordagem serão chamadas de **vínculos**, no sentido de que são funções das coordenadas ξ^μ que restringem os graus de liberdade do sistema. Esses vínculos são responsáveis pelo caráter singular do sistema e, consequentemente, se deve exigir que permaneçam inalterados com a evolução temporal do sistema; para garantir isto serão impostas as seguintes condições:

$$\frac{d}{dt}\Gamma_m^{(0)} = \frac{\partial \Gamma_m^{(0)}}{\partial \xi^{(0)\mu}} \dot{\xi}^{(0)\mu} = 0 \qquad ; \qquad m = 1, \cdots, M \quad \text{e} \quad \mu = 1, \cdots, N$$

onde o índice superior (0) é inserido devido a que o procedimento a seguir é iterativo. Agora, essas novas restrições devem ser incorporadas no funcional ação, para isso é necessário fazer uso dos multiplicadores de Lagrange $\lambda^{(0)m}$, os quais

deverão ser também considerados como coordenadas junto às variáveis dinâmicas $\xi^{(0)}$, e que ademais serão incluídos na função lagrangiana como funções do tempo. Com isso, constrói-se a seguinte lagrangiana local (em primeira iteração):

$$L_c^{(1)}(\xi^{(0)},\dot{\xi}^{(0)};\lambda^{(0)}) \doteq L_c^{(0)}(\xi^{(0)};\dot{\xi}^{(0)}) - \dot{\Gamma}_m^{(0)}(\xi^{(0)})\lambda^{(0)m}(t) \ ,$$

que também pode-se escrever como:

$$L_c^{(1)} = L_c^{(0)} + \Gamma_m^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)m} - \frac{d}{dt}\left(\Gamma_m^{(0)}\lambda^{(0)m}\right) \ ,$$

e, usando o fato de que o último termo não contribui:

$$L_c^{(1)} \cong L_c^{(0)} + \Gamma_m^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)m} \ .$$

Agora, definem-se as variáveis $\xi^{(1)}$ segundo $\xi^{(1)} \doteq \begin{pmatrix}\xi^{(0)}\\ \lambda^{(0)}\end{pmatrix}$, ou também:

$$\left(\xi^{(1)1};\cdots;\xi^{(1)N};\xi^{(1)N+1};\cdots;\xi^{(1)N+M}\right) \doteq \left(\xi^{(0)1},\cdots,\xi^{(0)N};\lambda^{(0)1},\cdots,\lambda^{(0)M}\right) \ .$$

Com isto:

$$L_c^{(1)} = \theta_\mu^{(0)}\dot{\xi}^{(0)\mu} - H_c^{(0)}\Big|_{\Gamma_m^{(0)}=0\ ,\ \forall m} + \Gamma_m^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)m} \ , \tag{3.13}$$

definindo $\theta^{(1)} \doteq \begin{pmatrix}\theta^{(0)} & \Gamma^{(0)}\end{pmatrix} \equiv \left(\theta_1^{(0)},\cdots,\theta_N^{(0)};\Gamma_1^{(0)},\cdots,\Gamma_M^{(0)}\right)$ ter-se-á:

$$\theta_\mu^{(0)}\dot{\xi}^{(0)\mu} + \Gamma_m^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)m} = \begin{pmatrix}\theta^{(0)} & \Gamma^{(0)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\xi}^{(0)}\\ \dot{\lambda}^{(0)}\end{pmatrix} = \theta_\alpha^{(1)}\dot{\xi}^{(1)\alpha} \qquad (\alpha = 1,\cdots,N+M) \ .$$

Por outro lado, fazendo $H_c^{(1)} = H_c^{(0)}\big|_{\Gamma_m^{(0)}=0\ ,\ \forall m}$, a equação (3.13) pode ser escrita como:

$$L_c^{(1)} = \theta_\alpha^{(1)}\dot{\xi}^{(1)\alpha} - H_c^{(1)} \ , \tag{3.14}$$

que tem a mesma forma que a lagrangiana (3.9), onde $\theta^{(1)}$ é uma nova $1-$forma (1-iterada) definida sobre a variedade produto $T\mathbb{Q}^* \times \Sigma^{(0)}$, sendo $\Sigma^{(0)}$ uma variedade $M-$dimensional com componentes locais $\left(\lambda^{(0)1};\cdots;\lambda^{(0)M}\right)$. Logo, seguindo a analogia, pode-se definir uma $2-$forma $\omega^{(1)} \stackrel{!}{=} d\theta^{(1)}$:

$$\theta^{(1)} = \theta_\alpha^{(1)}d\xi^{(1)\alpha} \quad \Rightarrow \quad \omega^{(1)} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}^{(1)}d\xi^{(1)\alpha}\wedge d\xi^{(1)\beta} \ .$$

As componentes $\omega^{(1)}_{\alpha\beta}$ serão os elementos da matriz associada $\Omega^{(1)}$ e cumprirão uma relação similar a (3.6):

$$\omega^{(1)}_{\alpha\beta}(\xi^{(1)}) = \frac{\partial\theta^{(1)}_{\beta}}{\partial\xi^{(1)\alpha}} - \frac{\partial\theta^{(1)}_{\alpha}}{\partial\xi^{(1)\beta}} \, .$$

Pela forma que foram definidas as quantidades em primeira ordem de iteração (i.e., aquelas que têm índice superior (1)) pode-se escrever $\alpha = (\mu, m)$ e $\beta = (\nu, m')$, com $\mu, \nu = 1, \cdots, N$ e $m, m' = 1, \cdots, M$. Logo:

$$\Omega^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \omega^{(1)}_{\mu\nu} & \omega^{(1)}_{\mu m} \\ \hline \omega^{(1)}_{m\nu} & \omega^{(1)}_{mm'} \end{array} \right) \, ,$$

com:

$$\omega^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{\partial\theta^{(0)}_{\nu}}{\partial\xi^{(0)\mu}} - \frac{\partial\theta^{(0)}_{\mu}}{\partial\xi^{(0)\nu}} = \omega^{(0)}_{\mu\nu} \quad , \quad \omega^{(1)}_{\mu m'} = \frac{\partial\Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial\xi^{(0)\mu}} - \cancelto{0}{\frac{\partial\theta^{(0)}_{\mu}}{\partial\lambda^{(0)m'}}} = \frac{\partial\Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial\xi^{(0)\mu}} \, ,$$

$$\omega^{(1)}_{m\nu} = \cancelto{0}{\frac{\partial\theta^{(0)}_{\nu}}{\partial\lambda^{(0)m}}} - \frac{\partial\Gamma^{(0)}_{m}}{\partial\xi^{(0)\nu}} = -\frac{\partial\Gamma^{(0)}_{m}}{\partial\xi^{(0)\nu}} \quad , \quad \omega^{(1)}_{mm'} = \frac{\partial\Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial\lambda^{(0)m}} - \frac{\partial\Gamma^{(0)}_{m}}{\partial\lambda^{(0)m'}} = 0 \, .$$

Assim, a matriz anterior adota a forma:

$$\Omega^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \Omega^{(0)} & \dfrac{\partial\Gamma^{(0)}_{m}}{\partial\xi^{(0)\mu}} \\ \hline -\dfrac{\partial\Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial\xi^{(0)\nu}} & \mathbf{0}_M \end{array} \right)$$

Daqui, observa-se que a matriz $\Omega^{(0)}$, associada à 2-forma $\omega^{(0)}$ está contida na matriz $\Omega^{(1)}$ no bloco constituído pelas primeiras N filas e N colunas. Com isto, se $\Omega^{(1)}$ resulta ser invertível, a 2-forma $\omega^{(1)}$ será simplética e a inversa dela permitirá definir uma estrutura de Poisson, segundo (2.59). Contudo, desde que as variáveis $\lambda^{(0)}$ são simplesmente multiplicadores de Lagrange (que foram inseridos para exigir a preservação do caráter singular do sistema original), não têm interesse físico. Assim, os parênteses de Poisson correspondentes às verdadeiras variáveis dinâmicas $\xi^{(0)}$ poderão ser obtidos a partir do bloco das N primeiras filas e N primeiras colunas de $[\Omega^{(1)}]^{-1}$, em conformidade com (2.58)

Por outro lado, se for o caso de que a matriz $\Omega^{(1)}$ resulta ser singular, todo o processo anterior deverá ser repetido; i. e.: determinar os autovetores associados ao autovalor 0 de $\Omega^{(1)}$ e com eles determinar os vínculos $\Gamma^{(1)}$, responsáveis da singularidade de $\Omega^{(1)}$, e logo impor a restrição $\dot{\Gamma}^{(1)} = 0$ à ação inserindo novos multiplicadores de Lagrange $\lambda^{(1)}$, o qual implicará *expandir* o espaço de fase para as novas coordenadas locais $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix}$. O seguinte será definir a 1-forma $\theta^{(2)} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} & \Gamma^{(1)} \end{pmatrix}$; finalmente, a $2-$forma $\omega^{(2)} = d\theta^{(2)}$ será a nova candidata para ser a forma simplética do sistema estendido. O procedimento deve ser repetido tantas vezes como seja necessário até obter uma matriz regular $\Omega^{(n)}$.

3.2 Exemplos

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos de sistemas singulares e a implementação do método F-J para obter os parênteses de Poisson correspondentes às variáveis dinâmicas que permitam escrever a função lagrangiana em sua forma canônica.

3.2.1 Exemplo 1

Considere-se o caso de uma partícula imersa em uma região espacial bidimensional (que será representada pelo plano xy) com um campo magnético externo. Em geral, dados os potenciais escalar A_0 y vetorial $\vec{A}$, que são funções da posição (e possivelmente do tempo), a função lagrangiana vem dada segundo:

$$L(\vec{x};\vec{v}) = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + \vec{v}\cdot\vec{A} - A_0 \,, \tag{3.15}$$

onde, por comodidade, se está considerando o sistema de unidades tal que $e = 1$ y $c = 1$, (unidades naturais).

Os momentos canônicos conjugados resultam:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + A_i \qquad ; \qquad i = 1, 2 \,. \tag{3.16}$$

Com isto:

$$\vec{p} = m\vec{v} + \vec{A}\ , \qquad \text{ou também} \qquad \vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \vec{A})\ .$$

Logo, a função hamiltoniana $H(\vec{q};\vec{p}) = \vec{p}\cdot\vec{v} - L$ resulta:

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}\cdot\vec{v} - \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} - \vec{v}\cdot\vec{A} + A_0 = \vec{v}\cdot(\vec{p} - \frac{1}{2}m\vec{v} - \vec{A}) + A_0 \\ &= \frac{1}{m}(\vec{p}-\vec{A})\cdot(m\vec{v} + \vec{A} - \frac{1}{2}m\vec{v} - \vec{A}) + A_0 = \frac{1}{m}(\vec{p}-\vec{A})\cdot\frac{1}{2}m\vec{v} + A_0 \\ &= \frac{1}{2m}(\vec{p}-\vec{A})\cdot(\vec{p}-\vec{A}) + A_0 = \frac{1}{2m}(\vec{p}-\vec{A})^2 + A_0\ . \end{aligned}$$

Ou também:

$$H = \frac{1}{2m}(p_i - A_i)(p_i - A_i) + A_0 \tag{3.17}$$

Agora suponha-se que os potenciais A_0 y $\vec{A}$ independem do tempo (explicitamente) e que $\vec{A}$ (que propriamente é um campo vetorial) tem simetria de rotação. Nesse caso ter-se-á:

- Potencial escalar: $A_0 = A_0(r)$.
- Potencial vetorial: $\vec{A} = A(r)\vec{x}_\perp$, com $\vec{x}_\perp = (x_2; x_1)$.

Note-se também o seguinte:

$$\begin{aligned} A_1 = x_2 A(r) \quad , \quad A_2 = -x_1 A(r) \quad \Rightarrow \quad A_i &= (\delta_{i1}x_2 - \delta_{i2}x_1)A(r) \\ &= (\delta_{i1}\delta_{j2} - \delta_{i2}\delta_{j1})x_j A(r) \\ &= \epsilon_{ij}x_j A(r)\ . \end{aligned}$$

Mais ainda, escolhendo $A(r) = -\dfrac{B}{2} < 0$, ter-se-á:

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(-x_2; x_1)\ .$$

Com isto, o *campo* magnético[2] B_z resulta:

$$B_z = \epsilon_{ij}\partial_i\big(\epsilon_{jk}x_k A(r)\big) = -\epsilon_{ji}\epsilon_{jk}\delta_{ik}A(r) = -\delta_{ik}\delta_{ik}A(r) = -2A(r) = B\ ,$$

[2]Rigorosamente $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = (0;0;\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)$, que é um campo vetorial na direção do eixo z, mas como tem apenas uma componente, a ele se associa a quantidade escalar $B_z = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = (\delta_{i1}\delta_{j2} - \delta_{i2}\delta_{j1})(\partial_i A_j) = \epsilon_{ij}\partial_i A_j$. De fato, geralmente é usada a seguinte notação para o produto vetorial de dois vetores sobre o plano xy: $\vec{x}\times\vec{y} \overset{!}{=} x_1y_2 - x_2y_1 = \epsilon_{ij}x_i y_j$.

donde observa-se que, sob as considerações acima, o campo magnético resulta ser uniforme.

Adicionalmente, seja o caso de um potencial escalar da forma $A_0 = \frac{1}{2}kr^2$. Com todas as considerações anteriores a lagrangiana resulta:

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2} + \vec{v}\cdot A(r)\vec{x}_\perp - \frac{1}{2}k\vec{x}^{\,2}\,.$$

Agora deve observar-se o seguinte:

$$\vec{v}\cdot\vec{x}_\perp = (\dot{x}_1;\dot{x}_2)\cdot(x_2;-x_1) = \dot{x}_1x_2 - \dot{x}_2x_1 \overset{!}{=} \dot{\vec{x}}\times\vec{x}\,,$$

com isto, a lagrangiana (3.15) pode ser escrita como:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^{\,2} - \frac{B}{2}\dot{\vec{x}}\times\vec{x} - \frac{1}{2}k\vec{x}^{\,2}\,.$$

Usando (3.16) ter-se-á que os momentos canônicos conjugados são:

$$p_i = mv_i + \epsilon_{ij}x_jA(r) = mv_i - \frac{B}{2}\epsilon_{ij}x_j\,.$$

Também, usando (3.17) a hamiltoniana resulta:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_i + \frac{B}{2}\epsilon_{ij}x_j\right)\left(p_i + \frac{B}{2}\epsilon_{ik}x_k\right) + \frac{1}{2}kx_ix_i\,.$$

As variáveis do espaço de fase de esse sistema são:

$$\xi^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & p_1 & p_2 \end{pmatrix}\,, \tag{3.18}$$

A $1-$forma canônica é dada por $\theta = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = p_idx_i$ e seguidamente define-se a $2-$forma $\omega = d\theta = dp_i\wedge dx_i = \begin{pmatrix} 0_2 & -I_2 \\ I_2 & 0_2 \end{pmatrix}$, essa matriz é claramente regular e, portanto, ω é uma forma simplética (fechada e não-degenerada); logo, o sistema apresentado é regular.

É possível obter um sistema singular a partir do sistema apresentado acima fazendo $m \to 0$ [32], com o qual:

- Função lagrangiana: $L = -\frac{B}{2}\dot{\vec{x}} \times \vec{x} - \frac{1}{2}k\vec{x}^2 = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}\dot{x}_i x_j - \frac{1}{2}k\vec{x}^2$.
- Momentos canônicos conjugados: $p_i = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x_j$.
- Função hamiltoniana: $H_c = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x_j\dot{x}_i + \frac{B}{2}\epsilon_{ij}\dot{x}_i x_j + \frac{1}{2}k\vec{x}^2 = \frac{1}{2}k\vec{x}^2$.

Observe-se que a lagrangiana é uma função de primeira ordem nas velocidades $\dot{x}_i$; além disso, os momentos canônicos p_i são funções das coordenadas x_i e devido a isso, as $1-$formas dx_i e dp_i não serão independentes; isto sugere que (3.18) não é uma boa escolha para as coordenadas do espaço de fase. Por outro lado, em conformidade com o método F-J, essa lagrangiana já está na sua forma canônica em relação às variáveis x_i, pois ela tem a forma:

$$L(\vec{x};\dot{\vec{x}}) = \theta_i(\vec{x})\dot{x}_i - H(\vec{x}) \qquad , \qquad \text{com:} \quad \theta_i = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x_j \ .$$

Então, nessas coordenadas, a $1-$forma canônica é $\theta = \theta_i dx_i$. Tomando a derivada exterior, se obtém a $2-$forma:

$$\omega = d\theta = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}dx_j \wedge dx_i = \frac{B}{2}\epsilon_{ij}dx_i \wedge dx_j \ .$$

Logo, levando em conta que $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx_i \wedge dx_j$, encontra-se que os elementos da matriz associada à $2-$forma ω são $\omega_{ij} = B\epsilon_{ij}$. Explicitamente a matriz envolvida é:

$$\Omega = B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

a qual é invertível e consequentemente ω resulta ser uma forma simplética cuja inversa permitirá obter diretamente os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas escolhidas:

$$\omega_{ij}^{-1} = -\frac{1}{B}\epsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad \{x_i; x_j\} = -\frac{1}{B}\epsilon_{ij} \ .$$

Mais ainda, uma vez que os momentos canônicos p_i são funções das coordenadas x_i, também pode-se obter os parênteses de Poisson que envolvem os p_i :

- $\{x_i; p_j\} = \{x_i; -\frac{B}{2}\epsilon_{jk}x_k\} = -\frac{B}{2}\epsilon_{jk}\{x_i; x_k\} = -\frac{B}{2}\epsilon_{jk}\left(-\frac{1}{B}\right)\epsilon_{ik} = \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\epsilon_{jk} = \frac{1}{2}\delta_{ij}$.

- $\{p_i; p_j\} = \{-\frac{B}{2}\epsilon_{ik}x_k; -\frac{B}{2}\epsilon_{j\ell}x_\ell\} = \frac{B^2}{4}\epsilon_{ik}\epsilon_{j\ell}\{x_k; x_\ell\} = -\frac{B}{4}\epsilon_{ik}\underbrace{\epsilon_{j\ell}\epsilon_{k\ell}}_{\delta_{jk}} = -\frac{B}{4}\epsilon_{ij}$.

3.2.2 Exemplo 2

Considere-se o caso de uma partícula movendo-se em um espaço 3-dimensional, em conformidade com a seguinte função lagrangiana [33]:

$$L = (q_2 + q_3)\dot{q}_1 + k\dot{q}_3 + \frac{1}{2}(k^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \ ,$$

com k constante. Os momentos canônicos conjugados às coordenadas q_i serão:

$$p_1 = q_2 + q_3 \qquad , \qquad p_2 = 0 \qquad , \qquad p_3 = k \ .$$

Com isto, a função hamiltoniana resulta:

$$H^{(0)} = -\frac{1}{2}(k^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \ .$$

Pode-se observar que essa lagrangiana é linear nas velocidades e consequentemente já está em sua forma canônica; então, se escolhem como coordenadas do espaço de fase simplesmente: $\xi^{(0)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Assim, identifica-se que a $1-$forma canônica resulta ser:

$$\theta^{(0)} = (q_2 + q_3)dq_1 + 0\,dq_2 + kdq_3 \equiv \begin{pmatrix} q_2 + q_3 & 0 & k \end{pmatrix} .$$

Logo, tomando a derivada exterior define-se a $2-$forma:

$$\omega^{(0)} = d\theta^{(0)} = dq_2 \wedge dq_1 + dq_3 \wedge dq_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Evidentemente a matriz associada $\Omega^{(0)}$ é singular e tem ao seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Logo, em conformidade com o método F-J, se tem o seguinte vínculo:

$$\Gamma^{(0)} = [v^{(0)}]^T \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi^{(0)}} = -\frac{\partial H^{(0)}}{\partial q_2} + \frac{\partial H^{(0)}}{\partial q_3} = -q_3 + (q_2 + q_3) = q_2 = 0 . \qquad (3.19)$$

O seguinte será impor que este vínculo seja preservado no tempo, o qual é conseguido introduzindo uma nova variável (multiplicador de Lagrange) $\lambda^{(0)}$ e construindo a nova lagrangiana:

$$L^{(1)} = \overbrace{\theta_\nu^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\nu} - H^{(0)}}^{L^{(0)}} \Big|_{\Gamma^{(0)}=0} + \Gamma^{(0)} \dot{\lambda}^{(0)} = \theta_\alpha^{(1)} \dot{\xi}^{(1)\alpha} - H^{(1)} ,$$

Assim:

$$L^{(1)} = (q_2 + q_3)\dot{q}_1 + k\dot{q}_3 + q_2\dot{\lambda}^{(0)} + \frac{1}{2}(k^2 - q_3^2) .$$

Ademais, a nova hamiltoniana será $H^{(1)} = -\frac{1}{2}(k^2 - q_3^2)$.

A introdução da variável $\lambda^{(0)}$ implica uma ampliação do espaço de fase às novas coordenadas $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix}$. Agora, se constrói a nova $1-$forma:

$$\theta^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta^{(0)} & \Gamma^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 + q_3 & 0 & k & q_2 \end{pmatrix} .$$

Com isto, a derivada exterior correspondente resulta na $2-$forma:

$$\omega^{(1)} = dq_2 \wedge dq_1 + dq_3 \wedge dq_1 + dq_2 \wedge d\lambda^{(0)} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz associada $\Omega^{(1)}$ é regular, pois $det(\Omega^{(1)}) = 1 \neq 0$. Logo, a matriz inversa

resulta:

$$[\Omega^{(1)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Devido à não-singularidade da matriz associada, a $2-$forma $\omega^{(1)}$ é não-degenerada e por tanto corresponde a uma forma simplética. Então, é possível definir uma estrutura de Poisson para as variáveis $\xi^{(1)}$ segundo $\{\xi^{(1)\alpha}; \xi^{(1)\beta}\} = \omega^{(1)\alpha\beta}$. Neste ponto é preciso lembrar que a variável auxiliar $\lambda^{(0)}$ foi introduzida (como multiplicador de Lagrange) apenas para impor a preservação no tempo (ou consistência) do vínculo $\Gamma^{(0)}$ e consequentemente não é de interesse físico. Assim, os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas originais estarão dadas pelo bloco constituído pelas três primeiras filas e colunas de $[\Omega^{(1)}]^{-1}$. Assim, encontra-se que os únicos parênteses não-nulos são:

$$\{q_1; q_3\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \{q_1; p_1\} = \{q_1; q_2 + q_3\} = 1 . \tag{3.20}$$

Agora um comentário interessante: Note-se que o vínculo obtido em (3.19), $q_2 = 0$, fixa a coordenada q_2 e em consequência ela não tem dinâmica. Pode-se ver que isso está em perfeita conformidade com as equações de movimento:

- $\dfrac{\delta S}{\delta q_1} = \dfrac{\partial L}{\partial q_1} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = 0 - \dfrac{d}{dt}(q_2 + q_3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = 0 .$
- $\dfrac{\delta S}{\delta q_2} = \dfrac{\partial L}{\partial q_2} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \dot{q}_1 - q_3 - \dfrac{d}{dt}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_1 - q_3 = 0 .$
- $\dfrac{\delta S}{\delta q_3} = \dfrac{\partial L}{\partial q_3} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}\right) = \dot{q}_1 - q_2 - q_3 - \dfrac{d}{dt}(k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_1 - q_2 - q_3 = 0 .$

Das equações de movimento para q_2 e q_3, observa-se que, com efeito, $q_2 = 0$. Isso sugere que uma melhor escolha para as coordenadas do espaço de fase $1-$iterado seria $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Com isto, as funções lagrangiana e hamiltoniana em primeira ordem de iteração serão:

$$L^{(1)} = L^{(0)}\big|_{\Gamma^{(0)}=0} = q_3\dot{q}_1 + k\dot{q}_3 + \frac{1}{2}(k^2 - q_3^2) \qquad , \qquad H^{(1)} = -\frac{1}{2}(k^2 - q_3^2) .$$

Logo, a $1-$forma canônica $1-$iterada e a derivada exterior dela são:

$$\theta^{(1)} = \begin{pmatrix} q_3 & k \end{pmatrix} \qquad , \qquad \omega^{(1)} = d\theta^{(1)} = dq_3 \wedge dq_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz $\Omega^{(1)}$ é regular e tem por inversa $[\Omega^{(1)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Com isto, os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas $\xi^{(1)}$ serão:

$$\{q_1; q_3\} = 1 \, ,$$

o qual é consistente com o resultado obtido em (3.20). Assim, pode-se concluir que no caso de haver vínculos que fixem alguma das variáveis dinâmicas do espaço de fase, tais vínculos podem ser impostos tanto à lagrangiana quanto à hamiltoniana para passar à seguinte ordem de iteração.

3.2.3 Exemplo 3

Seja uma partícula movendo-se em um espaço 2-dimensional segundo a seguinte lagrangiana [34]:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \, ,$$

onde α e β são constantes tais que $\alpha^2 \neq \beta \neq 0$.

O primeiro passo será expressar essa lagrangiana na sua forma canônica; mas, desde que ela tem termos de primeira e segunda ordem em $\dot{q}_1$, poderia parecer uma tarefa complicada. No entanto, é possível escrever essa lagrangiana da seguinte maneira:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - \alpha q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 + \frac{d}{dt}(q_1 q_2) \, ;$$

logo, o último termo pode ser suprimido, pois se trata de uma derivada temporal de uma função das coordenadas[3]. Assim, pode-se trabalhar simplesmente com a

[3]Lembre-se que duas lagrangianas que diferem na derivada temporal de uma função $f = f(q;t)$ são equivalentes, no sentido de que fornecem as mesmas equações de movimento.

lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - \alpha q_1 \dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \, .$$

Os momentos canônicos associados serão:

$$p_1 = \dot{q}_1 \qquad , \qquad p_2 = -\alpha q_1 \, . \tag{3.21}$$

Assim, a função hamiltoniana resulta:

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \, .$$

Logo, a lagrangiana pode ser escrita como:

$$L = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - H^{(0)} \, . \tag{3.22}$$

Embora a lagrangiana escrita nessa forma aparentemente é linear las velocidades, o fato de que $p_2 = -\alpha q_1$ sugere que $(q_1, q_2; p_1, p_2)$ não é uma boa escolha para as coordenadas do espaço de fase e consequentemente a lagrangiana (3.22) ainda não está escrita em sua forma canônica. Devido à dependência (linear) entre p_2 e q_1 serão escolhidas as seguintes coordenadas para o espaço de fase:

$$\xi^{(0)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \end{pmatrix} \, .$$

Com isto, a forma canônica da lagrangiana será:

$$L_c^{(0)} = p_1\dot{q}_1 - \alpha q_1 \dot{q}_2 - H^{(0)} \, .$$

Agora já é possível implementar o método F-J. Em primeiro lugar, a $1-$forma canônica é rapidamente identificada:

$$\theta^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1 & -\alpha q_1 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Com isto, define-se a $2-$forma:

$$\omega^{(0)} = d\theta^{(0)} = dp_1 \wedge dq_1 - \alpha dq_1 \wedge dq_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Posto que $\alpha \neq 0$, a matriz associada $\Omega^{(0)}$ é singular e tem o seguinte autovetor correspondente ao autovalor nulo:

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} .$$

Com isto, se constrói o seguinte vínculo:

$$\Gamma^{(0)} = \frac{\partial H^{(0)}}{\partial q_2} - \alpha \frac{\partial H^{(0)}}{\partial p_1} = \beta(q_1 - q_2) - \alpha p_1 = 0 ,$$

ou simplesmente:

$$p_1 = \frac{\beta}{\alpha}(q_1 - q_2) . \tag{3.23}$$

Para impor a consistência desse vínculo deve ser introduzida uma nova variável $\lambda^{(0)}$ e as coordenadas do espaço de fase estendido serão $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix}$. Além disso, as novas lagrangiana canônica e hamiltoniana resultam:

$$L^{(1)} = p_1\dot{q}_1 - \alpha q_1\dot{q}_2 + \left[\beta(q_1 - q_2) - \alpha p_1\right]\dot{\lambda}^{(0)} - H^{(1)} \qquad , \qquad H^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right) p_1^2 .$$

Agora se identifica a nova $1-$forma canônica:

$$\theta^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1 & -\alpha q_1 & 0 & \beta(q_1 - q_2) - \alpha p_1 \end{pmatrix} .$$

Tomando a derivada exterior de $\theta^{(1)}$, se obtém a $2-$forma:

$$\omega^{(1)} = dp_1 \wedge dq_1 - \alpha dq_1 \wedge dq_2 + \beta dq_1 \wedge d\lambda^{(0)} - \beta dq_2 \wedge d\lambda^{(0)} - \alpha dp_1 \wedge d\lambda^{(0)} .$$

Logo, a matriz associada resulta:

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -1 & \beta \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ -\beta & \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} .$$

O determinante dessa matriz é $det(\Omega^{(1)}) = (\alpha^2 - \beta)^2$ e como, por condição, $\alpha^2 \neq \beta$,

a matriz resulta ser regular e $\omega^{(1)}$, uma forma simplética. A matriz inversa é:

$$[\Omega^{(1)}]^{-1} = \frac{1}{\alpha^2-\beta}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ -\alpha & 0 & -\beta & -1 \\ \beta & \beta & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} .$$

Logo, a inversa da forma simplética $\omega^{(1)}$ permite definir uma estrutura de Poisson segundo:

$$\{\xi^{(1)\mu};\xi^{(1)\nu}\} = \omega^{(1)\mu\nu} .$$

Novamente, são de interesse apenas os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas originais; então, bastará considerar o bloco das três primeiras filas e colunas de $[\Omega^{(1)}]^{-1}$. Assim:

$$\{q_1;q_2\} = \frac{\alpha}{\alpha^2-\beta} \quad , \quad \{q_1;p_1\} = -\frac{\beta}{\alpha^2-\beta} \quad , \quad \{q_2;p_1\} = -\frac{\beta}{\alpha^2-\beta} . \tag{3.24}$$

Aqui cabe um comentário adicional: Lembre-se que a evolução temporal de uma função dinâmica $F = F(\xi^{(0)})$ deveria, em princípio, ser dada por:

$$\dot{F} = \{F;H^{(0)}\} ; \tag{3.25}$$

mas, a forma explícita desses parênteses não é conhecida. Porém, como já foram determinados os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas originais, é possível desenvolver (3.25). Considere-se, por exemplo, $F = q_1$:

$$\dot{q}_1 = \{q_1;H^{(0)}\} = \{q_1;\frac{1}{2}p_1^2 - \frac{\beta}{2}(q_1-q_2)^2\} = \frac{1}{2}\left(\{q_1;p_1^2\} - \beta\{q_1;(q_1-q_2)^2\}\right) .$$

Uma vez que os parênteses fornecidos pelo método F-J provêm da inversa de uma forma simplética, eles constituem uma estrutura de Poisson e consequentemente é possível aplicar as propriedades que a definem. Assim:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{1}{2}\Big(p_1\{q_1;p_1\} + \{q_1;p_1\}p_1 - \beta\big[(q_1-q_2)\{q_1;(q_1-q_2)\} + \{q_1;(q_1-q_2)\}(q_1-q_2)\big]\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big[2p_1\{q_1;p_1\} - 2\beta(q_1-q_2)\{q_1;q_1-q_2\}\big] = p_1\{q_1;p_1\} + \beta(q_1-q_2)\{q_1;q_2\} \\ &= p_1\left(-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta}\right) + \beta(q_1-q_2)\left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta}\right).\end{aligned}$$

Agora, usando o vínculo (3.23) ter-se-á:

$$\dot{q}_1 = -\frac{p_1\beta}{\alpha^2-\beta} + \beta\left(\frac{\alpha}{\beta}p_1\right)\frac{\alpha}{\alpha^2-\beta} = \frac{p_1(-\beta+\alpha^2)}{\alpha^2-\beta} = p_1 \ ,$$

o qual es consistente com a definição de p_1 apresentada em (3.21). Assim, observa-se que, seguindo a equação de movimento (3.25), os vínculos que aparecem no procedimento F-J também devem ser impostos nas equações de movimento.

Agora, neste ponto é importante lembrar que a hamiltoniana $1-$iterada já tem imposto o vínculo (3.23), pois ela é definida segundo $H^{(1)} = H^{(0)}\big|_{\Gamma^{(0)}=0}$, e em consequência, resulta equivalente considerar que o gerador da evolução temporal do sistema é a hamiltoniana $H^{(1)}$. Assim, a equação de movimento para uma função dinâmica F estaria dada por:

$$\dot{F} = \{F; H^{(1)}\} \ .$$

Para deixar em manifesto o fato anterior, tome-se novamente $F = q_1$, ter-se-á:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \{q_1; H^{(1)}\} = \{q_1; \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta}\right)p_1^2\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha^2}{\beta}\right)2\{q_1;p_1\}p_1 = \left(1-\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(-\frac{\beta}{\alpha^2-\beta}\right)p_1 = p_1 \ ,\end{aligned}$$

que coincide com o resultado obtido anteriormente.

Por outro lado, note-se que o vínculo (3.23), $p_1 = \dfrac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2)$, determina a coordenada p_1 (como função das coordenadas q_1 e q_2) e consequentemente é possível escolher as coordenadas $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ e, impondo o vínculo, se constroem as funções:

$$L^{(1)} = \frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2)\dot{q}_1 - \alpha q_1\dot{q}_2 - H^{(1)} \qquad , \qquad H^{(1)} = \frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2}-1\right)(q_1-q_2)^2 \ .$$

Logo, ter-se-á:

$$\theta^{(1)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2) & -\alpha q_1 \end{pmatrix} = \frac{\beta}{\alpha}(q_1-q_2)dq_1 - \alpha q_1 dq_2 \ .$$

Tomando a derivada exterior se obtém a $2-$forma:

$$\omega^{(1)} = \frac{\beta}{\alpha}(-dq_2 \wedge dq_1) - \alpha dq_1 \wedge dq_2 = \left(\frac{\beta}{\alpha} - \alpha\right) dq_1 \wedge dq_2 \, .$$

A matriz associada é $\Omega^{(1)} = \dfrac{\beta - \alpha^2}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, a qual é regular e tem por inversa à matriz:

$$[\Omega^{(1)}]^{-1} = \frac{\alpha}{\beta - \alpha^2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, .$$

Logo, os parênteses de Poisson não-nulos das variáveis $\xi^{(1)}$ resultam:

$$\{q_1; q_2\} = \frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta} \, .$$

Para obter los outros parênteses apresentados (3.24) se deve usar o vínculo (3.23), pois ele estabelece a dependência entre p_1 e as coordenadas $\xi^{(1)}$:

- $\{q_1; p_1\} = \{q_1; \dfrac{\beta}{\alpha}(q_1 - q_2)\} = -\dfrac{\beta}{\alpha}\{q_1; q_2\} = -\dfrac{\beta}{\alpha^2 - \beta} \, .$
- $\{q_2; p_1\} = \{q_2; \dfrac{\beta}{\alpha}(q_1 - q_2)\} = \dfrac{\beta}{\alpha}\{q_2; q_1\} = -\dfrac{\beta}{\alpha^2 - \beta} \, .$

Com esses parênteses pode-se obter a evolução temporal de uma função dinâmica F, segundo a equação $\dot{F} = \{F; H^{(1)}\}$.

Mais uma vez, para $F = q_1$ ter-se-á:

$$\begin{aligned}
\dot{q}_1 = \{q_1; H^{(1)}\} &= \{q_1; \frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} - 1\right)(q_1 - q_2)^2\} \\
&= \frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} - 1\right)\{q_1; q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2\} \\
&= \frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{\alpha^2} - 1\right)\Big[-2q_1\{q_1; q_2\} + 2q_2\{q_1; q_2\}\Big] \\
&= \frac{\beta}{2\alpha^2}(\beta - \alpha^2)2(q_2 - q_1)\frac{\alpha}{\alpha^2 - \beta} = \frac{\beta}{\alpha}(q_1 - q_2) = p_1 \, .
\end{aligned}$$

Novamente, o resultado coincide com o obtido anteriormente. Assim, pode-se concluir que para o caso de vínculos que determinam alguma das coordenadas do espaço de fase é possível utilizar esses vínculos para passar à seguinte ordem de iteração e ademais, esse procedimento alternativo permite também obter a evolução temporal das funções dinâmicas.

3.2.4 Exemplo 4

Seja o caso de uma partícula de massa unitária movendo-se sobre a superfície de uma esfera com raio igual à unidade. O problema pode ser abordado da seguinte maneira:

Considere-se o movimento puramente livre de uma partícula (não-relativística) no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Evidentemente a lagrangiana da partícula será apenas a energia cinética dela:

$$L^{\text{config}}_{\text{livre}} = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^{\,2} \,.$$

Nas coordenadas $(\vec{x}; \vec{p})$ do espaço de fase associado, a lagrangiana é simplesmente:

$$L^{\text{fase}}_{\text{livre}} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} \qquad , \qquad p_i = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} L^{\text{config}}_{\text{livre}} \,.$$

Agora, para restringir o movimento da partícula à superfície da esfera se impõe o vínculo:

$$\vec{x}^{\,2} - 1 = 0 \,.$$

Com isto, deverá ser incorporada uma variável auxiliar $\mu = \mu(t)$ às coordenadas do espaço de fase; logo ter-se-á a nova lagrangiana [14]:

$$L(\vec{x}\,;\, \vec{p}\,;\, \mu) = \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} - \mu(\vec{x}^{\,2} - 1) \,. \tag{3.26}$$

A hamiltoniana correspondente é dada por:

$$H^{(0)} = \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + \mu(\vec{x}^{\,2} - 1) \,.$$

A lagrangiana (3.26) pode ser escrita em sua forma canônica segundo:

$$L_c^{(0)} = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} - \mu(\vec{x}^{\,2} - 1) \,.$$

Até este ponto, se está trabalhando nas coordenadas $\xi^{(0)} = \begin{pmatrix} \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \\ \mu \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$. Logo,

identifica-se que a $1-$forma canônica é:

$$\theta^{(0)} = \vec{p}\cdot d\vec{x} + \vec{0}\cdot d\vec{p} + 0\, d\mu \equiv \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isto, a $2-$forma $\omega^{(0)} = d\theta^{(0)}$ resulta:

$$\omega^{(0)} = dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2 + dp_3 \wedge dx_3 \equiv \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 & 0 \\ I_3 & 0_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

sendo 0_3 e I_3 as matrizes nula e identidade em $\mathbb{R}^{3\times 3}$, respectivamente. A representação matricial de $\omega^{(0)}$ é obviamente singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(0)} = \begin{pmatrix} \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ 1 \in \mathbb{R} \end{pmatrix}.$$

Então, o seguinte vínculo é obtido:

$$\Gamma^{(0)} = [v^{(0)}]^T \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi^{(0)}} = \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \mu} = \vec{x}^{\,2} - 1 = 0\,.$$

Logo, a lagrangiana $1-$iterada $L^{(1)}$ será:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \theta_\nu^{(0)} \dot{\xi}^{(0)\nu} - H^{(0)}\big|_{\Gamma^{(0)}=0} + \Gamma^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)} = \theta_\alpha^{(1)}\dot{\xi}^{(1)\alpha} - H^{(1)} \qquad , \qquad H^{(1)} = H^{(0)}\big|_{\Gamma^{(0)}=0} \\ &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \left[\frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} - \mu(\vec{x}^{\,2}-1)\right]_{\Gamma^{(0)}=0} + (\vec{x}^{\,2}-1)\dot{\lambda}^{(0)} = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{p}^{\,2} + (\vec{x}^{\,2}-1)\dot{\lambda}^{(0)}\,. \end{aligned}$$

Note-se que a variável μ não aparece mais nesta lagrangiana, em consequência ter-se-á[4]:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Com isto, se identifica a nova $1-$forma canônica $\theta^{(1)}$:

$$\theta^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & 0 & 0 & 0 & \vec{x}^{\,2}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p} & \vec{0} & \vec{x}^{\,2}-1 \end{pmatrix}.$$

[4]Lembre-se que não fosse o caso de que uma das variáveis originais resulta absorvida na construção de $L^{(1)}$, o método F-J estabelece que $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \xi^{(0)} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix}$ e $\theta^{(1)} = \begin{pmatrix} \theta^{(0)} & \Gamma^{(0)} \end{pmatrix}$.

Logo, a $2-$forma $\omega^{(1)} = d\theta^{(1)}$ matricialmente resulta:

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 & 2\vec{x} \\ I_3 & 0_3 & \vec{0} \\ -2\vec{x} & \vec{0} & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz acima é singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \\ 2\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \\ 1 \in \mathbb{R} \end{pmatrix} .$$

Logo, se obtém o seguinte vínculo:

$$\Gamma^{(1)} = 2\vec{x} \cdot \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \vec{p}} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \lambda} = 2\vec{x} \cdot \vec{p} = 0 .$$

Note-se que esse vínculo estabelece que o momento da partícula é sempre perpendicular ao vetor de posição, o que quer dizer que o movimento da partícula fica restrito à superfície da esfera.

Seguindo com o processo iterativo:

$$\xi^{(1)} \to \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \qquad , \qquad \theta^{(2)} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} & \Gamma^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p} & \vec{0} & \vec{x}^{\,2} - 1 & 2\vec{x} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} .$$

$$\Omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2x_1 & 2p_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2x_2 & 2p_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2x_3 & 2p_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x_3 \\ -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2p_1 & -2p_2 & -2p_3 & -2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 & 2\vec{x} & 2\vec{p} \\ I_3 & 0_3 & \vec{0} & 2\vec{x} \\ -2\vec{x} & \vec{0} & 0 & 0 \\ -2\vec{p} & -2\vec{x} & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz acima é regular e por tanto, a sua inversa $[\Omega^{(2)}]^{-1}$ pode ser obtida:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1-\frac{x_1^2}{\vec{x}^2} & -\frac{x_1x_2}{\vec{x}^2} & -\frac{x_1x_3}{\vec{x}^2} & -\frac{x_1}{2\vec{x}^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{x_1x_2}{\vec{x}^2} & 1-\frac{x_2^2}{\vec{x}^2} & -\frac{x_2x_3}{\vec{x}^2} & -\frac{x_2}{2\vec{x}^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{x_1x_3}{\vec{x}^2} & -\frac{x_2x_3}{\vec{x}^2} & 1-\frac{x_3^2}{\vec{x}^2} & -\frac{x_3}{2\vec{x}^2} & 0 \\
-1+\frac{x_1^2}{\vec{x}^2} & \frac{x_1x_2}{\vec{x}^2} & \frac{x_1x_3}{\vec{x}^2} & 0 & \frac{-x_1p_2+p_1x_2}{\vec{x}^2} & \frac{-x_1p_3+p_1x_3}{\vec{x}^2} & \frac{p_1}{2\vec{x}^2} & -\frac{x_1}{2\vec{x}^2} \\
\frac{x_1x_2}{\vec{x}^2} & -1+\frac{x_2^2}{\vec{x}^2} & \frac{x_2x_3}{\vec{x}^2} & \frac{x_1p_2-p_1x_2}{\vec{x}^2} & 0 & \frac{-x_2p_3+p_2x_3}{\vec{x}^2} & \frac{p_2}{2\vec{x}^2} & -\frac{x_2}{2\vec{x}^2} \\
\frac{x_1x_3}{\vec{x}^2} & \frac{x_2x_3}{\vec{x}^2} & -1+\frac{x_3^2}{\vec{x}^2} & \frac{x_1p_3-p_1x_3}{\vec{x}^2} & \frac{x_2p_3-p_2x_3}{\vec{x}^2} & 0 & \frac{p_3}{2\vec{x}^2} & -\frac{x_3}{2\vec{x}^2} \\
\frac{x_1}{2\vec{x}^2} & \frac{x_2}{2\vec{x}^2} & \frac{x_3}{2\vec{x}^2} & -\frac{p_1}{2\vec{x}^2} & -\frac{p_2}{2\vec{x}^2} & -\frac{p_3}{2\vec{x}^2} & 0 & -\frac{1}{2\vec{x}^2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{x_1}{2\vec{x}^2} & \frac{x_2}{2\vec{x}^2} & \frac{x_3}{2\vec{x}^2} & \frac{1}{2\vec{x}^2} & 0
\end{pmatrix}.$$

É conveniente escrever $[\Omega^{(2)}]^{-1}$ de uma forma um pouco mais compacta:

$$[\Omega^{(2)}]^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cc}
0_3 & A & -\frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} & \vec{0} \\
-A & B & \frac{\vec{p}}{2\vec{x}^2} & -\frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} \\ \hdashline
\frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} & -\frac{\vec{p}}{2\vec{x}^2} & 0 & -\frac{1}{2\vec{x}^2} \\
\vec{0} & \frac{\vec{x}}{2\vec{x}^2} & \frac{1}{2\vec{x}^2} & 0
\end{array}\right) \quad , \quad \left\{\begin{array}{rcl} A_{ij} & = & \delta_{ij} - \frac{x_ix_j}{\vec{x}^2} \\ B_{ij} & = & \frac{1}{\vec{x}^2}(-x_ip_j + p_ix_j) \end{array}\right. .$$

Posto que a representação matricial da $2-$forma $\omega^{(2)}$ não é singular, conclui-se que $\omega^{(2)}$ é não-degenerada e por conseguinte é uma forma simplética. Assim, é possível definir uma estrutura de Poisson no espaço estendido com variáveis $\xi^{(2)}$, segundo:

$$\{\xi^{(2)\alpha}; \xi^{(2)\beta}\} = \omega^{(2)\alpha\beta} .$$

Lembre-se que as variáveis $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ foram introduzidas no algoritmo F-J para fazer que a matriz associada à forma pré-simplética original $\omega^{(0)}$ fique como um bloco de uma matriz maior que corresponda a uma forma simplética. Porém, o principal interesse é conhecer os parênteses de Poisson das variáveis canônicas originais $\vec{x}$ e $\vec{p}$. Também é importante ressaltar que a singularidade deste sistema foi devida à inserção da variável μ, mas apenas como multiplicador de Lagrange (para restringir o movimento livre da partícula) e consequentemente não tem conteúdo físico.

Pela discussão no parágrafo anterior, os parênteses de Poisson das variáveis canônicas no espaço de fase original estarão dados apenas pelo bloco $\begin{pmatrix} 0_3 & A \\ -A & B \end{pmatrix}$

em $[\Omega^{(2)}]^{-1}$ e com isso se obtém:

$$\{x_i; x_j\} = 0 \quad , \quad \{x_i; p_j\} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{\vec{x}^{\,2}} \quad , \quad \{p_i; p_j\} = \frac{1}{\vec{x}^{\,2}}(-x_i p_j + p_i x_j) \; .$$

3.2.5 Exemplo 5

O seguinte exemplo é um pouco diferente dos anteriores, isto devido à natureza da singularidade do sistema que será analisado. No entanto, o método F-J será implementado da mesma maneira que foi feito até agora. Considere-se uma partícula movendo-se em um espaço 3-dimensional em conformidade com a seguinte lagrangiana [35]:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2)q_3 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)q_3^2 - V(q_1^2 + q_2^2) \; . \tag{3.27}$$

Os momentos canônicos conjugados são:

$$p_1 = \dot{q}_1 - q_2 q_3 \quad , \quad p_2 = \dot{q}_2 + q_1 q_3 \quad , \quad p_3 = 0 \; .$$

Agora se constrói a função hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
H^{(0)} &= (\dot{q}_1 - q_2 q_3)\dot{q}_1 + (\dot{q}_2 + q_1 q_3)\dot{q} - \left[\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2)q_3 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)q_3^2 - V\right] \\
&= \dot{q}_1^2 - \dot{q}_1 q_2 q_3 + \dot{q}_2^2 + q_1\dot{q}_2 q_3 - \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1\dot{q}_2 q_3 + \dot{q}_1 q_2 q_3 - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)q_3^2 + V \\
&= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)q_3^2 + V = \frac{1}{2}\left[(p_1 + q_2 q_3)^2 + (p_2 - q_1 q_3)^2\right] - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)q_3^2 + V \\
&= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_2^2 + q_1^2)q_3^2 - (q_1 p_2 - p_1 q_2)q_3 - \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)q_3^2 + V \\
&= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (q_1 p_2 - p_1 q_2)q_3 + V \; .
\end{aligned}$$

O seguinte passo será escrever a lagrangiana em sua forma canônica, que é simplesmente:

$$L_c = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - H \; ,$$

pois não há dependência linear entre as formas dp_i e dq_i. Ademais, uma vez que $p_3 = 0$, serão elegidas como coordenadas do espaço de fase:

$$\xi^{(0)T} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} \; .$$

Logo, identifica-se a $1-$forma canônica:

$$\theta^{(0)} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Então, ter-se-á a $2-$forma:

$$\omega^{(0)} = d\theta^{(0)} = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz acima é evidentemente singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(0)T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Com isto, o seguinte vínculo é obtido:

$$\Gamma^{(0)} = \frac{\partial H^{(0)}}{\partial q_3} = q_1 p_2 - p_1 q_2 = 0 .$$

Assim, para impor a consistência desse vínculo definem-se as seguintes novas funções lagrangiana e hamiltoniana:

$$L^{(1)} = p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 + (q_1 p_2 - p_1 q_2)\dot{\lambda}^{(0)} - H^{(1)} \qquad , \qquad H^{(1)} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V ,$$

onde a variável $\lambda^{(0)}$ é simplesmente um multiplicador de Lagrange. Note-se que a variável q_3 não aparece mais e consequentemente as coordenadas do espaço de fase estendido serão:

$$\xi^{(1)T} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & p_1 & p_2 & \lambda^{(0)} \end{pmatrix} .$$

A nova $1-$ forma canônica resulta:

$$\theta^{(1)} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 & q_1 p_2 - p_1 q_2 \end{pmatrix} .$$

Tomando derivada exterior, se obtém a $2-$forma:

$$\omega^{(1)} = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + q_1 dp_2 \wedge d\lambda^{(0)} + p_2 dq_1 \wedge d\lambda^{(0)} - p_1 dq_2 \wedge d\lambda^{(0)} - q_2 dp_1 \wedge d\lambda^{(0)} .$$

Logo, a matriz associada à 2−forma $\omega^{(1)}$ é:

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -p_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_1 \\ -p_2 & p_1 & q_2 & -q_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz acima é singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(1)T} = \begin{pmatrix} q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Com isto, se constrói o seguinte novo vínculo:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} &= q_2 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial q_2} + p_2 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial p_1} - p_1 \frac{\partial H^{(1)}}{\partial p_2} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \lambda^{(0)}} = \mathbf{0} \\ &= q_2 \frac{\partial V}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial V}{\partial q_2} + p_2 p_1 - p_1 p_2 + 0 \\ &= q_2 \frac{\partial V}{\partial (q_1^2 + q_2^2)} \frac{\partial (q_1^2 + q_2^2)}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial V}{\partial (q_1^2 + q_2^2)} \frac{\partial (q_1^2 + q_2^2)}{\partial q_2} \\ &= 2 q_2 q_1 \frac{\partial V}{\partial (q_1^2 + q_2^2)} - 2 q_1 q_2 \frac{\partial V}{\partial (q_1^2 + q_2^2)} = \mathbf{0} \ . \end{aligned}$$

Assim, foi obtida uma tautologia (ou identidade):

$$\Gamma^{(1)} = 0 = \mathbf{0} \ .$$

Então, posto que foi obtido um vínculo nulo, não é possível continuar com o procedimento usual. Estas situações se apresentam com frequência e são próprias dos sistemas que são invariantes por transformações de equivalência[5](composição de transformações canônicas infinitesimais que não mudam o estado físico do sistema, no sentido de que o gerador da evolução temporal conduz a um conjunto de pontos do espaço de fase pertencentes a uma classe de equivalência[6], pois correspondem a um mesmo estado).

Essa degenerescência pode ser removida impondo condições adicionais que

[5]Cujo análogo na teoria de campos é conhecido como *transformações de gauge*.

[6]Uma classe de equivalência é um conjunto de elementos identificados por uma relação (binária) de equivalência; i. e., que é reflexiva, simétrica e transitiva.

restrinjam a dinâmica do sistema de modo que ela se torne unívoca. A proposta do método F-J para enfrentar essa situação é a seguinte:

"No caso de obter um vínculo nulo na n-ésima ordem de iteração no algoritmo, o vínculo nulo deverá ser substituído por uma condição canônica fixadora e depois continuar com o processo usual".

O enunciado anterior pode-se expressar simplesmente como:

$$\Gamma^{(n)} = 0 \longrightarrow \Gamma'^{(n)} = \text{Cond. fix.} \quad \Rightarrow \quad H^{(n+1)} = H^{(n)}\big|_{\Gamma'^{(n)}=0} .$$

Assim, a hamiltoniana da seguinte ordem de iteração, será obtida impondo a condição fixadora à última hamiltoniana construída. É importante fazer uma breve discussão sobre essas *condições fixadoras*. Em primeiro lugar, essas condições devem ser *atingíveis*, isto quer dizer que sempre deve ser possível obtê-as por meio de uma transformação de equivalência; essas transformações não devem mudar as equações de movimento, pois devem conduzir aos mesmos estados físicos do sistema.

Não é complicado ver que a lagrangiana (3.27) permanece invariante sob a seguinte transformação:

$$q_1 \to q_1' = q_1 cos(\theta) + q_2 sen(\theta) \quad , \quad q_2 \to q_2' = -q_1 sen(\theta) + q_2 cos(\theta) \quad , \quad q_3 \to q_3' = q_3 \, ,$$

que é na verdade uma rotação de um ângulo θ no plano $q_1 q_2$ e mantendo fixa a coordenada q_3. As rotações no plano são representadas por matrizes 2×2 especiais[7], reais e ortogonais[8] com parâmetro $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Para o exemplo em consideração, supondo que o ângulo nasce no eixo q_1 a matriz associada à transformação de coordenadas acima será:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Essas matrizes constituem um grupo (de Lie) denotado por $SO(2)$. Então, diz-se que $SO(2)$ é o grupo de simetria (global[9]) para a lagrangiana (3.27) quando a

[7] Uma matriz é dita especial se o determinante dela é 1.
[8] Uma matriz R é dita ortogonal se $R^T R = 1$.
[9] Diz-se que a simetria é global quando os parâmetros dos elementos do grupo de simetria são constantes.

coordenada q_3 está fixa. Lembre-se que as coordenadas q^a são, em geral, funções do tempo; então, é interessante ver se a lagrangiana em estudo também fica invariante se o parâmetro for também função do tempo; isto é, $\theta = \theta(t)$. Nesse caso ter-se-á:

$$\dot{q}_1' = \dot{q}_1 cos(\theta) + \dot{q}_2 sen(\theta) + \dot{\theta}\big(- q_1 sen(\theta) + q_2 cos(\theta)\big) \ ,$$
$$\dot{q}_2' = -\dot{q}_1 sen(\theta) + \dot{q}_2 cos(\theta) - \dot{\theta}\big(q_1 cos(\theta) + q_2 sen(\theta)\big) \ .$$

Se a coordenada q_3 permanece fixa, resulta que a lagrangiana transformada não coincide com a original:

$$L' = L + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(q_1^2 + q_2^2) - \dot{\theta}(q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2) - \dot{\theta}(q_1^2 + q_2^2)q_3 \ .$$

Contudo, é possível recuperar a invariância da lagrangiana fazendo uma transformação apropriada à coordenada q_3. Em primeira instância não é conhecida a forma dessa transformação, pelo qual se considera:

$$q_3 \to q_3' = q_3 + \delta q_3 \ ,$$

Com isto:

$$L' = L - (q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2)(\dot{\theta} - \delta q_3) + (q_1^2 + q_2^2)\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}(q_3 + \delta q_3) + q_3\delta q_3 + \frac{1}{2}(\delta q_3)^2\right) \ .$$

Logo, observa-se que a invariância da lagrangiana é atingida considerando a seguinte transformação:

$$q_3 \to q_3' = q_3 + \dot{\theta} \ .$$

Assim, resulta que a lagrangiana (3.27) é invariante sob as transformações locais[10]:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad , \quad q_3 \to q_3' = q_3 + \dot{\theta} \ . \tag{3.28}$$

Nesse caso diz-se que a lagrangiana tem simetria local sob o grupo de rotações $SO(2)$. O conjunto das transformações (3.28) são chamadas de transformações de equivalência.

Também é interessante observar o que acontece com os momentos sob essas

[10]Diz-se que as transformações são locais no sentido que o parâmetro é função da variável t.

transformações:

- $$p_1' = \dot{q}_1' - q_2'q_3' = \dot{q}_1 cos(\theta) + \dot{q}_2 sen(\theta) + \dot{\theta}\big(- q_1 sen(\theta) + q_2 cos(\theta)\big) \\ - \big(- q_1 sen(\theta) + q_2 cos(\theta)\big)(q_3 + \dot{\theta}) \\ = (\dot{q}_1 - q_2 q_3)cos(\theta) + (\dot{q}_2 + q_1 q_3)sen(\theta) = p_1 cos(\theta) + p_2 sen(\theta)\ .$$

- $$p_2' = \dot{q}_2' + q_1'q_3' = -\dot{q}_1 sen(\theta) + \dot{q}_2 cos(\theta) - \dot{\theta}\big(q_1 cos(\theta) + q_2 sen(\theta)\big) \\ + \big(q_1 cos(\theta) + q_2 sen(\theta)\big)(q_3 + \dot{\theta}) \\ = -(\dot{q}_1 - q_2 q_3)sen(\theta) + (\dot{q}_2 + q_1 q_3)cos(\theta) = -p_1 sen(\theta) + p_2 cos(\theta)\ .$$

Com isto:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\ .$$

Ou seja que os momentos sofrem a mesma rotação (local) que as coordenadas.

É possível encontrar uma interpretação da coordenada q_3 a partir das equações de movimento do sistema:

- $$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \dot{q}_2 q_3 + q_1 q_3^2 - \partial_1 V \qquad , \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \dot{p}_1 = \ddot{q}_1 - \dot{q}_2 q_3 - q_2 \dot{q}_3\ .$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}_1 - 2\dot{q}_2 q_3 - q_2 \dot{q}_3 - q_1 q_3^2 + \partial_1 V = 0\ .$$

- $$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\dot{q}_1 q_3 + q_2 q_3^2 - \partial_2 V \qquad , \qquad \dot{p}_2 = \ddot{q}_2 + \dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3\ .$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}_2 + 2\dot{q}_1 q_3 + q_1 \dot{q}_3 - q_2 q_3^2 + \partial_2 V = 0\ .$$

- $$\frac{\partial L}{\partial q_3} = -q_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1 q_2 - (q_1^2 + q_2^2)q_3 \qquad , \qquad \dot{p}_3 = 0\ .$$

$$\Rightarrow \quad -q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 + (q_1^2 + q_2^2)q_3 = 0\ .$$

A equação de movimento para q_3 pode ser escrita como:

$$q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 + (q_1^2 + q_2^2)q_3 = 0$$
$$q_1^2 \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) + \left[1 + \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2\right] q_3 \right\} = 0$$

Chamando $z \overset{!}{=} \dfrac{q_2}{q_1}$, a equação anterior pode-se escrever simplesmente como:

$$\dot{z} + (1 + z^2)q_3 = 0 \, ,$$

a qual é uma equação de variáveis separáveis; então, pode-se fazer o seguinte:

$$\frac{dz}{z^2+1} = -q_3 dt \quad \rightarrow \quad \int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{z'^2+1} = -\int_0^t q_3 dt' \quad \Rightarrow \quad tan^{-1}(z) = tan^{-1}(z_0) - \int_0^t q_3 dt' \, .$$

Note-se que $tan^{-1}(z) = tan^{-1}\left(\dfrac{q_2}{q_1}\right)$ é o ângulo θ correspondente à transformação de rotação mencionada acima, então a última equação também pode-se escrever como:

$$\theta(t) = \theta(0) - \int_0^t q_3 dt' \, .$$

Logo, derivando em relação à variável t encontra-se que $q_3 = -\dot{\theta}$. Assim, a coordenada q_3 resulta ser o negativo da taxa de câmbio do ângulo de rotação.

O seguinte passo será estabelecer uma condição fixadora para o sistema, a qual é obtida naturalmente a partir da lei de transformação para a coordenada q_3 :

$$q_3' = q_3 + \dot{\theta} = -\dot{\theta} + \dot{\theta} = 0.$$

Em consequência:

$$q_3 = -\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = \text{constante} \, .$$

Desta maneira, foi obtido o seguinte vínculo:

$$\Gamma'^{(1)} = tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) - c = 0 \, , \tag{3.29}$$

Com esse vínculo já é possível construir a hamiltoniana $H^{(2)}$:

$$H^{(2)} = H^{(1)}\big|_{\Gamma'^{(1)}=0} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1^2 + q_2^2)\Big|_{tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)=c} \, .$$

As coordenadas do espaço de fase estendido agora são $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix}$. Com isto,

a nova lagrangiana é:

$$L^{(2)} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + (q_1p_2 - p_1q_2)\dot{\lambda}^{(0)} + \Gamma'^{(1)}\dot{\lambda}^{(1)} - H^{(2)} \ .$$

Se identifica a $1-$forma canônica:

$$\theta^{(2)} = \begin{pmatrix} \theta^{(1)} & \Gamma'^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & 0 & 0 & q_1p_2 - p_1q_2 & tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) - c \end{pmatrix} \ .$$

Com isto, se obtém a $2-$forma $\omega^{(2)} = d\theta^{(2)}$:

$$\omega^{(2)} = \omega^{(1)} - \frac{q_2}{q_1^2+q_2^2}\, dq_1 \wedge d\lambda^{(1)} + \frac{q_1}{q_1^2+q_2^2}\, dq_2 \wedge d\lambda^{(1)} \ .$$

Logo, a matriz associada resulta:

$$\Omega^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & p_2 & -\frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -p_1 & \frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_1 & 0 \\ -p_2 & p_1 & q_2 & -q_1 & 0 & 0 \\ \frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} & -\frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

A matriz acima é regular e tem por inversa:

$$[\Omega^{(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{q_1^2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & \frac{q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_2^2}{q_1^2+q_2^2} & 0 & -q_1 \\ -\frac{q_1^2}{q_1^2+q_2^2} & -\frac{q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & 0 & \frac{p_2q_1-q_2p_1}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} & p_2 \\ -\frac{q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & -\frac{q_2^2}{q_1^2+q_2^2} & -\frac{p_2q_1-q_2p_1}{q_1^2+q_2^2} & 0 & -\frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & -p_1 \\ 0 & 0 & -\frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & 0 & 1 \\ -q_2 & q_1 & -p_2 & p_1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Uma vez que as variáveis $\lambda^{(0)}$ e $\lambda^{(1)}$ foram introduzidas como multiplicadores de Lagrange não têm significado físico. Então, os parênteses de Poisson das variáveis canônicas originais q_1, q_2, p_1 e p_2 poderão ser obtidos a partir dos elementos do

bloco constituído por as primeiras quatro filas e colunas de $[\Omega^{(2)}]^{-1}$ segundo:

$$\{\xi^{(2)\alpha}; \xi^{(2)\beta}\} = \omega^{(2)\alpha\beta} \, .$$

Impondo o vínculo $\Gamma^{(0)}$, os parênteses de Poisson não-nulos resultam:

$$\{q_1; p_1\} = \frac{q_1^2}{q_1^2 + q_2^2} \quad , \quad \{q_1; p_2\} = \frac{q_1 q_2}{q_1^2 + q_2^2} = \{q_2; p_1\} \quad , \quad \{q_2; p_2\} = \frac{q_2^2}{q_1^2 + q_2^2} \, .$$

Levando em conta que $tan(\theta) = \dfrac{q_2}{q_1}$ os parênteses anteriores podem ser escritos apenas em termos do ângulo correspondente à rotação no plano $q_1 q_2$:

$$\{q_1; p_1\} = \frac{1}{1 + tan^2(\theta)} \quad , \quad \{q_1; p_2\} = \frac{tan(\theta)}{1 + tan^2(\theta)} = \{q_2; p_1\} \quad , \quad \{q_2; p_2\} = \frac{tan^2(\theta)}{1 + -tan^2(\theta)} \, .$$

Capítulo 4

Mecânica analítica com graus de liberdade grassmannianos

O presente capítulo tem por objetivo fazer uma extensão do estudado nos capítulos anteriores, correspondentes à mecânica analítica, mas agora considerando entre as coordenadas generalizadas também um tipo de variáveis não-comutativas, mas anticonmutativas, tais objetos são comumente conhecidos como *números de Grassmann* e eles podem ser derivados a parir das chamadas álgebras de Grassmann. A motivação para incluir este tipo de variáveis nos sistemas mecânicos é obter um modelo clássico de uma partícula não-relativística de spin 1/2. A ideia do spin habitualmente surge no contexto da teoria quântica, em princípio, sem contraparte clássica. Os primeiros em propor considerar números de Grassmann para descrever classicamente os graus de liberdade de spin foram Berezin e Marinov no artigo titulado *Classical spin and Grassman algebra* [2], publicado no ano 1975, e uma versão generalizada da mecânica analítica foi apresentada em um outro trabalho dois anos depois [3]. No ano 1976, baseado nos trabalhos de Berezin e Marinov, Casalbuoni desenvolveu com maior detalhe a mecânica clássica estendida para variáveis grassmannianas e chamou de pseudomecânica [4, 5].

4.1 Álgebras de Grassmann

Em primeiro lugar, é importante apresentar um conceito simples (mas geral) do que é conhecido como álgebra, podendo-se distinguir dois casos[1]:

(i). **Álgebra sobre um corpo**: Seja $\mathbb{K}$ um corpo e A um $\mathbb{K}-$espaço vetorial, o par $(A, \cdot)$ é uma $\mathbb{K}-$álgebra se a operação binária $\cdot : A \times A \to A$ é bilinear.

(ii). **Álgebra sobre um anel**: Seja $\mathcal{R}$ um anel comutativo e A um $\mathcal{R}-$módulo, o

[1] As definições de corpo, anel e outros conceitos relevantes encontram-se no apêndice A.

par $(A, \cdot)$ é uma $\mathcal{R}-$álgebra se a operação binária $\cdot : A \times A \to A$ é bilinear.

Além disso resulta útil levar em conta o seguinte:

- Se a operação de multiplicação $\cdot : A \times A \to A$ é associativa (comutativa), diz-se que a álgebra é associativa (comutativa).
- Se existe $e \in A$ tal que para qualquer $a \in A$ cumpre-se que $e \cdot a = a \cdot e = a$, a álgebra é dita unital.

Para o caso particular de uma $\mathbb{C}$-álgebra A um mapa $\dagger : A \to A$, com $a \mapsto a^\dagger$ tal que para quaisquer $a, b \in A$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$(a^\dagger)^\dagger = a \quad , \quad (ab)^\dagger = b^\dagger a^\dagger \quad , \quad (\alpha a + \beta b)^\dagger = \alpha^* a^\dagger + \beta^* b^\dagger \quad ,$$

é chamado de **involução** e diz-se que $a^\dagger$ é o adjunto de a.

Um outro conceito de grande importância é o de geradores de uma álgebra: Dada uma álgebra A (finita), um subconjunto $B \subset A$ é um conjunto de geradores se qualquer elemento da álgebra pode ser escrito como uma combinação linear (finita) de um produto (finito) de elementos desse conjunto. Com este conceito, muitas vezes resulta mais simples *definir* uma álgebra a partir do conjunto de geradores dela.

4.1.1 Álgebra de Grassmann de dimensão finita

Lembre-se que o conjunto $\bigwedge^r(V^*)$ é o espaço de todas as aplicações $r-$lineares alternadas definidas sobre o espaço vetorial V e o corpo correspondente, que em geral, pode-se considerar como $\mathbb{C}$; ou seja que V (ou V^*) é um espaço vetorial complexo. Por outro lado, quando V é de dimensão finita, prova-se que existe um isomorfismo canônico entre V e V^{**} e consequentemente $\bigwedge^p(V^{**}) \cong \bigwedge^p(V)$ [21].

Um elemento $\varphi \in \bigwedge^p(V)$ é uma aplicação $\varphi : \overbrace{V^* \times \cdots \times V^*}^{\text{p vezes}} \to \mathbb{C}$ que é $p-$linear e alternada e é chamado de $p-$vetor.

Seja V um $\mathbb{C}-$espaço vetorial de dimensão finita n. Define-se o seguinte conjunto:

$$Gr(V) \doteq \mathbb{C} \oplus V \oplus \bigwedge^2(V) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n(V) = \bigoplus_{p=0}^{n} \bigwedge^p(V) \, .$$

Uma vez que $Gr(V)$ é a soma direta de espaços vetoriais, também é um espaço vetorial. Com a definição acima, cada $z \in Gr(V)$ pode ser escrito de maneira única como:

$$z = z_0 + \cdots + z_n \qquad , \qquad \text{com } z_p \in \bigwedge^p(V).$$

Considere-se agora a seguinte aplicação bilinear:

$$\dot{\wedge} : Gr(V) \times Gr(V) \to Gr(V) \qquad , \qquad (z; w) \mapsto z \,\dot{\wedge}\, w \, ,$$

definida por[2]:

$$\begin{aligned} z \,\dot{\wedge}\, w &\doteq (z_0 + \cdots + z_n) \ \wedge \ (w_0 + \cdots + w_n) \\ &= z_0 \wedge w_0 + (z_0 \wedge w_1 + z_1 \wedge w_0) + (z_0 \wedge w_2 + z_1 \wedge w_1 + z_2 \wedge w_0) + \cdots + z_n \wedge w_n \\ &= \underset{\mathbb{C}}{z_0 w_0} + \underbrace{z_0 w_1 + z_1 w_0}_{\in V} + \underbrace{z_0 w_2 + z_1 \wedge w_1 + z_2 w_0}_{\in \wedge^2(V)} + \cdots \\ &\qquad + \underbrace{z_0 w_n + z_1 \wedge w_{n-1} + \cdots + z_{n-1} \wedge w_1 + z_n w_0}_{\in \wedge^n(V)} \, . \end{aligned}$$

Tomando a operação $\dot{\wedge}$ como multiplicação, o espaço vetorial $Gr(V)$ se torna uma álgebra, conhecida como álgebra exterior de V ou **álgebra de Grassmann** de V.

É possível provar que se V é um espaço vetorial $n-$dimensional, o espaço $\bigwedge^k(V)$ tem dimensão $C_k^n = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ e levando em conta que para dois espaços vetoriais V e W cumpre-se que $dim(V \oplus W) = dim(V) + dim(W)$, a dimensão de $Gr(V)$ estará dada pela soma $C_0^n + \cdots + C_n^n = 2^n$.

Seja $\{\vartheta_\alpha\}_{\alpha=1}^n$ uma base de V e seja o conjunto $I_p = \{\alpha_1 < \cdots < \alpha_p\}$ que percorre todos os subconjuntos crescentes de $\{1; \cdots ; n\}$ de p elementos. Então, os

[2] É importante levar em conta que dado um espaço vetorial $n-$dimensional V, qualquer elemento de $\bigwedge^k(V)$ é nulo para $k > n$.

objetos definidos como:

$$e_{I_p} \doteq \begin{cases} \vartheta_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \vartheta_{\alpha_p} & , \quad I_p \neq \{\,\} \\ 1 & , \quad I_p = \{\,\} \end{cases}$$

constituem uma base de $Gr(V)$, pois para cada p os e_{I_p} formam uma base de $\bigwedge^p(V)$.

Inserindo a notação $\vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_p} \stackrel{!}{=} \vartheta_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \vartheta_{\alpha_p}$, qualquer elemento $z \in Gr(V)$ pode ser escrito de modo único como:

$$\begin{aligned} z &= C_0 + \sum_{\alpha} C_{\alpha} \vartheta^{\alpha} + \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} C_{\alpha_1 \alpha_2} \vartheta^{\alpha_1} \vartheta^{\alpha_1} + \cdots + C_{1 \cdots n} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_n} \\ &= C_0 + \sum_{\alpha_1} C_{\alpha_1} \vartheta^{\alpha} + \sum_{\alpha_1 < \alpha_2} C_{\alpha_1 \alpha_2} \vartheta^{\alpha_1} \vartheta^{\alpha_1} + \cdots + \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_n} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_n} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_n} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_p} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_p} \,, \end{aligned}$$

que é uma combinação linear (finita) de produtos (finitos) dos ϑ^{α} e os coeficientes $C_{\alpha_1 \cdots \alpha_p}$ são complexos e totalmente antissimétricos em seus índices. Assim, os ϑ^{α} podem ser vistos como os geradores da álgebra de Grassmann $Gr(V)$ sob a condição:

$$\vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_p} = \epsilon^{\alpha_1 \cdots \alpha_p} \vartheta^1 \cdots \vartheta^p \,,$$

Em particular, para $p = 2$:

$$\vartheta^{\alpha} \vartheta^{\beta} = \epsilon^{\alpha\beta} \vartheta^1 \vartheta^2 = (\delta^{\alpha 1} \delta^{\beta 2} - \delta^{\alpha 2} \delta^{\beta 1}) \vartheta^1 \vartheta^2 \quad \Rightarrow \quad \vartheta^2 \vartheta^1 = -\vartheta^1 \vartheta^2 \,.$$

Com isto, uma álgebra de Grassmann (de um espaço vetorial $n-$dimensional) é uma $\mathbb{C}-$álgebra gerada pelos n objetos linearmente independentes ϑ^{α} $(\alpha = 1, \cdots, n)$ tais que $\vartheta^{\alpha} \vartheta^{\beta} = -\vartheta^{\beta} \vartheta^{\alpha}$ (diz-se também que os ϑ^{α} anticomutam) e a unidade 1, que comuta com todos os outros geradores.

Note-se também que devido à anticomutação dos ϑ^{α} ter-se-á:

$$\vartheta^{\alpha} \vartheta^{\alpha} = -\vartheta^{\alpha} \vartheta^{\alpha} \quad \Rightarrow \quad (\vartheta^{\alpha})^2 \stackrel{!}{=} \vartheta^{\alpha} \vartheta^{\alpha} = 0 \,.$$

Na literatura, principalmente em textos de física, é bastante comum encontrar a

terminologia **números de Grassmann**, que vêm a ser *números que anticomutam e como consequência, têm quadrado nulo*. Segundo essa *"definição"*, os geradores ϑ^α seriam um tipo de números de Grassmann; no entanto, como mais tarde será apresentado, existe um caso mais geral para os chamados *números de Grassmann*.

O apresentado até este ponto é a noção de álgebra de Grassmann para o caso finito, pois ela foi definida sobre um $\mathbb{C}-$espaço vetorial complexo de dimensão finita, ou também, o número de geradores é finito (e coincide com a dimensão do espaço base. O seguinte será estudar a extensão para o caso de dimensão infinita.

4.1.2 Álgebra de Grassmann de dimensão infinita

Uma álgebra de Grassmann de dimensão infinita, que será denotada por Gr_∞, é uma $\mathbb{C}-$álgebra que pode ser construída a partir do conjunto (infinito) de geradores $\{\vartheta^1; \vartheta^2; \cdots\}$ que são linearmente independentes e anticomutam, ou seja:

$$\vartheta^\alpha \vartheta^\beta + \vartheta^\beta \vartheta^\alpha = 0 \qquad ; \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \cdots$$

Os elementos de Gr_∞ são chamados de **supernúmeros**. Uma vez que Gr_∞ é meramente uma extensão do caso finito, resulta razoável a seguinte definição:

$$Gr_\infty(V) \doteq \mathbb{C} \oplus V \oplus \bigwedge^2(V) \oplus \cdots = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{k=1}^{+\infty} \bigwedge^k(V) \, ,$$

onde V é um espaço vetorial complexo de dimensão infinita. Em consequência, qualquer supernúmero $z \in Gr_\infty$ pode ser escrito de modo único como:

$$z = z_B + z_S \overset{!}{=} z_B + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\alpha_1 < \cdots < \alpha_k} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} = z_B + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \, . \tag{4.1}$$

Na expressão anterior $z_B \in \mathbb{C}$ e os coeficientes (também complexos) $C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ são antissimétricos em todos seus índices. Além disso, um supernúmero z também pode ser descomposto em suas partes *par* (z_c) e ímpar (z_a) segundo:

$$z = z_c + z_a \qquad ; \qquad \begin{cases} z_c &= z_B + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_{2k}} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_{2k}} \\ z_a &= \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_{2k+1}} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_{2k+1}} \end{cases} .$$

Quando um supernúmero z tem apenas parte par ($z_a = 0$) ele é chamado de $c-$número (número comutativo); similarmente, quando um supernúmero só apresenta parte ímpar, ele é chamado de $a-$número (número anticomutativo). A explicação de estes nomes é a seguinte:

- Os $c-$números comutam com todos os supernúmeros.
  Prova:
  Considere-se o $c-$número $w = w_B + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j)!} M_{\beta_1 \cdots \beta_{2j}} \vartheta^{\beta_1} \cdots \vartheta^{\beta_{2j}}$ e o supernúmero z apresentado em (4.1); então:

  $$zw = \left(z_B + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \right) \left(w_B + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j)!} M_{\beta_1 \cdots \beta_{2j}} \vartheta^{\beta_1} \cdots \vartheta^{\beta_{2j}} \right) .$$

  Uma vez que z_B e w_B são números complexos, eles comutam entre si e com as partes z_S e w_S; o problema está em saber se z_S comuta com w_S :

  $$\begin{aligned} z_S w_S &= \sum_{k,j=1}^{\infty} \frac{1}{k!(2j)!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} M_{\beta_1 \cdots \beta_{2j}} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \vartheta^{\beta_1} \cdots \vartheta^{\beta_{2j}} \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)!k!} M_{\beta_1 \cdots \beta_{2j}} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} (-1)^{(2j)k} \vartheta^{\beta_1} \cdots \vartheta^{\beta_{2j}} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(2j)!} M_{\beta_1 \cdots \beta_{2j}} \vartheta^{\beta_1} \cdots \vartheta^{\beta_{2j}} \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \right) = w_s z_s . \end{aligned}$$

- Os $a-$números anticomutam entre eles e comutam com os $c-$números.
  Prova:
  Para a primeira afirmação, sejam os $a-$números $z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_{2k+1}} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_{2k+1}}$ e $w = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(2j+1)!} M_{\beta_1 \cdots \beta_{2j+1}} \vartheta^{\beta_1} \cdots \vartheta^{\beta_{2j+1}}$; então, seguindo o mesmo procedimento do item anterior, na tentativa de trocar de posições os produtos de geradores de cada $a-$número aparecerá um fator $(-1)^{(2k+1)(2k+1)} = -1$. Com isso, $zw = -wz$.
  Para a segunda afirmação, considerando um $a-$número z e um $c-$número w o fator será da forma $(-1)^{(2k+1)(2j)} = 1$ e como consequência, $zw = wz$.

É importante observar também que o quadrado de qualquer $a-$número é 0, pois uma vez que dois $a-$números anticomutam ter-se-á que se w é um $a-$numero:

$$ww = -ww \quad \Rightarrow \quad w^2 = ww = 0 .$$

Daqui, se pode dizer que, em geral, os chamados *números de Grassmann* são os $a-$números de uma álgebra de Grassmann.

Os $c-$números e $a-$números serão chamados de *supernúmeros puros*. Resulta conveniente definir os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{C}_0 = \{z \in Gr_\infty | z \text{ é um } c-\text{número}\} \quad , \quad \mathbb{C}_1 = \{z \in Gr_\infty | z \text{ é um } a-\text{número}\} \, .$$

Esses conjuntos têm a estrutura de espaços vetoriais complexos e ademais:

$$Gr_\infty = \mathbb{C}_0 \oplus \mathbb{C}_1 \, . \tag{4.2}$$

Uma forma bastante útil de distinguir as partes par e ímpar de um supernúmero (que são supernúmeros puros) é introduzindo a *paridade de Grassmann*, definida segundo:

$$z = \underset{\mathbb{C}_0}{z_c} + \underset{\mathbb{C}_1}{z_a} \quad \Rightarrow \quad |z_c| \doteq 0 \ \text{(par)} \quad , \quad |z_a| \doteq 1 \ \text{(ímpar)} \, . \tag{4.3}$$

Por outro lado, em conformidade com as propriedades dos $c-$números e os $a-$números ter-se-á o seguinte:

$$\mathbb{C}_0\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_0 \quad , \quad \mathbb{C}_1\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}_0 \quad , \quad \mathbb{C}_0\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_1\mathbb{C}_0 = \mathbb{C}_1 \quad ,$$

o que pode ser escrito de maneira compacta como:

$$\mathbb{C}_j\mathbb{C}_k \subseteq \mathbb{C}_{j+k} \quad ; \quad j,k = 0,1 \, . \tag{4.4}$$

Os resultados (4.2) e (4.4) estabelecem que a álgebra de Grassmann Gr_∞ é uma álgebra $\mathbb{Z}_2-$graduada, chamada comumente de **superálgebra**.

Em geral uma álgebra $\mathbb{Z}_2-$graduada (ou superálgebra) $\mathscr{A}$, vista como espaço vetorial, admite a descomposição $\mathscr{A} = \mathscr{A}_0 \oplus \mathscr{A}_1$ e a multiplicação bilinear $\cdot : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ é tal que $\mathscr{A}_i \cdot \mathscr{A}_j \subseteq \mathscr{A}_{i+j}$, com $i,j \in \mathbb{Z}_2$. Os elementos dos $\mathscr{A}_i$ são chamados de homogêneos de grau i. No caso da álgebra de Grassmann Gr_∞ o grau corresponderia à paridade definida em (4.3).

Devido às propriedades dos $c-$números e $a-$números (supernúmeros puros)

se obtêm as seguintes identidades fundamentais[3]:

$$|zw| = \big(|z| + |w|\big)(\text{mod } 2) \stackrel{!}{=} |z| + |w| \qquad , \qquad zw = (-1)^{|z||w|} wz \; . \tag{4.5}$$

É de grande importância assinalar que uma superálgebra cujos elementos homogêneos satisfazem a segunda propriedade em (4.5) é chamada de *supercomutativa*.

Por outro lado, uma vez que para um supernúmero puro $|z| = 0$ ou $|z| = 1$, é imediato observar as seguintes propriedades auxiliares:

$$|z|^2 = |z| \qquad , \qquad |z| + |z| = 2|z| = 0 \; . \tag{4.6}$$

Finalmente, uma vez que Gr_∞ é uma $\mathbb{C}-$álgebra, é possível definir uma operação de involução. Impor-se-á adicionalmente a seguinte condição para os geradores ϑ^α:

$$(\vartheta^\alpha)^\dagger = \vartheta^\alpha \; .$$

Com isto, dado um supernúmero $z = z_b + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_1}$ o adjunto dele será:

$$\begin{aligned} z^\dagger &= z_B^* + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C^*_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \Big(\vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \Big)^\dagger = z_B^* + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C^*_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} \vartheta^{\alpha_k} \cdots \vartheta^{\alpha_1} \\ &= z_B^* + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C^*_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} (-1)^{k-1+k-2+\cdots+1} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \\ &= z_B^* + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} C^*_{\alpha_1 \cdots \alpha_k} (-1)^{(k-1)k/2} \vartheta^{\alpha_1} \cdots \vartheta^{\alpha_k} \; . \end{aligned}$$

Um supernúmero z será chamado de **real** (**imaginário**) quando $z^\dagger = z$ ($z^\dagger = -z$); em qualquer outro caso será chamado de **complexo**.

O subconjunto de supernúmeros reais em $\mathbb{C}_0$ ($c-$números reais) será denotado por $\mathbb{R}_0$:

$$\mathbb{R}_0 \doteq \{z \in Gr_\infty : |z| = 0 \text{ e } z^\dagger = z\} \; .$$

[3] O fato de incluir a operação (mod 2) se deve a que existe um isomorfismo entre o conjunto $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{[a] \; ; \; a \in \mathbb{Z}, \text{ com } [a] = a + 2\mathbb{Z}\} = \{[0]; [1]\}$ e o conjunto $\mathbb{Z}_2 = \{a \text{ mod } 2 \; ; \; a \in \mathbb{Z}\} = \{0; 1\}$.

O subconjunto de supernúmeros reais em $\mathbb{C}_1$ ($a-$números reais) será denotado por $\mathbb{R}_1$:

$$\mathbb{R}_1 \doteq \{z \in Gr_\infty : |z| = 1 \text{ e } z^\dagger = -z\} \ .$$

Lembre-se que em geral uma álgebra (sobre um corpo) é um espaço vetorial junto a uma operação (binária) de multiplicação bilinear; nesse sentido, uma superálgebra pode ser vista como um *superespaço vetorial* (ou espaço vetorial $\mathbb{Z}_2-$graduado) junto a uma multiplicação bilinear[4].

Um **superespaço vetorial** V é um espaço vetorial que pode ser escrito como:

$$V = V_0 \oplus V_1 \ ,$$

os elementos de V_k são chamados de *homogêneos*. A paridade de um elemento homogêneo $x \in V_k$ $(k = 0, 1)$ é denotada por $|x|$ e está definida segundo $|x| = k$.

Seja X um superespaço vetorial de dimensão finita tal que:

$$dim(V_0) = m \qquad , \qquad dim(V_1) = n \quad ;$$

então, diz-se que V tem dimensão $(m|n)$. Em particular, existem dois superespaços vetoriais que são de grande importância:

- O conjunto $\mathbb{C}^{m|n} \stackrel{!}{=} \mathbb{C}_0^m \times \mathbb{C}_1^n$ é chamado de **superespaço complexo de dimensão $(m|n)$**.

$$\mathbb{C}^{m|n} = \{(w^1, \cdots, w^m; \zeta^1, \cdots, \zeta^n) \quad ; \quad w^a \in \mathbb{C}_0 \ , \ \zeta^\alpha \in \mathbb{C}_1\} \ .$$

- O conjunto $\mathbb{R}^{m|n} \stackrel{!}{=} \mathbb{R}_0^m \times \mathbb{R}_1^n$ é chamado de **superespaço real de dimensão $(m|n)$**.

$$\mathbb{R}^{m|n} = \{(x^1, \cdots, x^m; \theta^1, \cdots, \theta^n) \stackrel{!}{=} (x; \theta) \quad ; \quad x^a \in \mathbb{R}_0 \ , \ \theta^\alpha \in \mathbb{R}_1\} \ .$$

Sejam X e Y dois superespaços vetoriais, um mapa linear $f : X \to Y$ (também

[4]Sob uma condição similar a (4.4).

chamado de homomorfismo[5]) verifica o seguinte:

$$|f(x)| = |f| + |x| \qquad , \qquad \forall x \in X \, .$$

Logo, é possível distinguir dois tipos de aplicações lineares entre superespaços vetoriais: pares ($|f| = 0$) e ímpares ($|f| = 1$). De fato, qualquer aplicação linear f entre superespaços vetoriais pode ser escrita como a soma de um único f_0 par e um, também único, f_1 ímpar [38].

4.2 Supermatrizes

Em dimensão finita, as aplicações lineares entre espaços vetoriais podem ser representadas matricialmente, para o caso de superespaços vetoriais é preciso definir as chamadas **supermatrizes**. Em termos gerais, uma supermatriz é uma versão $\mathbb{Z}_2-$graduada de uma matriz ordinária e é definida sobre uma superálgebra; em particular é de especial interesse para o presente estudo quando a superálgebra é comutativa, como é o caso da álgebra de Grassmann. As supermatrizes são definidas por blocos e têm entradas na superálgebra. Em geral, uma supermatriz de dimensão $(m|p) \times (n|q)$ é da forma:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} X_{00} & X_{01} \\ \hline X_{10} & X_{11} \end{array} \right) ,$$

onde o número total de filas é $(m + p)$ e o número total de colunas é $(n + q)$. A supermatriz X é dita par (ímpar) quando:

- O bloco X_{00} é uma matriz $m \times n$ com elementos pares (ímpares).
- O bloco X_{01} é uma matriz $m \times q$ com elementos ímpares (pares).
- O bloco X_{10} é uma matriz $p \times n$ com elementos ímpares (pares).
- O bloco X_{11} é uma matriz $p \times q$ com elementos pares (ímpares).

As supermatrizes que são pares ou ímpares são chamadas de homogêneas e, em geral, qualquer supermatriz pode ser escrita como a soma de uma supermatriz par e uma ímpar. Quando $m = n$ e $p = q$ diz-se que a supermatriz é

[5]Em geral, um homomorfismo é um mapa entre estruturas algébricas do mesmo tipo que preserva as operações definidas nelas; em particular, os homeomorfismos entre espaços vetoriais resultam ser aplicações lineares.

quadrada. Cabe mencionar que alguns autores dizem que uma supermatriz está escrita na forma padrão quando ela é par. Note-se que uma matriz ordinária (ou seja, não-graduada) $m \times n$ pode ser vista como uma supermatriz par $(m|0) \times (n|0)$.

A adição de supermatrizes é definida de maneira idêntica que para matrizes ordinárias, sempre que ambas supermatrizes sejam da mesma dimensão. A multiplicação de supermatrizes é definida também como uma multiplicação de matrizes ordinárias separadas em blocos:

$$\left(\begin{array}{c|c} X_{00} & X_{01} \\ \hline X_{10} & X_{11} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Y_{00} & Y_{01} \\ \hline Y_{10} & Y_{11} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} X_{00}Y_{00} + X_{01}Y_{10} & X_{00}Y_{01} + X_{01}Y_{11} \\ \hline X_{10}Y_{00} + X_{11}Y_{10} & X_{10}Y_{01} + X_{11}Y_{11} \end{array}\right) .$$

Um detalhe importante é que uma supermatriz $(m|p) \times (n|q)$ só pode ser multiplicada (pela direita) por uma matriz $(n|q) \times (r|s)$. Também, a paridade do produto de duas supermatrizes X e Y é tal que $|XY| = |X| + |Y|$.

Uma outra operação importante é a multiplicação de uma supermatriz X por um supernúmero z:

$$zX \doteq \left(\begin{array}{c|c} zX_{00} & zX_{01} \\ \hline (-1)^{|z|}zX_{10} & (-1)^{|z|}zX_{11} \end{array}\right) \quad , \quad Xz \doteq \left(\begin{array}{c|c} X_{00}z & X_{01}(-1)^{|z|}z \\ \hline X_{10}z & X_{11}(-1)^{|z|}z \end{array}\right) .$$

Como consequência dessa definição, $zX = (-1)^{|z||X|}Xz$. Também:

$$(zX)Y = z(XY) \quad , \quad (Xz)Y = X(zY) \quad , \quad (XY)z = X(Yz) .$$

Outra operação com supermatrizes é a supertransposição, definida segundo:

$$X^{st} \doteq \left(\begin{array}{c|c} X_{00}^t & X_{10}^t \\ \hline -X_{01}^t & X_{11}^t \end{array}\right) \quad , \quad |X| = 0 \quad ; \quad X^{st} \doteq \left(\begin{array}{c|c} X_{00}^t & -X_{10}^t \\ \hline X_{01}^t & X_{11}^t \end{array}\right) \quad , \quad |X| = 1 .$$

Em particular, se $(x;\theta) \stackrel{!}{=} (x^1, \cdots, x^m; \theta^1, \cdots, \theta^n)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} x & \theta \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} x & \theta \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} x \\ -\theta \end{pmatrix} .$$

Observe-se o seguinte:

$$(X^{st})^{st} = \left(\begin{array}{c|c} X_{00} & -X_{01} \\ \hline -X_{10} & X_{11} \end{array}\right) \neq X \qquad ; \qquad (st)^4 = id \ .$$

Também, $(XY)^{st} = (-1)^{|X||Y|} Y^{st} X^{st}$.

Dada uma supermatriz homogênea X, define-se o supertraço segundo:

$$str(X) \doteq tr(X_{00}) - (-1)^{|X|} tr X_{11} \ .$$

O supertraço satisfaz as seguintes propriedades:

- $str(X+Y) = str(X) + str(Y)$.
- $str(XY) = (-1)^{|X||Y|} str(YX)$.
- $str(zX) = z\ str(X) \qquad , \qquad str(Xz) = str(X)z$.
- $str(X^{st}) = str(X)$.

Dada uma supermatriz quadrada X ela é invertível se e somente se os blocos X_{00} e X_{11} são invertíveis [39, 40]. Define-se o bereziniano[6] (ou superdeterminante) segundo:

$$Ber(X) \doteq \frac{det\left(X_{00} - X_{01} X_{11}^{-1} X_{10}\right)}{det(X_{11})} \ .$$

O bereziniano satisfaz as seguintes propriedades:

- $Ber(XY) = Ber(X) Ber(Y)$.
- $Ber(X^{st}) = Ber(X)$.
- $Ber(1+X) = 1 + str(X)$.
- $Ber(e^X) = e^{str(X)}$.

Finalmente, dada uma supermatriz invertível X, a inversa dela é dada explicitamente segundo [40]:

$$X^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \left(X_{00} - X_{01} X_{11}^{-1} X_{10}\right)^{-1} & -X_{00}^{-1} X_{01} \left(X_{11} - X_{10} X_{00}^{-1} X_{01}\right)^{-1} \\ \hline -X_{11}^{-1} X_{10} \left(X_{00} - X_{01} X_{11}^{-1} X_{10}\right)^{-1} & \left(X_{11} - X_{10} X_{00}^{-1} X_{01}\right)^{-1} \end{array}\right) \ .$$

[6] Chamado assim por Felix Alexandrovich Berezin, quem foi um dos pioneiros no estudo da superálgebra e o superanálise.

4.3 Superfunções

Em termos práticos, as superfunções podem ser vistas como uma versão $\mathbb{Z}_2-$graduada das funções ordinárias. Uma superfunção é uma função definida sobre o superespaço $\mathbb{R}^{m|n}$ que atribui a cada elemento do domínio um único supernúmero, ou seja que o conjunto de chegada é a álgebra de Grassmann Gr_∞. Assim, uma superfunção é uma mapa $f : \mathbb{R}^{m|n} \to Gr_\infty$. Uma vez que para qualquer $z \equiv (x;\theta) \in Dom(f)$, a imagem $f(z)$ é um supernúmero, sempre é possível fazer a seguinte descomposição:

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) \qquad ; \qquad \text{com } f_0(z) \in \mathbb{C}_0 \text{ e } f_1(z) \in \mathbb{C}_1 \ .$$

Logo, se podem definir dois tipos de superfunções:

- **Superfunção par:** É um mapa da forma $f : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathbb{C}_0$. Logo, uma vez que para qualquer z, a imagem $f(z)$ é um $c-$número, pode-se escrever $|f| = 0$.
- **Superfunção ímpar:** É um mapa da forma $f : \mathbb{R}^{m|n} \to \mathbb{C}_1$. Logo, uma vez que para qualquer z, a imagem $f(z)$ é um $a-$número, pode-se escrever $|f| = 1$.

Em particular, se o conjunto de chegada de uma superfunção for $\mathbb{R}_0$ ou $\mathbb{R}_1$, diz-se que ela é real.

Em geral, uma superfunção $f : \mathbb{R}^{m|n} \to Gr_\infty$ pode ser escrita como [41]:

$$f(x;\theta) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} f_{\alpha_1\cdots\alpha_k}(x)\theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_k} \qquad ; \qquad f_0 \ , \ \underbrace{f_{\alpha_1\cdots\alpha_k}}_{\substack{\text{Totalmente} \\ \text{antissimétrico}}} \in Gr_\infty \ .$$

Uma superfunção é dita superanalítica se pode ser expandida em série de Taylor dos z^A :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_{A_1\cdots A_k} z^{A_1}\cdots z^{A_k} \qquad ; \qquad f_{A_1\cdots A_k} \in Gr_\infty;.$$

As superfunções analíticas permitem a definição de derivada; porém, uma vez que entre os z^A há $a-$números, podem ser definidos dois tipos de derivada:

- **Derivada à esquerda:**

$$\frac{\partial_{_L}}{\partial z^A}(z^{A_1}\cdots z^{A_k}) \doteq \sum_{i=1}^{k}(-1)^{\sum_{j=1}^{i-1}|A_i||A_j|}\,\delta_A^{A_i} z^{A_1}\cdots z^{A_{i-1}} z^{A_{i+1}}\cdots z^{A_k}\ .$$

  Uma maneira prática de visualizar a derivada à esquerda é fazer as transposições necessárias para que o z^{A_i} que será derivado (em relação ao z^A) encontre-se à esquerda dos outros.
  NOTA: Foi usada a notação $|A| \stackrel{!}{=} |z^A|$.

- **Derivada à direita:**

$$\frac{\partial_{_R}}{\partial z^A}(z^{A_1}\cdots z^{A_k}) \doteq \sum_{i=1}^{k}(-1)^{\sum_{j=i+1}^{k}|A_i||A_j|}\, z^{A_1}\cdots z^{A_{i-1}} z^{A_{i+1}}\cdots z^{A_k}\delta_A^{A_i}\ .$$

  Uma maneira prática de visualizar a derivada à esquerda é fazer as transposições necessárias para que o z^{A_i} que será derivado (em relação ao z^A) encontre-se à direita dos outros.

Mais geral, se $F = F(z)$ é uma superfunção e os z^A, por sua vez, são funções de um parâmetro real t, i. e.: $z^A = z^A(t)$, as derivadas esquerda e direita podem ser definidas segundo:

$$\frac{d}{dt}F(z) \equiv \dot{F} = \dot{z}^A\frac{\partial_{_L}F}{\partial z^A} = \frac{\partial_{_R}F}{\partial z^A}\dot{z}^A\ .$$

As derivadas esquerda e direita satisfazem as seguintes propriedades [42]:

- $\left|\dfrac{\partial_{_L} f}{\partial z^A}\right| = |f| + |A| = \left|\dfrac{\partial_{_R} f}{\partial z^A}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^A}\right| = |A| = \left|\dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^A}\right|\ .$
- $\dfrac{\partial_{_R} f}{\partial z^A} = (-1)^{|A|(|f|+1)}\dfrac{\partial_{_L} f}{\partial z^A}\ .$
- $\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^A}\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^B}f = (-1)^{|A||B|}\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^B}\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^A}f \qquad , \qquad \dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^A}\dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^B}f = (-1)^{|A||B|}\dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^B}\dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^A}f\ .$
- $\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^A}\dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^B}f = \dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^B}\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^A}f\ .$
- $\dfrac{\partial_{_L}}{\partial z^A}(fg) = \dfrac{\partial_{_L} f}{\partial z^A}g + (-1)^{|A||f|}f\dfrac{\partial_{_L} g}{\partial z^A}\ .$
- $\dfrac{\partial_{_R}}{\partial z^A}(fg) = (-1)^{|A||g|}\dfrac{\partial_{_R} f}{\partial z^A}g + f\dfrac{\partial_{_R} g}{\partial z^A}\ .$

Lembre-se que no caso de funções ordinárias (sobre uma variedade), elas podem ser consideradas como $0-$formas e a derivada exterior de uma função define uma

1−forma. As superfunções $f : \mathbb{R}^{m|n} \to Gr_\infty$ podem ser consideradas também como representações locais de funções definidas sobre uma estrutura chamada de supervariedade[7], cujas coordenadas locais são as do superespaço $\mathbb{R}^{m|n}$. Também é possível definir uma operação de derivada exterior para superfunções segundo:

$$df \doteq dz^A \frac{\partial_L f}{\partial z^A} \quad \Rightarrow \quad d = dz^A \frac{\partial_L}{\partial z^A} .$$

Note-se que uma vez que df é uma 1−forma e está escrita como combinação linear dos objetos dz^A, eles também serão 1−formas. De maneira similar à geometria diferencial padrão, a derivada exterior também é uma operação linear tal que $d^2 = 0$, em consequência, surgem duas possibilidades para a paridade dela: $|d| = 0$ ou $|d| = 1$, o que é consistente com o fato de ser um homomorfismo entre os superespaços vetoriais de 0−formas e 1−formas. Agora observe-se o seguinte [43]:

- $|d| = 0 \quad \Rightarrow \quad |dz^A| = \left|\frac{\partial_L}{\partial z^A}\right| = |A| \quad \Rightarrow$ Os dz^A superanticomutam.
  Em consequência: $dz^A \wedge dz^B = -(-1)^{|A||B|} dz^A \wedge dz^B$.
- $|d| = 1 \quad \Rightarrow \quad |dz^A| = \left|\frac{\partial_L}{\partial z^A}\right| + 1 = |A| + 1 \quad \Rightarrow$ Os dz^A supercomutam.
  Em consequência: $dz^A \wedge dz^B = (-1)^{(|A|+1)(|B|+1)} dz^A \wedge dz^B$.

Assim, é possível obter duas convenções para o produto exterior de formas; a primeira é conhecida como convenção de Deligne, enquanto que a segunda, convenção de Berstein-Leites.

4.4 Formulações lagrangiana e hamiltoniana

A presente seção é basicamente uma extensão do estudado em mecânica analítica padrão, mas a diferença radica em que agora as coordenadas do espaço de configuração terão um setor par e um ímpar (no sentido de supernúmeros puros); isto é, terá a estrutura do superespaço $\mathbb{R}^{m|n}$; este fato implica que o funcional ação também apresentará ambos tipos de variáveis. Seguidamente, assumindo o tempo todo que o sistema estudado é regular, a passagem para a formulação hamiltoniana será feita obtendo que, devido às propriedades das variáveis ímpares,

[7] As supervariedades são uma versão $\mathbb{Z}_2$−graduada das variedades ordinárias, porém, sua construção envolve uma série de conceitos que estão além dos propósitos do presente capítulo. Maior informação sobre supervariedades pode ser encontrada nas referências [38], [41] e [39].

as equações de movimento correspondentes ao setor ímpar não serão exatamente iguais às obtidas para o setor par, o qual terá como consequência alguns resultados um pouco distintos do obtido previamente no caso padrão.

Para construir a formulação lagrangiana deverá ser considerado um funcional ação da seguinte forma:

$$S[q,\theta] \doteq \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q};\theta,\dot{\theta};t)dt \qquad ; \qquad q \stackrel{!}{=} (q^1;\cdots;q^m) \quad , \quad \theta \stackrel{!}{=} (\theta^1;\cdots;\theta^n) \; .$$

As variáveis q^a são pares (pois são as coordenadas generalizadas usuais) enquanto que as coordenadas θ^α são ímpares. Uma vez que o procedimento variacional implicado pelo princípio de Hamilton independe da forma explícita da lagrangiana, as equações de Euler-Lagrange serão idênticas às obtidas no caso padrão:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial_{_L} L}{\partial \theta^\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_{_L} L}{\partial \dot{\theta}^\alpha}\right) = 0 \; .$$

A escolha de derivada esquerda para as variáveis ímpares θ^α é puramente convencional. Assim, observa-se que a formulação lagrangiana construída sobre um superespaço de configuração, em princípio, não difere do caso padrão.

O seguinte será a construção da formulação hamiltoniana. Assumindo que a transformação de Legendre é bem definida, definem-se os momentos canônicos conjugados segundo:

$$p_a \doteq \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \qquad , \qquad \pi_\alpha \doteq \frac{\partial_{_L} L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} \; .$$

Note-se que uma vez que as variáveis θ^α são ímpares ter-se-á o seguinte:

$$|\pi_\alpha| = |L| + |\theta^\alpha| = |L| + 1 \; ,$$

isso significa que a paridade do π_α depende da paridade da lagrangiana (pois resulta ter paridade oposta). Considerando $|L| = \epsilon$, ter-se-á que $|\pi_\alpha| = 1 + \epsilon$.

A transformada de Legendre da lagrangiana, isto é, a hamiltoniana é definida

segundo:

$$H(q,p;\theta,\pi) \doteq \dot{q}^a(q;p)p_a + \dot{\theta}^\alpha(\theta;\pi)\pi_\alpha - L\big(q,\dot{q}(q;p);\theta,\dot{\theta}(\theta;\pi)\big) \ .$$

Tomando a derivada exterior da hamiltoniana:

$$dH = \left\{ \begin{array}{l} dq^a \dfrac{\partial H}{\partial q^a} + dp_a \dfrac{\partial H}{\partial p_a} + d\theta^\alpha \dfrac{\partial_{_L} H}{\partial \theta^\alpha} + d\pi_\alpha \dfrac{\partial_{_L} H}{\partial \pi_\alpha} \\ d\dot{q}^a p_a + dp_a \dot{q}^a + d\dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha + d\pi_\alpha (-1)^{|\pi_\alpha|}\dot{\theta}^\alpha - dL \end{array} \right. ,$$

com $dL = dq^a \dfrac{\partial L}{\partial q^a} + d\dot{q}^a \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} + d\theta^\alpha \dfrac{\partial_{_L} L}{\partial \theta^\alpha} + d\dot{\theta}^\alpha \dfrac{\partial_{_L} L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} = dq^a \dfrac{\partial L}{\partial q^a} + d\dot{q}^a p_a + d\theta^\alpha \dfrac{\partial_{_L} L}{\partial \theta^\alpha} + d\dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha$. Igualando as duas expressões para dH se obtém:

$$dq^a \left(\frac{\partial H}{\partial q^a} + \frac{\partial L}{\partial q^a} \right) + dp_a \left(\frac{\partial H}{\partial p_a} - \dot{q}^a \right) + d\theta^\alpha \left(\frac{\partial_{_L} H}{\partial \theta^\alpha} + \frac{\partial_{_L} L}{\partial \theta^\alpha} \right) + d\pi_\alpha \left(\frac{\partial_{_L} H}{\partial \pi_\alpha} + (-1)^\epsilon \dot{\theta}^\alpha \right) = 0 \ .$$

Levando em conta o seguinte:

$$\dot{p}_a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \overset{EL}{=} \frac{\partial L}{\partial q^a} \qquad , \qquad \dot{\pi}_\alpha = \frac{\partial_{_L} L}{\partial \theta^\alpha} \ ,$$

as equações de Hamilton resultam:

$$\frac{\partial H}{\partial q^a} = -\dot{p}_a \qquad , \qquad \frac{\partial H}{\partial p_a} = \dot{q}^a \qquad , \qquad \frac{\partial_L H}{\partial \theta^\alpha} = -\dot{\pi}_\alpha \qquad , \qquad \frac{\partial_L H}{\partial \pi_\alpha} = -(-1)^\epsilon \dot{\theta}^\alpha \ .$$

O resultado anterior também pode ser escrito matricialmente:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & -I_m & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ I_m & 0 & & \\ \hdashline \multicolumn{2}{c:}{\multirow{2}{*}{0}} & 0 & -I_n \\ & & -(-1)^\epsilon I_n & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\pi} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial_{_L} H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial_{_L} H}{\partial \pi} \end{array} \right) \ .$$

A expressão anterior apresenta uma supermatriz $(2m|2n) \times (2m|2n)$ com algumas entradas dependentes do parâmetro ϵ. Encontra-se que todas as teorias físicas resultam ser pares, isto é, $|L| = \epsilon = 0$; consequentemente é de interesse físico apenas o caso $\epsilon = 0$. Com isto, as equações de Hamilton expressas matricialmente

resultam:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & -I_m & & \\ I_m & 0 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hdashline & & 0 & -I_n \\ \multicolumn{2}{c:}{0} & -I_n & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\pi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial q}\\ \frac{\partial H}{\partial p}\\ \frac{\partial_L H}{\partial \theta}\\ \frac{\partial_L H}{\partial \pi}\end{pmatrix} .$$

Inserindo as notações $\xi \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ e $\eta \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix}$, o resultado pode ser escrito de maneira um pouco mais compacta:

$$\left(\begin{array}{c:c} \Omega_{2m\times 2m} & 0 \\ \hdashline 0 & M_{2n\times 2n} \end{array}\right)\begin{pmatrix}\dot{\xi}\\ \dot{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial H}{\partial \xi}\\ \frac{\partial_L H}{\partial \eta}\end{pmatrix} , \tag{4.7}$$

onde Ω é a matriz simplética do caso padrão, enquanto que M é uma matriz simétrica. Assim, encontra-se que para uma teoria par a supermatriz $\Sigma = \left(\begin{array}{c:c} \Omega & 0 \\ \hdashline 0 & M \end{array}\right)$, escrita em sua forma padrão, é tal que o bloco correspondente ao setor puramente par (ímpar) resulta ser antissimétrico (simétrico).

Uma vez obtidas as equações de Hamilton, o seguinte será definir os parênteses de Poisson. Para esse propósito vale a pena lembrar um pouco de como eles foram construídos para o caso padrão (assumindo a regularidade do sistema):

$$\Omega\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\xi} = \Omega^{-1}\frac{\partial H}{\partial \xi} .$$

Por outro lado, dada uma função dinâmica $F = F(\xi)$:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\dot{\xi} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\Omega^{-1}\frac{\partial H}{\partial \xi} .$$

Logo, impondo a condição $\dot{F} = \{F; H\}$ se identifica imediatamente que os parênteses de Poisson de duas funções dinâmicas F e G são definidos segundo:

$$\{F; G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\Omega^{-1}\frac{\partial G}{\partial \xi} .$$

Em termos das coordenadas q^a e p_a do espaço de fase:

$$\{F;G\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial q} \\ \frac{\partial G}{\partial p} \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q^a} \, .$$

O seguinte será usar as equações de Hamilton (4.7) para construir os parênteses de Poisson para o superespaço de fase $\mathbb{R}^{2m|2n}$ com coordenadas $(\xi;\eta)$:

$$\Omega\dot{\xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi} \quad , \quad M\dot{\eta} = \frac{\partial_{_L} H}{\partial \eta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\xi} = \Omega^{-1}\frac{\partial H}{\partial \xi} \quad , \quad \dot{\eta} = M^{-1}\frac{\partial_{_L} H}{\partial \eta} \, .$$

Logo, considerando uma função dinâmica $F = F(\xi;\eta)$:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial_{_R} F}{\partial \eta}\dot{\eta} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\Omega^{-1}\frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial_{_R} F}{\partial \eta}M^{-1}\frac{\partial_{_L} H}{\partial \eta} \, .$$

Logo, impondo novamente que $\dot{F} = \{F;H\}$, definem-se os parênteses de Poisson de duas funções dinâmicas F e G segundo:

$$\{F;G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\Omega^{-1}\frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial_{_R} F}{\partial \eta}M^{-1}\frac{\partial_{_L} H}{\partial \eta} \, .$$

Em termos das coordenadas q^a, p_a, θ^α e π_α :

$$\begin{aligned}
\{F;G\} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial q} \\ \frac{\partial G}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial_{_R} F}{\partial \theta} & \frac{\partial_{_R} F}{\partial \pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial_{_L} G}{\partial \theta} \\ \frac{\partial_{_L} G}{\partial \pi} \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q^a} - \frac{\partial_{_R} F}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial_{_L} G}{\partial \pi_\alpha} - \frac{\partial_{_R} F}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial_{_L} G}{\partial \theta^\alpha} \\
&= \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial G}{\partial q^a}\frac{\partial F}{\partial p_a} - \frac{\partial_{_R} F}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial_{_L} G}{\partial \pi_\alpha} - (-1)^{|F|+1}\frac{\partial_{_L} F}{\partial \pi_\alpha}(-1)^{|G|+1}\frac{\partial_{_R} G}{\partial \theta^\alpha} \\
&= \{F;G\}_\xi - \frac{\partial_{_R} F}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial_{_L} G}{\partial \pi_\alpha} - (-1)^{|F|+|G|}(-1)^{(|F|+1)(|G|+1)}\frac{\partial_{_R} G}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial_{_L} F}{\partial \pi_\alpha} \\
&= \{F;G\}_\xi - \frac{\partial_{_R} F}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial_{_L} G}{\partial \pi_\alpha} + (-1)^{|F||G|}\frac{\partial_{_R} G}{\partial \theta^\alpha}\frac{\partial_{_L} F}{\partial \pi_\alpha} \overset{!}{=} \{F;G\}_\xi + \{F;G\}_\eta \, .
\end{aligned}$$

Note-se que a parte $\{\ ;\ \}_\eta$, correspondente ao setor ímpar, tem uma forma similar à dos superparênteses de Lie.

Considerando apenas variáveis ímpares, ter-se-á:

$$\{F;G\}_\eta = -\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\lambda}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\lambda} + (-1)^{|F||G|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\lambda}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\lambda}\,.$$

Logo, os seguintes parênteses fundamentais podem ser obtidos:

$$\{\theta^\alpha;\pi_\beta\}_\eta = -\delta^\alpha_\lambda\delta^\lambda_\beta + (-1)^{(1)(1)}(0)(0) = -\delta^\alpha_\beta\,.$$

$$\{\pi_\beta;\theta^\alpha\}_\eta = -(0)(0) + (-1)^{(1)(1)}\delta^\alpha_\lambda\delta^\lambda_\beta = -\delta^\alpha_\beta\,.$$

Observe-se que o setor ímpar dos parênteses de Poisson $\{\ ;\ \}_\eta$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Paridade: $|\{F;G\}_\eta| = |F| + |G|$.
2. Antissimetria graduada: $\{F;G\}_\eta = -(-1)^{|F||G|}\{G;F\}_\eta$.
   Em particular, quando F e G são funções ímpares, $\{F;G\}_\eta = \{G;F\}_\eta$.
3. Identidade de Jacobi graduada:

$$(-1)^{|F||H|}\Big\{F;\{G;H\}_\eta\Big\}_\eta + (-1)^{|G||F|}\Big\{G;\{H;F\}_\eta\Big\}_\eta + (-1)^{|H||G|}\Big\{H;\{F;G\}_\eta\Big\}_\eta = 0\,.$$

4. Regra de Leibniz graduada: $\{F;GH\}_\eta = \{F;G\}_\eta H + (-1)^{|F||G|}G\{F;H\}_\eta$

As propriedades 2 e 3 correspondem a uma superálgebra de Lie, que é uma superálgebra cujo produto são os chamados superparênteses de Lie. Também é importante observar que quando as funções F, G e H são pares, recuperam-se as propriedades dos parênteses de Poisson do caso padrão (que corresponde ao setor par).

4.5 Formulação *à la* Faddeev-Jackiw

Seguindo a ideia do método de Faddeev-Jackiw, precisa-se de um superespaço de fase com coordenadas unificadas, as quais convenientemente terão separadas as partes par e ímpar, o que implica que o superespaço de fase terá a estrutura $\mathbb{R}^{m|n}$. Novamente se trabalhará partindo de uma lagrangiana canônica (linear nas *velocidades*), as equações de movimento fornecerão a forma simplética associada ao superespaço de fase e a inversa dela permitirão definir os parênteses de Poisson.

A lagrangiana escrita em sua forma canônica permite construir um objeto chamado de $1-$forma canônica e por meio da derivada exterior será possível obter a forma simplética esperada; é importante assinalar que uma vez que o superespaço de fase é da forma $\mathbb{R}^{m|n}$, o resultado da derivada exterior da $1-$forma canônica, expressado matricialmente, determinará uma supermatriz na forma padrão (os setores par e ímpar estarão em blocos separados).

Considere-se o superespaço de fase com coordenadas:

$$z \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \qquad ; \qquad \xi \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad , \quad \eta \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} \theta \\ \pi \end{pmatrix} ,$$

onde as variáveis ξ são pares ($|\xi| = 0$) e as η são ímpares ($|\xi| = 1$) no sentido de supernúmeros puros.

Considera-se a seguinte lagrangiana canônica:

$$L(z; \dot{z}) = \dot{z}^A \alpha - H \qquad , \qquad H : \text{hamiltoniana} .$$

Em princípio não há restrição para a paridade da teoria[8]; então, será adotada a seguinte convenção: A paridade da derivada exterior deverá coincidir com a paridade da teoria; ou seja, dada uma teoria par (ímpar), a paridade da derivada exterior será $\epsilon = 0$ ($\epsilon = 1$).

Tal como no caso padrão (mecânica analítica), as funções α_A e H só dependem das coordenadas z; por outro lado, uma vez que para ambos casos $|\dot{z}^A| = |A|$, para obter a paridade escolhida ($|L| = |H| = \epsilon$), necessariamente $|\alpha_A| = |A| + \epsilon$.

Bem como no caso padrão, a lagrangiana canônica permite definir a $1-$forma canônica segundo:

$$\alpha = d_\epsilon z^A \alpha_A \qquad , \qquad |d_\epsilon z^A| = |A| + \epsilon .$$

O seguinte passo será definir o funcional ação associado à lagrangiana canônica apresentada:

$$S[z] \doteq \int_{t_1}^{t_2} (\dot{z}^A \alpha_A - H) dt . \tag{4.8}$$

[8]Diz-se que a teoria é par (ímpar) se as funções lagrangiana e hamiltoniana são pares (ímpares).

Logo, fazendo variar essa ação e impondo o princípio de Hamilton as equações de movimento correspondentes podem ser obtidas:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \dot{z}^A \alpha_A + \dot{z}^B \delta \alpha_B - \delta z^A \frac{\partial_L H}{\partial z^A} \right] dt = 0$$

Neste ponto é importante lembrar que a variação de uma função (no sentido do cálculo variacional) é apenas a diferença entre dois pontos considerados próximos e consequentemente deve ter a mesma paridade que a própria função[9]. Logo:

$$\begin{aligned}
\delta S &\cong \int_{t_1}^{t_2} \left[-\delta z^A \dot{\alpha}_A + (-1)^{|B|(|B|+\epsilon)} \delta \alpha_B \dot{z}^B - \delta z^A \frac{\partial_L H}{\partial z^A} \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[-\delta z^A \frac{\partial_R \alpha_A}{\partial z^B} \dot{z}^B + (-1)^{|B|(\epsilon+1)} \delta z^A \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} \dot{z}^B - \delta z^A \frac{\partial_L H}{\partial z^A} \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \delta z^A \left[\left(-\frac{\partial_R \alpha_A}{\partial z^B} + (-1)^{|B|(\epsilon+1)} \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} \right) \dot{z}^B - \frac{\partial_L H}{\partial z^A} \right] dt = 0 \, .
\end{aligned}$$

Chamando $\sigma_{AB} \overset{!}{=} -\frac{\partial_R \alpha_A}{\partial z^B} + (-1)^{|B|(\epsilon+1)} \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A}$, as equações de movimento fornecidas pela ação (4.8) podem ser escritas como:

$$\sigma_{AB} \dot{z}^B = \frac{\partial_L H}{\partial z^A} \, . \tag{4.9}$$

Estas são as equações de Hamilton na notação simplética, pelo qual o objeto σ_{AB} corresponde às componentes da forma simplética $\sigma = \frac{1}{2} dz^B \wedge dz^A \sigma_{AB}$.

Resulta conveniente escrever σ_{AB} apenas em termos de derivadas à esquerda:

$$\sigma_{AB} = -(-1)^{|B|(|A|+\epsilon+1)} \frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} + (-1)^{|B|(\epsilon+1)} \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} \, .$$

Assim, se consegue a seguinte expressão para σ_{AB} :

$$\sigma_{AB} = (-1)^{|B|(\epsilon+1)} \left(-(-1)^{|A||B|} \frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} + \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} \right) \, . \tag{4.10}$$

---

[9] $\delta f = f(z+\delta z) - f(z) \Rightarrow |\delta f| = |f| \quad , \quad d_\epsilon f = d_\epsilon z^A \frac{\partial_L f}{\partial z^A} \Rightarrow |d_\epsilon f| = (|A| + \epsilon) + (|A| + |f|)$.

Agora note-se o seguinte:

$$(-1)^{|A|(\epsilon+1)+|B|(\epsilon+1)+|A||B|+1}\sigma_{BA} = (-1)^{|B|(\epsilon+1)}\left(\frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} + (-1)^{|A||B|}\frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B}\right) = \sigma_{AB}\ .$$

Assim, o obtém-se o seguinte resultado:

$$\sigma_{AB} = (-1)^{(|A|+1)(|B|+1)+\epsilon(|A|+|B|)}\sigma_{BA}\ . \tag{4.11}$$

Uma vez conhecida a forma explícita de σ_{AB} pode-se determinar a paridade associada:

$$|\sigma_{AB}| = \left|\frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B}\right| = |\alpha_A| + |B| = |A| + |B| + \epsilon\ .$$

No caso padrão (mecânica analítica) a forma simplética também pode ser obtida tomando a derivada exterior da $1-$forma canônica ($\omega = d\theta$). Assim, seria razoável esperar obter uma relação similar para o presente caso; para esse fim resulta conveniente determinar a derivada exterior da $1-$forma canônica α.

$$\alpha = d_\epsilon z^B \alpha_B \quad \Rightarrow \quad d_\epsilon \alpha = \begin{cases} -d_\epsilon z^B \wedge d_\epsilon z^A \dfrac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} & ; \quad \epsilon = 0 \\ (-1)^{1+|B|} d_\epsilon z^B \wedge d_\epsilon z^A \dfrac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} & ; \quad \epsilon = 1 \end{cases}\ .$$

Logo:

- Para $\epsilon = 0$:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} = -\frac{1}{2} dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} - \frac{1}{2} dz^A \wedge dz^B \frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} \\ &= -\frac{1}{2} dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} + \frac{1}{2}(-1)^{|A||B|} dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} \\ &= \frac{1}{2} dz^B \wedge dz^A \left[-\frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} + (-1)^{|A||B|}\frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B}\right]\ . \end{aligned}$$

- Para $\epsilon = 1$:

$$\begin{aligned} d\alpha &= (-1)^{1+|B|} dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} = -\frac{1}{2}(-1)^{|B|} dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} - \frac{1}{2}(-1)^{|A|} dz^A \wedge dz^B \frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} \\ &= -\frac{1}{2}(-1)^{|B|} dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} - \frac{1}{2}(-1)^{|A|}(-1)^{(|A|+1)(|B|+1)} dz^B \wedge dz^A \frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} \\ &= \frac{1}{2}(-1)^{|B|} dz^B \wedge dz^A \left[-\frac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} + (-1)^{|A||B|}\frac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B}\right]\ . \end{aligned}$$

Logo, levando em conta que $\sigma_{AB} = \begin{cases} (-1)^{|B|}\left[-(-1)^{|A||B|}\dfrac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} + \dfrac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A}\right] & ; \quad \epsilon = 0 \\ -(-1)^{|A||B|}\dfrac{\partial_L \alpha_A}{\partial z^B} + \dfrac{\partial_L \alpha_B}{\partial z^A} & ; \quad \epsilon = 1 \end{cases}$,

encontra-se que, em geral:

$$d_\epsilon \alpha = -\frac{1}{2} d_\epsilon z^B \wedge d_\epsilon z^A (-1)^{|B|} \sigma_{AB} \qquad (\epsilon = 0, 1) \; .$$

Note-se que no caso de só haver variáveis pares ($|A| = 0 = |B|$) ter-se-á:

$$d_\epsilon \alpha = -\frac{1}{2} d_\epsilon z^B \wedge d_\epsilon z^A (-1)^0 \sigma_{AB} = -\frac{1}{2} d_\epsilon z^B \wedge d_\epsilon z^A \sigma_{AB} \; ;$$

para este caso, $d_\epsilon z^B \wedge d_\epsilon z^A = \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{1+0\cdot 0}\, d_\epsilon z^A \wedge d_\epsilon z^B & (\epsilon = 0) \\ (-1)^{(0+1)(0+1)} d_\epsilon z^A \wedge d_\epsilon z^B & (\epsilon = 1) \end{array} \right\} = -d_\epsilon z^A \wedge$ $d_\epsilon z^B$. Então:

$$d_\epsilon \alpha = \frac{1}{2} d_\epsilon z^A \wedge d_\epsilon z^B \sigma_{AB} = \frac{1}{2}(-1)^{(0+\epsilon+0+\epsilon)(0+0+\epsilon)} \sigma_{AB} d_\epsilon z^A \wedge d_\epsilon z^B = \frac{1}{2} \sigma_{AB} d_\epsilon z^A \wedge d_\epsilon z^B \; .$$

Uma vez que estão-se considerando todas as variáveis como pares, deveria recuperar-se a expressão $d\theta = \omega$. Adotando as notações do caso padrão:

$$\alpha \to \theta \quad , \quad \sigma \to \omega \quad , \quad z^A \to \xi^\mu \quad ,$$

se obtém:

$$d\theta = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu = \omega \; ,$$

o qual, com efeito, é o resultado esperado. Assim, pode-se concluir que as componentes σ_{AB} correspondem à forma simplética e podem ser obtidas segundo:

$$\sigma_{AB} = (-1)^{|B|}(-d_\epsilon \alpha)_{AB} \; . \tag{4.12}$$

Também é importante estudar a paridade da forma simplética introduzida na presente abordagem:

$$\sigma = \frac{1}{2} d_\epsilon z^B \wedge d_\epsilon z^A \sigma_{AB} \quad \Rightarrow \quad |\sigma| = (|B| + \epsilon) + (|A| + \epsilon) + (|A| + |B| + \epsilon) = \epsilon \; .$$

Logo, observa-se que é possível distinguir dois tipos de forma simplética (associados à escolha da paridade da derivada exterior), i. e.: forma simplética par ($\epsilon = 0$) e forma simplética ímpar ($\epsilon = 1$) .

A partir deste ponto supor-se-á que o sistema é regular, o que implica que a forma simplética σ possui inversa, cujas componentes serão denotadas por σ^{AB}. Naturalmente, a seguintes relações deverão ser atendidas:

$$\sigma^{AC}\sigma_{CB} = \delta^A_B \qquad , \qquad \sigma_{BC}\sigma^{CA} = \delta^A_B \ .$$

Com essa definição, algumas propriedades muito importantes da forma simplética inversa podem ser obtidas:

- $\sigma^{AB}\sigma_{BA} = \delta^A_A \quad \Rightarrow \quad |\sigma^{AB}\sigma_{BA}| = |\sigma^{AB}| + |\sigma_{BA}| = |\delta^A_A| = 0$
  $\Rightarrow \quad |\sigma^{AB}| = -|\sigma_{BA}| = -(|B| + |A| + \epsilon) \equiv |A| + |B| + \epsilon \ .$

- $$\begin{aligned}\sigma^{AB}\sigma_{BA} = \delta^A_A &= \sigma_{AB}\sigma^{BA} = (-1)^{|\sigma_{AB}||\sigma^{BA}|}\sigma^{BA}\sigma_{AB} \\ &= (-1)^{(|A|+|B|+\epsilon)(|B|+|A|+\epsilon)}\sigma^{BA}\cdot\left((-1)^{(|A|+1)(|B|+1)+\epsilon(|A|+|B|)}\sigma_{BA}\right) \\ &= (-1)^{|A|+|B|+\epsilon+|A|+|B|+|A||B|+1+\epsilon(|A|+|B|)}\sigma^{BA}\sigma_{BA} \\ &= (-1)^{(|A|+\epsilon)(|B|+\epsilon)+1}\sigma^{BA}\sigma_{BA} \ .\end{aligned}$$

  Assim, o seguinte resultado foi obtido:

$$\sigma^{AB} = -(-1)^{(|A|+\epsilon)(|B|+\epsilon)}\sigma^{BA} \ .$$

Uma vez que a forma simplética σ é invertível, pode-se fazer o seguinte nas equações de movimento (4.9):

$$\sigma_{AB}\dot{z}^B = \frac{\partial_L H}{\partial z^A} \quad \rightarrow \quad \sigma^{CA}\sigma_{AB}\dot{z}^B = \sigma^{CA}\frac{\partial_L H}{\partial z^A} \quad \Rightarrow \quad \dot{z}^A = \sigma^{AB}\frac{\partial_L H}{\partial z^B} \ .$$

Tal como no caso padrão de mecânica analítica, são essas equações de movimento as que permitem definir os parênteses de Poisson $\mathbb{Z}_2-$graduados, para isso a seguinte condição deve ser imposta [44]:

$$\dot{F} = \{F; H_\epsilon\}_\epsilon \qquad (|H_\epsilon| = \epsilon) \ ,$$

onde $F = F(z)$, com $z = z(t)$, é uma função dinâmica das variáveis canônicas no superespaço de fase. Logo:

$$\{F; H_\epsilon\}_\epsilon = \dot{F} = \frac{\partial_R F}{\partial z^A}\dot{z}^A = \frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma^{AB}\frac{\partial_L H_\epsilon}{\partial z^B} \ .$$

Assim, os parênteses de Poisson $\mathbb{Z}_2-$graduados de duas funções dinâmicas F e G estarão dados segundo[10]:

$$\{F;G\}_\epsilon \doteq \frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\ . \tag{4.13}$$

Note-se que, em particular, se tem o seguinte:

$$\{z^A;z^B\}_\epsilon = \frac{\partial_R z^A}{\partial z^C}\sigma_\epsilon^{CD}\frac{\partial_L z^B}{\partial z^D} = \delta_C^A\sigma_\epsilon^{CD}\delta_D^B = \sigma_\epsilon^{AB}\ . \tag{4.14}$$

A definição apresentada em (4.13) é uma versão $\mathbb{Z}_2-$graduada dos parênteses de Poisson já conhecidos e apresenta as seguintes propriedades:

1. Paridade:
$$|\{F;G\}_\epsilon| = |F| + |G| + \epsilon\ .$$

2. Antissimetria graduada:
$$\{F;G\}_\epsilon = -(-1)^{(|F|+\epsilon)(|G|+\epsilon)}\{G;F\}_\epsilon\ .$$

3. Identidade de Jacobi graduada:
$$(-1)^{(|F|+\epsilon)(|H|+\epsilon)}\Big\{F;\{G;H\}_\epsilon\Big\}_\epsilon + (-1)^{(|G|+\epsilon)(|F|+\epsilon)}\Big\{G;\{H;F\}_\epsilon\Big\}_\epsilon + (-1)^{(|H|+\epsilon)(|G|+\epsilon)}\Big\{H;\{F;G\}_\epsilon\Big\}_\epsilon = 0\ .$$

4. Regra de Leibniz graduada:
   - $\{F;GH\}_\epsilon = \{F;G\}_\epsilon H + (-1)^{(|F|+\epsilon)|G|}G\{F;H\}_\epsilon\ .$
   - $\{FG;H\}_\epsilon = (-1)^{|G|(|H|+\epsilon)}\{F;H\}_\epsilon G + F\{G;H\}_\epsilon\ .$

Os parênteses com $\epsilon = 0$ são chamados de *parênteses de Poisson pares* ou simplesmente *parênteses de Poisson* e estão associados a uma forma simplética par, enquanto que com $\epsilon = 1$ são chamados de *parênteses de Poisson ímpares*, *parênteses de Schouten* ou também *antiparênteses* e são fornecidos por uma forma simplética ímpar. Uma superálgebra $\mathscr{A}$ junto a uma operação bilinear par $\{\ ;\ \}_0$ (i.e., $\{\ \mathscr{A}_i;\mathscr{A}_j;\}_0 \subseteq \mathscr{A}_{i+j}$) que satisfaz as quatro propriedades anteriores é chamada de *álgebra de Poisson* enquanto que uma superálgebra $\mathscr{A}$ junto a uma operação bilinear par $\{\ ;\ \}_1$

[10]Foi incluído o subíndice ϵ no objeto σ^{AB} para expressar que ele também depende da paridade da teoria.

(i.e., $\{ \mathscr{A}_i; \mathscr{A}_j; \}_1 \subseteq \mathscr{A}_{i+j+1}$) que satisfaz as quatro propriedades já mencionadas é chamada de *álgebra de Schouten* ou *álgebra de Gerstenhaber*; é importante mencionar que a álgebra de Gerstenhaber é usada no formalismo Batalin-Vilkovisky (BV) em teoria quântica de campos [45].

4.6 Procedimento para o caso singular

Na presente seção se propõe uma extensão do método de Faddeev-Jackiw para sistemas que apresentam graus de liberdade grassmannianos; i. e., que são descritos (localmente) por um superespaço de configuração $\mathbb{R}^{m|n}$, e em consequência o superespaço de fase é da forma $\mathbb{R}^{2m|2n}$. Como já foi apresentado no capítulo 3, o procedimento é construído a partir de uma lagrangiana escrita na forma canônica, definida sobre as coordenadas unificadas do espaço de fase, e apoiando-se na forma pré-simplética[11] fornecida pelo próprio sistema. O desenvolvimento de esta seção será para uma teoria par ($|L| = |H| = 0$).

Em termos das coordenadas (independentes) unificadas z^A, a lagrangiana canônica é dada por:

$$L^{(0)} = \dot{z}^{(0)A}\alpha^{(0)} - H^{(0)} \ .$$

Bem como foi apresentado na seção anterior, as equações de movimento obtidas por meio do princípio de Hamilton são:

$$\sigma^{(0)}_{AB}\dot{z}^{(0)B} = \frac{\partial_{_L} H^{(0)}}{\partial z^{(0)A}} \ ,$$

Com $\sigma^{(0)}_{AB} = -\dfrac{\partial_{_R}\alpha^{(0)}_{A}}{\partial z^{(0)B}} + (-1)^{|B|}\dfrac{\partial_{_L}\alpha^{(0)}_{B}}{\partial z^{(0)A}}$.

Uma vez que o superespaço de fase $\mathbb{R}^{2m|2n}$ é fornecido de uma forma degenerada $\sigma^{(0)}$, a representação matricial dela, $\Sigma^{(0)}$, será uma supermatriz singular $(2m|2n) \times (2m|2n)$. Uma vez que $\Sigma^{(0)}$ é singular, apresentará um autovalor nulo e, em princípio m autovetores associados (pois o autovalor nulo pode ter degenerescência M).

[11] Lembre-se que para sistemas singulares o espaço de fase está equipado com uma $2-$forma degenerada, chamada de pré-simplética.

Por outro lado, das equações de movimento se tem:

$$\sigma^{(0)}_{AB}\dot{z}^{(0)B} = \frac{\partial_{_L} H^{(0)}}{\partial z^{(0)}A} \quad \Rightarrow \quad u^{(0)A}_m \sigma^{(0)}_{AB}\dot{z}^{(0)B} = u^{(0)A}_m \frac{\partial_{_L} H^{(0)}}{\partial z^{(0)A}} \, .$$

Considerando que os u_m são autovetores fila associados ao autovalor nulo; isto é, $u^A_m \sigma_{AB} = 0$, os seguintes vínculos foram obtidos:

$$\Gamma^{(0)}_m = u^{(0)A}_m \frac{\partial_{_L} H^{(0)}}{\partial z^{(0)A}} = 0 \, . \tag{4.15}$$

Uma vez que os $u^{(0)A}_m$ são as componentes de vetores do superespaço, é claro que $|u^{(0)A}_m| = |A|$. Logo, analisando a paridade dos elementos na equação (4.15) se encontra:

$$\left|\Gamma^{(0)}_m\right| = \left|u^{(0)A}_m\right| + \left|\frac{\partial_{_L} H^{(0)}}{\partial z^{(0)A}}\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\Gamma^{(0)}_m\right| = |A| + (|A| + |H^{(0)}|) = |H^{(0)}| \, .$$

Logo, para uma teoria par $\left|\Gamma^{(0)}_m\right| = 0$, isto quer dizer que os vínculos deverão ser funções pares.

O seguinte será impor a consistência dos vínculos obtidos, isto é, $\dot{\Gamma}^{(0)}_m = 0$, o qual é conseguido introduzindo as variáveis auxiliares $\lambda^{(0)}_m$ (multiplicadores de Lagrange). Com isto, constrói-se a nova lagrangiana canônica:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L^{(0)} - \lambda^{(0)m}\dot{\Gamma}^{(0)}_m \cong L^{(0)} + \dot{\lambda}^{(0)m}\Gamma^{(0)}_m \\ &= \dot{\lambda}^{(0)m}\Gamma^{(0)}_m + \dot{z}^{(0)A}\alpha^{(0)}_A - H^{(1)} \qquad , \qquad H^{(1)} = H^{(0)}\Big|_{\Gamma^{(0)}_m = 0} \, . \end{aligned}$$

É importante saber qual é a paridade dos multiplicadores de Lagrange $\lambda^{(0)}_m$, pois em conformidade com o método F-J, eles serão consideradas como novas coordenadas em um superespaço de fase estendido, e uma vez que as coordenadas $z^{(0)A}$ têm setores par e ímpar é preciso saber em qual desses setores os $\lambda^{(0)}_m$ deverão ser incluídos. Então, observe-se o seguinte:

$$0 = |L^{(1)}| = \left|\lambda^{(0)}_m\right| + \left|\Gamma^{(0)}_m\right| \quad \Rightarrow \quad \left|\lambda^{(0)}_m\right| = 0 \, .$$

Assim, os multiplicadores de Lagrange resultam ser pares e deverão se concatenar ao extremo do setor par das coordenadas $z^{(0)}$.

Definindo $z^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(0)} \\ z^{(0)} \end{pmatrix}$ e $\alpha^{(1)} = d\lambda^{(0)m}\Gamma^{(0)}_m + dz^{(0)A}\alpha^{(0)}_A = d\lambda^{(0)m}\Gamma^{(0)}_m + \alpha^{(0)}$, a lagrangiana $1-$iterada $L^{(1)}$ pode ser escrita como:

$$L^{(1)} = \dot{z}^{(1)I}\alpha^{(1)}_I - H^{(1)} \, .$$

Logo, as equações de movimento fornecidas por essa lagrangiana serão da forma:

$$\sigma^{(1)}_{IJ}\dot{z}^{(1)J} = \frac{\partial_L H^{(1)}}{\partial z^{(1)I}} \quad , \quad \text{com} \quad \sigma^{(1)}_{IJ} = -\frac{\partial_R \alpha^{(1)}_I}{\partial z^{(1)J}} + (-1)^{|J|}\frac{\partial_L \alpha^{(1)}_J}{\partial z^{(1)I}} \, .$$

Considerando as extensões dos índices I e J pode-se escrever $I = (m, A)$ e $J = (m', B)$, onde $m, m' = 1, \cdots, M$. Logo, a supermatriz associada à $2-$forma $\sigma^{(1)}$ será:

$$\Sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma^{(1)}_{mm'} & \sigma^{(1)}_{mB} \\ \sigma^{(1)}_{Am'} & \sigma^{(1)}_{AB} \end{pmatrix} \, .$$

Agora observe-se o seguinte:

$$\sigma^{(1)}_{mm'} = -\frac{\partial_R \Gamma^{(0)}_m}{\partial \lambda^{(0)m'}} + (-1)^0 \frac{\partial_L \Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial \lambda^{(0)m}} = 0 \quad , \quad \sigma^{(1)}_{mB} = -\frac{\partial_R \Gamma^{(0)}_m}{\partial z^{(0)B}} + (-1)^{|B|}\frac{\partial_L \alpha^{(0)}_B}{\partial \lambda^{(0)m}} = -\frac{\partial_R \Gamma^{(0)}_m}{\partial z^{(0)B}} \, ,$$

$$\sigma^{(1)}_{Am'} = -\frac{\partial_R \alpha^{(0)}_A}{\partial \lambda^{(0)m'}} + (-1)^0 \frac{\partial_L \Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial z^{(0)A}} = \frac{\partial_L \Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial z^{(0)A}} \quad , \quad \sigma^{(1)}_{AB} = -\frac{\partial_R \alpha^{(0)}_A}{\partial z^{(0)B}} + (-1)^{|B|}\frac{\partial_L \alpha^{(0)}_B}{\partial z^{(0)A}} = \sigma^{(0)}_{AB} \, .$$

Com isto, a supermatriz $\Sigma^{(1)}$ pode ser escrita como:

$$\Sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_M & -\dfrac{\partial_R \Gamma^{(0)}_m}{\partial z^{(0)B}} \\ \dfrac{\partial_L \Gamma^{(0)}_{m'}}{\partial z^{(0)A}} & \Sigma^{(0)} \end{pmatrix} \, .$$

Do anterior, observa-se que o bloco constituído pelas últimas A filas e B colunas resulta ser a supermatriz associada à forma pré-simplética $\sigma^{(0)}$. Se a supermatriz $\Sigma^{(1)}$ for invertível, a inversa dela permitirá definir uma estrutura de Poisson, segundo (4.14), porém, uma vez que as coordenadas auxiliares $\lambda^{(0)}_m$ foram introduzidas apenas para exigir a consistência dos vínculos obtidos durante o desenvolvimento do procedimento F-J, elas não são variáveis dinâmicas do sistema original e consequentemente não são de interesse físico. Por outro lado, quando $\Sigma^{(1)}$ ainda é

singular, o algoritmo deverá ser repetido até obter uma supermatriz regular em alguma iteração.

4.7 Exemplos

4.7.1 Exemplo 1

Considere-se uma partícula que se desenvolve no superespaço de configuração $\mathbb{R}^{1|2}$ com as coordenadas $(x;\theta,\bar{\theta})$. A lagrangiana associada para este sistema é dada por [46]:

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + i\dot{\bar{\theta}}\dot{\theta} \ .$$

É importante explicar a importância do fator i no produto das coordenadas (reais) ímpares. Sejam os $a-$números reais θ^α $(\alpha = 1, 2, \cdots)$, observe-se o seguinte:

$$(\theta^\alpha\theta^\beta)^\dagger = (\theta^\beta)^\dagger(\theta^\alpha)^\dagger \ ,$$

logo, uma vez que os θ^α são reais, ter-se-á:

$$(\theta^\alpha\theta^\beta)^\dagger = \theta^\beta\theta^\alpha = (-1)^{|\theta^\beta||\theta^\alpha|}\theta^\alpha\theta^\beta = -\theta^\alpha\theta^\beta \ .$$

Assim, o produto $\theta^\alpha\theta^\beta$ resulta ser um supernúmero (par) imaginário; em consequência, para obter um supernúmero real bastará multiplicá-lo por um outro número imaginário puro, em particular, a unidade imaginária i.

Os momentos canônicos conjugados estarão dados por:

- $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{1}{2}(2\dot{x}) = \dot{x}$.
- $\bar{\pi} = \dfrac{\partial_{_L} L}{\partial \dot{\theta}} = i\dfrac{\partial_{_L}}{\partial \dot{\theta}}(\dot{\bar{\theta}}\dot{\theta}) = i(-1)^{|\dot{\bar{\theta}}||\dot{\theta}|}\dot{\bar{\theta}}\dfrac{\partial_{_L}\dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} = -i\dot{\bar{\theta}}$.
- $\pi = \dfrac{\partial_{_L} L}{\partial \dot{\bar{\theta}}} = i\dot{\theta}$.

Com isto, a hamiltoniana resulta:

$$H = \dot{x}p + \dot{\theta}\bar{\pi} + \dot{\bar{\theta}}\pi - L = p^2 - i\pi\bar{\pi} + i\bar{\pi}\pi - \left(\frac{1}{2}p^2 + i(i\bar{\pi})(-i\pi)\right) = \frac{1}{2}p^2 - i\pi\bar{\pi} \ .$$

Assim, a lagrangiana canônica será:

$$L = \dot{x}p + \dot{\theta}\bar{\pi} + \dot{\bar{\theta}}\pi - H \, .$$

Uma vez que as coordenadas e os momentos canônicos são independentes, se escolhem as seguintes coordenadas para o superespaço de fase:

$$z^T = \begin{pmatrix} x & p & \theta & \bar{\pi} & \bar{\theta} & \pi \end{pmatrix}$$

note-se que as coordenadas foram ordenadas convenientemente na forma $\mathbb{R}^{2|4}$. O seguinte será identificar à $1-$forma canônica:

$$\alpha = dxp + d\theta\bar{\pi} + d\bar{\theta}\pi \, .$$

Logo, tomando a derivada exterior se obtém a seguinte $2-$forma:

$$\begin{aligned} d\alpha &= -\left(dx \wedge dz^A \frac{\partial_L}{\partial z^A} p + d\theta \wedge dz^A \frac{\partial_L}{\partial z^A} \bar{\pi} + d\bar{\theta} \wedge dz^A \frac{\partial_L}{\partial z^A} \pi \right) \\ &= -\left(dx \wedge dp \frac{\partial_L p}{\partial p} + d\theta \wedge d\bar{\pi} \frac{\partial_L \bar{\pi}}{\partial \bar{\pi}} + d\bar{\theta} \wedge d\pi \frac{\partial_L \pi}{\partial \pi} \right) \\ &= -\left(dx \wedge dp + d\theta \wedge d\bar{\pi} + d\bar{\theta} \wedge d\pi \right) . \end{aligned}$$

Levando em conta que $d\alpha$ está relacionado com a $2-$forma (pré)simplética segundo (4.12), é possível construir a supermatriz associada à $2-$forma σ. Por exemplo:

- $\sigma_{21} = (-1)^{|dz^1|} \underbrace{(-d\alpha)_{21}}_{\substack{\text{Coeficiente de} \\ dz^1 \wedge dz^2 = dx \wedge dp}} = (-1)^{|x|}(1) = 1 = (-1)^0(1) = 1 \, .$

- $\sigma_{43} = (-1)^{|dz^3|}(-d\alpha)_{43} = (-1)^{|\theta|}(1) = (-1)^1(1) = -1 \, .$

Similarmente para as outras entradas da supermatriz; assim, ter-se-á:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cc:cccc} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) .$$

A supermatriz anterior é regular e tem por inversa:

$$\Sigma^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

Logo, se identifica os parênteses de Poisson (graduados) das variáveis canônicas do superespaço de fase:

$$\{x; p\} = 1 \qquad , \qquad \{\theta; \bar{\pi}\} = -1 \qquad , \qquad \{\bar{\theta}; \pi\} = -1 \, .$$

4.7.2 Exemplo 2

No presente exemplo se considerará um sistema descrito por apenas coordenadas ímpares. Seja uma partícula cujo superespaço de configuração é $\mathbb{R}^{0|3}$; se considera a seguinte lagrangiana para descrever o movimento da partícula [46]:

$$L = -\frac{i}{2}\dot{\theta}^{\lambda}\theta^{\tau}\delta_{\lambda\tau} \qquad (\lambda, \tau = 1, 2, 3) \, .$$

Os momentos canônicos conjugados são:

$$\pi_{\alpha} = \frac{\partial_{L} L}{\partial \dot{\theta}^{\alpha}} = -\frac{i}{2}\delta^{\lambda}_{\alpha}\theta^{\tau}\delta_{\lambda\tau} = -\frac{i}{2}\theta^{\tau}\delta_{\alpha\tau} \, . \tag{4.16}$$

Logo, se procede a construir a hamiltoniana:

$$H = \dot{\theta}^{\alpha}\pi_{\alpha} - L = \dot{\theta}^{\alpha}\pi_{\alpha} - \dot{\theta}^{\alpha}\pi_{\alpha} = 0 \, .$$

Note-se que as variáveis π_{α} resultaram ser linearmente dependentes dos θ^{α} e consequentemente o superespaço de fase terá apenas por coordenadas os θ^{α}.

Assim, a lagrangiana canônica será simplesmente:

$$L = \dot{\theta}^{\alpha}\pi_{\alpha} = \dot{\theta}^{\alpha}\left(-\frac{i}{2}\theta^{\beta}\delta_{\alpha\beta}\right) \, .$$

Com isto, a $1-$forma canônica resulta:

$$\alpha = -\frac{i}{2} d\theta^\alpha \theta^\beta \delta_{\alpha\beta} \, .$$

Tomando a derivada exterior se obtém:

$$d\alpha = -\left(-\frac{i}{2}\right) d\theta^\beta \wedge d\theta^\alpha \frac{\partial_L}{\partial\theta^\alpha} \theta^\tau \delta_{\beta\tau} = \frac{i}{2} d\theta^\beta \wedge d\theta^\alpha \delta^\tau_\alpha \delta_{\beta\tau} = \frac{i}{2} d\theta^\beta \wedge d\theta^\alpha \delta_{\beta\alpha} \, .$$

Logo, se constrói a matriz associada à $2-$forma simplética σ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \, .$$

A matriz anterior é claramente regular e tem por inversa:

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \, .$$

Com isto, se identificam os parênteses de Poisson das variáveis escolhidas para o espaço de fase:

$$\{\theta^\alpha ; \theta^\beta\} = -i\delta^{\alpha\beta} \, .$$

Além disso, levando em conta (4.16), também é possível determinar os seguintes PP:

$$\{\theta^\alpha ; \pi_\beta\} = \{\theta^\alpha ; -\frac{i}{2}\theta^\tau \delta_{\beta\tau}\} = -\frac{i}{2}\{\theta^\alpha ; \theta^\tau\}\delta_{\beta\tau} = -\frac{i}{2}(-i\delta^{\alpha\tau})\delta_{\beta\tau} = -\frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta \, .$$

Resulta útil definir a seguinte quantidade:

$$S_\gamma = -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta \, .$$

Note-se que $|S_\gamma| = |\theta^\alpha| + |\theta^\beta| = 1 + 1 = 0$, ou seja que é uma quantidade par.

Agora observe-se o seguinte:

$$\begin{aligned}\{S_\gamma;\theta^\tau\} &= -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\{\theta^\alpha\theta^\beta;\theta^\tau\} = -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\Big[(-1)^{(1)(1)}\{\theta^\alpha;\theta^\tau\}\theta^\beta + \theta^\alpha\{\theta^\beta;\theta^\tau\}\Big] \\ &= -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\Big[-(-i\delta^{\alpha\tau})\theta^\beta + \theta^\alpha(-i\delta^{\beta\tau})\Big] = \frac{1}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}(\delta^{\alpha\tau}\theta^\beta - \delta^{\beta\tau}\theta^\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\epsilon_\gamma{}^\tau{}_\beta\theta^\beta - \epsilon_{\gamma\alpha}{}^\tau\theta^\alpha) = \frac{1}{2}(\epsilon_\gamma{}^\tau{}_\beta\theta^\beta + \epsilon_\gamma{}^\tau{}_\alpha\theta^\alpha) = \epsilon_\gamma{}^\tau{}_\alpha\theta^\alpha\ .\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\{S_\tau;S_\gamma\} &= -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\{S_\tau;\theta^\alpha\theta^\beta\} = -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\Big[\{S_\tau;\theta^\alpha\}\theta^\beta + (-1)^{(0)(1)}\theta^\alpha\{S_\tau;\theta^\beta\}\Big] \\ &= -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\Big[\epsilon_\tau{}^\alpha{}_\lambda\theta^\lambda\theta^\beta + \theta^\alpha\,\epsilon_\tau{}^\beta{}_\lambda\theta^\lambda\Big] = -\frac{i}{2}\Big[\epsilon_{\beta\gamma\alpha}\epsilon_{\lambda\tau}{}^\alpha\theta^\lambda\theta^\beta + \epsilon_{\gamma\alpha\beta}\epsilon_{\lambda\tau}{}^\beta\theta^\alpha\theta^\lambda\Big] \\ &= -\frac{i}{2}\Big[(\delta_{\beta\lambda}\delta_{\gamma\tau} - \delta_{\beta\tau}\delta_{\gamma\lambda})\theta^\lambda\theta^\beta + (\delta_{\gamma\lambda}\delta_{\alpha\tau} - \delta_{\gamma\tau}\delta_{\alpha\lambda})\theta^\alpha\theta^\lambda\Big] \\ &= -\frac{i}{2}\Big[\cancel{\delta_{\gamma\tau}\delta_{\beta\lambda}\theta^\lambda\theta^\beta} - \theta^\gamma\theta^\tau + \theta^\tau\theta^\gamma - \cancel{\delta_{\gamma\tau}\delta_{\alpha\lambda}\theta^\alpha\theta^\lambda}\Big] = -\frac{i}{2}(\delta_{\tau\alpha}\delta_{\gamma\beta} - \delta_{\gamma\alpha}\delta_{\tau\beta})\theta^\alpha\theta^\beta \\ &= -\frac{i}{2}\epsilon_{\tau\gamma}{}^\lambda\epsilon_{\alpha\beta\lambda}\theta^\alpha\theta^\beta = \epsilon_{\tau\gamma}{}^\lambda\left(-\frac{i}{2}\epsilon_{\lambda\alpha\beta}\theta^\alpha\theta^\beta\right) = \epsilon_{\tau\gamma}{}^\lambda S_\lambda\ .\end{aligned}$$

Por outro lado, usando o fato de que as equações de movimento podem ser obtidas segundo $\Sigma\dot{z} = \frac{\partial_L H}{\partial z}$, ter-se-á:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta^1\\ \dot\theta^2\\ \dot\theta^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial_L H}{\partial\theta^1}\\ \frac{\partial_L H}{\partial\theta^2}\\ \frac{\partial_L H}{\partial\theta^3}\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad i\dot\theta^\alpha = \frac{\partial_L H}{\partial\theta^\alpha} = \frac{\partial_L(0)}{\partial\theta^\alpha} = 0\ .$$

Logo, é possível determinar a evolução temporal da quantidade S_γ :

$$\dot S_\gamma = -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\frac{d}{dt}(\theta^\alpha\theta^\beta) = -\frac{i}{2}\epsilon_{\gamma\alpha\beta}\left(\dot\theta^\alpha\theta^\beta + \theta^\alpha\dot\theta^\beta\right) = 0\ .$$

O resultado anterior quer dizer que S_γ é uma quantidade conservada e devido às características dela, pode ser interpretada como o momento angular de spin.

4.7.3 Exemplo 3

Considere-se o superespaço de fase $\mathbb{R}^{1|2}$ para um sistema descrito pela seguinte lagrangiana [5]:

$$L = \frac{i}{2}\theta^\alpha\dot\theta^\beta\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m\dot x^2 - V(x;\theta)\ .$$

Os momentos canônicos conjugados são:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad , \qquad \pi_\alpha = \frac{\partial_{_L} L}{\partial \dot{\theta}^\alpha} = -\frac{i}{2}\theta^\beta \delta_{\alpha\beta} \ .$$

A hamiltoniana correspondente é dada por:

$$H = \dot{x}p + \dot{\theta}^\alpha \pi_\alpha - L = \frac{p^2}{2m} + V(x;\theta) \ .$$

Note-se que, tal como no exemplo anterior, os π_α têm dependência linear com os θ^α; por tanto as coordenadas do superespaço de fase serão:

$$z^T = \begin{pmatrix} x & p & \theta^1 & \theta^2 \end{pmatrix}$$

Com isto, constrói-se a lagrangiana canônica:

$$L = \dot{x}p - \frac{i}{2}\dot{\theta}^\alpha \theta^\beta \delta_{\alpha\beta} - H \ .$$

Seguidamente se identifica a $1-$forma canônica:

$$\alpha = dxp + d\theta^\alpha \left(-\frac{i}{2}\theta^\beta \delta_{\alpha\beta} \right) \ .$$

Tomando a derivada exterior se obtém:

$$d\alpha = -(dx \wedge dp - \frac{i}{2} d\theta^\beta \wedge d\theta^\alpha \delta_{\alpha\beta}) \ .$$

Com isto se constroem as componentes da forma simplética σ e matricialmente ter-se-á:

$$\Sigma = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{array} \right) \ .$$

A supermatriz anterior é claramente invertível, então:

$$\Sigma^{-1} = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{array} \right) \ .$$

Finalmente se identificam os seguintes parênteses de Poisson:

$$\{x; p\} = 1 \qquad , \qquad \{\theta^{\alpha}; \theta^{\beta}\} = -i\delta^{\alpha\beta} \ .$$

Capítulo 5

Teoria clássica de campos na dinâmica instantânea

Os sistemas mecânicos estudados nos capítulos anteriores se caracterizam por apresentar uma quantidade finita de graus de liberdade, fato que permitiu a descrição (local) das suas configurações em termos das coordenadas generalizadas, as quais se tornam funções do tempo quando o sistema evolui. Por outro lado, existem também sistemas com infinitos graus de liberdade, como por exemplo o campo eletromagnético; esses sistemas não podem ser tratados de maneira discreta, pelo qual, é necessário fazer uma *extensão* das abordagens já aprendidas (formulações lagrangiana e hamiltoniana) para sistemas contínuos. Esta é a ideia central do que conhecemos como **teoria clássica de campos.**

Nesta teoria, as funções que descrevem a dinâmica dos sistemas não dependem apenas da variável temporal, mas também das coordenadas espaciais; isto é, são funções do espaço-tempo, o qual será denotado por M e é conhecido como *espaço-tempo de Minkowski*[1].

5.1 Espaço-tempo de Minkowski

A teoria da relatividade restrita, proposta por Albert Einstein e publicada no ano 1905 [50], descreve a física de um universo plano (ou sem curvatura). Essa teoria é baseada em apenas dois postulados:

(i). **Invariância das leis físicas:** As leis da física são iguais em qualquer marco referencial inercial.

(ii). **Constância da velocidade da luz:** Em qualquer marco referencial inercial um

[1] O conjunto M tem a estrutura de uma variedade diferenciável lorentziana $4-$dimensional; i.é., a assinatura métrica é da forma $(+;-,-,-) \overset{!}{=} (1,3)$.

feixe de luz viaja em linha reta (em qualquer direção) e com igual velocidade c, independentemente do movimento (se houver) da fonte de luz.

Como consequência imediata do primeiro postulado se estabelece que o espaço é homogêneo e isotrópico enquanto que o tempo é apenas homogêneo[2]. O desenvolvimento da teoria modela localmente o espaço-tempo como um espaço vetorial real $4-$dimensional (três dimensões espaciais e uma temporal) com produto interno e impondo os postulados acima se obtém de maneira natural a forma da métrica (induzida pelo produto interno) e encontra-se que é não-euclidiana. Globalmente o espaço-tempo desta teoria é visto como uma variedade suave, denominada **espaço-tempo de Minkowski**.

Em geral, os pontos $\boldsymbol{x}$ do espaço-tempo são chamados de *eventos*[3] e são especificados pelas coordenadas locais $x \equiv (ct; \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$, onde c é a velocidade da luz e está multiplicada à variável t para dotar à componente x^0 de dimensões de comprimento. Fixado um ponto $\boldsymbol{x} \in M$, o espaço tangente $T_{\boldsymbol{x}}M$ tem a estrutura de um espaço vetorial com um produto interno não definido positivo; isto é, $T_{\boldsymbol{x}}M$ é um espaço pseudo-euclidiano.

Seja $\{e_\mu(\boldsymbol{x})\}_{\mu=0}^3$ é uma base ortonormal de $T_{\boldsymbol{x}}M$, então diz-se que $T_{\boldsymbol{x}}M$ está equipado com uma forma quadrática não-degenerada $Q_{\boldsymbol{x}}$ que estabelece que o quadrado da *norma*[4] de um vetor $v = v^\mu e_\mu(\boldsymbol{x})$ é dada por:

$$Q_{\boldsymbol{x}}(v) = (v^0)^2 - \left[(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2\right] \stackrel{!}{=} (v^0)^2 - \vec{v}^{\,2} \,.$$

Além disso, a forma quadrática $Q_{\boldsymbol{x}}$ dá origem a uma forma bilinear simétrica

[2] A homogeneidade do espaço (tempo) significa que um fenômeno físico se apresenta da mesma maneira independentemente da sua ubicação espacial (temporal), enquanto que a isotropia espacial significa que não existe uma orientação privilegiada no espaço; i. e. há simetria esférica ao redor de cada ponto do espaço e, simetria axial ao longo de um eixo qualquer.

[3] Fisicamente se interpreta um evento como a mínima manifestação de um fenômeno físico, no sentido de que não tem duração e ocorre em uma região puntual do espaço.

[4] Rigorosamente falando, a *norma* definida a partir da aplicação $Q_{\boldsymbol{x}} : T_{\boldsymbol{x}}M \to \mathbb{R}$ não corresponde a uma norma desde que não é definida positiva.

não-degenerada[5] $g_{\boldsymbol{x}} : T_{\boldsymbol{x}}M \times T_{\boldsymbol{x}}M \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\begin{aligned} g_{\boldsymbol{x}}(v;w) &= \frac{1}{2}\left[Q_{\boldsymbol{x}}(v+w) - Q_{\boldsymbol{x}}(v) - Q_{\boldsymbol{x}}(w)\right] \\ &= v^0w^0 - (v^1w^1 + v^2w^2 + v^3w^3) = v^0w^0 - \vec{v}\cdot\vec{w}\ . \end{aligned}$$

Com isto:

$$Q_{\boldsymbol{x}}(v) = g_{\boldsymbol{x}}(v;v)\ .$$

Note-se que desde que forma bilinear $g_{\boldsymbol{x}}$ é simétrica e não-degenerada, satisfaz as condições de um produto interno não-euclidiano (não definido positivo), e por isso também é empregada a notação $v\cdot w \overset{!}{=} g_{\boldsymbol{x}}(v;w)$. Por outro lado, uma vez que $g_{\boldsymbol{x}}$ é uma forma bilinear, é possível definir a partir dela um tensor $(0,2)$ segundo:

$$g_{\boldsymbol{x}} = g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})e^{\mu}(\boldsymbol{x})\otimes e^{\nu}(\boldsymbol{x}) \qquad , \qquad g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) = g_{\boldsymbol{x}}\big(e_{\mu}(\boldsymbol{x});e_{\nu}(\boldsymbol{x})\big)\ ,$$

onde $\{e^{\mu}(\boldsymbol{x})\}_{\mu=0}^{3}$ é base do espaço dual $T^*_{\boldsymbol{x}}M$ e é tal que $e^{\mu}(\boldsymbol{x})\big(e_{\nu}(\boldsymbol{x})\big) = \delta^{\mu}_{\nu}$. O tensor $g_{\boldsymbol{x}}$ é conhecido como *tensor métrico*, pois:

$$g_{\boldsymbol{x}}(v;w) = g_{\boldsymbol{x}}\big(v^{\mu}e_{\mu}(\boldsymbol{x});w^{\nu}e_{\nu}(\boldsymbol{x})\big) = v^{\mu}g_{\boldsymbol{x}}\big(e_{\mu}(\boldsymbol{x});e_{\nu}(\boldsymbol{x})\big)w^{\nu} = v^{\mu}g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})w^{\nu} = v^0w^0 - \vec{v}\cdot\vec{w}\ .$$

A igualdade $g_{\boldsymbol{x}}(v;w) = v^{\mu}g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x})w^{\nu} = v^0w^0 - v^jw^j$ também pode ser escrita como:

$$g_{\boldsymbol{x}}(v;w) = \begin{pmatrix} v^0 & v^1 & v^2 & v^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \\ w^4 \end{pmatrix} = [v]^T[g_{\boldsymbol{x}}][w]\ .$$

Assim, a matriz associada à forma bilinear (ou ao tensor métrico) $g_{\boldsymbol{x}}$ é da forma:

$$[g_{\boldsymbol{x}}] = diag(+,-,-,-)\ .$$

Devido à assinatura dessa métrica, também diz-se que o espaço $T_{\boldsymbol{x}}M$ tem a estrutura de um espaço pseudo-euclidiano $\mathbb{R}^{1+3}$. Daqui, que também é possível usar a notação: $T_{\boldsymbol{x}}M \overset{!}{=} \mathbb{R}^{1+3}_{\boldsymbol{x}}$, onde em geral:

$$\mathbb{R}^{p+q}_{\boldsymbol{x}} = \left\{y - x \,/\, y \in \mathbb{R}^{p+q}\right\}\ .$$

[5] A não-degenerescência de $g_{\boldsymbol{x}}$ significa que para qualquer $w \in T_{\boldsymbol{x}}M$, $g_{\boldsymbol{x}}(v;w) = 0$ implica que $v = 0$.

Mais geral, se pode provar que o próprio conjunto M é homeomorfo com $\mathbb{R}^{1+3}$.

Fisicamente falando, um observador inercial deveria ser capaz de estabelecer seu próprio sistema de coordenadas locais (tanto temporal quanto espaciais); então, se para um observador local um evento $\boldsymbol{x_0} \in M$ acontece no instante t_0 e na posição $\vec{x}$, as coordenadas locais desse evento (estabelecidas pelo observador) serão $x_0 = (ct_0; \vec{x}_0)$. Seguindo essa ideia, sejam $x_1 = (ct_1; \vec{x}_1)$ e $x_2 = (ct_2; \vec{x}_2)$ as representações locais de dois eventos estabelecidas pelo mesmo observador inercial, se para ele $\boldsymbol{x_2}$ aconteceu depois de $\boldsymbol{x_1}$, se define o intervalo s entre esses eventos segundo:

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) = (x_2^0 - x_1^0)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)^2 \, .$$

Definindo $u = x_2 - x_1$, ter-se-á que $u \in T_{\boldsymbol{x_1}}M$ e além disso:

$$s^2 = g_{x_1}(u; u) \, .$$

Daqui, fixado um evento $\boldsymbol{x_0}$, os quadrados das normas dos vetores em $T_{\boldsymbol{x_0}}M$ podem ser vistas como os valores dos intervalos entre $\boldsymbol{x_0}$ e algum outro evento. Por outro lado, uma vez que a norma não é definida positiva, é possível distinguir 3 tipos de vetores:

$$v^2 \stackrel{!}{=} g_{\boldsymbol{x_0}}(v; v) = (v^0)^2 - \vec{v}^{\,2} \quad \begin{cases} < 0 & : \text{ tipo espaço} \\ = 0 & : \text{ tipo luz} \\ > 0 & : \text{ tipo tempo} \end{cases}$$

Seja $v = x - x_0$, então o conjunto de pontos x que geram vetores tipo luz dão origem a uma hipersuperfície (em $\mathbb{R}^4$) que terá por equação cartesiana:

$$(x^0 - x_0^0)^2 - (x^1 - x_0^1)^2 - (x^2 - x_0^2)^2 - (x^3 - x_0^3)^2 = 0 \, ,$$

que corresponde a um cone circular com vértice no ponto $x_0 \in \mathbb{R}^4$ conhecido como **cone de luz** ou também *cone nulo*. As partes superior ($x^0 > x_0^0$) e inferior ($x^0 < x_0^0$) do cone de luz são chamadas de cone futuro e cone passado, respectivamente. Em geral, a evolução temporal de um sistema a partir de um evento inicial $\boldsymbol{x_0}$ pode ser entendida como uma sequência de eventos, graficamente representada pelo que é conhecido na literatura como **linha de mundo**; assim, una linha de mundo indica

a variação da posição como função da coordenada $x^0 = ct$ e se u é a velocidade de um objeto no referencial inercial que estabelece que x_0 são as coordenadas locais de $\boldsymbol{x_0}$ a seguinte relação deve ser atendida:

$$\frac{u}{c} = \frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|}{x^0 - x_0^0} \, .$$

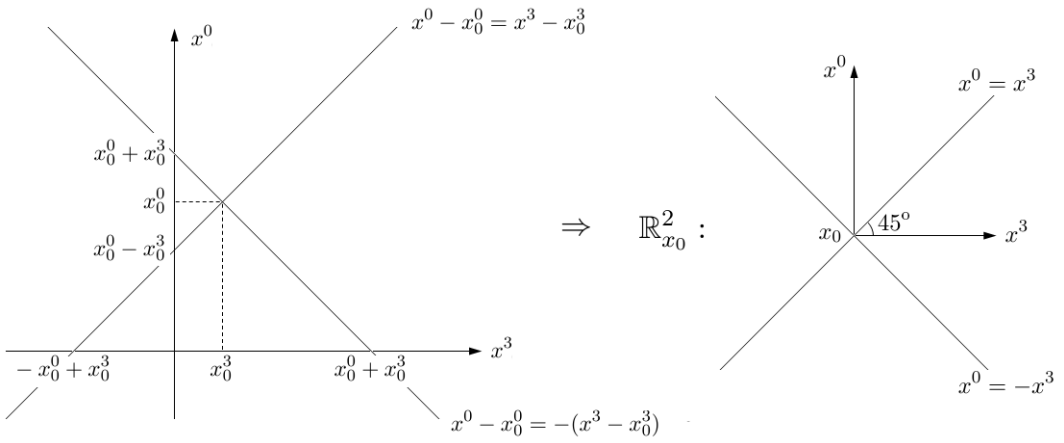
Com isto, uma vez que um feixe de luz viaja com velocidade c, a sua linha de mundo associada deverá coincidir com alguma das geratrizes do cone. Também, em conformidade com os postulados da relatividade especial, nenhum corpo material pode mover-se com velocidade superior à da luz (i.e.: $u/c < 1$) e como consequência, a linha de mundo de um corpo material fica restrita ao *interior* do cone futuro; esse último fato é conhecido como **causalidade.**

Em teorias relativísticas é muito frequente trabalhar no chamado *sistema de unidades naturais*, no qual as constantes universais como c, $\hbar$ (constante de Planck reduzida) y k_B (constante de Boltzmann) são consideradas como 1, o qual permite obter expressões menos complexas; assim, por exemplo, as coordenadas locais de um ponto do espaço-tempo adotariam a forma $(t; \vec{x}) \equiv (x^0; x^1; x^2; x^3)$. Daqui em diante será empregado o sistema de unidades naturais.

Note-se que a projeção do cone de luz em um plano coordenado, por exemplo x^3x^0, determina um lugar geométrico com equação:

$$(x^0 - x_0^0)^2 - (x^3 - x_0^3)^2 = 0 \, ,$$

que corresponde às retas $x^0 - x_0^0 = \pm(x^3 - x_0^3)$, as quais têm declives 1 e -1. Assim, é possível representar graficamente esse lugar geométrico em $\mathbb{R}^2_{x_0}$ como:



Por outro lado, desde que a forma bilinear $g_{\boldsymbol{x}}$ é não-degenerada, é possível obter a métrica inversa $g_{\boldsymbol{x}}^{-1} = g^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) e_\mu(\boldsymbol{x}) \otimes e_\nu(\boldsymbol{x})$ segundo:

$$g^{\mu\sigma}(\boldsymbol{x}) g_{\sigma\nu}(\boldsymbol{x}) = \delta^\mu_\nu \ .$$

Neste ponto se deve ter presente que, fixado um evento $\boldsymbol{x}$, os espaços $T_{\boldsymbol{x}}M$ e $T^*_{\boldsymbol{x}}M$ são isomorfos. Com isto dado um vetor $v \in T_{\boldsymbol{x}}M$, existe um único $\tilde{v} \in T_{\boldsymbol{x}}M^*$ tal que para qualquer $w \in T_{\boldsymbol{x}}M$[6]:

$$g_{\boldsymbol{x}}(v; w) = \tilde{v}(w) \ , \tag{5.1}$$

logo, ter-se-á:

- $$\begin{aligned} g_{\boldsymbol{x}}(v; w) &= g_{\boldsymbol{x}}\big(v^\nu e_\nu(\boldsymbol{x}); w^\mu e_\mu(\boldsymbol{x})\big) = v^\nu w^\mu g_{\boldsymbol{x}}\big(e_\nu(\boldsymbol{x}); e_\mu(\boldsymbol{x})\big) = v^\nu w^\mu g_{\nu\mu}(\boldsymbol{x}) \\ &= v^\nu w^\sigma \delta^\mu_\sigma g_{\nu\mu}(\boldsymbol{x}) = v^\nu w^\sigma e^\mu(\boldsymbol{x})\big(e_\sigma(\boldsymbol{x})\big) g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) \\ &= \Big(g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) v^\nu e^\mu(\boldsymbol{x})\Big)(w) \overset{(5.1)}{=} \tilde{v}(w) \quad \Rightarrow \quad \tilde{v}_\mu = g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) v^\nu \ . \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} \tilde{v}(w) &= \big(\tilde{v}_\nu e^\nu(\boldsymbol{x})\big)\big(w^\sigma e_\sigma(\boldsymbol{x})\big) = \tilde{v}_\nu w^\sigma \delta^\nu_\sigma = \tilde{v}_\nu w^\sigma g^{\nu\mu}(\boldsymbol{x}) g_{\mu\sigma}(\boldsymbol{x}) \\ &= \tilde{v}_\nu w^\sigma g^{\nu\mu}(\boldsymbol{x}) g_{\boldsymbol{x}}\big(e_\mu(\boldsymbol{x}); e_\sigma(\boldsymbol{x})\big) = g_{\boldsymbol{x}}\big(g^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) \tilde{v}_\nu e_\mu(\boldsymbol{x}); w\big) \\ &\overset{(5.1)}{=} g_{\boldsymbol{x}}(v; w) \quad \Rightarrow \quad v^\mu = g^{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) \tilde{v}_\nu \ . \end{aligned}$$

Daqui, observa-se que as componentes de um vetor v e seu correspondente dual $\tilde{v}$ estão relacionadas pelas componentes do tensor métrico (ou a inversa dele). É devido a isto que para um mesmo objeto z é possível lhe atribuir as componentes z^μ ou z_μ, chamadas comumente de contravariantes e covariantes, respectivamente.

[6]Similarmente, dado um covetor $\alpha \in T^*_{\boldsymbol{x}}M$ existe um único $\underset{\sim}{\alpha} \in T_{\boldsymbol{x}}M$ tal que para qualquer $w \in T_{\boldsymbol{x}}M : \alpha(w) = g_{\boldsymbol{x}}(\underset{\sim}{\alpha}; w)$.

Seja uma carta $(\mathscr{U}, \phi)$ que estabelece as coordenadas locais $(x^0; \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$ para um evento $\boldsymbol{x} \in M$; considere-se um deslocamento infinitesimal $dx^\mu e_\mu(\boldsymbol{x}) \in T_{\boldsymbol{x}}M$, define-se o quadrado do elemento de linha segundo:

$$\begin{aligned} ds^2 &\doteq g_{\boldsymbol{x}}\big(dx^\mu e_\mu(\boldsymbol{x}); dx^\nu e_\nu(\boldsymbol{x})\big) = g_{\boldsymbol{x}}\big(e_\mu(\boldsymbol{x}); e_\nu(\boldsymbol{x})\big) dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu}(\boldsymbol{x}) dx^\mu dx^\nu = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \, . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Note-se que, até este ponto, o tensor métrico $g_{\boldsymbol{x}}$ depende do evento $\boldsymbol{x} \in M$. De maneira mais geral, existe um campo tensorial g que atribui a cada ponto $\boldsymbol{x}$ da variedade espaço-tempo de Minkowski um tensor $g_{\boldsymbol{x}} : T_{\boldsymbol{x}}M \times T_{\boldsymbol{x}}M \to \mathbb{R}$. Esse campo tensorial está definido sobre todo o conjunto M e devido a isso, habitualmente se faz uso da notação (M, g) para se referir ao espaço-tempo. Ademais, uma vez que M é homeomorfo com $\mathbb{R}^{1+3}$, o próprio campo tensorial métrico g poderá ser expresso matricialmente como:

$$g = diag(1; -1, -1, -1) \, .$$

Se $\{e_\mu\}_{\mu=0}^3$ é a base canônica[7] e $\{e^\mu\}_{\mu=0}^3$ a sua base dual, o campo tensorial métrico pode ser escrito como:[8]

$$g = g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu_\phi \otimes dx^\nu_\phi \, .$$

Por outro lado, da mesma maneira que as componentes do tensor métrico $g_{\boldsymbol{x}}$ permitem relacionar as componentes de um vetor de $T_{\boldsymbol{x}}M$ e o seu correspondente dual em $T^*_{\boldsymbol{x}}M$, (devido ao isomorfismo entre esses espaços induzido por $g_{\boldsymbol{x}}$) o campo tensorial métrico induz um isomorfismo entre os fibrados TM e T^*M, conhecido como *isomorfismo musical* que estabelece uma relação biunívoca entre um campo vetorial e uma $1-$forma definidos sobre M segundo:

- Dado um campo vetorial $X = X^\mu e_\mu$ define-se o seu *flat* (ou bemol) como a $1-$forma:
$$X^\flat \doteq g_{\mu\nu} X^\mu e^\nu = X_\nu e^\nu \, .$$

- Dada uma $1-$forma $\beta = \beta_\mu e^\mu$ define-se o seu *sharp* (ou sustenido) como o

[7] Uma vez que M é um espaço pseudo-euclidiano tem a estrutura de um espaço vetorial; com esta noção, uma base $\{e_\mu(\boldsymbol{x})\}$ de $T_{\boldsymbol{x}}M$ pode ser vista como a base $\{e_\mu\}$ deslocada até o ponto $\boldsymbol{x}$.

[8] Supondo que $\psi : M \to \mathbb{R}^4$ é o mapa que atribui as coordenadas locais, e $x^\mu_\psi : M \to \mathbb{R}$ o mapa de projeção local, os conjuntos $\left\{e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu_\psi}\right\}$ e $\{e^\mu = dx^\mu_\psi\}$ serão as bases dos espaços dos campos vetoriais e $1-$formas em M, respectivamente.

campo vetorial:

$$\beta^\sharp \doteq g^{\mu\nu}\beta_\mu e_\nu = \beta^\nu e_\nu \ .$$

Levando em conta que um campo vetorial X é um mapa $X : M \to TM$, enquanto que a $1-$forma β é um mapa $\beta : M \to T^*M$, ter-se-á que o flat $\flat$ é um isomorfismo $\flat : TM \to T^*M$, enquanto que o (seu inverso) sharp é $\sharp : T^*M \to TM$. Por questões de comodidade na notação novamente se estabelecerá que dado um mapa X de M a algum dos fibrados TM ou T^*M, é possível lhe estabelecer tanto as componentes X^μ quanto X_ν, as quais estarão relacionadas segundo $X_\mu = g_{\mu\nu}X^\nu$ e $X^\mu = g^{\mu\nu}X_\nu$.

5.2 Campos clássicos e funções de campo

Em termos gerais, um mapa φ, definido sobre os pontos do espaço-tempo M, recebe o nome de **campo clássico**; porém essas funções podem ser, por exemplo, escalares, vetoriais, ou espinoriais; dependendo do sistema que descrevam. Desta maneira um campo clássico é dado localmente por uma função $\phi = \phi(x)$, sendo x as coordenadas locais de um ponto arbitrário do espaço-tempo pertencente ao domínio sobre o qual o mapa φ está definido.

É possível encontrar uma interpretação não-local para um campo clássico: Seja F o conjunto dos valores que um campo clássico pode assumir em um ponto $\boldsymbol{x} \in M$, e seja $\mathscr{U} \subset M$ aberto; então, as *configurações* em $\mathscr{U}$ são localmente descritas pelos mapas $\varphi : \mathscr{U} \to F$, os quais podem ser supostos contínuos e diferenciáveis. Um mapa com exatamente a mesma informação é o seguinte:

$$\tilde{\varphi} : \mathscr{U} \to \mathscr{U} \times F \qquad , \qquad \text{com} \quad \tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}) = \big(\boldsymbol{x}; \varphi(\boldsymbol{x})\big) \ .$$

Se além disso, se considera o mapa $pr_1 : \mathscr{U} \times F \to \mathscr{U}$ que mapeia um ponto $\big(\boldsymbol{x}; \varphi(\boldsymbol{x})\big)$ na sua primeira componente $\boldsymbol{x}$, diz-se que $\mathscr{U} \times F \xrightarrow{pr_1} \mathscr{U}$ é um fibrado trivial sobre $\mathscr{U} \subset M$ com fibra (típica) F; por outro lado, note-se também que ${pr_1}^o\tilde{\varphi} = id_M$, quando essa condição é atendida diz-se que o mapa $\tilde{\varphi}$ é uma seção local do fibrado. Assim, uma vez que φ possue exatamente a mesma informação que $\tilde{\varphi}$, é possível afirmar que um campo clássico pode ser visto como una seção de um fibrado [51].

Em geral, dadas duas variedades E e M com um mapa $\pi : E \to M$ contínuo e sobrejetivo (chamado de *projeção*) diz-se que $E \xrightarrow{\pi} M$ é um fibrado[9] sobre M com espaço total E se existe um recobrimento $\{\mathscr{U}_\alpha\}$ da variedade M tal que para qualquer α existe um difeomorfismo[10] $t_\alpha : \pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) \to \mathscr{U}_\alpha \times F$ (onde F também é uma variedade chamada de *fibra típica*) tal que o seguinte diagrama comuta[11]:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha) & \xrightarrow{t_\alpha} & \mathscr{U}_\alpha \times F \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow{\scriptstyle pr_1} \\ & & \mathscr{U}_\alpha \end{array} .$$

Diz-se que o par $(\mathscr{U}_\alpha, t_\alpha)$ é uma trivialização local do fibrado, pois $\mathscr{U}_\alpha \times F \xrightarrow{pr_1} \mathscr{U}_\alpha$ é um fibrado trivial.

- Dado um ponto $p \in M$, a pré-imagem $F_p = \pi^{-1}(p)$ é chamada de fibra em p.[12]
- Um mapa $\sigma : M \to E$ tal que $\pi^o\sigma = id_M$ é denominado *seção global* do fibrado.
- O conjunto das seções globais do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ é dado por:

$$\Gamma(\pi) = \{\sigma : M \to E \ / \ \sigma \text{ é suave e } \pi^o\sigma = id_M\} .$$

- Seja $\mathscr{U} \subset M$ aberto, um mapa $\varphi : M \to E$ tal que $\pi^o\varphi = id_M$ é chamado de *seção local* do fibrado.
- Se $\mathscr{U}_p$ é uma vizinhança (aberta) de $p \in M$, o conjunto das seções locais ao redor de p do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ é dado por:

$$\Gamma_p(\pi) = \{\varphi : \mathscr{U}_p \to E \ / \ \sigma \text{ é suave e } \pi^o\varphi = id_M\} .$$

Em geral, uma seção (global ou local) do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ pode ser vista intuitivamente como uma aplicação que mapeia cada ponto $p \in M$ em elementos da

[9] Os matemáticos chamam de *variedade fibrada* à terna (E, π, M).

[10] Um difeomorfismo é uma bijeção diferenciável com inversa também diferenciável.

[11] Quando essa última condição é atendida, diz-se que a variedade fibrada (E, π, M) é localmente trivial e denomina-se *maço de fibras*; também é usada a notação (E, π, M, F).

[12] Note-se que para qualquer $x \in F_p : \pi(x) = p$. Além disso, prova-se que para todo $p \in M$ a fibra F_p é homeomorfa à fibra típica F.

fibra[13] F_p; assim, por exemplo, para uma seção local $\varphi : \mathscr{U}_p \to E$, se tem que $\varphi(p) \in F_p \subset E$. Também é importante ressaltar que não todos os fibrados apresentam seções globais.

Um tipo especial de fibrado é o chamado *fibrado vetorial*, o qual apresenta as seguintes duas propriedades adicionais:

(i). Para qualquer $p \in M$, a fibra F_p é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial $n-$dimensional (sendo n a dimensão de F_p).

(ii). Para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $\mathscr{U}$ que o contém e também um difeomorfismo $\Psi : \mathscr{U} \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(\mathscr{U})$ tal que para qualquer $q \in \mathscr{U}$ a correspondência $\Psi(q; v) \to v$ estabelece um isomorfismo entre os espaços F_q e $\mathbb{R}^n$.

O exemplos mais familiares de fibrados vetoriais são os fibrados tangente $(TM \xrightarrow{\tau} M)$ e cotangente $(T^*M \xrightarrow{\pi} M)$. Além disso, com esses novos conceitos, os campos vetoriais e as $1-$formas podem ser vistos como seções (globais) dos fibrados tangente e cotangente, respectivamente.

Considere-se um fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$, com fibra típica F, tal que $dim(M) = m$ e $dim(F) = n$; naturalmente, $dim(E) = m + n$. Seja $\mathscr{U} \subset E$ aberto e $\Psi : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^{m+n}$ o mapa que estabelece as coordenadas locais. Diz-se que Ψ é um sistema coordenado adaptado se para quaisquer $z, w \in \mathscr{U}$ tais que $\pi(z) = \pi(w)$ implica que $pr_1\big(\Psi(z)\big) = pr_1\big(\Psi(w)\big)$, onde $pr_1 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ mapeia um ponto de $\mathbb{R}^{m+n}$ nas primeiras m componentes dele. Assim, as coordenadas locais adaptadas do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ serão da ta forma:

$$\big(\underbrace{x^1, \cdots, x^m}_{\substack{\text{Coord. locais} \\ \text{de } p \in M}}; \underbrace{u^1, \cdots, u^n}_{\substack{\text{Coord. loc.} \\ \text{na fibra } F_p}}\big) \overset{!}{=} \big(x^\mu; u^A\big) \, .$$

Isto quer dizer que os pontos em uma mesma fibra F_p terão as primeiras m coordenadas iguais (correspondentes às coordenadas locais de $p \in M$), mas serão distinguidos pelas outras n coordenadas.

Seja o ponto $p \in M$ com coordenadas locais $x \overset{!}{=} (x^1; \cdots; x^m)$, define-se a função de projeção local $u^A_\Psi : E \to \mathbb{R}$, tal que mapeia um ponto $z \in F_p = \pi^{-1}(p)$ na

[13] É por esse motivo que às vezes diz-se que a fibra típica F é o conjunto de chegada dos campos.

coordenada u^A. Logo, se $\mathscr{W}_p \subset M$ é um aberto que contém o ponto p e $\varphi : \mathscr{W}_p \to E$ é uma seção (local) do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$, resulta conveniente definir a função:

$$\phi^A_\Psi \doteq u^A_\Psi \, {}^o\varphi \qquad , \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & E \\ & \searrow^{\phi^A_\Psi} & \downarrow{\scriptstyle u^A_\Psi} \\ & & \mathbb{R} \end{array} \quad .$$

Note-se que ϕ^A_Ψ mapeia um ponto $p \in M$ na $A-$ésima coordenada local do ponto $\varphi(p) \in F_p$. Então, se $\chi : M \to \mathbb{R}^m$ é o mapa que atribui as coordenadas locais dos pontos de M, pode-se definir uma representação local da função ϕ^A_Ψ segundo:

$$\phi^A \doteq \phi^A_\Psi \, {}^o\chi^{-1} \qquad , \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi^A_\Psi} & \mathbb{R} \\ {\scriptstyle \chi}\downarrow & \nearrow_{\phi^A} & \\ \mathbb{R}^m & & \end{array} \quad . \tag{5.3}$$

É grande importância observar o seguinte:

$$u^A_\Psi\big(\varphi(p)\big) = \phi^A_\Psi(p) = \phi^A(x) = u^A \, . \tag{5.4}$$

Finalmente, em cada recobrimento $\mathscr{U}_\alpha$ que dá lugar a uma trivialização do fibrado (de configuração) $E \xrightarrow{\pi} M$ (onde M é a variedade do espaço-tempo), um campo $\varphi : M \to E$ é localmente descrito por uma coleção de funções $\{\phi^A = \phi^A(x)\}_{A=1}^{dim(F)}$, onde x são as coordenadas locais dos pontos $\boldsymbol{x} \in \mathscr{U}_\alpha$. Assim, as funções ϕ^A desempenham o papel de coordenadas locais para os campos de configuração φ. Para fazer distinção entre um campo (de configuração) e as suas coordenadas locais, os ϕ^A serão chamados de **funções de campo**. Nas seções seguintes o estudo será principalmente local, o qual deverá ser subentendido na terminologia.

5.3 Formulação lagrangiana

Em mecânica analítica, a lagrangiana L é uma função real das coordenadas generalizadas q^a e de suas derivadas $\dot{q}^a$, que, em geral, poderia também depender explicitamente do tempo. Em teoria de campos as coordenadas generalizadas são substituídas pelas funções de campo, isto é, $q^a(t) \to \phi^A(t;\vec{x})$. Desta maneira, em geral, L será função de $\phi(t;\vec{x}), \dot{\phi}(t;\vec{x})$[14] e possivelmente de t. Em analogia

[14]Se está denotando por $\dot{\phi}$ à **derivada parcial** da função de campo ϕ em relação à variável t.

com a mecânica analítica, resulta natural escolher que a evolução do sistema seja determinada pelo tempo; isto é conhecido como *dinâmica instantânea*[15] a ser esse o caso, as variáveis espaciais desempenham apenas um papel de *espectadoras*, pois:

$$\phi(t;\vec{x})\ ,\ \dot{\phi}(t;\vec{x}) \quad \xrightarrow{L} \quad \text{Função do tempo} \stackrel{!}{=} L(t)\ .$$

Assim, para cada instante t (fixo) a lagrangiana mapeia funções de $(t;\vec{x})$ em números reais; isto é, a lagrangiana L se comporta como um funcional[16] em relação às variáveis espaciais, o que pode ser escrito como $L(t) = L[\phi(t;\vec{x}), \dot{\phi}(t;\vec{x})]$.

É de grande importância assinalar que devido à escolha da componente temporal x^0 como parâmetro de evolução, diz-se que o espaço-tempo M é foliado por meio de hipersuperfícies[17] tipo espaço[18] Σ_λ:

$$M = \bigcup_{\lambda\in\mathbb{R}} \Sigma_\lambda \qquad , \qquad \Sigma_\lambda = \{\boldsymbol{x} \in M : x^0 = \lambda\}\ .$$

Também é importante ressaltar que existem outras formas de foliar o espaço-tempo; mas, em geral, qualquer foliação deve ser tal que as linhas do mundo do sistema passem só uma vez por cada uma das hipersuperfícies da foliação, a fim de ter uma dinâmica univocamente determinada. No caso da dinâmica instantânea essa condição é evidentemente atendida.

Nessa dinâmica, considere-se uma teoria descrita por apenas uma função de campo; então, define-se o funcional ação segundo:

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} L[\phi, \dot{\phi}]dt\ .$$

[15]Porém, devido à covariância é possível, em princípio, eleger outras orientações para estabelecer a variável que determina a evolução do sistema. De fato, Dirac mostrou que é possível obter outras dinâmicas associadas a diferentes foliações do espaço-tempo [52].

[16]Lembre-se que basicamente um funcional mapeia elementos de um espaço de funções em números reais.

[17]Uma hipersuperfície em um espaço $n-$dimensional é uma superfície com dimensão $n-1$.

[18]Uma superfície tipo espaço é aquela na qual a separação entre dois pontos quaisquer é tipo espaço; uma definição equivalente é que em uma superfície tipo espaço os pontos estão não-causalmente conetados.

Logo, a (primeira) variação da ação estará dada por:

$$\delta S = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L[\phi, \dot{\phi}] dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \delta L[\phi, \dot{\phi}] dt \tag{5.5}$$

Além disso, uma vez que L é um funcional espacial, a sua variação será dada por:

$$\delta L = \int_V \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} \delta\phi(x) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \delta\dot{\phi}(x) \right) d^3x \ ,$$

Substituindo em (5.5) ter-se-á:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} \delta\phi(x) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \delta\phi(x) \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \right) \delta\phi(x) \right] d^3x dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \right) \right] \delta\phi(x) d^3x dt + \frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t_2} \int_V \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \delta\phi(x) d^3x dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \right) \right] \delta\phi(x) d^3x dt + \int_V \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \delta\phi(x) \Big|_{t_1}^{t_2} d^3x \ .
\end{aligned}$$

Para um problema variacional com extremos temporais fixos, $\delta\phi(t_1; \vec{x}) = \delta\phi(t_2; \vec{x}) = 0$. Então:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \left[\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \right) \right] \delta\phi(x) d^3x dt \ .$$

Em conformidade com o princípio de Hamilton da ação estacionária se obtém:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(x)} \right) = 0 \ , \tag{5.6}$$

estas são as equações de movimento na presente abordagem. Note-se que nestas equações aparecem derivadas funcionais da lagrangiana, pois ela está sendo considerada como um funcional em relação às variáveis x^i.

Uma vez que a lagrangiana L é um *funcional espacial*[19], é natural a seguinte definição:

$$L[\phi, \dot{\phi}] = \int_V \mathcal{L}\left(t, \vec{x}; \phi; \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \right) d^3x \stackrel{!}{=} \int_V \mathcal{L}(x^\mu; \phi^A; \partial_\mu \phi^A) d^3x \ ,$$

a função $\mathcal{L}$ é conhecida como **densidade lagrangiana** e é uma função dos campos e suas derivadas. A principal utilidade da densidade lagrangiana é que permite

[19] Mais geral, a lagrangiana L é um funcional definido sobre uma superfície plana tipo espaço determinada (neste caso particular) por $t = constante$.

reescrever as equações de movimento em termos de simples derivadas parciais ao invés de derivadas funcionais; para esse propósito é necessário expressar a variação δL em termos de $\mathcal{L}$.

$$\delta L = \int_V \delta\mathcal{L} d^3x = \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \cdot \delta(\nabla\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi} \right) d^3x \, ,$$

levando em conta que $\delta(\nabla\phi) = \nabla(\delta\phi)$ e usando que $\nabla \cdot (\varphi\vec{A}) = \varphi\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\varphi$:

$$\begin{aligned} \delta L &= \int_V \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}\delta\phi \right) - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi} \right] d^3x \\ &= \int_V \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) \right] \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi} \right\} d^3x - \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)}\delta\phi \right) d^3x \, . \end{aligned}$$

Em virtude do teorema de Gauss da divergência, a última integral pode ser escrita como a integral de superfície $\oint_{\partial V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \cdot d\vec{s}$. Logo, impondo que as variações dos campos sejam nulas na fronteira, dita integral de superfície reduz-se a 0, e com isso:

$$\delta L = \int_V \left(\frac{\delta L}{\delta \phi}\delta\phi + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}}\delta\dot{\phi} \right) d^3x = \int_V \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) \right] \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}\delta\dot{\phi} \right\} d^3x \, ,$$

donde rapidamente se identifica:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) \qquad , \qquad \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \, . \tag{5.7}$$

Substituindo em (5.6), as equações de movimento adotam a forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\nabla\phi)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \, ,$$

Usando a notação $\partial_\mu \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sim (\frac{\partial}{\partial t}; \nabla)$ a equação anterior pode ser expressa como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) = 0 \, , \tag{5.8}$$

esta é a forma na que comumente as equações de movimento são apresentadas na literatura e, escritas assim, são denominadas **equações de Euler-Lagrange**. É interessante ver que estas equações também podem ser escritas em termos da derivada funcional da ação em relação à função de campo ϕ.

A ação, vista como um funcional nas coordenadas locais do espaço-tempo, se escreve:

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} L(t)dt = \int_{\Omega} \mathcal{L}\big(x^{\mu}; \phi^{A}; \partial_{\mu}\phi^{A}\big) d^4x \qquad (\Omega = [t_1; t_2] \times V)\ ,$$

logo, a variação da ação será:

$$\begin{aligned}\delta S = \int_{\Omega} \delta\mathcal{L} d^4x &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta(\partial_{\mu}\phi)\right] d^4x = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\mu}(\delta\phi)\right] d^4x \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\delta\phi\right] d^4x \quad + \quad \underbrace{\int_{\Omega} \partial_{\mu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi\right] d^4x}_{\oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi d\sigma_{\mu} = 0\ ,\ \text{pois}\ \delta\phi\big|_{\partial\Omega} = 0}\ ,\end{aligned}$$

desta maneira resulta:

$$\delta S = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\right] \delta\phi d^4x = \int_{\Omega} \left(\frac{\delta}{\delta\phi}S[\phi]\right) \delta\phi d^4x\,.$$

Logo, se identifica:

$$\frac{\delta}{\delta\phi}S[\phi] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)$$

Assim, as equações de Euler-Lagrange podem ser escritas na forma sucinta:

$$\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0\ ,$$

cabe mencionar que alguns autores fazem o uso da notação $\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \overset{!}{=} \frac{\delta S}{\delta\phi}$.

É muito importante observar que toda a construção anterior foi feita sob o suposto de que a teoria em consideração é descrita apenas por uma função de campo, a qual foi denotada por ϕ. Porém, isto em geral não sempre é verdade; ou seja, poderia ser o caso de que uma teoria seja descrita pelas funções de campo ϕ^A, onde $A = 1, 2, \cdots, N$. Se for o caso, o desenvolvimento da formulação lagrangiana é similar ao exposto nos parágrafos anteriores; mas, com a ressalva de que haverá que incluir somas sobre os índices A. Seguindo um procedimento similar ao

anterior, se obtém que as equações de movimento são da forma:

$$\frac{\delta S}{\delta \phi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \right) = 0 \qquad (A = 1, \cdots, N) \; .$$

Neste ponto é preciso lembrar que no caso discreto (mecânica analítica) as soluções das equações de Euler-Lagrange fornecem as coordenadas generalizadas como funções do tempo; i.e., $q^a = q^a(t)$, que são as curvas integrais correspondentes a partir de um conjunto de condições iniciais dadas. Além disso, não se deve perder de vista que as coordenadas generalizadas são uma representação local das configurações $\boldsymbol{q}$, que são os elementos da variedade de configuração $\mathbb{Q}$, cuja dimensão é dada pelo número de graus de liberdade do sistema em estudo. Assim, o conjunto $\mathbb{Q}$ contém todas as configurações possíveis para o sistema. Agora, no caso contínuo a situação é análoga, mas neste caso as funções de campo ϕ^A correspondem a uma representação local dos objetos φ, que foram chamados de campos de configuração[20] e vivem em uma variedade diferenciável de dimensão infinita[21] [51] que é denotada por $\Gamma(\pi)$.

Neste ponto resulta útil introduzir a seguinte definição: Sejam o fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ e o ponto $p \in M$, duas seções locais φ_1 e φ_2 são ditas $1-$equivalentes em p se as seguintes condições foram atendidas:

$$\varphi_1(p) = \varphi_2(p) \qquad , \qquad (d\varphi_1)_p = (d\varphi_2)_p \; ,$$

As equações acima definem uma relação de equivalência em $\Gamma_p(\pi)$. A classe de equivalência que contém à seção global φ é chamada de **jato de primeira ordem** (ou simplesmente $1-$jato) de φ em p e é denotada por $j^1_p\varphi$. Em termos das coordenadas locais adaptadas $\left(x^\mu; u^A\right)$, φ_1 é $1-$equivalente a φ_2 em $p \in M$ se é só para algum sistema coordenado adaptado:

$$\frac{\partial \phi_1^A}{\partial x^\mu}\Big|_{\chi(p)} = \frac{\partial \phi_2^A}{\partial x^\mu}\Big|_{\chi(p)} \; ,$$

com as notações inseridas em (5.3). O conjunto de todos os $1-$jatos das seções locais do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$ tem a estrutura de uma variedade diferenciável. Logo,

[20] Que são seções (locais ou globais) do fibrado de configuração $E \xrightarrow{\pi} M$.

[21] Isto devido a que os sistemas estudados na teoria clássica de campos têm infinitos graus de liberdade.

define-se a variedade dos jatos da primeira ordem como o conjunto:

$$J^1(\pi) \doteq \left\{ j^1_p\varphi : p \in M \quad , \quad \varphi \in \Gamma_p(\pi) \right\} .$$

Seja $(\mathscr{U} \subset E, \Psi)$ a carta associada às coordenadas locais adaptadas do fibrado $E \xrightarrow{\pi} M$. Existe um sistema de coordenadas (locais) induzido para $J^1(E)$ que é dado pela carta $(\mathscr{U}^1, \Psi^1)$, com $\mathscr{U}^1 = \{j^1_p\varphi : \varphi(p) \in \mathscr{U}\}$; essas coordenadas são usualmente denotadas como $(x^\mu; u^A; u^A_\mu)$, com:

- $x^\mu_{\Psi^1}(j^1_p\varphi) = x^\mu_\Psi(p) = x^\mu \quad , \quad u^A_{\Psi^1}(j^1_p\varphi) = u^A_\Psi\big(\varphi(p)\big) = \phi^A_\Psi(p) \overset{(5.4)}{=} \phi^A(x)$.
- $(u^A_\mu)_{\Psi^1}(j^1_p\varphi) = \dfrac{\partial \phi^A_\Psi}{\partial x^\mu_\Psi}\Big|_p = \dfrac{\partial}{\partial x^\mu}(\phi^A_\Psi \, {}^o\chi^{-1})\Big|_{\chi(p)} = \dfrac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}(x) = \partial_\mu \phi^A(x)$.

É assim que as coordenadas locais induzidas em $J^1(\pi)$ também podem ser escritas como $\big(x^\mu; \phi^A(x); \partial_\mu \phi^A(x)\big)$, os quais são exatamente os elementos dentro do argumento da densidade lagrangiana $\mathcal{L}$. Assim, observa-se que a densidade lagrangiana é uma representação local de uma outra função em $J^1(\pi)$.

Um comentário interessante é que o estudo da mecânica analítica também pode ser realizado em termos de um fibrado (trivial) de configuração $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \xrightarrow{pr_1} \mathbb{R}$. Note-se que as coordenadas locais adaptadas desse fibrado serão da forma $(t; q^a)$ enquanto que as coordenadas locais induzidas para o jato $J^1(pr_1)$ serão $(t; q^a; \dot{q}^a)$. Mais ainda, se pode provar que $J^1(pr_1)$ é homeomorfo com $\mathbb{R} \times T\mathbb{Q}$. Sob essa perspectiva as funções $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ (curvas na variedade de configuração $\mathbb{Q}$) podem ser vistas como seções do fibrado de configuração.

No caso da dinâmica instantânea, a lagrangiana torna-se um funcional espacial devido à foliação escolhida para o espaço-tempo M, a qual fixa a coordenada temporal x^0 (ou t) em cada hipersuperfície. Seguindo a analogia com o caso discreto (mecânica analítica), pode-se considerar que, dado o fibrado de configuração $E \xrightarrow{\pi} M$ o jato $J^1(\pi)$ é homeomorfo a $M \times \mathscr{E}$, onde $\mathscr{E}$ é um fibrado vetorial[22] cuja dimensão será igual ao dobro da fibra típica F do fibrado de configuração. Lembre-se que no caso discreto a lagrangiana L é uma representação local de uma outra função definida sobre o fibrado (vetorial) $T\mathbb{Q}$, cujas coordenadas locais (adaptadas) são $(q^a; \dot{q}^a)$, sendo q^a as coordenadas locais do ponto $\boldsymbol{q} \in \mathbb{Q}$ enquanto

[22] Em analogia com o fibrado tangente $T\mathbb{Q}$ no caso discreto

que $\dot{q}^a$ as coordenadas locais dos elementos na fibra $T_q\mathbb{Q}$ (espaço tangente). Assim, é necessária uma definição análoga à de vetores tangentes no caso contínuo, mas levando em conta que agora L é um funcional espacial. Para esse propósito, considerem-se as equações E-L do caso discreto na forma (2.17):

$$\ddot{q}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} = \frac{\partial L}{\partial q^a} - \dot{q}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} ,$$

Tomando a derivada $\dfrac{d}{dt}$:

$$\left(\frac{d^3}{dt^3} q^b\right) \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} + \ddot{q}^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) = \dot{q}^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial q^a} + \ddot{q}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial q^a} - \dot{q}^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\right) - \ddot{q}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} .$$

Chamando $\chi^b \overset{!}{=} \dot{q}^b$, a equação anterior pode-se reescrever como:

$$\ddot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} + \dot{\chi}^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) = \chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^b \partial q^a} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^b \partial q^a} - \chi^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\right) - \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}$$

Reagrupando convenientemente os termos da equação acima:

$$\chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} = \chi^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b}\right) + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} + \ddot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} + \dot{\chi}^b \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) .$$

Logo, foi obtida a seguinte equação para as funções $\chi^b = \dot{q}^b$:

$$\chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} = \frac{d}{dt}\left(\chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b}\right) . \tag{5.9}$$

Agora considere-se a seguinte transformação de coordenadas:

$$q^b \to q^b + \chi^b \qquad , \qquad \dot{q}^b \to \dot{q}^b + \dot{\chi}^b . \tag{5.10}$$

Em consequência, a lagrangiana se transformará segundo:

$$L(q;\dot{q}) \to L(q+\chi;\dot{q}+\chi) \approx L(q;\dot{q}) + \chi^b \frac{\partial L}{\partial q^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^b} , \tag{5.11}$$

onde foi considerada uma expansão até a primeira ordem (supondo que a variação χ é pequena). Inserindo a lagrangiana transformada nas equações E-L (2.7) ter-se-

á:

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} + \chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} + \chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right)$$
$$\chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial q^a \partial \dot{q}^b} = \frac{d}{dt}\left(\chi^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial q^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^a \partial \dot{q}^b} \right) ,$$

que coincide com a equação (5.9). Desta maneira, é possível obter uma equação diferencial para as velocidades generalizadas $\dot{q}^b$ a partir das equações de Euler-Lagrange. Com isto, pode-se fazer a extensão no caso contínuo da seguinte maneira: Supor-se-á que o fibrado vetorial $\mathscr{E}$ é um *fibrado tangente funcional* da fibra típica [23] F, cujas fibras serão chamadas de *espaços tangentes funcionais* e serão denotados por $T_{\varphi(x)}F$.

Define-se $T_{\varphi(x)}F$ como aquele objeto cujas componentes locais $X^B(x)$ satisfazem a equação que se obtém fazendo a transformação de coordenadas:

$$\phi^B(x) \to \phi^B(x) + X^B(x) \qquad , \qquad \dot{\phi}^B(x) \to \dot{\phi}^B(x) + \dot{X}^B(x)$$

ao redor da função $\phi^B(x)$, que é solução das equações de Euler-Lagrange (5.6). O funcional lagrangiano sofrerá a seguinte transformação:

$$L[\phi, \dot{\phi}] \to L[\phi, \dot{\phi}] + \int \left(X^B(x) \frac{\delta L}{\delta \phi^B(x)} + \dot{X}^B(x) \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^B(x)} \right) d^3x \, . \tag{5.12}$$

Aqui se deve observar que no caso discreto, na transformação (5.11) se tem o seguinte:

$$L(q;\dot{q}) \to L(q;\dot{q}) + \left(\chi^b \frac{\partial}{\partial q^b} + \dot{\chi}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b} \right) L = L + \underbrace{\left(\chi^b \frac{\partial}{\partial q^b_\phi} + \dot{\chi}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^b_\phi} \right)}_{\chi} \mathscr{L} \, ,$$

donde resulta que χ é um campo vetorial em $T\mathbb{Q}$ cujas componentes locais são as variações nas coordenadas e velocidades, em conformidade com a transformação (5.10). Logo, seguindo a analogia, ter-se-á que em (5.12) o objeto:

$$X[\phi, \dot{\phi}] = \int \left(X^B(x) \frac{\delta}{\delta \phi^B(x)} + \dot{X}^B(x) \frac{\delta}{\delta \dot{\phi}^B(x)} \right) d^3x$$

[23] No caso discreto o fibrado tangente $T\mathbb{Q}$ é em relação à variedade de configuração $\mathbb{Q}$, que é a fibra típica do fibrado de configuração.

corresponde a um *campo vetorial funcional* em TF. Dessa maneira, encontra-se que o conjunto $\left\{\frac{\delta}{\delta\phi^A(t;\vec{x})};\frac{\delta}{\delta\dot{\phi}^A(t;\vec{x})}\right\}$ $\big(A=1,\cdots,dim(F)\big)$, com t fixo, corresponde a uma base local para os campos vetoriais funcionais em TF. Além disso, $\left\{\frac{\delta}{\delta\phi^A(x)}\right\}_{A=1}^{dim(F)}$ será uma base para $T_{\varphi(x)}F$.

Como comentário final, tal como no caso discreto, o caráter singular ou não singular de um sistema é determinado pelo posto da matriz hessiana da lagrangiana, cujas componentes são obtidas segundo:

$$W_{AB}(x;y)=\frac{\delta^2 L}{\delta\dot{\phi}^A(y)\delta\dot{\phi}^B(x)}\ .$$

5.4 Formulação hamiltoniana

Tal como na mecânica analítica, a abordagem hamiltoniana é obtida a partir da formulação lagrangiana por meio de uma transformação de Legendre, mas neste caso, uma vez que a lagrangiana L um funcional (em relação às variáveis espaciais) as derivadas parciais usuais deverão ser substituídas por derivadas funcionais. Novamente, as variáveis ativas serão os $\dot{\phi}^A$, desta maneira ter-se-á:

$$\delta L=\int\left(\frac{\delta L}{\delta\phi^A(x)}\delta\phi^A(x)+\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^A(x)}\delta\dot{\phi}^A(x)\right)d^3x\equiv\int\left(\frac{\delta L}{\delta\phi^A(x)}\delta\phi^A(x)+\pi_A(x)\delta\dot{\phi}^A(x)\right)d^3x\ ,$$

onde observa-se o seguinte:

$$\pi_A(x)\doteq\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^A(x)}.$$

A função π_A recebe o nome de *campo canônico conjugado*. Com essa definição e usando as equações de movimento (5.6) ter-se-á:

$$\delta L=\int\left(\frac{\delta L}{\delta\phi^A(x)}\delta\phi^A(x)+\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}^A(x)}\delta\dot{\phi}^A(x)\right)d^3x\equiv\int\Big(\dot{\pi}_A(x)\delta\phi^A(x)+\pi_A(x)\delta\dot{\phi}_A(x)\Big)d^3x\ .$$

O seguinte passo será construir a hamiltoniana[24] segundo:

$$H\doteq\int\pi_A(x)\dot{\phi}^A(x)d^3x-L\ , \tag{5.13}$$

[24]Que não é outra coisa que a transformada de Legendre da lagrangiana.

a qual, bem como a lagrangiana L, é na verdade um funcional em relação às variáveis espaciais. Logo:

$$\begin{aligned}\delta H &= \int \left(\frac{\delta H}{\delta \phi^A(x)} \delta\phi^A(x) + \frac{\delta H}{\delta \dot{\pi}_A(x)} \delta\pi_A(x) \right) d^3x = \delta \left(\int \pi_A(x) \dot{\phi}^A(x) d^3x \right) - \delta L \\ &= \int \Big(\pi_A(x) \delta\dot{\phi}^A(x) + \dot{\phi}^A(x) \delta\pi_A(x) - \dot{\pi}_A(x) \delta\phi^A(x) - \pi_A(x) \delta\dot{\phi}^A(x) \Big) d^3x \, .\end{aligned}$$

Assim, rapidamente se identifica:

$$\dot{\phi}^A(x) = \frac{\delta H}{\delta \pi_A(x)} \qquad , \qquad \dot{\pi}_A(x) = -\frac{\delta H}{\delta \phi^A(x)} \, ; \tag{5.14}$$

estas são as equações canônicas de Hamilton na teoria clássica de campos. Por outro lado, lembre-se que $\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^A} \overset{(5.7)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A}$; em consequência, os campos canônicos conjugados são dados segundo:

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A} \, . \tag{5.15}$$

Tal como foi feito para a lagrangiana L, a hamiltoniana H definida em (5.13), que é também um funcional das variáveis espaciais, também pode-se expressar em termos de uma densidade:

$$H = \int \pi_A(x) \dot{\phi}^A(x) d^3x - \int \mathcal{L}(x) d^3x = \int \Big(\pi_A(x) \dot{\phi}^A(x) - \mathcal{L}(x) \Big) d^3x \equiv \int \mathcal{H}(x) d^3x \, ,$$

a função $\mathcal{H}$ é denominada **densidade hamiltoniana**. Note-se que, sob o suposto de que a transformação de Legendre está bem definida (caso regular) e uma vez que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x; \phi; \dot{\phi}; \nabla\phi)$, a partir da equação (5.15) é possível resolver os $\dot{\phi}^A$ como função dos π_A, ϕ^A e $\partial_k \phi^A$. Em consequência, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi; \nabla\phi; \pi)$[25].

Não se deve perder de vista que, tal como na mecânica analítica, toda a construção anterior é válida apenas para sistemas não-singulares.

Neste ponto é preciso lembrar que no caso discreto a hamiltoniana H é uma representação local de uma outra função definida no fibrado $T^*\mathbb{Q}$, cujos elementos são da forma $(\boldsymbol{q}; \boldsymbol{p})$, com $\boldsymbol{p} \in T^*_{\boldsymbol{q}}\mathbb{Q}$. Em perfeita analogia com o caso discreto, e levando em conta a última discussão ao final da seção correspondente à formulação

[25] Aqui se estão empregando as notações $\phi \overset{!}{=} \{\phi^1; \phi^2, \cdots\}$ e $\pi \overset{!}{=} \{\pi_1, \pi_2, \cdots\}$.

lagrangiana, é possível afirmar que um campo vetorial funcional no *fibrado funcional cotangente* T^*F tem a forma:

$$X[\phi,\pi] = \int \left(X^A(x)\frac{\delta}{\delta\phi^A(x)} + X_A(x)\frac{\delta}{\delta\pi_A(x)} \right) d^3x \ ,$$

onde o conjunto $\left\{ \frac{\delta}{\delta\phi^A(x)}; \frac{\delta}{\delta\pi_A(x)} \right\}_{A=1}^{dim(F)}$ corresponde a uma base local para esses objetos.

Naturalmente, agora se necessita uma base dual para construir as $1-$*formas funcionais*, o qual (novamente seguindo a analogia com o caso discreto) se consegue por meio dos objetos $\delta\phi^A$ e $\delta\pi_A$ tais que satisfaçam:

$$\delta\phi^A(x)\left(\frac{\delta}{\delta\phi^B(y)}\right) = \delta^A_B\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \qquad , \qquad \delta\pi_A(x)\left(\frac{\delta}{\delta\pi_B(y)}\right) = \delta^B_A\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ ,$$

$$\delta\phi^A(x)\left(\frac{\delta}{\delta\pi_B(y)}\right) = 0 \qquad , \qquad \delta\pi_A(x)\left(\frac{\delta}{\delta\phi^B(y)}\right) = 0 \ .$$

Com isto, uma $1-$forma funcional em T^*F será um objeto da forma:

$$\alpha[\phi,\pi] = \int \Big(\alpha_A(x)\delta\phi^A(x) + \alpha^A(x)\delta\pi_A(x) \Big) d^3x \ .$$

O conjunto $\left\{\delta\phi^A(x); \delta\pi_A(x)\right\}_{A=1}^{dim(F)}$ (com a componente temporal x_0 fixa) é uma base para as $1-$formas funcionais em T^*F. As fibras do fibrado vetorial T^*F, são os espaços duais aos $T_{\varphi(x)}F$, denotados por $T^*_{\varphi(x)}F$ e cuja base é dada pelo conjunto $\left\{\delta\phi^A(x)\right\}_{A=1}^{dim(F)}$.

Com essas definições, o produto interior de um campo vetorial funcional X e uma $1-$forma funcional α, ambos em T^*F, resulta:

$$\begin{aligned}
i_X\alpha &= \int \Big(\alpha_A(x)\delta\phi^A(x) + \alpha^A(x)\delta\pi_A(x) \Big) \left(X^B(y)\frac{\delta}{\delta\phi^B(y)} + X_B(y)\frac{\delta}{\delta\pi_B(y)} \right) d^3x d^3y \\
&= \int \left[\alpha_A(x)X^B(y)\delta\phi^A(x)\left(\frac{\delta}{\delta\phi^B(y)}\right) + \alpha^A(x)X_B(y)\delta\pi_A(x)\left(\frac{\delta}{\delta\pi_B(y)}\right) \right] d^3x d^3y \\
&= \int \Big(\alpha_A(x)X^B(y)\delta^A_B\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \alpha^A(x)X_B(y)\delta^B_A\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \Big) d^3x d^3y \\
&= \int \Big(\alpha_A(x)X^A(x) + \alpha^A(x)X_A(x) \Big) d^3x \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

Do anterior, já se dispõe dos elementos necessários para definir a $1-$forma canônica funcional no caso contínuo; fazendo novamente a analogia com $\theta = p_a dq^a$ (caso discreto) ter-se-á:

$$\theta[\phi, \pi] = \int \pi_A(x)\delta\phi^A(x)d^3x \ . \tag{5.16}$$

A caminho de obter umas *coordenadas unificadas locais* para o conjunto T^*F, define-se o seguinte objeto:

$$\xi \doteq \begin{pmatrix} \phi \\ \pi \end{pmatrix} \ ,$$

Com essas novas coordenadas, é possível escrever um campo vetorial funcional e uma $1-$forma funcional em T^*F simplesmente como:

$$X[\xi] = \int X^I(x)\frac{\delta}{\delta\xi^I(x)}d^3x \qquad \text{e} \qquad \alpha[\xi] = \int \alpha_I(x)\delta\xi^I(x)d^3x \ ,$$

respectivamente. Logo, a $1-$forma canônica funcional apresentada em (5.16) pode ser escrita simplesmente como:

$$\theta[\xi] = \int \theta_J(x)\delta\xi^J(x)d^3x \ .$$

Com isto, pode-se definir uma *forma simplética funcional* tomando a derivada exterior (funcional) de θ, tal como é mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}
\omega = \delta\theta &= \int \frac{\delta\theta_J(y)}{\delta\xi^I(x)}\delta\xi^I(x) \wedge \delta\xi^J(y)d^3xd^3y \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\delta\theta_J(y)}{\delta\xi^I(x)}\delta\xi^I(x) \wedge \delta\xi^J(y)d^3xd^3y + \frac{1}{2}\int \frac{\delta\theta_I(x)}{\delta\xi^J(y)}\delta\xi^J(y) \wedge \delta\xi^I(x)d^3yd^3x \\
&= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\delta\theta_J(y)}{\delta\xi^I(x)} - \frac{\delta\theta_I(x)}{\delta\xi^J(y)}\right)\delta\xi^I(x) \wedge \delta\xi^J(y)d^3xd^3y \\
&= \frac{1}{2}\int \omega_{IJ}(x;y)\delta\xi^I(x) \wedge \delta\xi^J(y)d^3xd^3y \ .
\end{aligned}$$

Note-se o seguinte:

$$\omega_{IJ}(x;y) \overset{!}{=} \frac{\delta\theta_J(y)}{\delta\xi^I(x)} - \frac{\delta\theta_I(x)}{\delta\xi^J(y)} \quad \Rightarrow \quad \omega_{JI}(y;x) = -\omega_{IJ}(x;y) \ .$$

Por outro lado, as componentes ω_{IJ} corresponderão aos elementos da matriz associada Ω. Logo, indexando as filas e colunas como $I = (A, B)$ e $J = (A', B')$,

respectivamente; para a $1-$forma canônica escrita na forma (5.16) ter-se-á:

$$\Omega(x;y) = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\delta\theta_{A'}(y)}{\delta\phi^A(x)} - \dfrac{\delta\theta_A(x)}{\delta\phi^{A'}(y)} & \dfrac{\delta\theta^{B'}(y)}{\delta\phi^A(x)} - \dfrac{\delta\theta_A(x)}{\delta\pi_{B'}(y)} \\ \hline \dfrac{\delta\theta_{A'}(y)}{\delta\pi_B(x)} - \dfrac{\delta\theta^B(x)}{\delta\phi^{A'}(y)} & \dfrac{\delta\theta^{B'}(y)}{\delta\pi_B(x)} - \dfrac{\delta\theta^B(x)}{\delta\pi_{B'}(y)} \end{array}\right) ,$$

com $\theta_A = \pi_A$ e $\theta^A = 0$. Então, se obtém:

$$\Omega(x;y) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I \\ \hline I & 0 \end{array}\right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) ,$$

com isto, as equações canônicas de Hamilton (5.14) podem ser escritas em termos das coordenadas unificadas segundo:

$$\frac{\delta H}{\delta\xi^I(x)} = \int \omega_{IJ}(x;y)\dot{\xi}^J(y)d^3y . \tag{5.17}$$

Pelo mesmo argumento que para a lagrangiana L e a hamiltoniana H, ter-se-á que, em geral, na teoria clássica de campos o análogo para uma função dinâmica $F = F(q;p)$ será um funcional (também em relação às variáveis espaciais na dinâmica instantânea) da forma $F = F[\phi,\pi]$. Logo, a evolução temporal de um funcional dinâmico arbitrário estará dada por:

$$\dot{F} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta\phi^A(x)}\dot{\phi}^A(x) + \frac{\delta F}{\delta\pi_A(x)}\dot{\pi}_A(x)\right) d^3x ;$$

em termos das coordenadas unificadas o anterior se escreve:

$$\dot{F} = \int \dot{\xi}^I(x)\frac{\delta F}{\delta\xi^I(x)}d^3x , \tag{5.18}$$

que é a aplicação do campo vetorial funcional $\Delta = \int \dot{\xi}^I \dfrac{\delta}{\delta\xi^I(x)}d^3x$ sobre o funcional $F[\xi]$. Em analogia com o caso discreto, o campo Δ será chamado de campo vetorial funcional dinâmico. Por outro lado, é conveniente determinar o produto exterior

de Δ e a forma simplética funcional ω :

$$\begin{aligned}
i_\Delta\omega &= \int \left(\frac{1}{2}\omega_{IJ}(x;y)\delta\xi^I(x)\wedge\delta\xi^J(y)\right)\left(\dot\xi^K(z)\frac{\delta}{\delta\xi^K(z)}\right)d^3xd^3yd^3z\\
&= \frac{1}{2}\int \omega_{IJ}(x;y)\dot\xi^K(z)\Big(\delta\xi^I(x)\wedge\delta\xi^J(y)\Big)\left(\frac{\delta}{\delta\xi^K(z)};\cdot\right)d^3xd^3yd^3z\\
&= \frac{1}{2}\int \omega_{IJ}(x;y)\dot\xi^K(z)\left[\delta\xi^I(x)\left(\frac{\delta}{\delta\xi^K(z)}\right)\delta\xi^J(y)-\delta\xi^I(x)\delta\xi^J(y)\left(\frac{\delta}{\delta\xi^K(z)}\right)\right]d^3xd^3yd^3z\\
&= \frac{1}{2}\int \omega_{IJ}(x;y)\dot\xi^K(z)\Big[\delta^I_K\delta^3(\vec x-\vec z)\delta\xi^J(y)-\delta\xi^I(x)\delta^J_K\delta^3(\vec y-\vec z)\Big]d^3xd^3yd^3z\\
&= \frac{1}{2}\int \Big[\omega_{IJ}(x;y)\dot\xi^I(x)\delta\xi^J(y)-\omega_{IJ}(x;y)\dot\xi^J(y)\delta\xi^I(x)\Big]d^3xd^3y\\
&= \int \dot\xi^I(x)\omega_{IJ}(x;y)\delta\xi^J(y)d^3xd^3y = -\int \dot\xi^J(x)\omega_{IJ}(y;x)\delta\xi^I(y)d^3xd^3y\ ,
\end{aligned}$$

usando (5.17) se obtém:

$$i_\Delta\omega = -\int\frac{\delta H}{\delta\xi^I(y)}\delta\xi^I(y)d^3y = -\delta H\ .$$

Assim, as equações de Hamilton foram obtidas:

$$i_\Delta\omega+\delta H=0\ ,$$

as quais têm a mesma forma que (2.45). Com isto se observa que, com efeito, a formulação hamiltoniana para caso contínuo tem essencialmente a mesma estrutura que no caso discreto.

5.4.1 Parênteses de Poisson

Na subseção anterior foi apresentado que a evolução de um funcional dinâmico $F=F[\phi,\pi]$ é dada segundo a expressão:

$$\dot F=\int\left(\frac{\delta F}{\delta\phi^A(x)}\dot\phi^A(x)+\frac{\delta F}{\delta\pi_A(x)}\dot\pi_A(x)\right)d^3x\overset{(5.14)}{=}\int\left(\frac{\delta F}{\delta\phi^A(x)}\frac{\delta H}{\delta\pi_A(x)}-\frac{\delta F}{\delta\pi_A(x)}\frac{\delta H}{\delta\phi^A(x)}\right)d^3x$$

Daqui, definem-se os **parênteses de Poisson (PP)** para dois funcionais dinâmicos $F=F[\phi,\pi]$ y $G=G[\phi,\pi]$ segundo:

$$\{F(x);G(y)\}\doteq\int\left(\frac{\delta F(x)}{\delta\phi^A(z)}\frac{\delta G(y)}{\delta\pi_A(z)}-\frac{\delta G(y)}{\delta\phi^A(z)}\frac{\delta F(x)}{\delta\pi_A(z)}\right)d^3z\ , \tag{5.19}$$

onde $F(x) \overset{!}{=} F\left[\phi(x_0;\vec{x}), \pi(x_0;\vec{x})\right]$ e $G(y) \overset{!}{=} G\left[\phi(y_0;\vec{y}), \pi(y_0;\vec{y})\right]$. É muito importante mencionar que, na dinâmica instantânea, os parênteses de Poisson estão definidos apenas para tempos iguais, ou seja, só se $x_0 = y_0$.

Do anterior, fica claro que a evolução temporal de um funcional dinâmico é dado por:

$$\dot{F} = \{F; H\} \ . \tag{5.20}$$

Deve observar-se que a definição dos PP apresentada em (5.19) tem a mesma forma que (2.61); em consequência, esses parênteses satisfarão as condições que definem uma estrutura de Poisson[26].

É possível obter algumas propriedades úteis desses parênteses de Poisson:

1. Si[27] $G = \phi^A(t;\vec{x})$:

$$\left\{F; \phi^A(t;\vec{x})\right\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \phi^B(t;\vec{x}')} \cancelto{0}{\frac{\delta \phi^A(t;\vec{x})}{\delta \pi_B(t;\vec{x}')}} - \frac{\delta \phi^A(t;\vec{x})}{\delta \phi^B(t;\vec{x}')} \frac{\delta F}{\delta \pi_B(t;\vec{x}')} \right) d^3x'$$
$$= -\int \delta^A_B \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}) \frac{\delta F}{\delta \pi_B(t;\vec{x}')} d^3x' = -\frac{\delta F}{\delta \pi_A(t;\vec{x})} \ .$$

2. Similarmente, se $G = \pi_A(t;\vec{x})$:

$$\left\{F; \pi_A(t;\vec{x})\right\} = \frac{\delta F}{\delta \phi^A(t;\vec{x})} \ .$$

3. Se na propriedade 2 se considera $F = \phi^B(t;\vec{x}')$:

$$\left\{\phi^B(t;\vec{x}'); \pi_A(t;\vec{x})\right\} = \frac{\delta \phi^B(t;\vec{x}')}{\delta \phi^A(t;\vec{x})} = \delta^B_A \delta^3(\vec{x}' - \vec{x}).$$

4. Das duas primeiras propriedades também pode-se obter:

$$\left\{\phi^A(t;\vec{x}); \phi^B(t;\vec{x}')\right\} = 0 \qquad , \qquad \left\{\pi_A(t;\vec{x}); \pi_B(t;\vec{x}')\right\} = 0 \ .$$

[26] Levando em conta que para um funcional $v[\phi(\vec{x})]$, $\dfrac{\delta}{\delta\phi(\vec{y})} v[\phi] = \left(\dfrac{d}{d\alpha} v[\phi + \alpha\delta^3(\vec{x} - \vec{y})] \right) \Big|_{\alpha=0}$.

[27] Lembre-se que uma função qualquer pode se *escrever como um funcional* por meio da função delta de Dirac, segundo: $\phi(t;x) = \int \phi(t;y)\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3y \equiv \mathrm{Eval}_x[\phi]$. Claramente, Eval_x é um funcional, pois mapeia uma função ϕ no número $\phi(x)$.

Com o fim de implementar as coordenadas unificadas; em primeiro lugar, se deve ter presente que uma vez que ω é uma forma simplética, a matriz associada Ω será uma matriz regular; então, denotando por ω^{JK} às componentes de Ω^{-1} a seguinte relação será satisfeita:

$$\int \omega^{IK}(x;z)\omega_{KJ}(z;y)d^3z = \delta^I_J\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

Logo, em (5.17) pode-se fazer a seguinte manipulação:

$$\begin{aligned}\int \omega^{IK}(x;z)\frac{\delta H}{\delta\xi^K(z)}d^3z &= \int \omega^{IK}(x;z)\omega_{KJ}(z;y)\dot{\xi}^J(y)d^3yd^3z \\ &= \int \delta^I_J\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\dot{\xi}^J(y)d^3y = \dot{\xi}^I(x) \ .\end{aligned}$$

Por outro lado, lembre-se que foi apresentado que a evolução temporal de F pode ser descrita segundo a equação (5.18) :

$$\dot{F} = \int \frac{\delta F}{\delta\xi^I(x)}\dot{\xi}^I(x)d^3x \ .$$

Então, usando o resultado acima, pode-se escrever:

$$\dot{F} = \int \frac{\delta F}{\delta\xi^I(x)}\omega^{IJ}(x;y)\frac{\delta H}{\delta\xi^J(y)}d^3xd^3y \overset{(5.20)}{=} \{F;H\} \ .$$

Assim, observa-se que, tal como no caso discreto, os parênteses de Poisson podem ser obtidos por meio da inversa da forma simplética funcional. Em geral, para dois funcionais dinâmicos $F = F[\xi]$ e $G = G[\xi]$ ter-se-á:

$$\{F;G\} = \int \frac{\delta F}{\delta\xi^I(x)}\omega^{IJ}(x;y)\frac{\delta G}{\delta\xi^J(y)}d^3xd^3y \ .$$

Note-se também que em particular:

$$\begin{aligned}\{\xi^I(x);\xi^J(y)\} &= \int \frac{\delta\xi^I(x)}{\delta\xi^K(z)}\omega^{KL}(z;w)\frac{\delta\xi^J(y)}{\delta\xi^L(w)}d^3zd^3w \\ &= \int \delta^I_K\delta^3(\vec{x}-\vec{z})\omega^{KL}(z;w)\delta^J_L\delta^3(\vec{y}-\vec{w})d^3zd^3w = \omega^{IJ}(x;y) \ ,\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde observa-se que os parênteses de Poisson das coordenadas canônicas (unificadas) podem ser obtidos simplesmente a partir das componentes da inversa da matriz associada à forma simplética.

Até este ponto, foi considerado apenas o caso regular, no qual a $2-$forma funcional $\omega = \delta\theta$ é não-degenerada e consequentemente uma forma simplética funcional. Na seguinte seção será apresentada a extensão do método proposto por Faddeev e Jackiw para abordar sistemas singulares na teoria clássica de campos.

Capítulo 6

Método de Faddeev-Jackiw na dinâmica instantânea

Entre os sistemas estudados na teoria clássica de campos é frequente encontrar sistemas singulares, que são reconhecidos porque apresentam uma forma pré-simplética (fechada e degenerada) funcional; consequentemente não será possível obter de maneira natural uma estrutura de Poisson a partir dessa 2−forma. Para enfrentar essa situação novamente se recorrerá à proposta de Faddeev e Jackiw com a contribuição de Bacelos-Neto e Wotzasek. Nesta seção será construído o método F-J para sistemas com infinitos graus de liberdade. Novamente a construção será realizada tomando como base o aprendido no caso discreto.

Em primeiro lugar, se deve escolher adequadamente as variáveis canônicas (coordenadas locais da variedade de fase) tais que permitam que a lagrangiana possa ser escrita na sua forma canônica; isto é, linear nas *velocidades*[1]. Sejam $\xi^{(0)}$ as variáveis canônicas (como coordenadas unificadas), então a lagrangiana canônica se escreve como:

$$L_c^{(0)} = \int \left(\theta_J^{(0)} \dot{\xi}^{(0)J} - \mathcal{H}^{(0)} \right) d^3x = \int \mathcal{L}_c^{(0)} d^3x \ , \tag{6.1}$$

onde, evidentemente, $\mathcal{L}_c^{(0)}$ é a densidade lagrangiana canônica. A partir dessa lagrangiana são identificadas as componentes da 1−forma canônica funcional como os coeficientes das velocidades; logo, ter-se-á:

$$\theta^{(0)}[\xi^{(0)}] = \int \theta_J^{(0)} \delta\xi^{(0)J} d^3x \ ,$$

[1]Neste caso, chamam-se de velocidades às derivadas (parciais) das variáveis canônicas em relação ao parâmetro de evolução estabelecido para a dinâmica da teoria.

logo, tomando a derivada exterior funcional obter-se-á a 2−forma funcional:

$$\omega^{(0)}[\xi^{(0)}] = \int \frac{1}{2}\omega^{(0)}_{IJ}(x;y)\delta\xi^{(0)I}(x) \wedge \delta\xi^{(0)J}(y)d^3xd^3y \ ,$$

cujas componentes são dadas segundo:

$$\omega^{(0)}_{IJ}(x;y) = \frac{\delta\theta^{(0)}_J(y)}{\delta\xi^{(0)I}(x)} - \frac{\delta\theta^{(0)}_I(x)}{\delta\xi^{(0)J}(y)} \ .$$

Para este estudo, a 2-forma funcional ω é assumida degenerada e, consequentemente, não invertível. Além disso, a matriz associada $\Omega^{(0)}$ será singular e, por conseguinte, terá um autovalor nulo.

O seguinte passo será determinar os autovetores associados ao autovalor nulo levando em conta a seguinte definição de autovetor:

Dada uma matriz $A = A(x;y)$, diz-se que possui um autovetor $v_m(x)$ se a seguinte condição for atendida:

$$\int A(x;y)v_m(y)d^3y = r(x)v_m(x) \qquad , \qquad m = 1, \cdots, M \ ,$$

onde o escalar $r = r(x)$ é chamado de autovalor que, em geral, pode ser degenerado com grau de degenerescência M.

Com isto, os autovetores de $\Omega^{(0)}$ associado ao autovalor nulo serão dados por:

$$\int \omega^{(0)}_{IJ}(x;y)[v^{(0)}_m]^J(y)d^3y = 0 \ . \tag{6.2}$$

Logo, os seguintes vínculos serão construídos:

$$\Gamma^{(0)}_m[\xi^{(0)}] = \int [v^{(0)}_m]^I(x)\frac{\delta H^{(0)}}{\delta\xi^{(0)I}(x)}d^3x \stackrel{!}{=} \int \gamma^{(0)}_m(x)d^3x \ , \tag{6.3}$$

onde os $\gamma^{(0)}_m$ são as densidades associadas aos vínculos. Por outro lado, não se deve perder de vista o seguinte:

$$H^{(0)} = \int \mathcal{H}^{(0)}(x)d^3x \qquad , \qquad \frac{\delta H^{(0)}}{\delta\xi^{(0)I}} \stackrel{(5.7)}{=} \frac{\partial\mathcal{H}^{(0)}}{\partial\xi^{(0)I}} - \partial_j\left(\frac{\partial\mathcal{H}^{(0)}}{\partial(\partial_j\xi^{(0)I})}\right) \ .$$

O seguinte passo será exigir que os vínculos (6.3) sejam preservados no tempo (o que também pode ser chamado de *consistência*); assim, a seguinte condição deve ser atendida:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_m^{(0)} = \int \frac{\delta\Gamma_m^{(0)}}{\delta\xi^I(x)}\dot{\xi}^I(x)d^3x = 0\ ,$$

ou também, em termos das densidades dos vínculos:

$$\dot{\Gamma}_m^{(0)} = \int \dot{\gamma}_m^{(0)}(x)d^3x = 0\ .$$

Estas condições devem ser inseridas na ação, o que pode ser conseguido fazendo uso dos multiplicadores de Lagrange $\lambda_m^{(0)} = \lambda_m^{(0)}(t;\vec{x})$.[2] Com isto, se constrói a seguinte nova lagrangiana:

$$L_c^{(1)} = \int \left[\mathcal{L}_c^{(0)} - \lambda_m^{(0)}\dot{\gamma}_m^{(0)}\right]d^3x \cong \int \left[\mathcal{L}_c^{(0)} + \gamma_m^{(0)}\dot{\lambda}_m^{(0)}\right]d^3x\ .$$

Também, usando (6.1):

$$L_c^{(1)} = \int \left[\theta_I^{(0)}\dot{\xi}^{(0)I} + \gamma_m^{(0)}\dot{\lambda}_m^{(0)} - \mathcal{H}^{(0)}\big|_{\gamma_m^{(0)}=0\ ,\ \forall m}\right]d^3x \stackrel{!}{=} \int \mathcal{L}^{(1)}d^3x\ .$$

Definindo a densidade hamiltoniana $1-$iterada, segundo:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)}\big|_{\gamma_m^{(0)}=0\ ,\ \forall m}\ ,$$

a nova densidade lagrangiana canônica $\mathcal{L}^{(1)}$ pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \theta_I^{(0)}\dot{\xi}^{(0)I} + \gamma_m^{(0)}\dot{\lambda}_m^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)}\ , \tag{6.4}$$

A partir da lagrangiana canônica (6.4) se define a seguinte $1-$forma canônica funcional:

$$\theta^{(1)} \doteq \theta^{(0)} + \int \gamma_m^{(0)}(x)\delta\lambda_m^{(0)}(x)d^3x\ . \tag{6.5}$$

Por outro lado, não se deve perder de vista que a inserção dos multiplicadores de Lagrange implica uma ampliação do espaço de fase original para um novo conjunto com variáveis (locais):

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix}\xi^{(0)}\\ \lambda^{(0)}\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \xi^{(1)\bar{A}} = \begin{cases}\xi_I^{(0)} & ;\ \bar{A} = I\\ \lambda_m^{(0)} & ;\ \bar{A} = I+m\end{cases}\ .$$

[2] Isto devido a que a ação é um funcional sobre as coordenadas $t = x^0$ e $\vec{x} = (x^1; x^2; x^3)$.

Então, a $1-$forma canônica $1-$iterada, definida em (6.5), pode-se escrever como:

$$\theta^{(1)} = \int \theta^{(1)}_{\bar{A}}(x)\delta\xi^{(1)\bar{A}}(x)d^3x \quad , \quad \theta^{(1)}_{\bar{A}} = \begin{cases} \theta^{(0)}_I \;\; ; \;\; \bar{A} = I \\ \gamma^{(0)}_m \;\; ; \;\; \bar{A} = I + m \end{cases} .$$

Logo, tomando a derivada exterior funcional, se obtém a seguinte $2-$forma:

$$\omega^{(1)} = \delta\theta^{(1)} \overset{(6.5)}{=} \omega^{(0)} + \int \frac{\delta\gamma^{(0)}_m(y)}{\delta\xi^{(1)\bar{A}}(x)}\delta\xi^{(1)\bar{A}}(x) \wedge \delta\lambda^{(0)}_m(y)d^3xd^3y \, .$$

Ou também:

$$\omega^{(1)} = \int \frac{\delta\theta^{(1)}_{\bar{B}}(y)}{\delta\xi^{(1)\bar{A}}(x)}\delta\xi^{(1)\bar{A}}(x) \wedge \delta\xi^{(1)\bar{B}}(y)d^3xd^3y = \frac{1}{2}\int \omega^{(1)}_{\bar{A}\bar{B}}(x;y)\delta\xi^{(1)\bar{A}}(x) \wedge \delta\xi^{(1)\bar{B}}(y)d^3xd^3y \, ,$$

onde:

$$\omega^{(1)}_{\bar{A}\bar{B}}(x;y) = \frac{\delta\theta^{(1)}_{\bar{B}}(y)}{\delta\xi^{(1)\bar{A}}(x)} - \frac{\delta\theta^{(1)}_{\bar{A}}(x)}{\delta\xi^{(1)\bar{B}}(y)}$$

e são os elementos da matriz associada $\Omega^{(1)}$. Por outro lado, devido à forma na que foram definidas os objetos $\xi^{(1)}$ e $\theta^{(1)}$ é possível fazer a indexação $\bar{A} = (I, m)$ e $\bar{B} = (J, m')$; com isto:

$$\Omega^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \omega^{(1)}_{IJ} & \omega^{(1)}_{Im'} \\ \hline \omega^{(1)}_{mJ} & \omega^{(1)}_{mm'} \end{array}\right) ,$$

mas, note-se o seguinte:

$$\omega^{(1)}_{IJ}(x;y) = \frac{\delta\theta^{(0)}_J(y)}{\delta\xi^{(0)I}(x)} - \frac{\delta\theta^{(0)}_I(x)}{\delta\xi^{(0)J}(y)} = \omega^{(0)}_{IJ}(x;y) \, ,$$

donde se observa que a matriz $\Omega^{(0)}$ está contida em $\Omega^{(1)}$; de fato, ela tem a forma:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \left(\begin{array}{c|c} \Omega^{(0)}(x;y) & \dfrac{\delta\gamma^{(0)}_{m'}(y)}{\delta\xi^{(0)I}(x)} \\ \hline -\dfrac{\delta\gamma^{(0)}_m(x)}{\delta\xi^{(0)J}(y)} & \mathbf{0}_M \end{array}\right) ,$$

No caso de que a matriz $\Omega^{(1)}$ seja invertível com inversa única, os parênteses de Poisson das variáveis canônicas $\xi^{(1)}$ podem ser obtidos usando a equação (5.21). Porém, posto que as variáveis dinâmicas de interesse físico são apenas os $\xi^{(0)}$, os

seus PP podem ser obtidos do bloco da mesma dimensão que $\Omega^{(0)}$ formado pelas primeiras filas e colunas de $[\Omega^{(1)}]^{-1}$.

Por outro lado, se a matriz $\Omega^{(1)}$ acaba por ser não ser invertível, o procedimento F-J deverá ser repetido até obter uma matriz regular cuja inversa permita definir uma estrutura de Poisson. Também pode-se apresentar o caso de obter vínculos identicamente nulos; frente a essa situação, esses vínculos deverão ser substituídos pelo que na literatura é conhecido como *condições de gauge* e prosseguir com o procedimento habitual.

6.1 Exemplos

Na presente seção serão apresentados alguns exemplos da implementação do método F-J em sistemas singulares de infinitos graus de liberdade.

6.1.1 Exemplo 1: Campo eletromagnético livre

O campo eletromagnético é um campo vetorial real não-massivo descrito pelas funções de campo A^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, onde $A^0 = \varphi$ é o chamado potencial (escalar) elétrico e $(A^1; A^2; A^3) = \vec{A}$ é o potencial vetorial magnético. A densidade lagrangiana para esta teoria é a seguinte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_\alpha{}^\beta F^\alpha{}_\beta \qquad , \qquad F_\alpha{}^\beta = \partial_\alpha A^\beta - \partial^\beta A_\alpha \ .$$

Note-se que F é um tensor (de posto 2) antissimétrico, pois $F_\alpha{}^\beta = -F^\beta{}_\alpha$.

OBSERVAÇÕES:

- $$\frac{\partial F_\alpha{}^\beta}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}(\partial_\alpha A^\beta - \partial^\beta A_\alpha) = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A^\nu)}(\partial_\alpha A^\beta - g^{\beta\lambda} g_{\alpha\tau} \partial_\lambda A^\tau)$$
$$= \delta^\mu_\alpha \delta^\beta_\nu - g^{\beta\lambda} g_{\alpha\tau} \delta^\mu_\lambda \delta^\tau_\nu = \delta^\mu_\alpha \delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \ .$$

- $$\frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}(F_\alpha{}^\beta F^\alpha{}_\beta) = g^{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \left[F_\alpha{}^\beta \frac{\partial F_\rho{}^\sigma}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} + \frac{\partial F_\alpha{}^\beta}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} F_\rho{}^\sigma \right]$$
$$= g^{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} \left[F_\alpha{}^\beta (\delta^\rho_\nu \delta^\sigma_\mu - g^{\sigma\nu} g_{\rho\mu}) + (\delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu - g^{\beta\nu} g_{\alpha\mu}) F_\rho{}^\sigma \right]$$
$$= F^\nu{}_\mu - F_\mu{}^\nu + F^\nu{}_\mu - F_\mu{}^\nu = -4 F_\mu{}^\nu \ .$$

- $\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} = \dfrac{\partial}{\partial(\partial_\nu A^\mu)}\left(-\dfrac{1}{4}F_\alpha{}^\beta F^\alpha{}_\beta\right) = -\dfrac{1}{4}(-4F_\mu{}^\nu) = F_\mu{}^\nu$.

Os campos canônicos conjugados serão dados por:

$$\pi_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^\mu)} = F_\mu{}^0 \ .$$

Observe-se que desde que F é antissimétrico, $\pi_0 = F_0{}^0 = 0$.

Com isto, a densidade hamiltoniana é obtida segundo:

$$\mathcal{H} = \pi_\mu\dot{A}^\mu - \mathcal{L} = \pi_i\dot{A}^i - \mathcal{L} \ .$$

É importante notar o seguinte:

- $\pi_i = F_i{}^0 = -F^i{}_0$.
- $F_i{}^0 = \partial_i A^0 - \dot{A}_i = \partial_i A^0 + \dot{A}^i \quad \Rightarrow \quad \dot{A}^i = \pi_i - \partial_i A^0$.

Com isto, a densidade hamiltoniana pode ser escrita como:

$$\mathcal{H} = \pi_i(\pi_i - \partial_i A^0) + \frac{1}{4}(F_0{}^i F^0{}_i + F_i{}^j F^i{}_j + F_i{}^0 F^i{}_0) \ ,$$

levando em conta que $F_0{}^i F^0{}_i = (-F^i{}_0)(-F_i{}^0) = F_i{}^0 F^i{}_0 = \pi_i(-\pi_i)$, ter-se-á:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(0)} &= \pi_i\pi_i - \pi_i(\partial_i A^0) - \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_i{}^j F^i{}_j \\ &= \frac{1}{2}\pi_i\pi_i - \pi_i(\partial_i A^0) + \frac{1}{4}F_i{}^j F^i{}_j \cong \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + A^0\partial_i\pi_i + \frac{1}{4}F_i{}^j F^i{}_j \ .\end{aligned} \tag{6.6}$$

O seguinte passo será escrever a lagrangiana na sua forma canônica (6.1); para isto se escolhem as coordenadas (unificadas) do espaço de fase segundo:

$$\xi^{(0)T} = \begin{pmatrix} A^0 & \vec{A} & -\vec{\pi}\end{pmatrix} \qquad ; \qquad \begin{cases} \vec{A} & \stackrel{!}{=} & (A^1; A^2; A^3) \\ -\vec{\pi} & \stackrel{!}{=} & -(\pi^1; \pi^2; \pi^3) = (\pi_1; \pi_2; \pi_3)\end{cases}$$

Logo, a lagrangiana canônica resulta:

$$L_c^{(0)}[\xi^{(0)}] = \int\left[\pi_i(x)\dot{A}^i(x) - \mathcal{H}^{(0)}(x)\right]d^3x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{(0)} = \pi_i\dot{A}^i - \mathcal{H}^{(0)} \ ,$$

daqui, se identifica a $1-$forma canônica funcional $\theta^{(0)}$:

$$\theta^{(0)}[\xi^{(0)}] = \int \pi_j(x)\delta A^j(x)d^3x \ .$$

Tomando a derivada exterior funcional se obtém a seguinte $2-$forma funcional:

$$\omega^{(0)} = \delta\theta^{(0)} = \int \frac{\delta\pi_j(y)}{\delta\xi^{(0)I}(x)}\delta\xi^{(0)I}(x) \wedge \delta A^j(y)d^3xd^3y = \int \frac{\delta\pi_j(y)}{\delta\pi_i(x)}\delta\pi_i(x) \wedge \delta A^j(y)d^3xd^3y$$
$$= \int \delta^i_j\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta\pi_i(x) \wedge \delta A^j(y)d^3xd^3y = \int \delta\pi_i(x) \wedge \delta A^i(y)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})d^3xd^3y \ .$$

A matriz associada a esta $2-$forma funcional é dada por:

$$\Omega^{(0)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_3 & -I_3 \\ 0 & I_3 & 0_3 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ ,$$

onde 0_3 e I_3 são as matrizes nula e identidade em $\mathbb{R}^{3\times3}$, respectivamente. A matriz $\Omega^{(0)}$ é claramente singular e, em conformidade com (6.2), tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(0)}(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \ ,$$

onde $\alpha = \alpha(x)$ é uma função completamente arbitrária. Seguidamente, se constrói o seguinte vínculo, segundo (6.3):

$$\Gamma^{(0)} = \int [v^{(0)}]^I(x)\frac{\delta H^{(0)}}{\delta\xi^{(0)I}(x)}d^3x = \int \alpha(x)\frac{\delta H^{(0)}}{\delta A^0(x)}d^3x = 0 \ ,$$

com:

$$\frac{\delta H^{(0)}}{\delta A^0} = \frac{\partial\mathcal{H}^{(0)}}{\partial A^0} - \partial_j\left(\frac{\partial\mathcal{H}^{(0)}}{\partial(\partial_j A^0)}\right) \overset{(6.6)}{=} \frac{\partial}{\partial A^0}(A^0\partial_i\pi_i) = \partial_i\pi_i \ .$$

Logo:

$$\Gamma^{(0)} = \int \alpha(x)\partial_i\pi_i(x)d^3x = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma^{(0)}(x) = \alpha(x)\partial_i\pi_i(x) \cong \partial_i\pi_i(x) = 0 \ ,$$

devido à arbitrariedade de $\alpha(x)$.

O seguinte passo será construir as funções $\mathcal{H}^{(1)}$ e $\mathcal{L}^{(1)}$:

- $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)}\big|_{\gamma^{(0)}=0} = \frac{1}{2}\pi_i\pi_i + \frac{1}{4}F_i{}^jF^i{}_j$.
- $\mathcal{L}^{(1)} = \theta^{(1)}_{\bar{A}}\dot{\xi}^{(1)\bar{A}} - \mathcal{H}^{(1)} = \theta^{(0)}_I\dot{\xi}^{(0)I} + \gamma^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)} = \pi_i\dot{A}^i + \gamma^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)}$.

Onde $\gamma^{(0)}$ é um multiplicador de Lagrange inserido para garantir a consistência do vínculo obtido. Note-se que na nova lagrangiana não aparece mais o campo A^0, em consequência, ter-se-á:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ -\vec{\pi} \\ \lambda^{(0)} \end{pmatrix} \qquad , \qquad \theta^{(1)} = \theta^{(0)} + \int \gamma^{(0)}\delta\lambda^{(0)}d^3x \ .$$

Então, a nova $1-$forma canônica funcional é dada por:

$$\theta^{(1)} = \int \left[\pi_j(x)\delta A^j(x) + \partial_j\pi_j(x)\delta\lambda^{(0)}(x)\right]d^3x \ .$$

Logo, tomando a derivada exterior funcional:

$$\begin{aligned}
\omega^{(1)} &= \omega^{(0)} + \int + \frac{\delta}{\delta\pi_i(x)}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\pi_j(y)\right)\delta\pi_i(x)\wedge\delta\lambda^{(0)}(y)d^3xd^3y \\
&= \omega^{(0)} + \int \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\delta\pi_j(y)}{\delta\pi_i(x)}\right)\delta\pi_i(x)\wedge\delta\lambda^{(0)}(y)d^3xd^3y \\
&= \omega^{(0)} + \int \frac{\partial}{\partial y^j}\delta^i_j\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta\pi_i(x)\wedge\delta\lambda^{(0)}(y)d^3xd^3y \\
&= \omega^{(0)} + \int \delta\pi_i(x)\wedge\delta\lambda^{(0)}(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})d^3xd^3y \\
&= \int \left[\delta\pi_i(x)\wedge\delta A^i(y) + \delta\pi_i(x)\wedge\delta\lambda^{(0)}(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\right]\delta^3(\vec{x}-\vec{y})d^3xd^3y \ .
\end{aligned}$$

Assim, a matriz associada a $\omega^{(1)}$ resulta:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 & 0 \\ I_3 & 0_3 & \nabla_y \\ 0 & -\nabla_y & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 & 0 \\ I_3 & 0_3 & -\nabla_x \\ 0 & \nabla_x & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

A matriz anterior é singular e o autovetor associado ao autovalor nulo será da

forma:

$$v^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \vec{B}(x) \\ \vec{C}(x) \\ \beta(x) \end{pmatrix} ,$$

Logo, ter-se-á o seguinte:

$$\int \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 & 0 \\ I_3 & 0_3 & -\nabla_x \\ 0 & \nabla_x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \begin{pmatrix} \vec{B}(y) \\ \vec{C}(y) \\ \beta(y) \end{pmatrix} d^3y = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{C}(x) & = & \vec{0} \\ \vec{B}(x) - \nabla_x \beta(x) & = & \vec{0} \end{array} \right. .$$

Assim, o autovetor resulta $v^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \nabla\beta(x) \\ \vec{0} \\ \beta(x) \end{pmatrix}$, com $\beta = \beta(x)$ arbitrário.

Com esse autovetor se procede construir o seguinte vínculo:

$$\Gamma^{(1)} = \int [v^{(1)}]^{\bar{A}}(x) \frac{\delta H^{(1)}}{\delta \xi^{(1)\bar{A}}(x)} d^3x = \int \left[\partial_k \beta(x) \frac{\delta H^{(1)}}{\delta A^k(x)} + \beta(x) \frac{\delta H^{(1)}}{\delta \lambda^{(0)}} \right] d^3x = \mathbf{0} ,$$

com:

$$\frac{\delta H^{(1)}}{\delta A^k} = \frac{\partial \mathcal{H}^{(1)}}{\partial A^k} - \partial_\ell \left(\frac{\partial \mathcal{H}^{(1)}}{\partial(\partial_\ell A^k)} \right) = -\frac{1}{4} \partial_\ell \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\ell A^k)} (F_i{}^j F^i{}_j) \right] = -\frac{1}{4} \partial_\ell (-4 F_k{}^\ell) = \partial_\ell F_k{}^\ell .$$

Então:

$$\Gamma^{(1)} = \int \partial_k \beta(x) \partial_\ell F_k{}^\ell(x) d^3x = -\int \beta(x) \underbrace{\partial_k \partial_\ell F_k{}^\ell(x)}_{0} d^3x = \mathbf{0} .$$

Assim, o vínculo $\Gamma^{(1)}$ resulta ser identicamente nulo. Em consequência, $\Gamma^{(1)}$ deve ser substituído por uma condição de gauge apropriada. Para obtê-la, primeiro serão obtidas as equações de movimento correspondentes:

$$S[A] = \int \mathcal{L}(x) d^4x \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta S}{\delta A^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} \right) = -\partial_\nu F_\mu{}^\nu = 0 .$$

Então:

$$-\partial_\nu(\partial_\mu A^\nu - \partial^\nu A_\mu) = \Box A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0 .$$

Resulta conveniente dar solução a estas equações trabalhando por separado as componentes temporal e espaciais:

- Para $\mu = 0$:

$$\begin{aligned}
\Box A_0 - \partial_0\partial_0 A^0 - \partial_0\partial_i A^i &= 0 \\
\Box A_0 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}A_0 - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) &= 0 \\
-\nabla^2 A_0 - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad A_0 = -\frac{1}{\nabla^2}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})\ .
\end{aligned}$$

- Para $\mu = i = 1,2,3$:

$$\begin{aligned}
\Box A_i - \partial_i\partial_0 A^0 - \partial_i\partial_j A^j &= 0 \\
\Box A_i + \partial_i\frac{1}{\nabla^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\cdot\vec{A}) - \partial_i(\nabla\cdot\vec{A}) &= 0 \\
\Box A_i + \partial_i\left[\left(\frac{1}{\nabla^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1\right)(\nabla\cdot\vec{A})\right] &= 0 \\
\Box A_i + \partial_i\left[\left(\frac{1}{\nabla^2}\Box + \frac{1}{\nabla^2}\nabla^2 - 1\right)(\nabla\cdot\vec{A})\right] = 0 \quad &\Rightarrow \quad \Box\left[A_i + \partial_i\frac{1}{\nabla^2}(\nabla\cdot\vec{A})\right] = 0\ .
\end{aligned}$$

Agora considere-se as seguintes transformações para os campos A^ν e $A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$:

$$A^\nu \longrightarrow A'^\nu = A^\nu + \partial^\nu\Lambda \qquad , \qquad A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda;, \tag{6.7}$$

onde $\Lambda = \Lambda(x)$ é uma função arbitrária. A transformação acima deixa invariantes as equações de movimento, pois:

$$\begin{aligned}
F'^{\,\nu}_{\mu} &= \partial_\mu A'^\nu - \partial^\nu A'_\mu \\
&= \partial_\mu(A^\nu + \partial^\nu\Lambda) - \partial^\nu(A_\mu + \partial_\mu\Lambda) \\
&= \partial_\mu A^\nu + \cancel{\partial_\mu\partial^\nu\Lambda} - \partial^\nu A_\mu - \cancel{\partial^\nu\partial_\mu\Lambda} = F_\mu{}^\nu\ .
\end{aligned}$$

Consequentemente essas transformações para o campo A não produzem mudanças no estado físico, pelo qual são transformações de equivalência. Na literatura as transformações (6.7) são conhecidas como transformações de gauge.

Se, em particular, se escolhe $\Lambda(x) = \dfrac{1}{\nabla^2}(\nabla\cdot\vec{A})$, as equações obtidas para as componentes temporal e espaciais do campo A adotam a forma:

$$A'_0 = 0 \qquad , \qquad \Box A'_i = 0\ .$$

Mas, como as equações de movimento devem ficar invariantes, a seguinte condição deverá ser atendida:

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \partial_i A^i = 0 \; . \tag{6.8}$$

A condição (6.8) é conhecida como *gauge de Coulomb*.

Continuando com o procedimento F-J, a densidade do vínculo $\Gamma^{(1)}$ deverá ser substituída pela condição de gauge obtida:

$$\gamma^{(1)} \longrightarrow \gamma^{(1)\prime} = \partial_i A^i = 0 \; .$$

Com isto, definem-se:

- $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)}\big|_{\gamma^{(1)\prime}=0} = \dfrac{1}{2}\pi_i\pi_i + \dfrac{1}{4}F_i{}^jF^i{}_j \; .$
- $\mathcal{L}^{(2)} = \pi_i\dot{A}^i + \partial_j\pi_j\dot{\lambda}^{(0)} + \gamma^{(1)\prime}\dot{\lambda}^{(1)} - \mathcal{H}^{(2)}$

Logo, da nova lagrangiana canônica se identificam:

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \qquad , \qquad \theta^{(2)} = \theta^{(1)} + \int \gamma^{(1)\prime}\delta\lambda^{(1)}d^3x \; .$$

Com isto, a $1-$forma canônica funcional $2-$iterada é dada por:

$$\theta^{(2)} = \int \left[\pi_j(x)\delta A^j(x) + \partial_j\pi_j(x)\delta\lambda^{(0)}(x) + \partial_j A^j(x)\delta\lambda^{(1)}(x)\right]d^3x \; .$$

Logo, tomando a derivada exterior funcional se obtém a $2-$forma funcional:

$$\omega^{(2)} = \int \left(\delta\pi_i(x)\wedge\delta A^i(y) + \delta\pi_i(x)\wedge\delta\lambda^{(0)}(y)\frac{\partial}{\partial y^i} + \delta A^i(x)\wedge\delta\lambda^{(1)}(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})d^3xd^3y \; ,$$

cuja matriz associada é dada por:

$$\Omega^{(2)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0_3 & -I_3 & 0 & -\nabla_x \\ I_3 & 0_3 & -\nabla_x & 0 \\ 0 & \nabla_x & 0 & 0 \\ \nabla_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \; .$$

A matriz anterior é regular, e a inversa dela é dada por:

$$[\Omega^{(2)}]^{-1}(x;y) = \begin{pmatrix} 0_3 & M & \vec{0} & \frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} \\ -M & 0_3 & \frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & \vec{0} \\ \vec{0} & -\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & 0 & \frac{1}{\nabla_x^2} \\ -\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & \vec{0} & -\frac{1}{\nabla_x^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \qquad , \qquad M_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_{x^i}\partial_{x^j}}{\nabla_x^2} \ .$$

Logo, para as variáveis dinâmicas originais se tem:

$$\{A^i(x);\pi_j(y)\} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_{x^i}\partial_{x^j}}{\nabla_x^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ ,$$

donde se observa que o operador diferencial inverso $\frac{1}{\nabla^2}$ aplicado sobre a função Delta corresponde à função de Green associada à equação de Laplace, $\nabla^2\varphi = 0$; pois, por definição, $\nabla^2 G(\vec{x}-\vec{y}) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})$.

Então, lembrando a identidade $\nabla_x^2 \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = -4\pi\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$, encontra-se que a função de Green resulta $G(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}$. Com isto:

$$\{A^i(x);\pi_j(y)\} = \delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) + \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \ .$$

Usando as representações de Fourier da função de Green e a função delta, o resultado acima pode ser escrito de uma forma mais conveniente:

$$G(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}}{\vec{k}^2}d^3k \qquad , \qquad \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}d^3k \ ;$$

e com isso:

$$\begin{aligned} \{A^i(x);\pi_j(y)\} &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \left(\delta_{ij} - \frac{1}{\vec{k}^2}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}\right) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}d^3k \stackrel{!}{=} \delta_{ij}^{tr}(\vec{x}-\vec{y}) \ . \end{aligned}$$

A função δ_{ij}^{tr} é conhecida como *delta transversal*, pois corresponde à parte transversal da função delta ordinária. Para entender o motivo dessa denominação é preciso lembrar que, fixado um vetor $\vec{k}$, qualquer vetor $\vec{x}$ pode ser escrito como a

suma de uma componente na direção $\hat{k}$ (longitudinal) e outra, transversal; isto é:

$$\vec{x} = \vec{x}_{||} + \vec{x}_{\perp} \qquad ; \qquad \vec{x}_{||} = \left(\frac{\vec{x}\cdot\vec{k}}{\vec{k}^2}\right)\vec{k} \quad \rightarrow \quad (x_{||})^i = \left(\frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}\right) x^j \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\ell_{ij}} x^j \ ,$$

onde foi definido o operador de projeção longitudinal $\boldsymbol{\ell_{ij}}(\vec{k}) = \dfrac{k_i k_j}{\vec{k}^2}$. Em consequência, define-se o operador de projeção transversal como $\boldsymbol{t_{ij}}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \dfrac{k_i k_j}{\vec{k}^2}$. Assim, a função delta transversal pode-se escrever como:

$$\delta^{tr}_{ij}(\vec{x}-\vec{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{t_{ij}}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} d^3k \ .$$

6.1.2 Exemplo 2: Campo vetorial real massivo (Proca) livre

Para esta teoria se dispõe da seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_\alpha{}^\beta F^\alpha{}_\beta + \frac{1}{2} m^2 A_\alpha A^\alpha \qquad , \qquad F_\alpha{}^\beta = \partial_\alpha A^\beta - \partial^\beta A_\alpha \ .$$

Note-se que essa densidade lagrangiana é obtida agregando um termo de massa à densidade lagrangiana do campo vetorial não-massivo (ou campo eletromagnético). Aqui as funções de campo são A^μ, com $\mu = 0, 1, 2, 3$. A presença do termo de massa faz que essa densidade lagrangiana não seja mais invariante sob as transformações de gauge (6.7), apresentadas no exemplo anterior:

$$A^\alpha \rightarrow A'^\alpha = A^\alpha + \partial^\alpha \Lambda \quad \Rightarrow \quad A'_\alpha A'^\alpha = A_\alpha A^\alpha + 2A_\alpha \partial^\alpha \Lambda + \partial_\alpha \Lambda \partial^\alpha \Lambda \neq A_\alpha A^\alpha \ .$$

Do exemplo anterior se têm os resultados:

$$\frac{\partial F_\alpha{}^\beta}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = \delta^\mu_\alpha \delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu} g_{\alpha\nu} \qquad , \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^\mu)} = F_\mu{}^\nu$$

É interessante obter as equações de movimento correspondentes:

$$\frac{\delta S}{\delta A^\nu} = m^2 A_\nu + \partial_\mu F^\mu{}_\nu = 0 \ . \tag{6.9}$$

Ou também:

$$m^2 A_\nu + \partial_\mu(\partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu) = m^2 A_\nu + \Box A_\nu - \partial_\nu(\partial_\mu A^\mu) = 0 \ .$$

Logo, tomando 4-divergência se obtém:

$$\begin{aligned} m^2\partial^\nu A_\nu + \partial^\nu\Box A_\nu - \Box\partial_\mu A^\mu &= 0 \\ m^2\partial^\nu A_\nu + \partial^\nu\Box(\partial^\nu A_\nu - \partial_\mu A^\mu) &= 0 \quad \overset{m\neq 0}{\Rightarrow} \quad \partial^\nu A_\nu = \partial_\nu A^\nu = 0 \,. \end{aligned}$$

Substituindo o último resultado na equação de movimento para A^ν resulta:

$$(m^2 + \Box)A^\nu = 0 \,. \tag{6.10}$$

Por outro lado, os campos canônicos conjugados $\pi_\mu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{A}^\mu} = F_\mu{}^0$. serão:

$$\pi_0 = 0 \qquad , \qquad \pi_k = F_k{}^0 = \partial_k A^0 - \dot{A}_k = \partial_k A^0 + \dot{A}^k \,.$$

Uma vez que π_0 é nulo, as coordenadas do espaço de fase serão:

$$\xi^{(0)T} = \begin{pmatrix} A^0 & \vec{A} & -\vec{\pi} \end{pmatrix} \,.$$

O seguinte passo será determinar a densidade hamiltoniana, mas para isso é importante observar o seguinte:

- $\dot{A}^k = \pi_k - \partial_k A^0 \,.$
- $\begin{aligned} F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu &= F_0{}^\ell F^0{}_\ell + F_k{}^\ell F^k{}_\ell + F_k{}^0 F^k{}_0 = (-F^\ell{}_0)(-F_\ell{}^0) + F_k{}^\ell F^k{}_\ell + F_k{}^0(-F_k{}^0) \\ &= -F_\ell{}^0 F_\ell{}^0 + F_k{}^\ell F^k{}_\ell - F_k{}^0 F_k{}^0 = -2\pi_k\pi_k + F_k{}^\ell F^k{}_\ell \,. \end{aligned}$

Logo, a densidade hamiltoniana é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \pi_k\dot{A}^k + \frac{1}{4}F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}m^2 A_\nu A^\nu \\ &= \pi_k(\pi_k - \partial_k A^0) + \frac{1}{4}(-2\pi_k\pi_k + F_k{}^\ell F^k{}_\ell) - \frac{1}{2}m^2 A_\nu A^\nu \\ &= \frac{1}{2}\pi_k\pi_k - \pi_k\partial_k A^0 + \frac{1}{4}F_k{}^\ell F^k{}_\ell - \frac{1}{2}m^2 A_\nu A^\nu \\ \mathcal{H}^{(0)} &\cong \frac{1}{2}\pi_k\pi_k + A^0\partial_k\pi_k + \frac{1}{4}F_k{}^\ell F^k{}_\ell - \frac{1}{2}m^2 A_\nu A^\nu \,. \end{aligned}$$

A lagrangiana escrita na sua forma canônica é:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi_k\dot{A}^k - \mathcal{H}^{(0)} \,.$$

Logo, se identifica a $1-$forma canônica funcional:

$$\theta^{(0)} = \int \pi_k \delta A^k d^3x \ .$$

Tomando a derivada exterior se obtém a seguinte $2-$forma funcional:

$$\omega^{(0)} = \int \delta\pi_k(x) \wedge \delta A^k(y) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3x d^3y$$

A matriz associada é:

$$\Omega^{(0)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_3 \\ 0 & I_3 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \ .$$

Essa matriz é claramente singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(0)T}(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix} \ ,$$

onde α é uma função arbitrária e os $\vec{0}$ são vetores nulos de $\mathbb{R}^3$. Com esse autovetor se constrói o seguinte vínculo:

$$\Gamma^{(0)}(x) = \int \alpha(x) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta A^0(x)} d^3x = \int \alpha(x) \left[\partial_k \pi_k(x) - m^2 A^0(x) \right] d^3x = 0 \ .$$

Devido à arbitrariedade de α, a densidade de vínculo pode ser reduzida a:

$$\gamma^{(0)} \cong \partial_k \pi_k - m^2 A^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^0 = \frac{1}{m^2} \partial_k \pi_k \ .$$

Esse vínculo estabelece que a variável A^0 não é independente dos π_k. Por outro lado, esse vínculo também pode ser obtido a partir das equações de movimento (6.9):

$$m^2 A^\nu + \partial^\mu F_\mu{}^\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad m^2 A^0 + \partial^\mu F_\mu{}^0 = m^2 A^0 + \partial^\mu \pi_\mu = 0 \ .$$

Lembrando que $\pi_0 = 0$, ter-se-á:

$$m^2 A^0 + \partial^k \pi_k = m^2 A^0 - \partial_k \pi_k = 0 \quad \Rightarrow \quad A^0 = \frac{1}{m^2} \partial_k \pi_k \ .$$

Uma vez que o vínculo anterior estabelece que a componente A^0 não é indepen-

dente das outras coordenadas; é possível passar à seguinte ordem de iteração procedendo da seguinte maneira[3]:

- $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{A} \\ -\vec{\pi} \end{pmatrix}$.
- $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)}\Big|_{\gamma^{(0)}=0} = \frac{1}{2}\pi_k\pi_k + \frac{1}{4}F_k{}^{\ell}F^k{}_{\ell} + \frac{1}{2}m^2A^kA^k + \frac{1}{2m^2}(\partial_k\pi_k)^2$.
- $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)}\Big|_{\gamma^{(0)}=0} = \pi_k\dot{A}^k - \mathcal{H}^{(1)}$.

Do acima, a nova $1-$forma canônica funcional resulta:

$$\theta^{(1)} = \int \pi_k \delta A^k d^3x \ .$$

Logo, define-se a $2-$forma:

$$\omega^{(1)} = \int \left[\delta\pi_k(x) \wedge \delta A^k(y)\right] \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) d^3x d^3y \ .$$

A matriz associada é:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & -I_3 \\ I_3 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

A matriz anterior é regular, cuja inversa é dada por:

$$[\Omega^{(1)}]^{-1}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

Logo, se obtêm os parênteses de Poisson das variáveis $\xi^{(1)}$:

$$\{A^i(x); \pi_j(y)\} = \delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

Com isso:

$$\begin{aligned} \{A^i(x); A^0(y)\} &= \{A^i(x); \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial y^j}\pi_j(y)\} = \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial y^j}\{A^i(x); \pi_j(y)\} \\ &= \frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial y^j}\delta_{ij}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = -\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ . \end{aligned}$$

[3]Veja-se os exemplos 2 e 3 no capítulo 3.

6.1.3 Exemplo 3: Campo de Proca complexo livre

Para esta teoria se dispõe da seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{*\beta}_{\alpha}F^{\alpha}{}_{\beta} + m^2 B^*_\alpha B^\alpha \qquad , \qquad \begin{cases} F_\alpha{}^\beta = \partial_\alpha B^\beta - \partial^\beta B_\alpha \\ F^{*\beta}_\alpha = \partial_\alpha B^{*\beta} - \partial^\beta B^*_\alpha \end{cases} .$$

Aqui as funções de campo são B^α e $B^{*\alpha}$, com $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Note-se também que os tensores F e F^* são antissimétricos, pois $F_\alpha{}^\beta = -F^\beta{}_\alpha$ e $F^{*\beta}_\alpha = -F^{*\beta}{}_\alpha$.

OBSERVAÇÕES:

- $\dfrac{\partial F_\alpha{}^\beta}{\partial(\partial_\mu B^\nu)} = \delta^\mu_\alpha \delta^\beta_\nu - g^{\beta\mu} g_{\alpha\nu}$.

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu B^\nu)} = -\frac{1}{2}F^{*\beta}_\alpha g^{\alpha\theta} g_{\beta\phi} \frac{\partial F_\theta{}^\phi}{\partial(\partial_\mu B^\nu)} = -\frac{1}{2}F^{*\beta}_\alpha g^{\alpha\theta} g_{\beta\phi}(\delta^\mu_\theta \delta^\phi_\nu - g^{\phi\mu} g_{\theta\nu})$$
$$= -\frac{1}{2}F^{*\beta}_\alpha (g^{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \delta^\alpha_\nu \delta^\mu_\beta) = -\frac{1}{2}(F^{*\mu}{}_\nu - F^{*\mu}_\nu) = -F^{*\mu}{}_\nu \ .$$

Procedendo de maneira similar ao caso real (veja-se o exemplo anterior), encontra-se que as equações de movimento são:

- $\dfrac{\delta S}{\delta B^\nu} = m^2 B^*_\nu + \partial_\mu F^{*\mu}{}_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^\nu B^*_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad (m^2 + \Box) B^*_\nu = 0$.

- $\dfrac{\delta S}{\delta B^{*\nu}} = m^2 B_\nu + \partial_\mu F^\mu{}_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^\nu B_\nu = 0 \quad \Rightarrow \quad (m^2 + \Box) B_\nu = 0$.

Por outro lado, os campos canônicos conjugados serão:

- $\pi_\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^\mu} = F^{*0}_\mu \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 0 \quad , \quad \pi_k = F^{*0}_k = \partial_k B^{*0} - \dot{B}^*_k = \partial_k B^{*0} + \dot{B}^{*k}$.

- $\pi^*_\mu = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{B}^{*\mu}} = F_\mu{}^0 \quad \Rightarrow \quad \pi^*_0 = 0 \qquad , \qquad \pi^*_k = \partial_k B^0 + \dot{B}^k$.

Uma vez que π_0 e π^*_0 são nulos, as coordenadas do espaço de fase serão:

$$\xi^{(0)T} = \begin{pmatrix} B^0 & B^{*0} & \vec{B} & \vec{B}^* & -\vec{\pi} & -\vec{\pi}^* \end{pmatrix} .$$

O seguinte passo será determinar a densidade hamiltoniana, mas para isso é importante observar o seguinte:

- $\dot{B}^k = \pi^*_k - \partial_k B^0 \qquad , \qquad \dot{B}^{*k} = \pi_k - \partial_k B^{*0}$.

- $F^{*\nu}_{\mu}F^{\mu}{}_{\nu} = F^{*\ell}_{0}F^{0}{}_{\ell} + F^{*\ell}_{k}F^{k}{}_{\ell} + F^{*0}_{k}F^{k}{}_{0} = (-F^{*\ell}{}_{0})(-F_{\ell}{}^{0}) + F^{*\ell}_{k}F^{k}{}_{\ell} + F^{*0}_{k}(-F_{k}{}^{0})$
$= -F^{*0}_{\ell}F_{\ell}{}^{0} + F^{*\ell}_{k}F^{k}{}_{\ell} - F^{*0}_{k}F_{k}{}^{0} = -\pi_{\ell}\pi^{*}_{\ell} + F^{*\ell}_{k}F^{k}{}_{\ell} - \pi_{k}\pi^{*}_{k}$.

Logo, a densidade hamiltoniana é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_k\dot{B}^k + \pi^*_k\dot{B}^{*k} + \frac{1}{2}F^{*\nu}_{\mu}F^{\mu}{}_{\nu} - m^2B^*_\nu B^\nu \\
&= \pi_k(\pi^*_k - \partial_k B^0) + \pi^*_k(\pi_k - \partial_k B^{*0}) + \frac{1}{2}(-2\pi_k\pi^*_k + F^{*\ell}_{k}F^{k}{}_{\ell}) - m^2B^*_\nu B^\nu \\
&= \pi^*_k\pi_k - \pi_k\partial_k B^0 - \pi^*_k\partial_k B^{*0} + \frac{1}{2}F^{*\ell}_{k}F^{k}{}_{\ell} - m^2B^*_\nu B^\nu \\
\mathcal{H}^{(0)} &\cong \pi^*_k\pi_k + B^0\partial_k\pi_k + B^{*0}\partial_k\pi^*_k + \frac{1}{2}F^{*\ell}_{k}F^{k}{}_{\ell} - m^2B^*_\nu B^\nu \ .
\end{aligned}$$

A lagrangiana escrita na sua forma canônica é:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi_k\dot{B}^k + \pi^*_k\dot{B}^{*k} - \mathcal{H}^{(0)} \ .$$

Logo, se identifica a $1-$forma canônica funcional:

$$\theta^{(0)} = \int(\pi_k\delta B^k + \pi^*_k\delta B^{*k})d^3x \ .$$

Tomando a derivada exterior se obtém a seguinte $2-$forma funcional:

$$\omega^{(0)} = \int\big(\delta\pi_k(x)\wedge\delta B^k(y) + \delta\pi^*_k(x)\wedge\delta B^{*k}(y)\big)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})d^3xd^3y \ .$$

A matriz associada é:

$$\Omega^{(0)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_3 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

Essa matriz é claramente singular e tem os seguintes autovetores associados ao autovalor nulo:

$$v^{(0)T}_1(x) = \begin{pmatrix}\alpha(x) & 0 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0}\end{pmatrix} \quad , \quad v^{(0)T}_2(x) = \begin{pmatrix}0 & \beta(x) & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0}\end{pmatrix} \ ,$$

onde α e β são funções arbitrárias e todos os $\vec{0}$ são vetores nulos de $\mathbb{R}^3$. Com esses

autovetores se constrói os seguintes vínculos:

- $\Gamma_1^{(0)}(x) = \int \alpha(x) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta B^0(x)} d^3x = \int \alpha(x) \left[\partial_k \pi_k(x) - m^2 B^{*0}(x)\right] d^3x = 0$.
- $\Gamma_2^{(0)}(x) = \int \beta(x) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta B^{0*}(x)} d^3x = \int \beta(x) \left[\partial_k \pi_k^*(x) - m^2 B^0(x)\right] d^3x = 0$.

Devido à arbitrariedade das funções α e β, as densidades de vínculo correspondentes podem ser reduzidas a:

$$\gamma_1^{(0)} \cong \partial_k \pi_k - m^2 B^{*0} = 0 \qquad , \qquad \gamma_2^{(0)} \cong \partial_k \pi_k^* - m^2 B^0 = 0 \, .$$

Uma vez que as variáveis B^0 e B^{*0} não aparecem mais nessas funções, as coordenadas do espaço de fase $1-$iterado serão:

$$\xi^{(1)T} = \begin{pmatrix} \vec{B} & \vec{B}^* & -\vec{\pi} & -\vec{\pi}^* \end{pmatrix} \, .$$

Com isto, definem-se as novas funções em primeira ordem de iteração:

- $\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)}\Big|_{\gamma_{1,2}^{(0)}=0} = \pi_k^* \pi_k + \frac{1}{2} F_k^{*\ell} F^k{}_\ell + m^2 B^{*k} B^k + \frac{1}{m^2} (\partial_k \pi^*)(\partial_k \pi)$.
- $\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)}\Big|_{\gamma_{1,2}^{(0)}=0} = \pi_k \dot{B}^k + \pi_k^* \dot{B}^{*k} - \mathcal{H}^{(1)}$.

Logo, constroem-se:

- $\theta^{(1)} = \int (\pi_k \delta B^k + \pi_k^* \delta B^{*k}) d^3x$.
- $\omega^{(1)} = \int \left(\delta \pi_k(x) \wedge \delta B^k(y) + \delta \pi_k^*(x) \wedge \delta B^{*k}(y)\right) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3x d^3y$.

A matriz associada à $2-$forma funcional $\omega^{(1)}$ é dada por:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_3 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \, .$$

A matriz anterior é regular, cuja inversa é dada por:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 \\ -I_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \, .$$

Daqui, se obtêm os seguintes parênteses de Poisson:

$$\{B^j(x);\pi_k(y)\} = \delta_{jk}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \{B^{*j}(x);\pi_k^*(y)\}\ ,$$

$$\{B^j(x);B^{*0}(y)\} = -\frac{1}{m^2}\frac{\partial}{\partial x^j}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \{B^{*j}(x);B^0(y)\}\ .$$

6.1.4 Exemplo 4: Campo vetorial complexo massivo livre com liberdade de gauge (Stückelberg)

A densidade lagrangiana de Stückelberg é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F^{*\beta}_{\alpha}F^{\alpha}{}_{\beta} + m^2\left(B^*_\alpha - \frac{1}{m}\partial_\alpha\phi^*\right)\left(B^\alpha - \frac{1}{m}\partial^\alpha\phi\right)\ .$$

Pode-se mostrar que essa densidade lagrangiana é invariante sob as seguintes transformações:

$$B_\alpha \ \rightarrow\ B'_\alpha = B_\alpha + \partial_\alpha\psi \qquad , \qquad \phi \ \rightarrow\ \phi' = \phi + m\psi\ .$$

- $F'^{\beta}_{\alpha} = \partial_\alpha B'^\beta - \partial^\beta B'_\alpha = \partial_\alpha(B^\beta + \partial^\beta\psi) - \partial^\beta(B_\alpha + \partial_\alpha\psi)$
  $= \partial_\alpha B^\beta + \partial_\alpha\partial^\beta\psi - \partial^\beta B_\alpha - \partial^\beta\partial_\alpha\psi = F_\alpha{}^\beta\ .$
- $B'^\alpha - \frac{1}{m}\partial^\alpha\phi' = B^\alpha + \partial^\alpha\psi - \frac{1}{m}(\phi + m\psi) = B^\alpha + \partial^\alpha\psi - \frac{1}{m}\partial^\alpha\phi - \partial^\alpha\psi$
  $= B^\alpha - \frac{1}{m}\partial^\alpha\phi\ .$
- Em consequência: $\mathcal{L}' = \mathcal{L}\ .$

Assim, observa-se que a densidade lagrangiana acima é invariante de gauge.

Resulta útil também obter as equações de movimento para os campos envolvidos:

- $\frac{\delta S}{\delta\phi} = \frac{2}{m}\left(\partial_\mu B^\mu - \frac{\Box}{m}\phi\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Box}{m}\phi = \partial_\mu B^\mu\ .$
- $\frac{\delta S}{\delta B^\nu} = \partial_\mu F^\mu{}_\nu + m^2\left(B_\nu - \frac{1}{m}\partial_\nu\phi\right)$
  $= \Box B_\nu - \partial_\nu(\partial_\mu B^\mu) + m^2\left(B_\nu - \frac{1}{m}\partial_\nu\phi\right) = 0\ .$

Observe-se que substituindo a primeira equação na segunda se obtém a equação:

$$(\Box + m^2)\left(B_\nu - \frac{1}{m}\partial_\nu\phi\right) = 0\,,$$

que tem a mesma forma que a equação (6.10), correspondente ao campo de Proca. De maneira similar se obtém a equação:

$$(\Box + m^2)\left(B^*_\nu - \frac{1}{m}\partial_\nu\phi^*\right) = 0\,.$$

Por outro lado, os campos canonicamente conjugados são:

- $\pi_\nu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{B}^\nu} = -F^{*0}{}_\nu = -\dot{B}^*_\nu + \partial_\nu B^{*0} \quad \Rightarrow \quad \pi_0 = 0 \quad , \quad \pi_k = \dot{B}^{*k} + \partial_k B^{*0}$.
- $\pi^*_\nu = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{B}^{*\nu}} = -F^0{}_\nu \quad \Rightarrow \quad \pi^*_0 = 0 \quad , \quad \pi^*_k = \dot{B}^k + \partial_k B^0$.
- $\Pi = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = -mB^{*0} + \dot{\phi}^*$.
- $\Pi^* = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}^*} = -mB^0 + \dot{\phi}$.

Logo, a densidade hamiltoniana é dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \pi_k\dot{B}^k + \pi^*_k\dot{B}^{*k} + \Pi\dot{\phi} + \Pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{L} \\ &= \pi_k(\pi^*_k - \partial_k B^0) + \pi^*_k(\pi_k - \partial_k B^{*0}) + \Pi(\Pi^* + mB^0) + \Pi^*(\Pi + mB^{*0}) \\ &\qquad + \frac{1}{2}F^{*\beta}_\alpha F^\alpha{}_\beta - m^2\underbrace{(B^*_\alpha - \frac{1}{m}\partial_\alpha\phi^*)(B^\alpha - \frac{1}{m}\partial^\alpha\phi)}_{Q}\,.\end{aligned}$$

OBSERVAÇÕES:

- $F^{*\beta}_\alpha F^\alpha{}_\beta = -2\pi^*_k\pi_k + F^{*\ell}_k F^k{}_\ell$.
- $$\begin{aligned}Q &= (B^*_0 - \frac{1}{m}\dot{\phi}^*)(B^0 - \frac{1}{m}\dot{\phi}) + (B^*_k - \frac{1}{m}\partial_k\phi^*)(B^k - \frac{1}{m}\partial^k\phi) \\ &= \left[B^*_0 - \frac{1}{m}(\Pi + mB^{*0})\right]\left[B^0 - \frac{1}{m}(\Pi^* + mB^*)\right] + (-B^{*k} - \frac{1}{m}\partial_k\phi^*)(B^k + \frac{1}{m}\partial_k\phi) \\ &= \frac{1}{m^2}\Pi\,\Pi^* - (B^{*k} + \frac{1}{m}\partial_k\phi^*)(B^k + \frac{1}{m}\partial_k\phi)\,.\end{aligned}$$

Então:

$$\mathcal{H} = 2\pi_k^*\pi_k - \pi_k\partial_k B^0 - \pi_k^*\partial_k B^{*0} + 2\Pi^*\Pi + m(\Pi B^0 + \Pi^* B^{*0}) - \pi_k^*\pi_k + \frac{1}{2}F_k^{*\ell}F^k{}_\ell$$
$$- \Pi^*\Pi + m^2(B^{*k} + \frac{1}{m}\partial_k\phi^*)(B^k + \frac{1}{m}\partial_k\phi)$$
$$\mathcal{H}^{(0)} \cong \pi_k^*\pi_k + \Pi^*\Pi + B^0(\partial_k\pi_k + m\Pi) + B^{*0}(\partial_k\pi^* + m\Pi^*) + \frac{1}{2}F_k^{*\ell}F^k\ell$$
$$+ m^2(B^{*k} + \frac{1}{m}\partial_k\phi^*)(B^k + \frac{1}{m}\partial_k\phi)\ .$$

As coordenadas do espaço de fase são:

$$\xi^{(0)T} = \begin{pmatrix} B^0 & B^{*0} & \vec{B} & \vec{B}^* & \phi & \phi^* & -\vec{\pi} & -\vec{\pi}^* & \Pi & \Pi^* \end{pmatrix}\ .$$

A densidade lagrangiana escrita na forma canônica é:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi_k\dot{B}^k + \pi_k^*\dot{B}^{*k} + \Pi\dot{\pi} + \Pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{H}^{(0)}\ .$$

Logo, a $1-$forma canônica funcional é dada por:

$$\theta^{(0)} = \int(\pi_k\delta B^k + \pi_k^*\delta B^{*k} + \Pi\delta\phi + \Pi^*\delta\phi^*)d^3x\ .$$

Tomando a derivada exterior se obtém a $2-$forma:

$$\omega^{(0)} = \int\Big(\delta\pi_k(x)\wedge\delta B^k(y) + \delta\pi_k^*(x)\wedge\delta B^{*k}(y) + \delta\Pi(x)\wedge\delta\phi(y)$$
$$+ \delta\Pi^*(x)\wedge\delta\phi^*(y)\Big)\delta^3(\vec{x}-\vec{y})d^3xd^3y\ .$$

A matriz associada à $2-$forma acima é:

$$\Omega^{(0)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_8 \\ 0 & 0 & I_8 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})\ .$$

A matriz anterior é singular e apresenta os seguintes autovetores associados ao autovalor nulo:

$$v_1^{(0)T} = \begin{pmatrix} \alpha(x) & 0 & \vec{0}\in\mathbb{R}^8 & \vec{0}\in\mathbb{R}^8 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2^{(0)T} = \begin{pmatrix} 0 & \beta(x) & \vec{0}\in\mathbb{R}^8 & \vec{0}\in\mathbb{R}^8 \end{pmatrix}\ .$$

Esses autovetores permitem construir os seguintes vínculos:

- $\Gamma_1^{(0)}(x) = \int \alpha(x) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta B^0(x)} d^3x = \int \alpha(x) \big[\partial_k \pi_k(x) + m\Pi(x)\big] d^3x = 0$.
- $\Gamma_2^{(0)}(x) = \int \beta(x) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta B^{*0}(x)} d^3x = \int \beta(x) \big[\partial_k \pi_k^*(x) + m\Pi^*(x)\big] d^3x = 0$.

As densidades correspondentes a esses vínculos serão:

$$\gamma_1^{(0)}(x) \cong \partial_k \pi_k(x) + m\Pi(x) = 0 \qquad , \qquad \gamma_2^{(0)}(x) \cong \partial_k \pi_k^*(x) + m\Pi^*(x) = 0 \, .$$

Logo, para a primeira ordem de iteração ter-se-á:

- $\mathcal{H}^{(1)} = \pi_k^* \pi_k + \Pi^* \Pi + \frac{1}{2} F_k^{*\ell} F^k{}_\ell + m^2 (B^{*k} + \frac{1}{m} \partial_k \phi^*)(B^k + \frac{1}{m} \partial_k \phi)$.
- $\mathcal{L}^{(1)} = \pi_k \dot{B}^k + \pi_k^* \dot{B}^{*k} + \Pi \dot{\phi} + \Pi^* \dot{\phi}^* + \gamma_1^{(0)} \dot{\lambda}_1^{(0)} + \gamma_2^{(0)} \dot{\lambda}_2^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)}$.
- $\xi^{(1)T} = \Big(\vec{B} \quad \vec{B}^* \quad \phi \quad \phi^* \quad -\vec{\pi} \quad -\vec{\pi}^* \quad \Pi \quad \Pi^* \quad \lambda_1^{(0)} \quad \lambda_2^{(0)} \Big)$.
- $\theta^{(1)} = \theta^{(0)} + \int \big[\gamma_1^{(0)} \delta\lambda_1^{(0)} + \gamma_2^{(0)} \delta\lambda_2^{(0)}\big] d^3x$
  $= \theta^{(0)} + \int \big[(\partial_k \pi_k + m\Pi)\delta\lambda_1^{(0)} + (\partial_k \pi_k^* + m\Pi^*)\delta\lambda_2^{(0)}\big] d^3x$.
- $\omega^{(1)} = \omega^{(0)} + \int \Big[\delta\pi_k(x) \wedge \delta\lambda_1^{(0)}(y) \frac{\partial}{\partial y^k} + m\delta\Pi(x) \wedge \delta\lambda_1^{(0)}(y) + \delta\pi_k^*(x) \wedge \delta\lambda_2^{(0)}(y) \frac{\partial}{\partial y^k}$
  $+ m\delta\Pi^*(x) \wedge \delta\lambda_2^{(0)}(y) \Big] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3x d^3y$.
- Matriz associada:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0_8 & -I_8 & \vec{0} & \vec{0} \\ I_8 & 0_8 & \vec{\eta}(m) & \vec{\tau}(m) \\ \vec{0} & -\vec{\eta}(m) & 0 & 0 \\ \vec{0} & -\vec{\tau}(m) & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \, ,$$

onde foram inseridas as notações:

$$\vec{\eta}(m) \stackrel{!}{=} \big(\, -\nabla_x \, ; \, \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \, ; \, m \, ; \, 0 \, \big) \qquad , \qquad \vec{\tau}(m) \stackrel{!}{=} \big(\, \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \, ; \, -\nabla_x \, ; \, 0 \, ; \, m \, \big) \, .$$

Novamente, a matriz anterior é singular e tem os seguintes autovetores associados ao autovalor nulo:

$$v_1^{(1)T}(x) = \Big(\nabla\tilde{\alpha} \quad \vec{0} \quad -m\tilde{\alpha} \quad 0 \quad \vec{0} \quad \vec{0} \quad 0 \quad 0 \quad \tilde{\alpha} \quad 0\Big) \quad \text{e}$$
$$v_2^{(1)T}(x) = \Big(\vec{0} \quad \nabla\tilde{\beta} \quad 0 \quad -m\tilde{\beta} \quad \vec{0} \quad \vec{0} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \tilde{\beta}\Big) \ ,$$

onde os $\vec{0}$ são vetores nulos de $\mathbb{R}^3$. O seguinte será construir os vínculos correspondentes:

- $$\Gamma_1^{(1)} = \int \left[\partial_k\tilde{\alpha}\frac{\delta H^{(1)}}{\delta B^k} - m\tilde{\alpha}\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi} + \tilde{\alpha}\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\lambda_1^{(0)}}\right] d^3x = \int \tilde{\alpha}\left[-\partial_k\frac{\delta H^{(1)}}{\delta B^k} - m\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi}\right] d^3x$$

  OBSERVAÇÃO:

  $$\frac{\delta H^{(1)}}{\delta B^k} = m^2(B^{*k} + \frac{1}{m}\partial_k\phi^*) - \partial_\ell F^{*\ell}{}_k \quad , \quad \frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi} = -\partial_k(B^{*k} + \frac{1}{m}\partial_k\phi^*) \ .$$

  $$\Gamma_1^{(1)} = \int \tilde{\alpha}\big[-m^2\partial_k B^{*k} - m\partial_k\partial_k\phi^* + \cancelto{0}{\partial_k\partial_\ell F^{*\ell}{}_k} + m^2\partial_k B^{*k} + m\partial_k\partial_k\phi^*\big] d^3x = \mathbf{0} \ .$$

- $$\Gamma_2^{(1)} = \int \left[\partial_k\tilde{\beta}\frac{\delta H^{(1)}}{\delta B^{*k}} - m\tilde{\beta}\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi^*} + \tilde{\alpha}\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\lambda_2^{(0)}}\right] d^3x = \int \tilde{\beta}\left[-\partial_k\frac{\delta H^{(1)}}{\delta B^{*k}} - m\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi^*}\right] d^3x$$
  $$= \int \tilde{\beta}\big[-m^2\partial_k B^k - m\partial_k\partial_k\phi + \partial_k\partial_\ell F^\ell{}_k + m^2\partial_k B^k + m\partial_k\partial_k\phi\big] d^3x = \mathbf{0} \ .$$

Daqui, observa-se que as densidades de vínculo são identicamente nulas:

$$\gamma_1^{(1)} \cong 0 \qquad , \qquad \gamma_2^{(1)} \cong 0 \ .$$

Em consequência, duas condições de gauge devem ser incluídas. De maneira similar a como foi feito para o campo eletromagnético livre, tais condições podem ser obtidas a partir das equações de movimento para os campos B_ν e B_ν^* :

- Considerando $\nu = 0$ na equação para B_ν :

$$\Box B_0 - \partial_0(\partial_0 B^0 + \partial_k B^k) + m^2\left(B_0 - \frac{1}{m}\partial_0\phi\right) = 0$$
$$-\nabla^2 B_0 - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{B}) + m^2 B_0 - m\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_0 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\nabla\cdot\vec{B} + m\phi}{\nabla^2 - m^2}\right) \ .$$

- Considerando $\nu = j$ na equação para B_ν :

$$\Box B_j - \partial_j(\partial_0 B^0 + \partial_k B^k) + m^2\left(B_j - \frac{1}{m}\partial_j\phi\right) = 0$$

$$\Box B_j + \partial_j\left[\frac{1}{\nabla^2 - m^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\cdot\vec{B} + m\phi)\right] - \partial_j(\nabla\cdot\vec{B}) + m^2 B_j - m\partial_j\phi = 0$$

$$(\Box + m^2)B_j + \partial_j\left[\left(\frac{1}{\nabla^2 - m^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 1\right)(\nabla\cdot\vec{B} + m\phi)\right] = 0$$

$$(\Box + m^2)\left[B_j + \partial_j\left(\frac{\nabla\cdot\vec{B} + m\phi}{\nabla^2 - m^2}\right)\right] = 0\,.$$

Logo, considerando $\Lambda = \dfrac{\nabla\cdot\vec{B} + m\phi}{\nabla^2 - m^2}$ na transformação de gauge $B_j \to B'_j = B_j + \partial_j\Lambda$, as equações de movimento resultam:

$$B'_0 = 0 \qquad , \qquad (\Box + m^2)B'_j = 0\,.$$

Assim, para que as equações de movimento sejam invariantes sob a transformação acima, a seguinte condição de gauge deve ser atendida:

$$\nabla\cdot\vec{B} + m\phi = 0\,,$$

de maneira similar se obtém a condição de gauge $\nabla\cdot\vec{B}^* + m\phi^* = 0$ para os campos $\vec{B}^*$ e ϕ^*. Logo, continuando com o método F-J, os vínculos nulos serão substituídos pelas condições de gauge obtidas:

$$\gamma_1^{(1)\prime} = \partial_k B^{*k} + m\phi^* = 0 \qquad , \qquad \gamma_2^{(1)\prime} = \partial_k B^k + m\phi = 0\,.$$

Com isto, pode-se passar à segunda ordem de iteração:

- $\mathcal{H}^{(2)} = \pi_k^*\pi_k + \Pi^*\Pi + \dfrac{1}{2}F_k^{*\ell}F^k{}_\ell + m^2(B^{*k} + \dfrac{1}{m}\partial_k\phi^*)(B^k + \dfrac{1}{m}\partial_k\phi)\,.$
- $\mathcal{L}^{(2)} = \mathcal{L}^{(1)} + \gamma_1^{(1)\prime}\dot{\lambda}_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)\prime}\dot{\lambda}_2^{(1)} - \mathcal{H}^{(2)}\,.$
- $\xi^{(2)T} = \begin{pmatrix}\xi^{(1)} & \lambda_1^{(1)} & \lambda_2^{(1)}\end{pmatrix}\,.$
- $\theta^{(2)} = \theta^{(1)} + \displaystyle\int\left[\gamma_1^{(1)\prime}\delta\lambda_1^{(1)} + \gamma_2^{(1)\prime}\delta\lambda_2^{(1)}\right]d^3x$
  $= \theta^{(1)} + \displaystyle\int\left[(\partial_k B^{*k} + m\phi^*)\delta\lambda_1^{(1)} + (\partial_k B^k + m\phi)\delta\lambda_2^{(1)}\right]d^3x\,.$

- $$\omega^{(2)} = \omega^{(1)} + \int \Big[\delta B^{*k}(x) \wedge \delta\lambda_1^{(1)}(y) \frac{\partial}{\partial y^k} + m\delta\phi^*(x) \wedge \delta\lambda_1^{(1)}(y) + \delta B^k(x) \wedge \delta\lambda_2^{(1)}(y) \frac{\partial}{\partial y^k} + m\delta\phi(x) \wedge \delta\lambda_2^{(1)}(y) \Big] \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) d^3x d^3y \, .$$

- Matriz associada:

$$\Omega^{(2)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0_8 & -I_8 & \vec{0} & \vec{0} & \vec{\tau}(m) & \vec{\eta}(m) \\ I_8 & 0_8 & \vec{\eta}(m) & \vec{\tau}(m) & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & -\vec{\eta}(m) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vec{0} & -\vec{\tau}(m) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{\tau}(m) & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\vec{\eta}(m) & \vec{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \, .$$

Essa matriz é invertível, com inversa:

$$[\Omega^{(2)}]^{-1}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & N & 0 & 0 & -\frac{\vec{\tau}(m)}{\nabla_x^2+m^2} & -\frac{\vec{\eta}(m)}{\nabla_x^2+m^2} \\ -N & 0 & -\frac{\vec{\eta}(m)}{\nabla_x^2+m^2} & -\frac{\vec{\tau}(m)}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\eta}(m)}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\nabla_x^2+m^2} \\ 0 & \frac{\vec{\tau}(m)}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\nabla_x^2+m^2} & 0 \\ \frac{\vec{\tau}(m)}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & 0 \\ \frac{\vec{\eta}(m)}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & -\frac{1}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \, ,$$

com:

$$N = \left(\begin{array}{cc:cc} \tilde{M} & 0_3 & \frac{m\nabla_x}{\nabla_x^2+m^2} & \vec{0} \\ 0_3 & \tilde{M} & \vec{0} & \frac{m\nabla_x}{\nabla_x^2+m^2} \\ \hdashline \frac{m\nabla_x}{\nabla_x^2+m^2} & \vec{0} & \frac{\nabla_x^2}{\nabla_x^2+m^2} & 0 \\ \vec{0} & \frac{m\nabla_x}{\nabla_x^2+m^2} & 0 & \frac{\nabla_x^2}{\nabla_x^2+m^2} \end{array} \right) \qquad , \qquad \tilde{M}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_{x^i}\partial_{x^j}}{\nabla_x^2+m^2} \, .$$

Logo, se obtêm os seguintes parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas:

- $$\{B^i(x); \pi_j(y)\} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_{x^i}\partial_{x^j}}{\nabla_x^2+m^2} \right) \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \{B^{*i}(x); \pi_j^*(y)\} \, .$$

- $$\{B^i(x); \Pi(y)\} = \frac{m\partial_{x^i}}{\nabla_x^2+m^2} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \{B^{*i}(x); \Pi^*(y)\} \, .$$

- $$\{\phi(x); \pi_i(y)\} = \frac{m\partial_{x^i}}{\nabla_x^2+m^2} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \{\phi^*(x); \pi_i^*(y)\} \, .$$

- $\{\phi(x);\Pi(y)\} = \dfrac{\nabla_x^2}{\nabla_x^2 + m^2}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \{\phi^*(x);\Pi^*(y)\}$.

6.1.5 Exemplo 5: Eletrodinâmica escalar

Eletrodinâmica escalar é a teoria que descreve a interação entre partículas escalares (ou com spin nulo) com carga elétrica; como bem é sabido, a iteração associada a corpos carregados é a interação eletromagnética. Na teoria de campos essa interação é mediada pelo campo eletromagnético. Em geral, nas teorias de interação se usa o que é conhecido na literatura como *prescrição de acoplamento mínimo*, que estabelece que uma teoria de interação pode ser obtida a partir da teoria livre substituindo as derivadas (parciais) ordinárias, pelas chamadas *derivadas covariantes* que fisicamente representam a influência do campo de interação nos campos de matéria.

Os campos escalares que podem-se acoplar com o campo eletromagnético são complexos, que localmente são descritos pelas funções de campo ϕ e ϕ^*, as quais são consideradas independentes. As derivadas covariantes para esses campos são dadas por:

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi \qquad , \qquad D_\mu\phi^* = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^* \ . \tag{6.11}$$

A densidade lagrangiana para um campo escalar complexo (livre) é a seguinte:

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \ . \tag{6.12}$$

Por outro lado, a densidade lagrangiana do campo eletromagnético livre é:

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu \ . \tag{6.13}$$

Logo, em conformidade com a prescrição de acoplamento mínimo, a densidade lagrangiana para a eletrodinâmica escalar será:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu + D_\mu\phi^* D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \ . \tag{6.14}$$

Substituindo as expressões para as derivadas covariantes se obtém:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu + \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - ieA^\mu(\phi^*\overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu\phi) + e^2A^2\phi^*\phi \ ,$$

com $\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \phi \overset{!}{=} \phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*$. Note-se que a densidade lagrangiana depende das funções de campo (em interação) ϕ, ϕ^* e A^μ.

Vale muito a pena fazer um comentário sobre a necessidade de introduzir as derivadas covariantes. Em primeiro lugar, note-se que a lagrangiana (6.12) é invariante sob as transformações:

$$\phi \to \phi' = e^{-ie\alpha}\phi \qquad , \qquad \phi^* \to \phi^{*\prime} = e^{ie\alpha}\phi^* \qquad (\alpha = \text{constante}) \, .$$

Observe-se que os números complexos $z = e^{-i\alpha}$, onde $0 \leqslant \alpha < 2\pi$ é o ângulo polar, satisfazem a condição $z^* z = 1$. Esses números complexos, junto à operação de multiplicação (em $\mathbb{C}$), constituem um conjunto denotado por $U(1)$ que além disso tem estrutura do grupo:

$$U(1) \doteq \left\{ z \in \mathbb{C} : z^* z = 1 \right\} .$$

Devido à extensão do parâmetro α entende-se que o grupo (de Lie) $U(1)$ corresponde às rotações no plano complexo. Logo, diz-se que a lagrangiana (6.12) tem simetria global $U(1)$. Por outro lado, pode-se avaliar a simetria global, para o qual o parâmetro torna-se função das coordenadas; i. e.: $\alpha = \alpha(x)$: nesse caso as seguintes transformações deverão ser consideradas:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\phi(x) \qquad , \qquad \phi^*(x) \to \phi^{*\prime}(x) = e^{i\alpha(x)}\phi^*(x) \, .$$

Com isto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= \partial_\mu \left(e^{i\alpha(x)}\phi^*(x) \right) \partial^\mu \left(e^{-i\alpha(x)}\phi(x) \right) - e^{i\alpha(x)}\phi^*(x) m^2 e^{-i\alpha(x)}\phi(x) \\
&= \left(e^{i\alpha}\partial_\mu \phi^* + i e^{i\alpha}\phi^* \partial_\mu \alpha \right) \left(e^{-i\alpha}\partial^\mu \phi - i e^{-i\alpha}\phi \partial^\mu \alpha \right) - m^2 \phi^* \phi \\
&= (\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha)\phi^* (\partial^\mu - i\partial^\mu \alpha)\phi - m^2 \phi^* \phi \neq \mathcal{L} \, .
\end{aligned}$$

Logo, observa-se que a não-invariância é devido à presença do termo $\partial_\mu \alpha$, e devido à arbitrariedade do α tem a forma $-eA_\mu$, onde $-e$ é um parâmetro de acoplamento que posteriormente foi associado à carga do elétron. É assim que inserindo os objetos apresentados em (6.11) constrói-se a seguinte densidade lagrangiana modificada:

$$\mathcal{L}_{mod} = D_\mu \phi^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \, . \tag{6.15}$$

Note-se que na lagrangiana acima foi introduzido uns novos campos A^μ (nos objetos $D_\mu\phi^*$ e $D^\mu\phi$), o qual também deverá ter uma lei de transformação que garanta a invariância local dessa nova densidade lagrangiana. Para determinar como se devem transformar os campos A^μ considere-se a densidade lagrangiana transformada:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_{mod} &= D'_\mu\phi^{*\prime}D'^\mu\phi' - m^2\phi^{*\prime}\phi' \\ &= (\partial_\mu - ieA'_\mu)(e^{i\alpha}\phi^*)(\partial^\mu + ieA'^\mu)(e^{-i\alpha}\phi) - m^2e^{i\alpha}\phi^*e^{-i\alpha}\phi \\ &= \left[e^{i\alpha}(\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha)\phi^* - ieA'_\mu e^{i\alpha}\phi^*\right]\left[e^{-i\alpha}(\partial^\mu - i\partial^\mu\alpha)\phi - ieA'^\mu e^{-i\alpha}\phi\right] - m^2\phi^*\phi \\ &= \left[\partial_\mu - ie(A'_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha)\right]\phi^*\left[\partial^\mu + ie(A'^\mu - \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha)\right]\phi - m^2\phi^*\phi\ .\end{aligned}$$

Logo, para que $\mathcal{L}'_{mod} = \mathcal{L}_{mod}$:

$$A_\mu = A'_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \quad \Rightarrow \quad A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha\ .$$

Assim, a densidade lagrangiana (6.15) é invariante local $U(1)$ sob as seguintes transformações:

$$\phi \to \phi' = e^{-ie\Lambda(x)}\phi \quad , \quad \phi^* \to \phi^{*\prime} = e^{ie\Lambda(x)}\phi^* \quad , \quad A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)\ ,$$

com $\Lambda(x) \overset{!}{=} \frac{1}{e}\alpha(x)$. Logo, levando em conta que a densidade lagrangiana (6.13) também é invariante sob a transformação (de gauge) $A^\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x)$, pode-se afirmar que a densidade (6.14), correspondente à eletrodinâmica escalar, é invariante local $U(1)$.

O seguinte será construir os campos canonicamente conjugados correspondentes, para o qual resulta conveniente escrever a densidade lagrangiana da seguinte maneira:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_\mu{}^\nu F^\mu{}_\nu + \dot\phi\dot\phi^* + \partial_j\phi^*\partial^j\phi - m^2\phi^*\phi - ieA^0(\phi^*\dot\phi - \dot\phi^*\phi) - ieA^j(\phi^*\overset{\leftrightarrow}{\partial}_j\phi) + e^2A^2\phi^*\phi\ .$$

Logo, ter-se-á que os campos canonicamente conjugados resultam:

- Para o campo escalar complexo:

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = \dot\phi^* - ieA_0\phi^* = D_0\phi^* \qquad , \qquad \Pi^* = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\phi^*} = \dot\phi + ieA_0\phi = D_0\phi\ .$$

- Para o campo eletromagnético:

$$\pi_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^\mu} = F_\mu{}^0 \qquad \Rightarrow \qquad \pi_0 = 0 \quad , \quad \pi_j = \partial_j A^0 - \dot{A}^j \ .$$

Logo, as coordenadas locais para o espaço de fase são:

$$\xi^{(0)T} = \begin{pmatrix} A^0 & \vec{A} & \phi & \phi^* & -\vec{\pi} & \Pi & \Pi^* \end{pmatrix} \ .$$

A densidade hamiltoniana é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi_j \dot{A}^j + \Pi\dot{\phi} + \Pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{4}F_j{}^k F^j{}_k + \frac{1}{2}\pi_j^2 - \pi_j\partial_j A^0 + \Pi^*\Pi - \partial_j\phi^*\partial^j\phi + m^2\phi^*\phi \\
&\qquad + ieA^0(\Pi^*\phi^* - \Pi\phi) - e^2 A_j A^j\phi^*\phi + ieA^j(\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_j \phi) \\
\mathcal{H}^{(0)} &\cong \frac{1}{4}F_j{}^k F^j{}_k + \frac{1}{2}\pi_j^2 + A^0\partial_j\pi_j + \Pi^*\Pi - \partial_j\phi^*\partial^j\phi + m^2\phi^*\phi \\
&\qquad + ieA^0(\Pi^*\phi^* - \Pi\phi) - e^2 A_j A^j\phi^*\phi + ieA^j(\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_j \phi) \ .
\end{aligned}$$

A densidade lagrangiana escrita em sua forma canônica é:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi_j \dot{A}^j + \Pi\dot{\phi} + \Pi^*\dot{\phi}^* - \mathcal{H}^{(0)} \ .$$

Seguidamente, se identifica a $1-$forma canônica funcional:

$$\theta^{(0)} = \int (\pi_j \delta A^j + \Pi\delta\phi + \Pi^*\delta\phi^*) d^3x \ .$$

Logo, tomando a derivada exterior se obtém a seguinte $2-$forma:

$$\begin{aligned}
\omega^{(0)} &= \int \left[\frac{\delta\pi_j(y)}{\delta\pi_i(x)} \delta\pi_i(x) \wedge \delta A^j(y) + \frac{\delta\Pi(y)}{\delta\Pi(x)} \delta\Pi(x) \wedge \delta\phi(y) + \frac{\delta\Pi^*(y)}{\delta\Pi^*(x)} \delta\Pi^*(x) \wedge \delta\phi^*(y) \right] d^3x d^3y \\
&= \int \left[\delta\pi_i(x) \wedge \delta A^i(y) + \delta\Pi(x) \wedge \delta\phi(y) + \delta\Pi^*(x) \wedge \delta\phi^*(y) \right] \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3x d^3y \ .
\end{aligned}$$

A matriz associada é:

$$\Omega^{(0)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_5 & -I_5 \\ 0 & I_5 & 0_5 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \ .$$

Essa matriz é singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(0)T}(x) = \Big(\alpha(x) \in \mathbb{R} \quad \vec{0} \in \mathbb{R}^5 \quad \vec{0} \in \mathbb{R}^5\Big) \ ,$$

com $\alpha(x)$ arbitrário. O seguinte passo é gerar o seguinte vínculo:

$$\Gamma^{(0)} = \int \alpha(x) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta A^0(x)} d^3x = \int \alpha(x) \big[ie(\Pi^* \phi^* - \Pi\phi) + \partial_j \pi_j\big] d^3x \ .$$

Logo, se tem a seguinte densidade de vínculo:

$$\gamma^{(0)} = \alpha(x) \big[ie(\Pi^* \phi^* - \Pi\phi) + \partial_j \pi_j\big] \cong ie(\Pi^* \phi^* - \Pi\phi) + \partial_j \pi_j \ .$$

Para a seguinte iteração, as seguintes funções são construídas:

- $\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{4} F_j{}^k F^j{}_k + \frac{1}{2}\pi_j^2 + \Pi^*\Pi - \partial_j \phi^* \partial^j \phi + m^2 \phi^* \phi - e^2 A_j A^j \phi^* \phi + ieA^j(\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}_j \phi)$.
- $\mathcal{L}^{(1)} = \pi_j \dot{A}^j + \Pi\dot{\phi} + \Pi^*\dot{\phi}^* + \gamma^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)}$.

Note-se que a variável A^0 não aparece mais nas funções definidas acima; então, as coordenadas do espaço de fase estendido serão:

$$\xi^{(1)T} = \Big(\vec{A} \quad \phi \quad \phi^* \quad -\vec{\pi} \quad \Pi \quad \Pi^* \quad \lambda^{(0)}\Big) \ .$$

Logo, ter-se-á a nova $1-$forma canônica:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= \theta^{(0)} + \int \gamma^{(0)} \delta\lambda^{(0)} d^3x \\ &= \theta^{(0)} + \int \big[ie(\Pi^* \phi^* - \Pi\phi) + \partial_j \pi_j\big] \delta\lambda^{(0)} d^3x \ . \end{aligned}$$

Também:

$$\begin{aligned} \omega^{(1)} = \omega^{(0)} + \int \Bigg[& \frac{\delta\gamma^{(0)}(y)}{\delta\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\delta\gamma^{(0)}(y)}{\delta\phi^*(x)}\delta\phi^*(x) + \frac{\delta\gamma^{(0)}(y)}{\delta\pi^j(x)}\delta\pi^j(x) + \frac{\delta\gamma^{(0)}(y)}{\delta\Pi(x)}\delta\Pi(x) \\ & + \frac{\delta\gamma^{(0)}(y)}{\delta\Pi^*(x)}\delta\Pi^*(x)\Bigg] \wedge \delta\lambda^{(0)}(y) d^3x d^3y \\ = \omega^{(0)} + \int \Bigg[& - ie\Pi(y)\delta\phi(x) + ie\Pi^*(y)\delta\phi^*(x) + \frac{\partial}{\partial y^j}\delta\pi_j(x) - ie\phi(y)\delta\Pi(x) \\ & + ie\phi^*(y)\delta\Pi^*(x)\Bigg] \wedge \delta\lambda^{(0)}(y)\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) d^3x d^3y \ . \end{aligned}$$

A matriz associada a essa 2−forma é:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_3 & 0 & \vec{0} \\ 0 & 0 & 0 & -I_2 & \vec{\Pi}(y) \\ I_3 & 0 & 0 & 0 & \nabla_y \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & \vec{\phi}(y) \\ \vec{0} & -\vec{\Pi}(x) & -\nabla_y & -\vec{\phi}(x) & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \, ,$$

onde foram inseridas as notações:

$$\vec{\Pi}(y) \stackrel{!}{=} \big(-ie\Pi(y) \, ; \, ie\Pi^*(y) \big) \qquad , \qquad \vec{\phi}(y) \stackrel{!}{=} \big(-ie\phi(y) \, ; \, ie\phi^*(y) \big) \, .$$

Entretanto, devido à presença da função delta 3−dimensional a matriz $\Omega^{(1)}$ também pode-se escrever como:

$$\Omega^{(1)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_3 & 0 & \vec{0} \\ 0 & 0 & 0 & -I_2 & \vec{\Pi}(x) \\ I_3 & 0 & 0 & 0 & \nabla_y \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & \vec{\phi}(x) \\ \vec{0} & -\vec{\Pi}(x) & -\nabla_y & -\vec{\phi}(x) & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \, ,$$

A matriz anterior também é singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(1)T}(x) = \Big(\nabla\beta(x) \quad -\vec{\phi}(x)\beta(x) \quad \vec{0} \in \mathbb{R}^3 \quad \vec{\Pi}(x)\beta(x) \quad \beta(x) \Big) \, .$$

Logo, o seguinte vínculo é construído:

$$\Gamma^{(1)} = \int \left[\partial_k \beta \frac{\delta H^{(1)}}{\delta A^k} + ie\phi\beta\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi} - ie\phi^*\beta\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi^*} - ie\Pi\beta\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\Pi} + ie\Pi^*\beta\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\Pi^*} + \beta\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\lambda^{(0)}} \right] d^3x \, .$$

Com:

- $\dfrac{\delta H^{(1)}}{\delta A^k} = 2e^2 A^k\phi^*\phi + ie(\phi^*\partial_k\phi - \phi\partial_k\phi^*) + \partial_\ell F_k{}^\ell \, .$
- $\dfrac{\delta H^{(1)}}{\delta\Pi} = \Pi^* \qquad , \qquad \dfrac{\delta H^{(1)}}{\delta\Pi^*} = \Pi \qquad , \qquad \dfrac{\delta H^{(1)}}{\delta\lambda^{(0)}} = 0 \, .$

- $$\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi} = m^2\phi^* - e^2 A_j A^j\phi^* - ieA^j\partial_j\phi^* - \partial_k(\partial_k\phi^* + ieA^k\phi^*)$$
$$= m^2\phi^* - e^2 A_j A^j\phi^* - ieA^j\partial_j\phi^* - \partial_k\partial_k\phi^* - ie\phi^*\partial_k A^k - ieA^k\partial_k\phi^* \ .$$

- $$\frac{\delta H^{(1)}}{\delta\phi^*} = m^2\phi - e^2 A_j A^j\phi + ieA^j\partial_j\phi - \partial_k(\partial_k\phi - ieA^k\phi)$$
$$= m^2\phi - e^2 A_j A^j\phi + ieA^j\partial_j\phi - \partial_k\partial_k\phi + ie\phi\partial_k A^k + ieA^k\partial_k\phi \ .$$

Com isto:

$$\Gamma^{(1)} = \int\Big\{\partial_k\beta\Big[2e^2A^kA^k\phi^*\phi + ie(\phi^*\partial_k\phi - \phi\partial_k\phi^*) + \partial_\ell F_k{}^\ell\Big] + ie\beta(\phi^*\partial_k\partial_k\phi - \phi\partial_k\partial_k\phi^*)$$
$$+ 2e^2\beta\phi\phi^*\partial_k A^k + 2e^2\beta A^k(\phi\partial_k\phi^* + \phi^*\partial_k\phi)\Big\}d^3x$$
$$= \int\Big\{ -\beta\Big[2e^2\phi^*\phi\partial_k A^k + 2e^2A^k\partial_k(\phi^*\phi) + ie(\phi^*\partial_k\partial_k\phi - \phi\partial_k\partial_k\phi^*) + \underbrace{\partial_k\partial_\ell F_k{}^\ell}_{0}\Big]$$
$$+ ie\beta(\phi^*\partial_k\partial_k\phi - \phi\partial_k\partial_k\phi^*) + 2e^2\beta\phi\phi^*\partial_k A^k + 2e^2\beta A^k\partial_k(\phi^*\phi)\Big\}d^3x = 0 = \mathbf{0} \ .$$

O vínculo acima é identicamente nulo, pelo qual é necessário impor uma condição subsidiária para substituí-lo. Então, a condição de gauge de Coulomb será usada como densidade do vínculo correspondente:

$$\gamma^{(1)\prime} = \partial_j A^j = 0 \ .$$

Logo, se procede construir as seguintes funções na segunda ordem de iteração:

- $\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{4}F_j{}^k F^j{}_k + \frac{1}{2}\pi_j^2 + \Pi^*\Pi - \partial_j\phi^*\partial^j\phi + m^2\phi^*\phi - e^2A_jA^j\phi^*\phi + ieA^j(\phi^*\overset{\leftrightarrow}{\partial}_j\phi)$.
- $\mathcal{L}^{(2)} = \pi_j\dot{A}^j + \Pi\dot{\phi} + \Pi^*\dot{\phi}^* + \gamma^{(0)}\dot{\lambda}^{(0)} + \gamma^{(1)\prime}\dot{\lambda}^{(1)} - \mathcal{H}^{(2)}$.

Logo, as coordenadas do espaço de fase estendido são:

$$\xi^{(2)T} = \Big(\vec{A} \quad \phi \quad \phi^* \quad -\vec{\pi} \quad \Pi \quad \Pi^* \quad \lambda^{(0)} \quad \lambda^{(1)}\Big) \ .$$

A $1-$forma canônica funcional na segunda ordem de iteração é dada por:

$$\theta^{(2)} = \theta^{(1)} + \int\gamma^{(1)\prime}\delta\lambda^{(1)}d^3x = \theta^{(1)} + \int\partial_j A^j\delta\lambda^{(1)}d^3x \ .$$

Logo, se obtém a $2-$forma:

$$\omega^{(2)} = \omega^{(1)} + \int \delta A^j(x) \wedge \delta\lambda^{(1)}(y) \frac{\partial}{\partial y^j} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) d^3x d^3y \ .$$

A matriz associada à 2-forma anterior é:

$$\Omega^{(2)}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_3 & 0 & \vec{0} & -\nabla_x \\ 0 & 0 & 0 & -I_2 & \vec{\Pi} & 0 \\ I_3 & 0 & 0 & 0 & -\nabla_x & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 & \vec{\phi} & 0 \\ \vec{0} & -\vec{\Pi} & \nabla_x & -\vec{\phi} & 0 & 0 \\ \nabla_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

A matriz $\Omega^{(2)}$ é regular e tem por inversa:

$$[\Omega^{(2)}]^{-1}(x;y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & M & 0 & 0 & \frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} \\ 0 & 0 & -\vec{\phi}\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & I_2 & 0 & -\vec{\phi}\frac{1}{\nabla_x^2} \\ -M & \vec{\phi}\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & 0 & \vec{\Pi}\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & \frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & 0 \\ 0 & -I_2 & -\vec{\Pi}\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & 0 & 0 & \vec{\Pi}\frac{1}{\nabla_x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\nabla_x^2} \\ -\frac{\nabla_x}{\nabla_x^2} & \vec{\phi}\frac{1}{\nabla_x^2} & 0 & -\vec{\Pi}\frac{1}{\nabla_x^2} & -\frac{1}{\nabla_x^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

Com isto, os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas originais resultam:

$$\{A^j(x);\pi_k(y)\} = \left(\delta_{jk} - \frac{\partial_{x^j}\partial_{x^k}}{\nabla_x^2}\right)\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad \{\phi(x);\Pi(y)\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}) = \{\phi^*(x);\Pi^*(y)\} \ .$$

Também:

$$\{\phi(x);\pi_j(y)\} = -ie\phi(x)\frac{\partial_{x^j}}{\nabla_x^2}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad \{\phi^*(x);\pi_j(y)\} = ie\phi^*(x)\frac{\partial_{x^j}}{\nabla_x^2}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad ,$$

$$\{\pi_j(x);\Pi(y)\} = -ie\Pi(y)\frac{\partial_{x^j}}{\nabla_x^2}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \quad , \quad \{\pi_j(x);\Pi^*(y)\} = ie\Pi^*(y)\frac{\partial_{x^j}}{\nabla_x^2}\delta^3(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

Como comentário final, note-se que as funções de campo escalares complexas ϕ e ϕ^* podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\phi_1(x) + i\phi_2(x)\big) \qquad , \qquad \phi^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\phi_1(x) - i\phi_2(x)\big) \ ,$$

onde as funções de campo ϕ_1 e ϕ_2 são escalares reais e independentes. Com isto, a densidade lagrangiana (6.12) pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{\text{matéria}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - \frac{1}{2}m^2\phi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - \frac{1}{2}m^2\phi_2^2 \,,$$

o qual corresponde à soma de duas densidades lagrangianas associadas às funções de campo escalares reais ϕ_1 e ϕ_2. Por outro lado, a densidade lagrangiana (6.15), a qual é invariante local $U(1)$ sob a transformação de gauge $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\Lambda$, escrita em termos de ϕ_1 e ϕ_2 resulta:

$$\mathcal{L}_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 + \partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2) + (\phi_1\partial_\mu\phi_2 - \phi_2\partial_\mu\phi_1)A^\mu + \frac{1}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2)A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2^2) \,.$$

Às vezes são empregadas as seguintes notações:

$$p\cdot q \stackrel{!}{=} p_\mu q^\mu \qquad , \qquad p^2 \stackrel{!}{=} p\cdot p = -p_\mu p^\mu \,.$$

Com isto, a lagrangiana anterior pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{\text{mod}} = \frac{1}{2}\left[(\partial\phi_1)^2 + (\partial\phi_2)^2\right] + (\phi_1\partial\phi_2 - \phi_2\partial\phi_1)\cdot A + \frac{1}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2)A^2 - V(\phi_1^2+\phi_2^2) \,, \tag{6.16}$$

com $V(\phi_1^2+\phi_2^2) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)$. Neste ponto é interessante lembrar que a lagrangiana (3.27) do último exemplo do capítulo 3 é dada por:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2) + (q_1\dot{q}_2 - q_2\dot{q}_1)q_3 + \frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2)q_3^2 - V(q_1^2+q_2^2) \,,$$

lembre-se ademais que essa lagrangiana é invariante local $SO(2)$ sob a transformação $q_3 \to q_3 + \dot{\theta}$. É claro que a lagrangiana (6.16) tem a mesma forma que a lagrangiana anterior fazendo a correspondência:

$$x = (t;\vec{x}) \to t \qquad , \qquad \phi_1 \to q_1 \qquad , \qquad \phi_2 \to q_2 \qquad , \qquad A \to q_3 \,;$$

mais ainda, a lei de transformação da coordenada q_3, a qual desempenha o papel de *coordenada calibradora*[4], também guarda a mesma correspondência com a lei de transformação dos A^μ identificando à função arbitrária Λ com o ângulo θ. O fato da similitude entre ambas lagrangianas é devido a que os grupos de simetria $U(1)$ e $SO(2)$ são isomorfos, pois ambos estão relacionados às rotações no plano

[4]Em analogia com o que na literatura é comumente chamado de campo de gauge.

(complexo e real, respectivamente). Prova-se que o isomorfismo é dado segundo a correspondência biunívoca:

$$U(1) \ni e^{-i\theta} \leftrightarrow \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2) \ .$$

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

7.1 Conclusões

- **Da revisão da abordagem geométrica da mecânica analítica e a extensão ao caso contínuo (teoria clássica de campos)**
  O método de Faddeev-Jackiw (F-J) faz uso de objetos tais como a $1-$forma canônica e a forma (pré-)simplética, os quais, vinculados pela operação de derivada exterior, estão definidos sobre a variedade de fase. Assim, uma vez que é envolvido o manejo de formas diferenciais, resulta de grande importância fazer um estudo da abordagem geométrica das formulações lagrangiana e hamiltoniana da mecânica analítica (em sistemas regulares), principalmente da hamiltoniana porque é ela que permite definir os parênteses de Poisson a partir da forma simplética. Por outro lado, também foram introduzidas as chamadas variáveis de Grassmann para estudar uma extensão da mecânica analítica que permita um modelo clássico de uma partícula não-relativística com spin. Seguidamente, seguindo a mesma estrutura da mecânica analítica, se fez uma extensão para o caso de sistemas de liberdade com infinitos graus de liberdade, chamados também de campos clássicos encontrando-se algumas diferenças pelo fato de que, devido à foliação do espaço-tempo, as funções dinâmicas tornam-se funcionais em relação às hipersuperfícies que deixam constante o parâmetro escolhido para a evolução do sistema.

- **Do método de Faddeev-Jackiw**
  No caso regular os parênteses de Poisson (PP) são obtidos a partir da inversa da forma simplética definida sobre a variedade de fase (que tem a estrutura de uma variedade de Poisson). No caso de sistemas singulares, a variedade de fase não é equipada com uma forma simplética, mas com uma pré-simplética, a qual não possui inversa e não permite diretamente gerar os PP. O método de Faddev-Jackiw, com a contribuição de Barcelos-

Neto e Wotzasek, permitem obter os vínculos à forma simplética que são responsáveis da singularidade dela, e que são perfeitamente consistentes com as equações de movimento; logo, a imposição da consistência desses vínculos (ou seja que eles sejam preservados com a evolução do sistema) requer a introdução de variáveis auxiliares, que meramente desempenham o papel de multiplicadores de Lagrange para o problema variacional de extremizar a ação, o que traz como consequência uma extensão do espaço de fase e una redefinição das funções lagrangiana e hamiltoniana e também da $1-$forma canônica, cuja derivada exterior determina uma nova $2-$forma candidata a ser simplética; o processo é repetido iterativamente até conseguir uma forma simplética, cuja inversa permita definir uma estrutura de Poisson no novo espaço de fase. Existem também sistemas nos quais em algum dos passos iterativos do método F-J se obtém um vínculo nulo, tais situações são próprias nos sistemas com simetrias internas[1] (globais); nesses casos aquele vínculo nulo deve ser substituído por alguma condição auxiliar (imposta às coordenadas envolvidas pela simetria interna) que deve estar associada a alguma transformação das outras coordenadas que, junto às transformações locais associadas à simetria interna, deixem invariante a ação (e consequentemente as equações de movimento).

7.2 Perspectivas

- **Estudo da teoria clássica de campos nas coordenadas do cone de luz à la Faddeev-Jackiw.**
  O estudo apresentado nos capítulos 6 e 7 foi realizado na dinâmica instantânea, que consiste folhar o espaço-tempo com hipersuperfícies espaciais planas e é a abordagem padrão; no entanto, existem outras quatro diferentes maneiras de folhar o espaço-tempo, sendo uma delas a chamada dinâmica do frente de luz, que consiste em uma transformação de coordenadas: das coordenadas usuais às coordenadas do cone de luz, na qual duas coordenadas têm as orientações das geratrizes do cone. Uma consequência de mudar a dinâmica é que sistemas que são regulares na dinâmica instantânea, aparentemente resultam ser singulares na outra dinâmica e consequentemente o procedimento F-J pode ser implementado. O estudo poderia ser

[1] Simetrias que envolvem algumas das coordenadas do espaço de configuração, para sistemas discretos

desenvolvido tanto para teorias livres quanto para teorias em interação (que aliás apresentam simetrias internas).

- **Extensão da mecânica analítica com graus de liberdade grassmannianos à teoria de campos.**
  A principal motivação para considerar variáveis ímpares no estudo da mecânica analítica (capítulo 4) foi, além de presentar uma versão não relativística para a dinâmica de uma partícula de spin 1/2, estudar teorias de campos que também envolvam campos com a álgebra de Grassmann, por exemplo, o campo de Dirac livre e a eletrodinâmica fermiônica, na qual intervêm tanto campos bosônicos (campo eletromagnético) quanto fermiônicos (campo de Dirac); uma vez que a eletrodinâmica fermiônica é uma teoria com simetria de gauge (e consequentemente singular), o método de Faddeev-Jackiw pode ser implementado.

- **Estudo de simetrias internas no método de Faddeev-Jackiw.**

- **Abordagem do método de Faddeev-Jackiw via integração funcional.**

Apêndice A

Algumas definições úteis

1. **Monoide**
   Seja M um conjunto e considere-se a operação binária $* : M \times M \to M$. O par $(M, *)$ é um monoide se a operação $*$ é associativa e existe o elemento identidade.

2. **Grupo**
   Seja G um conjunto e seja o mapa $\cdot : G \times G \to G$. O par $(G, \cdot)$ é um grupo se é um monoide e existe o inverso de qualquer elemento (em relação à operação $\cdot$). Quando a operação $\cdot$ é comutativa diz-se que o grupo é abeliano.

3. **Anel**
   Sejam o conjunto R e as operações binárias $+ : R \times R \to R$ e $\cdot : R \times R \to R$, chamadas de adição e multiplicação, respectivamente. A terna $(R, +, \cdot)$ é um anel se $(R, +)$ é um grupo abeliano, $(R, \cdot)$ é um monoide e a multiplicação é distributiva em relação à adição.

4. **Corpo**
   Um corpo é um anel comutativo tal que qualquer elemento distinto de 0 (identidade da adição) possui inverso multiplicativo. De maneira equivalente, dados um conjunto K e as operações binárias de adição $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$, definidas sobre K, a terna $(K, +, \cdot)$ é um corpo se $(K, +)$ e $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ são grupos abelianos e a multiplicação é distributiva em relação à adição.

5. **Módulo**
   Sejam R um anel e M um conjunto, considere-se a operação binária de adição $+ : M \times M \to M$ e definam-se as operações unitárias[1] $\cdot : R \times M \to M$ e $* : M \times R \to M$, chamadas de multiplicação à esquerda e multiplicação à direita, respectivamente.

[1] Dados um anel/corpo $\mathscr{A}$ com identidade (multiplicativa) $\mathbf{1} \in \mathscr{A}$ e um conjunto X, uma operação $\cdot : \mathscr{A} \times X \to X$ é dita unitária se $\mathbf{1} \cdot x = x$, para qualquer $x \in X$.

5.1. A terna $(M, +, \cdot)$ é um $R-$módulo esquerdo se $(M, +)$ é um grupo abeliano e a multiplicação à esquerda $\cdot$ é compatível[2] com a multiplicação no anel e distributiva em relação às adições em M e R.

5.1.1. Seja N um subgrupo de $(M, +)$; então a terna $(N, +|_N, \cdot|_N)$ é um $R-$submódulo esquerdo se a restrição de $\cdot$ em N é fechada.

5.2. A terna $(M, +, *)$ é um $R-$módulo esquerdo se $(M, +)$ é um grupo abeliano e a multiplicação à direita $*$ é compatível com a multiplicação no anel e distributiva em relação às adições em M e R.

Quando o anel R é comutativo, não há diferença entre $R-$módulos esquerdos e $R-$módulos direitos; nesse caso eles são chamados simplesmente de $R-$módulos.

6. **Espaço vetorial**
Sejam K um corpo e V um conjunto; definem-se a operações de adição $+ : V \times V \to V$ e multiplicação por um escalar $\cdot : K \times V \to V$. A terna $(V, +, \cdot)$ é um $K-$espaço vetorial se $(V, +)$ é um grupo abeliano e $\cdot$ é compatível com a multiplicação no corpo e distributiva em relação às adições em K e V. Habitualmente os elementos de V e K são chamados de vetores e escalares, respectivamente.

6.1. Seja W um subgrupo de $(V, +)$; então a terna $(W, +|_W, \cdot|_W)$ é um $K-$subespaço vetorial se a restrição de $\cdot$ em W é fechada.

[2]Sejam um anel/corpo $\mathscr{A}$ e um conjunto X, as multiplicações $\odot : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ e $\cdot : \mathscr{A} \times X \to X$ são ditas compatíveis se para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$ e $x \in X$ cumpre-se que $(\alpha \odot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.

Apêndice B

Elementos de Cálculo Variacional

O cálculo variacional é o ramo da matemática encargada do estudo do problema da extremização de um tipo especial de quantidades, que recebe o nome de funcional. Em termos práticos um funcional pode ser visto como um mapeamento entre um espaço de funções y o conjunto dos números reais. Matematicamente um funcional que depende de n funções e das derivadas delas até a $m-$ésima ordem pode ser expresso por meio da integral:

$$v[y_1(x),\cdots,y_n(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y_1(x);\cdots;y_n(x)\left|\frac{dy_1}{dx}(x),\cdots,\frac{d^m y_1}{dx^m}(x);\cdots\right.\right.$$
$$\left.\left.;\frac{dy_n}{dx}(x),\cdots,\frac{d^m y_n}{dx^m}(x)\right| x\right) dx\ .$$

Para a maioria dos fins bastará considerar funcionais que dependem apenas de uma função y e até a primeira derivada dela, isto é:

$$v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y(x);\frac{dy}{dx}(x);x\right) dx\ ,$$

Para este tipo de funcionais define-se o **incremento** segundo:

$$\Delta v \doteq v[y(x)+\delta y(x)] - v[y(x)]\ .$$

Quando o incremento do funcional $v[y(x)]$ pode ser escrito como:

$$\Delta v = L[y(x);\delta y] + \beta\big(y(x);\delta y\big)\text{máx}|\delta y|\ , \tag{B.1}$$

onde L é um funcional linear em relação a δy e

$$\text{máx}|\delta y| \to 0 \quad \text{implica que} \quad \beta\big(y(x);\delta y\big) \to 0\ ,$$

o primeiro termo em (B.1) é chamado de **variação** do funcional e é denotado por δv.

Considere-se uma família monoparamétrica de curvas $y(x;\alpha) = y(x) + \alpha\delta y$, pode-se provar que a variação do funcional $v[y(x)]$, tal como foi definida, pode ser obtida segundo: [60]

$$\delta v = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} v[y(x) + \alpha\delta y]\right)\Big|_{\alpha=0} . \tag{B.2}$$

TEOREMA:
Se o funcional $v[y(x)]$ alcança um valor extremo para $y = y_0(x)$, sendo y_0 uma função pertencente à região sobre a qual o funcional está definido, então para $y = y_0(x)$ ter-se-á que $\delta v = 0$.

Daqui, se tem que a anulação da variação de um funcional é uma **condição necessária** para que o funcional alcance um valor extremo; este resultado permitirá encontrar a curva y_0, a qual recebe o nome de *extremal*.

Seja $y(x)$ a curva extremal para o funcional $v[y(x)]$. Logo, considerando o funcional $v[y(x;\alpha)] = v[y(x) + \alpha\delta y]$, ter-se-á que $y(x) = y(x;0)$ é a extremal deste último funcional quando $\alpha = 0$. Ou seja, resolver o problema variacional para o funcional $v[y(x)]$ equivale a resolvê-lo para o funcional auxiliar $v[y(x;\alpha)]$ em $\alpha = 0$. É preciso mencionar também que as curvas da família $y(x;\alpha)$ pode ser entendida como um *deslocamento* da curva $y(x)$ em um mesmo sistema de coordenadas; esse tipo de transformação é conhecida como *transformação ativa*.

O seguinte será dar solução ao problema variacional considerando extremos fixos em x_1 y x_2; assim, para a família de curvas em consideração ter-se-á que $y(x_1,\alpha) = y(x_1)$ y $y(x_2,\alpha) = y(x_2)$, o que evidentemente implica:

$$\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0 . \tag{B.3}$$

Logo, para o funcional $v[y(x;\alpha)]$ se tem:

$$v[y(x) + \alpha\delta y] = \int_{x_1}^{x_2} F\left(y(x;\alpha); \frac{\partial}{\partial x} y(x;\alpha); x\right) dx \stackrel{!}{=} \Phi(\alpha) .$$

Uma vez que a curva extremal é obtida para $\alpha = 0$, a função Φ também apresentará

um extremo em $\alpha = 0$. Derivando em relação a α resulta:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y(x;\alpha)} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x;\alpha) + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x;\alpha) \right)} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x;\alpha) \right) \right] dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y(x;\alpha)} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x;\alpha) \right)} \cdot \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx \, .$$

Posto que $y(x;0) = y(x)$ ter-se-á:

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=0}}_{\delta v} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] \right)\bigg|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)} \cdot \frac{d}{dx}(\delta y) \right] dx \, . \tag{B.4}$$

Integrando por partes o segundo termo na integral anterior se consegue:

$$\delta v = \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \cdot \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \right) \right] \delta y \, dx \, .$$

Da condição de extremos fixos (B.3) e levando em conta a condição necessária para o valor extremo do funcional $v[y(x)]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \right) \right] \delta y \, dx = 0 \, . \tag{B.5}$$

Neste ponto é importante observar que na definição de $v[y(x)]$ está assumindo-se (a priori) a existência de $\frac{dy}{dx}$; logo, $y(x)$ deve ser uma função contínua em x. Similarmente, a assunção da existência de $\frac{\partial}{\partial x} y(x;\alpha)$ sugere que $y(x;\alpha)$ também é contínua em x. Assim, posto que $\alpha \delta y = y(x;\alpha) - y(x)$ e α independe de x, observa-se que δy necessariamente deve ser uma função contínua em x.

Para continuar com a solução do problema variacional em questão é preciso utilizar o seguinte lema:

LEMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO VARIACIONAL:
Seja ϑ uma função contínua em $[x_1; x_2]$ tal que $\int_{x_1}^{x_2} \vartheta(x)\eta(x)dx = 0$ para qualquer η contínua, então $\vartheta(x) = 0$ para $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Logo, uma vez que δy é uma função contínua em $[x_1; x_2]$, em conformidade com o lema fundamental do cálculo variacional, em (B.5) ter-se-á :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right) = 0\,, \tag{B.6}$$

A equação (B.6) é de segunda ordem em y e é conhecida como *equação de Euler*. A solução de essa equação diferencial fornece a curva extremal buscada.

OBSERVAÇÃO:
Dado um funcional de ordem n, $v[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y; y'; \cdots; y^{(n)}; x)dx$, com $y^{(k)} = \dfrac{d^k y}{dx^k}$, a variação dele é dada segundo:

$$\begin{aligned}\delta v &= \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y' + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right]dx \\ &= \sum_{i=0}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{n-i-1}(-1)^j\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i+j+1)}}\right)\delta y^{(i)}\Big|_{x_1}^{x_2}\right\} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right)\right]\delta y dx\,.\end{aligned}$$

Se o problema variacional é de extremos fixos, a equação de Euler será:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right) = 0\,.$$

Também é interessante estudar o problema variacional mantendo fixa a curva extremal (assumindo-la conhecida) mas cambiando o sistema de coordenadas (por exemplo una rotação dos eixos), esse tipo de transformação é conhecido como *transformação passiva*. Observe-se que, embora a curva permaneça fixa, a forma funcional que a descreve será diferente para cada sistema de coordenadas; isto é, uma transformação nas coordenadas *induz* uma transformação na função no

argumento do funcional em estudo. Logo, ter-se-ão as seguintes transformações:

$$x \to x' = x + \delta x \qquad , \qquad y(x) \to y'(x') = y(x) + \delta y(x) \; . \tag{B.7}$$

Note-se que $y'(x') = y'(x + \delta x)$; logo, fazendo uma expansão de Taylor até a primeira ordem resulta $y'(x') = y'(x) + \dfrac{dy'}{dx}(x) \cdot \delta x$. Com isto:

$$\delta y = y'(x') - y(x) = \underbrace{y'(x) - y(x)}_{\bar{\delta} y(x)} + \frac{dy'}{dx}(x)\delta x = \bar{\delta} y + \frac{d}{dx}(y + \delta y)\delta x \approx \bar{\delta} y + \frac{dy}{dx}(x)\delta x \; . \tag{B.8}$$

Observe-se que $\bar{\delta} y$, que será chamado de *variação no mapeamento*, tem a mesma forma da variação δy do caso anterior[1]. Bem como foi feito no caso de uma transformação ativa, os extremos da curva serão fixados segundo $y'(x_1) = y(x_1)$ y $y'(x_2) = y(x_2)$, é dizer, $\bar{\delta} y = 0$ nos extremos.

Devido à primeira transformação em (B.7) se tem:

$$dx' = \left(1 + \frac{d}{dx}\delta x\right) dx \; , \tag{B.9}$$

o que significa que implicitamente se tem um cambio na medida de integração; consequentemente, para poder exigir que a variação no mapeamento seja nula nos extremos também se deverá impor que $x_1 = x_1'$ y $x_2 = x_2'$. Pode-se provar que com essas condições a variação do funcional vem dada por:

$$\delta v = v[y'(x')] - v[y(x)] \; .$$

Em primeiro lugar, considere-se o seguinte:

$$\begin{aligned} F\left(y'(x'); \frac{dy'}{dx'}(x'); x'\right) &= F\left(y(x) + \delta y; \frac{dy}{dx} + \delta\left(\frac{dy}{dx}\right); x + \delta x\right) \\ &\approx F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x \\ &\overset{!}{=} F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) + \delta F \; . \end{aligned} \tag{B.10}$$

[1] Considerando uma transformação ativa no sistema, ou seja, mantendo fixo o sistema de coordenadas e variando a curva.

Por outro lado:

$$v[y'(x')] = \int_{x'_1}^{x'_2} F\left(y'(x'); \frac{dy'}{dx'}(x'); x'\right) dx' \,,$$

fazendo a mudança da variável de integração $x' = x + \delta x$ se obtém:

$$\begin{aligned} v[y'(x')] &= \int_{x_1}^{x_2} \left[F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) + \delta F\right] \left(1 + \frac{d}{dx}\delta x\right) dx \\ &\approx \int_{x_1}^{x_2} \left[F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) + \delta F + F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) \cdot \frac{d}{dx}\delta x\right] dx \,. \end{aligned}$$

Logo:

$$v[y'(x')] - v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\delta F + F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) \cdot \frac{d}{dx}\delta x\right] dx \,.$$

Levando em conta (B.8) se infere:

$$\delta\left(\frac{dy}{dx}\right) = \overline{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2y}{dx^2}\delta x \,. \tag{B.11}$$

Logo, substituindo (B.8) e (B.11) em (B.10) se encontra:

$$\delta F = \overline{\delta} F + \frac{d}{dx} F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) \delta x \,.$$

Do acima:

$$\begin{aligned} v[y'(x')] - v[y(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\overline{\delta} F + \frac{d}{dx} F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) \delta x + F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) \cdot \frac{d}{dx}\delta x\right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\overline{\delta} F + \frac{d}{dx}\left(F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right) \delta x\right)\right] dx \,. \end{aligned} \tag{B.12}$$

Por outro lado, observe-se o seguinte:

$$\begin{aligned} F\left((y; \frac{dy}{dx}; x) + (\overline{\delta}y; \overline{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right); 0)\right) &\approx F\left(y; \frac{dy}{dx}; x\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)}; \frac{\partial F}{\partial x}\right) \cdot (\overline{\delta}y; \overline{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right); 0) \\ &= F\left(y; \frac{dy}{dx}; x\right) + \frac{\partial F}{\partial y}\overline{\delta}y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx}\right)}\overline{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \,. \end{aligned}$$

Logo, levando em conta que $\bar{\delta}F = F\left(y+\bar{\delta}y; \frac{dy}{dx}+\bar{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right); x\right) - F\left(y(x); \frac{dy}{dx}(x); x\right)$:

$$\bar{\delta}F = \frac{\partial F}{\partial y}\bar{\delta}y + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right) \ .$$

Substituindo esse último resultado em (B.12):

$$v[y'(x')] - v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\bar{\delta}y + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]dx + F\left(y; \frac{dy}{dx}; x\right)\delta x\Big|_{x_1}^{x_2} \ ,$$

logo, sob a consideração de que $\delta x = 0$ nos extremos, o último termo na expressão anterior se anula. Assim, resulta:

$$v[y'(x')] - v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\bar{\delta}y + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)}\bar{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]dx \ . \tag{B.13}$$

Observe-se que de (B.9):

$$\frac{d}{dx'} = \frac{1}{\left(1+\frac{d}{dx}\delta x\right)}\frac{d}{dx} \approx \left(1-\frac{d}{dx}\delta x\right)\frac{d}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'} + \frac{d}{dx}\delta x\cdot\frac{d}{dx} \ .$$

Logo:

$$\frac{d}{dx}\delta y = \left(\frac{d}{dx'} + \frac{d}{dx}\delta x\cdot\frac{d}{dx}\right)y'(x') - \frac{d}{dx}y(x) = \delta\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d}{dx}\delta x\cdot\frac{d}{dx}y'(x') \ .$$

Usando (B.11):

$$\frac{d}{dx}\delta y = \bar{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{d^2y}{dx^2}\delta x + \frac{d}{dx}\delta x\cdot\frac{d}{dx}y'(x') \ . \tag{B.14}$$

Também, derivando (B.8) em relação a x:

$$\frac{d}{dx}\delta y = \frac{d}{dx}\bar{\delta}y + \frac{d^2y}{dx^2}\delta x + \frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\delta x \ . \tag{B.15}$$

De (B.15) e (B.14):

$$\frac{d}{dx}\bar{\delta}y - \bar{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\delta x\frac{d}{dx}y'(x') - \frac{dy}{dx}\frac{d}{dx}\delta x = \frac{d}{dx}\delta x \cdot \frac{d}{dx}\delta y \approx 0 \, .$$

Assim, o seguinte resultado foi encontrado:

$$\bar{\delta}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\bar{\delta}y \, .$$

Em (B.13):

$$v[y'(x')] - v[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \bar{\delta}y + \frac{\partial F}{\partial\left(\frac{dy}{dx}\right)} \cdot \frac{d}{dx}\bar{\delta}y\right] dx \, . \tag{B.16}$$

Como já foi mencionado, $\bar{\delta}y$ tem a forma da variação δy do caso da transformação ativa. Mais ainda, o fato de ter imposto as condições para os extremos fixos permite afirmar que ambas expressões são equivalentes. Logo, comparando (B.16) com (B.4) conclui-se que para uma transformação passiva com extremos fixos:

$$\delta v = v[y'(x')] - v[y(x)] \, ; \tag{B.17}$$

Assim, o problema da transformação passiva, com as restrições já mencionadas, resulta ser o mesmo problema variacional, o qual permite usar a condição necessária para obter a curva extremal do funcional $v[y(x)]$; i. é.: igualando a 0 a expressão apresentada em (B.17).

Não é difícil ver que, com efeito, se obtêm novamente as equações de Euler:

$$\begin{aligned}\delta v &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \bar{\delta} y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \cdot \frac{d}{dx} \bar{\delta} y \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \bar{\delta} y + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \cdot \bar{\delta} y \right) - \bar{\delta} y \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \right) \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \right) \right] \bar{\delta} y dx + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \cdot \bar{\delta} y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \, .\end{aligned} \tag{B.18}$$

Como já havia sido imposto que a variação no mapeamento seja nula nos extremos, o segundo termo na expressão anterior se anulará. Logo, em virtude do lema fundamental do cálculo variacional, ter-se-á:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \right) = 0 \, , \tag{B.19}$$

que, tal como foi previsto, coincide com (B.6).

Como comentário adicional, é importante observar o seguinte:

- Quando se considera uma transformação ativa no problema variacional, o fato de que $\frac{d}{dx} \delta y = \delta \left(\frac{dy}{dx} \right)$ permite escrever (B.4) da seguinte maneira:

$$\delta v = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \delta \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx \, . \tag{B.20}$$

- Para o problema variacional sob uma transformação passiva (com extremos

fixos), usando (B.17) em (B.13) resulta:

$$\delta v = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \bar{\delta} y + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{dy}{dx} \right)} \bar{\delta} \left(\frac{dy}{dx} \right) \right] dx \equiv \int_{x_1}^{x_2} \bar{\delta} F dx \ . \tag{B.21}$$

Assim, as equações (B.20) e (B.21) deixam em manifesto que a variação do funcional pode ser obtida integrando a variação (no mapeamento no caso da transformação ativa) da função no argumento do próprio funcional.

Nos problemas variacionais, a primeira variação de um funcional da forma $v[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y; y'; \cdots; y^{(n)}; x) dx \left(y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k} \right)$ permite definir a chamada *derivada funcional* segundo:

$$\delta v = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\delta v}{\delta y(x)} \delta y(x) \right\} dx \ .$$

Logo, para um funcional de ordem n ter-se-á:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta v}{\delta y} \delta y dx = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \sum_{j=0}^{n-i-1} (-1)^j \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i+j+1)}} \right) \delta y^{(i)} \Big|_{x_1}^{x_2} \right\} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \right] \delta y dx \ .$$

Se o problema for de extremos fixos $\left(\delta y^{(i)}(x_1) = 0 = \delta y^{(i)}(x_2) \right)$, ter-se-á:

$$\frac{\delta v}{\delta y} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \ .$$

Suponha-se que $\delta y(x) = \delta(x - x_0)$, com $x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$; então, a variação do funcional com essa variação (que será chamado de J) resulta :

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta v}{\delta y(x)} \delta(x - x_0) dx = \frac{\delta v}{\delta y(x_0)} \ .$$

Logo, levando em conta que $\delta v = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta y] \right) \Big|_{\alpha=0}$ se obtém:

$$\frac{\delta v}{\delta y(x_0)} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} v[y(x) + \alpha \delta(x - x_0)] \right) \Big|_{\alpha=0} \ .$$

A função delta de Dirac permite construir um funcional particular:

$$\mathrm{Eval}_{x_0}[y] = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\delta(x - x_0)dx = y(x_0) \qquad ; \qquad x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2 \ .$$

Uma vez que Eval_{x_0} mapeia uma função y no número $y(x_0)$ é um funcional. Agora observe-se o seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathrm{Eval}_{x_0}}{\delta y(x)} &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \mathrm{Eval}_{x_0}[y(x') + \alpha\delta(x' - x)] \right) \Big|_{\alpha=0} \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{x_1}^{x_2} \Big(y(x') + \alpha\delta(x' - x) \Big) \delta(x' - x_0)dx' \right] \Big|_{\alpha=0} \\
&= \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} \int_{x_1}^{x_2} \delta(x' - x)\delta(x' - x_0)dx' = \delta(x_0 - x) \ .
\end{aligned}$$

Assim, se obteve o seguinte resultado:

$$\frac{\delta \mathrm{Eval}_{x_0}}{\delta y(x)} = \frac{\delta y(x_0)}{\delta y(x)} = \delta(x_0 - x) \ .$$

É possível definir variações de ordens superiores para um funcional $v[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(y; y'; x)dx$ ($y' = \frac{dy}{dx}$). Define-se a segunda variação do funcional $v[y]$ segundo:

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} v[y(x) + \alpha\delta y] \right) \Big|_{\alpha=0} \ .$$

A segunda variação também pode ser obtida a partir da transformação $y \to y + \delta y$. Em primeiro lugar, para a função F se tem o seguinte:

$$\begin{aligned}
\Delta F &= F(y + \delta y; y' + \delta y'; x) - F(y; y'; x) \\
&= \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'}_{\delta F} + \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y')^2}_{\delta^2 F} \Big] + \cdots
\end{aligned}$$

Logo, a segunda variação do funcional é dada por:

$$\delta^2 v = \int \delta^2 F(y; y'; x)dx = \int \frac{\delta^2 v[y]}{\delta y(x_1)\delta y(x_2)} \delta y(x_1)\delta y(x_2)dx_1 dx_2 \ .$$

A segunda variação permite determinar se a curva y, para a qual o funcional alcança um valor extremo, é uma curva de maximização ($\delta^2 v < 0$) ou minimização

$(\delta^2 v > 0)$.

Em geral, a $n-$ésima variação de um funcional é definida segundo:

$$\delta^n v = \left(\frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} v[y(x) + \alpha \delta y]\right)\Big|_{\alpha=0} = \int \frac{\delta^n v[y]}{\delta y(x_1) \cdots \delta y(x_n)} \delta y(x_1) \cdots \delta y(x_n) dx_1 \cdots dx_n \ .$$

Existem também problemas variacionais que apresentam restrições adicionais às funções dentro do argumento do próprio funcional, esse tipo de problemas são chamados de *problemas variacionais com um extremo condicionado*. No caso geral, considere-se o seguinte funcional:

$$v[y_1, \cdots, y_n] = \int_{x_1}^{x_2} F(y_1, \cdots, y_n; y_1', \cdots y_n'; x) dx \ .$$

o problema consiste em determinar a curva que extremiza o funcional, mas sob um conjunto de condições $\varphi_i(y_1, \cdots y_n; x) = 0$ $(i = 1, \cdots, m < n)$.

Para enfrentar este problema se constrói um novo funcional segundo:

$$v^*[y_1, \cdots, y_n; \lambda_1, \cdots, \lambda_m] = \int_{x_1}^{x_2} \left(F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i\right) dx \stackrel{!}{=} \int_{x_1}^{x_2} F^* dx \ .$$

Agora o seguinte é estudar o extremo não-condicionado deste novo funcional, ou seja, resolver o sistema de equações de Euler:

$$\frac{\partial F^*}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F^*}{\partial y_j'}\right) = 0 \quad (j = 1, \cdots, n) \ ,$$

completado com as m equações $\varphi_i(y_1, \cdots y_n; x) = 0$, correspondentes às restrições. Assim, se tem um sistema de $(m + n)$ equações para as n funções y_i e os m multiplicadores de Lagrange λ_j. As curvas extremais obtidas com este método para o funcional v^* também serão soluções do problema variacional original.

Apêndice C

Teorema de Euler de las funciones homogéneas

Em primeiro lugar, uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita $k-$homogênea (ou homogênea de grau k) se ela é tal que:

$$f(\lambda\vec{x}) = \lambda^k f(\vec{x}) \quad ; \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \, . \tag{C.1}$$

O teorema de Euler estabelece que se f é uma função $k-$homogênea, se verifica:

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} \equiv \vec{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = kf \, .$$

Prova:
Pode-se considerar o λ como uma variável contínua e derivar (C.1) com respeito a λ :

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}f(\lambda\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial\lambda}[\lambda^k f(\vec{x})]$$
$$\frac{\partial f(\lambda\vec{x})}{\partial(\lambda\vec{x})}\cdot\frac{\partial(\lambda\vec{x})}{\partial\lambda} = k\lambda^{k-1}f(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \lambda^k\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial(\lambda\vec{x})}\cdot\vec{x} = k\lambda^{k-1}f(\vec{x}) \, .$$

Logo:

$$\lambda\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial\vec{x}}\frac{\partial\vec{x}}{\partial(\lambda\vec{x})}\cdot\vec{x} = kf(\vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\cdot\vec{x} = kf(\vec{x}) \, .$$

Finalmente:

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}\cdot\vec{x} = kf \, .$$

Apêndice D

Expressões locais das 1-formas θ e $\Lambda^*\theta$

Seja uma função suave $F : M \to N$, onde M e N são variedades diferenciáveis de dimensões m e n, respectivamente, o *pullback* apresenta, entre outras, as seguintes propriedades:

(i). $F^*g = g\,{}^oF$.

(ii). $F^*(g\alpha) = (F^*g)\cdot(F^*\alpha)$.

(iii). $F^*d\alpha = d(F^*\alpha)$, onde d é a operação de derivada exterior.

Onde $g : N \to \mathbb{R}$ é uma função escalar e α é uma forma diferencial em N.

Considere-se agora uma carta $(\mathscr{U}, \phi)$ para M tal que para $p \in \mathscr{U}$:

$$\phi(p) = (x^1; \cdots ; x^m) \in \mathbb{R}^m \ ;$$

ademais, se introduzem as funções de projeção local $x^b_\phi : M \to \mathbb{R}$ tais que $x^b_\phi(p) = x^b$. Agora, seja $F(p) \in \mathscr{V}$, considere-se uma carta $(\mathscr{V}, \psi)$ para N tal que:

$$\psi\big(F(p)\big) = (y^1; \cdots ; y^n) \in \mathbb{R}^n \ ;$$

similarmente, se introduzem as funções $y^a_\psi : N \to \mathbb{R}$, com $y^a_\psi\big(F(p)\big) = y^a$. A diferencial dy^a_ψ é uma $1-$forma em N, então $F^*dy^a_\psi$ será uma $1-$forma em M.

Fazendo uso da propriedade (iii) se tem que $F^*dy^a_\psi = d(F^*y^a_\psi)$ e fazendo uso da propriedade (i) obtemos:

$$F^*dy^a_\psi = d(y^a_\psi\,{}^oF) \qquad , \qquad \text{onde } \ (y^a_\psi\,{}^oF) : M \to \mathbb{R} \ .$$

Levando em conta que a diferencial de uma função $f : M \to \mathbb{R}$ pode ser escrita em

termos da base $\left\{dx^b_\phi\right\}_{b=1}^m$ como $df = \dfrac{\partial f}{\partial x^b_\phi}dx^b_\phi = \dfrac{\partial}{\partial x^b}(f\ {}^o\phi^{-1})dx^b_\phi$ pode-se escrever:

$$F^*dy^a_\psi = \frac{\partial}{\partial x^b}(y^a_\psi\ {}^oF\ {}^o\phi^{-1})dx^b_\phi \qquad , \qquad \text{onde } \ (y^a_\psi\ {}^oF\ {}^o\phi^{-1}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\ .$$

Posto que $(y^a_\psi\ {}^oF\ {}^o\phi^{-1})(x^1;\cdots;x^m) = y^a$, é possível escrever simplesmente:

$$F^*dy^a_\psi = \frac{\partial y^a}{\partial x^b}dx^b_\phi\ . \tag{D.1}$$

Considere-se agora uma $1-$forma α em N, que em termos da base local $\left\{dy^a_\psi\right\}_{a=1}^n$ escreve-se como $\alpha = \alpha_a dy^a_\psi$. Então, o pullback de α em relação a F será:

$$F^*\alpha = F^*(\alpha_a dy^a_\psi) \overset{(ii)}{=} (F^*\alpha_a)\cdot(F^*dy^a_\psi) \overset{(i)}{=} (\alpha_a\ {}^oF)\frac{\partial y^a}{\partial x^b}dx^b_\phi\ .$$

Assim, foi obtido o seguinte resultado:

$$F^*\alpha = (\alpha_a\ {}^oF)\frac{\partial y^a}{\partial x^b}dx^b_\phi \qquad , \qquad \text{com } \ \alpha = \alpha_a dy^a_\psi\ . \tag{D.2}$$

Com esse último resultado já é possível determinar a expressão da $1-$forma de Liouville $\theta = \pi^*\alpha$ em temos das coordenadas locais. Fazendo uso de (D.2) ter-se-á:

$$\theta = \pi^*\alpha = (\alpha_a\ {}^o\pi)\frac{\partial q^a}{\partial \xi^\mu}d\xi^\mu_\psi \qquad , \qquad \text{onde } \ \alpha = \alpha_a dq^a_\phi\ .$$

Levando em conta que as coordenadas locais em $T^*\mathbb{Q}$ são:

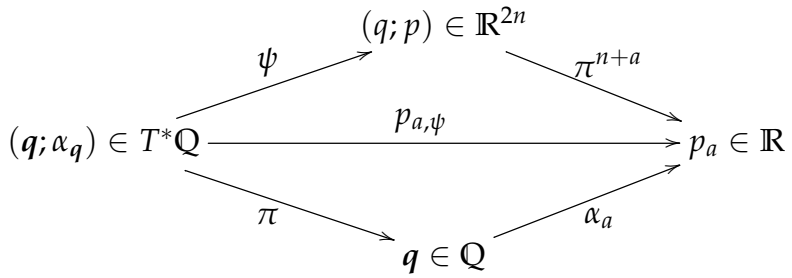
$$(\xi^1,\cdots,\xi^n;\xi^{n+1},\cdots,\xi^{2n}) = (q^1,\cdots q^n;p_1,\cdots,p_n)\ ,$$

pode-se escrever θ da seguinte maneira:

$$\theta = (\alpha_a\ {}^o\pi)\frac{\partial q^a}{\partial q^b}dq^b_\psi + (\alpha_a\ {}^o\pi)\frac{\partial q^a}{\partial p_b}dp_{b,\psi} = (\alpha_a\ {}^o\pi)\delta^a_b dq^b_\psi = (\alpha_a\ {}^o\pi)dq^a_\psi\ . \tag{D.3}$$

Agora se deve levar em conta que um elemento de $T^*\mathbb{Q}$ tem a forma $(\boldsymbol{q};\alpha_{\boldsymbol{q}})$, onde α é uma $1-$forma em $\mathbb{Q}$ e consequentemente $\alpha(\boldsymbol{q}) = (\boldsymbol{q};\alpha_{\boldsymbol{q}})$. Agora se constrói o

seguinte diagrama:



Então, observa-se que ${\alpha_a}^o\pi = p_{a,\psi}$ e substituindo em (D.3) se obtém:

$$\theta = p_{a,\psi} dq^a_\psi \stackrel{!}{=} p_a dq^a \ .$$

O seguinte será determinar a expressão local para a $1-$forma $\tilde{\theta} = \Lambda^*\theta$. Em primeiro lugar se deve levar em conta que θ pode-se reescrever como:

$$\theta = \xi^{n+a}_\psi d\xi^a_\psi \ ,$$

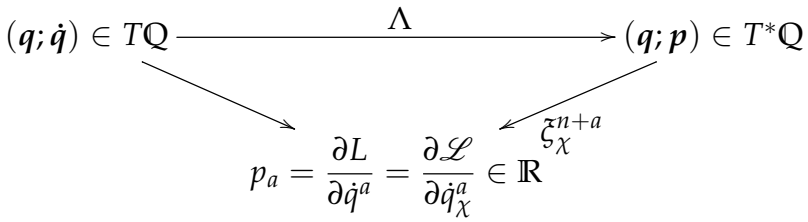
Logo, fazendo uso de (D.2):

$$\Lambda^*\theta = ({\xi^{n+a}_\psi}^o\Lambda)\frac{\partial \xi^a}{\partial \zeta^b} d\zeta^b_\chi \ ,$$

mas $\dfrac{\partial \xi^a}{\partial \zeta^b} = \dfrac{\partial q^a}{\partial q^b} = \delta^a_b$ e com isso:

$$\Lambda^*\theta = ({\xi^{n+a}_\psi}^o\Lambda) dq^a_\chi \ .$$

Neste ponto é conveniente construir o seguinte diagrama:



Assim, resulta que $\tilde{\theta}$ pode ser escrito como:

$$\tilde{\theta} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{q}^a_\chi} dq^a_\chi \stackrel{!}{=} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} dq^a \ .$$

Apêndice E

Prova das propriedades dos parênteses de Poisson

O primeiro será verificar se a operação binária $\{\cdot;\cdot\} : C^\infty(\mathbb{F}) \times C^\infty(\mathbb{F}) \to C^\infty(\mathbb{F})$ cuja representação local é dada por:

$$\{F;G\} = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu} ,$$

conhecida como parênteses de Poisson, satisfaz os quatro axiomas de uma estrutura de Poisson.

1. **Antissimetria:**

$$\{G;F\} = \frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\omega^{\nu\mu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu} = -\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu} = -\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu} = -\{F;G\} .$$

2. **Bilinearidade:**

$$\begin{aligned}\{\alpha F + \beta G;H\} &= \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}(\alpha F + \beta G)\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} \\ &= \alpha\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} + \beta\frac{\partial G}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} \\ &= \alpha\{F;H\} + \beta\{G;H\} .\end{aligned}$$

   Similarmente se prova a linearidade à direita.

3. **Identidade de Jacobi:**

Primeiro serão exprimidos os seguintes parênteses:

$$\begin{aligned}\Big\{F;\{G;H\}\Big\} &= \Big\{F;\frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}\Big\} = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\left(\frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}\right)\\ &= \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\alpha}\frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}+\frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\beta}\right)\\ &= \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\alpha}\frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}+\omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\beta}\,.\end{aligned}$$

Similarmente se obtêm:

$$\begin{aligned}\Big\{G;\{H;F\}\Big\} &= \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \xi^\beta}+\omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\beta}\,,\\ \Big\{H;\{F;G\}\Big\} &= \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\alpha}\frac{\partial G}{\partial \xi^\beta}+\omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\beta}\,.\end{aligned}$$

Somando estes três resultados e reorganizando termos se obtém:

$$\Big\{F;\{G;H\}\Big\}+\Big\{G;\{H;F\}\Big\}+\Big\{H;\{F;G\}\Big\} = A+B+C\,,$$

com:

$$\begin{aligned}A &= \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\beta}\frac{\partial G}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\alpha}+\underbrace{\omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\alpha}\frac{\partial G}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\mu}}_{A'}\,,\\ B &= \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\beta}\frac{\partial H}{\partial \xi^\mu}+\underbrace{\omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\alpha}\frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}}_{B'}\,,\\ C &= \omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\beta}+\underbrace{\omega^{\mu\nu}\omega^{\alpha\beta}\frac{\partial F}{\partial \xi^\beta}\frac{\partial G}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^\nu \partial \xi^\alpha}}_{C'}\,.\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo $(\,\mu\ \nu\ \alpha\ \beta\,) \to (\,\alpha\ \beta\ \nu\ \mu\,)$:

$$\begin{aligned}A' &= \omega^{\alpha\beta}\omega^{\nu\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\alpha} = -\omega^{\alpha\beta}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\alpha}\,,\\ B' &= \omega^{\alpha\beta}\omega^{\nu\mu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\mu} = -\omega^{\alpha\beta}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\mu}\,,\\ C' &= \omega^{\alpha\beta}\omega^{\nu\mu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\nu} = -\omega^{\alpha\beta}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\nu}\,.\end{aligned}$$

Com isto, $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$. Então, finalmente:

$$\Big\{F;\{G;H\}\Big\} + \Big\{G;\{H;F\}\Big\} + \Big\{H;\{F;G\}\Big\} = 0\ .$$

4. **Regra de Leibniz:**

$$\begin{aligned}\{F;GH\} &= \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \xi^\nu}(GH) = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\left(G\frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} + \frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}H\right)\\ &= G\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial \xi^\nu} + \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}H = G\{F;H\} + \{F;G\}H\ .\end{aligned}$$

A seguir será demonstrado que esses PP também satisfazem as seguintes propriedades complementárias:

1. $$\{\xi^\mu;F\} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \xi^\alpha}\omega^{\alpha\nu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\nu} = \delta^\mu_\alpha\omega^{\alpha\nu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\nu} = \omega^{\mu\nu}\frac{\partial F}{\partial \xi^\nu}\ .$$

2. $$\begin{aligned}\{F;M(G_1;\cdots;G_A)\} &= \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial M}{\partial \xi^\nu} = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial M}{\partial G_\alpha}\frac{\partial G_\alpha}{\partial \xi^\nu}\\ &= \frac{\partial M}{\partial G_\alpha}\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G_\alpha}{\partial \xi^\nu} = \frac{\partial M}{\partial G_\alpha}\{F;G_\alpha\}\ .\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\{F;G\} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\right) = \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial \xi^\nu} + \frac{\partial^2 F}{\partial t\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\\ &= \frac{\partial F}{\partial \xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\left(\frac{\partial G}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial \xi^\nu}\\ &= \left\{F;\frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial t};G\right\}\ .\end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{F;G\} &\overset{(2.55)}{=} \Big\{\{F;G\};H\Big\} + \frac{\partial}{\partial t}\{F;G\}\\ &= \Big\{F;\{G;H\}\Big\} + \Big\{G;\{H;F\}\Big\} + \left\{F;\frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial t};G\right\}\\ &= \left\{F;\dot G - \frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{G;\frac{\partial F}{\partial t} - \dot F\right\} + \left\{F;\frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial F}{\partial t};G\right\}\\ &= \{F;\dot G\} + \{G;-\dot F\} = \{F;\dot G\} + \{\dot F;G\}\ .\end{aligned}$$

Por último será provar o teorema de Poisson, o qual estabelece que o PP de duas constantes de movimento é também uma constante de movimento. Em primeiro lugar, uma vez que duas funções dinâmicas F e G são constantes de movimento se tem:

$$\dot F = \{F;H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \qquad , \qquad \dot G = \{G;H\} + \frac{\partial G}{\partial t} = 0\ .$$

Por outro lado, fazendo uso da identidade de Jacobi:

$$\Big\{F;\{G;H\}\Big\}+\Big\{G;\{H;F\}\Big\}+\Big\{H;\{F;G\}\Big\}=0$$
$$\Big\{F;-\frac{\partial G}{\partial t}\Big\}+\Big\{G;\frac{\partial F}{\partial t}\Big\}+\Big\{H;\{F;G\}\Big\}=0\ .$$

Então:

$$\Big\{H;\{F;G\}\Big\}=\Big\{F;\frac{\partial G}{\partial t}\Big\}+\Big\{\frac{\partial F}{\partial t};G\Big\}=\frac{\partial}{\partial t}\{F;G\}\ .$$

Com isto:

$$\Big\{\{F;G\};H\Big\}+\frac{\partial}{\partial t}\{F;G\}=\frac{d}{dt}\{F;G\}=0\ .$$

Apêndice F

Prova das propriedades dos parênteses de Poisson no superespaço

F.1 Propriedades do setor ímpar dos PP

Os parênteses de Poisson de duas funções dinâmicas no superespaço podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\{F;G\} = \{F;G\}_\xi + \{F;G\}_\eta \ ,$$

onde o primeiro termo corresponde ao setor par, enquanto que o segundo, ao setor ímpar. As propriedades dos parênteses $\{\ ;\ \}_\xi$ foram provadas no apêndice anterior. A presente seção tem por objetivo provar as propriedades dos parênteses $\{\ ;\ \}_\eta$, que são definidos segundo:

$$\{F;G\}_\eta \doteq -\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|F||G|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} \ .$$

1. **Paridade:**

$$|\{F;G\}_\eta| = (|F|+1) + (|G|+1) = |F| + |G| \ .$$

2. **Antissimetria graduada:**

$$\begin{aligned}\{G;F\}_\eta &= -\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|G||F|}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha} \\ &= (-1)^{|G||F|}\left(-(-1)^{|G||F|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} + \frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}\right) \\ &= -(-1)^{|F||G|}\left(-\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|G||F|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}\right) = -(-1)^{|F||G|}\{F;G\}_\eta \ .\end{aligned}$$

3. **Identidade de Jacobi graduada:**

Em primeiro lugar resulta conveniente exprimir o termo $(-1)^{|F||H|}\Big\{F;\{G;H\}_\eta\Big\}_\eta$:

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{|F||H|}\left[-\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L}{\partial\pi_\alpha}\{G;H\}_\eta + (-1)^{|F||\{G;H\}_\eta|}\frac{\partial_R}{\partial\theta^\alpha}\{G;H\}_\eta\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}\right]\\
&= (-1)^{|F||H|}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R G}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta} - (-1)^{|F||H|+|G|}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L\partial_L H}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&\quad - (-1)^{|H|(|F|+|G|)}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R H}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta} + (-1)^{|H|(|F|+|G|+1)}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L\partial_L G}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&\quad + (-1)^{|F||G|+|H|}\frac{\partial_R\partial_R G}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} - (-1)^{|F||G|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L H}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}\\
&\quad - (-1)^{|G|(|F|+|H|+1)}\frac{\partial_R\partial_R H}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|G|(|F|+|H|)}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L G}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

De maneira similar se obtém para $(-1)^{|G||F|}\Big\{G;\{H;F\}_\eta\Big\}_\eta$:

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{|G||F|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R H}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta} - (-1)^{|G||F|+|H|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L\partial_L F}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&\quad - (-1)^{|F|(|G|+|H|)}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R F}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta} + (-1)^{|F|(|G|+|H|+1)}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L\partial_L H}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&\quad + (-1)^{|G||H|+|F|}\frac{\partial_R\partial_R H}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha} - (-1)^{|G||H|}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L F}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}\\
&\quad - (-1)^{|H|(|G|+|F|+1)}\frac{\partial_R\partial_R F}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|H|(|G|+|F|)}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L H}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

Também, para $(-1)^{|H||G|}\Big\{H;\{F;G\}_\eta\Big\}_\eta$:

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{|H||G|}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R F}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta} - (-1)^{|H||G|+|F|}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L\partial_L G}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&\quad - (-1)^{|G|(|H|+|F|)}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R G}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta} + (-1)^{|G|(|H|+|F|+1)}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L\partial_L F}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&\quad + (-1)^{|H||F|+|G|}\frac{\partial_R\partial_R F}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha} - (-1)^{|H||F|}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L G}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\\
&\quad - (-1)^{|F|(|H|+|G|+1)}\frac{\partial_R\partial_R G}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|F|(|H|+|G|)}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L F}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\,.
\end{aligned}
$$

O seguinte será somar esses três resultados; agrupando convenientemente:

$$
\begin{aligned}
(-1)^{|F||H|}&\left(\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R G}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta}-\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L G}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\right)+(-1)^{|F||G|}\left(-\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L H}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}\right.\\
&\left.+\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R H}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta}\right)+(-1)^{|G||H|}\left(-\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L F}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}+\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R F}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta}\right)\\
&+(-1)^{|H|(|F|+|G|)}\left(-\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R H}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta}+\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L H}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}\right)\\
&+(-1)^{|G|(|F|+|H|)}\left(\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L G}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}-\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R G}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta}\right)\\
&+(-1)^{|F|(|G|+|H|)}\left(-\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L\partial_R F}{\partial\pi_\alpha\partial\theta^\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta}+\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}\frac{\partial_R\partial_L F}{\partial\theta^\alpha\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\right)\\
&+\left(-(-1)^{|F||H|+|G|}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}+(-1)^{|F|(|G|+|H|+1)}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\right)\frac{\partial_L\partial_L H}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&+\frac{\partial_R\partial_R H}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\left(-(-1)^{|G|(|F|+|H|+1)}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}+(-1)^{|G||H|+|F|}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}\right)\\
&+\left((-1)^{|H|(|F|+|G|+1)}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}-(-1)^{|H||G|+|F|}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\beta}\right)\frac{\partial_L\partial_L G}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&+\frac{\partial_R\partial_R G}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\left((-1)^{|F||G|+|H|}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}-(-1)^{|F|(|H|+|G|+1)}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\right)\\
&+\left(-(-1)^{|G||F|+|H|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\beta}+(-1)^{|G|(|H|+|F|+1)}\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\beta}\right)\frac{\partial_L\partial_L F}{\partial\pi_\alpha\partial\pi_\beta}\\
&+\frac{\partial_R\partial_R F}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}\left(-(-1)^{|H|(|G|+|F|+1)}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}+(-1)^{|H||F|+|G|}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\right)\ .
\end{aligned}
$$

Usando o fato de que $\dfrac{\partial_L\partial_R F}{\partial z^A\partial z^B}=\dfrac{\partial_R\partial_L F}{\partial z^B\partial z^A}$ é claro que as primeiras seis parcelas são nulas. Por outro lado, é visível que os termos dentro dos parênteses nas outras seis parcelas são da mesma forma; então, bastará analisar apenas um deles, por exemplo o último, que trocando os fatores da primeira parcela resulta:

$$
(-1)^{|H||F|+|G|}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\beta}+(-1)^{|H||F|+|G|}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\beta}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\neq 0\ .
$$

Note-se que ambos termos estão contraídos com $\dfrac{\partial_R\partial_R F}{\partial\theta^\alpha\partial\theta^\beta}$; logo, fazendo

$\alpha \leftrightarrow \beta$ para algum desses termos e levando em conta que $\frac{\partial_R \partial_R F}{\partial z^A \partial z^B} = (-1)^{|A||B|} \frac{\partial_R \partial_R F}{\partial z^B \partial z^A}$, encontra-se que a soma resulta nula. Assim, o seguinte resultado foi obtido:

$$(-1)^{|F||H|}\Big\{F;\{G;H\}_\eta\Big\}_\eta + (-1)^{|G||F|}\Big\{G;\{H;F\}_\eta\Big\}_\eta + (-1)^{|H||G|}\Big\{H;\{F;G\}_\eta\Big\}_\eta = 0\ .$$

4. **Regra de Leibniz graduada:**

$$\begin{aligned}
\{F;GH\}_\eta &= -\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L}{\partial\pi_\alpha}(GH) + (-1)^{|F||GH|}\frac{\partial_R}{\partial\theta^\alpha}(GH)\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} \\
&= -\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\left[\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}H + (-1)^{|G|}G\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\right] \\
&\qquad + (-1)^{|F|(|G|+|H|)}\left[(-1)^{|H|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}H + G\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\right]\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} \\
&= -\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha}H + (-1)^{|F|(|G|+|H|)+|H|+|H|(|F|+1)}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}H \\
&\qquad - (-1)^{|G|+(|F|+1)|G|}G\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|F|(|G|+|H|)}G\frac{\partial_R H}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha} \\
&= \left(-\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L G}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|F||G|}\frac{\partial_R G}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L F}{\partial\pi_\alpha}\right)H \\
&\qquad + (-1)^{|F||G|}G\left(-\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha} + (-1)^{|F||H|}\frac{\partial_R F}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial_L H}{\partial\pi_\alpha}\right) \\
&= \{F;G\}_\eta H + (-1)^{|F||G|}G\{F;H\}_\eta\ .
\end{aligned}$$

F.2 Propriedades dos PP $\mathbb{Z}_2-$graduados

Os parênteses de Poisson de duas funções dinâmicas no super-espaço são definidas segundo:

$$\{F;G\}_\epsilon = \frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\ .$$

A seguir serão demonstradas as propriedades que estes parênteses satisfazem:

1. **Paridade:**

$$\begin{aligned}
|\{F;G\}_\epsilon| &= \left|\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\right| + |\sigma_\epsilon^{AB}| + \left|\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\right| \\
&= \big(|F|+|A|\big) + \big(|A|+|B|+\epsilon\big) + \big(|G|+|B|\big) = |F|+|G|+\epsilon\ .
\end{aligned}$$

2. **Antissimetria graduada:**

$$\begin{aligned}
\{G;F\}_\epsilon &= \frac{\partial_R G}{\partial z^B}\sigma_\epsilon^{BA}\frac{\partial_L F}{\partial z^A} = (-1)^{|B|(|G|+1)}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\sigma_\epsilon^{BA}(-1)^{|A|(|F|+1)}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\\
&= (-1)^{|B|(|G|+1)+|A|(|F|+1)}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\sigma_\epsilon^{BA}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\\
&= (-1)^{|B|(|G|+1)+|A|(|F|+1)}\left((-1)^{\left|\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\right||\sigma^{BA}|+\left|\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\right|+\left|\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\right|+|\sigma^{BA}|\left|\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\right|}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{BA}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\right)\\
&= (-1)^{|B|(|G|+1)+|A|(|F|+1)+(|G|+|B|)(|A|+|B|+\epsilon)+(|G|+|B|)(|F|+|A|)+(|A|+|B|+\epsilon)(|F|+|A|)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\times\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma^{BA}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\\
&= (-1)^{|G||F|+|B||A|+\epsilon(|G|+|B|+|F|+|A|)}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{BA}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\\
&= (-1)^{|G||F|+|B||A|+\epsilon(|G|+|B|+|F|+|A|)}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\Big(-(-1)^{(|A|+\epsilon)(|B|+\epsilon)}\sigma_\epsilon^{AB}\Big)\frac{\partial_L G}{\partial z^B}\\
&= -(-1)^{|F||G|+\epsilon(|F|+|G|)+\epsilon}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L G}{\partial z^B} = -(-1)^{(|F|+\epsilon)(|G|+\epsilon)}\{F;G\}_\epsilon\,.
\end{aligned}$$

3. **Regra de Leibniz graduada:**

- $$\begin{aligned}
\{F;GH\}_\epsilon &= \frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L}{\partial z^B}(GH) = \frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma^{AB}\left[\frac{\partial_L G}{\partial z^B}H+(-1)^{|G||B|}G\frac{\partial_L H}{\partial z^B}\right]\\
&= \frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L G}{\partial z^B}H+(-1)^{|G||B|}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}G\frac{\partial_L H}{\partial z^B}\\
&= \{F;G\}_\epsilon H+(-1)^{|G||B|}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\left((-1)^{|G|(|H|+|B|)}\frac{\partial_L H}{\partial z^B}G\right)\\
&= \{F;G\}_\epsilon H+(-1)^{|G||H|}\{F;H\}_\epsilon G\\
&= \{F;G\}_\epsilon H+(-1)^{|G||H|}\Big((-1)^{|G|(|F|+|H|+\epsilon)}G\{F;H\}_\epsilon\Big)\\
&= \{F;G\}_\epsilon H+(-1)^{(|F|+\epsilon)|G|}G\{F;H\}_\epsilon\,.
\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
\{FG;H\}_\epsilon &= \frac{\partial_R}{\partial z^A}(FG)\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L H}{\partial z^B} = \left[(-1)^{|G||A|}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}G+F\frac{\partial_R G}{\partial z^A}\right]\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L H}{\partial z^B}\\
&= (-1)^{|G||A|}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}G\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L H}{\partial z^B}+F\frac{\partial_R G}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L H}{\partial z^B}\\
&= (-1)^{|G||A|}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\Big((-1)^{|G|(|A|+|B|+\epsilon)}\sigma_\epsilon^{AB}G\Big)\frac{\partial_L H}{\partial z^B}+F\{G;H\}_\epsilon\\
&= (-1)^{|G|(|B|+\epsilon)}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\Big((-1)^{|G|(|H|+|B|)}\frac{\partial_L H}{\partial z^B}G\Big)+F\{G;H\}_\epsilon\\
&= (-1)^{|G|(|B|+\epsilon)+|G|(|H|+|B|)}\frac{\partial_R F}{\partial z^A}\sigma_\epsilon^{AB}\frac{\partial_L H}{\partial z^B}+F\{G;H\}_\epsilon\\
&= (-1)^{|G|(|H|+\epsilon)}\{F;H\}_\epsilon G+F\{G;H\}_\epsilon\,.
\end{aligned}$$

Referências

[1] Dirac, P. A. M. (1925). The fundamental equations of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 109*(752), 642-653.

[2] Berezin, F. A., & Marinov, M. S. (1975). Classical spin and Grassman algebra. *Pis' ma v Zhurnal Ehksperimental'noj i Teoreticheskoj Fiziki, 21*(11), 678-680.

[3] Berezin, F. A., & Marinov, M. S. (1977). Particle spin dynamics as the grassmann variant of classical mechanics. *Annals of Physics, 104*(2), 336-362.

[4] Casalbuoni, R. (1976). On the quantization of systems with anticommuting variables. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970), 33*(1), 115-125.

[5] Casalbuoni, R. (1976). The classical mechanics for Bose-Fermi systems. *Il Nuovo Cimento A (1965-1970), 33*(3), 389-431.

[6] Bergmann, P. G. (1949). Non-linear field theories. *Physical Review, 75*(4), 680.

[7] Bergmann, P. G., & Brunings, J. H. (1949). Non-linear field theories II. Canonical equations and quantization. *Reviews of Modern Physics, 21*(3), 480.

[8] Bergmann, P. G., Penfield, R., Schiller, R., & Zatzkis, H. (1950). The Hamiltonian of the general theory of relativity with electromagnetic field. *Physical Review, 80*(1), 81.

[9] Anderson, J. L., & Bergmann, P. G. (1951). Constraints in covariant field theories. *Physical Review, 83*(5), 1018.

[10] Dirac, P. A. M. (1950). Generalized hamiltonian dynamics. *Canadian journal of mathematics, 2*, 129-148.

[11] Dirac, P. A. M. (1951). The Hamiltonian form of field dynamics. *Canadian Journal of Mathematics, 3*, 1-23.

[12] Faddeev, L., & Jackiw, R. (1988). Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. *Physical Review Letters, 60*(17), 1692.

[13] Barcelos-Neto, J., & Wotzasek, C. (1992). Faddeev-Jackiw quantization and constraints. *International Journal of Modern Physics A, 7*(20), 4981-5003.

[14] Barcelos-Neto, J., & Wotzasek, C. (1992). Symplectic quantization of constrained systems. *Modern Physics Letters A,* 7(19), 1737-1747.

[15] Prokhorov, L. V., & Shabanov, S. V. (2011). *Hamiltonian mechanics of gauge systems*. Cambridge University Press.

[16] Newton, I. (1987). Philosophiæ naturalis principia mathematica (Mathematical principles of natural philosophy). *London (1687), 1687.*

[17] Lagrange, J. L. (1788). *Mécanique Analytique* (2 vols.), Éditions Jacques Gabay.

[18] Hamilton, S. W. R. (1834). On a general method in dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society, part II, pp. 247–308*.

[19] José, J., & Saletan, E. (1998). *Classical dynamics: A contemporary approach*. Cambridge University Press.

[20] Lemos, N. A. (2007). *Mecânica Analítica*. Editora Livraria da Física.

[21] Mendes, R. M. N. (2017). *Cálculo, Variedades e Formas Diferenciais*. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Brasil.

[22] Hitchin, N. (2012). Differentiable manifolds. *Lecture Notes, Oxford University.*

[23] Pérez, J. (2007). *Geometría y Topología*. Universidad de Granada. España.

[24] Hernández, L. J. (2003). *Introducción a la Geometría Diferencial*. Universidad de La Rioja. España.

[25] Da Silva, A. C. (2002). *Introduction to symplectic and Hamiltonian Geometry*. IMPA. Brasil.

[26] Loja, R., & Mărcuț, I. (2015). *Lectures on Poisson Geometry*. Springer Science & Business Media.

[27] De León, M., & Rodrigues, P. R. (1989). *Methods of differential geometry in analytical mechanics* (Vol. 158). Elsevier.

[28] Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1994). *Mecánica: Curso de física teórica. Volumen 1*. Editorial Reverté.

[29] Oller, J.A. (2013). *Mecánica Teórica*. Departamento de Física. Universidad de Murcia. España.

[30] Lahiri, A. (2011). *Lecture notes on differential geometry for physicists*. S. N. Bose National Centre for Basic Sciences. India.

[31] Abraham, R., & Marsden, J. E. (1987). *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[32] Dunne, G. V., Jackiw, R., & Trugenberger, C. A. (1990). "Topological"(Chern-Simons) quantum mechanics. *Physical Review D, 41*(2), 661.

[33] Seiler, W. M. (1995). Involution and constrained dynamics. II. The Faddeev-Jackiw approach. *Journal of Physics A: Mathematical and General, 28*(24), 7315.

[34] Sundermeyer, K. (1982). Constrained dynamics with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model.

[35] Christ, N. H., & Lee, T. D. (1980). Operator ordering and Feynman rules in gauge theories. *Physical Review D, 22*(4), 939.

[36] Jackiw, R. (1993). (Constrained) quantization without tears. *arXiv preprint hep-th/9306075.*

[37] García, J. A., & Pons, J. M. (1997). Equivalence of Faddeev–Jackiw and Dirac approaches for gauge theories. *International Journal of Modern Physics A*, 12(02), 451-464.

[38] Alice, R. (2007). *Supermanifolds: theory and applications*. World Scientific.

[39] Leites, D. A. (1980). Introduction to the theory of supermanifolds. *Russian Mathematical Surveys, 35*(1), 1.

[40] Carmeli, C., Caston, L., & Fioresi, R. (2011). *Mathematical foundations of supersymmetry* (Vol. 15). European Mathematical Society.

[41] Buchbinder, I. L., & Kuzenko, S. M. (1998). *Ideas and methods of supersymmetry and supergravity, or, A walk through superspace.* Institute of Physics Pub..

[42] Gitman, D., & Tyutin, I. V. (2012). *Quantization of fields with constraints*. Springer Science & Business Media.

[43] Covolo, T., & Poncin, N. (2012). *Notes on supergeometry.* Université du Luxembourg. Grand Duchy of Luxembourg.

[44] Soroka, D. V., & Soroka, V. A. (2003). Exterior differentials in superspace and Poisson brackets. *Journal of High Energy Physics, 2003*(03), 001.

[45] Voronov, T. (2002). *Quantization, Poisson Brackets and Beyond: London Mathematical Society Regional Meeting and Workshop on Quantization, Deformantions, and New Homological and Categorical Methods in Mathematical Physics, July 6-13, 2001, University of Manchester Institute of Science and Technology, Manchester, United Kingdom* (Vol. 315). American Mathematical Soc..

[46] Henneaux, M., & Teitelboim, C. (1994). *Quantization of gauge systems*. Princeton university press.

[47] Pazetti, M. (2007). *Pseudomecânica: partículas de spins inteiros, semi-inteiros e fracionários* (Tese de doutorado). Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista.

[48] Manavella, E. C. (2012). Faddeev-Jackiw formalism for constrained systems with Grassmann dynamical field variables. *International Journal of Modern Physics A, 27*(24), 1250145.

[49] Govaerts, J. (1990). Hamiltonian reduction of first-order actions. *International Journal of Modern Physics A, 5*(18), 3625-3640.

[50] Einstein, A. (1905). On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der physik, 17*(10), 891-921.

[51] Fatibene, L., & Francaviglia, M. (2003). *Natural and Gauge Natural Formalism for Classical Field Theories: A Geometric Perspective including Spinors and Gauge Theories.* Springer Science & Business Media.

[52] Dirac, P. A. (1949). Forms of relativistic dynamics. *Reviews of Modern Physics, 21*(3), 392.

[53] Nakahara, M. (2003). *Geometry, topology and physics*. CRC Press.

[54] Greiner, W., & Reinhardt, J. (2013). *Field quantization*. Springer Science & Business Media.

[55] Ruben, A., & Geraldo, P. J. (1995). *An introduction to geometrical physics*. World scientific.

[56] Saunders, D. J., Saunders, D., & Saunders, D. J. (1989). *The geometry of jet bundles* (Vol. 142). Cambridge University Press.

[57] Crnkovic, C., & Witten, E. (1987). Covariant description of canonical formalism in geometrical theories. *Three hundred years of gravitation*, 676-684.

[58] Kalinowski, M. W., & Piechocki, W. (1996). Symplectic structure for field theory. *Acta Phys. Polon.*, 27, 2735-2740.

[59] Sharapov, A. A. (2015). On Covariant Poisson Brackets in Field Theory. In *Geometric Methods in Physics* (pp. 177-188). Birkhäuser, Cham.

[60] Elsgoltz, L. (1969). *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*. Editorial Mir.

[61] Krasnov, M. L., & Makarenko, G. I., & Kiseliov, A. I. (1992). *Cálculo variacional (ejemplos y problemas)*. Editorial Mir.