

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JULIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

ANDREYSON BICUDO JAMBERSI

MOVIMENTOS REGULARES E CAÓTICOS  
DE ROTAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS

ILHA SOLTEIRA

2016

**ANDREYSON BICUDO JAMBERSI**

**MOVIMENTOS REGULARES E CAÓTICOS  
DE ROTAÇÃO DE CORPOS RÍGIDOS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Samuel da Silva

**ILHA SOLTEIRA**

**2016**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

J27m Jambersi, Andreyson Bicudo.  
Movimentos regulares e caóticos de rotação de corpos rígidos / Andreyson Bicudo Jambersi. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2016  
97 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2016

Orientador: Samuel da Silva  
Inclui bibliografia

1. Dinâmica de sistemas mecânicos. 2. Dinâmica de corpos rígidos. 3. Caos determinístico. 4. Dinâmica não-linear. 5. Giroscópio. 6. Quatérnions.

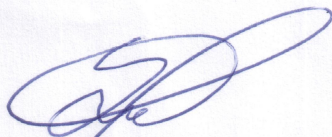
**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Movimentos Regulares e Caóticos de Rotação de Corpos Rígidos.

**AUTOR: ANDREYSON BICUDO JAMBERSI**

**ORIENTADOR: SAMUEL DA SILVA**

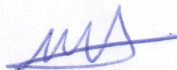
Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: MECANICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. SAMUEL DA SILVA  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. MARCIO ANTONIO BAZANI  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. MARCOS SILVEIRA  
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru

Ilha Solteira, 26 de fevereiro de 2016

*Aos meus pais, Amauri & Ana,*

*À minha irmã, Anna,*

*Aos meus avós,  
Antônio & Idalina e  
Eduardo & Emília (in memoriam),*

*À Carolina, minha noiva  
minha princesa  
minha vida.*

## Agradecimentos

Primeiramente agradeço à minha noiva, Carol, luz da minha vida. Por todo o amor, apoio e compreensão; também por ter suportado todo o peso do mundo e ainda assim tido forças para me motivar até nos tempos mais difíceis. Com certeza colheremos os frutos que plantamos, e tê-la ao meu lado nessa história me traz uma felicidade inquantificável.

Aos meus pais, Amauri e Ana, pelo inestimável amor dedicado ao longo desta jornada, pelas palavras de apoio, incentivo e também por terem permitido que graduação em Engenharia Mecânica acontecesse; também por acreditarem em meu potencial quando decidi que me aventuraria neste mestrado. À minha irmã, Anna, pelo carinho e por aprender a conviver com a distância.

Aos meus sogros, Sr. Lourival e Sra. Eleusa Taborda, pelo apoio e, sobretudo, por permitirem à minha maior companheira de estar ao meu lado em todo esse tempo.

Ao Prof. Samuel da Silva meu muito obrigado por todo o suporte, apoio, confiança e amizade no decorrer do desenvolvimento deste trabalho. De nossa conversa inicial ao final de 2013 até aqui foi um longo e valioso aprendizado. Agradeço muito pela oportunidade e por toda a paciência dedicada para que este trabalho fosse realizado. Agradeço também, e dessa vez preciso incluir, juntamente ao Prof. Samuel, o nome dos professores Antonio Eduardo Turra e João Antonio Pereira, por todo o suporte e ajuda que me foram prestados, não só no âmbito acadêmico e profissional, mas também em caráter pessoal. Meu mais sincero muito obrigado.

Agradeço aos demais professores, colegas e ex-colegas do GMSINT, seria injusto não citar os nomes de alguns grandes amigos de longa-data e outros mais recentes, que foram sempre muito prestativos desde o primeiro momento em que pisei em Ilha Solteira, seja em caráter acadêmico ou pela amizade (em geral foram os dois fatores): Sidney Bruce Shiki, Cristian Hansen, Oscar Scussel, Vinícius Germanos Cleante e Mofó. Limitei a lista de nomes ao grupo pequeno com que tive contato inicialmente, peço paciência e compreensão dos amigos que, apesar de não terem sido citados de forma explícita, tiveram participação importante. À CAPES pela bolsa de mestrado, ao CNPq e FEPISA (Projeto P&D Código ANEEL PD-0061-0043/2014 - Integração de Plantas Eólicas e Solares Fotovoltaicas a Usinas Hidrelétricas Existentes: Uma abordagem via Complementação Energética com o suporte prático de plantas piloto com diferentes tecnologias), pelo apoio financeiro à pesquisa que resultou nesta dissertação.

„Das Schicksal mischt die Karten,  
wie spielen“  
(Arthur Schopenhauer)

“...All you touch and all you see  
is all your life will ever be...”  
(Pink Floyd, Breathe)

## Resumo

A descrição e representação do movimento de corpos rígidos no espaço pode ser realizada de diversas formas, a forma mais popular é através dos ângulos de Euler, apesar de não ser sempre a mais adequada. O objetivo deste trabalho consiste em obter um modelo matemático que descreve o movimento de um giroscópio no espaço através de conceitos da mecânica clássica de Newton-Euler e parametrizar o problema da cinemática inversa dos ângulos de Euler e dos quatérnions e obter a solução numérica, além de realizar uma análise do comportamento deste sistema sob ação de esforços em função das velocidades angulares do corpo. Os resultados são comparados e são destacadas as vantagens de cada parametrização utilizada. A partir deste modelo estuda-se o caso onde os torques externos são realimentados pelas velocidades angulares nas direções principais de inércia do corpo, para estas situações o giroscópio apresenta caos. Nota-se que, para determinados valores de parâmetros, as equações de Euler do giroscópio assumem a forma dos sistemas de Lorenz, Chen e Lü-Chen e podem ser visualizados atratores estranhos no espaço de fases.

**Palavras-chave:** Dinâmica de corpos rígidos. Giroscópio. Parametrização de rotações. Quatérnions. Caos.

## Abstract

The description and representation of the motion of a rigid body in space can be performed in several ways, the most popular form is through the Euler angles, although it is not always the most appropriate. The goal of this work is to achieve a mathematical model that describes the movement of a gyroscope in space through the classical concepts Newton-Euler mechanical and parameterizing the problem of inverse kinematics of the Euler angles and quaternions and obtain the numerical solution, and to perform an analysis of the behavior of this system in action efforts as functions of the angular velocities of the body. The results are compared and are emphasized the advantages of each parameterization used. From this model it is also studied the case where the external torque are feedback by the angular velocities in the main directions of the body of inertia, for these situations the gyroscope presents chaos. It is noted that for certain parameter values, the Euler equations for the gyroscope take the form of the Lorenz, Chen and Lu-Chen systems and strange attractors can be seen in the phase space.

**Keywords:** Rigid body dynamics. Gyroscope. Rotation parametrization. Quaternions. Chaos.

## Lista de Símbolos

$\lambda$	Expoente de Lyapunov.
$\beta$	Coefficiente dos atratores estranhos.
$\chi$	Variável genérica.
$\dot{\Phi}$	Velocidade angular do sistema móvel $\mathcal{B}_3\mathbf{s}$ com relação ao sistema $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$ .
$\dot{\Psi}$	Velocidade angular do sistema móvel $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ com relação ao sistema $\mathcal{I}\mathbf{s}$ .
$\dot{\Theta}$	Velocidade angular do sistema móvel $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$ com relação ao sistema $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ .
$\mathcal{R}(\psi, \theta, \phi)$	Matriz de transformação entre os sistemas $\mathcal{I}\mathbf{s}$ e $\mathcal{B}_3\mathbf{s}$ .
$\mu$	Parâmetros de controle.
$\Omega$	Velocidade angular do sistema móvel, em [rad/s].
$\omega$	Velocidade angular do corpo, em [rad/s].
$\chi$	Posição de um sistema/partícula hipotético.
$\chi_0$	Condição inicial de um sistema hipotético.
$\delta\chi$	Acréscimo muito pequeno à condição inicial $\chi_0$ .
$\Delta\hat{r}(t)$	Incremento de transição entre dois quatérnions em um intervalo de tempo $\Delta t$ .
$\Delta t$	Intervalo de tempo/passos de integração, em [s].
$\Delta\alpha$	Incremento de ângulo num intervalo de tempo $\Delta t$ , em torno do eixo de Euler, em [rad].
$\dot{\mathcal{X}}$	Variável correspondente à aceleração angular $\dot{\omega}_{x3}$ , em [rad/s <sup>2</sup> ].
$\dot{\mathcal{Y}}$	Variável correspondente à aceleração angular $\dot{\omega}_{y3}$ , em [rad/s <sup>2</sup> ].
$\dot{\mathcal{Z}}$	Variável correspondente à aceleração angular $\dot{\omega}_{z3}$ , em [rad/s <sup>2</sup> ].
$\dot{\alpha}$	Taxa de variação de $\alpha$ .
$\dot{\mathbf{p}}$	Taxa de variação do momento linear do corpo rígido, em [kgm/s <sup>2</sup> ].

- $\dot{\omega}_{x_3}$  Componente de  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  na direção principal de inércia  $x_3$ , em [rad/s<sup>2</sup>].
- $\dot{\omega}_{y_3}$  Componente de  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  na direção principal de inércia  $y_3$ , em [rad/s<sup>2</sup>].
- $\dot{\omega}_{z_3}$  Componente de  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$  na direção principal de inércia  $z_3$ , em [rad/s<sup>2</sup>].
- $\frac{d}{dt}(\mathcal{B}_n \boldsymbol{\omega})$  Taxa de variação da amplitude da velocidade angular do corpo, em [rad/s<sup>2</sup>].
- $\hat{\mathbf{0}}$  Elemento nulo no  $\mathbb{R}^4$ .
- $\hat{\chi}(t)$  Posição de um sistema/partícula hipotético com condição inicial  $\chi_0 + \delta\chi$
- $\hat{q}$  Taxa de variação de um quatérnion  $\hat{q}$ .
- $\hat{\boldsymbol{\omega}}$  Vetor velocidade angular  $\boldsymbol{\omega}$  descrito na forma de um quatérnion de parte escalar nula.
- $\hat{p}$  Quatérnion genérico.
- $\hat{q}_{y_2}$  Quatérnion responsável pela rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de  $y_1 \equiv y_2$ .
- $\hat{q}_{z_1}$  Quatérnion responsável pela rotação de um ângulo  $\psi$  em torno de  $z \equiv z_1$ .
- $\hat{q}_{z_3}$  Quatérnion responsável pela rotação de um ângulo  $\phi$  em torno de  $z_2 \equiv z_3$ .
- $\mathbb{I}_O$  Tensor de inércia de massa, em [kg.m<sup>2</sup>].
- $\mathbb{H}$  Conjunto dos quatérnions.
- $\mathbf{a}_O$  Vetor aceleração do centro de massa, em [m/s<sup>2</sup>].
- $\mathbf{F}^e$  Resultante vetorial das forças externas atuantes no corpo rígido, em [N].
- $\mathbf{r}_{O-O}$  Vetor posição do ponto  $CM$  em relação ao ponto  $O$  (coincidentes), em [m].
- $\mathbf{v}_O$  Vetor velocidade do centro de massa, em [m/s].
- $\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{k}}_1$  Vetores unitários do sistema referencial móvel  $\mathcal{B}_1 \mathbf{s}$ .
- $\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2$  Vetores unitários do sistema referencial móvel  $\mathcal{B}_2 \mathbf{s}$ .
- $\hat{\mathbf{i}}_3, \hat{\mathbf{j}}_3, \hat{\mathbf{k}}_3$  Vetores unitários do sistema referencial móvel  $\mathcal{B}_3 \mathbf{s}$ .
- $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  Vetores unitários do sistema referencial inercial  $\mathcal{I} \mathbf{s}$ .
- $\mathbf{A}$  Matriz de coeficientes  $a_{ij}$  que realimentam os momentos com as velocidades angulares nas direções principais de inércia, em [kg.m<sup>2</sup>/s].
- $\mathbf{M}^e$  Soma dos torques externos, em [N.m].

$\mathbf{q}$	Componentes vetoriais de um quatérnion $\hat{q}$ .
$\mathbf{q}$	Parte vetorial do quatérnion $\hat{q}$ .
$\mathbf{s}$	Sistema de referência.
$\mathbf{T}_\phi$	Matriz de transformação entre os sistemas móveis $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$ e $\mathcal{B}_3\mathbf{s}$ .
$\mathbf{T}_\psi$	Matriz de transformação entre os sistemas de referência inercial $\mathcal{I}\mathbf{s}$ e móvel $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ .
$\mathbf{T}_\theta$	Matriz de transformação entre os sistemas móveis $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ e $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$ .
$\mathbf{u}(t)$	Vetor diretor do eixo de Euler, relacionado ao teorema de rotação de Euler.
$\mathbf{u}(t)$	Vetor diretor do eixo de Euler.
$\mathcal{X}$	Variável correspondente à velocidade angular $\omega_{x3}$ , em [rad/s].
$\mathcal{Y}$	Variável correspondente à velocidade angular $\omega_{y3}$ , em [rad/s].
$\mathcal{Z}$	Variável correspondente à velocidade angular $\omega_{z3}$ , em [rad/s].
$\mathcal{F}_1 \dots \mathcal{F}_N$	Funções genéricas.
$\mathcal{Q}$	Matriz de rotações composta por quatérnions.
$\mathcal{H}_O$	Momento angular calculado em torno do ponto $O$ , em [kg.m <sup>2</sup> /s]
$\mathcal{L}_q$	Operador linear representando geometricamente uma rotação de um ângulo $\alpha$ em torno de um vetor diretor $\mathbf{u}$ no $\mathbb{R}^3$ .
$\nabla V$	Divergente volumétrico do sistema no espaço de fases.
$\omega_{x3}$	Componente de $\boldsymbol{\omega}$ na direção principal de inércia $x_3$ , em [rad/s].
$\omega_{y3}$	Componente de $\boldsymbol{\omega}$ na direção principal de inércia $y_3$ , em [rad/s].
$\omega_{z3}$	Componente de $\boldsymbol{\omega}$ na direção principal de inércia $z_3$ , em [rad/s].
$\rho$	Coefficiente dos atratores estranhos.
$\sigma$	Coefficiente dos atratores estranhos.
$\mathcal{B}_1\mathbf{s}, \mathcal{B}_2\mathbf{s}, \mathcal{B}_3\mathbf{s}$	Sistemas de referência móveis.
$\mathcal{I}\mathbf{s}$	Sistema de referência inercial.
$a$	Variável definida a partir de $a = \frac{a_{11}}{2I_0}$ .

- $a_{ij}$  Coeficientes da matriz  $\mathbf{A}$ , que realimenta os momentos com as velocidades angulares nas direções principais de inércia, em  $[\text{kg.m}^2/\text{s}]$ .
- $b$  Variável definida a partir de  $a = \frac{a_{22}}{I_0}$ .
- $CM$  Centro de massa, fixo em  $O$ .
- $i, j, k$  Componentes unitários de um quatérnion  $\hat{q}$ .
- $I_0$  Componente de menor valor do tensor de inércia  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O$ , onde  $I_0 = I_{y_3} = I_{z_3}e2I_0 = I_{x_3}$ .
- $I_{x_3}$  Momento de inércia na direção principal  $x_3$ , em  $[\text{kg.m}^2]$ .
- $I_{y_3}$  Momento de inércia na direção principal  $y_3$ , em  $[\text{kg.m}^2]$ .
- $I_{z_3}$  Momento de inércia na direção principal  $z_3$ , em  $[\text{kg.m}^2]$ .
- $m$  Massa do giroscópio, em  $[\text{kg}]$ .
- $M_{x_3}$  Momento externo aplicado em torno do eixo principal de inércia  $x_3$ , componente vetorial de  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M}$ , em  $[\text{N.m}]$ .
- $M_{y_3}$  Momento externo aplicado em torno do eixo principal de inércia  $y_3$ , componente vetorial de  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M}$ , em  $[\text{N.m}]$ .
- $M_{z_3}$  Momento externo aplicado em torno do eixo principal de inércia  $z_3$ , componente vetorial de  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M}$ , em  $[\text{N.m}]$ .
- $N$  Número de pontos/amostras temporais, em  $[\text{s}]$ .
- $O$  Origem do sistema inercial e dos sistemas móveis, coincidente com o centro de massa do giroscópio.
- $O(\Delta t^4)$  Erro de truncamento global do método Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem.
- $O(\Delta t^5)$  Erro de truncamento local do método Runge-Kutta de 5<sup>a</sup> ordem.
- $q_0$  Componente escalar de um quatérnion  $\hat{q}$ .
- $q_1, q_2$  e  $q_3$  Componentes vetoriais de um quatérnion  $\hat{q}$ .
- $R$  Raio do disco/giroscópio, em  $[\text{m}]$ .
- $t$  Tempo, em  $[\text{s}]$ .
- $t_{m\acute{a}x}$  Tempo máximo de simulação numérica, em  $[\text{s}]$ .
- $t_{m\acute{a}x}$  Tempo máximo de simulação, em  $[\text{s}]$ .

- $V_0$  Volume inicial  $V_0$  do sistema no espaço de fases.
- $x, y, z$  Eixos do sistema de referência inercial  $\mathcal{I}\mathbf{s}$ .
- $x_1, y_1, z_1$  Eixos do sistema de referência móvel  $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ .
- $x_2, y_2, z_2$  Eixos do sistema de referência móvel  $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$ .
- $x_3, y_3, z_3$  Eixos do sistema de referência móvel  $\mathcal{B}_3\mathbf{s}$ .
- $\dot{\phi}(t)$  Taxa de variação ângulo  $\phi(t)$  em torno do eixo  $z_2 \equiv z_3$ , em [rad].
- $\dot{\psi}(t)$  Taxa de variação ângulo  $\psi(t)$  em torno do eixo  $z \equiv z_1$ , em [rad].
- $\dot{\theta}(t)$  Taxa de variação ângulo  $\theta(t)$  em torno do eixo  $y_1 \equiv y_2$ , em [rad].
- $\dot{q}_i$  Taxa de variação da componente  $i$  um quatérnion  $\hat{q}$ .
- $\hat{q}^*$  Quatérnion conjugado de  $\hat{q}$ .
- $\phi(t)$  Ângulo de *spin*, rotação em torno do eixo  $z_2 \equiv z_3$ , em [rad].
- $\psi(t)$  Ângulo de nutação, rotação em torno do eixo  $z \equiv z_1$ , em [rad].
- $\theta(t)$  Ângulo de precessão, rotação em torno do eixo  $y_1 \equiv y_2$ , em [rad].
- $\mathcal{H}_O$  Taxa de variação do momento angular, calculado em relação ao centro de massa, em [kgm<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>].
- w Velocidade de um sistema/partícula hipotético.

## Lista de Figuras

1	Desenho esquemático do giroscópio e sistemas de referência utilizados. . . .	24
2	Representação gráfica da regra mnemônica de multiplicações de quatérnions.	31
3	Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (-) e por quatérnions (-.) para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 15.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.71$ [rad/s].	40
4	Taxa de variação dos ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (-) e por quatérnions (-.) para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 15.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.71$ [rad/s]. . . . .	41
5	Velocidades angulares na direção principal de inércia $\omega_{x3}$ , $\omega_{y3}$ e $\omega_{z3}$ para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 15.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.71$ [rad/s]. . . . .	42
6	Componentes $q_0$ , $q_1$ , $q_2$ e $q_3$ do quatérnion $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 15.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.71$ [rad/s]. . . . .	43
7	Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via velocidades angulares com as condições iniciais: $\psi(0) = 0.000^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.020$ [rad/s], $\theta(0) = 0.001^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.020$ [rad/s], $\phi(0) = 0.000^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.710$ [rad/s]. . . . .	44
8	Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via quatérnions com as condições iniciais: $\psi(0) = 0.000^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.020$ [rad/s], $\theta(0) = 0.001^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.020$ [rad/s], $\phi(0) = 0.000^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.710$ [rad/s]. . . . .	45
9	Velocidade de precessão $\dot{\psi}(t)$ , nutação $\dot{\theta}(t)$ e <i>spin</i> $\dot{\phi}(t)$ obtidas por cinemática inversa via velocidades angulares com as condições iniciais: $\psi(0) = 0.000^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.020$ [rad/s], $\theta(0) = 0.001^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.020$ [rad/s], $\phi(0) = 0.000^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.710$ [rad/s]. . . . .	46
10	Velocidades angulares na direção principal de inércia $\omega_{x3}$ , $\omega_{y3}$ e $\omega_{z3}$ com as condições iniciais: $\psi(0) = 0.000^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.020$ [rad/s], $\theta(0) = 0.001^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.020$ [rad/s], $\phi(0) = 0.000^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.710$ [rad/s]. . . . .	47

11	Componentes $q_0, q_1, q_2$ e $q_3$ do quatérnio $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.000^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.020$ [rad/s], $\theta(0) = 0.001^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.020$ [rad/s], $\phi(0) = 0.000^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.710$ [rad/s]. . . . .	48
12	Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via quatérnio com as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.71$ [rad/s]. . . . .	49
13	Velocidades angulares na direção principal de inércia $\omega_{x3}, \omega_{y3}$ e $\omega_{z3}$ com as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.71$ [rad/s]. . . . .	50
14	Componentes $q_0, q_1, q_2$ e $q_3$ do quatérnio $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 15.71$ [rad/s]. . . . .	51
15	Momento externo $M_{z3}$ , em [N.m], com intensidade $M_{z3} = 1.00$ [N.m] no tempo de 1.31 a 1.37 [s]. . . . .	52
16	Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (-) e por quatérnio (-.) para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 10.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 0.50$ [rad/s] e entrada impulso. . . . .	53
17	Taxa de variação dos ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (-) e por quatérnio (-.) para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 10.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 0.50$ [rad/s] e entrada impulso. . . . .	54
18	Velocidades angulares na direção principal de inércia $\omega_{x3}, \omega_{y3}$ e $\omega_{z3}$ para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 10.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 0.50$ [rad/s] e entrada impulso. . . . .	55
19	Componentes $q_0, q_1, q_2$ e $q_3$ do quatérnio $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais: $\psi(0) = 0.00^\circ$ , $\dot{\psi}(0) = 0.02$ [rad/s], $\theta(0) = 10.00^\circ$ , $\dot{\theta}(0) = 0.02$ [rad/s], $\phi(0) = 0.00^\circ$ e $\dot{\phi}(0) = 0.50$ [rad/s] e entrada impulso. . . . .	56
20	Velocidades angulares nas direções principais de inércia ao longo do tempo; condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s]. . . . .	61
21	Atrator de Lorenz no espaço de fases $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ , para as condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s]. . . . .	62

22	Atrator de Lorenz, representação nos planos de fases, para as condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s].	63
23	Velocidades angulares nas direções principais de inércia ao longo do tempo; condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s]. . . . .	64
24	Atrator de Chen no espaço de fases $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ , para as condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s]. . . . .	65
25	Atrator de Chen, representação nos planos de fases, para as condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s].	66
26	Velocidades angulares nas direções principais de inércia ao longo do tempo; condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s]. . . . .	68
27	Atrator de Lü-Chen no espaço de fases $\mathcal{X} \times \mathcal{T} \times \mathcal{Z}$ , para as condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s]. . . . .	69
28	Atrator de Lü-Chen, representação nos planos de fases, para as condições iniciais: $\omega_{x3}(0) = -0.10$ [rad/s], $\omega_{y3}(0) = 0.50$ [rad/s] e $\omega_{z3}(0) = -0.60$ [rad/s].	70
29	Secções de Poincaré para um pêndulo forçado amortecido. . . . .	84

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
1.1	Objetivos . . . . .	21
1.2	Contribuição do Trabalho . . . . .	21
1.3	Organização do Trabalho . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Descrição da Modelagem e Parametrização das Rotações</b>	<b>23</b>
2.1	Descrição do Giroscópio, Sistemas de Coordenadas e Matrizes de Transformação . . . . .	23
2.2	Vetores Posição, Velocidade e Aceleração do Centro de Massa . . . . .	26
2.3	Velocidade Angular e Taxa de Variação da Velocidade Angular do Corpo . . . . .	26
2.4	Tensor de Inércia de Massa . . . . .	27
2.5	O Método de Newton-Euler . . . . .	28
2.6	Cinemática Inversa via Ângulos de Euler . . . . .	30
2.7	Cinemática Inversa via Quatérnions . . . . .	30
2.7.1	<i>Álgebra de Quatérnions</i> . . . . .	31
2.7.2	<i>Solução do Problema de Cinemática Inversa via Quatérnions</i> . . . . .	34
2.7.3	<i>Obtenção dos Ângulos de Euler a Partir dos Valores Obtidos Para os Quatérnions</i> . . . . .	36
2.8	Conclusões . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Análise do Movimento Regular do Giroscópio por Parametrização de Rotações Utilizando Ângulos de Euler e Quatérnions</b>	<b>38</b>
3.1	Integração Numérica e Parâmetros de Amostragem Utilizados . . . . .	38
3.2	Movimento do Giroscópio Sem Ação de Forças Externas: Caso Não-Singular	39

3.3	Movimento do Giroscópio Sem Ação de Forças Externas: Condições Iniciais Próximas de Singularidades . . . . .	43
3.4	Movimento do Giroscópio Sem Ação de Forças Externas: Caso com Condição Inicial Singular . . . . .	49
3.5	Movimento do Giroscópio com Torque Impulso . . . . .	51
3.6	Conclusões . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Análise da Dinâmica do Giroscópio em Situações de Caos</b>	<b>58</b>
4.1	Integração Numérica e Parâmetros de Amostragem Utilizados . . . . .	58
4.2	Esforços Externos Realimentados Pelas Saídas . . . . .	58
4.3	O Giroscópio como um Atrator de Lorenz . . . . .	60
4.4	O Giroscópio como um Atrator de Chen . . . . .	63
4.5	O Giroscópio como um Sistema de Lü-Chen . . . . .	66
4.6	Conclusões . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>71</b>
5.1	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	71
	<b>Referências</b>	<b>73</b>
	<b>Apêndice A – Dinâmica Não-Linear e Caos Determinístico</b>	<b>79</b>
A.1	Conceitos . . . . .	79
A.1.1	<i>Sistema Não-Linear</i> . . . . .	79
A.1.2	<i>Sistemas Dinâmicos e Caos Determinístico</i> . . . . .	79
A.1.3	<i>Espaço de Configurações</i> . . . . .	81
A.1.4	<i>Pontos Fixos e Linearização</i> . . . . .	81
A.1.5	<i>Expoentes de Lyapunov</i> . . . . .	82
A.1.6	<i>Hipercaos</i> . . . . .	83
A.1.7	<i>Diagrama de Bifurcação e Parâmetros de Controle</i> . . . . .	83
A.1.8	<i>Secções de Poincaré</i> . . . . .	84

<i>A.1.9</i>	<i>Atratores Estranhos</i> . . . . .	84
<b>Apêndice B – Algoritmos Utilizados</b>		<b>86</b>
B.1	Rotinas Para os Casos de Movimento Regular do Giroscópio . . . . .	86
B.2	Rotinas Para os Casos de Movimento Caótico do Giroscópio . . . . .	94

# 1 Introdução

A parametrização de rotações finitas de corpos rígidos no Espaço Euclidiano foi inicialmente descrita por Euler em 1775 a partir do uso de três rotações sequenciais. Este resultado foi um corolário obtido a partir de seu teorema, conhecido hoje como Teorema de Rotação de Euler, que demonstrou que qualquer rotação de um corpo que possui um ponto fixo em um referencial inercial pode ser descrita por uma rotação própria em torno de um eixo de rotação, conhecido como Eixo de Euler, solidário ao giro do próprio corpo (EULER, 1775; STUELPNAGEL, 1964).

Até os dias atuais esta é uma das formas mais populares para representar a orientação de um corpo rígido no espaço. Os três ângulos de Euler parametrizam três rotações sequenciais (DIEBEL, 2006) e são utilizados para rotacionar um corpo no espaço a partir de uma matriz com nove elementos, conhecidos como cossenos diretores. Porém, uma vez que o produto de matrizes não é, por via de regra, comutativo, a escolha e a ordem destas rotações sequenciais deve ser definida *a priori* em função do tipo de problema que se deseja resolver. Em especial, um cuidado adicional deve ser levado em conta no momento desta escolha, pois as velocidades angulares instantâneas também são descritas por estes ângulos e suas respectivas taxas de variação. Um dos graves inconvenientes do uso dos ângulos de Euler para descrição destas velocidades é quando realiza-se algum cálculo envolvendo cinemática inversa, ou seja, quando a partir do conhecimento das velocidades angulares instantâneas, deseja-se integrar numericamente as equações para obter os ângulos que fornecem a orientação do corpo no espaço. Em algumas situações, existe uma clara singularidade que inviabiliza este cálculo de maneira direta (DIEBEL, 2006).

Felizmente, existem outras maneiras de parametrização que podem ser usadas com algumas vantagens frente ao uso dos ângulos de Euler (DIEBEL, 2006). Dentre estas podem ser citados os parâmetros de Cayley-Klein (NETO, 2004), parâmetros de Rodrigues e Rodrigues Modificado (SINGLA; MORTARI; JUNKINS, 2004; BETSCH; MENZEL; STEIN, 1998), vetor conforme (TRINDADE; SAMPAIO, 2000) e, ainda, os quatérnions (KUIPERS, 1999). Uma comparação das vantagens e desvantagens de algumas formas de parametrização pode ser encontrada em Trindade e Sampaio (2000).

Dentre todas estas formas de parametrização, os quatérnions são uma maneira um tanto quanto especial, principalmente devido a sua origem histórica. William Rowan

Hamilton, em meados do século XIX, sabia que multiplicação de números complexos eram isomorfos de rotação no  $\mathbb{R}^2$  e buscou de forma persistente estender isto para rotações no  $\mathbb{R}^3$  (HAMILTON, 1866). Suas primeiras tentativas envolveram utilizar elementos no  $\mathbb{R}^3$  para operar rotações no  $\mathbb{R}^3$ , mas não obteve sucesso em obter uma álgebra fechada. Somente em 1843, Hamilton constatou que precisaria operar elementos no  $\mathbb{R}^4$  para rotacionar elementos no  $\mathbb{R}^3$ . Este novo sistema numérico foi chamado por ele de quatérnion, sendo representado hoje por  $\mathbb{H}$  e com uma propriedade bem interessante: quatérnions podem ser multiplicados, ao contrário de vetores<sup>1</sup>.

Os quatérnions foram a primeira álgebra não-comutativa da história e Hamilton ficou bastante empolgado com o leque de possíveis aplicações em física e engenharia. Tanto que passou o resto de sua vida escrevendo e divulgando sobre os quatérnions, aos quais ele se referia como uma linguagem matemática universal para descrever fenômenos físicos diversos (HAMILTON, 2000; HAMILTON, 1853). Infelizmente, no final do século XIX, o americano Gibbs e o inglês Heaviside popularizaram uma notação e “álgebra” de uma vertente, podendo ser entendida hoje como uma “versão simplificada” de quatérnions, separando o produto de dois quatérnions em duas operações separadas conhecidas hoje como produto vetorial, com o símbolo  $\times$ ; e produto escalar, com o símbolo  $\cdot$ , na notação de Gibbs (MENON, 2009; SIERRA GUSTAVO MARTÍNEZ; POIRIER, 2008). Apesar de debates ferrenhos na época, a álgebra de quatérnions foi deixada no segundo plano e a “álgebra vetorial” de Gibbs, mesmo que com certos problemas e limitações, foi popularizada rapidamente, em especial devido a inúmeros livros didáticos escritos no início do século XX.

Apesar disto, na segunda metade do século XX, os quatérnions começaram a ser “redescobertos” e aplicados em larga escala, especialmente em problemas de cinemática inversa em robótica e engenharia aeroespacial (AMORUSO, 1996; LIZARRALDE; WEN, 1996; SHUSTER, 1993), visão computacional (SHOEMAKE, 1987; HART; FRANCIS; KAUFFMAN, 1994), biologia molecular (RUDNICKI; BAKALARSKI; LESYNG, 2000; HARAUZ, 1990; RÓG et al., 2003), mecânica dos fluidos (SPRÖSSIG, 2007; GIBBON et al., 2006; ESHRAGHI; GIBBON, 2008), mecânica quântica (VAZ Jr., 1997), entre inúmeras outras áreas. Apesar deste não ser o escopo deste trabalho, é interessante também salientar que, muito além de uma forma de parametrizar rotações no espaço evitando singularidades, os quatérnions têm um significado muito mais profundo, e são uma classe particular de um sistema algébrico mais avançado: a álgebra geométrica (Álgebra de Clifford).

No presente trabalho realiza-se a modelagem e análise dinâmica de um giroscópio. As equações do movimento, obtidas utilizando a dinâmica de Newton-Euler, resultam no

---

<sup>1</sup>Um objeto matemático corriqueiro atualmente quando deseja-se descrever grandezas físicas, mas que em meados do século XIX não tinha a definição que possui hoje.

problema de cinemática inversa, que será parametrizado em termos dos Ângulos de Euler e dos Quatérnions. As soluções dessas equações permitem a visualização do movimento do giroscópio. Os resultados são comparados a fim de apresentar algumas das vantagens e desvantagens das parametrizações propostas. Finalmente, partindo-se das soluções do problema parametrizado por quatérnions e considerando os esforços externos de realimentação de saída, onde os momentos externos serão proporcionais às velocidades angulares instantâneas, será verificada a existência de atratores estranhos.

## 1.1 Objetivos

Obter um modelo matemático que descreva o movimento de orientação de um giroscópio com uma origem fixa no espaço, a partir da solução do problema de cinemática inversa parametrizado por Ângulos de Euler e por Quatérnions e comparar os resultados obtidos. Realiza-se ainda um estudo da dinâmica não-linear do giroscópio sob ação de esforços realimentados pelas velocidades angulares nas direções principais de inércia do sistema.

## 1.2 Contribuição do Trabalho

O problema de parametrização de rotações já é amplamente conhecido e divulgado, porém as implicações e ligações com a álgebra geométrica não é, via de regra, discutida em textos de engenharia da maneira feita nesta dissertação e publicada em (JAMBERSI; da SILVA, 2016). Além disto, o trabalho também contribui com uma análise da possibilidade de movimento regulares e caóticos em função do efeito de realimentação de torques.

## 1.3 Organização do Trabalho

O trabalho é organizado em cinco capítulos, descritos abaixo:

- Capítulo 1: Introdução, objetivos, contribuição e organização do trabalho;
- Capítulo 2: Modelagem dinâmica do sistema e parametrização do problema de cinemática inversa por Ângulos de Euler e Quatérnions;
- Capítulo 3: Comparativo entre as soluções obtidas a partir das parametrizações de rotações por Ângulos de Euler e Quatérnions;
- Capítulo 4: Análise da dinâmica do giroscópio com esforços de realimentação de saída;

- Capítulo 5: Considerações finais e próximas etapas do trabalho.

Além destes capítulos, a dissertação conta com os apêndices:

- Apêndice A: Descrição básica de importantes conceitos que envolvem dinâmica não-linear e caos determinístico;
- Apêndice B: Apresentação dos algoritmos que foram desenvolvidos e utilizados neste trabalho.

## 2 Descrição da Modelagem e Parametrização das Rotações

Este capítulo apresenta a obtenção do modelo matemático que descreve a dinâmica do giroscópio. O modelo é obtido por meio de conceitos da mecânica clássica de Newton-Euler. O movimento do giroscópio é representado por meio de um sistema de referência inercial e três sistemas referenciais móveis. Considera-se o giroscópio como um disco perfeitamente simétrico com origem fixa em um sistema referencial inercial. O problema de cinemática inversa é, então, parametrizado em termos dos ângulos de Euler e dos quatérnions.

### 2.1 Descrição do Giroscópio, Sistemas de Coordenadas e Matrizes de Transformação

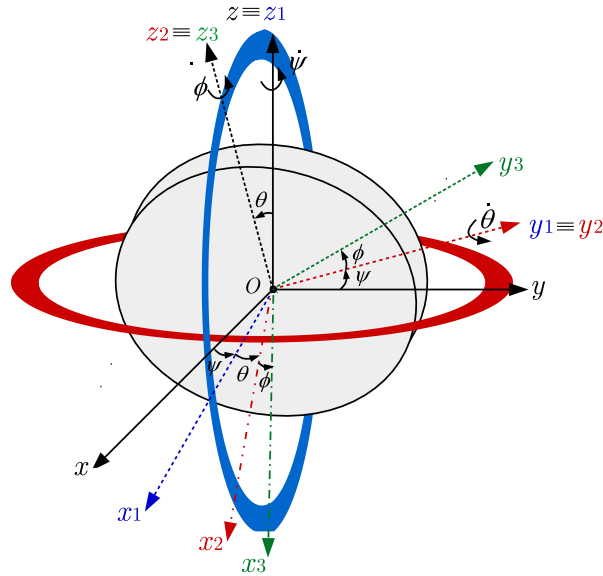
Um giroscópio pode ser descrito por um disco com massa  $m$  e raio  $R$ , posicionado em  $O$  e girando em torno de seu eixo de simetria, conforme visto na Figura 1. As inércias dos aros que circundam o giroscópio foram desconsideradas na modelagem. Os sistemas de referência devem ser escolhidos e posicionados de modo a serem o mais conveniente possíveis para a representação do movimento, minimizando a manipulação algébrica e facilitando a solução das equações (ARDEMA, 2005). O movimento do giroscópio foi representado com o auxílio de um sistema de referência inercial e três sistemas de referenciais móveis, descritos como:

- Sistema inercial  $\mathcal{S}$  com origem fixa em  $O$ , que corresponde ao centro de massa do disco, com os eixos  $(x, y, z)$  e representado pela base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ ;
- Sistema móvel  $\mathcal{B}_1$  com origem fixa em  $O$  e solidário ao primeiro giro, de precessão, que ocorre em torno de  $z \equiv z_1$  com velocidade angular  $\dot{\psi}$  e é descrito por  $(x_1, y_1, z_1)$  e representado pela base ortonormal  $\{\hat{\mathbf{i}}_1, \hat{\mathbf{j}}_1, \hat{\mathbf{k}}_1\}$ ;
- Sistema móvel  $\mathcal{B}_2$  com origem fixa em  $O$ , solidário ao segundo giro, de nutação, que ocorre em torno de  $y_1 \equiv y_2$  com velocidade angular  $\dot{\theta}$  e é descrito por  $(x_2, y_2, z_2)$  e com base  $\{\hat{\mathbf{i}}_2, \hat{\mathbf{j}}_2, \hat{\mathbf{k}}_2\}$ ;
- Sistema móvel  $\mathcal{B}_3$  com origem fixa em  $O$ , solidário ao terceiro giro, de *spin*, que ocorre em torno de  $z_2 \equiv z_3$  com velocidade angular  $\dot{\phi}$  e é, por sua vez, descrito por

$(x_3, y_3, z_3)$  e com base  $\{\hat{\mathbf{i}}_3, \hat{\mathbf{j}}_3, \hat{\mathbf{k}}_3\}$ .

Estes eixos e giros são descritos na Figura 1, e, como citado anteriormente, a sequência de rotações utilizada é  $z \equiv z_1$ ,  $y_1 \equiv y_2$  e  $z_2 \equiv z_3$  ou, em uma notação comum na descrição de sequência de rotações, 3 – 2 – 3.

Figura 1 – Desenho esquemático do giroscópio e sistemas de referência utilizados.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A matriz de transformação de coordenadas entre os vetores nos sistemas de referência inercial  $\mathcal{I}\mathbf{s}$  e móvel  $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ , determinada pela visualização geométrica da projeção do vetor no sistema de referência móvel  $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ , é dada por:

$$\mathbf{T}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Sendo a matriz de transformação um operador ortogonal (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002) que permite a transformação da seguinte forma:

$$\mathcal{B}_1\mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi \mathcal{I}\mathbf{s} \quad , \quad \mathcal{I}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi^T \mathcal{B}_1\mathbf{s} \quad (2)$$

A velocidade angular do sistema  $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$ , rotacionando com relação ao sistema  $\mathcal{I}\mathbf{s}$  é dada por:

$$\mathcal{I}\dot{\Psi} =_{\mathcal{B}_1} \dot{\Psi} = \{0 \quad 0 \quad \dot{\psi}\}^T \quad (3)$$

De forma análoga, a matriz de transformação de coordenadas entre os vetores nos sistemas de referência  $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$  e  $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$  é determinada pela visualização geométrica da projeção do vetor no sistema de referência móvel  $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$  e é dada por:

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

De modo que as transformações entre os sistemas podem ser realizadas da seguinte forma:

$$\mathcal{B}_2\mathbf{s} = \mathbf{T}_\theta \mathcal{B}_1\mathbf{s} = \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\psi \mathcal{I}\mathbf{s} \quad , \quad \mathcal{I}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi^T \mathbf{T}_\theta^T \mathcal{B}_2\mathbf{s} \quad (5)$$

A velocidade angular do sistema  $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$ , rotacionando com relação ao sistema  $\mathcal{B}_1\mathbf{s}$  é dada por:

$$\mathcal{B}_1 \dot{\Theta} = \mathcal{B}_2 \dot{\Theta} = \{0 \quad \dot{\theta} \quad 0\}^T \quad (6)$$

A matriz de transformação de coordenadas entre os vetores nos sistemas  $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$  e  $\mathcal{B}_3\mathbf{s}$ , por sua vez, é determinada pela visualização geométrica da projeção do vetor no sistema de referência móvel  $\mathcal{B}_3\mathbf{s}$ , e é dada por:

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

As transformações entre os sistemas podem ser realizadas da seguinte forma:

$$\mathcal{B}_3\mathbf{s} = \mathbf{T}_\phi \mathcal{B}_2\mathbf{s} = \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\psi \mathcal{I}\mathbf{s} \quad , \quad \mathcal{I}\mathbf{s} = \mathbf{T}_\psi^T \mathbf{T}_\theta^T \mathbf{T}_\phi^T \mathcal{B}_3\mathbf{s} \quad (8)$$

A transformação direta entre os sistemas  $\mathcal{I}$  e  $\mathcal{B}_3$ , obtida pelo produto matricial entre as três matrizes de transformação (a ordem das rotações deve ser respeitada) pode ser realizada por meio de uma matriz de rotação  $\mathcal{R}$ , função dos três ângulos de Euler  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ :

$$\mathcal{R}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{T}_\phi (\mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\psi) \quad (9)$$

sendo, portanto:

$$\mathcal{R}(\psi, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \theta \cos \phi - \text{sen } \psi \text{sen } \phi & \cos \psi \text{sen } \phi + \text{sen } \psi \cos \theta \cos \phi & -\text{sen } \theta \cos \phi \\ -(\cos \psi \cos \theta \text{sen } \phi + \text{sen } \psi \cos \phi) & \cos \psi \cos \phi - \text{sen } \psi \cos \theta \text{sen } \phi & \text{sen } \theta \text{sen } \phi \\ \cos \psi \text{sen } \theta & \text{sen } \psi \text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (10)$$

A velocidade angular do sistema  $\mathcal{B}_3\mathbf{s}$ , rotacionando com relação ao sistema  $\mathcal{B}_2\mathbf{s}$  é dada por:

$${}_{\mathcal{B}_2}\dot{\Phi} = {}_{\mathcal{B}_3}\dot{\Phi} = \{0 \quad 0 \quad \dot{\phi}\}^T \quad (11)$$

O método de Newton-Euler consiste na aplicação das equações de Newton e de Euler para a obtenção das equações que descrevem o movimento do giroscópio. A equação de Newton será calculada no sistema  $\mathcal{I}$ . A equação de Euler, por sua vez, será calculada no sistema  $\mathcal{B}_3$ . Os motivos por optar pelo cálculo da equação de Euler neste sistema serão discutidos em mais detalhes nas Seções 2.3 e 2.4.

## 2.2 Vetores Posição, Velocidade e Aceleração do Centro de Massa

A equação de Newton será calculada no sistema inercial  $\mathcal{I}$ , pois no problema proposto não haverá forças externas resultantes aplicadas no giroscópio, de modo que a escolha da base na qual a equação de Newton será calculada se torna algo, de certo modo, trivial. O vetor posição do centro de massa  $\mathbf{r}_{O-CM}$ , representado no sistema inercial  $\mathcal{I}$ , é nulo, visto que  $O \equiv CM$ , de modo que:

$${}_{\mathcal{I}}\mathbf{r}_{O-O} = \{\mathbf{0}\}^T \quad (12)$$

o que implica que os vetores velocidade e aceleração do centro de massa também são nulos. Ou seja:

$${}_{\mathcal{I}}\mathbf{v}_O = \{\mathbf{0}\}^T \quad (13)$$

$${}_{\mathcal{I}}\mathbf{a}_O = \{\mathbf{0}\}^T \quad (14)$$

Devido a esses vetores serem nulos no sistema  $\mathcal{I}$ , eles também serão nulos em  $\mathcal{B}_3$ .

## 2.3 Velocidade Angular e Taxa de Variação da Velocidade Angular do Corpo

A velocidade angular do corpo  ${}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}$  com relação ao sistema inercial é igual à própria velocidade angular do sistema móvel  ${}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega}$ , já que o movimento deste é solidário ao do corpo e é igual a resultante das três rotações, somadas num mesmo sistema de referência.

Assim, a velocidade do corpo no sistema  $\mathcal{B}_3$  é dada por:

$$\begin{aligned}
{}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega} &= {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega} = {}_{\mathcal{B}_3}\dot{\boldsymbol{\Psi}} + {}_{\mathcal{B}_3}\dot{\boldsymbol{\Theta}} + {}_{\mathcal{B}_3}\dot{\boldsymbol{\Phi}} \\
{}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega} &= \mathbf{T}_\phi \left( \mathbf{T}_{\theta \mathcal{B}_1} \dot{\boldsymbol{\Psi}} \right) + \mathbf{T}_{\phi \mathcal{B}_2} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + {}_{\mathcal{B}_3}\dot{\boldsymbol{\Phi}} \\
{}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega} &= \begin{Bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (15)
\end{aligned}$$

A velocidade angular foi calculada no sistema móvel  $\mathcal{B}_3$ , pois é neste sistema que a equação de Euler será calculada. A taxa de variação da amplitude da velocidade angular do corpo,  $\frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega})$  é dado por:

$$\frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}) = \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi + \ddot{\theta} \sin \phi + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi \\ \ddot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi + \ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

A taxa da variação da direção de  ${}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}$  é nula quando representado em  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{s}$ , já que, neste sistema, a velocidade angular do corpo é paralela à do sistema móvel, de modo que:

$${}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (17)$$

De forma que:

$$\begin{aligned}
{}_{\mathcal{B}_3}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}) + \underbrace{{}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}}_{=0} \\
{}_{\mathcal{B}_3}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \begin{Bmatrix} -\ddot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi + \ddot{\theta} \sin \phi + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \phi \\ \ddot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi + \ddot{\theta} \cos \phi - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \\ \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (18)
\end{aligned}$$

O fato de a taxa da variação da direção de  ${}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}$  ser nula no sistema  $\mathcal{B}_3$  é um dos motivos, porém não o único e sequer o principal, de se optar por calcular a equação de Euler neste sistema móvel.

## 2.4 Tensor de Inércia de Massa

O principal motivo por optar-se pelo cálculo da equação de Euler na base móvel  $\mathcal{B}_3$ , solidária ao movimento do corpo, é o fato de que, neste sistema de coordenadas, o tensor de inércia  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O$  é invariante (LEMONS, 2007), o que simplifica consideravelmente a solução

(ARDEMA, 2005). O tensor de inércia  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O$  é:

$${}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O = \begin{bmatrix} I_{x_3} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_3} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_3} \end{bmatrix}, \quad \text{sendo:} \quad \begin{cases} I_{x_3} = \frac{1}{2}mR^2 \\ I_{y_3} = I_{z_3} = \frac{1}{4}mR^2 \end{cases}$$

onde  $I_{x_3}$ ,  $I_{y_3}$  e  $I_{z_3}$  são os elementos diagonais da matriz de inércia e são chamados momento de inércia de massa nas direções principais  $x_3$ ,  $y_3$  e  $z_3$ , respectivamente. Os componentes fora da diagonal, de um modo geral, são os produtos de inércia de massa, todos nulos para o caso de um disco perfeitamente simétrico e com massa uniformemente distribuída, o que indica que os eixos de referência estão nas direções principais.

O tensor de inércia, calculado em torno do ponto  $O$  e a partir dos valores de parâmetros de massa  $m = 2$  kg e raio  $R = 0.075$  m do giroscópio<sup>2</sup>, é representado na base móvel  $\mathcal{B}_3$  como:

$${}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O = \begin{bmatrix} 0.0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0028 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0028 \end{bmatrix} \quad \text{unidade: [kg.m}^2\text{]} \quad (19)$$

## 2.5 O Método de Newton-Euler

O método de Newton-Euler consiste em aplicar as equações de Newton e Euler para a obtenção das equações do movimento de um corpo rígido<sup>3</sup>, de modo que, aplicando a 2ª Lei de Newton no sistema  $\mathcal{S}$ :

$${}_{\mathcal{S}}\mathbf{F}^e = {}_{\mathcal{S}}\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{dt}(m_{{}_{\mathcal{S}}}\mathbf{v}_O) \quad (20)$$

onde  $\mathbf{F}^e$  é a resultante vetorial das forças externas atuantes no corpo rígido e  $\dot{\mathbf{p}}$  é a taxa de variação do momento linear do corpo rígido. Se a massa do corpo for invariante com o tempo, a eq.(20) pode ser reduzida à:

$${}_{\mathcal{S}}\mathbf{F}^e = m_{{}_{\mathcal{S}}}\mathbf{a}_O \quad (21)$$

Calculando, portanto, a equação de Newton, vemos que ela não fornece nenhuma equação do movimento válida para o giroscópio:

$${}_{\mathcal{S}}\mathbf{F}^e = m_{{}_{\mathcal{S}}}\underbrace{\mathbf{a}_O}_{=0} = \mathbf{0} \quad (22)$$

<sup>2</sup>Valores arbitrariamente escolhidos.

<sup>3</sup>Para maiores detalhes sobre o método, sugere-se a consulta dos ótimos livros-texto da área: Vogtmann, Arnold e Weinstein (1989), Goldstein, Poole e Safko (2002), Lemos (2007) ou ArdeMA (2005).

As equações de Euler, por sua vez, são obtidas a partir do cálculo da taxa de variação do momento angular do corpo rígido, sendo o momento angular do giroscópio, representado no sistema móvel  $\mathcal{B}_3$ , descrito pela relação:

$${}_{\mathcal{B}_3}\mathcal{H}_O = {}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega} \quad (23)$$

onde  $\mathcal{H}_O$  é o momento angular, calculado em torno do ponto  $O$ , em  $[\text{kg.m}^2/\text{s}]$ .

As equações para descrever a orientação do giroscópio são obtidas a partir do cálculo da taxa de variação do momento angular, descrita por:

$${}_{\mathcal{B}_3}\dot{\mathcal{H}}_O = \frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}_3}\mathcal{H}_O) + {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{H}_O \quad (24)$$

sendo  ${}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega} = {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}$  a velocidade angular do sistema de referência, neste caso, coincidente com a velocidade angular do corpo, representada no sistema de referência móvel  $\mathcal{B}_3$ . A equação de Euler estabelece que a taxa de variação do momento angular do corpo é igual ao somatório de torques externos. De modo que:

$$\frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}_3}\mathcal{H}_O) + {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega} \times \mathcal{H}_O = {}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M}_O^e \quad (25)$$

onde  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M}_O^e$  é a soma dos torques externos em torno do ponto  $O$ . Nota-se que tanto o somatório de torques externos quanto o momento angular devem ser calculados em torno de um ponto, de modo que a taxa de variação do momento angular, calculada em torno do ponto  $O$ , é dada por:

$${}_{\mathcal{B}_3}\dot{\mathcal{H}}_O = {}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O \frac{d}{dt}({}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega}) + {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\Omega} \times {}_{\mathcal{B}_3}\mathbb{I}_O {}_{\mathcal{B}_3}\boldsymbol{\omega} = {}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M}_O^e \quad (26)$$

onde  $\dot{\mathcal{H}}_O$  é a taxa de variação do momento angular, calculado em relação à origem,  $\mathbb{I}_O$  é o tensor de momento de inércia, agora também calculado em relação à origem,  $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega})$  é a taxa de variação da amplitude da velocidade angular do corpo e  $\mathbf{M}_O^e$  é a resultante dos momentos, ou torques, externos atuantes em torno do ponto  $O$ . Calculando a derivada da amplitude do momento angular e a taxa de variação da direção do momento angular (que representa o torque giroscópico), obtém-se as equações de Euler de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x3} &= \frac{(I_{y3} - I_{z3})}{I_{x3}} \omega_{y3} \omega_{z3} + \frac{M_{x3}}{I_{x3}} \\ \dot{\omega}_{y3} &= \frac{(I_{z3} - I_{x3})}{I_{y3}} \omega_{z3} \omega_{x3} + \frac{M_{y3}}{I_{y3}} \\ \dot{\omega}_{z3} &= \frac{(I_{x3} - I_{y3})}{I_{z3}} \omega_{x3} \omega_{y3} + \frac{M_{z3}}{I_{z3}} \end{aligned} \quad (27)$$

sendo que, para o giroscópio,  $I_{y3} = I_{z3}$ , de modo que o sistema de eqs. (27) pode ser

reescrito como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{x3} &= \frac{M_{x3}}{I_{x3}} \\
 \dot{\omega}_{y3} &= \frac{(I_{z3} - I_{x3})}{I_{y3}} \omega_{z3} \omega_{x3} + \frac{M_{y3}}{I_{y3}} \\
 \dot{\omega}_{z3} &= \frac{(I_{x3} - I_{y3})}{I_{z3}} \omega_{x3} \omega_{y3} + \frac{M_{z3}}{I_{z3}}
 \end{aligned} \tag{28}$$

que podem ser integradas numericamente para obtenção das velocidades instantâneas  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  e  $\omega_{z3}$ . Nas seções posteriores, estas velocidades instantâneas serão relacionadas aos ângulos de Euler e aos quatérnions para a solução do problema de cinemática inversa visando ter informação explícita sobre a orientação do corpo no espaço.

## 2.6 Cinemática Inversa via Ângulos de Euler

O problema da cinemática inversa parametrizado através dos ângulos de Euler consiste em relacionar as velocidades de precessão  $\dot{\psi}$ , nutação  $\dot{\theta}$  e *spin*  $\dot{\phi}$  com as velocidades angulares do corpo nas direções principais de inércia, explicitando  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\phi}$  a partir da inversa eq. (15):

$$\begin{cases}
 \dot{\psi} &= \frac{1}{\sin \theta} (\omega_{y3} \sin \phi - \omega_{x3} \cos \phi) \\
 \dot{\theta} &= \omega_{x3} \sin \phi + \omega_{y3} \cos \phi \\
 \dot{\phi} &= \omega_{z3} - \dot{\psi} \cos \theta
 \end{cases} \tag{29}$$

Estas equações podem ser integradas numericamente. Nota-se, no entanto, que para  $\theta = n\pi$  [rad], com  $|n| = 0, 2, 4, 6, \dots$  tem-se que  $\sin \theta \approx 0$ , de modo que a eq. (29) pode apresentar singularidade em valores  $\theta$  próximos destes.

Os efeitos da singularidade no cálculo das velocidades de precessão  $\dot{\psi}(t)$ , nutação  $\dot{\theta}(t)$  e *spin*  $\dot{\phi}(t)$ , realizado a partir da eq. (29) ficarão explícitos nos resultados apresentados no Capítulo 3.

## 2.7 Cinemática Inversa via Quatérnions

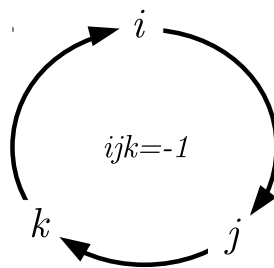
O problema da cinemática inversa parametrizado a partir dos quatérnions contorna o inconveniente das singularidades, discutido na Seção 2.6. Porém, antes de abordar a parametrização do problema de cinemática inversa através dos quatérnions, que será discutida na Subseção 2.7.2, é apresentada, na Subseção 2.7.1, o básico sobre a sua álgebra.

### 2.7.1 Álgebra de Quatérnions

Os quatérnions, para os leitores não familiarizados, consistem em uma generalização dos números complexos para quatro dimensões e são compostos por uma parte escalar  $q_0$  e uma parte vetorial  $\mathbf{q}$ . Pode-se tratar os números reais como números hipercomplexos de dimensão 1 e os números complexos comuns como hipercomplexos de dimensão 2. Nesses casos, relações de comutatividade tanto para soma quanto para multiplicação são sempre válidas. Por outro lado, para qualquer hipercomplexo de dimensão superior a 2, essas relações não são necessariamente válidas. Um caso especial são os hipercomplexos de dimensão 4, conhecidos como quatérnions (KUIPERS, 1999). Essa subseção visa contemplar aspectos básicos da álgebra de quatérnions que serão tratados neste texto, além de familiarizar o leitor à notação utilizada não possuindo, assim, o objetivo de detalhar e/ou apresentar novas formulações neste campo. Para informações sobre a álgebra de quatérnions e suas aplicações, além das contidas nesta subseção, sugere-se a consulta de Altmann (1989), Kuipers (1999) e Altmann (2005).

A Figura 2 descreve uma regra mnemônica para representar a não-comutatividade das multiplicações de quatérnions, onde a multiplicação de dois termos em sentido horário fornece como resultado o terceiro termo com sinal positivo. Por exemplo, se for multiplicados  $ij$  tem-se como resultado  $k$ , já a multiplicação de dois termos subsequentes em sentido anti-horário também fornece o terceiro termo, porém, com sinal negativo, ou seja quando for multiplicado  $ji$ , tem-se como resultado  $-k$ .

Figura 2 – Representação gráfica da regra mnemônica de multiplicações de quatérnions.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Deste modo, observa-se que os componentes unitários  $i, j, k$  do quatérnion respeitam as relações fundamentais:

$$\begin{aligned}
 i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1 \\
 ij = k = -ji \\
 jk = i = -kj \\
 ki = j = -ik
 \end{aligned} \tag{30}$$

sendo o quatérnion  $\hat{q}$  descrito por:

$$\hat{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (31)$$

ou por:

$$\hat{q} = \left\{ q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \right\}^T \quad (32)$$

ou ainda, por:

$$\hat{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{pmatrix} \quad (33)$$

sendo

$$\mathbf{q} = \left\{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \right\}^T \quad (34)$$

Assim, os quatérnions são compostos por quatro componentes ortogonais. Quando a parte escalar  $q_0$  do quatérnion é nula, tem-se um quatérnion puro, que pode, por exemplo, representar um vetor de três dimensões, do mesmo modo escalares podem ser tratados como quatérnions com parte vetorial  $\mathbf{q}$  nula (WEHAGE, 1984).

Um quatérnion  $\hat{q}$  possui um conjugado  $\hat{q}^*$  e módulo  $|\hat{q}|$  tal que:

$$\hat{q}^* = q_0 - \mathbf{q} \quad (35)$$

$$|\hat{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \quad (36)$$

Os quatérnions têm fechamento na soma, assim para  $\forall \hat{q}, \hat{p} \in \mathbb{H}$ , vale que  $\hat{q} + \hat{p} \in \mathbb{H}$ , onde  $\mathbb{H}$  denota o conjunto dos quatérnions. Estes também apresentam fechamento na multiplicação por escalar, assim  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  e  $\forall \hat{q} \in \mathbb{H}$ , vale  $\alpha \hat{q} \in \mathbb{H}$ . Também são válidos os seguintes axiomas, que mostram que os quatérnions definem um espaço vetorial:

- $\hat{q} + \hat{p} = \hat{p} + \hat{q}$
- $\hat{q} + \hat{0} = \hat{q}$
- $\alpha(\hat{q} + \hat{p}) = \alpha\hat{q} + \alpha\hat{p}$
- $(\alpha + \beta)\hat{q} = \alpha\hat{q} + \beta\hat{q}$
- $1\hat{q} = \hat{q}$
- $\hat{q} + (\hat{p} + \hat{w}) = (\hat{q} + \hat{p}) + \hat{w}$
- $\hat{q} - \hat{q} = \hat{0}$

- $\beta(\alpha\hat{q}) = (\alpha\beta)\hat{q}$

Assim, o conjunto dos quatérnions é um isomorfo do  $\mathbb{R}^3$  para quatérnions puros e é isomorfo do  $\mathbb{R}^4$  para os demais casos.

Observa-se também que, por não satisfazer a comutatividade na multiplicação, o conjunto numérico  $\mathbb{H}$  não forma um corpo. Já a inversa de um quatérnion é definida por:

$$\hat{q}^{-1}\hat{q} = \hat{q}\hat{q}^{-1} = 1 \quad (37)$$

Kuipers (KUIPERS, 1999) mostra que se  $\hat{q}$  for um quatérnion unitário, ou normalizado, a inversa do quatérnion é próprio complexo conjugado, de modo que:

$$\hat{q}^{-1} = \hat{q}^* \quad (38)$$

Interessante ressaltar que os quatérnions são excelentes operadores de rotação. Sejam  $\forall$  dois vetores  $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  que podem ser descritos como quatérnions puros, de tal modo que  $\hat{w} = 0 + \mathbf{w}$  e  $\hat{v} = 0 + \mathbf{v} \in \mathbb{H}$ , onde  $\hat{w}$  é  $\hat{v}$  após a operação de rotação. Pode-se definir um operador de rotações  $\mathcal{L}_q$ , associado com o quatérnion  $\hat{q}$  e aplicado ao vetor  $\mathbf{v}$ , a partir de:

$$\hat{w} = \mathcal{L}_q(\mathbf{v}) = \hat{q}\mathbf{v}\hat{q}^* = (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2)\mathbf{v} + 2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \quad (39)$$

sendo  $\mathcal{L}_q$  um operador linear representando geometricamente uma rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno de um vetor diretor  $\mathbf{u}$  no  $\mathbb{R}^3$ , onde  $\mathbf{u}$  fornece a orientação do eixo de rotação do Teorema de Rotação de Euler e  $\alpha$  o ângulo de rotação em torno deste eixo. A representação em quatérnions é, então, fornecida por um quatérnion unitário  $\hat{q}$  na forma:

$$\hat{q} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathbf{u} \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (40)$$

A operação de rotações com quatérnions pode ser ainda escrita na forma explícita  $\mathbf{w} = \mathcal{Q}\mathbf{v}$ , de modo que:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{w}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2(q_0^2 + q_1^2) - 1 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0^2 + q_2^2) - 1 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 2(q_0^2 + q_3^2) - 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{Q}} \underbrace{\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{v}} \quad (41)$$

Essa representação permite a comparação da matriz de rotações composta por quatérnions com a matriz de rotações envolvendo funções trigonométricas dos ângulos de Euler, eq. (10).

### 2.7.2 Solução do Problema de Cinemática Inversa via Quatérnions

Para a solução do problema de cinemática inversa, inicialmente é necessário estimar os quatérnions correspondentes às condições iniciais do problema, o que pode ser feito com a eq. (40). No caso de rotações sequenciais, sejam  $\hat{q}_{z1}$ ,  $\hat{q}_{y2}$  e  $\hat{q}_{z3}$  as rotações em torno dos eixos  $z \equiv z_1$ ,  $y_1 \equiv y_2$  e  $z_2 \equiv z_3$ , respectivamente:

$$\hat{q}_{z1} = \cos \frac{\psi}{2} + k \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \quad (42)$$

$$\hat{q}_{y2} = \cos \frac{\theta}{2} + j \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad (43)$$

$$\hat{q}_{z3} = \cos \frac{\phi}{2} + k \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \quad (44)$$

A rotação total, resultante das três rotações sequenciais e cuja ordem de operações deve ser seguida, é obtida por:

$$\hat{q} = \hat{q}_{z3} \hat{q}_{y2} \hat{q}_{z1} = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \quad (45)$$

onde, aplicando as propriedades de multiplicação de quatérnions, pode-se obter as componentes  $q_i$ 's do quatérnion  $\hat{q}$ :

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \\ q_1 &= \cos \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \\ q_2 &= \cos \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \\ q_3 &= \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (46)$$

Calculados os termos  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , pode-se integrar também as equações de Euler, eq. (28), e relacionar a taxa de variação de um quatérnion  $\hat{q}$  com as velocidades angulares na direção principal, escritas na forma de quatérnions. Essa relação pode ser obtida a partir da ideia de que entre dois quatérnions unitários pode haver um terceiro que represente a transição entre eles (KUIPERS, 1999). As formas de obtenção deste quatérnion são discutidas em Mayo (1979). Este quatérnion de transição pode ser, então, escrito como:

$$\hat{q}(t + \Delta t) = \hat{q}(t) \Delta \hat{r}(t) \quad (47)$$

sendo:

$$\Delta \hat{r}(t) = \cos \frac{\Delta \alpha}{2} + \mathbf{u}(t) \operatorname{sen} \frac{\Delta \alpha}{2} \quad (48)$$

o incremento da transição entre os quatérnions. Seu ângulo de rotação é  $\Delta \alpha$  e ocorre

em torno de um eixo definido pelo vetor diretor  $\mathbf{u}(t)$ . Supondo que o incremento  $\frac{\Delta\alpha}{2}$  é pequeno, assume-se a velocidade angular  $\omega(t)$  como constante no intervalo de tempo  $\Delta t$ , e pode-se assumir  $\cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx 1$  e  $\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) \approx \frac{\Delta\alpha}{2}$ , de forma que a eq. (48) pode ser reescrita como:

$$\Delta\hat{r}(t) = 1 + \mathbf{u}(t) \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (49)$$

substituindo este resultado na eq. (47), obtém-se:

$$\hat{q}(t + \Delta t) - \hat{q}(t) = \hat{q}(t) \mathbf{u}(t) \frac{\Delta\alpha}{2} \quad (50)$$

se tratarmos o vetor  $\mathbf{u}(t)$  como um quatérnion de parte escalar nula,

$$\hat{q}(t + \Delta t) - \hat{q}(t) = \frac{\Delta\alpha}{2} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{u}(t) \end{array} \right\} \quad (51)$$

e dividindo ambos os lados da eq. (50) por  $\Delta t$  e aplicando o limite para  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{q}(t + \Delta t) - \hat{q}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \hat{q}(t) \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{u}(t) \end{array} \right\} \quad (52)$$

e, sendo  $\dot{\alpha} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$  a taxa de variação de  $\alpha$ :

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \hat{q}(t) \dot{\alpha} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \mathbf{u}(t) \end{array} \right\} \quad (53)$$

sendo a velocidade angular do quatérnion incremental  $\Delta\hat{r}(t)$ :

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\alpha} \mathbf{u}(t) \quad (54)$$

finalmente, obtém-se:

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \hat{q}(t) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{array} \right\} \quad (55)$$

Onde a velocidade angular está descrita como um quatérnion de parte escalar nula  $\hat{\omega} = \left\{ 0 \quad \boldsymbol{\omega} \right\}^T$ . A eq. (55) pode, então, ser reescrita como:

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{1}{2} \hat{q}(t) \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{array} \right\} \quad (56)$$

ou, ainda, a partir da definição de produto entre dois quatérnions:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} (q_0 + \mathbf{q}) (0 + \boldsymbol{\omega}) \\
 &= q_0 \cdot 0 - \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} + 0 \cdot \mathbf{q} + q_0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega} \\
 &= -\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega} + q_0 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\omega}
 \end{aligned} \tag{57}$$

resolvendo as operações de produto escalar e produto vetorial descritas na eq. (57), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_0 &= -\frac{1}{2} (q_1 \omega_{x3} + q_2 \omega_{y3} + q_3 \omega_{z3}) \\
 \dot{q}_1 &= \frac{1}{2} (q_0 \omega_{x3} + q_3 \omega_{y3} - q_2 \omega_{z3}) \\
 \dot{q}_2 &= \frac{1}{2} (-q_3 \omega_{x3} + q_0 \omega_{y3} + q_1 \omega_{z3}) \\
 \dot{q}_3 &= \frac{1}{2} (q_2 \omega_{x3} - q_1 \omega_{y3} + q_0 \omega_{z3})
 \end{aligned} \tag{58}$$

que pode ser reescrita, na forma matricial, como:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{pmatrix} \tag{59}$$

Nota-se que o resultado obtido na eq.(59) relaciona a taxa de variação de um quatérnion com a velocidade angular. O problema de cinemática inversa é, portanto, parametrizado em termos dos quatérnions. Em suma, para resolver o problema de cinemática inversa por quatérnions, deve-se integrar as equações de Euler, eq. (28), e substituir os valores encontrados para as velocidades angulares nas eq. (59) e, em seguida, integrar as eq. (59) para a obtenção dos quatérnions  $\hat{q}(t)$  em cada instante de tempo. Na subseção 2.7.3 é apresentada uma forma de relacionar os valores obtidos para os quatérnions, pela integração da eq.(59), com os ângulos de Euler.

### 2.7.3 Obtenção dos Ângulos de Euler a Partir dos Valores Obtidos Para os Quatérnions

Uma correlação entre os ângulos de Euler e as componentes do quatérnion em um determinado instante de tempo podem ser obtidas relacionando a matriz de rotação  $\mathcal{R}$ ,

eq. (10), à forma explícita da operação de rotações com quatérnions  $\mathcal{Q}$ , apresentada na eq. (41). Igualando-se as matrizes termo a termo, ou seja  $\mathcal{Q}_{ij} = \mathcal{R}_{ij}$  e realizando-se algumas operações algébricas entre esses componentes à fim de isolar os ângulos  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , obtém-se:

$$\psi = \arctan\left(\frac{\mathcal{Q}(3,2)}{\mathcal{Q}(3,1)}\right) = \arctan\left(\frac{2(q_2 q_3 - q_0 q_1)}{2(q_1 q_3 + q_0 q_2)}\right) \quad (60)$$

$$\theta = \arcsin(\mathcal{Q}(3,3)) = \arcsin(2(q_0^2 + q_3^2) - 1) \quad (61)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\mathcal{Q}(2,3)}{\mathcal{Q}(1,3)}\right) = \arctan\left(\frac{-2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{2(q_1 q_3 - q_0 q_2)}\right) \quad (62)$$

## 2.8 Conclusões

Este capítulo descreveu a obtenção das equações para o problema de cinemática inversa do giroscópio, parametrizado em termos dos ângulos de Euler e dos quatérnions. Para o desenvolvimento das relações utilizadas, a álgebra de quatérnions também foi introduzida. A modelagem foi realizada utilizando-se a dinâmica de Newton Euler. O movimento do giroscópio foi descrito em termos dos ângulos de Euler e a sequência de rotações utilizada foi arbitrariamente definida como  $z \equiv z_1$ ,  $y_1 \equiv y_2$  e  $z_2 \equiv z_3$ , ou 3-2-3. Os parâmetros de massa e geometria do giroscópio foram escolhidos de forma arbitrária. O problema de cinemática inversa foi parametrizado em função dos ângulos de Euler e em termos dos quatérnions, sendo que para a primeira parametrização constatou-se que em determinados valores do ângulo de nutação podem ocorrer singularidades. Os efeitos dessas singularidades não foram discutidos neste primeiro momento, mas serão mostrados no Capítulo 3. Estabeleceu-se, ainda, uma relação entre os quatérnions e os ângulos de Euler, tornando possível a obtenção dos valores destes a partir do conhecimento das componentes do quatérnion em um determinado instante de tempo.

### 3 Análise do Movimento Regular do Giroscópio por Parametrização de Rotações Utilizando Ângulos de Euler e Quatérnions

No presente capítulo o problema da cinemática inversa é solucionado por meio da integração numérica das eqs. (28) e (29) para o problema da cinemática inversa por ângulos de Euler; e das eqs. (28) e (59) para a parametrização por quatérnions<sup>4</sup>. A integração numérica é realizada utilizando o método de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, de intervalo (ou passo de integração)  $\Delta t$  fixo, implementado em linguagem *Octave* pelo próprio autor. São realizados quatro testes: três envolvendo o movimento livre do giroscópio, ou seja, sem a atuação de esforços externos, onde o movimento ocorre em função apenas das condições iniciais; e um quarto caso com um momento externo de natureza impulsiva. O primeiro teste apresentado trata um caso onde o giroscópio parte de condições iniciais que não geram singularidades, para o segundo caso adotou-se valores de condições iniciais muito próximos do valor de ângulo de nutação para o qual ocorre singularidade, no terceiro adotou-se o valor exato que gera singularidades no ângulo de nutação, o quarto teste volta a considerar o problema sem singularidades, mas sob ação de esforços externos do tipo impulso. Os resultados obtidos são comparados em cada caso e uma discussão sobre as vantagens da parametrização envolvendo quatérnions é realizada.

#### 3.1 Integração Numérica e Parâmetros de Amostragem Utilizados

O conjunto de equações formado pela eq. (28), eq. (29) e eq. (59) consiste em um sistema de três equações diferenciais ordinárias de 1<sup>a</sup> ordem, cuja solução pode ser aproximada com o uso de um algoritmo numérico de integração como o de Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem, utilizado neste trabalho. Este método faz parte de uma família de técnicas numéricas explícitas de passo simples e apresenta um erro de truncamento propagado menor do que outros métodos comuns, como os que utilizam séries de Taylor. Os métodos da família de Runge-Kutta são classificados de acordo com sua ordem, sendo que essa identifica o número de pontos usados em um subintervalo de integração para determinar o valor da inclinação. O erro de truncamento local para o RK4 (Runge-Kutta de 4<sup>a</sup> ordem)

<sup>4</sup>A eq. (28) aparece duas vezes pois sua solução é necessária em ambas as parametrizações. Quando deseja-se integrar as eqs. (29) e (59) em simultâneo, pode-se integrar a eq. (28) apenas uma vez.

é  $O(\Delta t^5)$  e o erro de truncamento global é  $O(\Delta t^4)$ . Os algoritmos para a solução do problema foram implementados pelo próprio autor, em linguagem *Octave*, e podem ser consultados no Apêndice B, juntamente com os algoritmos para a conversão de ângulos de Euler para Quatérnions e vice-versa<sup>5</sup>. Para maiores informações sobre o método de Runge-Kutta de 4ª ordem sugere-se consultar Gilat e Subramaniam (2008).

A escolha da integração utilizando o método de Runge-Kutta 4ª ordem de passo fixo se dá devido sua facilidade de implementação e por devido à tal método ser um dos utilizados para integração de equações que descrevem sistemas mecânicos.

Os parâmetros de amostragem utilizados nos testes deste capítulo são:  $N = 10^4$  [amostras],  $\Delta t = 10^{-3}$  [s] e tempo máximo de simulação  $t_{máx} = 10$  [s]. O tempo máximo de simulação foi definido como 10 [s] para facilitar a visualização.

### 3.2 Movimento do Giroscópio Sem Ação de Forças Externas: Caso Não-Singular

O primeiro teste realizado considerou a escolha arbitrária das seguintes condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 15.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s]. Optou-se por expressar os valores e os resultados dos ângulos em graus devido à tal unidade de grandeza ser muitas vezes mais intuitiva do que a unidade [rad]. Manteve-se [rad/s] para as velocidades angulares. Como visto na Seção 2.6, as singularidades ocorrem para valores de  $\theta = n\pi$  [rad], com  $|n| = 0, 2, 4, 6, \dots$ , de modo que, para este teste, espera-se que os resultados obtidos para as duas formas de parametrização utilizadas sejam os mesmos desde que não haja tempo suficiente para que o ângulo de nutação  $\theta(t)$  assumira os valores para os quais ocorrem as singularidades. Assume-se, também, que o sistema esteja livre da ação de momentos/esforços externos, com  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M} = \left\{ M_{x3} \quad M_3 \quad M_{z3} \right\}^T = \mathbf{0}$  [N.m], de modo que o conjunto de eqs. (28) pode ser reescrito como:

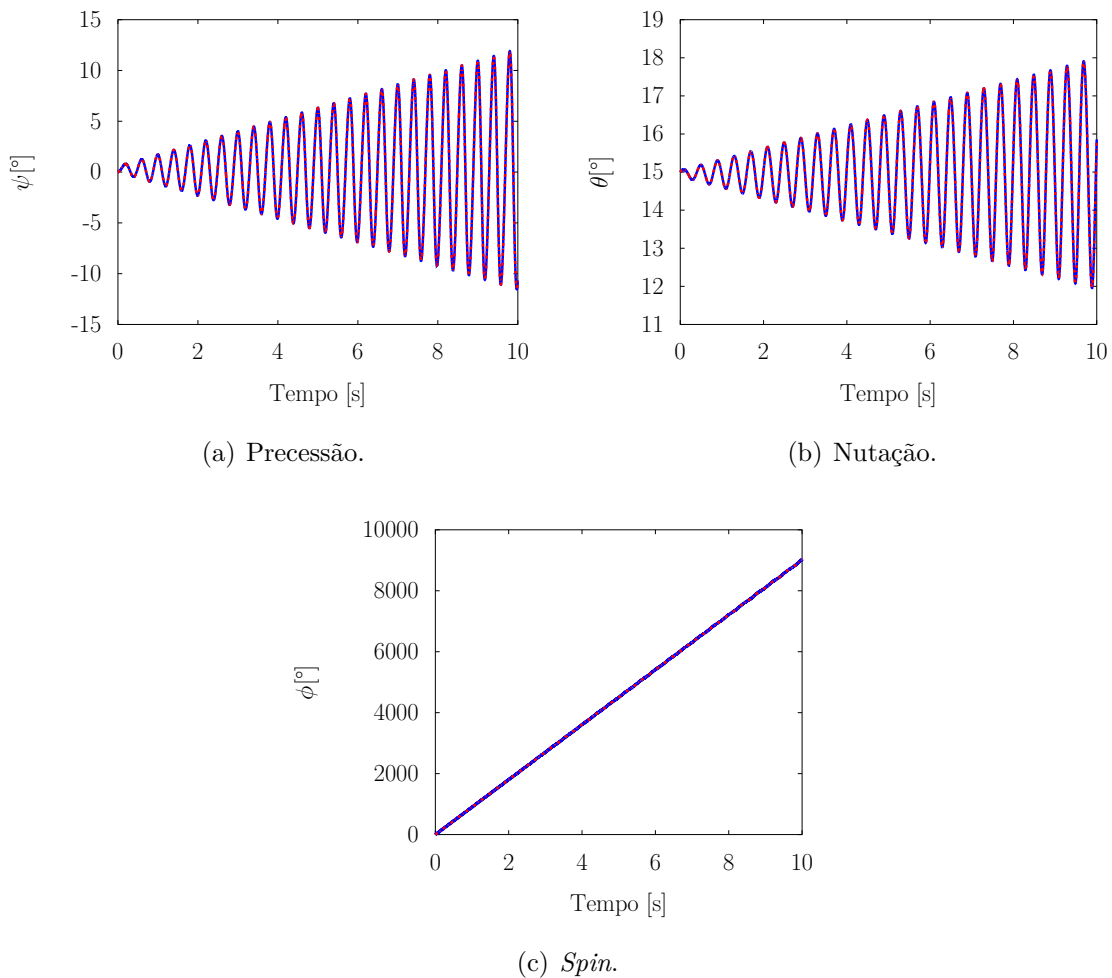
$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{x3} &= 0 \\ \dot{\omega}_{y3} &= \frac{(I_{z3} - I_{x3})}{I_{y3}} \omega_{z3} \omega_{x3} \\ \dot{\omega}_{z3} &= \frac{(I_{x3} - I_{y3})}{I_{z3}} \omega_{x3} \omega_{y3} \end{aligned} \tag{63}$$

A Figura 3 apresenta os resultados obtidos para os ângulos de Euler  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  e  $\phi(t)$ . Neste teste, nota-se que a solução por meio da cinemática inversa por ângulos de

<sup>5</sup>Não foram utilizadas funções de *Toolboxes*, tanto para realização da integração quanto para a conversão de ângulos de Euler em quatérnions e/ou vice-versa. Os algoritmos foram desenvolvidos de tal modo que podem ser utilizados *software* gratuito e de código aberto *Octave*.

Euler e por quatérnions apresentaram resultados idênticos entre si. Para esta situação, a velocidade de *spin* foi definida com valor muito superior às velocidades de precessão e nutação. destaca-se ainda que, se o tempo de simulação fosse suficientemente grande, essas amplitudes tenderiam a aumentar indefinidamente, já que não há dissipação de energia, até que fosse atingido um valor de  $\theta$  para o qual houvesse singularidades.

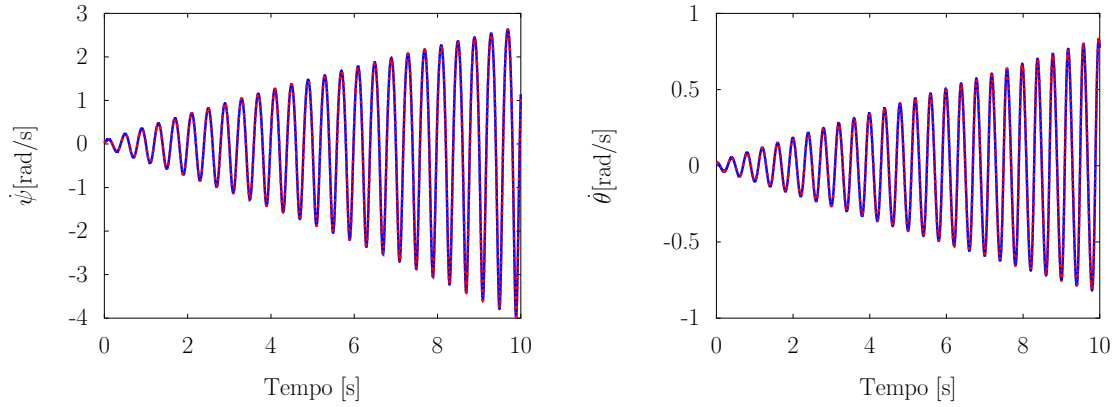
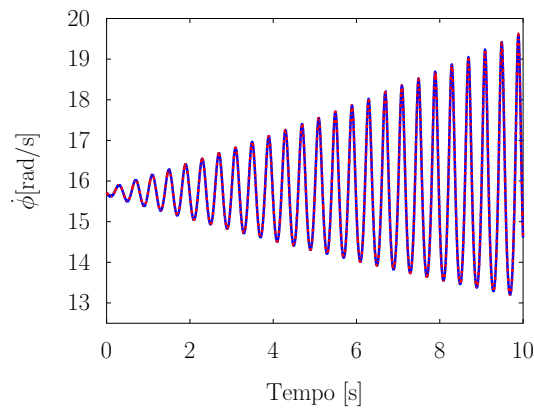
Figura 3 – Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (–) e por quatérnions (·) para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 15.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Deste modo, nota-se um ligeiro aumento na velocidade de *spin*, bem como do próprio ângulo de *spin*  $\phi(t)$ , enquanto os ângulos de precessão  $\psi(t)$  e nutação  $\theta(t)$  apresentaram comportamento de caráter oscilatório, com tendência ao aumento de suas amplitudes. O tempo de simulação utilizado não foi suficientemente longo para permitir que  $\theta(t)$  assumisse valores que gerassem singularidades no modelo.

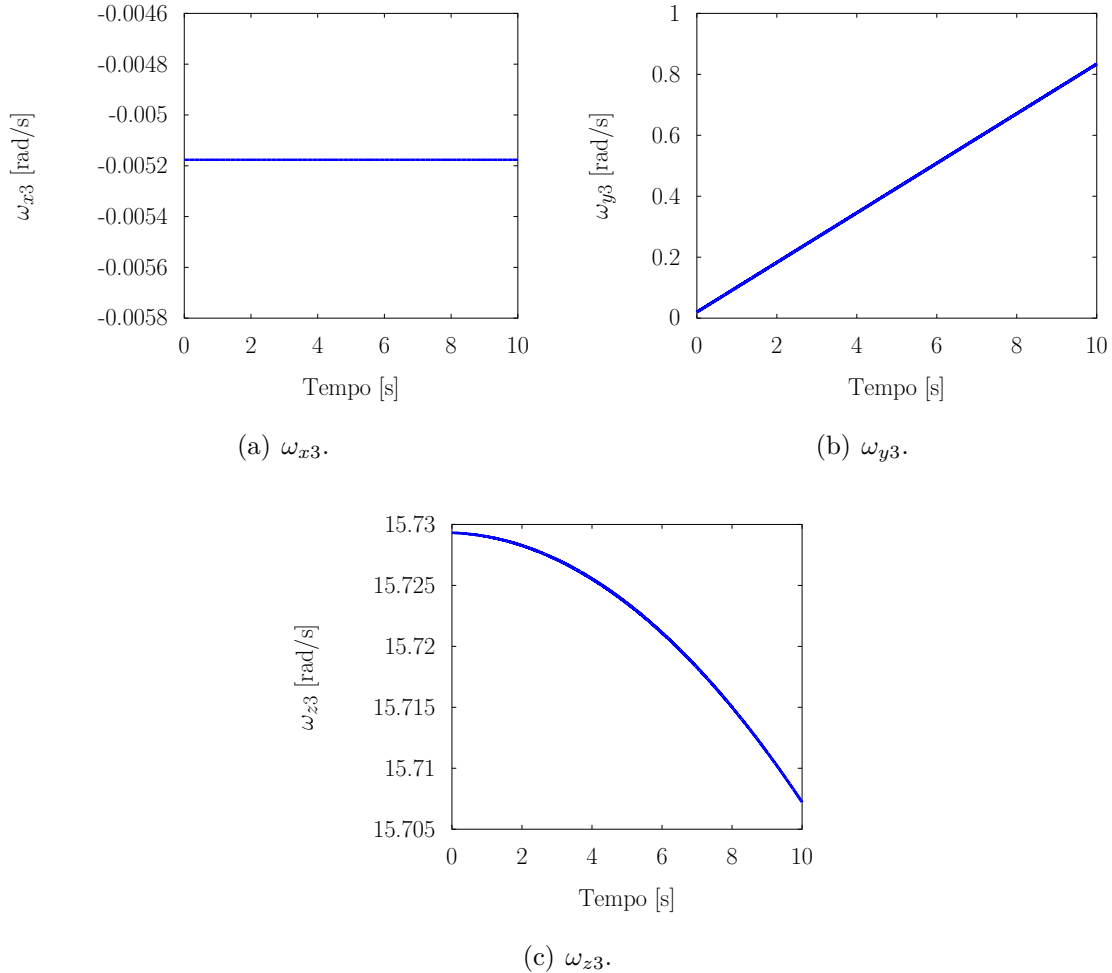
Figura 4 – Taxa de variação dos ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (–) e por quatérnions (–.) para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 15.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s].

(a)  $\dot{\psi}(t)$ .(b)  $\dot{\theta}(t)$ .(c)  $\dot{\phi}(t)$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A Figura 5 exibe os resultados para as velocidades angulares nas direções principais de inércia, cujo cálculo é realizado diretamente pela integração da eq. (63) e independe da parametrização realizada.

Figura 5 – Velocidades angulares na direção principal de inércia  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  e  $\omega_{z3}$  para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 15.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s].

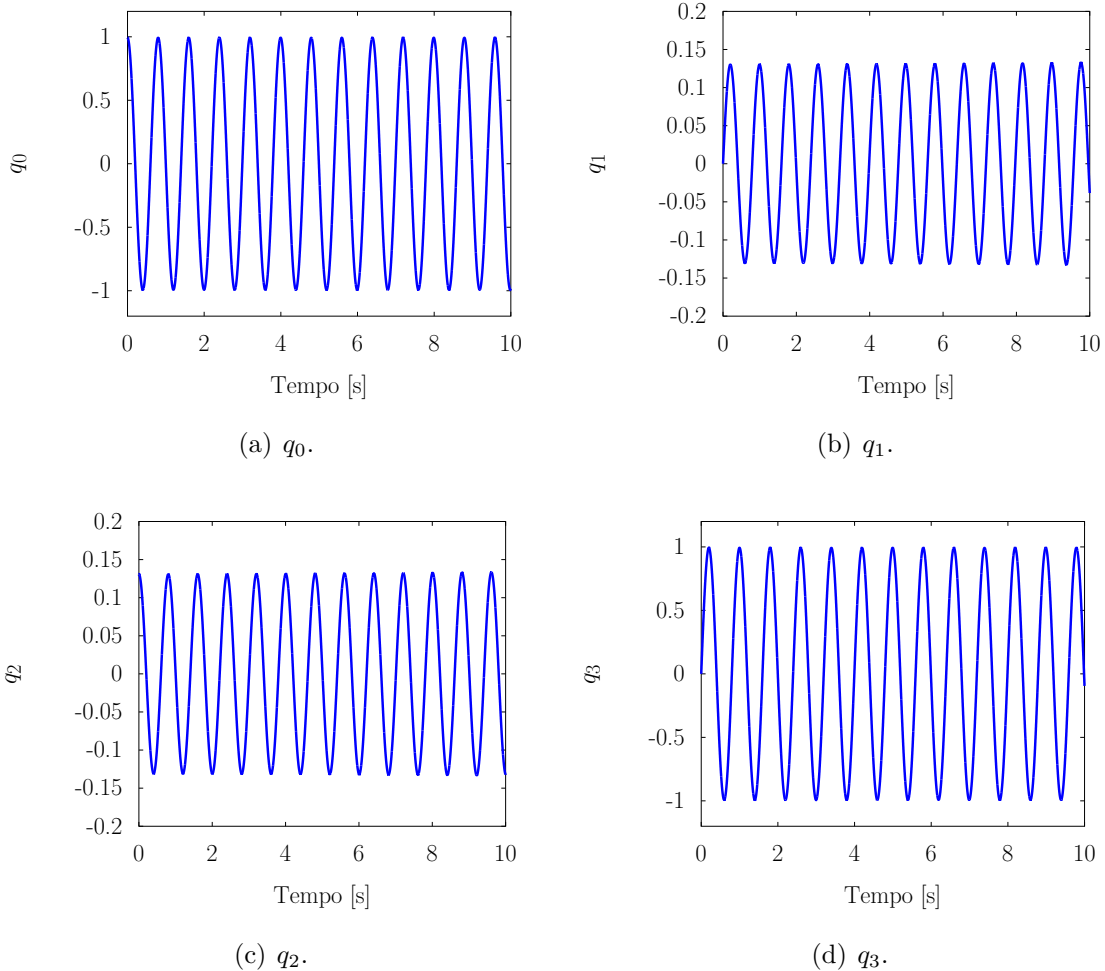


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Nota-se pela Figura 5(a) que  $\omega_{x3}(t)$  é constante ao longo do tempo. Isso ocorre pois, se observamos a eq. (63), tem-se que  $\dot{\omega}_{x3} = 0$ , cujo resultado da integração prevê um valor constante para  $\omega_{x3}(t)$ .

A Figura 6, por sua vez, apresenta as componentes  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  do quatérnio  $\hat{q}$  calculado no problema de cinemática inversa utilizando-se os quatérnios. O módulo de  $\hat{q}$ , obtido a partir da eq. (36) é igual a 1 para qualquer instante de tempo, garantindo que a operação realizada é apenas de rotação.

Figura 6 – Componentes  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  do quatérnio  $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 15.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

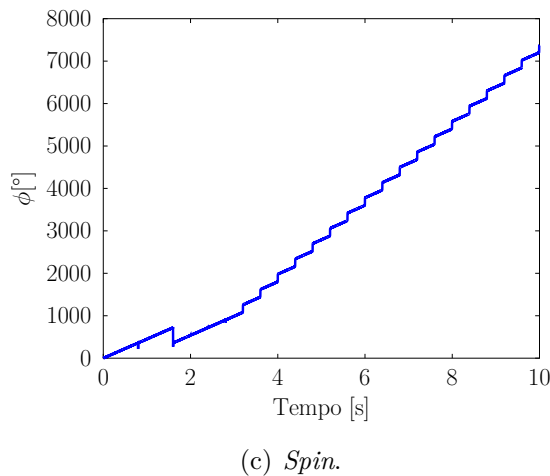
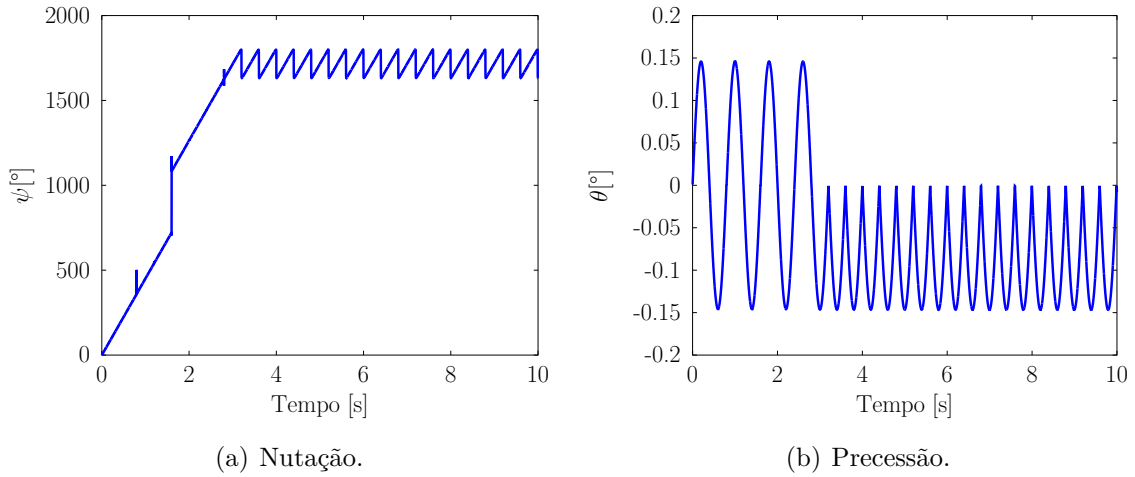
### 3.3 Movimento do Giroscópio Sem Ação de Forças Externas: Condições Iniciais Próximas de Singularidades

Nesta seção também se faz uma análise do giroscópio livre de esforços externos aplicados. A diferença entre estes testes está na escolha arbitrária das condições iniciais, que é feita neste de tal modo a assumir um valor para  $\theta_0 \approx 0$ , ou seja, próximo de um valor para o qual a eq. (29) se torna singular. Essa escolha foi realizada de modo a causar propositalmente efeitos de singularidades no teste, permitindo uma análise comparativa entre ambas as parametrizações.

As Figuras 7 e 8 expressam os resultados obtidos para os ângulos de precessão  $\psi(t)$ , nutação  $\theta(t)$  e *spin*  $\phi(t)$  pela cinemática inversa via velocidades angulares instantâneas e por quatérnios, respectivamente. Neste teste optou-se por apresentar os resultados em

figuras independentes por uma questão de facilidade de visualização, já que as trajetórias divergem consideravelmente. Reiterando que esses resultados haveriam de ser idênticos, como foram os testes feitos na seção anterior, não fosse a influência das singularidades.

Figura 7 – Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via velocidades angulares com as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.000^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.001^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.000^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.710$  [rad/s].

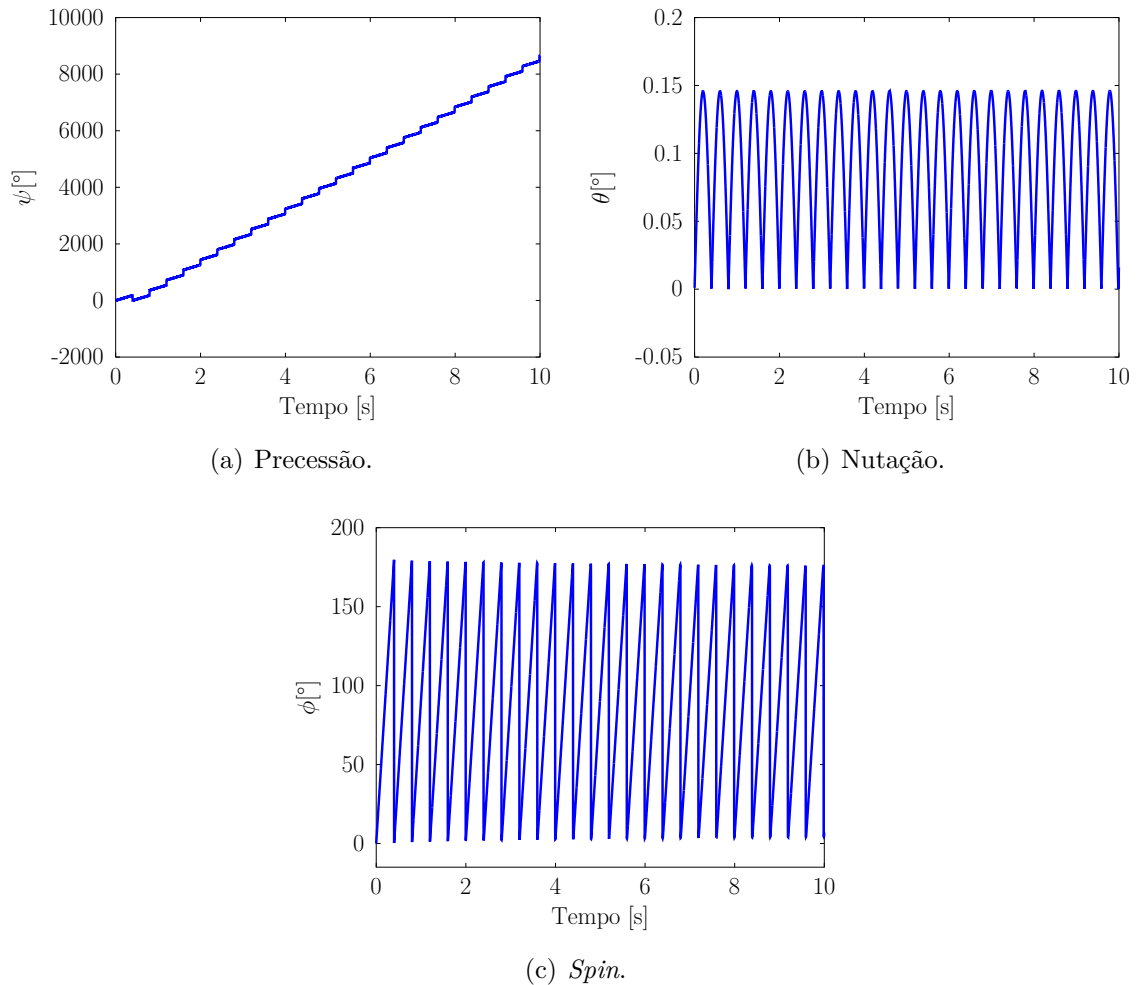


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Para os ângulos de precessão  $\psi(t)$  e spin  $\phi(t)$ , vistos nas Figuras 7(a) e 7(c), correspondentes a solução por cinemática inversa através dos ângulos de Euler, é possível notar algumas mudanças bruscas nas trajetórias, enquanto na solução por quatérnions, Figuras 8(a) e 8(c), tal comportamento não é percebido. O ângulo de nutação  $\theta(t)$ , Figura 7(b), também apresentou uma mudança repentina em seu comportamento que, na ausência de dissipação de energia ou momentos externos, pode ser atribuída às singularidades. Na Figura 8 pode-se notar que os valores de  $\phi(t)$  parecem estar mapeados entre 0 e  $180^\circ$ . Problemas de representação como este podem ocorrer devido às limitações no cálculo das funções arctan e arcsin, nas eqs. (60), (61) e (62), responsáveis pela obtenção dos ângulos

de Euler a partir dos quatérnions e infelizmente não podem ser evitados sem uma análise mais criteriosa. Este problema de representação pode, algumas vezes, ser contornado pelo uso da função *unwrap* no *Octave*<sup>6</sup>.

Figura 8 – Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via quatérnions com as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.000^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.001^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.000^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.710$  [rad/s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Ainda que a parametrização por quatérnions possa apresentar algumas limitações, ela permite a integração mesmo no caso onde a condição inicial é  $\theta_0 = 0^\circ$ , permitindo a estimativa dos ângulos de Euler para este caso, o que será evidenciado também na Seção 3.4.

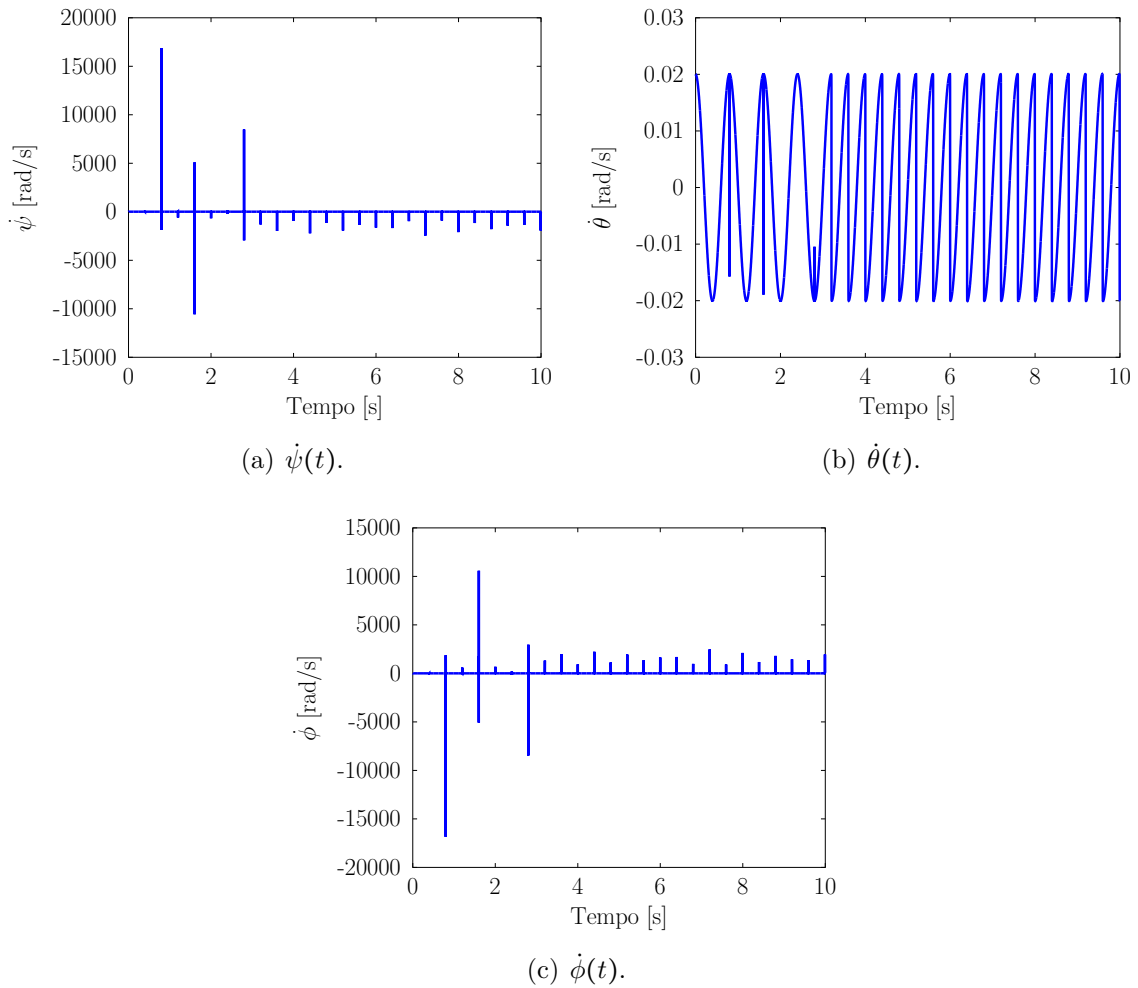
O efeito da singularidade no cálculo das velocidades de precessão  $\dot{\psi}(t)$ , nutação  $\dot{\theta}(t)$  e spin  $\dot{\phi}(t)$ , realizado a partir da eq. (29) fica explícito na Figura 9, onde nota-se que estas velocidades assumem valores muito altos em instantes de tempo anteriores a 3 segundos,

<sup>6</sup>Nos resultados apresentados, a função *unwrap* funcionou bem para o ângulo  $\psi(t)$ , mas não para o ângulo  $\phi(t)$ .

o que ocorre a cada vez que o ângulo de natação  $\theta(t)$  se aproxima muito ou assume o valor de  $0^\circ$ .

Na Figura 9(b) é possível notar um comportamento inconsistente para a velocidade de natação, também gerado pela presença de singularidades.

Figura 9 – Velocidade de precessão  $\dot{\psi}(t)$ , natação  $\dot{\theta}(t)$  e *spin*  $\dot{\phi}(t)$  obtidas por cinemática inversa via velocidades angulares com as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.000^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.001^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.000^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.710$  [rad/s].



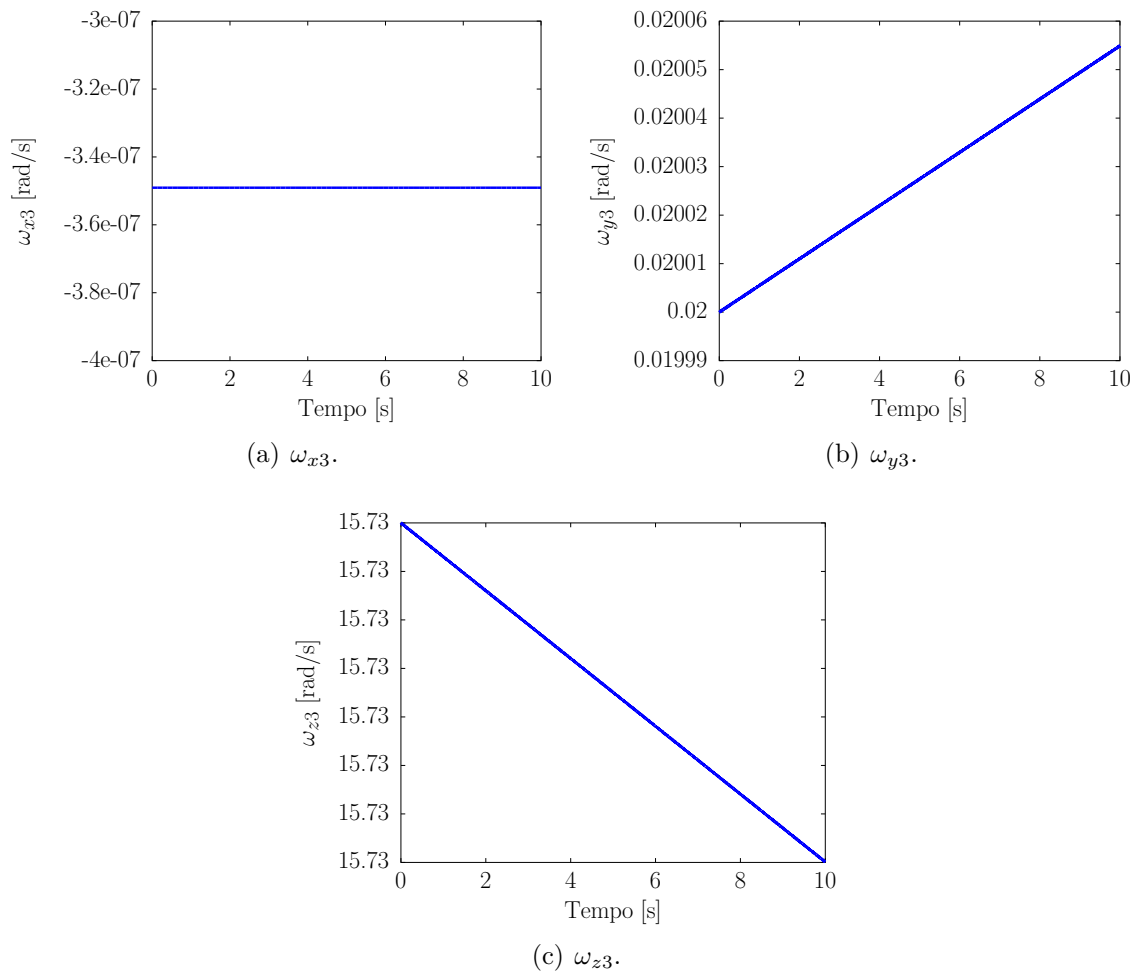
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

As singularidades não influenciam no cálculo das velocidades angulares nas direções principais de inércia, que são provenientes da integração da eq. (63), como pode ser visualizado na Figura 10, onde não nota-se nenhuma variação brusca dos valores dessas e, como pode ser visto na eq. (59), a taxa de variação dos quatérnions, assim como a integração destes, são funções diretas dos valores destas velocidades angulares, de modo que os quatérnions também não são afetados pela presença de singularidades.

O problema das singularidades na solução por ângulos de Euler poderia ser parcial-

mente contornado escolhendo outra sequência de rotações para representar o giroscópio. Porém, estas singularidades seriam apenas “transferidas” para outros valores de ângulos, já que obteríamos um sistema de equações semelhantes à eq. (29) com uma singularidade em  $\cos \theta \approx 0$ , ou seja, para  $\theta = |n| \frac{\pi}{2}$  [rad], com  $|n| = 1, 3, 5, \dots$ , de modo que, utilizando ângulos de Euler para representar as rotações, nunca estaríamos de fato livres do problema.

Figura 10 – Velocidades angulares na direção principal de inércia  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  e  $\omega_{z3}$  com as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.000^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.001^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.000^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.710$  [rad/s].



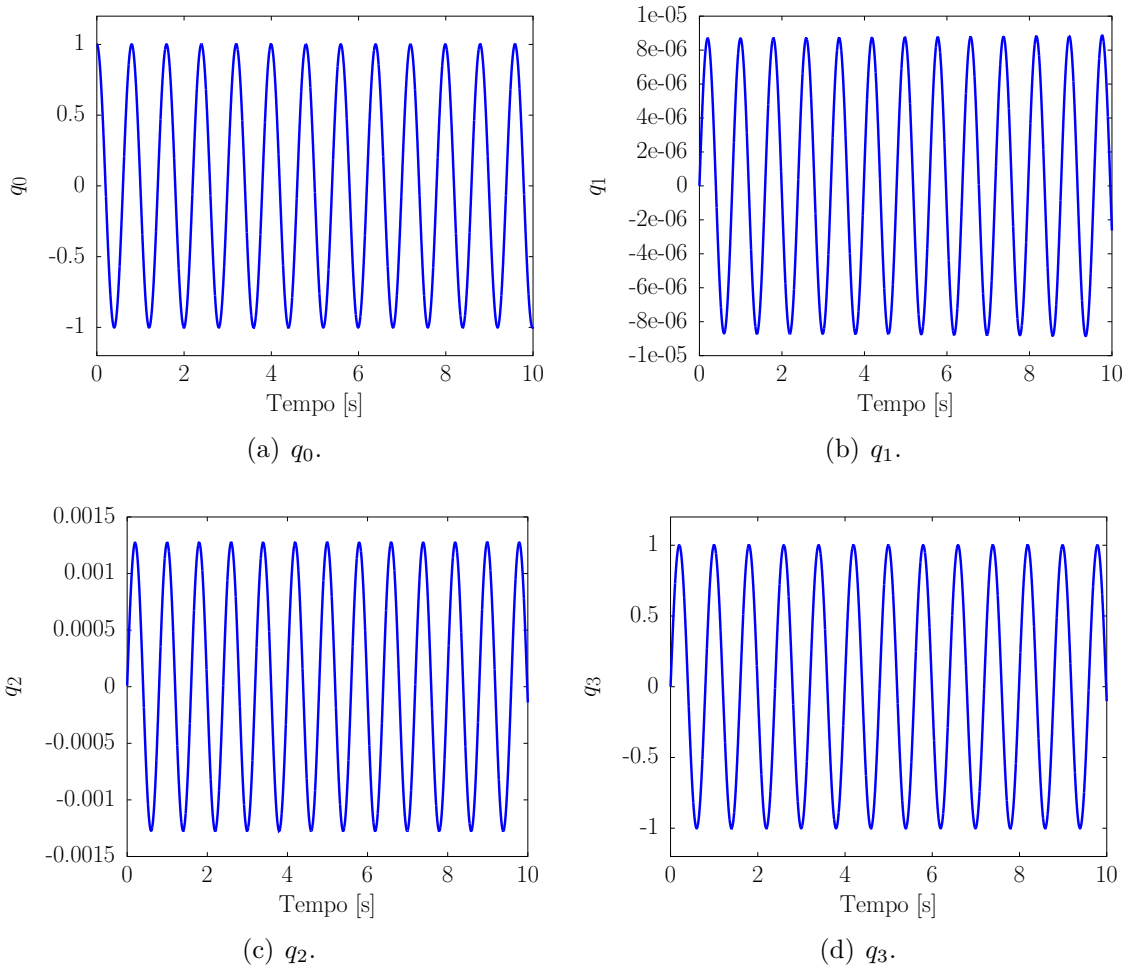
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A escolha de outra sequência de rotações seria uma alternativa, por exemplo, na descrição de rotações de um corpo com baixa probabilidade de atingir determinados valores de ângulos por ação de alguma restrição física imposta ao/do sistema. Nestes casos, poderíamos admitir singularidades nessas faixas de valores improváveis para tais ângulos. Porém, para o caso onde o sistema pode assumir quaisquer valores de ângulos de nutação, a mudança na sequência das rotações não surtiria grande efeito. Outra forma de evitar essas singularidades sem abrir mão do uso dos ângulos de Euler é discutido em

Singla, Mortari e Junkins (2004), que propõem variar a sequência de rotações adotada de forma dinâmica, alterando a escolha da sequência de rotações entre as doze possíveis quando uma singularidade se aproxima para um determinado valor de ângulo, adotando uma sequência para à qual a singularidade seja deslocada para  $\frac{\pi}{2}$  radianos de distância. Os autores apresentam ainda um algoritmo iterativo para a determinação da sequência de rotações ótima a ser adotada, que requer um número razoável de operações matemáticas. Frente à esta proposta, o uso de quatérnions apresenta um custo computacional menor e se mostra mais atraente para tratar o problema de cinemática inversa.

As componentes do quatérnion  $\hat{q}$  obtidas são apresentadas na Figura 11.

Figura 11 – Componentes  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  do quatérnion  $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.000^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.001^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.000^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.710$  [rad/s].

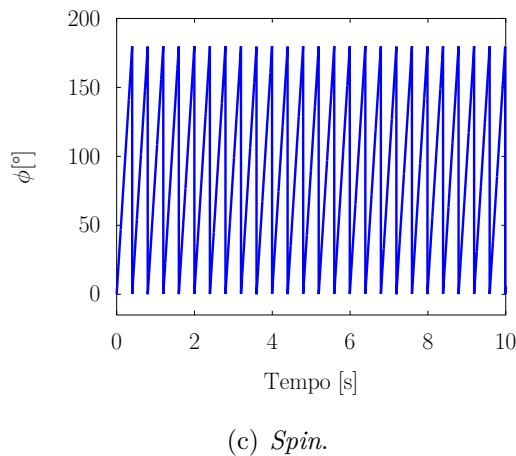
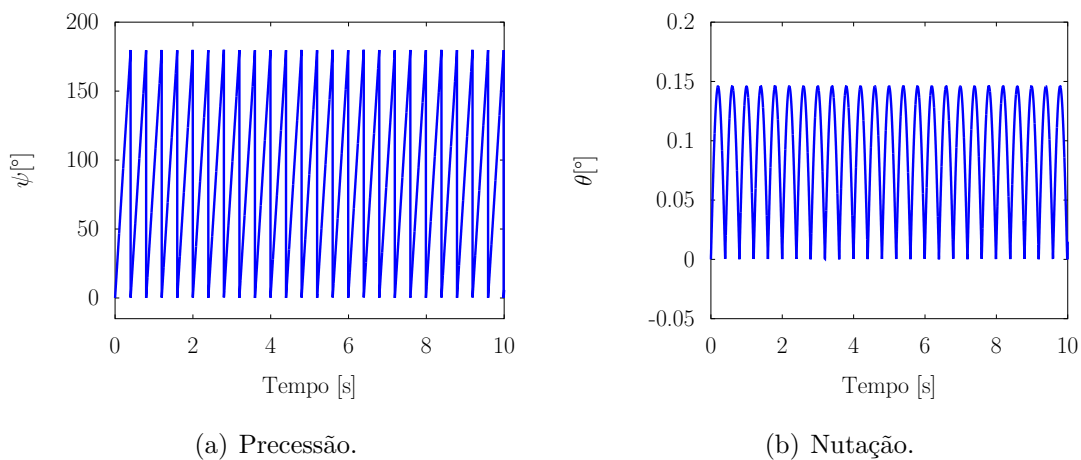


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

### 3.4 Movimento do Giroscópio Sem Ação de Forças Externas: Caso com Condição Inicial Singular

Este teste de aplicação se assemelha ao caso anterior, com a sutil diferença de que considera a condição inicial  $\theta_0 = 0$  e não mais  $\theta_0 \approx 0$ . Ou seja, o valor inicial para o ângulo de nutação faz com que a eq. (29) seja singular já desde a primeira iteração do integrador. A Figura 12 apresenta os ângulos  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  e  $\phi(t)$ , obtidos através dos quatérnions.

Figura 12 – Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via quatérnions com as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s].



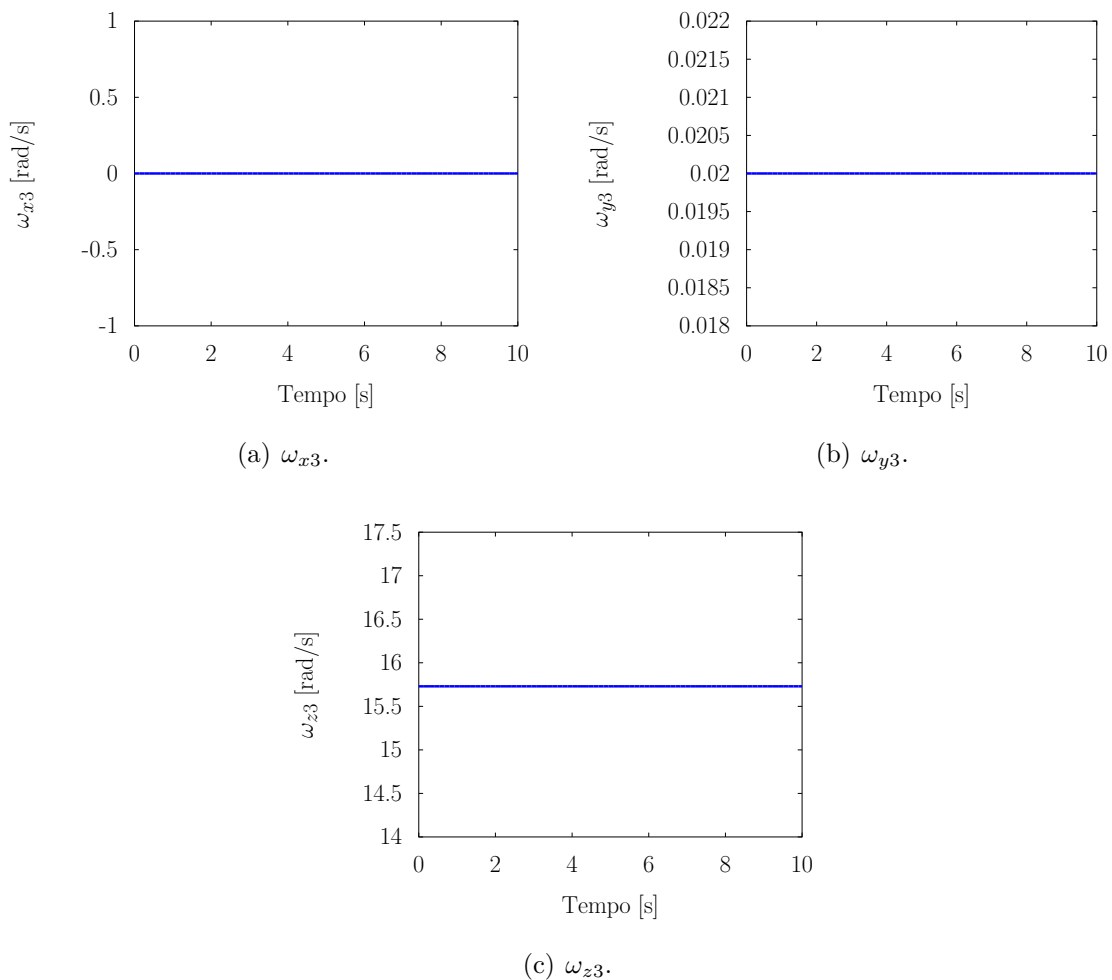
Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

O motivo de exibirmos apenas o resultado obtido a partir dos quatérnions é o previamente discutido na Seção 3.3: a solução do problema de cinemática inversa por ângulos de Euler não existe devido às divisões por zero no processo, gerando valores indeterminados para os ângulos de Euler em todos os instantes de tempo. Também é possível a obtenção dos valores de  $\dot{\psi}(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$  e  $\dot{\phi}(t)$ , já que a parametrização por quatérnions não relaciona esses às taxas de variações dos ângulos de Euler.

Comparando as Figuras 12 e 8, nota-se uma diferença nas trajetórias entre 8(a) e 12(a), que pode ser associada ao comando *unwrap* ter funcionado apenas no primeiro caso, mas não é notada diferença significativa para os resultados obtidos para os ângulos  $\theta(t)$  e  $\phi(t)$ . Condições iniciais próximas geram resultados próximos.

A Figura 13 apresenta as velocidades angulares nas direções principais de inércia e as componentes do quatérnio  $\hat{q}$  são apresentadas na Figura 14.

Figura 13 – Velocidades angulares na direção principal de inércia  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  e  $\omega_{z3}$  com as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s].

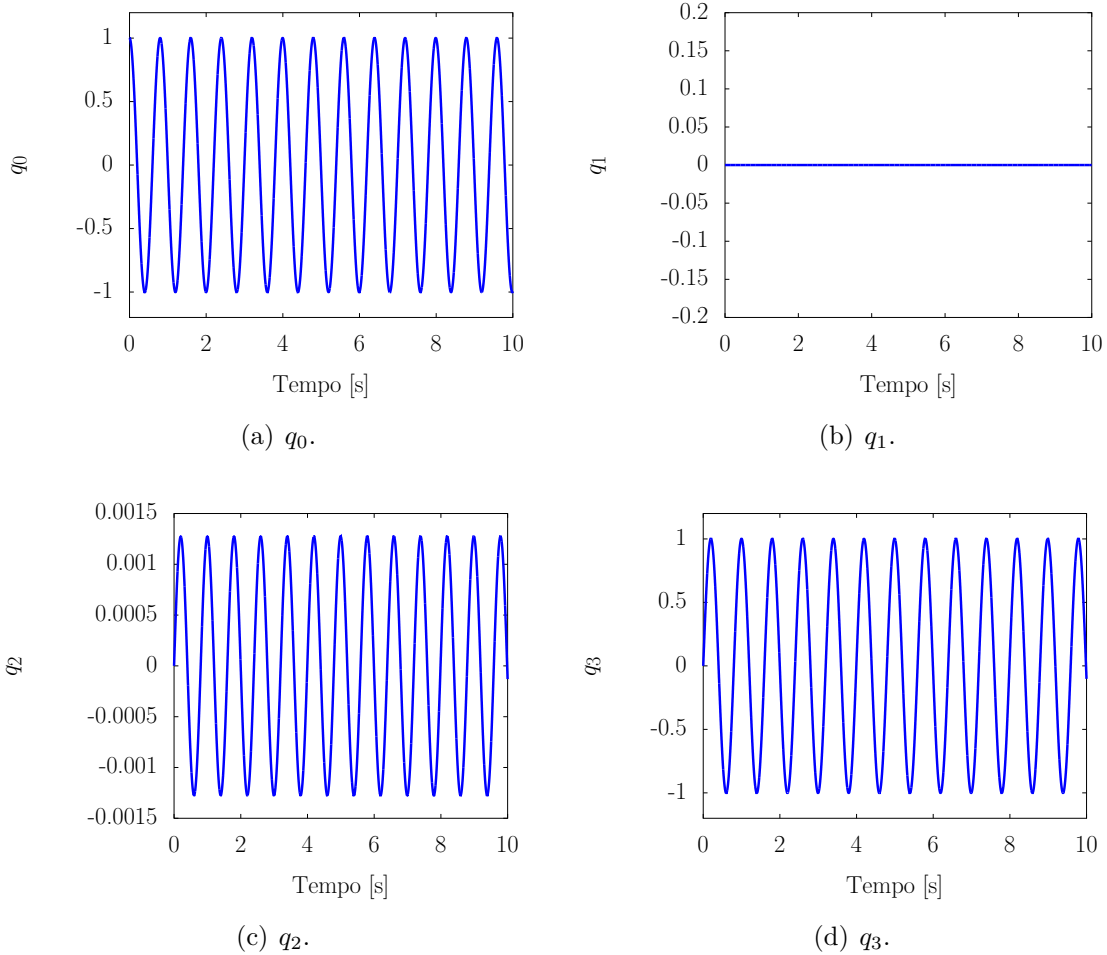


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Neste teste, torna-se evidente que a parametrização por quatérnios é útil e traz vantagens na solução do problema de cinemática inversa frente à parametrização por ângulos de Euler. Enquanto a primeira é eficaz na solução do problema, permitindo ainda a obtenção dos valores e representação do movimento por meio dos ângulos de nutação, precessão e *spin* mesmo para o caso onde já se toma como ponto de partida uma condição inicial singular, a segunda parametrização falha, gerando como resultados

valores indeterminados para os três ângulos de Euler.

Figura 14 – Componentes  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  do quatérnio  $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 15.71$  [rad/s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

### 3.5 Movimento do Giroscópio com Torque Impulso

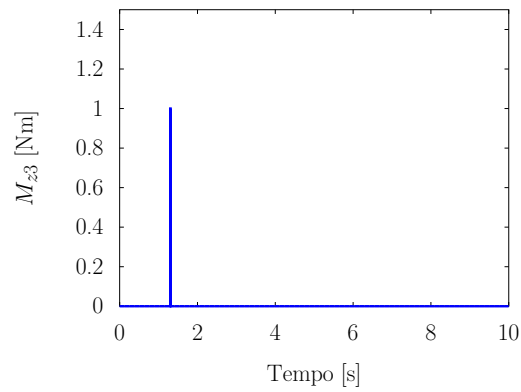
Neste teste utilizou-se um momento externo aplicado do tipo impulso em torno do eixo principal  $z_3$ , no tempo de 1.31 a 1.37 [s], com amplitude  $M_{z3} = 1.00$  [N.m], conforme mostra a Figura 15. O momento externo é dado por  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M} = \{0 \ 0 \ M_{z3}\}^T$  com as condições iniciais  $\psi(0) = 0.000^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\theta(0) = 10.000^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.020$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.000^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 0.500$  [rad/s]. O conjunto de eqs. (28), neste caso, pode ser reescrito

como:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{x3} &= 0 \\
 \dot{\omega}_{y3} &= \frac{(I_{z3} - I_{x3})}{I_{y3}} \omega_{z3} \omega_{x3} \\
 \dot{\omega}_{z3} &= \frac{(I_{x3} - I_{y3})}{I_{z3}} \omega_{x3} \omega_{y3} + \frac{M_{z3}}{I_{z3}}
 \end{aligned} \tag{64}$$

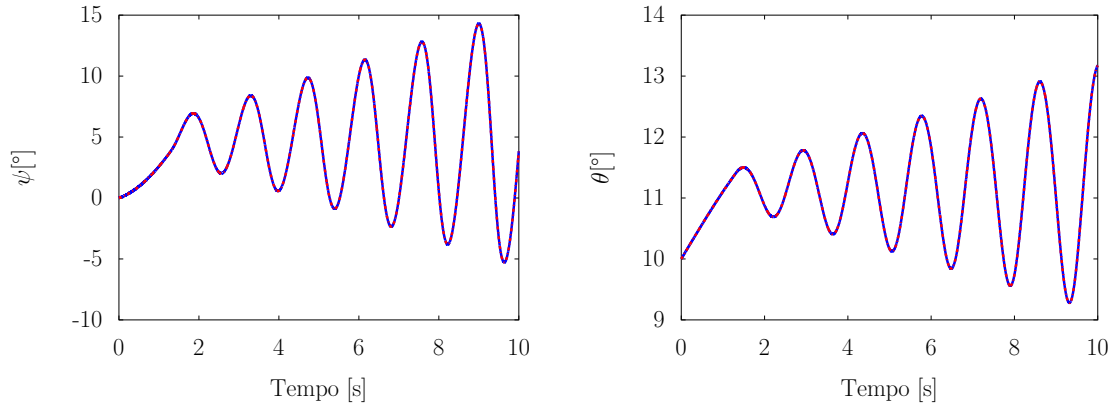
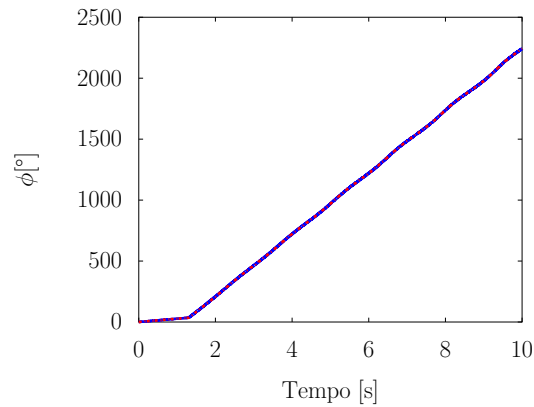
A Figura 16 exibe os resultados obtidos para os ângulos  $\psi(t)$ ,  $\theta(t)$  e  $\phi(t)$ .

Figura 15 – Momento externo  $M_{z3}$ , em [N.m], com intensidade  $M_{z3} = 1.00$  [N.m] no tempo de 1.31 a 1.37 [s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

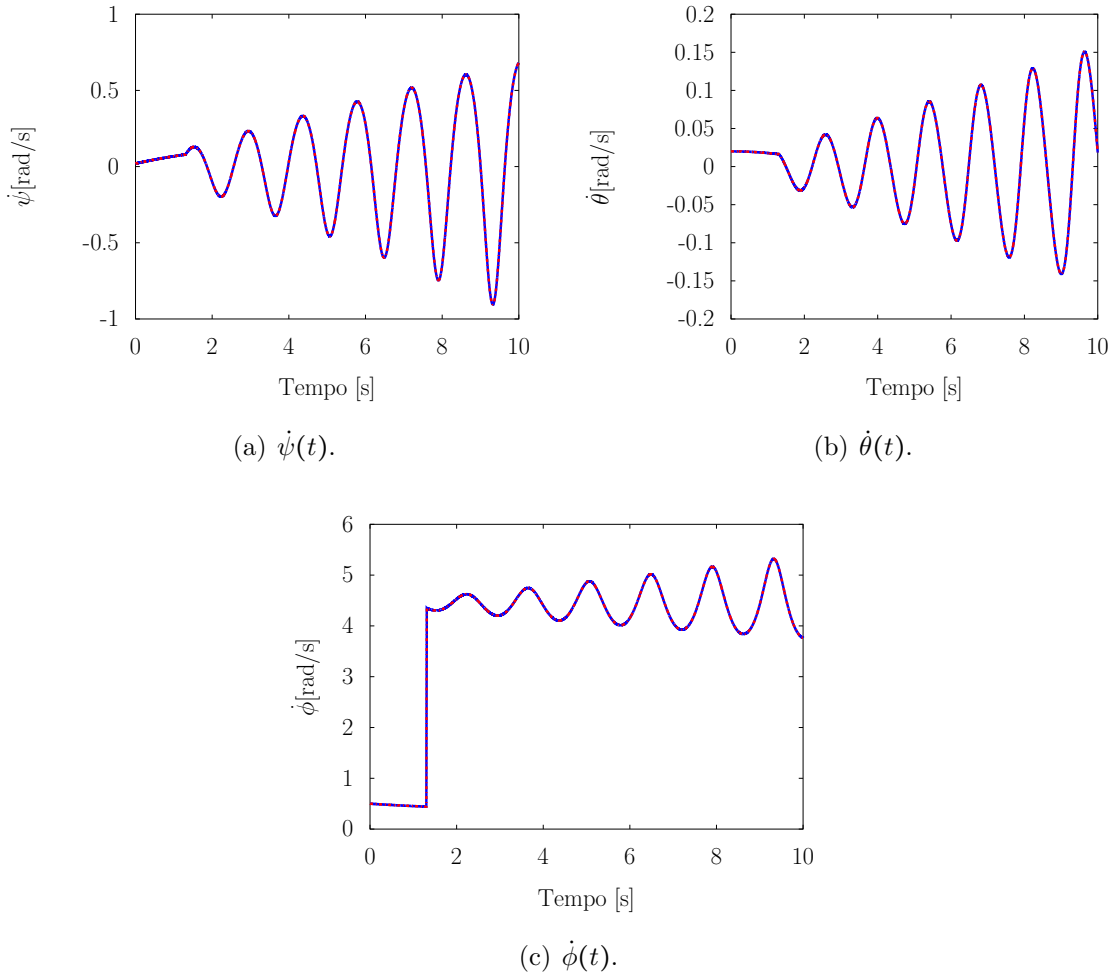
Figura 16 – Ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (–) e por quatérnions (–.) para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 10.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 0.50$  [rad/s] e entrada impulso.

(a)  $\psi(t)$ .(b)  $\theta(t)$ .(c)  $\phi(t)$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Assim como no primeiro teste numérico, apresentado na Seção 3.2, os resultados dos os ângulos de Euler são idênticos para as soluções por meio das duas formas de parametrização, visto que  $\theta(t)$  não assume valores que geram singularidades na eq. (29).

Figura 17 – Taxa de variação dos ângulos de Euler obtidos por cinemática inversa via ângulos de Euler (–) e por quatérnions (–.) para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 10.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 0.50$  [rad/s] e entrada impulso.

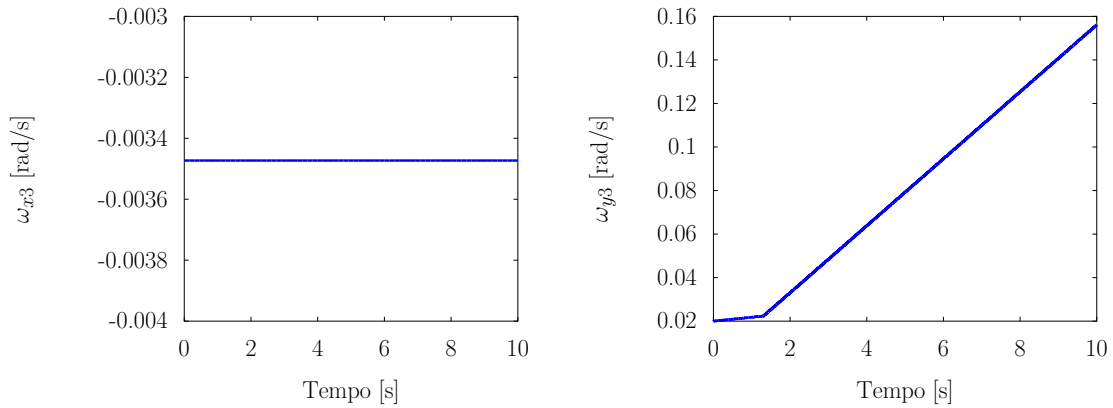
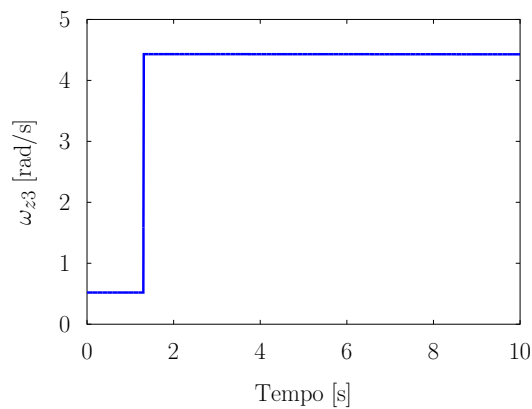


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A Figura 18 exibe os resultados para as velocidades angulares nas direções principais de inércia, cujo cálculo é realizado diretamente pela integração da eq. (63) e independe da parametrização realizada, nota-se que na Figura 18(a) que  $\omega_{x3}(t)$  é constante ao longo do tempo, o que ocorre pois, se observamos a eq. (63), tem-se que  $\dot{\omega}_{x3} = 0$ , cujo resultado da integração fornece um valor constante para  $\omega_{x3}(t)$ .

A partir desses resultados é possível notar a mudança de comportamento na variação dos valores das velocidades angulares no instante em que o impulso é aplicado, em  $t = 1.31$  [s].

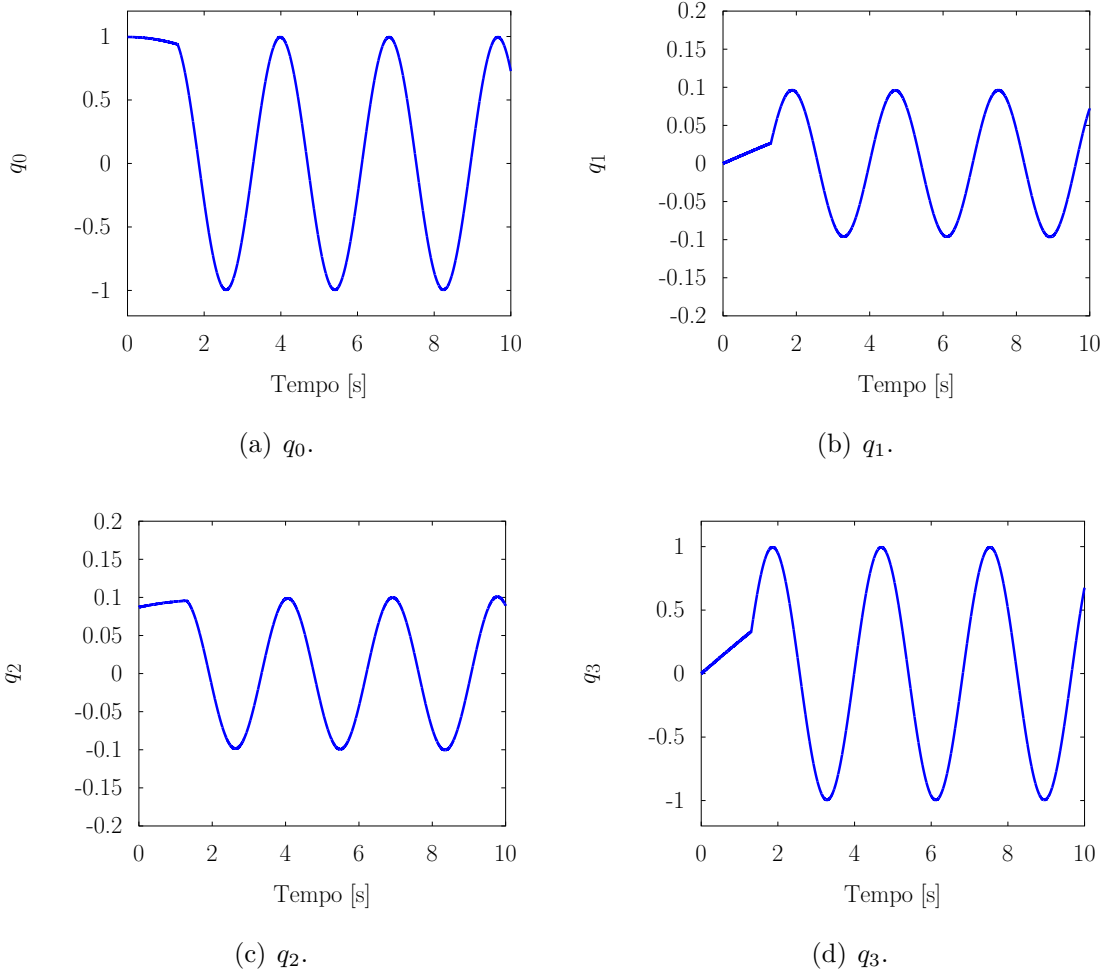
Figura 18 – Velocidades angulares na direção principal de inércia  $\omega_{x3}$ ,  $\omega_{y3}$  e  $\omega_{z3}$  para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 10.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 0.50$  [rad/s] e entrada impulso.

(a)  $\omega_{x3}$ .(b)  $\omega_{y3}$ .(c)  $\omega_{z3}$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A Figura 19 apresenta as componentes  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  do quatérnio  $\hat{q}$ .

Figura 19 – Componentes  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$  do quatérnion  $\hat{q}$ , obtidas para as condições iniciais:  $\psi(0) = 0.00^\circ$ ,  $\dot{\psi}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\theta(0) = 10.00^\circ$ ,  $\dot{\theta}(0) = 0.02$  [rad/s],  $\phi(0) = 0.00^\circ$  e  $\dot{\phi}(0) = 0.50$  [rad/s] e entrada impulso.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

### 3.6 Conclusões

As equações que caracterizam o problema de cinemática inversa para o giroscópio foram integradas numericamente para as parametrizações em termos de ângulos de Euler e dos quatérnions. Para tanto, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem com passo fixo de integração foi utilizado. Os resultados apresentados mostram que, quando não há singularidades interferindo no problema, ou seja, quando a eq. (29) é não-singular, os resultados são idênticos para ambas as parametrizações propostas; quando há singularidades, por outro lado, a parametrização por ângulos de Euler falha ao representar o movimento do giroscópio, enquanto a representação por quatérnions se mostra útil. Para demonstrar isso, foram realizados quatro testes, os três primeiros considerando o giroscópio livre da ação de momentos externos aplicados, sendo que no primeiro teste não haviam singularidades e os resultados obtidos para ambas as parametrizações foram idênticos, conforme era

esperado. No segundo teste, por outro lado, assumiu-se para  $\theta_0$  um valor muito próximo do que gerava singularidade no problema e os resultados foram divergentes, sendo possível observar um comportamento que caracterizava efeito de singularidades quando o ângulo de nutação  $\theta(t)$  assumia valor igual à zero nos primeiros três segundos do movimento. Ainda neste teste, identificou-se, para a parametrização por quatérnions, um problema que pode ocorrer quando se obtém os ângulos de Euler a partir desses. Algumas vezes, por uma questão de representação dos quadrantes, as funções trigonométricas  $\arcsin$  e  $\arctan$  acabam assumindo valores errados para os ângulos de Euler. Esse problema de orientação pode, em alguns casos, ser corrigido por meio do uso da função *unwrap* do *Octave*.

Porém, em contraste a isso, foram apresentados os resultados do terceiro teste, que mostraram que mesmo para uma condição inicial  $\theta_0 = 0^\circ$ , a parametrização por quatérnions era suficiente para obter a solução e ainda permitia a obtenção dos ângulos de Euler, enquanto a parametrização direta por meio dos ângulos de Euler não gerava resultados que permitissem a visualização do movimento, com resultados indeterminados que acusavam haver uma divisão por zero.

O quarto e último teste realizado considerou o giroscópio sob a ação de um esforço do tipo impulso, novamente sem a presença de singularidades, com resultados idênticos para ambas as parametrizações utilizadas.

## 4 Análise da Dinâmica do Giroscópio em Situações de Caos

Neste capítulo os esforços externos atuantes sobre o giroscópio são assumidos como realimentados pela variável de saída, ou seja, como função das velocidades angulares nas direções principais de inércia. A análise realizada permitiu observar que, não só a integração das equações de Euler pode resultar em movimentos caóticos para algumas faixas de valores de realimentação utilizados, mas também que as equações de Euler podem resultar em sistemas de Lorenz, Chen, Lu-Chen, o que, por sua vez, para algumas faixas de valores entram em caos e suas órbitas no espaço de fases resulta em atratores estranhos.

O Apêndice A apresenta conceitos complementares sobre dinâmica não-linear e caos determinísticos, que são requisitos para o devido aproveitamento deste capítulo para o leitor não familiarizado.

### 4.1 Integração Numérica e Parâmetros de Amostragem Utilizados

Do mesmo modo que no Capítulo 3, utilizou-se para estas situações o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. A taxa de amostragem utilizada em todos os testes deste capítulo foi  $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$  [s] e o número de amostras  $N = 10^5$  [amostras]. Optou-se por um tempo maior de simulação do que o do capítulo anterior para permitir a visualização dos atratores estranhos.

### 4.2 Esforços Externos Realimentados Pelas Saídas

Os momentos externos  ${}_{\mathcal{B}_3}\mathbf{M}$ , realimentados pelas velocidades angulares nas direções principais podem ser descritos por:

$$\begin{Bmatrix} M_{x3} \\ M_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11}\omega_{x3} + a_{12}\omega_{y3} + a_{13}\omega_{z3} \\ a_{21}\omega_{x3} + a_{22}\omega_{y3} + a_{23}\omega_{z3} \\ a_{31}\omega_{x3} + a_{32}\omega_{y3} + a_{33}\omega_{z3} \end{Bmatrix} \quad (65)$$

onde  $\mathbf{A}$  é uma matriz de coeficientes  $a_{ij}$ , que realimentam os momentos com as velocidades angulares nas direções principais de inércia. O conjunto de eqs. (28) pode então ser

reescrito como:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_{x3} &= \frac{a_{11}\omega_{x3} + a_{12}\omega_{y3} + a_{13}\omega_{z3}}{I_{x3}} \\
\dot{\omega}_{y3} &= \frac{(I_{z3} - I_{x3})}{I_{y3}}\omega_{z3}\omega_{x3} + \frac{a_{21}\omega_{x3} + a_{22}\omega_{y3} + a_{23}\omega_{z3}}{I_{y3}} \\
\dot{\omega}_{z3} &= \frac{(I_{x3} - I_{y3})}{I_{z3}}\omega_{x3}\omega_{y3} + \frac{a_{31}\omega_{x3} + a_{32}\omega_{y3} + a_{33}\omega_{z3}}{I_{z3}}
\end{aligned} \tag{66}$$

Se, do tensor de inércia, eq. (19), chamarmos  $I_0 = 0.0028$  [kg.m<sup>2</sup>], se  $I_{y3} = I_{z3} = I_0$  e  $I_{x3} = 2I_0$ , de modo que o sistema de eqs. (66) possa ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_{x3} &= \frac{a_{11}\omega_{x3} + a_{12}\omega_{y3} + a_{13}\omega_{z3}}{2I_0} \\
\dot{\omega}_{y3} &= \underbrace{\frac{(I_0 - 2I_0)}{I_0}}_{=-1}\omega_{z3}\omega_{x3} + \frac{a_{21}\omega_{x3} + a_{22}\omega_{y3} + a_{23}\omega_{z3}}{I_0} \\
\dot{\omega}_{z3} &= \underbrace{\frac{(2I_0 - I_0)}{I_0}}_{=1}\omega_{x3}\omega_{y3} + \frac{a_{31}\omega_{x3} + a_{32}\omega_{y3} + a_{33}\omega_{z3}}{I_0}
\end{aligned} \tag{67}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_{x3} &= \frac{a_{11}\omega_{x3} + a_{12}\omega_{y3} + a_{13}\omega_{z3}}{2I_0} \\
\dot{\omega}_{y3} &= -\omega_{z3}\omega_{x3} + \frac{a_{21}\omega_{x3} + a_{22}\omega_{y3} + a_{23}\omega_{z3}}{I_0} \\
\dot{\omega}_{z3} &= \omega_{x3}\omega_{y3} + \frac{a_{31}\omega_{x3} + a_{32}\omega_{y3} + a_{33}\omega_{z3}}{I_0}
\end{aligned} \tag{68}$$

A integração da eq. (68) pode resultar em atratores estranhos para o sistema, de acordo com os valores assumidos para as condições iniciais e para os coeficientes da matriz  $\mathbf{A}$ .

Limitando a matriz  $\mathbf{A}$  para a forma onde os coeficientes  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ ,  $a_{31}$  e  $a_{32}$  são nulos, para realizar as comparações com os sistemas caóticos nas próximas seções, tem-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \tag{69}$$

de modo que o sistema de eqs(68) pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_{x3} &= \frac{a_{11}\omega_{x3} + a_{12}\omega_{y3}}{2I_0} \\
\dot{\omega}_{y3} &= -\omega_{z3}\omega_{x3} + \frac{a_{21}\omega_{x3} + a_{22}\omega_{y3}}{I_0} \\
\dot{\omega}_{z3} &= \omega_{x3}\omega_{y3} + \frac{a_{33}\omega_{z3}}{I_0}
\end{aligned} \tag{70}$$

Pode-se fazer algumas mudanças de variáveis, com o intuito de simplificar a notação e permitir a comparação desta com a contida na literatura para os sistemas que serão tratados. Para tanto, seja  $\mathcal{X} = \omega_{x3}$ ,  $\mathcal{Y} = \omega_{y3}$  e  $\mathcal{Z} = \omega_{z3}$ ,  $a = \frac{a_{11}}{2I_0}$ ,  $b = \frac{a_{22}}{I_0}$  e  $c = \frac{a_{33}}{I_0}$ :

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{X}} &= a\mathcal{X} + \frac{a_{12}}{2I_0}\mathcal{Y} \\ \dot{\mathcal{Y}} &= -\mathcal{X}\mathcal{Z} + b\mathcal{Y} + \frac{a_{21}}{I_0}\mathcal{X} \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{X}\mathcal{Y} + c\mathcal{Z}\end{aligned}\tag{71}$$

sendo que os valores para cada um desses coeficientes serão definidos nas seções a seguir.

Se for considerado que o sistema como possuindo um volume inicial  $V_0$ , correspondente a uma pequena região do espaço de fases formado por  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  e  $\mathcal{Z}$ , é possível notar que o divergente do sistema é dado por:

$$\nabla \mathbf{V} = \frac{\partial \dot{\mathcal{X}}}{\partial \mathcal{X}} + \frac{\partial \dot{\mathcal{Y}}}{\partial \mathcal{Y}} + \frac{\partial \dot{\mathcal{Z}}}{\partial \mathcal{Z}} = a + b + c\tag{72}$$

de modo que:

$$\frac{dV}{dt} = (a + b + c)V_0\tag{73}$$

Analisando a eq.(73), nota-se que o sistema é dissipativo, com uma contração volumétrica exponencial, quando  $(a + b + c) < 0$  (CHEN; LEE, 2004). Isso não implica que todo o volume tenderá à um ponto fixo, podendo também significar que o volume pode contrair-se na forma de um atrator estranho (LORENZ, 1963).

### 4.3 O Giroscópio como um Atrator de Lorenz

O atrator de Lorenz, inicialmente apresentado em Lorenz (1963) está entre as imagens mais lembradas quando se fala em caos determinístico e é gerado quando utiliza-se determinados valores para os coeficientes da eq. (71). Esse sistema é descrito por:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{X}} &= -\sigma\mathcal{X} + \sigma\mathcal{Y} \\ \dot{\mathcal{Y}} &= -\mathcal{X}\mathcal{Z} - \mathcal{Y} + \rho\mathcal{X} \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{X}\mathcal{Y} - \beta\mathcal{Z}\end{aligned}\tag{74}$$

onde  $\sigma$ ,  $\rho$  e  $\beta$  são definidos como coeficientes do sistema de Lorenz. Comparando as eqs. (74) e (71), pode-se notar que, se  $a_{12} = -2I_0a$ , então o sistema de eqs. (71) pode ser

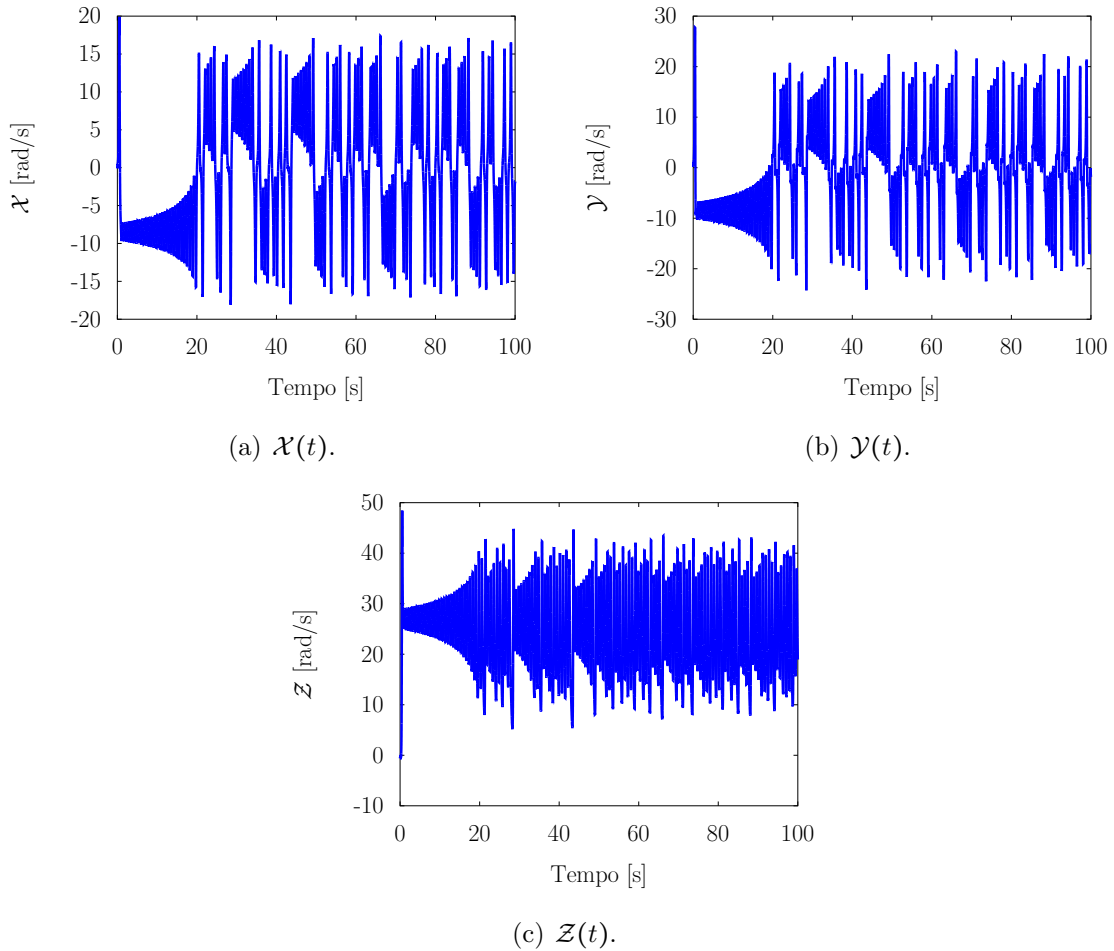
reescrito como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{X}} &= a\mathcal{X} - a\mathcal{Y} \\ \dot{\mathcal{Y}} &= -\mathcal{X}\mathcal{Z} + b\mathcal{Y} + \frac{a_{21}}{I_0}\mathcal{X} \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{X}\mathcal{Y} + c\mathcal{Z}\end{aligned}\tag{75}$$

onde se observa que, se  $a = -\sigma$ ,  $c = -\beta$ ,  $b = -1$  e  $a_{21} > 0$  a eq. (71) assume a forma do sistema de Lorenz. Assumidos os valores  $a = -10$ ,  $b = -1$  e  $c = -2.67$ ,  $a_{21} = 0.07875$  e  $a_{12} = -2I_0a$ , conforme os valores apresentados por Lorenz (1963):

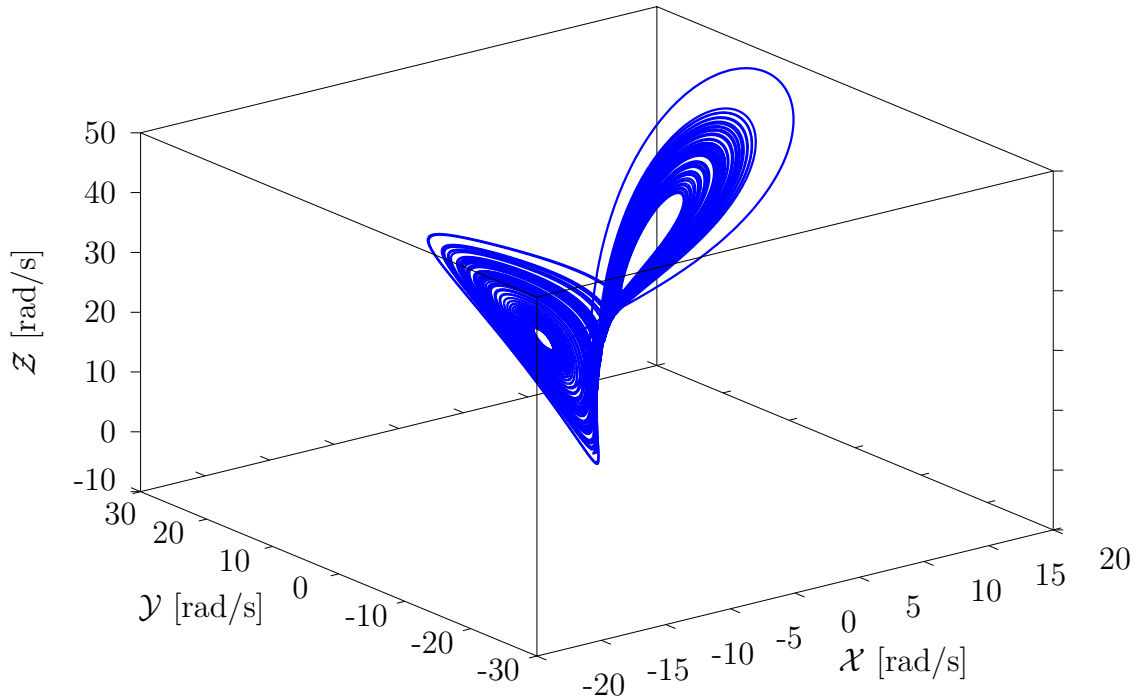
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.056250 & 0.056250 & 0.000000 \\ 0.078750 & -0.0028125 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & -0.007500 \end{bmatrix}\tag{76}$$

Figura 20 – Velocidades angulares nas direções principais de inércia ao longo do tempo; condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

Figura 21 – Atrator de Lorenz no espaço de fases  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ , para as condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].

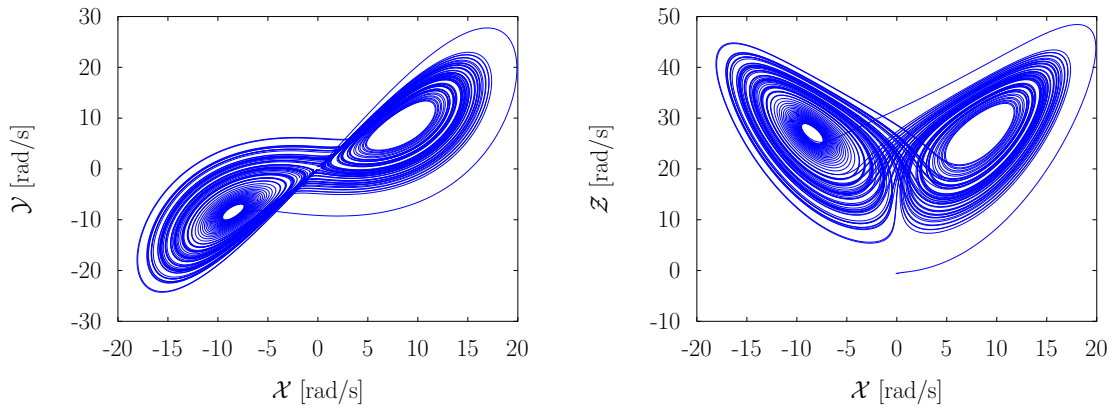


Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

A Figura 20 apresenta a evolução das velocidades angulares ao longo do tempo, enquanto as Figuras 21 e 22 mostram o atrator de Lorenz no espaço e no plano de fases, respectivamente. Como pode ser visto nas Figuras 21 e 22, o atrator de Lorenz é simétrico, de modo que  $f(-x) = -f(x)$ , isso também pode ser percebido nas equações que descrevem o sistema.

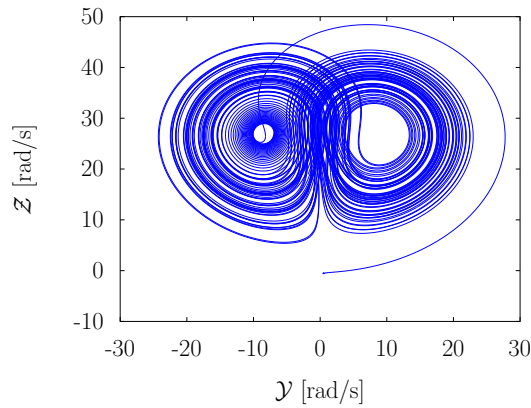
Ressalta-se aqui que, devido à alta sensibilidade do sistema à variação dos parâmetros e das condições iniciais, o sistema de equações (75) pode não apresentar caos dependendo dos valores assumidos para as constantes, devido à isso, assumiu-se valores já conhecidos na literatura. O mesmo é feito para os casos discutidos nas seções 4.4 e 4.5.

Figura 22 – Atrator de Lorenz, representação nos planos de fases, para as condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



(a) Plano  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

(b) Plano  $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ .



(c) Plano  $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

#### 4.4 O Giroscópio como um Atrator de Chen

O sistema de Chen (CHEN; UETA, 1999) é descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{X}} &= -\sigma\mathcal{X} + \sigma\mathcal{Y} \\
 \dot{\mathcal{Y}} &= (\rho - \sigma)\mathcal{X} - \mathcal{Y}\mathcal{Z} + \rho\mathcal{Y} \\
 \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{X}\mathcal{Y} - \beta\mathcal{Z}
 \end{aligned} \tag{77}$$

Comparando as eqs. (77) com as eqs. (71), pode-se notar que, se  $a_{12} = -2I_0a$ , então as

eqs. (71) podem ser reescritas como:

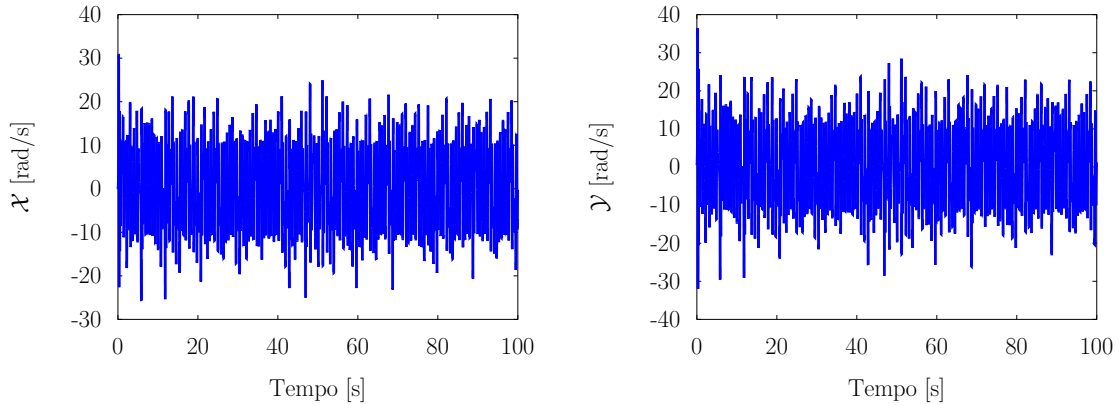
$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{X}} &= a\mathcal{X} - a\mathcal{Y} \\ \dot{\mathcal{Y}} &= -\mathcal{X}\mathcal{Z} + b\mathcal{Y} + \frac{a_{21}}{I_0}\mathcal{X} \\ \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{X}\mathcal{Y} + c\mathcal{Z}\end{aligned}\tag{78}$$

de onde, se  $a = -\sigma$ ,  $b = \rho$ ,  $c = -\beta$  e  $\frac{a_{21}}{I_0} = b + a$ , a eq. (71) assume a forma do sistema de Chen. Se forem assumidos os valores  $a = -35$ ,  $b = 28$  e  $c = -3$ , e  $a_{12} = -2I_0a$ , conforme Chen e Lee (2004):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.196875 & 0.196875 & 0.000000 \\ -0.019687 & 0.078750 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & -0.008437 \end{bmatrix}\tag{79}$$

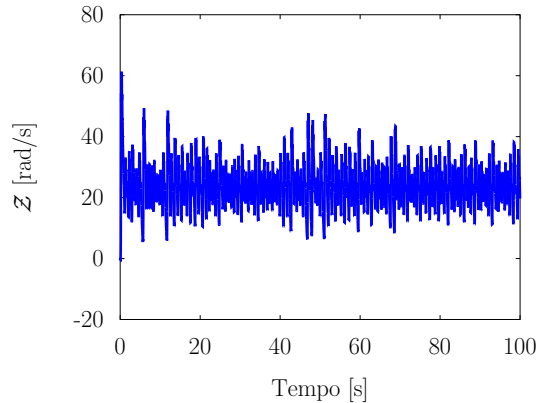
A Figura 23 apresenta a evolução das velocidades angulares ao longo do tempo.

Figura 23 – Velocidades angulares nas direções principais de inércia ao longo do tempo; condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



(a)  $\mathcal{X}(t)$ .

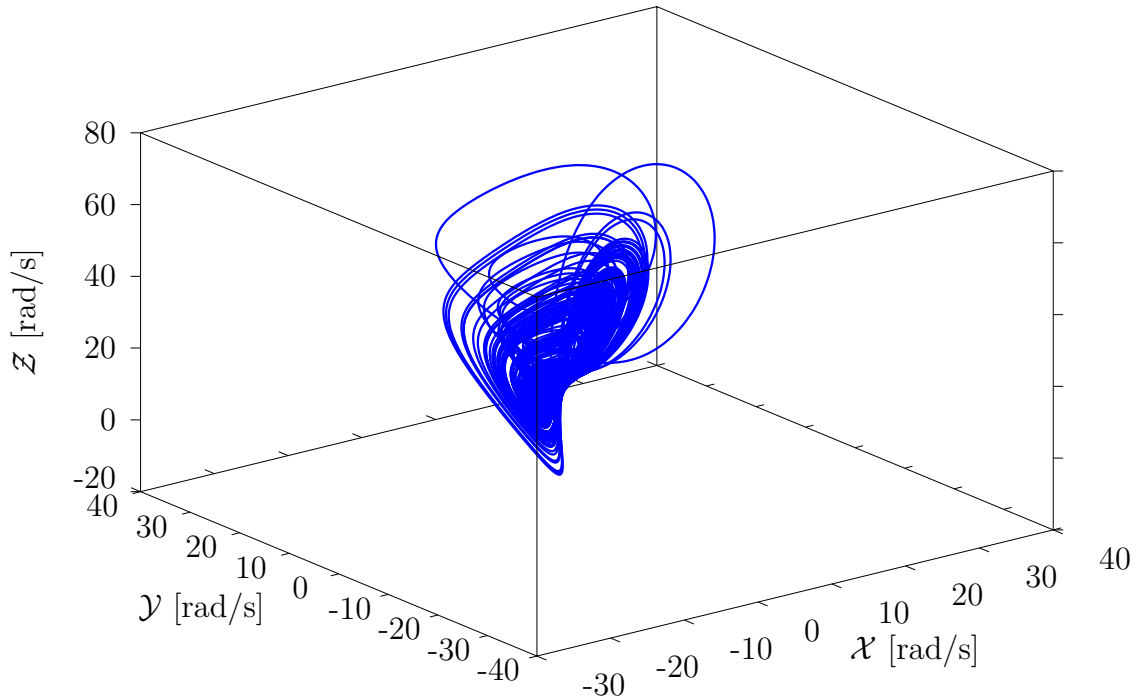
(b)  $\mathcal{Y}(t)$ .



(c)  $\mathcal{Z}(t)$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

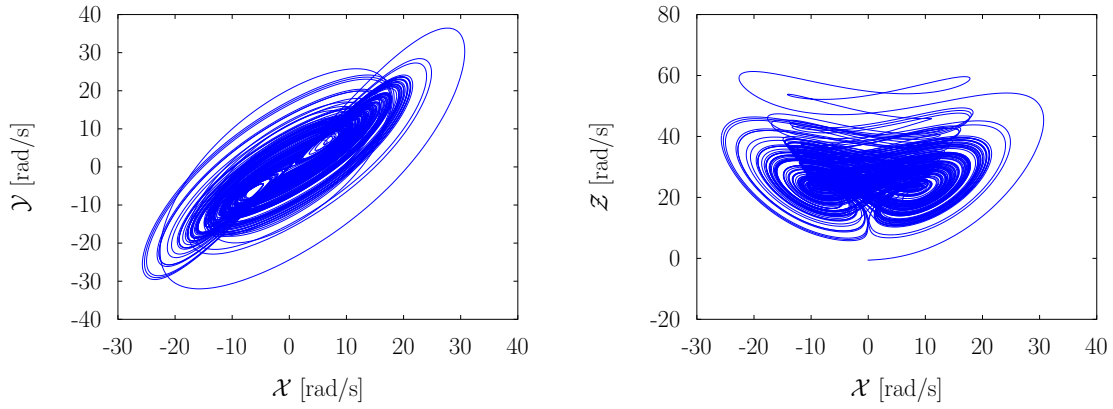
Figura 24 – Atrator de Chen no espaço de fases  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ , para as condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

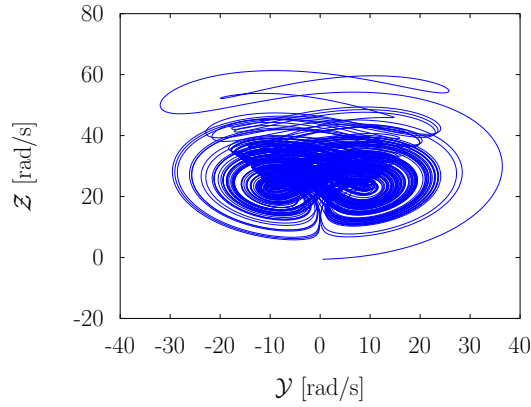
Ainda que o sistema seja caótico para estas condições, nota-se na Figura 23 uma resposta saltos menos evidentes do que a resposta apresentada na Figura 20 para o sistema de Lorenz. Isso ocorre pois este sistema não apresenta simetria em suas transformações,  $f(-x) \neq -f(x)$ . As Figuras 24 e 25 mostram o atrator de Chen no espaço e no plano de fases, respectivamente.

Figura 25 – Atrator de Chen, representação nos planos de fases, para as condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



(a) Plano  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

(b) Plano  $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ .



(c) Plano  $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

#### 4.5 O Giroscópio como um Sistema de Lü-Chen

O sistema de Lü-Chen (LÜ; CHEN, 2002) é descrito pelas equações:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{X}} &= -\sigma\mathcal{X} + \sigma\mathcal{Y} \\
 \dot{\mathcal{Y}} &= (\rho - \sigma)\mathcal{X} - \mathcal{X}\mathcal{Z} + \rho\mathcal{Y} \\
 \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{X}\mathcal{Y} - \beta\mathcal{Z}
 \end{aligned} \tag{80}$$

Comparando as eqs. (80) com as eqs.(71), pode-se notar que, se  $a_{12} = -2I_0a$ , então as

eqs. (71) podem ser reescritas como:

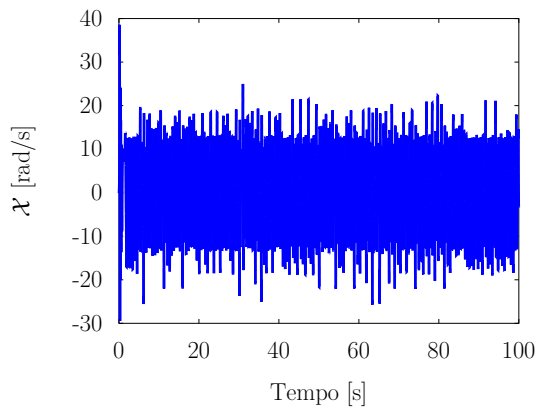
$$\begin{aligned}
 \dot{\mathcal{X}} &= a\mathcal{X} - a\mathcal{Y} \\
 \dot{\mathcal{Y}} &= -\mathcal{X}\mathcal{Z} + b\mathcal{Y} + \frac{a_{21}}{I_0}\mathcal{X} \\
 \dot{\mathcal{Z}} &= \mathcal{X}\mathcal{Y} + c\mathcal{Z}
 \end{aligned} \tag{81}$$

de onde, se  $a = -\sigma$ ,  $b = \rho$ ,  $c = -\beta$  e  $a_{21} = b + a$ , a eq. (71) assume a forma do sistema de Lu-Chen. Se forem assumidos os valores  $a = -36$ ,  $b = 15$  e  $c = -3$ , e  $a_{12} = -2I_0a$ , conforme Lü e Chen (2002):

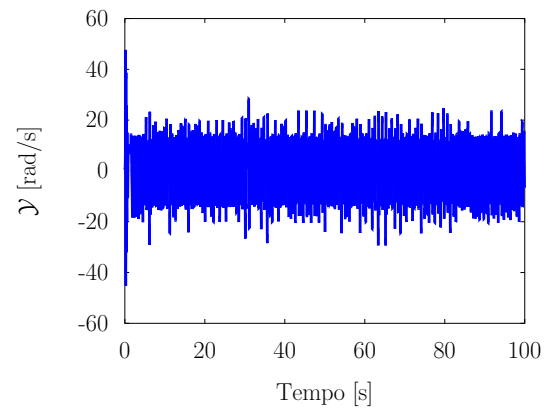
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.202500 & 0.202500 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.081822 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & -0.008437 \end{bmatrix} \tag{82}$$

A Figura 26 apresenta as velocidades angulares em função do tempo. As Figuras 27 e 28 mostram, respectivamente, o atrator de Lü-Chen no espaço e plano de fases.

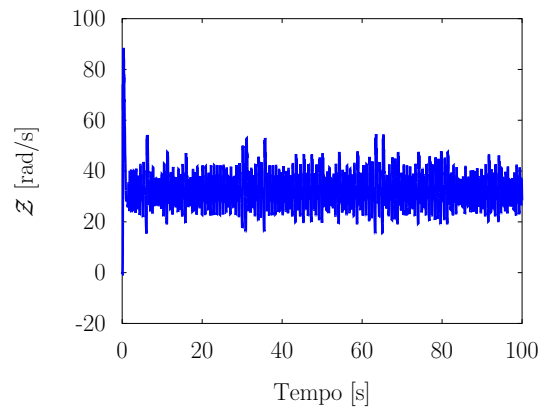
Figura 26 – Velocidades angulares nas direções principais de inércia ao longo do tempo; condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



(a)  $\mathcal{X}(t)$ .



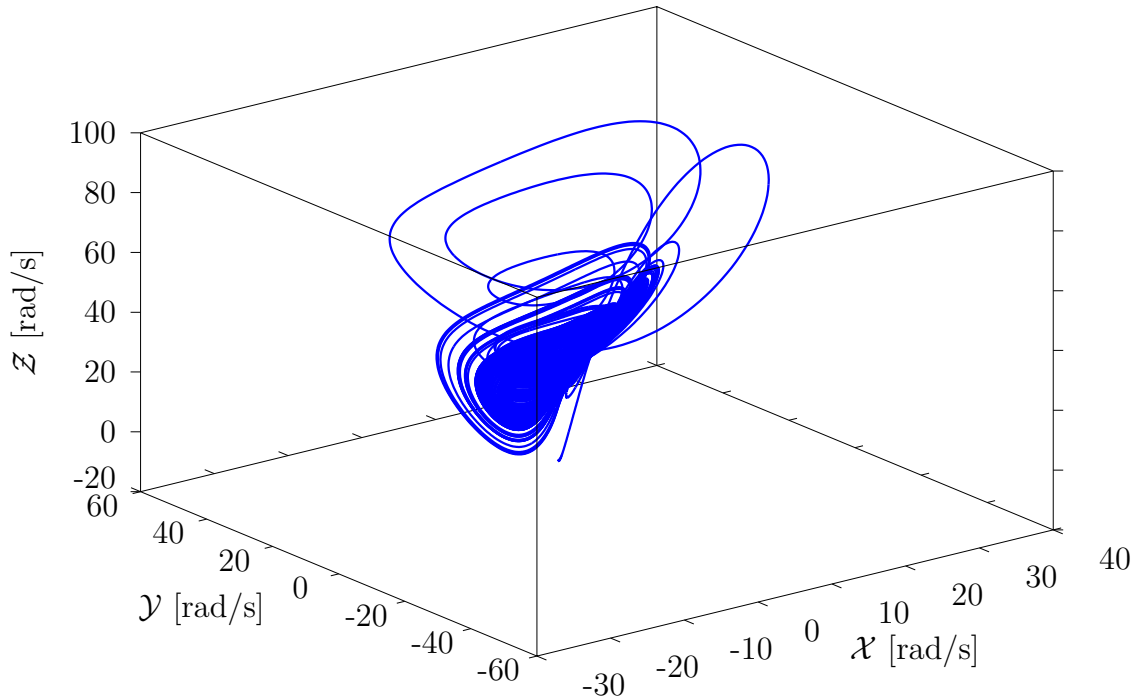
(b)  $\mathcal{Y}(t)$ .



(c)  $\mathcal{Z}(t)$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

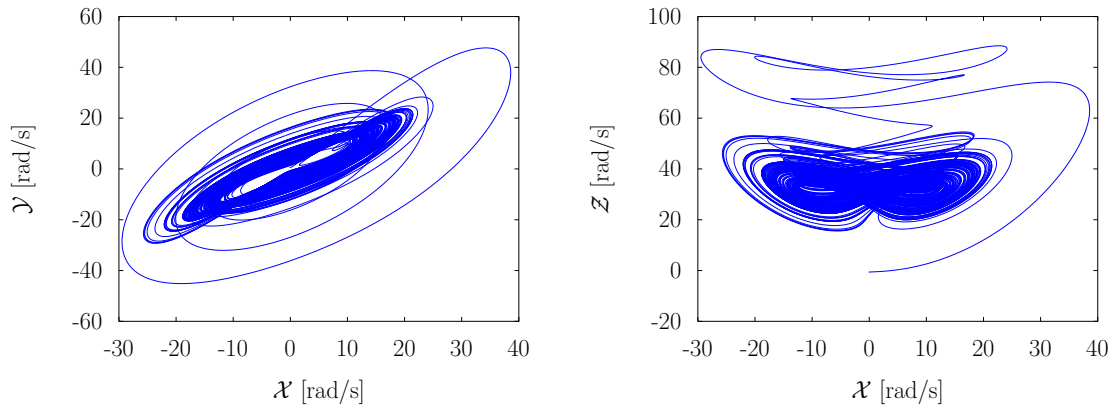
Figura 27 – Atrator de Lü-Chen no espaço de fases  $\mathcal{X} \times \mathcal{T} \times \mathcal{Z}$ , para as condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

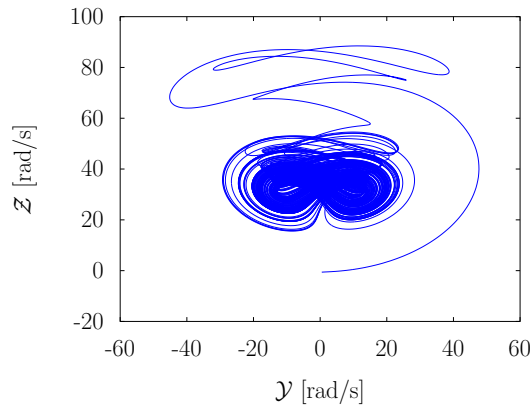
A solução deste sistema varia muito conforme a faixa de valores de  $b$  desde que mantidos valores fixos para  $a$  e  $c$ . Para algumas faixas de valores o sistema de Lü-Chen pode se comportar como um atrator de Lorenz e em outras faixas ainda como um atrator de Chen. Lü e Chen (2002) propõem pelo menos cinco intervalos de valores para  $b$  para os quais o sistema é caótico, apresenta outras faixas de valores para quais o sistema converge para um ponto fixo e outra para o qual o sistema é periódico.

Figura 28 – Atrator de Lü-Chen, representação nos planos de fases, para as condições iniciais:  $\omega_{x3}(0) = -0.10$  [rad/s],  $\omega_{y3}(0) = 0.50$  [rad/s] e  $\omega_{z3}(0) = -0.60$  [rad/s].



(a) Plano  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ .

(b) Plano  $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ .



(c) Plano  $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ .

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

## 4.6 Conclusões

Sob esforços de realimentação de saída, que são basicamente funções das velocidades angulares relacionadas aos momentos externos aplicados por meio de coeficientes lineares, as equações de Euler de um giroscópio podem se assemelhar às equações que descrevem sistemas como os de Lorenz, Chen e Lü-Chen. Ou seja o giroscópio quando realimentado possui uma dinâmica rica e complexa, deixando de se comportar como um sistema conservativo e passa a se comportar como um sistema dissipativo. Quando determinados valores de parâmetros são utilizados, estes sistemas são caóticos e apresentam atratores estranhos no espaço de fases. Nota-se ainda que o sistema só se comporta dessa maneira quando os esforços são modelados desta forma.

## 5 Considerações Finais

Este trabalho propôs um modelo matemático para descrever a dinâmica de um giroscópio, representado por um disco com o ponto de origem fixo à um sistema inercial. O movimento do giroscópio foi descrito com o auxílio de três sistemas móveis, e a sequência de rotações utilizada foi a 3–2–3. As equações do movimento foram obtidas com a mecânica clássica de Newton-Euler e o problema de cinemática inversa foi solucionado de duas formas: integrando as equações parametrizadas em razão dos ângulos de Euler e também dos quatérnions. A solução obtida por ângulos de Euler apresentou singularidades associados ao método para alguns valores de ângulos. Já a solução obtida parametrizando através de quatérnions, por sua vez, não apresentou singularidades. Em particular, parte destes resultados foram usados no artigo Jambersi e da SILVA (2016) que apresenta a relação de quatérnions com a álgebra geométrica.

Neste trabalho também se descreve o caso onde os esforços externos aplicados eram função dos valores das velocidades angulares. Nestas situações de realimentação, foi possível associar as equações de Euler do giroscópio com sistemas onde pode emergir o caos, como sistemas de Lorenz, Chen e Lü-Chen. Dependendo dos valores dos coeficientes da matriz  $\mathbf{A}$  de realimentação, o giroscópio funciona exatamente como estes sistemas. Assim, a solução destas equações permite visualizar possibilidade de movimento caótico no giroscópio com formação de atratores estranhos.

### 5.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A solução do problema de cinemática inversa por quatérnions pode ser utilizada com a finalidade do controle de um giroscópio para grandes perturbações, onde ocorram grandes deslocamentos angulares. Uma solução análoga à deste trabalho pode ser aplicada, por exemplo, para o estudo de controle do giroscópio da QUANSER<sup>®</sup> do Laboratório de Controle e Sistemas Inteligentes da UNESP de Ilha Solteira/SP. Nestes casos, o uso de quatérnions torna-se um requisito básico para evitar as singularidades inerentes às parametrizações por ângulos de Euler. Este assunto já é tema de uma dissertação em andamento na UNESP - Ilha Solteira.

Além disso, pode-se estudar a partir do modelo matemático do sistema algumas condições de torques externos realimentados pelas velocidades angulares nas direções

principais de inércia que ocasionem em condições de caos no sistema, ou seja, pode-se observar aparentes aleatoriedades que, ao invés de possuírem origem linear e estocástica, sejam de origem não-linear e determinística. Estas condições podem ser reproduzidas em laboratório e, partindo do princípio de que o caos é sensível à pequenas perturbações, o comportamento do giroscópio pode ser regularizado facilmente. Pode-se relacionar a energia necessária para controlar/estabilizar o giroscópio sob condições periódicas com àquela necessária para realizar a mesma ação sob um regime caótico. Por exemplo, em aplicações onde se está em regiões distantes da orientação desejada do giroscópio, pode-se perturbá-lo com torques para que ocorra caos e facilitar a atração para regiões de interesse, com redução de gasto energético.

## Referências Bibliográficas

- AGUIAR, M. A. M. de. **Tópicos de mecânica clássica**. Rio de Janeiro: Livraria da Física, 2011.
- ALTMANN, S. **Rotations, quaternions, and double groups**. Mineola: Dover Publications, 2005. (Dover books on mathematics). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Qo7NJ2kawPIC>>. Acesso em: 29 Fev. 2016.
- ALTMANN, S. L. Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal. **Mathematics Magazine**, Washington, v. 62, n. 5, p. 291--308, 1989.
- AMORUSO, M. J. **Euler angles and quaternions in six degree of freedom simulations of projectiles**. New Jersey, 1996. Disponível em: <<http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a417259.pdf>>. Acesso em: 03 mar. 2016.
- ARDEMA, M. **Newton-Euler dynamics**. New York: Springer, 2005. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ujVwOYFiId4C>>. Acesso em: 27 jun. 2015.
- BAPTISTA, M. d. S. **Perturbando sistemas não-lineares, uma abordagem do controle de caos**. Tese (Doutorado) --- Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1996. Acessado em 30/06/2015. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43131/tde-13122007-093342/pt-br.php>>. Acesso em: 30 jun. 2015.
- BETSCH, P.; MENZEL, A.; STEIN, E. On the parametrization of finite rotations in computational mechanics: A classification of concepts with application to smooth shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Amsterdam, v. 155, n. 3, p. 273--305, 1998. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782597001588>>. Acesso em: 29 fev. 2016.
- BRIN, M.; STUCK, G. **Introduction to Dynamical Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3wA3c7-orE8C>>. Acesso em: 29 jun. 2015.
- CHEN, G.; UETA, T. Yet another chaotic attractor. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, Singapore, v. 9, n. 07, p. 1465--1466, 1999. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127499001024>>. Acesso em: 29 fev. 2016.
- CHEN, H.-K.; LEE, C.-I. Anti-control of chaos in rigid body motion. **Chaos, Solitons & Fractals**, Oxford, v. 21, n. 4, p. 957 -- 965, 2004. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096007790300688X>>. Acesso em: 14 jul. 2015.

CVITANOVIĆ, P.; ARTUSO, R.; MAINIERI, R.; TANNER, G.; VATTAY, G. **Chaos: classical and quantum**. Copenhagen: Niels Bohr Institute, 2012. Disponível em: <<http://ChaosBook.org>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

DIEBEL, J. **Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors**. Stanford, 2006. Disponível em: <[https://www.astro.rug.nl/software-kapteyn/\\_downloads/attitude.pdf](https://www.astro.rug.nl/software-kapteyn/_downloads/attitude.pdf)>. Acesso em: 16 jun. 2015.

DIECI, L. Jacobian free computation of Lyapunov exponents. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, New York, v. 14, n. 3, p. 697--717, 2002. ISSN 1040-7294. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1016395301189>>. Acesso em: 08 jul. 2015.

DIECI, L.; RUSSELL, R. D.; VLECK, E. S. V. On the computation of Lyapunov exponents for continuous dynamical systems. **SIAM Journal Numerical Analysis**, Philadelphia, v. 34, n. 1, p. 402--423, 1997. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/S0036142993247311>>. Acesso em: 02 ago. 2015.

ECKMANN, J.-P.; KAMPHORST, S. O.; RUELLE, D.; CILIBERTO, S. Liapunov exponents from time series. **Physical Review A**, College Park, v. 34, n. 6, p. 4971, 1986. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.34.4971>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

ECKMANN, J. P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. **Reviews of Modern Physics**, College Park, v. 57, p. 617--656, Jul 1985. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.57.617>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

ESHKAGHI, H.; GIBBON, J. Quaternions and ideal flows. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, IOP Publishing, College Park, v. 41, n. 34, p. 344004-344023, 2008. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1751-8121/41/i=34/a=344004>>. Acesso em: 01 mar. 2016.

EULER, L. Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 20, p. 189--207, 1775. Disponível em: <<http://www.17centurymaths.com/contents//euler/e478tr.pdf>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. **Caos - Uma Introdução**. [S.l.]: Edgard Blucher, 1994. ISBN 9788521200581.

GIBBON, J. D.; HOLM, D. D.; KERR, R. M.; ROULSTONE, I. Quaternions and particle dynamics in the Euler fluid equations. **Nonlinearity**, Bristol, v. 19, n. 8, p. 1969, 2006. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/nlin/0512034>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma Introdução com Aplicações Usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. San Francisco: Addison Wesley, 2002. Disponível em: <<http://books.google.com/books?id=tJCuQgAACAkJ>>. Acesso em: 18 nov. 2014.

GOLOVKO, V.; SAVITSKY, Y. Computing of Lyapunov exponents techniques using neural networks. **International Journal of Computing**, v. 3, n. 1, p. 93--98, 2014. Disponível em: <<http://computingonline.net/index.php/computing/article/view/258-233>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

HAMILTON, W. R. **Lectures on quaternions**. Dublin: University Press by M.H., 1853. Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=Ein9159\\\_XecC](https://books.google.com.br/books?id=Ein9159\_XecC)>. Acesso em: 03 mar. 2016.

\_\_\_\_\_. **Elements of quaternions**. New York: Longmans, Green, & Company, 1866. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-eCeitKT2rMC>>. Acesso em: 03 mar. 2016.

\_\_\_\_\_. **The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

HARAUZ, G. Representation of rotations by unit quaternions. **Ultramicroscopy**, Elsevier, Amsterdam, v. 33, n. 3, p. 209--213, 1990. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439919090113Z>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

HART, J. C.; FRANCIS, G. K.; KAUFFMAN, L. H. Visualizing quaternion rotation. **ACM Transactions on Graphics (TOG)**, New York, v. 13, n. 3, p. 256--276, 1994. Disponível em: <<http://dl.acm.org/citation.cfm?id=197480>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

HÉNON, M. A two-dimensional mapping with a strange attractor. **Communications in Mathematical Physics**, Springer, Heidelberg, v. 50, n. 1, p. 69--77, 1976. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/BF01608556>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

JAMBERSI, A. B.; da SILVA, S. A sutileza dos quatérnions no movimento de rotação de corpos rígidos. **Revista Brasileira de Ensino de Física (online)**, São Paulo, 2016. (Aceito para Publicação).

KAUSHAL, R.; PARASHAR, D. **Advanced Methods of Mathematical Physics**. Oxford: Alpha Science International, 2008. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=u547AQAIAAJ>>. Acesso em: 03 jul. 2015.

KUIPERS, J. **Quaternions and rotation sequences: a primer with applications to orbits, aerospace, and virtual reality**. Princeton: Princeton University Press, 1999. (Princeton paperbacks). Disponível em: <[https://books.google.com.br/books?id=\\\_2sS4mC0p-EC](https://books.google.com.br/books?id=\_2sS4mC0p-EC)>. Acesso em: 18 ago. 2015.

LEMOS, N. **Mecânica Analítica**. [S.l.]: Livraria da Física, 2007. ISBN 9788588325241.

LIZARRALDE, F.; WEN, J. T. Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach. **Automatic Control, IEEE Transactions on**, IEEE, v. 41, n. 3, p. 468--472, 1996. ISSN 0018-9286. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1109/9.486654>>. Acesso em: 22 set. 2015.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the atmospheric sciences**, Boston, v. 20, n. 2, p. 130--141, 1963.

LÜ, J.; CHEN, G. A new chaotic attractor coined. **International Journal of Bifurcation and chaos**, Singapore, v. 12, n. 03, p. 659--661, 2002. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127402004620>>. Acesso em: 29 fev. 2016.

MAYO, R. A. Relative quaternion state transition relation. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, Reston, v. 2, n. 1, p. 44--48, 1979. Disponível em: <<http://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/3.55830?journalCode=jgcd>>. Acesso em: 01 mar. 2016.

MENON, M. Sobre as origens das definições dos produtos escalar e vetorial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, scielo, São Paulo, v. 31, p. 2305.1 -- 2305.11, 06 2009. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v31n2/06.pdf>>. Acesso em: 18 ago. 2015.

NETO, J. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. ISBN 9788588325265.

RAMASUBRAMANIAN, K.; SRIRAM, M. A comparative study of computation of Lyapunov spectra with different algorithms. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Amsterdam, v. 139, n. 1, p. 72 -- 86, 2000. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278999002341>>. Acesso em: 08 jul. 2015.

RÓG, T.; MURZYN, K.; HINSEN, K.; KNELLER, G. R. nmoldyn: A program package for a neutron scattering oriented analysis of molecular dynamics simulations. **Journal of Computational Chemistry**, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, Hoboken, v. 24, n. 5, p. 657--667, 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jcc.10243>>. Acesso em: 26 ago. 2015.

RÖSSLER, O. An equation for hyperchaos. **Physics Letters A**, Amsterdam, v. 71, n. 2, p. 155 -- 157, 1979. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960179901506>>. Acesso em: 03 jul. 2015.

RÖSSLER, O. E. An equation for continuous chaos. **Physics Letters A**, Elsevier, Amsterdam, v. 57, n. 5, p. 397--398, 1976. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(76\)90101-8](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(76)90101-8)>. Acesso em: 01 mar. 2016.

RUDNICKI, W. R.; BAKALARSKI, G.; LESYNG, B. A mezosopic model of nucleic acids. part 1. Lagrangian and quaternion molecular dynamics. **Journal of Biomolecular Structure and Dynamics**, Taylor & Francis, New York, v. 17, n. 6, p. 1097--1108, 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/07391102.2000.10506595>>. Acesso em: 01 mar. 2016.

SHOEMAKE, K. Quaternion calculus and fast animation, computer animation: 3-d motion specification and control. In: SIGGRAPH. **Computer animation: 3D Motion specification and control**. [S.l.], 1987. p. 101--121.

SHUSTER, M. D. Survey of attitude representations. **Journal of the Astronautical Sciences**, Heidelberg, v. 41, p. 439--517, 1993. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1993JAnSc..41..439S>>. Acesso em: 01 mar. 2016.

- SIERRA GUSTAVO MARTÍNEZ; POIRIER, P. F. B. Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial. **Latin-American Journal of Physics Education**, Mexico, v. 2, n. 2, p. 16, 2008.
- SINGLA, P.; MORTARI, D.; JUNKINS, J. L. How to avoid singularity for Euler angle set? In: **Proceedings of the AAS Space Flight Mechanics Conference, Hawaii**. Hawaii: [s.n.], 2004. Disponível em: <[https://www.researchgate.net/profile/Puneet\\_Singla3/publication/241677756\\_How\\_to\\_Avoid\\_Singularity\\_for\\_Euler\\_Angle\\_Set/links/53fca4810cf2364ccc04b5b0.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Puneet_Singla3/publication/241677756_How_to_Avoid_Singularity_for_Euler_Angle_Set/links/53fca4810cf2364ccc04b5b0.pdf)>. Acesso em: 04 abr. 2015.
- SPRÖSSIG, W. Fluid flow equations with variable viscosity in quaternionic setting. **Advances in applied Clifford algebras**, Springer, Basel, v. 17, n. 2, p. 259--272, 2007. ISSN 1661-4909. Disponível em: <<http://link.springer.com/article/10.1007/s00006-006-0022-7>>. Acesso em: 01 mar. 2016.
- STROGATZ, S. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering**. Reading: Westview Press, 1994. (Advanced book program). ISBN 9780738204536.
- STUELPNAGEL, J. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. **SIAM review**, SIAM, Philadelphia, v. 6, n. 4, p. 422--430, 1964. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/1006093>>. Acesso em: 01 mar. 2016.
- TRINDADE, M.; SAMPAIO, R. Uma revisão sobre a parametrização de rotações finitas na dinâmica de corpos rígidos. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences**, Rio de Janeiro, v. 22, n. 2, p. 341--377, 2000. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S0100-73862000000200015>>. Acesso em: 01 mar. 2016.
- VAZ Jr., J. A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a teoria de Pauli. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 234--259, 1997.
- VILLATE, J. **Introdução aos Sistemas Dinâmicos: uma abordagem prática com Maxima**. Porto: Universidade do Porto, 2005. Disponível em: <[http://villate.org/doc/sistemasdinamicos/sistdinam-1\\_2.pdf](http://villate.org/doc/sistemasdinamicos/sistdinam-1_2.pdf)>. Acesso em: 03 mar. 2016.
- VOGTMANN, K.; ARNOLD, V.; WEINSTEIN, A. **Mathematical Methods of Classical Mechanics**. New York: Springer, 1989.
- WEBER, H.; ARFKEN, G. **Essential Mathematical Methods for Physicists**. San Diego: Academic Press, 2004.
- WEHAGE, R. A. Quaternions and euler parameters - a brief exposition. In: **Computer aided analysis and optimization of mechanical system dynamics**. Heidelberg: Springer, 1984. p. 147--180. Disponível em: <[http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-52465-3\\_5](http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-52465-3_5)>. Acesso em: 01 mar. 2016.
- WIGGINS, S. **Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos**. New York: Springer, 2003.
- WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Amsterdam, v. 16, n. 3, p. 285--317, Jul 1985. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](http://dx.doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9)>. Acesso em: 01 mar. 2016.

YAMAGUCHI YOSHIYUKI Y.; IWAI, T. Geometric approach to Lyapunov analysis in Hamiltonian dynamics. **Physical Review E**, College Park, v. 64, p. 066206, Nov 2001. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.64.066206>>. Acesso em: 01 mar. 2016.

# APÊNDICE A – Dinâmica Não-Linear e Caos Determinístico

Este apêndice apresenta uma breve descrição e contextualização de algumas definições sobre dinâmica não-linear e caos determinístico que fornecem alguns conceitos importantes na análise dinâmica do giroscópio sujeito à esforços de realimentação de saída.

## A.1 Conceitos

Esta seção apresenta resumidamente alguns conceitos considerados importantes no estudo da dinâmica não-linear

### A.1.1 Sistema Não-Linear

Seja um conjunto de  $N$  equações diferenciais acopladas do tipo:

$$\dot{x}_1 = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (\text{A.1})$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (\text{A.2})$$

$$\dot{x}_N = \mathcal{F}_N(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

onde  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$  são funções genéricas. O sistema é linear se todos os termos  $x_{i's}$  possuírem potência zero ou um, se não houver multiplicação entre termos  $x_{i's}$  e se não houver termos que sejam função de  $x_{i's}$  (por exemplo, senos, cossenos, exponenciais, etc...). Se qualquer destas condições não for satisfeita, o sistema é dito não-linear.

### A.1.2 Sistemas Dinâmicos e Caos Determinístico

Um sistema dinâmico determinístico é aquele onde os estados presentes podem, *a priori*, ser completamente determinados a partir de suas condições iniciais, ao contrário de um sistema estocástico, onde as condições iniciais determinam apenas parcialmente os estados presentes devido à ruído ou outras circunstâncias externas (CVITANOVIĆ

et al., 2012). Sistemas dinâmicos podem ser modelados matematicamente por equações diferenciais dependentes do tempo, equações estas que seguem a forma:

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = f(\boldsymbol{\chi}, t; \boldsymbol{\mu}) \quad (\text{A.3})$$

onde (A.3) é uma equação diferencial ordinária, e  $\boldsymbol{\mu}$  são os, um ou mais, parâmetros de controle, cujo significado será tratado posteriormente. Equações diferenciais podem ser explicitamente dependentes do tempo, e nesses casos são chamadas de não-autônomas, ou podem não ser explicitamente dependentes do tempo, sendo que nesses casos são chamadas de autônomas (WIGGINS, 2003).

No caso de sistemas determinísticos, a solução dessas equações permite a predição de eventos futuros. No entanto esse prognóstico é limitado, não podendo ser estendido para um futuro muito distante. A imprevisibilidade do comportamento dinâmico para tempos longos é o que chamamos de caos determinístico, conceito relativamente novo e abordado em um panorama histórico em Strogatz (1994), desde o surgimento dos modelos matemáticos que descrevem sistemas dinâmicos, com o desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias por Isaac Newton no século XVII, passando pela “descoberta” do caos, por Poincaré no século XIX, até a exposição dos conceitos e confirmação experimental da teoria do caos nos anos 1980, com posteriores aplicações em sistemas complexos de engenharia cerca de duas décadas atrás. Ressalta-se, portanto que sistema caótico não é o mesmo que sistema estocástico, apesar de que, num primeiro momento, aparenta ter este tipo de comportamento. Ainda assim, neste trabalho o termo determinístico distinguirá um sistema determinístico não-caótico de um sistema caótico.

Formalmente, apesar de não haver uma definição universalmente aceita para caos, define-se que sistemas caóticos são aqueles sensíveis às condições iniciais. Isto é, dois sistemas idênticos que são perturbados com condições iniciais muito próximas entre si apresentam, a partir de algum instante, comportamentos completamente diferentes. Essa disparidade na trajetória das respostas ocorre devido à erros numéricos causados por uma diferença mínima no valor das variáveis que acabam sendo amplificadas exponencialmente pelas não-linearidades do sistema. Essa diferença pode ser devido à própria diferença das condições iniciais (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994), ou ainda, devido à truncamento numérico (BAPTISTA, 1996). O que ocorre é que a evolução do sistema se dá de forma complexa mesmo para sistemas dinâmicos com operações simples, porém não-lineares, em sua equação do movimento.

### A.1.3 Espaço de Configurações

O espaço de configurações, algumas vezes também chamado de espaço de fases<sup>7</sup> é uma representação geométrica das variáveis que descrevem a configuração do sistema dinâmico de modo que as trajetórias no espaço de configurações representam a evolução temporal do sistema em si, cada uma dessas trajetórias são chamadas trajetórias de fases ou linhas de fluxo. Quando trajetórias no espaço de configurações se cruzam significa que o sistema possui uma opção de trajetória em cada uma das interseções, o que implicaria que o mesmo não seria determinístico (WEBER; ARFKEN, 2004). Nesse contexto, sistemas que apresentam caos podem ser *a priori* identificados por meio de trajetórias que se cruzam no espaço de configurações.

Seja um sistema de segunda ordem:

$$\ddot{\chi} + g(\chi, \dot{\chi}) = 0 \tag{A.4}$$

podemos definir que  $\dot{\chi} = w$ , então  $\dot{w} = -g(\chi, w)$ . Um plano formado pelas variáveis  $\chi$  e  $w = \dot{\chi}$  é denominado Plano de Fases (KAUSHAL; PARASHAR, 2008) no sentido de que essas variáveis constituem um plano. Para cada condição inicial, teremos uma trajetória no plano de fases. O agrupamento de todas as trajetórias qualitativamente diferentes associadas às diferentes condições iniciais define o que chamamos de Retrato de Fases (STROGATZ, 1994).

Sistemas dissipativos podem ainda apresentar atratores estranhos, que são pontos para os quais as linhas de fluxo convergem após um tempo suficientemente longo, os atratores estranhos mais conhecidos são os atratores de Hénon e de Lorenz (BRIN; STUCK, 2002).

### A.1.4 Pontos Fixos e Linearização

Ainda, a partir da definição de que  $\dot{\chi} = w$  para uma dada função genérica descrita por (A.4), os pontos onde as linhas de fluxo cortam o eixo  $\chi$  no retrato de fases, ou seja, os pontos onde  $\dot{\chi} = w = 0$  são os chamados pontos fixos, ou pontos de equilíbrio,  $\chi^*$ . Esses pontos fixos podem ser localmente/globalmente estáveis, para os quais as trajetórias se aproximam no plano de fases, ou instáveis, para os quais as trajetórias se distanciam no plano de fases.

Conhecidos os pontos de equilíbrio de um sistema pode-se linearizar a equação do movimento em torno de cada um desses pontos, sendo possível, portanto, analisar qualitativamente o comportamento do sistema dinâmico sem necessariamente resolver as

---

<sup>7</sup>Embora este, dentro do formalismo Hamiltoniano, seja definido em termos de coordenadas generalizadas  $q_{i's}$  e seus respectivos momentos canônicos  $p_{i's}$ , e não de  $q_{i's}$  e  $\dot{q}_{i's}$  (AGUIAR, 2011), embora o termo “fase” irá aparecer ao longo do texto.

equações não-lineares do movimento. Este tipo de técnica surgiu com o intuito de obter informações qualitativas sobre equações diferenciais não-lineares antes dos adventos dos computadores.

### A.1.5 *Expoentes de Lyapunov*

Expoentes de Lyapunov servem para avaliar a divergência entre duas trajetórias de um sistema dinâmico com condições iniciais muito próximas, avaliando a sensibilidade às condições iniciais do mesmo. Seja:

$$\Delta\chi(t) = \chi(t) - \hat{\chi}(t) \quad (\text{A.5})$$

onde  $\chi(t)$  é a posição de um sistema/partícula hipotético que parte de uma condição inicial  $\chi(0) = \chi_0$  e  $\hat{\chi}(t)$  é a posição de um sistema/partícula hipotético que parte de uma condição inicial  $\hat{\chi}(0) = \chi_0 + \delta\chi$ , onde  $\delta\chi$  é um acréscimo muito pequeno.

O expoente de Liapunov  $\lambda$  é definido por:

$$\Delta\chi \approx e^{\lambda t} \quad (\text{A.6})$$

de modo que, o expoente pode ser calculado aplicando  $\ln$  (logaritmo natural) dos dois lados da equação, de forma que:

$$\lambda \approx \frac{\ln|\Delta\chi|}{\Delta t} \quad (\text{A.7})$$

Quando o movimento não apresenta caos, o expoente de Lyapunov é menor do que zero, já que ao longo do tempo a diferença entre as respostas não tende a aumentar. Quando o sistema apresenta caos, por outro lado, essas trajetórias divergem drasticamente a partir de um instante de tempo, de forma que ao menos um expoente de Lyapunov seja positivo.

### ***Determinação dos Expoentes de Lyapunov***

Na prática, os expoentes de Lyapunov devem ser determinados de forma numérica já que muitas vezes desconhecemos as matrizes Jacobianas do sistema. Neste sentido, não existe um método geral para determinar estes expoentes, pelo contrário, existem diversas técnicas ou métodos com esta finalidade. Um método muito comum para a computação destes expoentes é o Método de Wolf, que apresenta uma forma de estimativa de expoentes de Lyapunov não-negativos de uma série temporal (WOLF et al., 1985). O método foi uma inovação pois, antes dele, não haviam maneiras de calcular expoentes de Lyapunov sem conhecer-se o modelo dinâmico e as matrizes Jacobianas do sistema. O procedimento proposto consiste em calcular os  $n$ 's expoentes positivos  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  a partir da análise

de um atrator reconstruído, que por sua vez é obtido com base nos dados das séries temporais de uma das variáveis de estado do sistema. Algumas limitações são as de que deve-se possuir uma quantidade razoável de dados experimentais precisos e os atratores não podem ser de dimensões muito altas.

Além do Método de Wolf, outros métodos podem ser utilizados, sendo que Eckmann et al. (1986) apresentam outro método baseado na determinação de expoentes positivos com base em dados de séries temporais. Eckmann e Ruelle (1985) apresentam uma série de métodos que permitem obter expoentes os não-negativos, e também os negativos em alguns casos, que foram desenvolvidos até então. Dieci, Russell e Vleck (1997) apresentam uma técnica utilizando um algoritmo de decomposição QR. Ramasubramanian e Sriram (2000) faz um comparativo entre diversos algoritmos. Yamaguchi Yoshiyuki Y.; Iwai (2001) apresentam um método para cálculo dos expoentes de Lyapunov para sistemas Hamiltonianos linearizados. Dieci (2002) apresenta um método sem necessidade de calcular as matrizes Jacobianas do sistema e Golovko e Savitsky (2014) apresentam uma abordagem moderna para a determinação dos expoentes, utilizando redes neurais.

### A.1.6 *Hipercaos*

Sistemas com quatro ou mais dimensões<sup>8</sup> podem ter mais do que um expoente de Lyapunov positivo, e nestes casos possuem mais do que uma variável em regime caótico. Esses sistemas experimentam o que Rössler (1979) chama de hipercaos.

### A.1.7 *Diagrama de Bifurcação e Parâmetros de Controle*

Quando variamos os valores de alguns parâmetros do sistema, por exemplo, razão entre inércias de um corpo rígido, amplitude ou frequência da função forçante ou qualquer outro parâmetro que tenha influência direta na resposta e essa variação leva a uma transição da resposta entre determinística e caótica e/ou vice-versa, esses parâmetros podem ser chamados de parâmetros de controle  $\mu$ . O que ocorre é que, para uma faixa desses valores, os expoentes de Lyapunov assumem valores negativos, enquanto para outra faixa de valores, esses expoentes podem assumir valores positivos. Essas transições dos valores dos expoentes de Lyapunov podem ser visualizados de forma gráfica em uma relação entre a variável de estado analisada e o parâmetro de controle, onde essa representação gráfica leva o nome de diagrama de bifurcação.

---

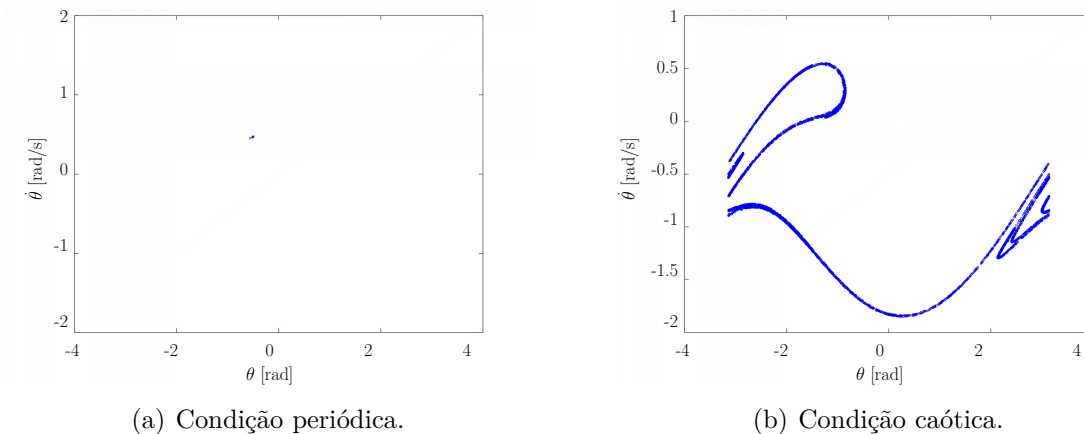
<sup>8</sup>O termo “dimensões” aqui não se refere às três dimensões espaciais, e sim ao número de variáveis de estados.

### A.1.8 Secções de Poincaré

Para sistemas determinísticos periódicos com excitação externa nota-se que o comportamento das variáveis de estado no espaço de configurações, como o próprio nome sugere, é periódico, de modo que suas variáveis de estado assumem um mesmo valor a cada ciclo e esse período está relacionado com o período da excitação de forma que, se interceptássemos essa trajetória a cada tempo igual ou múltiplo do período de excitação, teríamos apenas um ponto no espaço de fases. As secções obtidas poderiam ser, novamente, representadas em um gráfico de  $\dot{\chi}$  por  $w = \dot{\chi}$  e o que veríamos seria apenas um ponto<sup>9</sup>. Essas secções obtidas são as chamadas Secções de Poincaré.

Para sistemas caóticos e/ou aperiódicos, por outro lado, as trajetórias terão valores diferentes em cada secção, de modo que esses sistemas podem, portanto, ser identificados por meio das Secções de Poincaré. A figura 29(a) representa as Secções de Poincaré para um pêndulo forçado amortecido em regime periódico. O problema foi resolvido e as figuras foram obtidas pelo próprio autor visando a obtenção de um exemplo didático simples. Neste problema, alterando-se a amplitude da força de excitação<sup>10</sup>, pode-se chegar em condições caóticas para o pêndulo, as secções de Poincaré resultam em formas mais complexas e não mais periódicas, vide figura 29(b).

Figura 29 – Secções de Poincaré para um pêndulo forçado amortecido.



Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

### A.1.9 Atratores Estranhos

Atratores aparecem em sistemas forçados dissipativos e podem ser classificados de várias formas. Os tipos de atratores mais simples são: ponto fixo e ciclo limite. O de ponto fixo corresponde ao ponto para o qual um sistema dinâmico convergirá se lhe for

<sup>9</sup>Ou um conjunto de pontos muito próximos, devido à truncamentos numéricos e discretização.

<sup>10</sup>Note que a amplitude da força de excitação é, neste caso, um parâmetro de controle.

dado tempo suficiente. Ciclo limite, por sua vez, corresponde a uma órbita periódica para o qual o sistema tenderá após um alguns ciclos.

Os atratores estranhos, por sua vez, possuem estrutura fractal, alta sensibilidade às condições iniciais e comportamento não-periódico. Os sistemas evoluem numa região finita do espaço de fase, mas sem nunca passar por um estado pelo já estivesse passado anteriormente (VILLATE, 2005).

Os atratores estranhos mais tratados na literatura possivelmente são os de Lorenz (LORENZ, 1963), Hénon (HÉNON, 1976), Chen (CHEN; UETA, 1999) e o de Rössler (RÖSSLER, 1976). Dentre os resultados do Capítulo 4, encontram-se os atratores de Lorenz, Chen e Lü-Chen.

## APÊNDICE B – Algoritmos Utilizados

Estão contidos nesse apêndice os algoritmos utilizados neste trabalho. As rotinas foram implementadas em ambiente *MATLAB/Octave*, sendo que todos os algoritmos aqui contidos foram idealizados de maneira a permitirem sua execução direta em *Octave*, de modo que não foram utilizadas *function's* específicas de *Toolboxes* disponíveis que sejam exclusivos do *MATLAB*. Recomenda-se ainda o uso do comando *unwrap* para a plotagem dos gráficos para os ângulos de Euler recuperados a partir dos quatérnions. As rotinas estão separadas entre movimento regular e caótico para a otimização do tempo de execução, realizando o número mínimo de *loops* necessários para a solução em cada caso. As funções *CI.m*, *simparameter.m*, *bodyparameters.m* e *modelo\_velang.m* são comuns à ambas as rotinas principais, de modo que serão apresentadas uma única vez.

### B.1 Rotinas Para os Casos de Movimento Regular do Giroscópio

As rotinas implementadas que auxiliam a descrição do movimento do giroscópio para os casos de movimento regular consistem em uma rotina principal e nove funções secundárias. Todas as rotinas contêm uma breve descrição em seu início. A rotina principal para o movimento regular *Movimento\_Regular.m* consiste em:

```

%% Integrador via ângulos de Euler e via Quatérnions para o giroscópio:
% Rotina principal para o MOVIMENTO REGULAR.
%-----|
%   Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGE.
%   UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
%   Ilha Solteira/SP
%   Simulação do movimento de um corpo rígido com 3 rotações no espaço.
%   Sequência de Rotações: 3-2-3.
%   Formato do Corpo: Disco (giroscópio).
%   Autor:   Andreyson Bicudo Jambersi.
%   28 de Setembro de 2015.

```

```

% Última alteração: 17 de Janeiro de 2016.
% (Revisão da organização geral dos algoritmos)
%
% ==== Funções Secundárias:
% CI - Onde são definidas as condições iniciais (CI's):
%
% bodyparameters - Onde são definidos os parâmetros físicos (do corpo).
%
% simparameters - Onde são definidos os parâmetros de amostragem.
%
% modelo_velang - Onde são calculadas as acelerações angulares dotomega
% (direções principais) a partir das vel. angulares e esforços ext.
%
% forces - Calcula momentos externos como funções desejadas (impulso,
% senídes, etc) que não são realimentação de estados.
%
% eulerangles - Calcula derivada do vetor de estados (que contém os
% ângulos de Euler e as suas primeiras derivadas) para posterior
% integração.
%
% vel_angular - Calcula as velocidades angulares nas direções
% principais, a partir dos ângulos de Euler e derivada destes.
%
% quatint - Integra o quatérnion.
%
% quaterniontoeuler - Calcula os ângulos de Euler a partir do
% quatérnion.
%-----|
%-----|
close all; clear; clc;
format long; tic

[Ixx,Iyy,Izz] = bodyparameters(); % Obtém momentos de inércia a partir
% dos parâmetros do corpo.

[N,dt,t] = simparameters(); % Obtém os parâmetros de amostragem.

% Pré-alocação dos vetores:
M = zeros(N,3);
omega = zeros(N,3);
s = zeros(N,3);

```

```

dots = zeros(N,3);
q = zeros(N,4);
s_q = zeros(N,3);
% s_c = zeros(N,3); % Desmarcar apenas para teste (benchmark).
%-----
% CONDIÇÕES INICIAIS:
%-----
[psi0,theta0,phi0,dotpsi0,dottheta0,dotphi0] = CI(); % Obtém CI's.
s(1,1) = psi0;
s(1,2) = theta0;
s(1,3) = phi0;
s_q(1,1) = psi0;
s_q(1,2) = theta0;
s_q(1,3) = phi0;
% s_c(1,1) = psi0; % Desmarcar apenas em caso de benchmarking
% s_c(1,2) = theta0;
% s_c(1,3) = phi0;

% Calcula as condições iniciais para as velocidades angulares a partir
% dos valores dos ângulos de Euler
omega(1,:) = vel_angular(psi0,dotpsi0,theta0,dottheta0,phi0,dotphi0);

% Cálculo dos esforços caso não-realimentado (âng. de Euler/Quatérnions):
[Mx3,My3,Mz3,f] = forces(t(1));

% Cálculo dos esforços caso realimentado (âng. de Euler/Quatérnions):
% [Mx3,My3,Mz3] = forcesfeedback(omega(1,:),Ixx,Iyy,Izz);
M(1,1) = Mx3;
M(1,2) = My3;
M(1,3) = Mz3;
% Cálculo de dotomega a partir de omega, M e I:
dotomega(1,:) = modelo_velang(omega(1,:), M(1,:), Ixx,Iyy,Izz);

% Cinemática inversa via ângulos de Euler para primeiro inst. de tempo:
dots(1,:) = eulerangles( s(1,:) , omega(1,:) );

% Primeira estimativa dos quatérnions:
[q0,q1,q2,q3] = quaternion(s_q(1,:));
q(1,:) = [q0 q1 q2 q3];

```

```

for i = 2:N

    k1 = modelo_velang( omega(i-1,:) , M(i-1:),Ixx,Iyy,Izz); % dotmega
    k2 = modelo_velang( omega(i-1,:) + dt/2*k1,M(i-1:),Ixx,Iyy,Izz);
    k3 = modelo_velang( omega(i-1,:) + dt*0.5*k2,M(i-1:),Ixx,Iyy,Izz);
    k4 = modelo_velang( omega(i-1,:) + dt*k3,M(i-1:),Ixx,Iyy,Izz);
    omega(i,:) = omega(i-1,:) + dt*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    clear k1 k2 k3 k4;
% Cálculo dos esforços caso não-realimentado:
[Mx3,My3,Mz3,f] = forces(t(i));

% % Cálculo dos esforços caso realimentado:
% [Mx3,My3,Mz3] = forcesfeedback(omega(i,:),Ixx,Iyy,Izz);
M(i,1) = Mx3;
M(i,2) = My3;
M(i,3) = Mz3;

    dotomega(i,:) = modelo_velang(omega(i,:),M(i,:),Ixx,Iyy,Izz);

% Cinemática inversa via ângulos de Euler:
k1 = eulerangles( s(i-1,:) , omega(i-1:)); % dots
k2 = eulerangles( s(i-1,:) + dt*0.5*k1,omega(i-1:));
k3 = eulerangles( s(i-1,:) + dt*0.5*k2,omega(i-1:));
k4 = eulerangles( s(i-1,:) + dt*k3,omega(i-1:));
s(i,:) = s(i-1,:) + dt*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
clear k1 k2 k3 k4;

    dots(i,:) = eulerangles( s(i,:) , omega(i,:) );

% Cinemática inversa via Quatérnions:
k1 = quatint( q(i-1,:) , omega(i-1:)); %dotq
k2 = quatint( q(i-1,:) + dt*0.5*k1,omega(i-1:));
k3 = quatint( q(i-1,:) + dt*0.5*k2,omega(i-1:));
k4 = quatint( q(i-1,:) + dt*k3,omega(i-1:));
q(i,:) = q(i-1,:) + dt*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
clear k1 k2 k3 k4;

% Calcula os ângulos de Euler a partir dos Quatérnions:
s_q(i,:) = quaterniontoeuler(q(i,:));
% Permite comparação da recuperação dos ângulos de Euler com função
% do Toolbox MATLAB (MATLAB apenas! Não executar em Octave!) -
% Benchmarking:

```

```

%           [s_c(i,1),s_c(i,2),s_c(i,3)] = quat2angle(q(i,:), 'ZYZ');
end

psi = s(:,1);%
theta = s(:,2);
phi = s(:,3);
dotpsi = dots(:,1);%
dottheta = dots(:,2);
dotphi = dots(:,3);
psi_q = s_q(:,1);%
theta_q = s_q(:,2);
phi_q = s_q(:,3);

Mx3 = M(:,1);
My3 = M(:,2);
Mz3 = M(:,3);
wx = omega(:,1);
wy = omega(:,2);
wz = omega(:,3);
toc

```

Função *CI.m*:

```

%% Função onde são definidas as condições iniciais do problema.
%
function[psi0,theta0,phi0,dotpsi0,dottheta0,dotphi0] = CI();
psi0 = 0;           %graus       % Precessão
theta0 = 0.001;    %graus       % Nutação
phi0 = 0;          %graus       % Spin

psi0 = psi0*pi/180;           %rad       % Precessão
theta0 = theta0*pi/180;      %rad       % Nutação
phi0 = phi0*pi/180;          %rad       % Spin

dotpsi0 = .02;               %rad/s
dottheta0 = 0.02;           %rad/s
dotphi0 = 15.71;            %rad/s
end

```

Função *bodyparameters.m*:

```

%% Aqui são definidos os valores dos parâmetros do corpo.
function [Ixx,Iyy,Izz] = bodyparameters()
m = 2.0;      % Massa do disco [kg];
d = 0.15;    % Diametro do disco [m];
r = d/2;     % Radio do disco [m];
% Momentos de inércia:
Ixx = 1/2*m*r^2;    % [kg.m2] %I1
Iyy = 1/4*m*r^2;    % [kg.m2] %I2
Izz = Iyy;          % [kg.m2] %I3
end

```

Função *simparameters.m*:

```

%% Aqui são definidos os parâmetros de amostragem.
function [N,dt,t] = simparameters()
N = 10000;          % Numero de amostras temporais.
dt = 0.001;        % Passo de integração [s].
t = 0:dt:(N-1)*dt; % Vetor tempo [s].
end

```

Função *modelo\_velang.m*:

```

%% Modelo movimento livre do flutuador para 3 rotações com um ponto fixo.
% Equações de Euler.
% Sequência de rotações: Qualquer que seja.
% I1 = Ixx ; I2 = Iyy ; I3 = Izz.
function [dotomega] = modelo_velang(omega,M,I1,I2,I3)
dotomega(1) = I1\ (I2-I3)*omega(2)*omega(3) + M(1)/I1;
dotomega(2) = I2\ (I3-I1)*omega(3)*omega(1) + M(2)/I2;
dotomega(3) = I3\ (I1-I2)*omega(1)*omega(2) + M(3)/I3;
end

```

Função *forces.m*:

```

%% Cálculo dos esforços externos atuantes.
function [Mx3,My3,Mz3,f] = forces(t)

```

```

% % Excitação Senoidal:
% A(1) = 0;
% f(1) = 0.2;
% A(2) = 0;
% f(2) = 0.2;
% A(3) = 0;
% f(3) = 0.2;
% %
% Mx3 = (A(1)*cos(f(1)*2*pi*t));
% My3 = (A(2)*cos(f(2)*2*pi*t));
% Mz3 = (A(3)*cos(f(3)*2*pi*t));
% Impulso:
f = 0;
    if t>=1.3 && t<=1.31
        Mx3 = 0;
        My3 = 0.0;
        %           Mz3 = 1.0
        Mz3 = 0.0;
    else
        Mx3 = 0;
        My3 = 0;
        Mz3 = 0;
    end
end

```

Função *eulerangles.m*:

```

%% Cinemática inversa a partir dos ângulos de Euler.
% Sequência de rotações: 3-2-3.
function [dots] = eulerangles(s,omega)
% s = [psi, theta, phi]
% dots = [dotpsi, dottheta, dotphi]
psi = s(1); theta = s(2); phi = s(3);
% 3-2-3:
dots(1) = (omega(2)*sin(phi) - omega(1)*cos(phi))/sin(theta); %dotpsi
dots(2) = (omega(1)*sin(phi) + omega(2)*cos(phi)); %dottheta
dots(3) = omega(3) - dots(1)*cos(theta); %dotphi
end

```

Função *vel\_angular.m*:

```

%% Calcula as condições iniciais para as velocidades angulares
% a partir dos valores dos ângulos de Euler:
% Seq.: 3-2-3
function [omega] = vel_angular(psi,dotpsi,theta,dottheta,phi,dotphi)
omega = [dottheta*sin(phi) - dotpsi*cos(phi)*sin(theta)
dottheta*cos(phi) + dotpsi*sin(phi)*sin(theta)
dotphi + dotpsi*cos(theta)];
end

```

Função *quatint.m*:

```

%% Integra o Quatérnio  $\hat{q}$ .
function [dotq] = quatint(q,omega)
%dotq = 1/2*\hat{w}*\hat{q}
% onde  $\hat{w}$  é o vetor velocidade angular escrito na forma de quatérnio.
q0 = q(1);
q1 = q(2);
q2 = q(3);
q3 = q(4);
qmat = [q0 -q1 -q2 -q3
q1 q0 -q3 q2
q2 q3 q0 -q1
q3 -q2 q1 q0];
dotq = 1/2*qmat*[0; omega(1); omega(2); omega(3)];
dotq = dotq';
end

```

Função *quaterniontoeuler.m*:

```

%% Função que retorna os ângulos de Euler a partir de uma matriz de
% rotação representada em função de quatérnios
% Relações são obtidas comparando analiticamente as matrizes R e Q!
% O comando "atan2" é utilizado no lugar de "atan" pois "atan2" retorna
% ângulos entre -pi e +pi enquanto "atan" entre -pi/2 e +pi/2,
% (alterar quando necessário)
function [s] = quaterniontoeuler(q)
qnorm = q./(norm(q)*ones(1,4)); % Quat. normalizado (corrige norma,
% se necessário).

```

```

q0 = qnorm(1);
q1 = qnorm(2);
q2 = qnorm(3);
q3 = qnorm(4);
% Matriz de rotação por quatérnions:
Q = [(1-2*q2^2 - 2*q3^2) 2*(q1*q2 + q3*q0) 2*(q1*q3 - q2*q0)
2*(q1*q2 - q3*q0) (1-2*q1^2 - 2*q3^2) 2*(q2*q3 + q1*q0)
2*(q1*q3 + q2*q0) 2*(q2*q3 - q1*q0) (1-2*q1^2-2*q2^2)];
% 3-2-3
s(1) = atan2(Q(3,2),Q(3,1)); %psi
s(2) = acos(Q(3,3)); %theta
s(3) = atan2(Q(2,3),-Q(1,3)); %phi
end

```

## B.2 Rotinas Para os Casos de Movimento Caótico do Giroscópio

As rotinas que fornecem descrição do movimento do giroscópio para os casos de movimento caótico consistem em uma rotina principal e cinco funções secundárias, sendo que quatro delas já eram comuns ao caso do movimento regular e já foram relacionadas na Seção B.1. A rotina principal para o movimento caótico *Movimento\_Caos.m* consiste em:

```

%% Integrador para as equações de Euler:
% Rotina principal para o MOVIMENTO CAÓTICO
%-----|
% Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGEM.
% UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
% Ilha Solteira/SP
% Simulação do movimento de um corpo rígido com 3 rotações no espaço.
% Sequência de Rotações: 3-2-3.
% Formato do Corpo: Disco (giroscópio).
% Autor: Andreyson Bicudo Jambersi.
% 14 de Janeiro de 2016.
% Última alteração: 18 de Janeiro de 2016.
% (Revisão da organização geral dos algoritmos)
% ==== Funções Secundárias:

```

```

% CI - Onde são definidas as condições iniciais (CI's):
%
% bodyparameters - Onde são definidos os parâmetros físicos (do corpo).
%
% simparameters - Onde são definidos os parâmetros de amostragem.
%
% modelo_velang - Onde são calculadas as acelerações angulares dotomega
% (direções principais) a partir das vel. angulares e esforços ext.
%
% forcesfeedback - Calcula os momentos externos em função das vel.
% angulares (desmarcar função apenas quando caso feedback é utilizado).
%-----|
clear; close all; clc; format long;
tic

[Ixx,Iyy,Izz] = bodyparameters();
[N,dt,t] = simparameters();
M_q = zeros(N,3);
omega = zeros(N,3);
dotomega = zeros(N,3);

omega(1,:) = [-0.1 ; 0.5 ; -0.6]; %CIs vel. ang. diretas

[Mx3,My3,Mz3,A,indices] = forcesfeedback(omega(1,:),Ixx,Iyy,Izz);
M_q(1,1) = Mx3;
M_q(1,2) = My3;
M_q(1,3) = Mz3;

dotomega(1,:) = modelo_velang(omega(1,:),M_q(1,:),Ixx,Iyy,Izz);

for i = 2:N

% Integração das eq. de Euler:
k1 = modelo_velang( omega(i-1,:), M_q(i-1,:),Ixx,Iyy,Izz); % dotomega
k2 = modelo_velang( omega(i-1,:) + dt*0.5*k1,M_q(i-1,:),Ixx,Iyy,Izz);
k3 = modelo_velang( omega(i-1,:) + dt*0.5*k2,M_q(i-1,:),Ixx,Iyy,Izz);
k4 = modelo_velang( omega(i-1,:) + dt*k3,M_q(i-1,:),Ixx,Iyy,Izz);
omega(i,:) = omega(i-1,:) + dt*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
clear k1 k2 k3 k4;
[Mx3,My3,Mz3,~,~] = forcesfeedback(omega(i,:),Ixx,Iyy,Izz);

```

```

M_q(i,1) = Mx3;
M_q(i,2) = My3;
M_q(i,3) = Mz3;

dotomega(i,:) = modelo_velang(omega(i,:), M_q(i,:) , Ixx,Iyy,Izz );

end

wx_q = omega(:,1);
wy_q = omega(:,2);
wz_q = omega(:,3);
toc

```

Função *forcesfeedback.m*:

```

%% Function onde são calculados os esforços externos (caso realimentado).
% I1 = Ixx ; I2 = Iyy ; I3 = Izz.
function [Mx3,My3,Mz3,A,indices] = forcesfeedback(omega,I1,I2,I3)
I0 = I2;
% =====
% % Caso 1 (Lorenz):
% a11 = -20*I0;
% a21 = 28*I0;
% a12 = -a11;
% a22 = -I0;
% a33 = -8*I0/3;
% a = a11/(2*I0);
% b = a22/I0;
% c = a33/I0;
% =====
% Caso 2 (Chen):
% a11 = -35*(2*I0);
%
% a22 = 28*I0;
% a33 = -3*I0;
% a = a11/(2*I0);
% b = a22/I0;
% c = a33/I0;
% a12 = -a11;
% a21 = I0*(b + a);
% =====

```

```

% Caso 3 (Lu-Chen):
a11 = -36*(2*I0);
a22 = 28.9*I0;
a33 = -3*I0;

a = a11/(2*I0);
b = a22/I0;
c = a33/I0;

a12 = -a11;
a21 = 0;
%=====
a13 = 0;
a31 = 0;
a23 = 0;
a32 = 0;
%=====
%%% Desmarque se A é diagonal:
% a12 = 0;
% a21 = 0;
% a13=0;
%=====
A = [a11 a12 a13; a21 a22 a23; a31 a32 a33];
%
M = A*omega';
%
Mx3 = M(1);
My3 = M(2);
Mz3 = M(3);
indices = [a b c];
end

```