



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Paola Geovanna Patzi Aquino

Sistemas de Controle em Domínios Estratificados

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Paola Geovanna Patzi Aquino

*Sistemas de Controle em Domínios
Estratificados*

Orientador:
Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

19 de fevereiro de 2015

Patzi Aquino, Paola Geovanna.

Sistemas de Controle em Domínios Estratificados / Paola Geovanna

Patzi Aquino. – São José do Rio Preto, 2015

83 f. : il.

Orientador: Geraldo Nunes Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Matemática. 2. Teoria do controle. 3. Domínios Estratificados. 4. Estabilidade. 5. Hamilton-Jacobi, Equações. 6. Sistemas dinâmicos diferenciais. I. Silva, Geraldo Nunes. II. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.91.01

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Paola Geovanna Patzi Aquino

Sistemas de Controle em Domínios Estratificados

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Análise Aplicada, junto ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
Professor Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Igner Luis Domini dos Santos
Professor Doutor
UNESP - Ilha Solteira

Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar
Professor Doutor
Universidade de Bio-Bio - Chile

São José do Rio Preto, 19 de fevereiro de 2015.

Aos meus amados pais,
Vitaliano e Juana.
Aos meus queridos irmãos,
Juan José, Luis e Lizeth.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por tudo o que ele me deu. Sem Ele ao meu lado, nada disso seria possível, obrigado por me proteger, cuidar, iluminar, guiar-me ao longo de meu caminho e por me dar a força para superar os obstáculos e as dificuldades que surgiram em minha vida.

Aos meus Pais agradeço por todo o apoio e amor que me deram durante este tempo, que, apesar da distância estavam sempre lá me dando força e coragem para seguir em frente. Muito obrigada papai Vitaliano e mamãe Juana por me dar apoio incondicional e me ensinar a não desanimar e ceder diante de nada. Saibam que amo muito vocês.

Aos meus irmãos Juan José, Luis e Lizeth pelo carinho e apoio incondicional que me deram, durante todo este tempo. Obrigada por suas palavras de incentivo quando eu mais precisava. Apesar da distancia sempre estão em meu coração.

Ao meu orientador Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, por todos os sábios conselhos que me deu, pelo tempo e paciência que teve para mim durante meu trabalho.

Aos meus professores que neste andar pela vida, influenciaram com suas lições e experiências, em formar-me como uma pessoa de bem e preparada para os desafios que tem a vida. Ao meu Prof. Rolando Condori com quem eu comecei a gostar de matemática e ao meu orientador da graduação Prof. Dr. Efraín Cruz.

A todos os meus amigos da Pós-Graduação e todos os professores.

Não me esqueço de minhas amigas e amigos na Bolívia, pelas palavras de apoio que me deram durante estes dois anos.

A Fabiola pela companhia e amizade durante este tempo. E a todas as pessoas em

especial a Gislaine, que me ajudaram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

“Eu tenho a minha própria versão de otimismo.
Se eu não posso atravessar uma porta eu vou atravessar outra porta.
Algo maravilhoso virá, não importa o quão escuro este o presente”.

Rabindranath Tagore

Neste trabalho caracterizaremos sistemas dinâmicos na forma dos chamados domínios estratificados. Bressan e Hong [9] foram os primeiros a definir e trabalhar em domínios estratificados. Grosso modo, estes são uma coleção de domínios disjuntos, cada um tendo sua própria dinâmica; mas não se exige que seus domínios sejam proximamente suaves e nem wedged. Estes termos foram introduzidos por P. Wolenski e R. Barnard em [10].

Primeiramente, estabeleceremos condições Hamiltonianas para caracterizar invariância fraca e forte para sistemas não Lipschitz em domínios estratificados.

Depois, estudamos condições Hamiltonianas para sistemas fracamente e fortemente decrescentes e apresentamos condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada e finalmente apresentamos o problema tipo Mayer em domínios estratificados em que mostramos que a função valor é a única solução semicontínua inferior de uma generalização adequada da clássica equação Hamilton-Jacobi-Bellman, para a dinâmica estratificada.

Palavras-chave: Domínios Estratificados, Invariância Fraca e Forte, Sistemas Fracamente e Fortemente Decrescentes, Funções de Lyapounov, Equação de Hamilton Jacobi Bellman.

ABSTRACT

In this work will characterize dynamical systems in the form of the so-called stratified domain. Bressan and Hong [9] were the first to define and work in stratified domains. Roughly speaking, these are a collection of disjoint domains, each having its own dynamics; but not requiring that their domains are proximally smooth and not wedged. These terms were introduced by P. Wolenski and R. Barnard in [10].

At first, we will establish Hamiltonian conditions to characterize weak and strong invariance for systems non-Lipschitz in stratified domains.

Secondly, we study the Hamiltonian conditions for systems weakly and strongly decreasing and present conditions that guarantee global asymptotic stability for a stratified dynamics and finally we present the problem Mayer type in stratified domains where we show that the value function is the unique lower semicontinuous solution of an appropriate generalization of the classical Hamilton-Jacobi-Bellman equation for stratified dynamics.

Keywords: Stratified Domains, Strong and Weak Invariance, Weakly and Strongly Decreasing Systems, Lyapounov Functions, Hamilton Jacobi Bellman Equation.

1	Introdução	p. 12
2	Preliminares	p. 15
2.1	Inclusões Diferenciáveis	p. 16
2.2	Soluções de Euler	p. 19
2.3	Inclusões em variedades diferenciais	p. 21
2.4	Invariância	p. 28
2.4.1	Condições Suficientes para Invariância Forte no caso não Lipschitz	p. 30
3	Sistemas Estratificados	p. 33
3.1	Domínios Estratificados	p. 33
3.2	Dinâmica Estratificada	p. 34
3.2.1	Velocidades Essenciais	p. 38
3.3	Invariância em Sistemas Estratificados	p. 42
3.3.1	Invariância Forte em Sistemas Estratificados	p. 42
3.3.2	Invariância Fraca em Domínios Estratificados	p. 50
4	Teoria de Lyapounov	p. 54
4.1	Sistema Estratificado Fracamente Decrescentes	p. 56

4.2	Teoria de Lyapounov em Domínios Estratificados	p. 58
5	A Equação Proximal de Hamilton-Jacobi-Bellman	p. 65
5.1	Sistemas Fortemente Decrescentes	p. 65
5.2	Sistemas Fortemente Crescentes	p. 67
5.3	A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman	p. 69
5.4	Funções Verificação	p. 74
6	Conclusões	p. 76
	Referências Bibliográficas	p. 77
7	Anexo	p. 79

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Bressan e Hong [9] foram os primeiros a definir e trabalhar em domínios estratificados. Grosso modo, estes são uma coleção de domínios disjuntos, cada um tendo sua própria dinâmica, mas a dinâmica global não possui as mesmas propriedades desejáveis que se tem na teoria clássica. P. Wolenski e R. Barnard em [10] caracterizam sistemas invariantes sob as hipóteses de que os domínios estratificados sejam proximamente suaves e wedged. Estes termos serão introduzidos mais a frente neste trabalho.

Sistemas estratificados, parecem ser um modelo atraente para muitas situações da vida real. O sistema é descontínuo, mas tem estrutura que pode e deve ser explorada. A filosofia básica é que o subsistema em cada estrato é muito bom, mas o sistema como um todo não encaixa em qualquer teoria existente. A questão é, então, encontrar a forma de remendar as peças. Neste contexto há muito a ser feito; invariância, a teoria de Hamilton Jacobi, Estabilidade, Principio do máximo, entre outros. Mas também já se tem feito algumas coisas. Em [10], caracterizam a invariância fraca e forte em domínios estratificados.

Com este mesmo enfoque Zhiping Rao e H. Zidane em [11] em seu trabalho “Hamilton-Jacobi-Bellman equations on multi-domains” estabelecem os resultados da caracterização de uma função valor e os Princípios de comparação para as equações de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) apropriadas para um sistema de HJB sobre domínios estratificados. A partir destes trabalhos surgem ideias para seguir trabalhando em estes domínios estratificados, que tem à dinâmica estratificada não Lipschitz.

Nos estudamos condições Hamiltonianas para sistemas fracamente decrescentes e apre-

sentamos condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada, além de estudar sistemas fortemente decrescentes e o Problema de Mayer para domínios estratificados. Na teoria clássica temos caracterizações nos casos em que nossa dinâmica satisfaça certas hipóteses padrão e seja Lipschitz contínua, coisa que já não temos pois nossa dinâmica estratificada não é Lipschitz contínua.

A teoria de estabilidade desempenha um papel central em teoria de sistemas e engenharia. Um critério simples, mas de grande alcance para garantir essa estabilidade assintótica pode ser dada em termos de funções de Lyapounov. O método foi introduzido por A. M. Lyapounov em 1892; em teoria de equações diferenciais [8]. Com a mesma ideia que se tem em equações diferenciais ordinárias se pode caracterizar a estabilidade segundo Lyapounov em inclusões diferenciais. Em nosso trabalho caracterizamos isto para domínios estratificados, introduzindo um novo hamiltoniano denominado essencial, inspirados em [10].

Já entrando no Problema tipo Mayer em domínios estratificados, será mostrado que a função valor é a única solução semicontínua inferiormente de uma generalização adequada da clássica equação de HJB, para a dinâmica estratificada, de outro ponto de vista do que é feito em [11]. O problema será resolvido caracterizando sistemas fortemente crescentes, o qual é também caracterizado para domínios estratificados.

Na pesquisa de programação dinâmica atual, o papel da equação de HJB na caracterização da função valor é enfatizado. A equação de HJB tem um papel diferente: o de proporcionar condições suficientes de otimalidade para testar se um candidato a minimizador é verdadeiramente um minimizador. O uso da equação de HJB neste espírito é chamado o método de Caratheodory.

Na teoria clássica, a função valor usualmente sendo Lipschitz contínua, pode ser caracterizada como a única solução viscosa da equação de HJB com o hamiltoniano sendo Lipschitz contínuo. O carácter Lipschitz do Hamiltoniano é muito importante para aplicar a teoria de viscosidade e a teoria de análise não suave para problemas de controle ótimo. Isto é caracterizado em [12].

Na literatura existem resultados já estabelecidos. A teoria de soluções de viscosidade tem-se desenvolvido mais recentemente de forma a incluir soluções que não são necessariamente contínuas. A definição de soluções de viscosidade descontínua foi introduzida pela primeira vez por Ishii [13]. O primeiro resultado de unicidade para soluções de viscosidade descontínua é dado por Barles e Perthame [14]. Um resultado importante desenvolvido é a teoria de soluções de viscosidade bilateral originados por Barron e Jensen [15, 16] e

revisitado por Barles [17].

Em nossa dissertação de mestrado, temos a dinâmica estratificada não Lipschitz contínua, e por isto o hamiltoniano não é Lipschitz, apesar de que restrito a cada domínio é Lipschitz. Inspirados em [10] introduzimos a dinâmica essencial e associada a esta dinâmica o hamiltoniano essencial. E a partir de nosso novo hamiltoniano caracterizaremos resultados que serão de utilidade, para mostrar que a função valor é a única solução semicontínua inferiormente de uma generalização adequada da clássica equação HJB para o Problema tipo Mayer em domínios estratificados.

O trabalho será dividido em três partes. No capítulo 2 apresentamos algumas definições de análise não suave, que serão utilizadas em todo o desenvolvimento da dissertação. Além de introduzir conceitos já conhecidos como: inclusões diferenciais, invariância e soluções de Euler. Também damos condições suficientes para invariância forte para a dinâmica não-Lipschitz, como em [10]

No capítulo 3, será introduzido o conceito de domínios estratificados, e caracterizamos a dinâmica estratificada, posteriormente identificamos uma nova multifunção denominada multifunção velocidade essencial. Na sequência estabelecemos condições hamiltonianas para caracterizar invariância fraca e forte.

No capítulo 4, damos condições hamiltonianas para sistemas fracamente decrescentes e apresentamos condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada.

No capítulo 5, estudamos sistemas fortemente decrescentes e crescentes e o Problema tipo Mayer em domínios estratificados.

CAPÍTULO 2

PRELIMINARES

Revisamos alguns conceitos em análise não suave, requerida em nosso trabalho, que pode ser encontrado em [1], [12].

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^N$, a distancia de um ponto $u \in \mathbb{R}^N$ a C é dado por

$$d_C(u) := \inf\{\|u - x\| : x \in C\}.$$

A distancia de Hausdorff Pompeiu entre dois conjuntos A e B no $\mathbb{R}^N$ é definida como segue:

$$dist_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d_B(a), \sup_{b \in B} d_A(b)\}.$$

O conjunto de pontos próximos a u em C é denotado por

$$proj_C(u) := \{x \in C : \|u - x\| = d_C(u)\},$$

se $u \notin C$ e $x \in proj_C(u)$ então dizemos que o vetor $u - x$ é perpendicular a C em x .

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto fechado. Um vetor ζ é um normal proximal a $x \in C$ se existe $\sigma > 0$ tal que

$$\langle \zeta, y - x \rangle \leq \frac{\|\zeta\|}{2\sigma} \|y - x\|^2 \quad \forall y \in C. \quad (2.1)$$

O conjunto de todos os normais proximais é um cone convexo e é denotado por $N_C^P(x)$.

Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função semicontínua inferior e $x \in dom f := \{x \in$

$\mathbb{R}^N : f(x) < \infty\}$. O subgradiente proximal é definido como sendo

$$\partial^P f(x) := \{\zeta \in \mathbb{R}^N : (\zeta, -1) \in N_{epif}^P(x, f(x))\},$$

onde $epif := \{(x, r) : r \geq f(x)\}$ é o epigrafo de $f(\cdot)$.

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto fechado. O cone tangente de Bouligand a $x \in C$, denotado por $T_C^B(x)$, é definido como

$$T_C^B(x) := \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_i - x}{t_i} : x_i \xrightarrow{C} x, t_i \rightarrow 0 \right\}. \quad (2.2)$$

(Observar que $x_i \xrightarrow{C} x$ significa que $x_i \in C \ \forall i = 1, 2, \dots$, e que $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = x$.) Ou equivalentemente,

$$T_C^B(x) = \left\{ v : \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{d_C(x + tv)}{t} = 0 \right\}. \quad (2.3)$$

2.1 Inclusões Diferenciáveis

Seja uma multifunção $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ que, para cada $x \in \mathbb{R}^N$, associa um subconjunto $F(x) \subseteq \mathbb{R}^N$.

Uma inclusão diferencial com condições iniciais toma a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), & \text{q.t.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = x, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde usamos *q.t.p.* para significar que a inclusão é válida para quasi todos os pontos $t \in [0, T]$ no sentido da medida de Lebesgue.

Dizemos que a inclusão diferencial é autônoma quando F não depende de t . Uma trajetória de (2.4) é uma função absolutamente continua $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sobre $[0, T]$, para algum tempo $T > 0$ que satisfaz (2.4).

Chamaremos de $\text{arccx}(\cdot)$ a uma trajetória absolutamente continua.

Definição 2.1. Uma função $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ é dita ser absolutamente continua se para cada, $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para alguma coleção contável de subintervalos disjuntos $[a_i, b_i]$ de $[a, b]$ temos:

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |x(b_i) - x(a_i)| < \epsilon$$

Lembremos que uma equação diferencial ordinária autônoma toma a forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)), & \text{q.t.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = x \end{cases} \quad (2.5)$$

Se definimos a multifunção $F(x) = \{f(x)\}$, claramente (2.5) é um caso especial de (2.4).

A existência de soluções de uma equação diferencial ordinária requer hipóteses adicionais. A seguinte é uma proposição conhecida de equações diferenciais ordinárias que garante a existência e unicidade de soluções.

Proposição 2.1. *Assumamos que f é contínua e satisfaz a hipótese de crescimento linear, i.e. Existem $\alpha, c \geq 0$ tal que*

$$\|f(x)\| \leq \alpha\|x\| + c, \forall x.$$

Então existe uma solução $x(\cdot) : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$ para (2.5). Se além disso assumimos que f é Lipschitz contínua então a solução é única.

Uma pergunta natural é se propriedades análogas garantem a existência de soluções de uma inclusão diferencial.

A seguinte é uma coleção de hipóteses comumente impostas na teoria de inclusão diferencial.

HIPÓTESES PADRÃO 1(HP1)

A1) $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $F(x)$ é um conjunto não vazio, convexo e compacto,

A2) F é semicontínua superior,

A3) $\exists r > 0$ tal que $v \in F(x) \Rightarrow |v| \leq r(1 + |x|)$.

Também se precisa de uma propriedade análoga a continuidade, no entanto, a continuidade completa da multifunção nem sempre é necessária, requerendo só que a função seja semicontínua superior (s.c.s) em cada $x \in \mathbb{R}^N$.

Definição 2.2. *Uma multifunção $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é semicontínua superior em x se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|x' - x\| < \delta \implies F(x') \subseteq F(x) + \epsilon\mathbb{B},$$

onde $\mathbb{B}$ denota a bola aberta unitária de centro o origem.

Proposição 2.2. ([1],pág 179) Assumamos que F satisfaz A1), A3). Então F é semi-continua superior se e só se

$$gr F := \{(x, v) : v \in F(x)\}$$

é fechado

Assim A2) pode ser substituída por a condição do Gráfico Fechado.

Demonstração. Suponhamos que F é s.c.s e seja $(x, v) \in \overline{gr F}$, então existe uma sequência $(x_n, v_n) \in gr F, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n, v_n) \rightarrow (x, v)$. Logo para $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0, \|x_n - x\| < \delta$ e pela s.c.s existe $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ tal que $F(x_n) \subseteq F(x) + \frac{1}{n}\mathbb{B}$. Como $v_n \in F(x_n)$ segue que $d(v_n, F(x)) \leq \frac{1}{n}$, já que a função distancia é continua então $d(v, F(x)) \leq 0$, logo como F é compacta e em particular fechada, temos que $v \in F(x)$, ou seja $(x, v) \in gr F$ e assim o gráfico de F é fechado.

Reciprocamente, suponhamos que o gráfico de F seja fechado. Seja $x \in \mathbb{R}^N$ e $\epsilon > 0$. Suponhamos que $x_n \rightarrow x$ e $v_n \in F(x_n)$. Suponha que $d(v_n, F(x)) \geq \epsilon, \forall n$. De (A3) temos que a sequencia (v_n) é limitada, logo por Bolzano Weirstrass, possui uma subsequência convergente, i.e. $(v_n) \rightarrow v$. Logo $d(v, F(x)) \geq \epsilon$; contradição ao fato de que o gráfico de F é fechado (i.e. $v \notin F(x)$). ■

O conceito de inclusão diferencial engloba sistemas de controle, (no caso autônomo)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & \text{q.t.p. } t \in [0, T], \\ u(t) \in U, & \text{q.t.p. } t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde U é compacto e não vazio. Definimos $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ como

$$F(x) = \{v : \exists u \in U \text{ q.s. } v = f(x, u)\} = f(x, U).$$

Então qualquer trajetória de (2.6) é uma trajetória de (2.4); a recíproca é verdadeira?. Isto é, uma trajetória da inclusão diferencial (2.4) é uma trajetória do sistema de controle (2.6). O lema de Filippov mostra que sob algumas hipóteses sobre f , isto é, se f é

continua em x e mensurável em u , e U compacto e não vazio, então as trajetórias de (2.4) são também trajetórias de (2.6).

Tal como no caso de equações diferenciais ordinárias, o papel das hipóteses padrão surge principalmente na aplicação do Lema de Gronwall's para fornecer limites sobre o crescimento das trajetórias de (2.4). O seguinte resultado é conhecido como o Lema de Gronwall's.

Proposição 2.3. (*[1, 12]*) *Seja $x(\cdot)$ um arco sobre $[0, T]$ tal que*

$$\|\dot{x}(t)\| \leq \alpha \|x(t)\| + c(t) \quad q.t.p. \quad t \in [0, T],$$

onde α é uma constante não negativa e onde $c(\cdot)$ é uma função integrável de $[0, T]$ a $\mathbb{R}$. Então para todo $t \in [0, T]$, temos

$$\|x(t) - x(0)\| \leq (e^{\alpha t} - 1)\|x(0)\| + \int_0^t e^{\alpha(t-s)} c(s) ds.$$

Também uma das motivações para assumir as (HP1) é o seguinte resultado; conhecido como o teorema de compacidade das trajetórias.

Teorema 2.1. (*[1, 12], Teorema de Compacidade das trajetórias*) *Seja $\{x_i\}$ uma sequência de arcos sobre $[a, b]$ tal que o conjunto $\{x_i(a)\}$ é limitada e satisfazendo*

$$\dot{x}_i(a) \in F(x_i(t) + y_i(t)) + r_i(t)\mathbb{B}, q.t.p.,$$

onde $\{y_i\}, \{r_i\}$ são sequências de funções mensuráveis sobre $[a, b]$ tal que y_i converge a 0 em L^2 , $r_i \geq 0$ converge a 0 em L^2 . Então existe uma subsequência de $\{x_i\}$ que converge uniformemente a um arco x , o qual é uma trajetória de F , e a sequência de derivadas converge fracamente a $\dot{x}$.

Um outro conceito que necessitamos para nosso estudo é introduzir as soluções de Euler para inclusões diferenciais.

2.2 Soluções de Euler

Suponhamos que $\Gamma : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ satisfaz (HP1). O conceito de uma solução de Euler de uma equação diferencial ordinária foi introduzido em [1]. E pode ser descrito como segue para uma inclusão diferencial.

Seja π uma partição de $[0 = t_0 < t_0 < t_1 < \dots < t_l = T]$. A norma da partição é

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq n \leq l} \{t_n - t_{n-1}\}$$

e seja $\gamma(\cdot) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ qualquer função que é uma seleção de Γ , i.e. $\gamma(x) \in \Gamma(x)$, para todo x .

Procedamos considerando, sobre o intervalo $[t_0, t_1]$ a inclusão diferencial com condições iniciais,

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(x_0); \quad x_0 := x(t_0) = x.$$

Como $\gamma(x) \in \Gamma(x)$, para todo x , faça

$$\dot{x}(t) = \gamma(x_0); \quad x(t_0) = x.$$

Desde que o lado direito é constante temos:

$$x(t_1) = x_0 + \gamma(x_0)(t_1 - t_0) \quad \text{e definimos} \quad x_1 := x(t_1).$$

Agora consideramos

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(x_1); \quad x(t_1) = x_1 \quad \text{no intervalo} \quad [t_1, t_2],$$

então

$$\begin{aligned} x(t_2) &= x(t_1) + \gamma(x_1)(t_2 - t_1) \\ &= x_1 + \gamma(x_1)(t_2 - t_1) \quad \text{e definimos} \quad x_2 := x(t_2) \end{aligned}$$

e assim sucessivamente até

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(x_{l-1}); \quad x(t_{l-1}) = x_{l-1} \quad \text{no intervalo} \quad [t_{l-1}, t_l]$$

Então

$$x(t_l) = x_{l-1} + \gamma(x_{l-1})(t_l - t_{l-1}) \quad \text{e definimos} \quad x_l := x(t_l).$$

Aqui $x_0, x_1, \dots, x_l$ são chamados pontos nó. O arco poligonal de Euler é uma função linear por partes definida sobre $[0, T]$ que interpola linearmente a sequência de acima. Isto é

$$\begin{aligned} x^\pi : [0, T] &\rightarrow \mathbb{R}^N \\ t &\mapsto x^\pi(t) = x_n + (t - t_n)\gamma(x_n) \quad \text{sempre que} \quad t \in [t_n, t_{n+1}]. \end{aligned}$$

E o Teorema de Compacidade das Trajetórias implica que para uma seleção dada γ , a sequência $\{x^{\pi_m}(\cdot)\}$ de arcos poligonais de Euler, convergem a uma solução de $(DI)_\Gamma$

(quando $\|\pi_m\| \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow 0$) e tal solução $x(\cdot)$ é chamada de arco de Euler.

2.3 Inclusões em variedades diferenciais

Seja $M \subseteq \mathbb{R}^N$ uma variedade diferenciável e $\mathcal{T}_M(x)$ denota o espaço tangente usual de M , em $x \in M$. Suponhamos que $\Gamma : M \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ é uma multifunção. A seguir temos uma coleção de hipóteses padrão 2 (HP2) comumente impostas na teoria de inclusão diferenciável.

H1) $\forall x \in M, \Gamma(x)$ é um conjunto não vazio, convexo e compacto satisfazendo $\Gamma(x) \subseteq \mathcal{T}_M(x)$,

H2) O gráfico $gr\Gamma := \{(x, v) : v \in \Gamma(x)\}$ é um conjunto fechado relativo a $M \times \mathbb{R}^N$ e

H3) $\exists r > 0$ tal que $v \in \Gamma(x) \Rightarrow |v| \leq r(1 + |x|)$.

Associando à variedade M com a multifunção Γ , uma inclusão diferenciável com condições iniciais toma a forma,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in \Gamma(x(t)), \text{ q.t.p. } t \in [0, T), \\ x(0) &= x \end{aligned} \tag{2.7}$$

que, com $x \in M$ e diante das suposições (HP2), tem ao menos uma solução $x(\cdot)$ definida sobre o intervalo $[0, T)$.

Observação 2.1. *Note que a inclusão de espaço tangente em (H1), implica que todas as soluções de (2.7) permanecem em M .*

Agora definiremos a noção de Tempo de Escape.

Definição 2.3. *Suponha $M \subseteq \mathbb{R}^N, x \in M$, e $x(\cdot)$ uma trajetória de Γ com $x(0) = x$, definida sobre $[0, T)$, onde $0 < T \leq \infty$. Então T é um tempo de escape de M (caso em que escrevemos $T := Esc(x(\cdot), M, \Gamma)$), se pelo menos uma das seguintes condições vale:*

a) $T = \infty$ e $x(t) \in M$ para todo $t \geq 0$ ou

b) $T < \infty$ e $x(t) \in M$ para todo $t \in [0, T)$, e $x(t)$ se aproxima a $\overline{M} \setminus M$ quando $t \rightarrow T$.

A seguinte proposição diz que, sobre os pressupostos das hipóteses padrão 2, qualquer trajetória pode ser estendida para uma trajetória que tem um tempo de escape.

Proposição 2.4. (ver, [4]) Suponha que Γ satisfaz $H1), H2), H3)$, e $x(\cdot)$ é uma trajetória de Γ sobre $[0, T)$ com $x(t) \in M$ para todo $t \in [0, T)$. Se T não é um tempo de escape de M , então $x(\cdot)$ pode ser estendida a uma trajetória $\tilde{x}(\cdot)$ definida sobre um intervalo de máxima longitude $[0, \tilde{T})$ onde $\tilde{T} := Esc(\tilde{x}(\cdot), M, \Gamma)$.

Assim se Γ satisfaz $(HP2)$ então cada trajetória pode ser estendida a um intervalo de máxima longitude, e se não vale $(HP2)$ então suporemos que todas as trajetórias são definidas sobre intervalos maximais.

Uma outra hipóteses invocada na teoria de inclusão diferencial é um fortalecimento de $H2)$ exigindo a propriedade Lipschitz em subconjuntos limitados de M com respeito à métrica de Hausdorff-Pompiou. Isto significa: para cada $r > 0$, existe uma constante $k_r > 0$ tal que

$$H4) \quad x, y \in M \cap r\mathbb{B} \Rightarrow dist_{\mathcal{H}}(\Gamma(x), \Gamma(y)) \leq k_r \|x - y\|,$$

onde $r\mathbb{B}$ denota a bola centrada no origem de raio r , e $dist_{\mathcal{H}}$ é a distancia de Hausdorff-Pompiou entre conjuntos compactos.

A condição $H4)$ é equivalente a

$$|h_{\Gamma}(x, \xi) - h_{\Gamma}(y, \xi)| \leq k_r \|\xi\| \|x - y\| \quad \forall x, y \in M \cap r\mathbb{B}, \xi \in \mathbb{R}^N,$$

onde $h_{\Gamma} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é o Hamiltoniano minimizado associado com Γ , dado por:

$$h_{\Gamma}(x, p) = \min_{v \in \Gamma(x)} \langle v, \xi \rangle.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in M \cap r\mathbb{B}, \xi \in \mathbb{R}^N$, logo existe $v_2 \in \Gamma(y)$ tal que $h_{\Gamma}(y, \xi) = \langle v_2, \xi \rangle$, e assim

$$\begin{aligned} h_{\Gamma}(x, \xi) - h_{\Gamma}(y, \xi) &\leq \langle v_1, \xi \rangle - \langle v_2, \xi \rangle; & (\text{ para quaisquer } v_1 \in \Gamma(x)) \\ &= \langle v_1 - v_2, \xi \rangle; \\ &\leq \|v_1 - v_2\| \|\xi\|; & (\text{ pela desigualdade de Cauchy-Schwartz }) \\ &\leq k_r \|\xi\| \|x - y\|; & (\text{ por H4 e como } v_1 \in \Gamma(x), v_2 \in \Gamma(y)). \end{aligned}$$

Logo temos também que existe $v_1 \in \Gamma(x)$ com $h_\Gamma(x, \xi) = \langle v_1, \xi \rangle$. Assim

$$\begin{aligned} h_\Gamma(x, \xi) - h_\Gamma(y, \xi) &\geq \langle v_1, \xi \rangle - \langle v_2, \xi \rangle; & (\text{ para quaisquer } v_2 \in \Gamma(y)) \\ &= \langle v_1 - v_2, \xi \rangle; \\ &\geq -\|v_1 - v_2\| \|\xi\|; & (\text{ pela desigualdade de Cauchy-Schwartz }) \\ &\geq -k_r \|\xi\| \|x - y\|; & (\text{ por H4 e como } v_1 \in \Gamma(x), v_2 \in \Gamma(y)). \end{aligned}$$

Portanto

$$|h_\Gamma(x, \xi) - h_\Gamma(y, \xi)| \leq k_r \|\xi\| \|x - y\| \quad \forall x, y \in M \cap r\mathbb{B}, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

■

Quando uma variedade e uma multifunção (M, Γ) satisfazem $(H1) - (H4)$ dizemos que satisfazem $(HP2)_+$.

Notemos que a condição de Lipschitz vale ao longo de qualquer subconjunto limitado de M e portanto tal multifunção Γ pode ser estendida ao fecho $\overline{M}$ e ainda vale a propriedade de Lipschitz sobre $\overline{M}$. Denotemos esta extensão por $\tilde{\Gamma}$.

$$\tilde{\Gamma} : \overline{M} \rightrightarrows \mathbb{R}^N,$$

definida por:

$$\tilde{\Gamma}(\bar{x}) = \begin{cases} \Gamma(\bar{x}), & \text{se } \bar{x} \in M, \\ \overline{\lim_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} \Gamma(x)}, & \text{se } \bar{x} \in \overline{M} \setminus M, \end{cases}$$

onde $\overline{\lim_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} \Gamma(x)} = \limsup_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} \Gamma(x)$. Definimos o $\limsup_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} \Gamma(x)$ no sentido de convergência de conjuntos de Kuratowski. I.e.,

$$\limsup_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} \Gamma(x) = \{\bar{u} \in \mathbb{R}^N / \exists x_i \rightarrow \bar{x}, u_i \rightarrow \bar{u} \quad \forall i : u_i \in \Gamma(x_i)\}.$$

$\overline{\lim_{x \xrightarrow{M} \bar{x}} \Gamma(x)}$ é um conjunto fechado.

Lema 2.1. *Se (M, Γ) satisfaz $(HP2)_+$ então $(\overline{M}, \tilde{\Gamma})$ satisfaz $(HP2)_+$*

Demonstração. Seja $\bar{x} \in M$, então $\tilde{\Gamma}(\bar{x}) = \Gamma(\bar{x})$ que satisfaz $(HP2)_+$ (pela mesma definição).

Se $\bar{x} \in \overline{M} \setminus M$ então $\tilde{\Gamma}(\bar{x})$ é não vazio, convexo e compacto.

Sejam $\bar{u}, \bar{v} \in \tilde{\Gamma}(\bar{x})$, $t \in [0, 1]$, logo existem $x_i \rightarrow \bar{x}$, $u_i \rightarrow \bar{u}$ e $v_i \rightarrow \bar{v}$ para cada i , com $u_i \in \Gamma(x_i)$ e $v_i \in \Gamma(x_i)$. Como $x_i \in M$ e $\Gamma(x_i)$ é convexo, temos $(1-t)u_i + tv_i \in \Gamma(x_i)$ e $(1-t)u_i + tv_i \rightarrow (1-t)\bar{u} + t\bar{v}$. Assim pela definição temos $(1-t)\bar{u} + t\bar{v} \in \tilde{\Gamma}(\bar{x})$, logo $\tilde{\Gamma}(\bar{x})$ é convexo.

Agora mostraremos que $\tilde{\Gamma}(\bar{x})$ satisfaz *H3*). Dado $\bar{u} \in \tilde{\Gamma}(\bar{x})$, então existem $x_i \rightarrow \bar{x}$, $u_i \rightarrow \bar{u}$, $\forall i$ tal que $u_i \in \Gamma(x_i)$. Como Γ satisfaz *H3*) temos que existe uma constante $r > 0$ tal que $\|u_i\| \leq r(1 + \|x_i\|)$, $\forall i$. Logo

$$\|\bar{u}\| = \|\lim_{i \rightarrow \infty} u_i\| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|u_i\| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} r(1 + \|x_i\|) = r(1 + \|\bar{x}\|)$$

e assim $\tilde{\Gamma}(\bar{x})$ é limitada. Como $\tilde{\Gamma}(\bar{x})$ é fechada, segue que $\tilde{\Gamma}(\bar{x})$ é compacto e além disso satisfaz (*H3*).

Verifiquemos que $\tilde{\Gamma}(\bar{x})$ é Lipschitz com a métrica de Hausdorff-Pompiou. Dado $r > 0$ e $\bar{x}, \bar{y} \in (\bar{M} \setminus M) \cap r\mathbb{B}$

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\tilde{\Gamma}(\bar{x}), \tilde{\Gamma}(\bar{y})) = \text{dist}_{\mathcal{H}}(\overline{\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \Gamma(x)}, \overline{\lim_{y \rightarrow \bar{y}} \Gamma(y)}) = \overline{\lim_{(x,y) \xrightarrow{M} (\bar{x}, \bar{y})}} \text{dist}_{\mathcal{H}}(\Gamma(x), \Gamma(y))$$

como Γ é Lipschitz, existe $k_r > 0$, tal que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\tilde{\Gamma}(\bar{x}), \tilde{\Gamma}(\bar{y})) \leq \overline{\lim_{(x,y) \xrightarrow{M} (\bar{x}, \bar{y})}} k_r \|x - y\| = k_r \|\bar{x} - \bar{y}\|.$$

A igualdade acima segue da continuidade da norma. Assim $\tilde{\Gamma}$ é Lipschitz, e em particular s.c.s, e assim $gr\tilde{\Gamma}$ é fechado. Portanto $(\bar{M}, \tilde{\Gamma})$ satisfaz $(HP2)_+$.

■

Definição 2.4. Um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é chamado proximamente suave se existe $r > 0$ tal que função distancia

$$d_C(x) := \inf_{c \in C} \|c - x\|$$

é diferenciável sobre a vizinhança aberta $C + r\mathbb{B}$ de C .

Este termo é introduzido em [3]. Existem várias equivalências para esta definição, mas só mencionaremos a mais interessante e utilizada em nosso trabalho.

Proposição 2.5. Um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é proximamente suave se e só se $N_C^P(x) \neq \{0\}$ para todo $x \in frC$. Aqui frC é a fronteira do conjunto C .

Esto nos ajuda muito para poder fornecer exemplos de conjuntos proximamente suaves.

Como estamos trabalhando no espaço $\mathbb{R}^N$ (pelo Corolário 4.15 em [3]), temos: Se C é proximamente suave, então o cone normal proximal coincide com o cone normal de Clarke. E os cones tangentes de Bouligand e Clarke coincidem, não havendo necessidade de falar qual cone está em uso. E é igual ao polar negativo de $N_C(x)$:

$$v \in \mathcal{T}_C(x) \Leftrightarrow \langle \xi, v \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in N_C(x).$$

Se M é uma variedade imersa $\mathcal{C}^2$, $C := \overline{M}$, e $x \in M$, então $\mathcal{T}_C(x)$ coincide com o espaço tangente usual $\mathcal{T}_M(x)$ a M em x (ver [1], Proposição 1.9). Se $\overline{M}$ é proximamente suave, então para cada $x \in \overline{M}$ o cone tangente $\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$ é fechado e convexo e seu interior relativo é denotado por $r\text{-int}\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$ e a fronteira relativa como $r\text{-fr}\mathcal{T}_{\overline{M}}(x) := \mathcal{T}_{\overline{M}}(x) \setminus r\text{-int}\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$.

O seguinte termo é introduzido em [1].

Definição 2.5. Um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é wedged se a dimensão do interior do cone tangente é igual a dimensão de C , i.e., se $\dim C = k$ então $\dim \text{int}\mathcal{T}_C(x) = k$ para todo $x \in C$.

Definição 2.6. Um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é relativamente wedged se a dimensão do interior relativo do cone tangente é igual a dimensão de C , i.e., se $\dim C = k$ então $\dim r\text{-int}\mathcal{T}_C(x) = k$ para todo $x \in C$.

Também temos; sendo X proximamente suave de radio $r > 0$ então para $r' < r$ tem-se que a proj_X é Lipschitz sobre uma vizinhança aberta $X + r'\mathbb{B}$ (ver Teorema 4.8 em [3]). E a multifunção $\text{proj}_X(u)$ é um singleton para cada $u \in X + r\mathbb{B}$ (ver Corolário 4.14 em [3]).

Suponhamos que M seja uma variedade com $\overline{M}$ proximamente suave de radio $\delta > 0$. Definamos a multifunção extensão $\Gamma_{\text{ext}} : \{\overline{M} + \delta\mathbb{B}\} \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ de $\tilde{\Gamma} : \overline{M} \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ por

$$\Gamma_{\text{ext}}(x) = \tilde{\Gamma}(\text{proj}_{\overline{M}}(x)) \quad \text{sempre que } x \in \overline{M} + \delta\mathbb{B}.$$

É fácil ver que vale o seguinte resultado.

Lema 2.2. Se (M, Γ) satisfaz $(HP2)$, $((HP2)_+)$ então $(\overline{M} + \delta\mathbb{B}, \Gamma_{\text{ext}})$ satisfaz $(HP2)$, $((HP2)_+)$.

O conceito de arco de Euler pode ser naturalmente estendido a multifunções definidas sobre variedades. Seja $\gamma(\cdot)$ uma seleção de Γ sobre M . Os pontos nó agora são escolhidos

como

$$x_{n+1} = \text{proj}_{\overline{M}}[x_n + (t_{n+1} - t_n)\gamma(x_n)]$$

e o processo termina quando $x_{n+1} \in \overline{M} \setminus M$.

O arco poligonal de Euler é definido como antes. Embora que $x^\pi(\cdot)$ possa deixar M , se

$$d_{\overline{M}}[x_n^\pi + (t_{n+1} - t_n)\gamma(x_n)] \leq c\|\pi\|$$

para alguma constante c independente de π o de n , o arco limite de Euler permanecerá em M e será uma trajetória de (2.7).

Suponha que M seja uma variedade imersa em $\mathbb{R}^N$ e que (M, Γ) satisfaça (HP2). Considere a propriedade:

(H5) Cada solução $x(\cdot)$ de $(DI)_\Gamma$ é um arco de Euler.

Isto significa que, se

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)), & \text{q.t.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = x, \end{cases}$$

então existe uma seleção $\gamma(\cdot)$ de Γ e uma sequência de partições $\{\pi_m\}$ com $\|\pi_m\| \rightarrow 0$ tal que os arcos poligonais de Euler x^{π_m} associados com $\gamma(\cdot)$ converge uniformemente a $x(\cdot)$.

Chamaremos (H5) a propriedade do arco de Euler, e note que a hipótese de Lipschitz (H4) implica em (H5). Isto é mostrado para o caso em que $M = \mathbb{R}^N$ em ([1], cor 4.3.7).

Outro importante resultado de $\mathbb{R}^N$ a ser adaptado para variedades, é o conhecido Teorema de Aproximação das Trajetórias de Filippov.

Teorema 2.2. ([12]) Com $\Gamma : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ satisfazendo $(HP)_+$ este teorema diz o seguinte:

Suponha que $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um arco Lipschitz. Defina

$$\rho_{[0, T]}(y(\cdot)) = \int_0^T \text{dist}(\dot{y}(t), \Gamma(y(t))) dt,$$

então existe uma trajetória $z(\cdot)$ para $(DI)_\Gamma$ com $z(0) = y(0)$ e

$$\|y(\cdot) - z(\cdot)\| \leq e^{kT} \rho_{[0, T]}(y(\cdot)).$$

Proposição 2.6. Suponha que M seja uma variedade imersa em $\mathbb{R}^N$ com $\overline{M}$ proxima-mente suave de raio δ e que (M, Γ) satisfaça $(HP2)_+$. Suponha que $y(\cdot) : [a, b] \rightarrow \overline{M} + \delta\mathbb{B}$

é um arco de Lipschitz com $y(a) \in M$ e para $a < t \leq b$, defina

$$\rho_{[a,t]}(y(\cdot)) = \int_a^t \text{dist}(\dot{y}(s), \tilde{\Gamma}(\text{proj}_{\overline{M}}y(s)))ds,$$

então existe uma trajetória $z(\cdot)$ de Γ com $z(a) = y(a)$ que definida sobre o intervalo $[a, \bar{t})$, onde $\bar{t} = \min\{b, \text{Esc}(z(\cdot), M, \Gamma)\}$ e

$$\sup_{s \in [a,t]} \|y(s) - z(s)\| \leq e^{k(t-a)} \rho_{[a,t]}(y(\cdot)),$$

para todo $t \in [a, \bar{t})$. Se $y(\cdot)$ é C^1 , então $z(\cdot)$ pode ser escolhido C^1 , como antes.

Demonstração. Consideremos $\Gamma_{ext} : \{\overline{M} + \delta\mathbb{B}\} \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ dada por $\Gamma_{ext}(x) = \tilde{\Gamma}(\text{proj}_{\overline{M}}(x))$ sempre que $x \in \overline{M} + \delta\mathbb{B}$. Como $y(\cdot) : [0, T] \rightarrow \overline{M} + \delta\mathbb{B}$ é um arco de Lipschitz com $y(a) \in M$ e para $a < t \leq b$, satisfaz

$$\rho_{[a,t]}(y(\cdot)) = \int_a^t \text{dist}(\dot{y}(s), \tilde{\Gamma}(\text{proj}_{\overline{M}}y(s)))ds$$

então pelo Teorema 2.2 aplicado a Γ_{ext} , existe uma trajetória $z(\cdot)$ de Γ_{ext} com $z(a) = y(a) \in M$ definida sobre o intervalo $[a, \bar{t})$, onde $\bar{t} = \min\{b, \text{Esc}(z(\cdot), M, \Gamma)\}$ tal que

$$\|y(\cdot) - z(\cdot)\| \leq e^{k(t-a)} \rho_{[a,t]}(y(\cdot)).$$

Logo

$$\sup_{s \in [a,t]} \|y(s) - z(s)\| \leq e^{k(t-a)} \rho_{[a,t]}(y(\cdot)), \forall t \in [a, \bar{t}).$$

O fato de que $z(\cdot)$ permanece em M é devido a que $z(0) \in M$ e que $(M, \Gamma_{ext}(x))$ é fortemente invariante; isto ultimo devido ao Teorema 2.4. ■

Observação 2.2. Se acontecer de

$$\inf_{z \in \overline{M} \setminus M} \|y(t) - z\| > e^{k(t-a)} \rho_{[a,t]}(y(\cdot))$$

para todo $t \in [a, b]$, então $\bar{t} = b$ na Proposição 2.6

Demonstração. De fato, suponhamos que $\bar{t} \neq b$ então $\bar{t} = \text{Esc}(z(\cdot), M, \Gamma)$ então temos que; $\bar{t} = \infty$ ou $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} z(t) \in \overline{M} \setminus M$.

Se $\lim_{t \rightarrow \bar{t}} z(t) = w(\bar{t}) \in \overline{M} \setminus M$, temos; para todo $t \in [a, b]$ em particular para $\bar{t}$

$$e^{k(\bar{t}-a)} \rho_{[a,\bar{t}]}(y(\cdot)) \geq \|y(\bar{t}) - w(\bar{t})\| \geq \inf_{z \in \overline{M} \setminus M} \|y(\bar{t}) - z\| > e^{k(\bar{t}-a)} \rho_{[a,\bar{t}]}(y(\cdot))$$

Absurdo.

Agora, se $\bar{t} = \infty$; sabemos que $\bar{t} < b$ pela Proposição 2.6 e $b \neq \infty$, $\bar{t} = \infty < b$ absurdo. Então concluímos que $\bar{t} = b$

■

Proposição 2.7. *Suponha (M, Γ) satisfaz $(HP)_+$ e $v \in \Gamma(x)$. Então existe um C^1 trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_\Gamma$ para a qual $\dot{x}(0) = v$*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $M = \mathbb{R}^N$. Definamos o arco C^1 como $y(t) = x + tv$ para $t \in [0, T]$ que satisfaz $y(0) = x \in \mathbb{R}^N$ e para $0 < t < T$

$$\rho_{[0,T]}(y(\cdot)) = \int_0^t \text{dist}(\dot{y}(s), \Gamma(y(s))) ds = \int_0^t \text{dist}(v, \Gamma(x + sv)) ds$$

pois $\dot{y}(t) = v$. Como $v \in \Gamma(x)$ temos $\text{dist}(v, \Gamma(x + sv)) \leq k\|x - (x + sv)\| = ks\|v\|$ e logo

$$\rho_{[0,T]}(y(\cdot)) \leq \int_0^t ks\|v\| ds = k\|v\| \frac{t^2}{2}.$$

Pela Proposição 2.6, existe um arco C^1 , $x(\cdot)$ definido sobre $[0, T]$ satisfazendo $y(0) = x(0) = x$ e

$$\|y(t) - x(t)\| \leq \sup_{s \in [0, T]} \|y(s) - x(s)\| \leq e^{kt} \rho_{[0,t]}(y(\cdot)) \leq e^{kt} k\|v\| \frac{t^2}{2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \|v - \dot{x}(0)\| &= \|\dot{y}(0) - \dot{x}(0)\| = \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t} \right\| \\ &= \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - x(t)}{t} \right\| \leq \lim_{t \rightarrow 0} e^{kt} k\|v\| \frac{t}{2} = 0 \end{aligned}$$

Portanto $\dot{x}(0) = v$.

■

2.4 Invariância

Assim como em equações diferenciais ordinárias, a invariância é de significativa importância no estudo de inclusões diferenciais. Dado um conjunto fechado $E \subseteq \mathbb{R}^N$, a propriedade de invariância, no caso de equações diferenciais, é que, trajetórias com ponto inicial $x_0 \in E$, permaneçam em E para todo tempo positivo i.e., $x(t) \in E$, para todo $t \geq 0$.

Estudaremos a generalização deste conceito onde a equação diferencial é substituído por uma inclusão diferencial. Como as trajetórias de (2.4) não são únicas, existem duas noções diferentes de invariância a serem investigadas (invariância fraca e forte).

Definição 2.7. *Seja $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ uma multifunção e $E \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto fechado. Então:*

- *O par (F, E) é invariante fracamente se para cada $T > 0$, $x_0 \in E$ existe uma trajetória $x(\cdot)$ de (2.4) tal que $x(t) \in E, \forall t \in [0, T]$;*
- *O par (F, E) é invariante fortemente se para cada $T > 0$ e $x_0 \in E$, qualquer trajetória $x(\cdot)$ de (2.4) é tal que $x(t) \in E, \forall t \in [0, T]$.*

Agora caracterizaremos a invariância fraca e forte, introduzindo uma nova função “Hamiltoniana” relacionada com o cone normal proximal.

O Hamiltoniano inferior h e Hamiltoniano superior H correspondentes a F ; tem um papel importante. Estas são definidas como segue:

$$h_F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ dada por } h_F(x, p) = \min_{v \in F(x)} \langle p, v \rangle,$$

$$H_F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N \text{ dada por } H_F(x, p) = \max_{v \in F(x)} \langle p, v \rangle.$$

O normal proximal junto com o Hamiltoniano inferior estabelecem a seguinte condição necessária e suficiente para invariância fraca.

Teorema 2.3. *([1, 12]) Seja $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ satisfazendo as hipóteses padrão e seja $E \subseteq \mathbb{R}^N$ um conjunto fechado. Então (F, E) é invariante fracamente se e*

$$h_F(x, \xi) \leq 0, \text{ para todo } \xi \in N_E^P(x). \quad (2.8)$$

Para mais detalhes ver([1, 12]). Agora caracterizaremos invariância forte. Para isto precisamos definir quando uma multifunção é Lipschitz.

Definição 2.8. *Diz-se que uma multifunção $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ é localmente Lipschitz se para cada x existe uma vizinhança U_x de x e uma constante positiva $k = k(s)$ tal que para $x_1, x_2 \in U_x$ temos*

$$F(x_2) \subset F(x_1) + k\|x_1 - x_2\|\mathbb{B}.$$

Então dizemos que F é de Lipschitz, com constante k sobre o conjunto $U = U(x)$.

O seguinte teorema foi provado primeiro por Clarke na forma tangencial [2] (ver também [1]) e depois em forma normal por Krastonov [6].

Teorema 2.4. *Sejam F localmente Lipschitz e S um conjunto fechado. Então*

$$(S, F) \text{ é fortemente invariante se e só se } H_F(x, N_S^P(x)) \leq 0 \quad \forall x \in S.$$

Observação 2.3. *Note que exigimos que F seja localmente de Lipschitz para caracterizar invariância forte, coisa que não exigimos para invariância fraca.*

2.4.1 Condições Suficientes para Invariância Forte no caso não Lipschitz

Nesta seção caracterizaremos invariância forte para o caso onde a multifunção não é Lipschitz continua. Para nosso estudo a caracterização sera feita em variedades diferenciais imersas no $\mathbb{R}^N$.

Suponhamos $M \subseteq \mathbb{R}^N$ uma variedade imersa, uma multifunção $\Gamma : M \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ que satisfaz *HP2*), e $C \subseteq \mathbb{R}^N$ um fechado. Então (M, Γ) diz-se ser *invariante fortemente* sobre C sempre que toda solução $x(\cdot)$ de $(DI)_\Gamma$ com $x \in M \cap C$ é tal que $x(t) \in C$ para todo $t \in [0, Esc(x(\cdot), M, \Gamma)]$.

Apresentamos o seguinte teorema com a multifunção não Lipschitz.

Teorema 2.5. *(R. Barnard, P. Wolensky, 2013) Suponha que $M \subseteq \mathbb{R}^N$ seja uma variedade imersa em $\mathbb{R}^N$ e $\Gamma : M \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ uma multifunção satisfazendo (HP2) e cada solução $x(\cdot)$ de $(DI)_\Gamma$ seja um arco de Euler. Suponha que $C \subseteq \mathbb{R}^n$ seja fechado e suponha que exista uma constante $k > 0$ tal que*

$$x \in M, c \in proj_C(x) \Rightarrow H_\Gamma(x, x - c) \leq kd_C^2(x). \quad (2.9)$$

Então para $x \in M$ uma trajetória arbitraria $x(\cdot)$ de $(DI)_\Gamma$, temos que

$$d_C(x(t)) \leq e^{kt} d_C(x), \quad \forall t \in [0, T].$$

Em particular (M, Γ) é invariante fortemente sobre C .

Demonstração. Seja $x \in M, 0 < t < T$ e $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = t\}$ uma partição de $[0, t]$ e $x^\pi(\cdot)$ o arco poligonal de Euler associado com π . Assim $x^\pi(\cdot)$ é linear por partes sobre $[0, t]$, e para cada $n = 0, 1, 2, \dots, l - 1$ satisfaz

$$x_{n+1}^\pi = proj_{\overline{M}}[x_n^\pi + (t_{n+1} - t_n)\gamma_n] \quad \text{para algum } \gamma_n \in \Gamma(x_n^\pi)$$

onde $x_n^\pi := x^\pi(t_n)$. Seja $\|\Gamma\| = \sup\{\|\gamma\| : \gamma \in \Gamma(x), x \in M \cap r\mathbb{B}\}$ e escolha $c_n \in \text{proj}_C(x_n^\pi)$ arbitrário. Para cada n , temos

$$\begin{aligned} d_C^2(x_{n+1}^\pi) &\leq \|x_{n+1}^\pi - c_n\|^2 \\ &\leq d_C^2(x_n^\pi) + 2(t_{n+1} - t_n)\langle x_n^\pi - c_n, \gamma_n \rangle + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &\leq d_C^2(x_n^\pi) + 2(t_{n+1} - t_n)k d_C^2(x_n^\pi) + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &= [1 + 2(t_{n+1} - t_n)k] d_C^2(x_n^\pi) + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$d_C^2(x_{n+1}^\pi) \leq [1 + 2(t_{n+1} - t_n)k] d_C^2(x_n^\pi) + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2.$$

Para $n = 0$, temos

$$d_C^2(x_1^\pi) \leq [1 + 2(t_1 - t_0)k] d_C^2(x_0^\pi) + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2.$$

Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} d_C^2(x_2^\pi) &\leq [1 + 2(t_2 - t_1)k] d_C^2(x_1^\pi) + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &\leq [1 + 2(t_2 - t_1)k] \left\{ [1 + 2(t_1 - t_0)k] d_C^2(x_0^\pi) + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \right\} + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &= (1 + 2(t_2 - t_1)k) (1 + 2(t_1 - t_0)k) d_C^2(x_0^\pi) + (1 + 2(t_2 - t_1)k + 1) \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2. \end{aligned}$$

Para $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} d_C^2(x_3^\pi) &\leq [1 + 2(t_3 - t_2)k] d_C^2(x_2^\pi) + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &\leq [1 + 2(t_3 - t_2)k] \left\{ (1 + 2(t_2 - t_1)k)(1 + 2(t_1 - t_0)k) d_C^2(x_0^\pi) \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2(t_2 - t_1)k + 1) \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \right\} + \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &= \left[\prod_{n'=0}^2 1 + 2(t_{n'+1} - t_{n'})k \right] d_C^2(x_0^\pi) + \left[(1 + 2(t_3 - t_2)k)(1 + 2(t_2 - t_1)k) \right. \\ &\quad \left. + (1 + 2(t_3 - t_2)k) + 1 \right] \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &\leq \left[\prod_{n'=0}^2 1 + 2(t_{n'+1} - t_{n'})k \right] d_C^2(x_0^\pi) + \left[(1 + 2\|\pi\|k)^2 + (1 + 2\|\pi\|k) + 1 \right] \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &\leq \left[\prod_{n'=0}^2 1 + 2(t_{n'+1} - t_{n'})k \right] d_C^2(x_0^\pi) + \frac{1 - (1 + 2\|\pi\|k)^3}{1 - (1 + 2\|\pi\|k)} \|\pi\|^2 \|\Gamma\|^2 \\ &\leq \left[\prod_{n'=0}^2 1 + 2(t_{n'+1} - t_{n'})k \right] d_C^2(x_0^\pi) + \frac{(1 + 2\|\pi\|k)^3 - 1}{2k} \|\pi\| \|\Gamma\|^2. \end{aligned}$$

Assim em geral temos:

$$d_C^2(x_{n+1}^\pi) \leq \left[\prod_{n'=0}^n 1 + 2(t_{n'+1} - t_{n'})k \right] d_C^2(x) + \frac{(1 + 2\|\pi\|k)^{n+1} - 1}{2k} \|\pi\| \|\Gamma\|^2.$$

Logo, se $x(\cdot)$ é qualquer solução de $(DI)_\Gamma$, então por (H5) $x(\cdot)$ é um arco de Euler. Assim existe uma sequência de partições π_m e arcos poligonais de Euler $x^{\pi_m}(\cdot) =: x^m(\cdot)$ tal que $\|\pi_m\| \rightarrow 0$ e $\|x^{\pi_m}(\cdot) - x(\cdot)\| \rightarrow 0$, quando $m \rightarrow \infty$.

Cada $x^m(\cdot)$ satisfaz a estimativa previa. Para cada m , seja n_m o primeiro índice para o qual $t < \sum_{n'=0}^{n_m} t_{n'+1}$. Então como $m \rightarrow \infty$, temos $\sum_{n'=0}^{n_m} t_{n'+1} \rightarrow t$, logo $\prod_{n'=0}^{n_m} (1 + (t_{n'+1} - t_{n'})k) \rightarrow e^t$ quando $m \rightarrow \infty$ e $x^{\pi_m}(t_{n_m+1}) = x_{n_m+1}^{\pi_m} \rightarrow x(t)$.

Assim fazendo $m \rightarrow \infty$ na seguinte desigualdade

$$d_C^2(x_{n_m+1}^{\pi_m}) \leq \left[\prod_{n'=0}^{n_m} 1 + 2(t_{n'+1} - t_{n'})k \right] d_C^2(x) + \frac{(1 + 2\|\pi_m\|k)^{n_m+1} - 1}{2k} \|\pi_m\| \|\Gamma\|^2,$$

teremos

$$d_C^2(x(t)) \leq e^{2kt} d_C^2(x),$$

donde

$$d_C(x(t)) \leq e^{kt} d_C(x) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.10)$$

Agora dado que $x(\cdot)$ é solução de $(DI)_\Gamma$ com $x \in M \cap C$, então $x \in C$ assim de (2.10) segue-se que $x(t) \in C$ para todo $t \in [0, T)$ onde $T = Esc(x(\cdot), M, \Gamma)$. Logo (M, Γ) é invariante fortemente.

■

CAPÍTULO 3

SISTEMAS ESTRATIFICADOS

Vamos agora descrever um sistema dinâmico estratificado, o qual foi introduzido por Bressan e Hong [9]. Grosso modo, estes são uma coleção de domínios disjuntos, cada um tendo sua própria dinâmica.

3.1 Domínios Estratificados

Dada uma coleção finita de variedades diferenciáveis $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ (pelo menos de classe C^2) imersas no $\mathbb{R}^N$ tal que:

- $\mathbb{R}^N = \bigsqcup_{i=1}^m M_i$ e $M_i \cap M_j \neq \emptyset$ quando $i \neq j$;
- Se $M_j \cap \overline{M_i} \neq \emptyset$ então $M_j \subset \overline{M_i}$;
- Cada $\overline{M_i}$ é proximamente suave de radio δ ;
- Cada $\overline{M_i}$ é relativamente Wedged.

Tal coleção é chamada de domínio estratificado e suas componentes M_i são chamadas subdomínios estratificados. A dimensão de M_i é denotado por d_i .

Exemplo 3.1. *Um exemplo muito simples é representado na figura 1 com $N = 2$ e $m = 5$.*

Aqui M_1 e M_2 são variedades de dimensão 2; M_3 e M_4 variedades de dimensão 1 e a origem M_5 é de dimensão zero. Se pode ver rapidamente que $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$ satisfaz todas as condições acima, logo a coleção é um domínio estratificado.

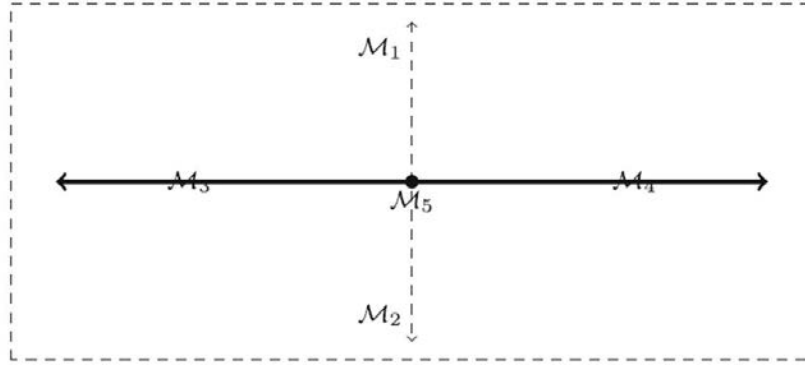


Figura 1: Domínio Estratificado

Exemplo 3.2. *Estratificação que não é permitida.*

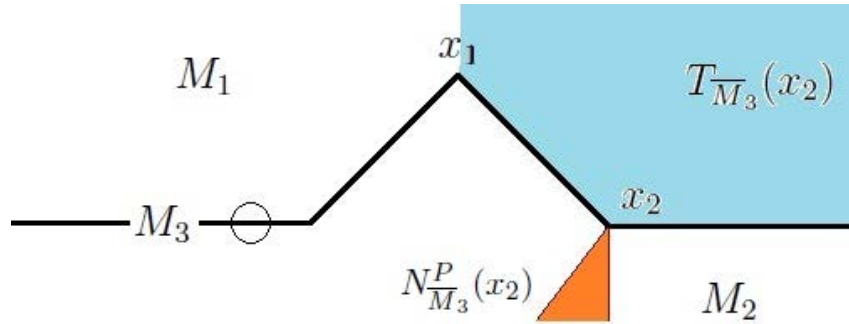


Figura 2: Domínio não Estratificado

Esta é uma estratificação que viola nossos requisitos: Por exemplo $\overline{M}_1$ não é proximamente suave, (pois $N^P_{\overline{M}_1}(x_1) = \{0\}$).

Também $\overline{M}_3$ não é relativamente wedged desde que: $\dim r\text{-int}T_{\overline{M}_3}(x_2) = 2$ e $\dim M_3 = 1$.

Logo $\{M_1, M_2, M_3\}$ não é um domínio estratificado.

3.2 Dinâmica Estratificada

Agora, dado um domínio estratificado $M_1, M_2, \dots, M_m$ associamos a cada variedade M_i uma multifunção $F_i : M_i \rightrightarrows \mathbb{R}^N$. Cada (M_i, F_i) é assumida a satisfazer $(HP2)_+$. Dado que existem um número finito de objetos, podemos escolher as mesmas constantes em $H1) - H4)$ para todas elas. Além disso, devido a $H3)$, toda a análise é essencialmente local. E assim para efeitos contáveis nos referimos a uma só constante de Lipschitz k em

$H4)$ e perdemos o sub-índice r .

Agora definamos a multifunção $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ como sendo

$$F(x) = F_i(x) \quad \text{quando } x \in M_i,$$

chamada multifunção *velocidade básica*. A multifunção F , não necessariamente satisfaz $(H2)$ no $\mathbb{R}^N$ (todo) tal vez só em M_i .

Para evitar as dificuldades que estas deficiências teóricas implicaria, introduzimos a regularização de Filippov $G : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ dada por:

$$G(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co} \bigcup \{F(y) : \|y - x\| < \epsilon\}$$

a qual satisfaz $(HP2)$, mas a condição de Lipschitz $(H4)$ não se mantem para $(\mathbb{R}^N, G)$.

Pela natureza da estrutura de estratificação pode-se obter a seguinte representação;

$$G(x) = co\{\tilde{F}_i(x) : x \in \overline{M}_i\}.$$

Demonstração. Seja $z \in \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co} \bigcup_{y \in B(x, \epsilon)} F(y)$. Isto é equivalente a dado $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, $z \in \overline{co} \bigcup_{y \in B(x, \epsilon)} F(y)$, equivalente a $\exists z_n \in co \bigcup_{y \in B(x, \epsilon)} F(y)$ tal que $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$.

Logo para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, temos: $\exists z_n^1, z_n^2, \dots, z_n^m \in \bigcup_{y \in B(x, \epsilon)} F(y)$ e $\lambda_n^1, \lambda_n^2, \dots, \lambda_n^m \in \mathbb{R}$ com $\sum_{j=1}^m \lambda_n^j = 1, \lambda_n^j \geq 0$ tal que $z_n = \sum_{j=1}^m \lambda_n^j z_n^j$ e $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$. Isto também é equivalente a $\exists y_n^j \in B(x, \epsilon); z_n^j \in F(y_n^j)$ para $j = 1, 2, \dots, m$ e $\lambda_n^j \in \mathbb{R}$ com $\sum_{j=1}^m \lambda_n^j = 1, \lambda_n^j \geq 0$ tal que $z_n = \sum_{j=1}^m \lambda_n^j z_n^j$ e $z_n \rightarrow z, n \rightarrow \infty$.

Também $F(y_n^j) = F_i(y_n^j)$ quando $(y_n^j) \in M_i$. Como F_i é Lipschitz, temos $F_i(y_n^j) \subseteq kB$ então $|z_n^j| \leq k$, logo por Bolzano-Weirstrass existe uma subsequência $z_n^j \rightarrow z^j$.

Alem disso como para todo $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$, $y_n^j \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M_i$ então $B(x, \frac{1}{n}) \cap M_i \neq \emptyset$ logo $x \in \overline{M}_i$ e fazendo $n \rightarrow \infty$ temos $y_n^j \rightarrow x$. E como o gráfico de $\tilde{F}_i$ é fechado $z^j \in \tilde{F}_i(x)$.

Assim $\exists z^j \in \tilde{F}_i(x)$; tal que $x \in \overline{M}_i$ para $j = 1, \dots, m$ com $\sum_{j=1}^m \lambda^j = 1$ tal que $z = \sum_{j=1}^m \lambda^j z^j$. Isto equivale a $\exists z^1, z^2, \dots, z^m \in \{\tilde{F}_i(x) : x \in \overline{M}_i\}$ e $\lambda^1, \dots, \lambda^m \in \mathbb{R}^+$ com $\sum_{j=1}^m \lambda^j = 1$ tal que $z = \sum_{j=1}^m \lambda^j z^j$. Isto é $z \in co\{\tilde{F}_i(x) : x \in \overline{M}_i\}$.

■

Agora apresentamos um exemplo de como é a dinâmica G .

Exemplo 3.3. *Sejam as seguintes dinâmicas, associadas com o domínio estratificado no*

exemplo 3.1

$$F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; F_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; F_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Note que F_5 não necessita ser explicitamente um estado, desde que $\mathcal{T}_{M_5}(0) = \{0\}$ e F_5 deve consistir somente do vetor zero. Este é o caso para todas as variedades zero-dimensionais. Obviamente G difere de F apenas no eixo x_1 com

$$G \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \{v : |v_1| + |v_2| \leq 1; v_1 \geq 0\} & \text{se } x_1 < 0 \\ \{v : |v_1| + |v_2| \leq 1\} & \text{se } x_1 = 0 \\ \{v : |v_1| + |v_2| \leq 1; v_1 \leq 0\} & \text{se } x_1 > 0 \end{cases}$$

onde $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. As retas na figura (3), representam os valores das velocidades básicas e as

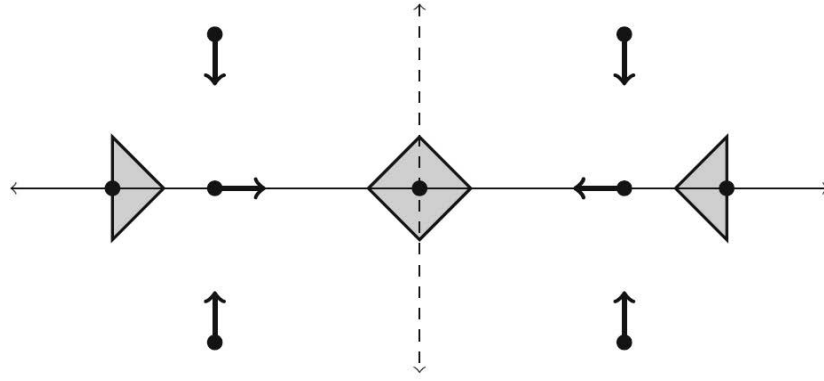


Figura 3: Dinâmicas Estratificadas

regiões sombreadas os valores de G em pontos sobre o eixo x_1 .

A multifunção G é usada como a dinâmica. Para $x \in \mathbb{R}^N$, considere a inclusão diferencial:

$$(DI)_G \quad \begin{cases} \dot{x}(t) \in G(x(t)), & \text{q.t.p. } t \in [0, T], \\ x(0) = x. \end{cases}$$

E suponha que a dinâmica estratificada satisfaz a condição estrutural,

$$G(x) \cap \mathcal{T}_{M_i}(x) = F_i(x) \quad \text{sempre que } x \in M_i.$$

Esta condição assegura que não existem trajetórias de G que não estejam em F . A seguinte proposição afirma esta observação.

Proposição 3.1. *Suponha que $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ é um arco de Lipschitz. Então as*

seguintes propriedades são equivalentes:

(1). $x(\cdot)$ satisfaz $(DI)_G$

(2). $x(\cdot)$ satisfaz $\begin{cases} \dot{x}(t) \in F(x(t)), & q.t.p. \ t \in [0, T], \\ x(0) = x \end{cases}$

(3). Para cada i , $x(\cdot)$ satisfaz $x(0) = x$ e

$$\dot{x}(t) \in F_i(x(t)), \quad q.t.p. \text{ sempre que } x(t) \in M_i.$$

Demonstração. É claro que (2) e (3) são equivalentes, pois $F : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ é definida por: $F(x) = F_i(x)$ sempre que $x \in M_i$.

Seja $x(\cdot)$ satisfazendo (3). Pela Condição Estrutural temos que $F_i(x(t)) \subset G(x(t))$ sempre que $x(t) \in M_i$. Logo $x(\cdot)$ satisfaz $(DI)_G$, isto é (3) implica (1).

Agora mostremos que (1) implica (3). Para cada i , seja

$$J_i := \{t \in [0, T] : x(t) \in M_i\}$$

O conjunto J_i é mensurável, (pois $x(\cdot)$ é Lipschitz, logo é contínua e assim $x(\cdot)$ é mensurável). Seja

$$\tilde{J}_i := \{t \in J_i : \dot{x}(t) \text{ existe em } G(x(t)) \text{ e } t \text{ é um ponto de Lebesgue de } x(\cdot)\}$$

Temos que o conjunto $\tilde{J}_i$ tem medida total em J_i , como a função $x(\cdot)$ é Lipschitz, ela é diferenciável em quase toda parte, i.e. diferenciável em cada ponto fora de um conjunto de medida zero.

Seja $t \in \tilde{J}_i$ então existe uma sequência s_j tal que $s_j \rightarrow t$ quando $j \rightarrow \infty$ com $s_j \neq t$, $s_j \in \tilde{J}_i, \forall j \in \mathbb{N}$ (que sejam distintos é devido a $\tilde{J}_i$ ter medida total). Assim $x(s_j) \in M_i$ para todo j e

$$\dot{x}(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x(s_j) - x(t)}{s_j - t} \in \mathcal{T}_{M_i}(x(t)).$$

Logo por (1) e a Condição Estrutural, temos que $\dot{x}(t) \in G(x(t)) \cap \mathcal{T}_{M_i}(x(t)) = F_i(x(t))$ para todo $t \in \tilde{J}_i$ sempre que $x(t) \in M_i$, o que prova (3).

■

3.2.1 Velocidades Essenciais

Suponhamos que (M, Γ) satisfaça $(HP)_+$ e é Lipschitz. Então para todo $v \in \Gamma(x)$, existe uma trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_\Gamma$ com $\dot{x}(0) = v$; i.e., cada velocidade em cada ponto é essencial para o fluxo. Que velocidades de um sistema estratificado são essenciais?

Dado $x \in M_i$ e $v \in G(x)$, quando existe uma trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_G$ para que $\dot{x}(0) = v$?

Exemplo 3.4. Consideremos a seguinte estratificação em $\mathbb{R}$: $M_1 = \{x : x < 0\}$, $M_2 = \{x : x > 0\}$, $M_3 = \{0\}$ e as seguintes dinâmicas para cada subdomínio, $F_1(x) = [-\frac{1}{2}, 1], \forall x \in M_1$ e $F_2(x) = [-1, \frac{1}{2}], \forall x \in M_2$. Podemos ver que G difere das dinâmicas em $\{0\}$, logo temos $G(0) = [-1, 1]$.

No ponto 0, consideremos a dinâmica $v = 1 \in G(0)$. Se existe uma trajetória $y(\cdot)$ a partir de 0 usando a dinâmica 1, $y(\cdot)$ entra imediatamente em M_2 e $y(\cdot)$ não é admissível já que 1 não está contido na dinâmica F_2 .

No exemplo existem dinâmicas em G , que não são essenciais. Para responder à questão acima, necessitamos informação mais detalhada acerca dos cones normal e tangente.

Lema 3.1. Suponha que M seja uma variedade imersa, com $\overline{M}$ proximamente suave de radio δ e relativamente wedged, a multifunção $\Gamma : M \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ satisfaça $(HP2)_+$ e $x \in \overline{M}$. Então para qualquer $v \in \tilde{\Gamma}(x) \cap r - \text{int}\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$, existe $T > 0$ e uma trajetória C^1 $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow M \cup \{x\}$ tal que $x(0) = x$ e $\dot{x}(0) = v$.

Demonstração. Considerando coordenadas locais, podemos supor sem perda de generalidade, que a dimensão de M é N .

Recordemos que $\Gamma_{ext} : \{\overline{M} + \delta\mathbb{B}\} \rightrightarrows \mathbb{R}^N$, definida a partir de $\tilde{\Gamma} : \overline{M} \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ por

$$\Gamma_{ext}(x) = \tilde{\Gamma}(\text{proj}_{\overline{M}}(x)) \quad \text{sempre que } x \in \overline{M} + \delta\mathbb{B},$$

satisfaz $(HP2)_+$ (pois Γ satisfaz $(HP2)_+$).

Seja $x \in \overline{M}$ e $v \in \tilde{\Gamma}(x) \cap r - \text{int}\mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$. Também $v \in \tilde{\Gamma}(x) = \Gamma_{ext}(x)$ pois $\text{proj}_{\overline{M}}x = x$.

Logo pela Proposição 2.7, existe $T > 0$ e uma trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_{\Gamma_{ext}}$ tal que $\dot{x}(0) = v$ e $x(\cdot)$ é C^1 .

Se $x(t) \neq x$, mostremos que $x(t) \in M$, para todo t pequeno, (o qual termina a prova).

Sabemos que

$$\text{int}\mathcal{T}_C(c) = \{v \in \mathbb{R}^N : \exists \mu > 0 \text{ tal que } \langle \xi, v \rangle \leq -\mu \|\xi\|, \forall \xi \in N_C(c)\} \quad (3.1)$$

Reduzindo T , se é necessário, podemos ter

$$\|\dot{x}(s) - v\| \leq \frac{\mu}{2}, \quad \forall s \in (0, T) \quad (3.2)$$

Então $\forall t \in (0, T]$ e todo $\xi \in N_{\overline{M}}(x)$ temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{x(t) - x(0)}{t}, \xi \right\rangle &= \frac{1}{t} \int_0^t \langle \dot{x}(s), \xi \rangle ds = \frac{1}{t} \int_0^t \langle \dot{x}(s) - v + v, \xi \rangle ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \langle \dot{x}(s) - v, \xi \rangle ds + \frac{1}{t} \int_0^t \langle v, \xi \rangle ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|\dot{x}(s) - v\| \|\xi\| ds + \frac{1}{t} \langle v, \xi \rangle t \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\mu}{2} \|\xi\| ds + \langle v, \xi \rangle \\ &\leq \frac{1}{t} \frac{\mu}{2} \|\xi\| t - \mu \|\xi\| = -\frac{\mu}{2} \|\xi\|. \end{aligned}$$

Suponhamos que existe $t_n \rightarrow 0$, com $x(t_n) \notin M$. Seja $x_n = \text{proj}_{\overline{M}}(x(t_n))$ e

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{x(t_n) - x_n}{\|x(t_n) - x_n\|}, & \text{se } x(t_n) \notin \overline{M}, \\ \bar{\xi}_n, & \text{se } x(t_n) \in \overline{M} \end{cases}$$

onde $\bar{\xi}_n$ é qualquer vetor unitário em $N_{\overline{M}}(x(t_n))$.

Sem perda de generalidade, podemos supor $\xi_n \rightarrow \xi \in N_{\overline{M}}(x)$ obtendo:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{x(t) - x}{t_n}, \xi \right\rangle &= \left\langle \frac{x(t) - x}{t_n}, \xi - \xi_n \right\rangle + \left\langle \frac{x(t) - x}{t_n}, \xi_n \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{x(t) - x}{t_n}, \xi - \xi_n \right\rangle + \left\langle \frac{x(t) - x_n}{t_n}, \xi_n \right\rangle + \left\langle \frac{x_n - x}{t_n}, \xi_n \right\rangle \\ &\geq -\left\| \frac{x(t) - x}{t_n} \right\| \|\xi - \xi_n\| - \frac{1}{2\delta} \frac{\|\xi_n\|}{t_n} \|x_n - x\|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A justificação para as desigualdades são; respectivamente, a desigualdade de Cauchy-Schwartz, a definição de ξ_n e $\xi_n \in N_{\overline{M}}(x_n)$.

Observemos que:

$$\|x(t) - x\| = \left\| \int_0^t \dot{x}(s) ds \right\| \leq \int_0^t \|\dot{x}(s)\| ds \leq \|\tilde{\Gamma}\| t \quad (3.4)$$

e

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x(t_n)\| + \|x(t_n) - x\| \leq \|x(t_n) - x\| + \|x(t_n) - x\| = 2\|\tilde{\Gamma}\|t_n \quad (3.5)$$

Fazendo $t = t_n$ em (3.3), segue de (3.4) e (3.5) que

$$\left\langle \frac{x(t_n) - x}{t_n}, \xi \right\rangle \geq -\|\xi_n - \xi\|\|\tilde{\Gamma}\| - \frac{2}{\delta}\|\tilde{\Gamma}\|^2 t_n.$$

Passando o limite quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(t_n) - x(0)}{t_n}, \xi \right\rangle \geq 0.$$

Dado que $\dot{x}(0) = v$ e (3.1) segue que $-\mu\|\xi\| \geq \langle v, \xi \rangle \geq 0$. Logo $\mu\|\xi\| \leq 0$, mas como $\mu > 0$ segue que $\xi = 0$. Contradizendo ao fato que $\xi_n \rightarrow \xi$ e $\|\xi_n\| = 1$. Portanto $x(t) \in M$ para todo t próximo de zero. ■

O resultado anterior diz que sempre que $x \in \overline{M}_i$, qualquer velocidade que pertence a $\tilde{F}_i(x) \cap r - \text{int}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ será essencial. Isso leva à seguinte definição:

Definição 3.1. A multifunção velocidade essencial $G^\sharp : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é definida por:

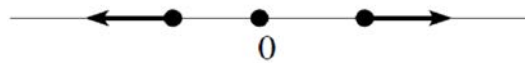
$$G^\sharp(x) = \bigcup_i \{\tilde{F}_i(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x) : x \in \overline{M}_i\}$$

Comparemos a multifunção $G^\sharp$ com G , $G(x) = \text{co}\{\tilde{F}_i(x) : x \in \overline{M}_i\}$. Temos que $G^\sharp$ esta entre F e G ; isto e, para cada x , temos:

$$F_i(x) \subseteq G^\sharp(x) \subseteq G(x), \quad \text{sempre que} \quad x \in M_i.$$

$G^\sharp$ não possui propriedades desejáveis tipicamente invocadas em inclusões diferenciáveis por exemplo a pesar seus valores são compactos, eles não necessariamente são convexos (violando (H1); nem seu grafo é necessariamente fechado violando (H2)).

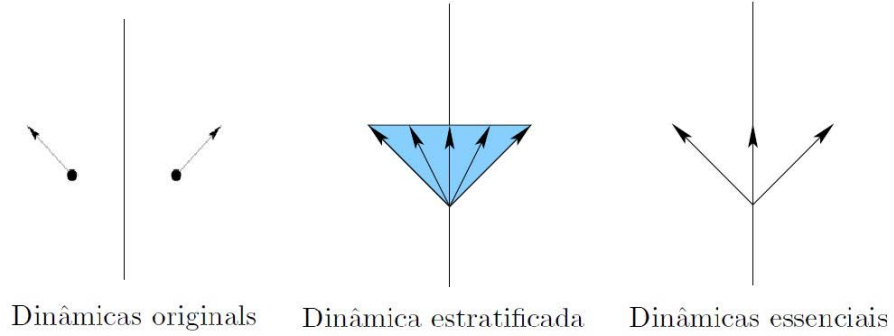
Exemplo 3.5. 1. Em $\mathbb{R}$. Sejam $F_1(x) = \{-1\}$ para $x < 0$, $F_2(x) = \{1\}$ para $x > 0$. A dinâmica G sobre 0 é $G(0) = [-1, 1]$ e $G^\sharp(0) = \{-1, 0, 1\}$.



2. Em $\mathbb{R}$. Sejam $F_1(x) = \{1\}$ para $x < 0$, $F_2(x) = \{-1\}$ para $x > 0$. A dinâmica G sobre 0 é $G(0) = [-1, 1]$ e $G^\sharp(0) = \{0\}$.



3. Em $\mathbb{R}^2$, consideremos a seguinte estratificação: $M_1 = \{(x, y)/x < 0, y \in \mathbb{R}\}$, $M_2 = \{(x, y)/x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ e $M_3 = \{(0, y)/y \in \mathbb{R}\}$ e sejam $F_1 = \{(-1, 1)\}$, $F_2 = \{(1, 1)\}$ e $F_3 = \{(0, 1)\}$ as dinâmicas respectivas. Observe que G difere de F apenas em $(x, y) = (0, y)$.



Proposição 3.2. Suponhamos que $x(\cdot) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$, seja uma solução de $(DI)_G$ definida sobre $[0, T)$. Então $\dot{x}(t) \in G^\sharp(x(t))$ para algum $t \in [0, T)$. Reciprocamente, se $v \in G^\sharp(x)$, então existe $T > 0$ e uma solução C^1 , $x(\cdot)$ de $(DI)_G$ com $\dot{x}(0) = v$

Demonstração. A primeira parte segue do fato

$$F_i(x) \subseteq G^\sharp(x) \subseteq G(x), \quad \text{sempre que} \quad x \in M_i.$$

De fato, como $x(\cdot) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$, pela Proposição 3.1 temos que para cada i , $x(\cdot)$ satisfaz $x(0) = x$ e $\dot{x}(t) \in F_i(x(t))$ q.t.p. e assim temos que $\dot{x}(t) \in G^\sharp(x(t))$; para algum $t \in [0, T)$.

Reciprocamente, seja $v \in G^\sharp(x)$, e seja i tal que $x \in \overline{M}_i$ e $v \in \tilde{F}_i(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$.

Se $v \in r - \text{int}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ então pelo Lema 3.1 existe $T > 0$ e uma trajetória de $(DI)_{F_i}$ $x(\cdot) : [0, T] \rightarrow M_i \cup \{x\}$, C^1 tal que $x(0) = x$ e $\dot{x}(0) = v$. Logo pela Proposição 3.1 é uma trajetória de $(DI)_G$.

Se $v \notin r - \text{int}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ então $v \in r - \text{fr}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ e pelo Lema 7.1 no Anexo existe um índice j para o qual $M_j \subseteq \overline{M}_i$, $x \in \overline{M}_j$, $v \in \mathcal{T}_{\overline{M}_j}(x)$ e $d_j < d_i$. Mostremos que $v \in \tilde{F}_j(x)$. De fato, já que $x \in \overline{M}_j$, existe $x_n \rightarrow x$ com $x_n \in M_j$. Seja $v_n = \text{proj}_{\tilde{F}_j(x_n)}(v)$, i.e. $d_{\tilde{F}_j(x_n)}(v) = \|v_n - v\|$. Fazendo $n \rightarrow \infty$ e como F_j é Lipschitz continua, temos que $v \in \tilde{F}_j(x)$ e assim $v \in \tilde{F}_j(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}_j}(x)$.

Podemos repetir este processo, mas termina uma vez que as dimensões das variedades vão diminuindo em cada passo, até que o vetor v se localize no interior relativo do cone tangente da variedade.

■

Para uma demonstração do Lema 7.1 ver [10].

3.3 Invariância em Sistemas Estratificados

3.3.1 Invariância Forte em Sistemas Estratificados

O Teorema 2.5 contem apenas uma condição suficiente, e por isso devemos buscar uma condição necessária para os sistemas estratificados. Este é o ponto onde as suposições de estratificação desempenham seu papel mais importante. Note que, estamos considerando um domínio estratificado $\{M_1, M_2, \dots, M_m\}$ juntamente com as dinâmicas estratificadas, encapsuladas em G . A proposição a seguir é uma consequência do Teorema 2.5.

Proposição 3.3. *Consideremos um sistema estratificado $(DI)_G$ introduzido acima. Suponha que $C \subseteq \mathbb{R}^N$ seja fechado e que (2.9) continua válido para $M = \mathbb{R}^N$ e $\Gamma = G$ i.e., existe $K > 0$ tal que*

$$x \in \mathbb{R}^N, c \in \text{proj}_C(x) \Rightarrow H_G(x, x - c) \leq K d_C^2(x). \quad (3.6)$$

Para i fixo, se $x(\cdot) : [a, b] \rightarrow \overline{M}_i$ é uma trajetória de G com $x(t) \in M_i$ para todo $t \in (a, b)$, então

$$d_C(x(b)) \leq e^{K(b-a)} d_C(x(a)).$$

Demonstração. Para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, o arco $x(\cdot)$ restrito a $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, (i.e., $x(\cdot) |_{[a + \epsilon, b - \epsilon]} : [a + \epsilon, b - \epsilon] \rightarrow \overline{M}_i$) está contido em M_i e portanto é uma trajetória de F_i .

Como (M_i, F_i) satisfaz $(HP2)_+$ então deve satisfazer a suposição de arco de Euler $(H5)$. Logo o arco restrito é um arco de Euler de F_i , e desde que $F_i(x) \subseteq G(x)$ sempre que $x \in M_i$, é também um arco de Euler para G .

Logo pelo Teorema 2.5, temos:

$$d_C(x(b - \epsilon)) \leq e^{K(b-a-2\epsilon)} d_C(x(a + \epsilon)).$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos:

$$d_C(x(b)) \leq e^{K(b-a)} d_C(x(a)).$$

■

Proposição 3.4. *Suponha que $C \subseteq \mathbb{R}^N$ seja fechado e que $(\mathbb{R}^N, G)$ é fortemente invariante sobre C . Então*

$$h_{G^\#}(x, -\xi) \geq 0 \quad \forall x \in C, \xi \in N_C^P(x). \quad (3.7)$$

Demonstração. Sejam $x \in C$ e $\xi \in N_C^P(x)$ tal que $\|\xi\| = 1$. Temos

$$\langle \xi, y - x \rangle \leq \frac{\|y - x\|^2}{2\sigma}, \quad \forall y \in C.$$

Fixemos $v \in G^\#(x)$. Pela Proposição 3.2 existem $T > 0$ e uma solução C^1 $x(\cdot)$ de $(DI)_G$ com $\dot{x}(0) = v$ e pela definição de invariância forte, temos que $x(t) \in C$ para todo $t \in [0, T]$.

Logo

$$\begin{aligned} \langle v, \xi \rangle &= \langle \dot{x}(0), \xi \rangle = \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t}, \xi \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{x(t) - x}{t}, \xi \right\rangle \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \langle x(t) - x, \xi \rangle \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \frac{\|x(t) - x\|^2}{2\sigma} \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|G\|^2 t}{2\sigma} = 0. \end{aligned}$$

Como $\langle v, \xi \rangle \leq 0$, $\max_{v \in G^\#(x)} \langle v, \xi \rangle \leq 0$. Portanto

$$h_{G^\#}(x, -\xi) \geq 0 \quad \forall x \in C, \xi \in N_C^P(x).$$

■

Passamos agora para a suficiência de (3.7) para a invariância forte.

Teorema 3.1. *Suponha que C seja fechado e $h_{G^\#}(c, -\xi) \geq 0$, $\forall c \in C, \xi \in N_C^P(c)$ então*

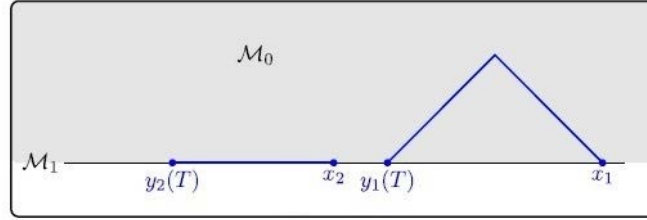
$$d_C(x(T)) \leq e^{KT} d_C(x(0)), \quad (3.8)$$

para qualquer $x(\cdot)$ que seja solução de $(DI)_G$.

Em particular $(\mathbb{R}^N, G)$ é fortemente invariante sobre C .

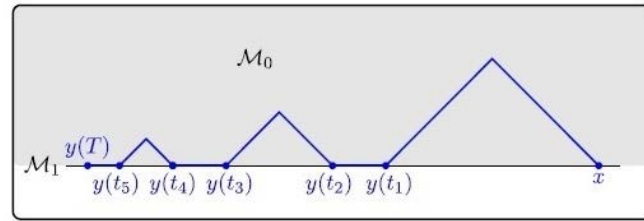
A prova consiste na análise de três tipos diferentes de trajetórias definidas em um intervalo de tempo finito $[0, T]$. O primeiro caso corresponde a trajetórias que permanecem numa única variedade, com exceção dos pontos inicial e final. Veja a ilustração na

Figura(a), onde y_1 e y_2 são trajetórias distintas da dinâmica estratificada. Este caso é tratado de forma independente na Proposição 3.3.



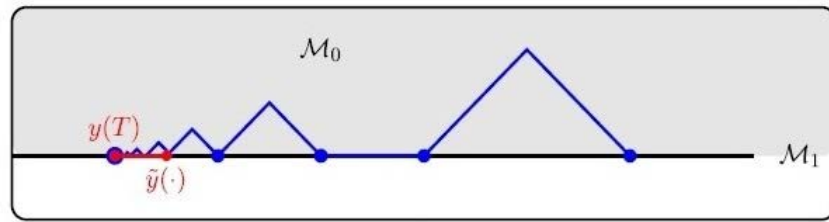
Figura(a)

O segundo tipo é estudado na Observação 3.2. Neste caso, as trajetórias têm a característica de poder ser decompostas em um número finito de trajetórias do primeiro tipo; veja o exemplo na Figura(b).



Figura(b)

No terceiro caso temos um tipo mais delicado de trajetórias para tratar, pois são aquelas que alternam de uma variedade para outra infinitas vezes em um intervalo finito, como na Figura(c). Para lidar com essas trajetórias, construímos uma trajetória aproximada, em vermelho, como na Figura(c).



Figura(c)

Antes da demonstração vamos fazer alguns lemas técnicos necessários à demonstração.

Lema 3.2. *Suponha que M_i seja um subdomínio e M seja união de subdomínios de altas dimensões, com $M_i \subseteq \overline{M}$. Suponha que M tenha a propriedade de que cada trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_G$ seja definida sobre $[a, b]$ com $x(t) \in M$ para todo $t \in [a, b]$, satisfaz*

$$d_C(x(b)) \leq e^{K(b-a)} d_C(x(a)). \quad (3.9)$$

Então para qualquer trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_G$ que esteja totalmente dentro de $M_i \cup M$, temos que (3.8) vale.

Observação 3.1. Como na prova da Proposição 3.3, a desigualdade (3.9) permanece válida se $x(a)$ e $x(b)$ não estão em M , dado que $x(t) \in M, \forall t \in (a, b)$.

Observação 3.2. A suposição (3.9) parece quasi-igual a conclusão (3.8).

De fato, se $x(\cdot)$ é uma trajetória, tal que $[a, b]$ possa ser particionado da seguinte forma

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_l = b$$

em que $x(\cdot) : (t_k, t_{k+1}) \rightarrow M \cup M_i, k = 0, 1, 2, \dots, l-1$ Se $x(\cdot)$ restrita a (t_k, t_{k+1}) estiver em M_i então

$$d_C(x(t_{k+1})) \leq e^{K(t_{k+1}-t_k)} d_C(x(t_k)), k = 0, 1, 2, \dots, l-1$$

Podemos então verificar que

$$\begin{aligned} d_C(x(t_l)) &\leq e^{K(t_l-t_{l-1})} d_C(x(t_{l-1})) \leq e^{K(t_l-t_{l-1})} e^{K(t_{l-1}-t_{l-2})} d_C(x(t_{l-2})) \\ &\leq \dots \leq e^{K(t_l-t_0)} d_C(x(t_0)) = e^{K(b-a)} d_C(x(a)). \end{aligned}$$

Em geral, nem todas as trajetórias são assim, e se pode até mesmo entrar e sair de M_i infinitamente (o chamado efeito Zenão), ou pode permanecer em M_i por períodos de tempo não triviais nunca densos (em nenhuma parte denso).

Quando isto acontece, não há nenhum procedimento óbvio em como colar as saídas individuais de M_i numa estimativa comum.

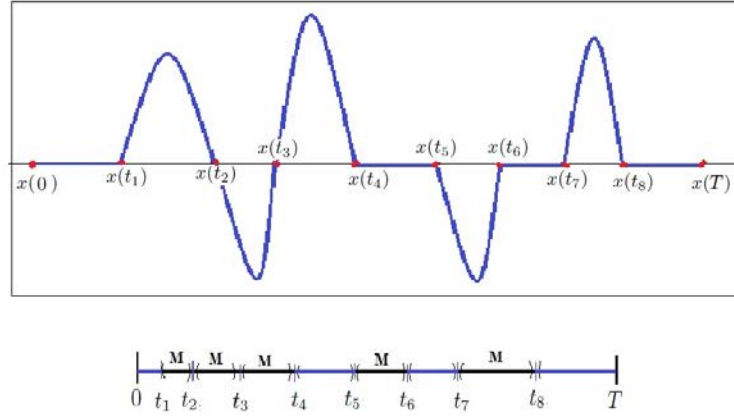
A prova a seguir do Lema 3.2, não obstante, encontra um caminho que constrói “arcos impulsivos” que se aproximam uniformemente de uma original e são bem comportados sobre intervalos de uma partição.

Prova do Lema 3.2. Por conveniência notacional, suponhamos que $x(0) \in M_i$ e $x(T) \in M_i$ segue de (3.9) que não existe perda de generalidade em fazer isto.

Seja $J := \{t \in [0, T] : x(t) \in M\}$, o qual é um conjunto aberto. Assim pode ser escrito como união de intervalos abertos:

$$J = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$$

onde os intervalos são 2 a 2 disjuntos.



Para l fixo, escrevemos

$$J_l = \bigcup_{k=1}^l (a_k, b_k)$$

que reindexando podemos supor que satisfaz

$$b_0 = 0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < b_3 \leq \dots \leq a_l < b_l \leq T =: a_{l+1}.$$

Notemos que para cada $k = 1, 2, \dots, l+1$, ambos $x(a_k)$ e $x(b_{k-1})$ pertencem a M_i .

Seja

$$r := \inf_{\substack{t \in [0, T] \\ y \in \overline{M}_i \setminus M_i}} \|x(t) - y\| > 0 \quad (3.10)$$

r é estritamente positivo, pois se $r = 0$, então $x(t) = y \in \overline{M}_i \setminus M_i, \forall t \in [0, T]$, e em particular, para $t = 0$, temos que $x(0) \notin M_i$ (Absurdo).

Escolha l suficientemente grande tal que

$$\mu(J - J_l) < \frac{r}{2e^{KT}\|G\|} \quad (3.11)$$

onde $\mu(I)$ denota a medida de Lebesgue de I e $\|G\|$ é o supremo de todas as velocidades relevantes que podem aparecer.

Notamos que $x(a_k)$ e $x(b_{k-1})$ pertencem a M_i , para todo $k = 1, 2, \dots, l+1$ e $x(t) \in M$, para todo $t \in (a_k, b_k)$. Da hipótese (3.9) e Observação (3.1), temos:

$$d_C(x(b_k)) \leq e^{K(b_k - a_k)} d_C(x(a_k)), \quad \forall k = 1, 2, \dots, l \quad (3.12)$$

Agora vamos construir arcos usando a Proposição 2.6 nos intervalos fechados complementares $[b_k, a_{k+1}]$ onde reside inteiramente dentro M_i , i.e., arcos $y(s) \in M_i \setminus M$, para todo

$s \in [b_k, a_{k+1}] \setminus J$.

Para $k = 0, \dots, l$. Definamos

$$\epsilon_k := \mu([b_k, a_{k+1}] \setminus J)$$

Seja $y_k(\cdot)$ o arco $x(\cdot)$ restrito ao intervalo. $[b_k, a_{k+1}]$ Nos calculamos a distância de $y_k(\cdot)$ para uma trajetória de (M_i, F_i) por

$$\rho_k = \rho_{[b_k, a_{k+1}]}(y_k(\cdot)) = \int_{b_k}^{a_k} \text{dist}(\dot{x}(s), F_i(y_k(s))) ds \leq 2\|G\|\epsilon_k.$$

A ultima desigualdade é pela Proposição 3.1 (recordemos que $y_k(t) = x(t)$ sobre $[b_k, a_{k+1}]$ e pela Proposição 3.1 $\dot{x}(t) \in F_i(x(t))$ q.t.p. no conjunto onde $x(t) \in M_i$.) Pela Proposição 2.6 existe uma trajetória $z_n(\cdot)$ de F_i tal que $z_k(b_k) = x(b_k) = y_k(b_k)$ e

$$\|y_k(a_{k+1}) - z_k(a_{k+1})\| \leq e^{K(a_{k+1}-b_k)}\rho_k \leq e^{K(a_{k+1}-b_k)}2\|G\|\epsilon_k. \quad (3.13)$$

Na notação da Proposição 2.6, temos que $\bar{t} = a_{k+1}$. Pois, para $b_k \leq t \leq a_{k+1}$

$$\rho_{[b_k, t]}(y_k(\cdot)) \leq 2\|G\|\mu((b_k, t)) \leq 2\|G\|\epsilon_k \leq 2\|G\| \sum_{k=0}^l \epsilon_k < 2\|G\| \frac{r}{2e^{KT}\|G\|}. \quad (3.14)$$

Na ultima desigualdade é usado (3.11). Manipulando (3.14) obtemos

$$\rho_{[b_n, t]}(y_n(\cdot)) < re^{-KT}$$

Logo $\bar{t} = a_{k+1}$.

Como $z_k(\cdot)$ é uma trajetória de F_i , permanecendo em M_i e satisfazendo as condições da Proposição 3.3, temos

$$d_C(z_k(a_{k+1})) \leq e^{K(a_{k+1}-b_k)}d_C(z_k(b_k)). \quad (3.15)$$

a ultima coisa que precisamos, é de fato trivial, como $y_k(t) = x(t), t \in [b_k, a_{k+1}]$ então $y_{k-1}(t) = x(t), t \in [b_{k-1}, a_k]$. Logo $y_{k-1}(a_k) = x(a_k)$. Assim

$$\begin{aligned} d_C(x(a_k)) &= d_C(y_{k-1}(a_k)) = d_C(y_{k-1}(a_k)) - d_C(z_{k-1}(a_k)) + d_C(z_{k-1}(a_k)) \\ &\leq \|y_{k-1}(a_k) - z_{k-1}(a_k)\| + d_C(z_{k-1}(a_k)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
d_C(x(a_{l+1})) &= d_C(x(T)) = d_C(y_l(a_{l+1})) \\
&\leq \|y_l(a_{l+1}) - z_l(a_{l+1})\| + d_C(z_l(a_{l+1})) && (\text{por (3.16)}) \\
&\leq e^{K(a_{l+1}-b_l)} d_C(z_l(b_l)) + 2\|G\|e^{K(a_{l+1}-b_l)}\epsilon_l && (\text{por (3.13) e (3.15)}) \\
&= e^{K(a_{l+1}-b_l)} (d_C(z_l(b_l)) + 2\|G\|\epsilon_l) \\
&= e^{K(a_{l+1}-b_l)} (d_C(x(b_l)) + 2\|G\|\epsilon_l) \\
&\leq e^{K(a_{l+1}-b_l)} (e^{K(b_l-a_l)} d_C(x(a_l)) + 2\|G\|\epsilon_l) && (\text{por (3.12)}) \\
&\leq e^{K(a_{l+1}-a_l)} (d_C(x(a_l)) + 2\|G\|\epsilon_l). \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Repetindo o argumento anterior no intervalo $[a_{l-1}, a_l]$ da uma desigualdade semelhante

$$d_C(x(a_l)) \leq e^{K(a_l-a_{l-1})} (d_C(x(a_{l-1})) + 2\|G\|\epsilon_{l-1}).$$

Insertando (3.17) temos

$$d_C(x(T)) \leq e^{K(T-a_l)} (d_C(x(a_{l-1})) + 2\|G\|(\epsilon_{l-1} + \epsilon_l))$$

Depois de l -passos, o resultado é:

$$\begin{aligned}
d_C(x(T)) &\leq e^{K(T-a_1)} (d_C(x(a_1)) + 2\|G\|(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{l-1} + \epsilon_l)) \\
&= e^{KT} [d_C(x) + 2\|G\| \sum_{n=1}^l \epsilon_n].
\end{aligned}$$

Note que $\sum_{n=1}^l \epsilon_n = \mu(J \setminus J_l)$. Pois

$$\sum_{n=0}^l \epsilon_n = \sum_{n=0}^l \mu([b_n, a_{n+1}] \cap J) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^l [b_n, a_{n+1}] \cap J\right) = \mu(J_l^c \cap J) = \mu(J \setminus J_l).$$

Como $\mu(J \setminus J_l) \rightarrow 0$ quando $l \rightarrow \infty$, obtemos $d_C(x(T)) \leq e^{KT} d_C(x)$. ■

Prova do teorema 3.1. Usaremos o lema 3.2 para terminar a prova do teorema 3.1.

Dada trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_G$ definida sobre $[0, T]$, então devemos mostrar que

$$d_C(x(T)) \leq e^{KT} d_C(x(0)).$$

Seja i o único índice com $x(0) = x \in M_i$. A prova será feita por indução a respeito da

dimensão d_i de M_i . Suponha que $d_i = N$. Seja

$$\tilde{T} = \min\{T, Esc(x(\cdot), M_i, G)\} > 0.$$

Recordemos que isto implica que $x(t) \in M_i$ para $0 \leq t \leq \tilde{T}$ e cada $\tilde{T} = T$ ou $x(\tilde{T}) \in frM_i = \overline{M_i} \setminus M_i$. A estimativa (3.8) se cumpre com T substituído por $\tilde{T}$ (pela Proposição 3.3).

Como uma hipótese de indução suponha que o resultado seja válido para dimensão $d \leq N$.

(HI) Se $d_i \geq d$ então existe $\tilde{T} > 0$ tal que (3.8) se cumpre com T substituído por qualquer $\tilde{t} \in [0, \tilde{T}]$

Paso 1. Debemos verificar o caso quando $d = N$, neste caso $d_i = N$ então se verifica pela primeira parte.

Paso 2. A fim de mostrar que vale para variedades de dimensão maior ou igual a $d - 1$, suponha que $d_i = d - 1$ e seja

$$M = \bigcup_{j \neq i} \{M_j/M_i \cup \overline{M_j} \neq \emptyset\}.$$

A estratificação considerada implica $M_i \subset \overline{M_j}$ para todo j nesta união e portanto $d_j \geq d_i + 1 \geq d$ para todo j .

Mostremos que M satisfaz (3.9) no Lema 3.2.

Suponhamos $y(\cdot) : [a, b] \rightarrow M$ é uma trajetória de $(DI)_G$. Seja

$$\tilde{b} = \sup\{t \in [a, b] : d_C(y(t)) \leq e^{K(b-a)} d_C(y(a))\}.$$

Como $y(a)$ se localiza num subdomínio de dimensão maior ou igual a d , a hipótese de indução implica que $a < \tilde{b} = b$. De fato, pois se $\tilde{b} < b$ então $y(\tilde{b}) \in M$ e a hipótese de indução implica que existe $\tilde{T} > 0$, assim cada $0 \leq \tilde{t} \leq \tilde{T}$ satisfaz

$$d_C(y(\tilde{b} + \tilde{t})) \leq e^{K\tilde{t}} d_C(y(\tilde{b})) \leq e^{K(\tilde{b} + \tilde{t} - a)} d_C(y(a)),$$

Contradizendo, ao fato de que $\tilde{b}$ é o supremo, logo a afirmação é provada.

Recordemos que $x(0) \in M_i$ e $d_i = d - 1$, podemos concluir que $x(t) \in M_i \cup M$ para todo $0 \leq t \leq \tilde{T}$ pequeno. Como $x(\cdot)$ é continua e $x(0)$ esta a uma distancia positiva de $\overline{M_i} \setminus M_i$ e cada outro subdomínio que tem dimensão menor o igual a $d - 1$. Aplicando o Lema 3.2 sobre o intervalo $[0, \tilde{T}]$ o ultimo passo da indução é completa.

Para finalizar a prova, procedemos da mesma maneira que acima, para verificar que M satisfaz (3.9).

De fato, seja

$$\tilde{T} := \sup \{t \in [0, T] : d_C(x(t)) \leq e^{K(t-a)} d_C(x(0))\}.$$

Pode-se mostrar que $\tilde{T} = T$ precisamente da mesma maneira que foi mostrado $\tilde{b} = b$.

A prova esta agora completa. ■

3.3.2 Invariância Fraca em Domínios Estratificados

Agora vamos a caracterizar invariância fraca para um sistema estratificado, da mesma forma como fizemos a caracterização da invariância forte com a desigualdade de Hamilton-Jacobi introduzindo $G^\sharp$.

Suponha que $M \subseteq \mathbb{R}^N$ seja uma variedade imersa, e a multifunção $\Gamma : M \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ satisfaz (HP2), e $C \subseteq \mathbb{R}^N$ seja um conjunto fechado. Então (M, Γ) diz-se ser fracamente invariante sobre C num conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}^N$ se para todo $x \in C \cap M \cap U$, existe uma trajetória $x(\cdot)$ de $(DI)_\Gamma$ sobre $[0, T)$ (com $T = Esc(x(\cdot), M \cap U, \Gamma)$) tal que $x(t) \in C \cap U$ para todo $t \in [0, T)$.

Teorema 3.2. *Suponha que são dados um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$, um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^N$, e um sistema estratificado. Então $(\mathbb{R}^N, G)$ é invariante fracamente sobre C em U se e só se*

$$h_{G^\sharp}(x, \xi) \leq 0 \quad \text{para todo } x \in C \cap U, \xi \in N_C^P(x). \quad (3.18)$$

Demonstração. Como $G^\sharp \subseteq G$, temos $h_G \leq h_{G^\sharp}$ pois

$$h_G(x, \xi) = \inf_{v \in G(x)} \langle v, \xi \rangle \leq \inf_{v \in G^\sharp(x)} \langle v, \xi \rangle = h_{G^\sharp}(x, \xi).$$

Então podemos concluir que $(\mathbb{R}^N, G)$ é invariante fracamente sobre C em U , pelo Teorema 2.4 em [1].

Reciprocamente, suponha que $(\mathbb{R}^N, G)$ seja invariante fracamente sobre C em U , e seja $x \in C \cap U$ e $\xi \in N_C^P(x)$. Pela invariância fraca, existe uma solução $x(\cdot)$ de $(DI)_G$ tal que $x(t) \in C \cap U$ para todo $t \in [0, T)$.

Seja $t_k \rightarrow 0$ tal que $x_k = x(t_k)$ satisfaz $\frac{x_k - x}{t_k} \rightarrow v$ para algum v . Temos

$$\begin{aligned} \langle v, \xi \rangle &= \left\langle \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x}{t_k}, \xi \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{x_k - x}{t_k}, \xi \right\rangle \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\xi\| \|x_k - x\|^2}{2\sigma t_k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|G\|^2 t_k^2}{2\sigma t_k} = 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

pois

$$\|x_k - x(0)\| = \left\| \int_0^{t_k} \dot{x}(s) ds \right\| \leq \int_0^{t_k} \|\dot{x}(s)\| ds \leq \|G\| t_k.$$

Assim $\langle v, \xi \rangle \leq 0$.

Mostremos que

$$v \in \text{co}G^\#(x). \quad (3.20)$$

Seja $J_i^k := \{t \in [0, t_k] : x(t) \in M_i\}$ e denotemos $\bar{i}(x)$ para os índices para os quais $\mu_i^k := \text{meas}(J_i^k) > 0$ para todo k . Então $i \in \bar{i}(x)$ implica que $x \in \overline{M}_i$. De fato, $i \in \bar{i}(x)$ então $\text{meas}(J_i^k) > 0$ logo existe $s_k^i \in J_i^k$ tal que $s_k^i \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, logo $x(s_k^i) \rightarrow x(0) = x$, então $x \in \overline{M}_i$.

Sem perda de generalidade, podemos admitir que para cada $i \in \bar{i}(x)$ existem $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $v_i \in \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\frac{\mu_i^k}{t_k} \rightarrow \lambda_i \quad \sum_{i \in \bar{i}(x)} \lambda_i = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\mu_i^k} \int_{J_i^k} \dot{x}(t) dt \rightarrow v_i, k \rightarrow \infty$$

Mostremos que $v_i \in \tilde{F}_i(x)$. De fato,

$$\begin{aligned} v_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_i^k} \int_{J_i^k} \dot{x}(t) dt \\ &\in \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\mu_i^k} \int_{J_i^k} \tilde{F}_i(x) dt + \frac{1}{\mu_i^k} \int_{J_i^k} k \|x(t) - x\| \mathbb{B} dt \right) \quad \tilde{F}_i \text{ Lipschitz} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\tilde{F}_i(x)}{\mu_i^k} \cdot \text{meas}(J_i^k) + \frac{k}{\mu_i^k} \left(\int_{J_i^k} \|x(t) - x\| dt \right) \mathbb{B} \right) \\ &\subseteq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\tilde{F}_i(x) + \frac{k}{\mu_i^k} \|G\| \left(\int_{J_i^k} t dt \right) \mathbb{B} \right) \\ &\subseteq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\tilde{F}_i(x) + \frac{k}{\mu_i^k} \|G\| \left(\int_{J_i^k} t_k dt \right) \mathbb{B} \right) = \tilde{F}_i(x). \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned}
v &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x(t_k) - x(t_0)}{t_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \int_0^{t_k} \dot{x}(t) dt \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{t_k} \sum_{i \in \bar{i}(x)} \int_{J_i^k} \dot{x}(t) dt = \sum_{i \in \bar{i}(x)} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu_i^k}{t_k} \left(\frac{1}{\mu_i^k} \int_{J_i^k} \dot{x}(t) dt \right) \\
&= \sum_{i \in \bar{i}(x)} \lambda_i v_i \in \sum_{i \in \bar{i}(x)} \lambda_i \tilde{F}_i(x).
\end{aligned}$$

Como $v_i \in \tilde{F}_i(x)$ e $\sum_{i \in \bar{i}(x)} \lambda_i = 1$, $0 \leq \lambda_i \leq 1$ e $v = \sum_{i \in \bar{i}(x)} \lambda_i v_i$, pela definição de envoltório convexo temos que $v \in \text{co}\{\tilde{F}_i(x) : x \in \overline{M}_i, i \in \bar{i}(x)\}$.

Agora seja $M = \bigcup_{i \in \bar{i}(x)} M_i$. Como $x_k = x(t_k) \in M$ para todo k grande (quando k é muito grande t_k pertence a J_i^k . Assim $x(t_k) \in M_i$ e consequentemente a M), também $x(t_k) \in \overline{M}$ e $x \in M_i$ então $x \in \overline{M}$, logo temos $v \in \mathcal{T}_{\overline{M}}(x)$.

Sabemos $F_i(y) \subseteq \mathcal{T}_{M_i}(y)$ sempre que $y \in M_i$. Assim

$$\tilde{F}_i(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}}(x) = \tilde{F}_i(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$$

sempre que $x \in \overline{M}_i$. Logo

$$\begin{aligned}
\left\{ \text{co} \bigcup_{i \in \bar{i}(x)} \tilde{F}_i(x) \right\} \cap \mathcal{T}_{\overline{M}}(x) &\subset G(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}}(x) = \text{co}\{\tilde{F}_i(x) : x \in \overline{M}_i\} \cap \mathcal{T}_{\overline{M}}(x) \\
&= \text{co}\{\tilde{F}_i(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}}(x) : x \in \overline{M}_i\} \\
&= \text{co}\{\tilde{F}_i(x) \cap \mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x) : x \in \overline{M}_i\} \\
&= \text{co}G^\sharp(x).
\end{aligned}$$

Logo $v \in \text{co}G^\sharp(x)$.

Para terminar a prova precisamos da seguinte afirmação.

Afirmação:

$$h_{G^\sharp}(x, \xi) = \inf_{v' \in G^\sharp(x)} \langle v', \xi \rangle = \inf_{v' \in \text{co}G^\sharp(x)} \langle v', \xi \rangle.$$

De fato, como $G^\sharp(x) \subset \text{co}G^\sharp(x)$ então $\inf_{v' \in \text{co}G^\sharp(x)} \langle v', \xi \rangle \leq \inf_{v' \in G^\sharp(x)} \langle v', \xi \rangle$.

Agora vejamos a outra desigualdade; seja $S = G^\sharp(x)$

$$\inf_{v' \in S} \langle v', \xi \rangle \leq \inf_{v' \in \text{co}S} \langle v', \xi \rangle.$$

Existe $v_0 \in \text{co}S$ tal que $\inf_{v' \in \text{co}S} \langle v', \xi \rangle = \langle v_0, \xi \rangle$, também existem $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ e

$\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ tal que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $v_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ então temos:

$$\langle v_0, \xi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \xi \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, \xi \rangle \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \inf_{v' \in S} \langle v, \xi \rangle = \inf_{v' \in S} \langle v, \xi \rangle.$$

Então

$$\inf_{v' \in S} \langle v', \xi \rangle = \inf_{v' \in coS} \langle v', \xi \rangle.$$

A afirmação queda provada.

Voltando a nossa prova, pela afirmação e Equação (3.20) temos

$$h_{G^\#}(x, \xi) = \inf_{v' \in G^\#(x)} \langle v', \xi \rangle = \inf_{v' \in coG^\#(x)} \langle v', \xi \rangle \leq \langle v, \xi \rangle \leq 0.$$

■

CAPÍTULO 4

TEORIA DE LYAPOUNOV

Neste capítulo caracterizaremos sistemas fracamente decrescentes na forma do chamado domínio estratificado, definiremos funções de Lyapounov nestes domínios, e fornecemos condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada.

A teoria de estabilidade é essencial em no estudo de sistemas em engenharia. Grosso modo um ponto de equilíbrio diz se estável se todas soluções que iniciam próximas ao ponto de equilíbrio permanecem próximas do ponto de equilíbrio, caso contrario o ponto de equilíbrio é instável. Um ponto de equilíbrio diz-se assintoticamente estável se todas as soluções que iniciam próximas do ponto de equilíbrio não somente permanecem próximas ao ponto de equilíbrio, mas tendem ao ponto de equilíbrio a medida que o tempo se aproxima do infinito. De maneira mais formal temos a seguinte definição.

Considere a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

onde f é uma função suave de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, e suponha que x^* é um ponto de equilíbrio de f , i.e., $f(x^*) = 0$. Se para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^N$ a solução $x(\cdot)$ da equação diferencial satisfazendo $x(0) = \alpha$, existe sobre $[0, \infty)$ e tem a propriedade de que $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow \infty$ então o ponto de equilíbrio é dito “globalmente assintoticamente estável”.

Um critério simples, mas de grande alcance para garantir essa estabilidade assintótica pode ser dada em termos de funções de Lyapounov. O método foi introduzido por A. M. Lyapounov (1892) na teoria de equações diferenciais.

Com isto em mente, é natural poder proceder no caso de uma inclusão diferencial $\dot{x} \in F(x)$.

Suponhamos que $\Gamma : \mathbb{R}^N \rightrightarrows \mathbb{R}^N$ uma multifunção. Consideremos a inclusão diferencial

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)) \quad \text{q.s.} \quad t \in [0, T), T < +\infty \text{ ou } T = \infty.$$

O ponto x^* é um ponto de equilíbrio se $0 \in \Gamma(x^*)$.

Definição 4.1. Se para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^N$ existe uma trajetória $x(\cdot)$ para Γ sobre $[0, T)$, tendo $x(0) = \alpha$ tal que $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow T$ então dizemos que o ponto de equilíbrio x^* é dito “globalmente assintoticamente estável”.

Como no caso de equações diferenciais, a estabilidade assintótica global pode ser dada em termos de funções de Lyapounov. Suponha que duas funções suaves Q, W existam e são tais

- i) $Q(x) \geq 0, W(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$;
- ii) O conjunto $\{x \in \text{dom}Q \subseteq \mathbb{R}^N : Q(x) \leq q\}$ são compactos $\forall q \in \mathbb{R}$; e
- iii) $\min_{v \in \Gamma(x)} \langle \nabla Q(x), v \rangle \leq -W(x), \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Dadas estas condições, x^* é globalmente assintoticamente estável. Com relação a esta definição, é essencial desenvolver uma teoria englobando funções de Lyapounov não suaves; a proposta neste sentido é a seguinte:

Sejam $Q, W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ o conjunto de funções de $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ que são semicontínuas inferiormente (s.c.i) e satisfazem as propriedades i), ii). A propriedade iii) é substituída por: Para cada x , para cada $\zeta \in \partial_P Q(x), \exists v \in \Gamma(x)$ tal que $\langle \zeta, v \rangle \leq -W(x)$. Expressando esta forma proximal em termos do Hamiltoniano inferior h , obtemos a seguinte definição.

Duas funções $Q, W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ são ditas um par de Lyapounov para x^* se satisfazem as seguintes propriedades:

- i) $Q(x) \geq 0, W(x) \geq 0$ para todo $x \in M$ e $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$;
- ii) O conjunto $\{x \in \text{dom}Q \subseteq \mathbb{R}^N : Q(x) \leq q\}$ são compactos $\forall q \in \mathbb{R}$; e
- iii) $h_\Gamma(x, \partial^P Q(x)) \leq -W(x), \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Definamos o que é um sistema fracamente decrescente.

Definição 4.2. *Seja $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$. O sistema (φ, Γ) é fracamente decrescente se para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^N$, existe uma trajetória x de Γ sobre $[0, T)$ com $x(0) = \alpha$, tal que*

$$\varphi(x(t)) \leq \varphi(x(0)) = \varphi(\alpha) \quad \forall t \in [0, T).$$

Agora mencionamos um teorema que pode ser encontrado em ([1], pág.212).

Teorema 4.1. *(φ, Γ) é fracamente decrescente se e só se $h_\Gamma(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.*

Olhando para a condição *iii*) temos que (Q, Γ) é fracamente decrescente. I.e. para aplicar o método de Lyapounov para estabilidade nos necessitamos considerar sistemas fracamente decrescentes.

O objetivo é analisar o teorema de Lyapounov em domínios estratificados. Primeiramente caracterizaremos quando um sistema estratificado é fracamente decrescente.

4.1 Sistema Estratificado Fracamente Decrescentes

Teorema 4.2. *Suponha $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ e um sistema estratificado são dados. Então (φ, G) é fracamente decrescente se e só se*

$$h_{G^\sharp}(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^N. \quad (4.1)$$

Demonstração. Suponha que (4.1) valha. Como $G^\sharp(x) \subseteq G(x)$ então $h_G \leq h_{G^\sharp}$. Assim

$$h_G(x, \partial^P \varphi(x)) \leq h_{G^\sharp}(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0 \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Pelo Teorema 4.1 o sistema (φ, G) é fracamente decrescente.

Para demonstrar a recíproca, primeiramente provemos duas afirmações.

Afirmacão 1: Se (φ, G) é fracamente decrescente então $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ é fracamente invariante sobre $\text{epi}\varphi$.

De fato, para qualquer $x = (x^1, x^2) \in \text{epi}\varphi$ temos $\varphi(x^1) \leq x^2$, dado que $x^1 \in \mathbb{R}^N$. Como (φ, G) é fracamente decrescente existe uma trajetória $x^1(\cdot)$ de G sobre $[0, T]$ com $x^1(0) = x^1$ tal que

$$\varphi(x^1(t)) \leq \varphi(x^1(0)) = \varphi(x^1) \leq x^2, \forall t \geq 0. \quad (4.2)$$

Também existe $x^2(t) = x^2$, para todo $t \geq 0$ tal que $x^2(\cdot)$ é trajetória de $\{0\}$. Assim existe $x(t) = (x^1(t), x^2(t))$ trajetória de $G \times \{0\}$ tal que $x(0) = (x^1(0), x^2(0)) = (x^1, x^2)$. Segue de (4.2) que

$$x(t) = (x^1(t), x^2(t)) \in \text{epi}\varphi, \forall t \geq 0,$$

i.e., $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ é fracamente invariante sobre $\text{epi}\varphi$.

Afirmacão 2: $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ é fracamente invariante se e só se

$$h_{G^\# \times \{0\}}((\xi, \lambda), (x, y)) \leq 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \text{epi}\varphi \text{ e } (\xi, \lambda) \in N_{\text{epi}\varphi}^P(x, r).$$

Como $G^\#$ está contida em G , temos que $G^\# \times \{0\}$ esta contido em $G \times \{0\}$. Logo $h_{G \times \{0\}} \leq h_{G^\# \times \{0\}}$. Se $h_{G^\# \times \{0\}} \leq 0$ então $h_{G \times \{0\}} \leq 0$ implicando que $G \times \{0\}$ seja invariante fracamente sobre $\text{epi}\varphi$. (Isto segue pelo Teorema 2.4 de [1]).

Reciprocamente suponha que $(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, G \times \{0\})$ seja fracamente invariante sobre $\text{epi}\varphi$. Sejam $z = (x, y) \in \text{epi}\varphi$ e $(\xi, \lambda) \in N_{\text{epi}\varphi}^P(x, r)$. Pela invariância fraca existe uma solução $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ de $G \times \{0\}$ que pertence ao $\text{epi}\varphi$ para todo $t \in [0, T]$.

Seja t_n tal que $z_n = z(t_n)$ satisfaz $\frac{z_n - z}{t_n} \rightarrow (v, w) = v'$, para algum $v' \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Assim temos:

$$\begin{aligned} \langle (v, w), (\xi, \lambda) \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{(x_n, y_n) - (x, y)}{t_n}, (\xi, \lambda) \right\rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{(x_n - x, y_n - y)}{t_n}, (\xi, \lambda) \right\rangle \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|(\xi, \lambda)\|}{2\sigma t_n} \|(x_n - x, y_n - y)\|^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

pois $(\xi, \lambda) \in N_{\text{epi}\varphi}^P(x, r)$. Como $\dot{z}(t) \in G \times \{0\}(z(t))$, segue que $\dot{x}(t) \in G(x(t))$, $x(0) = x$ e $\dot{y}(t) = 0, y(0) = y$. Logo

$$\begin{aligned} \|(x(t_n) - x(0), y(t_n) - y(0))\| &= \|x(t_n) - x(0)\| + \|y(t_n) - y(0)\| \\ &= \left\| \int_0^{t_n} \dot{x}(t) dt \right\| + \left\| \int_0^{t_n} \dot{y}(t) dt \right\| \leq \int_0^{t_n} \|\dot{x}(t)\| dt \leq \|G\| t_n \end{aligned}$$

Assim continuando com nossa desigualdade (4.3), obtemos:

$$\langle (v, w), \xi, \lambda \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|(\xi, \lambda)\|}{2\sigma t_n} \right) \|G\|^2 t_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|(\xi, \lambda)\|}{2\sigma} \right) \|G\|^2 t_n = 0.$$

Mas

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(t_n) - y(0)}{t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_n} \int_0^{t_n} \dot{y}(s) ds = 0$$

e logo $\langle v, \xi \rangle = \langle (v, 0), (\xi, \lambda) \rangle \leq 0$.

Procedendo da mesma forma como fizemos na demonstração da Equação (3.20) podemos obter:

$$v \in coG^\#(x).$$

Logo temos

$$\begin{aligned} h_{G^\# \times \{0\}}((x, y), (\xi, \lambda)) &= \inf_{(v', w') \in G^\# \times \{0\}(x, y)} \langle (v', w'), (\xi, \lambda) \rangle \\ &= \inf_{v' \in G^\#(x)} \langle v', \xi \rangle \\ &= \inf_{v' \in coG^\#(x)} \langle v', \xi \rangle \\ &\leq \langle v, \xi \rangle \leq 0, \end{aligned}$$

o que completa a prova da Afirmação 2.

Continuando com a demonstração da recíproca de nosso teorema, notemos o significado da desigualdade hamiltoniana: Para $x \in \mathbb{R}^N$ $\xi \in \partial^P \varphi(x)$ nos temos $h_{G^\#}(x, \xi) \leq 0$.

Suponhamos que (φ, G) é fracamente decrescente então segue da Afirmação 1 que $(epi\varphi, G \times \{0\})$ é fracamente invariante sobre $epi\varphi$. Isto é caracterizado através da Afirmação 2, que para qualquer $(\xi, \lambda) \in N_{epi\varphi}^P(x, r)$ onde $(x, r) \in epi\varphi$ temos:

$$\min_{(v, 0) \in G^\# \times \{0\}(x, r)} \langle (\xi, \lambda), (v, 0) \rangle \leq 0.$$

Agora como $\xi \in \partial_P \varphi(x)$, então $(\xi, -1) \in N_{epi\varphi}^P(x, \varphi(x))$ e logo segue-se que:

$$\min_{(v, 0) \in G^\# \times \{0\}(x, r)} \langle (\xi, -1), (v, 0) \rangle = \min_{v \in G^\#(x)} \langle \xi, v \rangle \leq 0,$$

donde $h_{G^\#}(x, \xi) \leq 0$.

■

4.2 Teoria de Lyapounov em Domínios Estratificados

Estamos considerando um domínio estratificado $\{M_1, \dots, M_m\}$ juntamente com dinâmicas estratificadas. Apresentaremos uma definição que caracteriza a duas funções de Lyapounov em domínios estratificados.

Definição 4.3. x^* é um ponto de equilíbrio da multifunção G se $0 \in G(x^*)$. (G satisfaz (HP1)).

Agora vamos a definir quando duas funções são ditas um par de Lyapounov. Como acima, temos que pedir que (Q, G) seja fracamente decrescente. Assim nossa definição fica.

Definição 4.4. Duas funções Q e $W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ são ditas um par de Lyapounov para x^* associado à multifunção G , se eles satisfazem as seguintes propriedades.

- i) $Q(x) \geq 0, W(x) \geq 0$ e $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$;
- ii) Os conjuntos de nível $\{x \in \mathbb{R}^N, Q(x) \leq q\}$ são compactos, $\forall q \in \mathbb{R}$ e
- iii) Para cada x , para cada $\xi \in \partial^P Q(x)$, existe $v \in G^\#(x)$ tal que $\langle \xi, v \rangle \leq -W(x)$.

A condição iii) pode ser expressado em termos do Hamiltoniano minimizado

$$\text{iii) } h_{G^\#}(x, \partial^P Q(x)) \leq -W(x), \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Proposição 4.1. Se Q e W em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ forma um par de Lyapounov para x^* , então existe uma função $\widetilde{W}$ para o qual $(Q, \widetilde{W})$ continua sendo um par de Lyapounov para x^* , onde $\widetilde{W}$ é localmente Lipschitz.

Demonstração. Para a prova, considere $\widetilde{W} := \min\{W(y) + \|x - y\| : y \in \mathbb{R}^N\}$.

■

Teorema 4.3 (Teorema de Lyapounov para Domínios Estratificados). Seja $0 \in G(x^*)$, e suponha que existem $Q, W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ tal que (Q, W) seja um par Lyapounov para x^* . Então para qualquer $\alpha \in \text{dom} Q$, existe uma trajetória x para G sobre $[0, \infty)$, tendo $x(0) = \alpha$ tal que $x(t) \rightarrow x^*$, quando $t \rightarrow \infty$. (i.e. x^* é globalmente assintoticamente estável).

Demonstração. Seja (Q, W) um par de Lyapounov para x^* , e seja $\alpha \in \text{dom} Q$. Definamos:

$$\begin{aligned} \widetilde{Q} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \widetilde{Q}(x, y) = Q(x) + y \end{aligned}$$

e a multifunção

$$\begin{aligned} \widetilde{G} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \widetilde{G}(x, y) = G(x) \times \{W(x)\} = \text{co}\{\overline{F}_i(x) \times W(x) : x \in \overline{M}_i\}. \end{aligned}$$

Mostremos que o sistema $(\tilde{Q}, \tilde{G})$ é fracamente decrescente.

Pelo Teorema 4.2 anterior, só temos que verificar que $h_{\tilde{G}^\#}((x, y), \partial^P \tilde{Q}(x, y)) \leq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$.

Seja $(\xi, r) \in \partial^P \tilde{Q}(x, y)$, então pela definição de $\tilde{Q}$ temos que $\xi \in \partial_P Q(x)$ e $r = 1$. Logo $(\xi, 1) \in \partial^P \tilde{Q}(x, y)$ e por *iii*) temos a existência $v \in G^\#(x)$ tal que $\langle \xi, v \rangle \leq -W(x)$ para todo $\xi \in \partial^P Q(x)$. Assim

$$\begin{aligned} h_{\tilde{G}^\#}((x, y), (\xi, 1)) &= \min_{(v_1, v_2) \in \tilde{G}^\#(x, y)} \langle (v_1, v_2), (\xi, 1) \rangle \\ &= \min_{v_1 \in G^\#(x)} \langle v_1, \xi \rangle + W(x) \\ &\leq \langle v, \xi \rangle + W(x) \leq -W(x) + W(x) = 0. \end{aligned}$$

De forma que $(\tilde{Q}, \tilde{G})$ é fracamente decrescente. Isto implica que existe uma trajetória $(x(\cdot), y(\cdot))$ de $\tilde{G}$ começando em $(\alpha, 0)$ e satisfazendo

$$\tilde{Q}(x(t), y(t)) \leq \tilde{Q}(\alpha, 0) = Q(\alpha) \quad \text{para } t \geq 0$$

ou seja

$$Q(x(t)) + y(t) \leq Q(\alpha), \tag{4.4}$$

onde $x(\cdot)$ é uma trajetória de G e $y(\cdot)$ é trajetória de $\{W(x)\}$. Então,

$$\dot{y}(t) = W(x(t)) \Rightarrow y(t) = \int_0^t W(x(s)) ds.$$

De (4.4) segue que

$$Q(x(t)) + \int_0^t W(x(s)) ds \leq Q(\alpha),$$

onde $Q(x(t))$ e $\int_0^t W(x(s)) ds$ são limitadas. Como G é limitada temos que $\dot{x}(t) \in G(x(t))$ é limitada, $x(\cdot)$ é Lipschitz sobre $[0, \infty)$ (com constante de Lipschitz k).

Temos ainda que mostrar que $x(t) \rightarrow x^*$, quando $t \rightarrow \infty$. Esta parte será feita por contradição.

Suponhamos que $x(t)$ não convirja a x^* quando $t \rightarrow \infty$, então para algum $\epsilon > 0$ existem pontos $t_i \rightarrow \infty$ tal que $\|x(t_i) - x^*\| \geq \epsilon$, ($i = 1, 2, \dots$).

Podemos admitir que $t_{i+1} - t_i > \frac{\epsilon}{2k}$. Seja $\eta > 0$ tal que:

$$\|x - x^*\|_\infty \geq \|u - x^*\| \geq \frac{\epsilon}{2} \implies W(u) \geq \eta.$$

Como (Q, W) forma um par de Lyapounov para x^* , pela Proposição 4.1 existe uma função $\widetilde{W}$ para a qual $(Q, \widetilde{W})$ continua sendo um par de Lyapounov para x^* , onde $\widetilde{W}$ é localmente Lipschitz.

A fim de não sobrecarregar a notação, vamos a manter $\widetilde{W}$ como W .

Assim η existe, pois W é continua e positiva sobre o anelo em questão. Então

$$|t - t_i| < \frac{\epsilon}{2k} \implies \|x(t) - x(t_i)\| < \frac{\epsilon}{2} \implies \|x(t) - x^*\| \geq \frac{\epsilon}{2}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^*\| &= \|x(t) - x(t_i) + x(t_i) - x^*\| \geq \|x(t_i) - x^*\| - \|x(t) - x(t_i)\| \\ &\geq \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo $W(x(t)) \geq \eta$.

Também temos:

$$\int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} W(x(s))ds \geq \int_{t_{i-1}}^{t_{i+1}} \eta ds = \eta(t_{i+1} - t_{i-1}) > \eta \frac{\epsilon}{2k}.$$

Isto implica que $\int_0^t W(x(s))ds$ diverge, o que é uma contradição.

Assim temos então para qualquer $\alpha \in \text{dom}Q$, existe uma trajetória de G , com $x(0) = \alpha$ tal que $x(t) \rightarrow x^*$. O teorema queda demonstrado. ■

Exemplo 4.1. Consideremos $n = 1$ e sejam $M_1 = \{x : x < 0\}$, $M_2 = \{x : x > 0\}$, $M_3 = \{0\}$ subdomínios estratificados de $\mathbb{R}$, e sejam $F_1(x) = [-\frac{1}{2}, 1]$, para todo $x \in M_1$ e $F_2(x) = [-1, \frac{1}{2}]$, para todo $x \in M_2$.

Notemos que G e $G^\sharp$ são diferentes sobre $M_3 = \{0\}$. Pois $G(0) = [-1, 1]$ e $G^\sharp(0) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Note que $G^\sharp(0) \subset G(0)$.

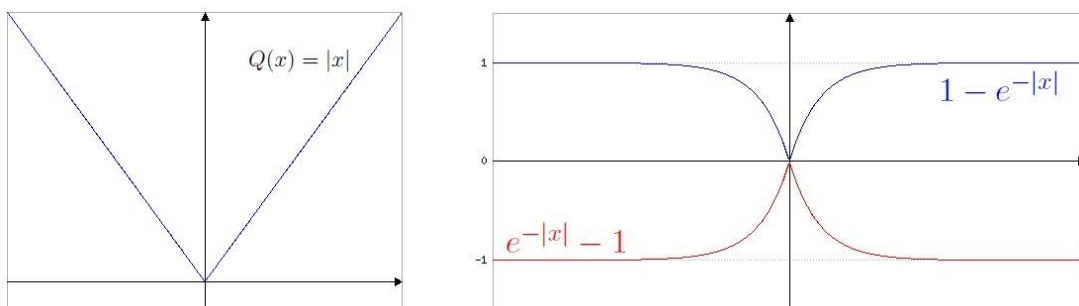
Seja $x^* = 0$, então $0 \in G(x^*)$, x^* é um ponto de equilíbrio de G globalmente assintoticamente estável. De fato, sejam

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto Q(x) = |x|$$

$$W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto W(x) = 1 - e^{-|x|}$$



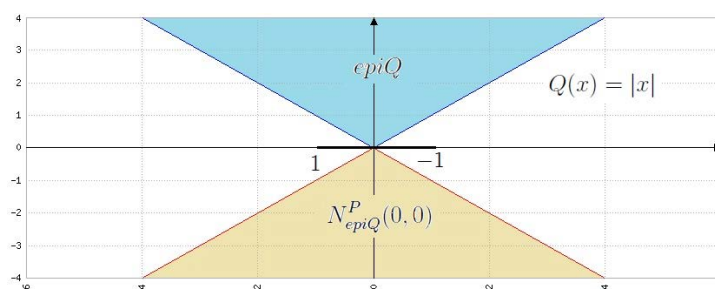
i) $Q, W \geq 0$ e $W(x) = 0 \Leftrightarrow x = x^*$,

ii) os conjuntos de nível $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \leq q\}$ são compactos para todo $q \in \mathbb{R}$;

iii) também temos

$$\partial^P Q(x) = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ [-1, 1], & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

para todo x .



Se $x = 0$

$$h_{G^\#}(x, \xi) = \min_{v \in G^\#(0)} = \min\{\langle [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [-1, 1] \rangle\} = -\frac{1}{2} \leq 0 = -W(x).$$

Se $x > 0$

$$h_{G^\#}(x, \xi) = \min_{v \in G^\#(x)} = \min_{F_2(x)}\{\langle [-1, \frac{1}{2}], 1 \rangle\} = -1 \leq -W(x).$$

Se $x < 0$

$$h_{G^\#}(x, \xi) = \min_{v \in G^\#(x)} = \min_{F_1(x)}\{\langle [-\frac{1}{2}, 1], -1 \rangle\} = -1 \leq -W(x).$$

Assim $h_{G^\#}(x, \xi) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ onde $\xi \in \partial^P Q(x)$.

Logo temos que (Q, W) são um par de Lyapounov. Pelo teorema de Lyapounov temos que x^* é globalmente assintoticamente estável.

Exemplo 4.2. Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$ e sejam M_1, M_2 os semiplanos superior e inferior respectivamente e M_3, M_4 o eixo positivo e negativo respectivamente e seja $M_5 = \{0\}$. Sejam

$$F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}; F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; F_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; F_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note que F_5 consiste de somente do vetor zero. Este é o caso para todas as variedades de dimensão zero. Temos que G difere de $F = F_i(x)$ só sobre o eixo x_1 , com

$$G \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \{v : |v_1| + |v_2| \leq 1; v_1 \geq 0\} & \text{se } x_1 < 0 \\ \{v : |v_1| + |v_2| \leq 1\} & \text{se } x_1 = 0 \\ \{v : |v_1| + |v_2| \leq 1; v_1 \geq 0\} & \text{se } x_1 > 0 \end{cases} = \begin{cases} \overline{\text{co}}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, & x_1 > 0 \\ \overline{\text{co}}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, & x_1 = 0 \\ \overline{\text{co}}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, & x_1 < 0 \end{cases}$$

e

$$G^\# \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, & x_1 > 0 \\ \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, & x_1 = 0 \\ \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}, & x_1 < 0 \end{cases}$$

onde $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Considerando o seguinte par de Lyapounov $Q(z) = \|z\|$ e $W(z) = 1 - e^{-\|z\|}$ com $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, temos que $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Vejamos se $h_{G^\#}(z, \partial^P Q(z)) \leq 0, \forall z \in \mathbb{R}^2$, onde

$$\partial^P Q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \{\text{sgn}(x_1)\} \times \{\text{sgn}(x_2)\}, & x_1 \neq 0, x_2 \neq 0 \\ \{\text{sgn}(x_1)\} \times [-1, 1], & x_1 \neq 0, x_2 = 0 \\ [-1, 1] \times \{\text{sgn}(x_2)\}, & x_1 = 0, x_2 \neq 0 \\ [-1, 1] \times [-1, 1], & x_1 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$$

Analisemos por casos: Se $z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$h_{G^\#}(z, \xi) = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \langle v, \xi \rangle = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \right\rangle = 0 = -W \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$se\ z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 > 0$$

$$h_{G^\#}(z, \xi) = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}} \langle v, \xi \rangle = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \leq -W \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} < 0;$$

$$se\ z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1 < 0$$

$$h_{G^\#}(z, \xi) = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}} \langle v, \xi \rangle = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ [-1, 1] \end{pmatrix} \right\rangle = -1 \leq -W \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} < 0;$$

$$se\ z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_1$$

$$h_{G^\#}(z, \xi) = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \langle v, \xi \rangle = \min_{v \in F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \langle v, \xi \rangle = \min_{v \in F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \begin{cases} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{sgn x_1\} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \end{cases} = -1 < 0;$$

$$se\ z = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in M_2$$

$$h_{G^\#}(z, \xi) = \min_{v \in G^\# \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \langle v, \xi \rangle = \min_{v \in F_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \langle v, \xi \rangle = \min_{v \in F_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \begin{cases} \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{sgn x_1\} \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \\ \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} [-1, 1] \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \end{cases} = -1 < 0.$$

Assim $h_{G^\#}(z, \xi) \leq 0, \forall z \in \mathbb{R}^2$ onde $\xi \in \partial^P Q(z)$.

Logo pelo Teorema de Lyapounov, temos que $x^* = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

CAPÍTULO 5

A EQUAÇÃO PROXIMAL DE
HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Neste capítulo mostraremos que a função valor é a única solução semicontínua inferiormente de uma generalização da clássica equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Mas para isso previamente caracterizaremos sistemas fortemente decrescentes e crescentes.

5.1 Sistemas Fortemente Decrescentes

Seja $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$. O sistema (φ, F) é fortemente decrescente se para qualquer trajetória $x(\cdot)$ sobre $[0, \infty)$, temos $\varphi(x(t)) \leq \varphi(x(0))$ para todo $t \geq 0$. Isto equivale à função $t \mapsto \varphi(x(t))$ ser decrescente, sempre que $x(\cdot)$ seja uma trajetória.

O seguinte teorema fornece uma caracterização hamiltoniana para sistemas fortemente decrescentes, para mais detalhes ver ([1])

Teorema 5.1. *Sejam $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$ e F localmente Lipschitz. Então (φ, F) é fortemente decrescente se e só se*

$$H_F(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Considerando nossa dinâmica G , a qual não é Lipschitz, se pode caracterizar em que condições (φ, G) é fortemente decrescente?. A resposta é sim, já com os resultados de [10] se pode pensar em utilizar o hamiltoniano maximizado essencial.

Proposição 5.1. *Seja $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$. Então (φ, G) é fortemente decrescente se e só se $(\text{epi} \varphi, G \times \{0\})$ é fortemente invariante.*

Demonstração. Seja $z(\cdot)$ qualquer trajetória de $G \times \{0\}$, com $z = (x(0), y(0)) \in \text{epi}\varphi \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Temos que $x(\cdot)$ é trajetória de G com $x(0) = x$ e $\dot{y}(t) = 0, y(0) = y$ então $y(t) = y, \forall t \in [0, T]$. Como $(x, y) \in \text{epi}\varphi$ então $\varphi(x) \leq y$. Logo

$$\varphi(x(0)) \leq y(t).$$

Como (φ, G) é fortemente decrescente obtemos $\varphi(x(t)) \leq y(t)$, para todo $t \in [0, T]$. Assim $(x(t), y(t)) \in \text{epi}\varphi$ para todo $t \in [0, T]$ e $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ é fortemente invariante.

Por outro lado, seja $x(\cdot)$ trajetória de G , com $x(0) = x$, i.e.,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in G(x(t)) \quad \text{q.t.p.} \quad t \in [0, T] \\ x(0) &= x. \end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}^N$ então $(x, \varphi(x)) \in \text{epi}\varphi$. Tome $y(t) = \varphi(x)$ para todo $t \in [0, T]$, logo $(x(t), y(t))$ é uma solução de $G \times \{0\}$. Como $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ é fortemente invariante então $(x(t), y(t)) \in \text{epi}\varphi$, o que implica em

$$\varphi(x(t)) \leq y(t) = \varphi(x) = \varphi(x(0)), \quad \forall t \in [0, T].$$

Portanto (φ, G) é fortemente decrescente. ■

Dado que $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ é fortemente invariante então

$$h_{G^\# \times \{0\}}((x, r), -(\xi, \lambda)) \geq 0; \forall (x, r) \in \text{epi}\varphi, \quad \forall (\xi, \lambda) \in N_{\text{epi}\varphi}^P(x, r), \quad (5.1)$$

isto pelo Corolário 3.4.

Teorema 5.2. *Seja $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^N)$. Então (φ, G) é fortemente decrescente se e só se*

$$H_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Sejam $x \in \mathbb{R}^N$ e $\xi \in \partial^P \varphi(x)$. Então $(\xi, -1) \in N_{\text{epi}\varphi}^P(x, \varphi(x))$ e sendo $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ fortemente invariante e pelo Corolário 3.4 podemos obter,

$$h_{G^\# \times \{0\}}((x, \varphi(x)), -(\xi, -1)) = \min_{v \in G^\#(x)} \langle (v, 0), (-\xi, 1) \rangle = \min_{v \in G^\#(x)} \langle v, \xi \rangle = h_{G^\#}(x, -\xi)$$

Assim, segue de (5.1) que $H_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$.

Agora provemos a recíproca. Suponha que $H_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(x)) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$. Devido à Proposição 5.1 mostremos que $(\text{epi}\varphi, G \times \{0\})$ é fortemente invariante. Dado $\xi \in \partial^P \varphi(x)$

temos que $(\xi, -1) \in N_{\text{epi}\varphi}^P(x, \varphi(x))$ e

$$h_{G^\# \times \{0\}}((x, \varphi(x)), -(\xi, -1)) = h_{G^\#}(x, -\xi).$$

Para qualquer $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ solução de $G \times \{0\}$, isto é,

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &\in G \times \{0\}(z(t)) \\ z(0) &= (x, \varphi(x)),\end{aligned}$$

pelo Teorema 3.1 tem-se

$$d_{\text{epi}\varphi}(x(T), y(T)) \leq e^{kT} d_{\text{epi}\varphi}(x(0), \varphi(x(0))) = 0$$

Então segue que $\varphi(x(t)) \leq \varphi(x(0)), \forall t \in [0, T]$. Assim (φ, G) é fortemente decrescente. ■

5.2 Sistemas Fortemente Crescentes

Definição 5.1. Dizemos que o sistema (φ, F) é fortemente crescente sobre $\mathbb{R}^N$ se para qualquer trajetória sobre $[0, \infty)$ a função $t \mapsto \varphi(x(t))$ é crescente sobre $[0, \infty)$.

Agora caracterizaremos algumas propriedades de monotonicidade onde a função φ depende de t e x . e os resultados não se escapam do normal. Não é nenhuma surpresa que as caracterizações possam ser estendidas para o caso de t -dependência.

Por conveniência de notação, definamos o Hamiltoniano estendido como sendo

$$\begin{aligned}\bar{h} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \theta, \xi) &\longmapsto \bar{h}(x, \theta, \xi) = \theta + h(x, \xi)\end{aligned}$$

Agora seja $\varphi(t, x)$ semicontínua inferior. Como antes o sistema (φ, F) é fortemente crescente se $t \mapsto \varphi(t, x(t))$ é crescente sempre que $x(\cdot)$ é uma trajetória. Considerando t como uma variável de estado extra sujeito a $\dot{t} = 1$, e tomando $F_e(x) := \{1\} \times F(x)$, derivamos o seguinte corolário quando φ tem t -dependência.

Corolário 5.1. 1. Seja $\varphi \in \mathcal{F}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. (φ, G) é fracamente decrescente se e só se

$$\theta + h_{G^\#}(x, \xi) \leq 0, \quad \forall (\theta, \xi) \in \partial^P \varphi(t, x), \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N;$$

2. Seja $\varphi \in \mathcal{F}([0, T] \times \mathbb{R}^N)$. (φ, G) é fortemente decrescente se e só se

$$\theta + H_{G^\#}(x, \xi) \leq 0, \quad \forall (\theta, \xi) \in \partial^P \varphi(t, x), \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N.$$

Proposição 5.2. (φ, G) é fortemente crescente se e somente se

$$\theta + h_{G^\#}(x, \xi) \geq 0, \quad \forall (\theta, \xi) \in \partial^P \varphi(t, x), \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N.$$

Demonstração. Seja $x(\cdot)$ uma trajetória de G sobre $[0, T]$ e definamos $y(t) = x(t^* - t)$ onde $t^* \in [0, T]$. Então a função $y(\cdot)$ esta definida sobre o intervalo $(t^* - T, t^*)$ e satisfaz

$$\dot{y}(t) = -\dot{x}(t^* - t) \in -G(x(t^* - t)) = -G(y(t)), \text{ q.s.,}$$

i.e., $y(\cdot)$ é uma trajetória de G^* sobre $(t^* - T, t^*)$ onde $G^*(y) = -G(y)$. Também temos que $\varphi(t, x(t))$ é crescente para todo $x(\cdot)$, se e só se $\varphi(t^* - t, y(t))$ é decrescente para todo $y(\cdot)$, pois

$$\varphi(t^* - t, x(t^* - t)) \leq \varphi(t^*, x(t^*)) \Rightarrow \varphi(t^* - t, y(t)) \leq \varphi(t^*, y(0)).$$

Tome $\varphi^*(t, y) = \varphi(t^* - t, y)$. Temos mostrado que fortemente crescente sobre $[0, T] \times \mathbb{R}^N$ para (φ, G) é o mesmo como fortemente decrescente sobre $(t^* - T, t^*) \times \mathbb{R}^N$ para (φ^*, G^*) . Aplicando Corolário 5.1, item 2, para (φ^*, G^*) obtemos;

$$\theta + H_{(G^*)^\#}(y, \xi) \leq 0, \quad \forall (\theta, \xi) \in \partial^P \varphi^*(t, y), \forall (t, y) \in (t^* - T, t^*) \times \mathbb{R}^N.$$

Mostremos que

$$H_{(G^*)^\#}(y, \xi) = -h_{G^\#}(y, \xi), \tag{5.2}$$

$$(\theta, \xi) \in \partial^P \varphi^*(t, y) \Leftrightarrow (-\theta, \xi) \in \partial^P \varphi(t^* - t, y). \tag{5.3}$$

De fato,

$$\begin{aligned} H_{(G^*)^\#}(y, \xi) &= -h_{(G^*)^\#}(y, -\xi) = -\min_{v \in (G^*)^\#(y)} \langle v, -\xi \rangle = -\min_{-v \in G^\#(y)} \langle v, -\xi \rangle \\ &= -\min_{-v \in G^\#(y)} \langle -v, \xi \rangle = -h_{G^\#}(y, \xi), \end{aligned}$$

o que mostra (5.2).

Agora vejamos (5.3). Sendo, $(\theta, \xi) \in \partial^P \varphi^*(t, y)$ se e só se existem $\sigma, M > 0$ tal que

$$\varphi^*(t', x) \geq \varphi^*(t, y) + \langle (\theta, \xi), (t', x) - (t, y) \rangle - \sigma \|(t', x) - (t, y)\|^2,$$

para todo $(t', x) \in B((t, y); M)$ como $\varphi^*(t, y) = \varphi(t^* - t, y)$, temos

$$\varphi(t^* - t', x) \geq \varphi(t^* - t, y) + \langle (\theta, \xi), (t' - t, x - y) \rangle - \sigma \|(t' - t, x - y)\|^2,$$

fazendo $t^* - t' = s'$ e $t^* - t = s$ obtemos

$$\varphi(s', x) \geq \varphi(s, y) + \langle (\theta, \xi), (s - s', x - y) \rangle - \sigma \|(s - s', x - y)\|^2,$$

$$\varphi(s', x) \geq \varphi(s, y) + \langle (-\theta, \xi), (s' - s, x - y) \rangle - \sigma \|(s - s', x - y)\|^2,$$

$$\varphi(s', x) \geq \varphi(s, y) + \langle (-\theta, \xi), (s', x) - (s, y) \rangle - \sigma \|(s', x) - (s, y)\|^2,$$

para todo $(s', x) \in B((s, y); M)$, assim, $(-\theta, \xi) \in \partial^P \varphi(s, y) = (-\theta, \xi) \in \partial^P \varphi(t^* - t, y)$.

Logo a proposição segue imediatamente. ■

5.3 A equação de Hamilton-Jacobi-Bellman

Consideremos o seguinte problema de control ótimo (P) global, com G sendo associada as F_i .

$$(P) \quad \begin{cases} \min & g(x(T)) \\ s.a. & x \in W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^N) \text{ satisfazendo} \\ & \dot{x}(t) \in G(x(t)) \text{ q.s.} \\ & x(0) = x_0, \end{cases}$$

onde $W^{1,1}$ é o conjunto de funções absolutamente contínuas e $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é uma função semicontínua inferiormente (s.c.i.), denominada função de custo.

Dizemos que $x(\cdot)$ é factível para (P) se satisfaz as condições do problema. E $\bar{x}(\cdot)$ é ótimo (mínimo) para o problema (P) se

$$g(\bar{x}(T)) \leq g(x(T))$$

para qualquer $x(\cdot)$ factível.

A ligação entre o problema de control ótimo (P) e a equação Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) é feita através da função valor $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definido como o ínfimo

custo do problema

$$P(t, x) \begin{cases} \min & g(x(T)) \\ s.a. & y \in W^{1,1}([t, T]; \mathbb{R}^N) \text{ satisfazendo} \\ & \dot{y}(s) \in G(y(s)) \text{ q.t.p.} \\ & y(t) = x, \end{cases}$$

i.e., $V(t, x) := \inf P(t, x)$ e $V(t, x) = +\infty$ se não existe $y(\cdot)$ satisfazendo as restrições do problema.

Se $V(t, x) < +\infty$ então $P(t, x)$ tem mínimo. De fato, se $V(t, x) < +\infty$ então $\text{dom} V \neq \emptyset$, e existe $x(\cdot)$ factível para $P(t, x)$. Segue da Proposição 2.6.2 em [12] que o problema $P(t, x)$ tem mínimo.

Recordemos que para os problemas clássicos de control ótimo do tipo Mayer, a função valor pode ser caracterizada como a única solução semicontínua inferiormente das equações de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), sempre que a dinâmica seja Lipschitz. Em nosso problema, as dinâmicas F_i são definidas, em separado, e se pode pensar na regularização das F_i , mas, a multifunção G é só semicontínua superior. Isto não é suficiente para garantir existência e unicidade de soluções da equação de HJB.

O seguinte teorema mostra que a função valor é a única solução semicontínua inferiormente da equação de HJB generalizada.

Teorema 5.3. *Seja uma estratificação $\{M_i\}$ de $\mathbb{R}^N$ associada a F_i . Se g é semicontínua inferiormente então a função valor para o problema (P) é a única função semicontínua inferiormente $V : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tal que para cada $(\theta, \xi) \in \partial^P V(t, x)$ tem-se*

$$\theta + h_{G^\#}(x, \xi) = 0, \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N \quad (5.4)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} \inf_{y \rightarrow x} V(t, y) = g(x) = V(T, x), x \in \mathbb{R}^N \quad (5.5)$$

Demonstração. Suponhamos que em vez do problema (P) acima, consideramos a família de problemas

$$P(\tau, \alpha) \begin{cases} \min & g(x(T)) \\ s.a. & x \in W^{1,1}([\tau, T]; \mathbb{R}^N) \text{ satisfazendo} \\ & \dot{x}(t) \in G(x(t)) \\ & x(\tau) = \alpha, \end{cases}$$

e a função valor associada $V : [0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$V(\tau, \alpha) := \inf_{x(\cdot)} \{g(x(T)) : x(\tau) = \alpha\}.$$

V é semicontínua inferiormente em $[0, T] \times \mathbb{R}^N$. De fato, fixemos $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$ e consideremos a sequência $\{(t_i, x_i)\}$ em $[0, T] \times \mathbb{R}^N$ tal que $(t_i, x_i) \rightarrow (t, x)$ e $\lim_i V(t_i, x_i)$ exista. Mostraremos que

$$V(t, x) \leq \lim_i V(t_i, x_i).$$

Para cada i , $P(t_i, x_i)$ tem um mínimo (ver [12]- Prop.2.6.2) $y_i : [t_i, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $y_i(t_i) = x_i$. Estendendo y_i a todo $[0, T]$ por uma extrapolação constante sobre $[0, t_i]$, a desigualdade de Gronwall's (ver [12]- Lema 2.4.4) implica que $\{y_i\}$ e suas derivadas são uniformemente limitadas. Pelo teorema de Compacidade das trajetórias, existe uma subsequência $\{y_i\}$ que converge a um arco $y(\cdot)$, o qual é trajetória de G e

$$y(t) = \lim_i y_i(t_i) = \lim_i x_i = x,$$

e

$$V(t, x) \leq g(y(T)) = \lim_i g(y_i(T)) = \lim_i V(t_i, x_i).$$

Assim a função valor é semicontínua inferiormente.

$V(\tau, \alpha)$ é definida para $\tau \leq T$, assim o subgradiente proximal de V só tem sentido para $\tau < T$. Mas neste intervalo, podemos mostrar que V satisfaz

$$\theta + h_{G^\#}(x, \xi) \geq 0, \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N. \quad (5.6)$$

De fato. Primeiramente verifiquemos que $V(t, x(t))$ é sempre crescente quando $x(\cdot)$ é uma trajetória.

Para isto tome dois pontos $\tau, t' \in [0, T]$ com $\tau \leq t'$, $\bar{x} : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ um minimizador para o problema $P(\tau, \bar{x}(\tau))$. Seja $x : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ uma trajetória de G .

$$V(\tau, x(\tau)) \leq V(t', x(t')) \quad (5.7)$$

$$V(\tau, \bar{x}(\tau)) = V(t', \bar{x}(t')) \quad (5.8)$$

Suponhamos que (5.7) é falso. Então existe $\epsilon > 0$ tal que $V(\tau, x(\tau)) > V(t', x(t')) + \epsilon$. Por definição de V existe uma trajetória $z : [t', T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $z(t') = x(t')$ e

$$V(t', x(t')) > g(z(T)) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Então a trajetória $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definida por

$$y(t) := \begin{cases} x(t), & \tau \leq t < t' \\ z(t), & t' \leq t \leq T \end{cases}$$

satisfaz

$$V(\tau, x(\tau)) \leq g(y(T)) = g(z(T)) < V(t', x(t')) + \frac{\epsilon}{2} < V(\tau, x(\tau)) - \frac{\epsilon}{2}$$

(absurdo). Logo deduzimos que (5.7) é verdadeira. Notemos, de novo pela definição de V , que

$$V(t', \bar{x}(t')) \leq g(\bar{x}(T)) = V(\tau, \bar{x}(\tau))$$

combinando com a condição (5.7) temos (5.8).

A função valor de (P) é crescente ao longo de trajetórias arbitrárias, e é constante ao longo de uma trajetória mínima.

Este crescimento forte do sistema (φ, G) , implica pela Proposição 5.2 a desigualdade hamiltoniana (5.6).

Agora mostremos

$$\bar{h}_{G^\#}(x, \partial^P V(t, x)) \leq 0, \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N. \quad (5.9)$$

Sempre que $V(\tau, \alpha)$ é finito ([12]-Prop.2.6.2), existe um arco $\bar{x}$ ótimo para o problema $P(\tau, \alpha)$, e ao longo de $\bar{x}$, V é constante, i.e., $t \mapsto V(t, \bar{x}(t))$ é constante sobre $[\tau, T]$.

Assim o sistema (V, G) é fracamente decrescente relativo a $t \in (0, T)$, logo temos (5.9). Assim de (5.6) e (5.9) temos $\bar{h}_{G^\#}(x, \partial^P V(t, x)) = 0$.

E V satisfaz $\lim_{t \rightarrow T} \inf_{y \rightarrow x} V(t, y) = V(T, x) = g(x)$. De fato, que o lado esquerdo não é maior que o direito decorre da semicontinuidade inferior de V , e notando que V é constante ao longo de arcos ótimos.

Agora seja φ outra função como descreve no teorema. Vamos a mostrar primeiro que $V \leq \varphi$. De fato, seja (τ, α) qualquer ponto com $\tau \leq T$ na qual φ é finito. Desde que $\bar{h}_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(t, x)) \leq 0$ o sistema (φ, G) é fracamente decrescente relativamente a $t < T$, tal que para qualquer $T' < T$; existe uma trajetória $x(\cdot)$ sobre $[\tau, T']$ com $x(\tau) = \alpha$ tal que $\varphi(T', x(T')) \leq \varphi(\tau, \alpha)$. Fazendo $T' \rightarrow T$, a semicontinuidade e pelo teorema da

compacidade das trajetórias obtemos

$$g(x(T)) = \varphi(T, x(T)) \leq \varphi(\tau, \alpha)$$

o que implica $V(\tau, \alpha) \leq \varphi(\tau, \alpha)$.

Passemos a mostrar agora que $V \geq \varphi$. Seja (τ, α) qualquer outro ponto com $\tau \leq T$, onde V é finito, então existe uma trajetória $\bar{x}$ ótima para $P(\tau, \alpha)$. Por (5.5) existe uma sequência $(t_i, y_i) \rightarrow (T, \bar{x}(T))$, com $t_i < T$ tal que

$$\varphi(t_i, y_i) \rightarrow g(\bar{x}(T)) = V(\tau, \alpha)$$

por propriedades elementais de inclusões diferenciais em relação à dependência das condições iniciais, existe (para i grande) uma trajetória x_i desde um ponto (τ_i, α_i) a (t_i, y_i) onde $(\tau_i, \alpha_i) \rightarrow (\tau, \alpha)$ e desde que $\bar{h}_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(t, x)) \geq 0$ o sistema (φ, G) é fortemente crescente para $t \in [\tau_i, t_i]$, assim temos $\varphi(\tau_i, \alpha_i) \leq \varphi(t_i, y_i)$. Isto implica

$$\varphi(\tau, \alpha) \leq \varphi(T, \bar{x}(T)) = V(\tau, \alpha),$$

o que completa a prova. ■

A prova do teorema estabelece dois corolários de comparação.

Corolário 5.2. $\varphi : (0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ *semicontínua inferiormente e satisfazendo*

$$a) \bar{h}_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(t, x)) \leq 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N,$$

$$b) g(x) \leq \varphi(T, x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

então $\varphi \geq V$.

Corolário 5.3. $\varphi : (0, T] \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ *semicontínua inferiormente e satisfazendo*

$$a) \bar{h}_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(t, x)) \geq 0 \quad \forall (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N,$$

$$b) \lim_{t \rightarrow T} \inf_{y \rightarrow x} \varphi(t, y) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

então $\varphi \leq V$.

No Corolário 5.3, na teoria clássica é válida se a G é Lipschitz, mas como vimos nos já não precisamos disso desde que é introduzido o Hamiltoniano essencial.

5.4 Funções Verificação

Seja F uma multifunção satisfazendo as hipóteses padrão. Consideremos o seguinte problema de controle ótimo (P^*)

$$(P^*) \quad \begin{cases} \min & l(x(T)) \\ s.a. & x \in W^{1,1}([0, T]; \mathbb{R}^N) \text{ satisfazendo} \\ & \dot{x}(t) \in F(x(t)) \text{ q.s.} \\ & x(0) = x_0. \end{cases}$$

Aqui $T > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, e $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função semicontínua inferiormente são dados. Procuramos, por conseguinte minimizar o custo do ponto final $l(x(T))$ sobre todas as trajetórias $x(\cdot)$ de F sobre $[0, T]$ em x_0 . Resulta da hipóteses padrão 1 (HP1) que o problema (P^*) admite uma solução. Suponhamos que F seja Lipschitz.

Vamos agora descrever como uma ideia muito boa do cálculo das variações, originado com Legendre, leva a condições suficientes para otimalidade em problemas de controle. Suponhamos que temos um arco factível $\bar{x}(\cdot)$ que suspeitamos ser ideal ou ótimo para o nosso problema. Como podemos verificar que $\bar{x}$ é uma solução?. Aqui está um caminho. Produzir uma função suave $\varphi(t, x)$ tal que:

$$\varphi_t(t, x) + \langle \varphi_x(t, x), v \rangle \geq 0, \quad \forall x, \forall t \in [0, T], \forall v \in F(x), \quad (5.10)$$

$$\varphi(T, \cdot) = l(\cdot), \quad (5.11)$$

$$\varphi(0, x) = l(\bar{x}(T)). \quad (5.12)$$

Vamos ver como a existência de φ verifica que $\bar{x}$ é ótimo. Seja $x(\cdot)$ qualquer um outro arco qualquer de (P^*) . Então para quase todo $t \in [0, T]$, temos

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, x(t)) = \varphi_t(t, x(t)) + \langle \varphi_x(t, x), \dot{x}(t) \rangle \geq 0, \quad (5.13)$$

por (5.10). Integrando sobre $[0, T]$ obtemos:

$$\varphi(T, x(T)) = l(x(T)) \geq \varphi(0, x) = l(\bar{x}(T)). \quad (5.14)$$

De fato, integrando (5.13) temos $\varphi(t, x(t)) \big|_0^T \geq 0$

$$\varphi(T, x(T)) - \varphi(0, x(0)) \geq 0 \Rightarrow \varphi(T, x(T)) \geq \varphi(0, x(0))$$

e por (5.11) e (5.12) obtemos (5.14).

Então $\bar{x}$ fornece o menor valor possível de $l(x(T))$, como requeríamos. Também segue que $\varphi(0, x(0))$ é o valor de (P^*) , i.e. é o custo mínimo.

A desigualdade de Hamilton-Jacobi-Bellman (5.10) foi realmente utilizada apenas para deduzir que a aplicação $t \mapsto \varphi(t, x(t))$ é crescente sempre que $x(\cdot)$ seja uma trajetória.

Em nossa terminologia, queremos que (φ, F) seja fortemente crescente sobre $(0, T) \times \mathbb{R}^N$.

Agora pensemos na dinâmica estratificada. Nossos resultados anteriores nos permitem caracterizar esta propriedade do sistema, mesmo quando φ não é diferenciável. Aqui temos uma correspondente extensão do argumento de verificação cuja prova é uma adaptação do caso clássico em cálculo das variações.

Proposição 5.3. *Seja $\bar{x}$ factível para (P) e suponha que existe uma função semicontínua inferiormente $\varphi(t, x)$ sobre $[0, T] \times \mathbb{R}^N$ satisfazendo.*

$$\bar{h}_{G^\#}(x, \partial^P \varphi(t, x)) \geq 0, \quad \forall (x, t) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N, \quad (5.15)$$

$$\limsup_{t \rightarrow T} \sup_{y \rightarrow x} \varphi(t, y) \leq g(x), \quad (5.16)$$

$$\varphi(0, x) = g(\bar{x}(T)). \quad (5.17)$$

Então $\bar{x}$ soluciona (P) , e o valor de (P) é $\varphi(0, x(0))$.

Demonstração. Seja $\bar{x}$ factível para (P) e seja $x(\cdot)$ qualquer outro arco de (P) , de (5.15) temos, para $(\theta, \xi) \in \partial^P \varphi(t, x)$, que

$$\bar{h}_{G^\#}(x(t), (\theta, \xi)) = \theta + h_{G^\#}(x(t), \xi) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N.$$

Logo pela Proposição 5.2 temos que (φ, G) é fortemente crescente, i.e.,

$$g(\bar{x}(T)) = \varphi(0, x(0)) \leq \varphi(T, x(T)) \leq \lim_{t \rightarrow T} \sup_{y \rightarrow x(T)} \varphi(t, y) \leq g(x(T))$$

e a desigualdade segue da semicontinuidade inferior de φ e (5.16). Então $\bar{x}$ soluciona (P) e o valor de (P) é $\varphi(0, x(0))$. ■

Uma função semicontínua inferiormente satisfazendo as hipóteses (5.15), (5.16) e (5.17) da Proposição 5.3 é chamada de função de verificação em domínios estratificados.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Neste trabalho estudamos os resultados obtidos em [10] por P. Wolenski-R. Barnard. Os resultados fornecem critérios de invariância fraca e forte, condições Hamiltonianas para uma dinâmica não Lipschitz. Com os resultados obtidos em [10] surgem ideias para estudar a teoria de Lyapounov em domínios estratificados, como se apresentado no trabalho, mostrando condições que garantem a estabilidade assintótica global para uma dinâmica estratificada estendendo a teoria de Lyapounov de sistemas clássicos para sistemas estratificados. A principal diferença na obtenção dos resultados foi trabalhar com as velocidades essenciais da multifunção velocidade essencial no lugar da dinâmica estratificada não Lipschitz contínua, apesar de que restrito a cada domínio seja Lipschitz contínua. Ilustramos o resultado com exemplos. Além disso apresentamos condições Hamiltonianas para sistemas fraca e fortemente decrescentes (crescentes), critérios que permitem mostrar que a função valor para o problema do tipo Mayer em domínios estratificados é a única solução semicontínua inferior de uma generalização adequada da clássica equação Hamilton-Jacobi para o Problema de Mayer em domínios estratificados.

Existem muitas coisas por fazer nestes denominados subdomínios estratificados, como menciono mais acima. Daniella Porto, atualmente aluna de doutorado do programa, está trabalhando para fornecer condições necessárias para um problema de controle ótimo com uma dinâmica estratificada. O objetivo do trabalho é obter condições necessárias a otimalidade na forma do Princípio do Máximo de Pontryagin para os problemas de Mayer e condições suficientes para otimalidade de tempo mínimo. Também pode ser estudado condições necessárias para problemas com tempo finais livres, entre outros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CLARKE, F. H. et al. *Nonsmooth analysis and control theory*. New York: Springer, 1998.
- [2] CLARKE, F. H. Generalized gradients and applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, Providence, v.205, p.247-262, 1975.
- [3] CLARKE, F. H.; STERN, R. J.; WOLENSKI, P. R. Proximal Smoothness and the Lower- C^2 Property *Journal of Convex Analysis*, Lemgo, v.2, n.1/2, p.117-144, 1995.
- [4] WOLENSKI, P. R.; ZHUANG, Y. Proximal analysis and the minimal time function. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v.36, n.3, p.1048-1072, may 1998.
- [5] CLARKE, F. H.; WOLENSKI, P. R. Control of systems to sets and their interiors. *Journal of Optimization Theory and Applications*, New York, v.88, n.1, p.3-23, 1996.
- [6] KRASTANOV, M. Forward invariant sets, homogeneity and small-time local controllability. *Banach Center Publications*, Warsaw, v.32, p.287-300, 1995. Geometry in nonlinear control and differential inclusions.
- [7] ROCKAFELLAR, R. Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Analysis: theory, methods and applications*, Oxford, v.3, n.1, p.145-154, 1979.
- [8] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Coleção Matemática Universitária)
- [9] BRESSAN, A.; HONG, Y. Optimal control problems on stratified domains. *Networks and Heterogeneous Media*, Springfield, v.2, n.2, p.313-331, 2007.
- [10] BARNARD, R. C.; WOLENSKI, P. R. Flow invariance on stratified domains. *Set-Valued and Variational Analysis*, Dordrecht, v.21, n.2, p.377-403, 2013. DOI:10.1007/s11228-013-0230-y.

- [11] RAO, Z.; ZIDANI, H. Hamilton-Jacobi-Bellman equations on multi-domains. In: BREDIES, K. et al. (Ed.). *Control and optimization with PDE Constraints*. Basel: Birkhäuser, 2013. p.93-116. (International Series of Numerical Mathematics, v.164.)
- [12] VINTER, R. B. *Optimal Control*. Boston: Birkhäuser, 2000.
- [13] ISHII, H. Perrons method for Hamilton Jacobi equations. *Duke Mathematical Journal*, Durham, v.55, n.2, p.369-384, 1987.
- [14] BARLES G.; PERTHAME, B. Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems. *RAIRO. Modélisation mathématique et analyse numérique*, Les Ulis, v.21, n.4, p.557-579, 1987.
- [15] BARRON, E. N.; JENSEN, R. Semicontinuous viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians. *Communications in Partial Differential Equations*, New York, v.15, n.12, p.1713-1742, 1990.
- [16] BARRON, E. N.; JENSEN, R. Optimal control and semicontinuous viscosity solutions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Providence, v.113, n.2, p.49-79, oct. 1991.
- [17] BARLES, G. Discontinuous viscosity solutions of first order Hamilton-Jacobi equations: a guided visit. *Nonlinear Analysis: theory, methods and applications*, Oxford, v.20, p.1123-1134, 1993.

CAPÍTULO 7

ANEXO

Neste apêndice daremos um esboço do Lema 7.1, mas este pode ser encontrado em [10]. Não daremos muitos detalhes, mas sim algumas referências.

Um resultado em Rockafellar [7] diz-se que um conjunto fechado $C \subseteq \mathbb{R}^N$ é wedged se e só se C é epi-Lipschitz em torno de c . O último significa que após uma mudança de coordenadas, C tem localmente a forma de epigrafo de uma função Lipschitz. I.e., que existe uma aplicação unitária $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$, uma constante $\epsilon > 0$, e uma função Lipschitz $g : \epsilon\mathbb{B}_{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(0) = 0$ tal que:

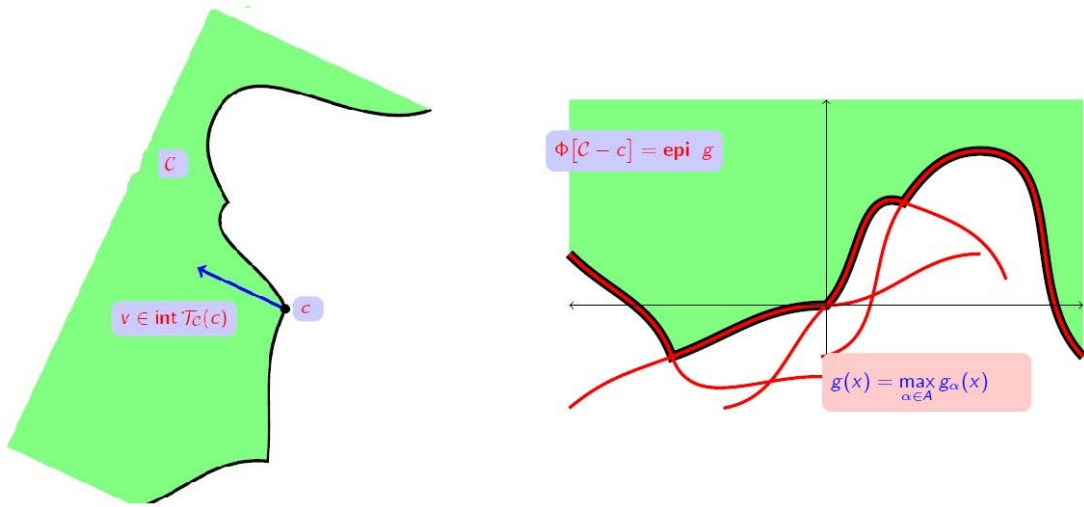
$$\Phi(C - c) \cap \{\epsilon\mathbb{B}_{N-1} \times (-\epsilon, \epsilon)\} = \{epig\} \cap \{\epsilon\mathbb{B}_{N-1} \times (-\epsilon, \epsilon)\}. \quad (7.1)$$

$\mathbb{B}_{N-1}$ denota a bola unitária em $\mathbb{R}^{N-1}$.

Além de C ser wedged, suponhamos que C seja proximamente suave. Então a função de Lipschitz g em (7.1) é lower- $\mathcal{C}^2$. E por ([3], Teorema 5.2), isto significa que existe uma representação

$$g(y) = \max_{a \in A} \{g_a(y) : a \in A\}, \quad (7.2)$$

onde A é um espaço métrico compacto e $g_a : \epsilon\mathbb{B}_{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g_a(\cdot)$, $\nabla g_a(\cdot)$ e $\nabla^2 g_a(\cdot)$ são todas contínuas como funções sobre $(y, a) \in \epsilon\mathbb{B}_{N-1} \times A$.



Para todo $y \in \mathbb{B}_{N-1}$, pode ser mostrado que $g(\cdot)$ como em (7.2) tem derivada direccional $g'(y; w)$ em todas as direções $w \in \mathbb{R}^{N-1}$, e além disso satisfaz a formula de Danskin

$$g'(y; w) = \max_{a \in A(y)} \langle \nabla_y g_a(y), w \rangle, \quad (7.3)$$

onde $A(y) := \{a \in A : g(y) = g_a(y)\}$.

A representação (7.2) proporciona um meio simples para calcular os cones normais e tangentes, bem como determinar seu interior e fronteira.

Recordemos que Φ é unitária, o qual implica que os cones normal e tangente são preservados sobre a transformação. Denote por cone K o cone convexo gerado por K . Temos:

$$\begin{aligned} N_C(c) &= \text{cone} \Phi^{-1} \left[\{(\nabla g_a(0), -1) : a \in A(0)\} \right] \\ &= \bigcap_{v>0} \text{co} \bigcup_{\|c'-c\| \leq v} N_C(c') \end{aligned} \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_C(c) &= \text{cone} \Phi^{-1} \left[\{(w, 1) : \langle \nabla g_a(0), w \rangle \leq 1 \ \forall a \in A(0)\} \right] \\ &= K \lim_{v \rightarrow 0} \bigcap_{\|c'-c\| \leq v} \mathcal{T}_C(c'). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Aqui, $\mathcal{K} = K \lim_{v \rightarrow 0} \mathcal{K}_v$ refere-se ao limite de conjuntos de Kuratowski; que significa duas coisas

$$\liminf_{v \rightarrow 0} \text{dist}(x, \mathcal{K}_v) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{K},$$

e, se $v_n \rightarrow 0$ e $x_{v_n} \in \mathcal{K}_{v_n}$ são sequencias com $x_{v_n} \rightarrow x$, então $x \in \mathcal{K}$.

De (7.5) pode se derivar,

$$\begin{aligned} \text{int}\mathcal{T}_C(c) &= \Phi^{-1} \left[\text{cone} \left\{ (w, r) : \exists \mu > 0 \text{ tal que} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \langle \nabla g_a(0), w \rangle \leq \|w\| [r - \mu(\|\nabla g_a(0)\| + 1)] \forall a \in A(0) \right\} \right] \\ &= \{v \in \mathbb{R}^N : \exists \mu > 0 \text{ tal que } \langle \zeta, v \rangle \leq -\mu \|\zeta\| \forall \zeta \in N_C(c)\}; \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \text{fr}\mathcal{T}_C(c) &= \Phi^{-1} \text{cone} \left\{ (w, -1) : \exists a \in A(0) \text{ tal que } g'(0; w) = \langle \nabla g_a(0), w \rangle \right\} \\ &= \{v \in \mathcal{T}_C(c) : \exists \zeta \in N_C(x) \setminus \{0\} \text{ tal que } \langle \zeta, v \rangle = 0\}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Lema 7.1. *Se $x \in \overline{M}_i \setminus M_i$ e $v \in r - \text{fr}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ então existe j tal que $M_j \subseteq \overline{M}_i$, $x \in \overline{M}_j$ e $v \in \mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ e $d_j < d_i$.*

Demonstração. Dado $x \in \overline{M}_i$ e $v \in r - \text{fr}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x) = \mathcal{T}_{M_i} \setminus r - \text{int}\mathcal{T}_{M_i}(x)$.

Notemos que a fronteira relativa $r - \text{fr}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ pode não ser vazia somente quando $d_i > 0$.

Por tanto sem perda de generalidade, podemos admitir que $d_i = N$, Por (2.3) existe uma sequencia $t_n \rightarrow 0$ tal que $\frac{x+t_nv-x_n}{t_n} \rightarrow 0$ onde $x_n = \text{proj}_{\overline{M}_i}(x+t_nv)$. A prova é simples se $x+t_nv \notin M_i$ para infinitos n . De fato, no caso que $x_n \in \text{fr}M_i = \overline{M}_i \setminus M_i$ e já que existe uma quantidade finita de subdomínios na estratificação, então deve existir j tal que $x_n \in M_j$ para infinitos n . Como a $\text{proj}_{\overline{M}_i}$ é Lipschitz então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \text{proj}_{\overline{M}_i}x = x$. Isto implica que $x \in \overline{M}_j$ e $v \in \mathcal{T}_{\overline{M}_j}(x)$.

Outro caso é quando $x+t_nv \in M_i$ para todo n grande, neste caso $x_n = x+t_nv$. A prova aqui é mais difícil e recorreremos à representação (7.2). Combinando coordenadas, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x = 0$ e que $\overline{M}_i = \text{epig}$ (localmente) onde g é da forma (7.2). Para $z \in \mathbb{R}^N$, escrevemos $z = (z^{N-1}, z^N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$ e com esta notação, são dados $x_n = t_nv$, satisfazendo $x_n^{N-1} = t_nv^{N-1}$ e

$$\frac{x_n^N}{t_n} \rightarrow v^N. \quad (7.8)$$

Mostremos (7.8). A suposição de que $v \in \text{fr}\mathcal{T}_{\overline{M}_i}(x)$ e (7.7) implicam que $v^N = g'(0; v^{N-1})$ por (7.7). A partir da fórmula de Danskin (7.3), existe $a \in A(0)$ para o qual

$$v^N = g'(0; v^{N-1}) = \langle \nabla g_a(0), v^{N-1} \rangle.$$

Usando este fato temos

$$\begin{aligned}
 v^N &= \langle \nabla g_a(0), v^{N-1} \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_a(t_n v^{N-1})}{t_n} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(t_n v^{N-1})}{t_n} \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^N}{t_n} = v^N,
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

onde a desigualdade (7.9) segue do fato que $x_n \in M_i$ (i.e., $x_n^N > g(x_n^{N-1})$). Logo a igualdade (7.8) está demonstrada.

Como $(x_n^N, g(x_n^N)) \in fr \overline{M}_i$ para cada n , existe um índice j tal que M_j contem infinitos pontos $(x_n^N, g(x_n^N))$. Portanto $0 \in \overline{M}_j$ e $v \in \mathcal{T}_{\overline{M}_j}(0)$. Desde que $M_j \subseteq \overline{M}_i$ e $M_j \cap M_i = \emptyset$, temos que $d_j < d_i$ e a prova é completa.

■

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 19 de Fevereiro de 2015.

Paola Geovanna Patzi Aquino