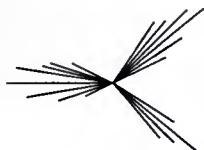


Handwritten text on a small label at the top center, possibly containing a date or reference number.

Blank white rectangular label at the bottom left corner.



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/03

Simetrias e Correntes Conservadas em Teorias de Campos Integráveis em Qualquer Dimensão

Eduardo De Carli da Silva

Orientador

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira



Abril de 2003

Agradecimentos

Este trabalho no teria sido possível sem a ajuda e o apoio de algumas pessoas. Gostaria de agradecer à:

- A todos os amigos que fiz durante minha graduação na UFSC, em especial ao Eduardo e a Alexandra pela amizade e companherismo.
- A todos os professores de graduação e pós-graduação, em especial aos professores Eliezer Baptista, Luiz Augusto Saeger, Gustavo da Costa, Roberto Cid Fernandes Teodosio Kroin, Miguel, não apenas pela competência com que ministraram os cursos, mas também pelo ser humano que demonstraram ser.
- Ao professor José Carlos Brunelli, por ter acreditado em mim e me orientado na iniciação científica, mostrando-se um grande orientador e também pela preocupação com relação a minha formação.
- Ao professor Luiz Agostinho Ferreira, por ter me dado a oportunidade de ingressar no IFT, pela competência com que me orientou, e por ter se mostrado um grande ser humano, me ajudando a superar os problemas técnicos, e a distância da minha família.
- Aos professores Abraham H. Zimerman e José Francisco Gomes, por terem sempre proporcionado um bom ambiente de trabalho.
- Aos amigos do IFT, Esdras, Paulo, Wilian, Gian, Wanderson, Lúcio, Carlos, Vagner, Andre, Jojomar, Paheco, Gadelha, Rodrigo, Pedro, pelos momentos agradáveis.
- Ao meu tio Jorge, que passou por um momento difícil em sua vida, onde infelizmente não pude estar presente fisicamente.
- A Vera, que nos deixou muita saudade.
- A minha cunhada Vera, pela amizade, pelo carinho, por ter cedido um lugar em sua casa, ajudando minha esposa nos momentos em que eu estava ausente, e por todos os bons momentos que passamos juntos.
- Aos meus pais Álvaro e Vera que sempre serão como gigantes em minha vida, por saberem transmitir a mim o verdadeiro valor da vida.

-
- Aos meus irmãos Ricardo e Adriana, pelo amor, por todos os bons momentos, e pela fiel amizade que existe entre nós.
 - A você Gisa, pela esposa maravilhosa que é, por ter demonstrado paciência, perseverança e amor incondicional, por ter superado a distância de uma maneira tão madura, pelo porto seguro que você sempre representou para mim e por ter me dado o presente mais maravilhoso que eu já recebi, nosso filho Rafael.
 - A você Rafa, não apenas agradeço, mas também dedico esta dissertação, pois você veio mostrar que a vida é muito mais incrível do que eu podia imaginar. Você é tudo.
 - A FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Através do formalismo de sistemas integráveis em qualquer dimensão desenvolvido em [18], nos propomos a resolver um modelo integrável em 4 dimensões Euclidianas cujos campos escalares tomam valores na esfera S^2 . A Lagrangiana é dada pelo quadrado do pull-back da 2-forma da área de S^2 . A ação Euclideana é invariante por reescalonamento $x \rightarrow \lambda x$, o que garante a estabilidade das soluções a la Derrick. Encontramos a equação de curvatura nula e as correntes conservadas associadas. A invariância conforme do modelo nos fornece um ansatz que permite reduzir as equações de movimento a uma equação diferencial parcial em duas variáveis. As soluções explícitas são obtidas através de programas de manipulação algébrica, Mathematica e Maple, por uma expansão em série de potências.

Abstract

Using the approach to integrable theories in any dimension introduced in [18], we analyse an integrable model in four Euclidean dimensions, with fields taking values in the sphere S^2 . The Lagrangean is given by the square of the pull-back of the area form of S^2 . The Euclidean action is invariant under the rescaling $x \rightarrow \lambda x$, which guarantees the stability of the solutions a la Derrick. We construct the generalized zero curvature condition and find the associated conserved currents. The four dimensional conformal invariance of the model leads to an ansatz which reduces the equations of motion to a single (linear) partial differential equation in two variables. The solutions are obtained by through computer programs for algebraic manipulation, as Maple and Mathematica, using a method of power series expansion.

Índice

1	Sólitons e Integrabilidade	1
1.1	A Equação KdV e a Solução Tipo Sóliton	1
1.2	Modelos Integráveis (Segundo Liouville)	6
1.2.1	Sistemas Hamiltonianos e a Curvatura Nula	6
1.3	O Modelo de Fermi-Pasta-Ulan	9
1.3.1	A Rede de Toda	10
1.3.2	Construção das Soluções Exatas	11
1.3.3	O Modelo de Sine-Gordon	15
1.4	O Modelo Sine-Gordon e as Soluções tipo Sólitons	16
1.5	Segundo Tipo de Partícula	17
2	Integrabilidade em Dimensão Maior que Dois	20
2.1	A Curvatura Nula é Uma Lei de Conservação	20
2.2	Modelos Integráveis em Dimensão Maior que Dois	27
2.2.1	Integrabilidade em Dimensão Maior que Dois	27
2.3	Condições Locais de Integrabilidade	29
2.3.1	Primeiro Tipo de Modelo Integrável	29
2.3.2	Segundo Tipo de Modelo Integrável	30
3	O Modelo na Esfera e no Plano	33
3.1	Simetrias	36
3.1.1	Simetrias do Espaço Tempo	36
3.2	Soluções	39
3.3	Substituição do Ansatz	43
3.3.1	O Ansatz Toroidal	43
3.3.2	Solução do Caso Toroidal	47
3.3.3	O Ansatz Polar	49
3.3.4	A solução por separação de variáveis para o caso polar.	51
3.3.5	A Solução em Série para o Caso Polar	52
3.3.6	O Cálculo da Ação	56

A	Projeção Estereográfica e a Forma Volume na Esfera	57
A.1	Projeção da Esfera no Plano	57
A.2	A Forma Volume	59
A.3	A Forma Area no Plano	60
B	As Coordenadas Toroidais	61
C	O Cálculo da Quantidade $\delta V V^{-1}$	67
D	Programa Mathematica	74
E	Gráficos para expansão de g em ordem 20 no caso do ansatz polar	75
E.0.1	O caso polar $m_1 = m_2 = 1$	76
E.0.2	O caso polar $m_1 = 1, m_2 = 2$	77
E.0.3	O caso polar $m_1 = 2, m_2 = 1$	78
E.0.4	O caso polar $m_1 = m_2 = 2$	79
F	Gráfico para expansão de g em ordem 20 no caso toroidal	80
F.0.5	O caso toroidal $m_1 = m_2 = 1$	80
	Referências	82

Introdução

Historicamente, a teoria de sólitons iniciou-se em 1834, quando John Scott Russell observou pela primeira vez uma onda se propagando, sem se dispersar e mantendo sua forma, em um canal próximo de Edinburgh. Mas foi apenas nos anos 60 que Kortweg e de Vries [13] formularam matematicamente a equação de KdV, que descrevia o sóliton avistado por Scott Russel. Entretanto, em 1965 Zabusky e Kruskal [20] estudaram o problema de Fermi-Pasta-Ulam, onde a equação de KdV surge tomando-se o limite contínuo de uma rede de osciladores acoplados não lineares. A motivação inicial para o estudo deste modelo era observar como a energia, para um sistema de osciladores acoplados não lineares, se distribuía de um modo de vibração a outro com o passar do tempo. Foram feitas simulações numéricas e observou-se que as condições iniciais se repetiam aproximadamente. Isso era um forte indício da existência de quantidades conservadas que restringiam o espaço de fase. A solução analítica para um problema semelhante ao de Fermi-Pasta-Ulam veio apenas em 1967 com Morikazu Toda. A partir deste ponto iniciou-se um grade estudo sobre as estruturas que regiam este tipo de equação, que culminou em uma série de artigos [10][11][14][17][16][19].

Foi com Lax [15], em 1968 que se deu a segunda etapa para o entendimento da estrutura algébrica que regia a equação de KdV. Surgia então com a equação de Lax $\frac{dL}{dt} = [L, M]^*$ uma representação algébrica para a equação de KdV. Foi este tipo de representação que deixou claro a existência de quantidades conservadas e uma hierarquia de equações relacionadas a dinâmica da KdV.

Com o passar do tempo, percebeu-se que as propriedades algébricas da equação de KdV não eram um caso particular para esta equação, mas sim definiam uma área de pesquisa denominada posteriormente de modelos integráveis, que se propõe ao estudo destas propriedades em diversas outras equações. Atualmente os métodos de modelos integráveis em duas dimensões são bem conhecidos e fundamentados. A representação de Lax para a equação de KdV é um caso particular da conhecida equação de Zakharov Shabat $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0$ também conhecida como equação de curvatura nula.

*Onde L e M são operadores

Na teoria de sistemas integráveis em 2 dimensões, a equação de curvatura nula exerce o critério de integrabilidade. Se uma dada equação possui representação em termos de curvatura nula, necessariamente existem métodos, como o Método de Dressing e o Espalhamento Inverso, que garantem a solução analítica para a equação. Portanto, e reinterando, trata-se de uma área de pesquisa bem conhecida e fundamentada.

Recentemente iniciou-se um esforço para generalizar as idéias de sistemas integráveis em duas dimensões. Em [18] Orlando Alvarez, Luiz Agostinho Ferreira e Sánchez Guillén propõem uma abordagem para sistemas integráveis em qualquer dimensão. Os principais resultados obtidos foram a formulação da equação de curvatura nula para qualquer dimensão, as consequentes correntes conservadas associadas ao formalismo, e os submodelos associados.

Este trabalho se propõe ao estudo preliminar dos aspectos de sistemas integráveis em duas, e em qualquer dimensão; em particular à aplicação do formalismo desenvolvido em [18] para o modelo $sl(2)$ parametrizado por dois campos escalares tomando valores sobre a esfera e sobre o plano. Segue abaixo um breve resumo dos aspectos abordados em cada um dos capítulos subsequentes.

O primeiro capítulo é iniciado com uma breve motivação histórica aos modelos integráveis. Analizamos as questões relativas a dispersão de ondas com o intuito de motivar o entendimento dos termos que regem a equação de KdV. De posse da equação de KdV fazemos um breve estudo de suas simetrias, o que possibilita sua integração. Em seguida introduzimos alguns aspectos fundamentais de sistemas integráveis para sistemas hamiltonianos como o teorema de Liouville [2], com o intuito de dar uma primeira definição, ou uma definição "inocente" do que se entende por um sistema integrável. Neste ponto introduzimos a equação de Lax como uma representação algébrica para a equação de KdV. A equação de Zakharov Shabat, ou equação de curvatura nula, é introduzida como uma generalização para a equação de Lax, onde as quantidades conservadas para o caso de um gauge específico são obtidas. Concluimos com a construção do modelo de Fermi-Pasta-Ulam, sua solução proposta por Morikazu Toda, e a aplicação do formalismo discutido ao modelo de Sine-Gordon.

O segundo capítulo se inicia com a fundamentação das idéias de sistemas integráveis em duas dimensões, com a obtenção da equação de curvatura nula como a condição de independência do caminho da integral da conexão A_μ . É mostrado que a condição $F_{\mu\nu} = 0$ é uma lei de conservação em duas dimensões. Posteriormente é feita a generalização da condição de curvatura nula para qualquer dimensão. Tal generalização envolve uma conexão A_μ e um tensor antissimétrico $B_{\mu\nu}$. Em geral a condição de curvatura nula é não local. No entanto, sob certas condições é possível

mostrar que as equações

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad D_\mu \tilde{B}^\mu = 0 \quad (0.1)$$

com

$$\tilde{B}^\mu \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} B^{\nu\rho} \quad (0.2)$$

são uma condição local e suficiente para que a curvatura seja nula.

O modelo que estamos considerando é construído em 3+1 dimensões no espaço-tempo Euclideano com a Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{h^2}{2f^2} \quad (0.3)$$

onde $f = 1$ corresponde ao modelo que toma valores no plano, e $f = (1 + u^*u)^2$ sobre a esfera, para os quais

$$h^2 = h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \quad h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^* \quad (0.4)$$

com a equação de movimento,

$$\varepsilon \equiv 4h^2 \partial^\mu h_{\mu\nu} \partial^\nu + 2(h^2)^2 \partial_{u^*} \log f = 0 \quad (0.5)$$

O modelo possui infinitas correntes conservadas

$$J_\mu^{(s)} = W^{-1} \tilde{B}_\mu^{(s)} W \quad (0.6)$$

que são dadas a medida que variamos o valor de s .

Este é um modelo considerado sobre a álgebra $sl(2)$, com geradores

$$T_+ \equiv \lambda \frac{d}{d\bar{\lambda}} \quad T_- \equiv \bar{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \quad T_3 \equiv \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{d}{d\lambda} - \bar{\lambda} \frac{d}{d\bar{\lambda}} \right) \quad (0.7)$$

que são parametrizados por dois campos escalares u e u^* , com potenciais

$$A_\mu \equiv \frac{1}{1 + |u|^2} \left(-i \partial_\mu u \lambda \frac{d}{d\bar{\lambda}} - i \partial_\mu u^* \bar{\lambda} \frac{d}{d\lambda} + (u \partial_\mu u^* - u^* \partial_\mu u) \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{d}{d\lambda} - \bar{\lambda} \frac{d}{d\bar{\lambda}} \right) \right) \quad (0.8)$$

$$B_\mu^{(s)} \equiv \frac{1}{1 + |u|^2} \left(K_\mu \lambda^{s+1} \bar{\lambda}^{s-1} - K_\mu^* \lambda^{s-1} \bar{\lambda}^{s+1} \right) \quad (0.9)$$

onde A_μ é um puro gauge

$$A_\mu = \partial_\mu W W^{-1} \quad W \equiv e^{iuT_+} e^{\varphi T_3} e^{iu^*T_-} \quad \varphi \equiv \log(1 + u^2) \quad (0.10)$$

Este modelo possui simetria conforme

$$x'^i = x^i + (\epsilon \cdot x) x^i - \frac{1}{2} x^2 \epsilon^i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (0.11)$$

A existência desta simetria possibilita a imposição de dois distintos ansatz sobre o campo u , que são conseguidos através da solução da equação diferencial

$$\left[\partial_{\theta_j} - im_j(u\partial_u - u^*\partial_{u^*}) \right] u = 0 \quad j = 1, 2 \quad (0.12)$$

As propriedades do espaço que estamos tratando estas soluções nos impõem dois conjuntos de variáveis comutantes, e consequentemente através de (0.12) conseguimos dois ansatz para o modelo, que são

$$u = S(z, \theta) e^{i(m_1\theta_2 + m_2\theta_2)} \quad (0.13)$$

para o caso polar, e

$$u = S(\zeta, \theta) e^{i(m_1\xi + m_2\varphi)} \quad (0.14)$$

para o caso toroidal. Por sua vez a substituição destes ansatz na equação (0.5) impõem duas coordenadas cíclicas a esta equação diferencial, e surpreendentemente conseguimos linearizar as equações, onde para o caso da substituição do ansatz polar conseguimos,

$$\partial_z (\Lambda \partial_z g) + \partial_\theta (\Lambda \partial_\theta g) = 0 \quad (0.15)$$

e para o caso toroidal

$$\partial_\zeta (\Omega \partial_\zeta g) + \partial_\theta (\Omega \partial_\theta g) = 0 \quad (0.16)$$

onde

$$\Omega = m_1^2 \frac{\sin \theta}{\sinh \zeta} + m_2^2 \frac{\sinh \zeta}{\sin \theta} \quad (0.17)$$

e

$$\Lambda \equiv \frac{m_1^2 + m_2^2 - (m_1^2 - m_2^2) \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = m_1^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} + m_2^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (0.18)$$

É interessante notar que a relação entre g e S , tanto para o caso polar, quanto para o caso toroidal, é a mesma e dada por

$$\begin{array}{ll} \text{para o plano} & \rightarrow \quad g \equiv S^2 \quad g \geq 0 \\ \text{para a esfera } S^2 & \rightarrow \quad g \equiv \frac{1}{1 + S^2} \quad 0 \leq g \leq 1 \end{array} \quad (0.19)$$

onde a condição $0 \leq g \leq 1$ é consequência de ser S uma função real.

O modelo enfim é resolvido usando uma expansão em série de potências, onde o programa Mathematica foi usado para o cálculo algébrico dos termos da expansão.

Capítulo 1

Sólitons e Integrabilidade

1.1 A Equação KdV e a Solução Tipo Sóliton

Quando Scott Russel, em 1834 [7] avistou pela primeira vez a estranha onda que se propagava em um canal próximo de Edinburgh sem se dispersar e mantendo sua forma, não sabia ele que aquela onda que instigou sua curiosidade faria uma verdadeira revolução na física. Posteriormente Kortweg e de Vries, em 1895 [7], construíram a equação que regia aquela estranha onda, que ficou conhecida como a equação de KdV (Kortweg e de Vries), e sua solução (a avistada por Scott Russel) seria batizada de sóliton.

Iniciaremos com um breve estudo da equação KdV e de algumas de suas propriedades como motivação ao entendimento das propriedades de um sóliton. Vale lembrar que soluções tipo sóliton ocorrem em vários tipos de equações, definiremos aqui as principais características dos sólitons.

Um sóliton é a solução de alguma equação diferencial com as seguintes propriedades:

- (I) Uma solução localizada no espaço que viaja sem se dispersar mantendo sua forma.
- (III) Quando dois sólitons são espalhados, um passa pelo outro sem ser destruído, havendo apenas uma mudança de fase.

O que torna tal comportamento possível é a existência de quantidades conservadas, que veremos mais tarde, estão ligadas à integrabilidade do sistema.

Como motivação, faremos um breve estudo sobre dispersão e não linearidade em equações diferenciais para um entendimento das propriedades da equação de KdV.

Em 1+1 dimensão a equação da onda é

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{1.1}$$

onde temos que $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ e $u = u(x, t)$, uma função contínua de x e t .

A solução para a equação (1.1) é

$$u(x, t) = \exp i(kx - wt) \quad (1.2)$$

sendo $k \equiv \frac{2\pi}{\lambda}$ e $w \equiv 2\pi\nu$, onde λ e f são o comprimento de onda e a frequência, respectivamente.

Substituindo a equação (1.2) na equação (1.1) obtemos,

$$w = \pm ck \quad (1.3)$$

Podemos perceber que a velocidade de grupo $V_g \equiv Re(\frac{dw_k}{dk})$ é igual a velocidade de fase $V_f \equiv Re(\frac{w_k}{k})$, $V_g = V_f = c$. Portanto são ondas não dispersivas que viajam com velocidade constante [7].

Considere agora a seguinte equação com $c = 1$,

$$u_t + u_x = 0 \quad (1.4)$$

substituindo (1.2) na equação (1.4) percebemos da mesma maneira que a equação (1.4) é não dispersiva, ou seja $w_k = k$. Mas se adicionarmos o termo u_{xx} na equação (1.4) percebemos que,

$$w_k = k(1 - k^2) \quad (1.5)$$

que torna a solução dispersiva, ou seja, $V_g = 1 - 3k^2 \neq V_f = 1 - k^2$. Veremos o que acontece ao adicionarmos o termo $-u_{xx}$ na equação (1.4)

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \quad (1.6)$$

e novamente substituindo a equação (1.2) na equação (1.6) obteremos $w_k = k - ik^2$, e teremos $V_g \equiv Re(\frac{dw_k}{dk}) = 1$.

Substituindo w_k na equação (1.2) observamos que,

$$u(x, t) = \exp(ikx - ikt) \exp(-k^2t). \quad (1.7)$$

Ou seja, a adição do termo $-u_{xx}$ fez com que a solução tivesse decaimento exponencial, tornando-a dissipativa.

Considere agora o efeito da não linearidade adicionando na equação (1.4) o termo uu_x ,

$$u_t + u_x + uu_x = u_t + (1 + u)u_x = 0 \quad (1.8)$$

percebemos que as ondas planas seriam solução se substituíssemos c por $(1 + u)$, ou seja,

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u = c \rightarrow x = (1 + u)t + cte \quad (1.9)$$

O que está por detrás é o método das curvas características [7]:

$$t' = t'(s) \quad (1.10)$$

$$x' = x'(s) \quad (1.11)$$

de tal maneira que,

$$\frac{\partial t'}{\partial s} = 1 \quad \frac{\partial x'}{\partial s} = (1 + u) \quad (1.12)$$

e conseguimos,

$$x' = (1 + u)s + cte \quad (1.13)$$

$$t' = s + cte' \quad (1.14)$$

Portanto se alguma função possuir o argumento $k \equiv x' - (1 + u)t' = cte - cte'$, que é independente de s , então,

$$\begin{aligned} f &= f(k) \\ \frac{df}{ds} &= \frac{\partial f}{\partial k} \frac{dk}{ds} = 0 \\ f = f(k) &= f(x' - (1 + u)t) \equiv u(x, t) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{df}{ds} = \frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial s} = 0 \quad (1.15)$$

o que implica,

$$u_t + (1 + u)u_x = 0 \quad (1.16)$$

portanto a solução da equação (1.8) é $u = u(x - (1 + u)t)$. O resultado é que para um tempo igual a zero temos uma solução bem comportada com decaimento no infinito, mas quando o tempo começa a avançar esta onda “quebra” de maneira a não termos mais uma função unívoca em todos os pontos. Um exemplo bastante comum é o das ondas do mar, que quebram quando se aproximam da costa. Este efeito ocorre basicamente pelo fato da velocidade de cada ponto da onda ser proporcional a sua altura, isso faz com que a crista caminhe com velocidade maior que o resto da onda

levando ao efeito da quebra. Isso fica evidente se notarmos que a velocidade da onda (1.16) é dada pelo termo $1 + u$, ou seja, a velocidade é proporcional a altura.

A equação de KdV é uma equação que combina estas duas características: não linearidade e dispersão, e então conseguimos a equação de KdV

$$u_t + (1 + u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.17)$$

Usando a reparametrização,

$$\begin{aligned} 1+u &\rightarrow \alpha u \\ t &\rightarrow \beta t \\ x &\rightarrow \gamma x \end{aligned} \quad (1.18)$$

a equação (1.17) fica

$$u_t + \frac{\alpha\beta}{\gamma}uu_x + \frac{\beta}{\gamma^3}u_{xxx} = 0 \quad (1.19)$$

reparametrizando novamente,

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \left(\frac{\beta}{\gamma^3}\right)^{\frac{1}{3}} x \\ t &\rightarrow -t \\ u &\rightarrow \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^{-1} \left(\frac{\beta}{\gamma^3}\right)^{\frac{1}{3}} u \end{aligned} \quad (1.20)$$

colocamos a equação (1.19) na seguinte forma,

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \quad (1.21)$$

O estudo das simetrias de equações diferenciais é muito importante, pois nos permite encontrar soluções e classificá-las. Em particular verificaremos a invariância da equação de KdV com respeito a uma transformação de Galileu.

$$x' = x + \varepsilon t \quad t' = t \quad u' = u - \varepsilon \quad (1.22)$$

e os operadores ficam

$$\partial_{t'} = -\varepsilon\partial_x + \partial_t \quad (1.23)$$

$$\partial_{x'} = \partial_x \quad (1.24)$$

portanto,

$$u'_{t'} = u'_{x'} + u'_{x'x'} \quad (1.25)$$

nos leva a,

$$(-\varepsilon \partial_x + \partial_t)(u - \varepsilon) = (u - \varepsilon) \partial_x(u - \varepsilon) + \partial_x^3(u - \varepsilon) \quad (1.26)$$

e novamente retornamos

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \quad (1.27)$$

Se conhecemos a solução em $t = 0^*$, usando a simetria de Galileu, conseguimos a solução para qualquer t , que para fins de cálculo é o mesmo que dizer que a função $u = u(x, t)$ depende só de x , ou seja $u = u(x)$. Então usando a regra da cadeia reduzimos a equação (1.27) a

$$c \partial_x u = u \partial_x u + \partial_x^3 u. \quad (1.28)$$

Analizando o comportamento da eq. (1.28) para um tempo fixo e igual a zero, podemos transforma-la em uma Equação Diferencial Ordinária,

$$c \frac{du(x)}{dx} = u(x) \frac{du(x)}{dx} + \frac{d^3 u(x)}{dx^3}, \quad (1.29)$$

que é facilmente integrável,

$$\int \frac{du}{u \sqrt{c - \frac{1}{3}u}} = \int dx \quad (1.30)$$

$$u(x) = 3c \sec h^2 \frac{\sqrt{c}}{2} x \quad (1.31)$$

e usando a invariância por transformação de Galileu, obtemos,

$$u(x, t) = 3c \sec h^2 \frac{\sqrt{c}}{2} (x + ct). \quad (1.32)$$

Ou seja, a existência de uma determinada simetria nos permitiu transformar uma EDP em uma EDO e conseqüentemente integrar a equação.

Esta equação tem as seguintes propriedades:

- (i) é localizada, $u \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \pm\infty$
- (ii) se move para a direita
- (iii) a amplitude é proporcional a velocidade
- (iv) a largura é inversamente proporcional à $\sqrt{c}$
- (v) a onda é não dispersiva

*Vale lembrar que o uso das simetrias de Galileu para inferir a evolução temporal de uma solução, vale, como acabamos de colocar, apenas para uma solução. Não é possível fazer isso para soluções de muitos sólitons, pois não é possível encontrar uma transformação de Galileu para o centro de massa de um sóliton, pois não existe sóliton parado, uma vez que sua velocidade é proporcional a sua amplitude.

Este é o sóliton visto por Scott Russel em 1834. e construído matematicamente por Kortweg e de Vries em 1895.

1.2 Modelos Integráveis (Segundo Liouville)

Como pudemos perceber, as simetrias da equação KdV, desempenharam um papel importante na integração. Veremos agora, de maneira mais formal, como as quantidades conservadas aparecem em um dado conjunto de equações, e o papel exercido por elas, em algumas propriedades do sistema.

1.2.1 Sistemas Hamiltonianos e a Curvatura Nula

Segundo o teorema de Liouville [2], um sistema hamiltoniano com n graus de liberdade nas variáveis q_i e p_i com $i = 1, \dots, n$ é integrável pelo método de quadratura se e somente se existir n quantidades conservadas em involução, ou seja, os parênteses de Poisson de suas quantidades conservadas é nulo; e existe uma transformação canônica do tipo $K_i = K_i(q_i, p_i) \equiv P_i$ e $\theta_i \equiv \theta_i(q_i, p_i)$ tal que $\{\theta_i, \theta_j\} = \{P_i, P_j\} = 0$ e $\{\theta_i, P_j\} = \delta_{ij}$ onde os θ_i são as n quantidades cíclicas do sistema, também conhecidas como variáveis de ângulo-ação. E então a hamiltoniana depende apenas dos P_i .

$$H = H(P_i) \quad (1.33)$$

e os parênteses de Poisson ficam,

$$\dot{P}_i = \{P_i, H(P_i)\} = \frac{\partial H}{\partial \theta_j} \{P_i, \theta_j\} = 0 \quad (1.34)$$

e então os P_i são constantes de movimento. Temos portanto que,

$$\dot{\theta}_i = \{\theta_i, H(P_j)\} = \frac{\partial H}{\partial P_j} \{\theta_i, P_j\} = \frac{\partial H}{\partial P_i} \equiv f_i(P_i) \quad (1.35)$$

e o sistema é facilmente integrável,

$$\theta_i = f_i t + \alpha_i \quad (1.36)$$

Portanto se estamos falando de um sistema hamiltoniano, o primeiro passo em direção a integração é verificar a existência de quantidades conservadas.

Não mostramos aqui, mas a equação de KdV é um sistema bi-hamiltoniano, ou seja, existem duas estruturas de Poisson e duas hamiltonianas independentes que geram a evolução temporal da variável canônica $u(x)$, e por ser um sistema contínuo

possue infinitos graus de liberdade[†]. Segundo o Teorema de Liouville, terá que possuir um número infinito de quantidades conservadas. Estas quantidades conservadas ficam evidentes quando introduzimos para a equação de KdV, a chamada equação de Lax [3], que na verdade é uma representação algébrica para esta equação, ou seja

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] \quad (1.37)$$

e para a escolha dos operadores

$$L = 4\partial^3 + \frac{1}{2}(u + u\partial) \quad e \quad M = \partial^2 + \frac{1}{6}u \quad (1.38)$$

reproduzimos a equação de KdV

$$u_t = uu_x + u_{xxx} \quad (1.39)$$

Fica evidente que o traço das potências de L são quantidades conservadas no tempo

$$\frac{dL^n}{dt} = [M, L^n] \quad (1.40)$$

e então,

$$\frac{d}{dt} \text{tr} L^n = \text{tr} [M, L^n] = 0 \quad (1.41)$$

onde o número de quantidades conservadas independentes é igual a dimensão da representação da álgebra, no caso infinita. Portanto, segundo o teorema de Liouville, a equação de KdV é integrável.

Neste ponto vamos introduzir a chamada equação de Zakharov Shabat [8]. Um dado sistema que possui uma representação em termos desta equação, como no caso da equação de Lax, necessariamente, como veremos mais adiante, possui quantidades conservadas associadas.

No caso de 1+1 dimensão a equação de Zakharov Shabat, também conhecida como equação de curvatura nula, é dada por,

$$F_{\mu\nu} = [\partial_\mu + A_\mu, \partial_\nu + A_\nu] = 0 \quad (1.42)$$

ou,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = 0 \quad \mu, \nu = 0, 1 \quad (1.43)$$

Percebemos aqui que a equação de Lax é um caso particular da equação de curvatura nula, e fazendo $A_1 \equiv L$ e $A_0 \equiv -M$ independentes de x , a equação de curvatura nula, equação (1.43) fica,

[†]Uma referência introdutória e didática pode ser encontrada em [5]

$$\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 + [A_0, A_1] = \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} - [M, L] = 0 \quad (1.44)$$

mas tanto L quanto M são independentes de x , portanto podemos concluir da equação (1.44) que,

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] \quad (1.45)$$

que é a equação de Lax.

Vamos mostrar agora que a equação de curvatura nula é invariante pela transformação de gauge,

$$A_\mu \rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \equiv a_\mu \quad (1.46)$$

ou seja, vamos definir,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + [a_\mu, a_\nu] \quad (1.47)$$

teremos então que:

$$\partial_\mu a_\nu = (\partial_\mu g) A_\nu g^{-1} + g (\partial_\mu A_\nu) g^{-1} - g A_\nu g^{-1} (\partial_\mu g) g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \partial_\nu g g^{-1} \quad (1.48)$$

onde usamos o fato de que,

$$\partial_\mu g^{-1} = -g^{-1} (\partial_\mu g) g^{-1} \quad (1.49)$$

e da mesma maneira procedemos para o cálculo de $\partial_\nu a_\mu$. Finalmente conseguimos,

$$\begin{aligned} \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu &= -\partial_\nu g g^{-1}, g A_\mu g^{-1} + g \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu g^{-1} + \\ &+ \partial_\mu g g^{-1}, g A_\nu g^{-1} + \partial_\nu g g^{-1}, \partial_\mu g g^{-1} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Calculando agora o comutador $[a_\mu, a_\nu]$, obtemos,

$$\begin{aligned} [a_\mu, a_\nu] &= g A_\mu, A_\nu g^{-1} - g A_\mu g^{-1}, \partial_\nu g g^{-1} - \\ &- \partial_\mu g g^{-1}, g A_\nu g^{-1} + \partial_\mu g g^{-1}, \partial_\nu g g^{-1} \end{aligned} \quad (1.51)$$

Fazendo a soma das equações (1.50) e equação (1.51) obtemos,

$$\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + [a_\mu, a_\nu] = g (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) g^{-1} \quad (1.52)$$

ou seja,

$$F_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu} g^{-1} \quad (1.53)$$

Veremos agora que o gauge eq.(1.46) nos leva a quantidades conservadas.

Suponha que exista um elemento do grupo $g \in G$ tal que transforme as matrizes A_μ em matrizes diagonais, ou seja $a_\mu \equiv$ matriz diagonal. Isso faz com que a equação (1.47) fique,

$$\partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + [a_\mu, a_\nu] = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu = 0 \quad (1.54)$$

e então podemos definir a corrente,

$$J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} a_\nu \quad \varepsilon^{01} = 1 \quad (1.55)$$

e conseguimos,

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 a_1 - \partial_1 a_0 = 0 \quad (1.56)$$

que nada mais é que a equação da continuidade em duas dimensões, onde a carga conservada é,

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 \quad (1.57)$$

onde o número de cargas conservadas é igual a dimensão das matrizes diagonais.

Veremos de maneira mais formal no segundo capítulo, que a condição $F_{\mu\nu} = 0$ é sempre uma lei de conservação em duas dimensões.

1.3 O Modelo de Fermi-Pasta-Ulam

Historicamente este modelo se deu em 1955, quando Fermi, Pasta e Ulam [20] fizeram simulações numéricas para estudar o comportamento de redes não lineares. O objetivo deles era saber como a energia se propagava de um nodo à outro. A rede era constituída por massas iguais ligadas por molas (não lineares) onde a lei de força era dada por,

$$F = -K \Delta (1 + \alpha \Delta) \quad (1.58)$$

onde temos $\Delta \equiv$ diferença entre os deslocamentos com relação a posição de equilíbrio, e α, K são constantes. Temos então que,

$$\Delta_{n+1} = y_n - y_{n-1} \quad (1.59)$$

com y_n sendo o deslocamento com relação a posição de equilíbrio. Com isso a força total é dada por,

$$F_{tot}(\Delta) = F_{n+1}(\Delta_{n+1}) - F_n(\Delta_n) \quad (1.60)$$

fazendo as substituições conforme as definições def.(1.59) e def.(??) obteremos,

$$F_{tot}(\Delta) = K(y_{n-1} + y_{n+1} - 2y_n) [1 + \alpha(y_{n+1} - y_{n-1})] \quad (1.61)$$

ou seja,

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = K(y_{n-1} + y_{n+1} - 2y_n) [1 + \alpha(y_{n+1} - y_{n-1})]. \quad (1.62)$$

Para um sistema de osciladores lineares acoplados, a energia inicial dada a um nodo de vibração permanece no mesmo nodo com o passar do tempo. Já em sistemas não lineares isso não ocorre. A motivação inicial para o estudo deste sistema era a de observar como a energia se distribuía de um nodo a outro com o passar do tempo. Esperava-se que depois de algum tempo a energia se distribuisse igualmente através dos nodos, mas observou-se que as condições iniciais repetiam-se aproximadamente. Isto era um indício de que haviam quantidades conservadas que restringiam o espaço de fase.

1.3.1 A Rede de Toda

Em 1967 o físico japonês Morikazu Toda observou que se a força da mola fosse proporcional a exponencial do deslocamento, o sistema poderia ser resolvido exatamente, ou seja,

$$F_n = \exp \Delta_n \quad (1.63)$$

com $\Delta_n = y_n - y_{n-1}$, onde F_n é a força sobre a partícula n . Com isso, para a rede indicada a baixo, podemos montar o seguinte sistema de equações diferenciais

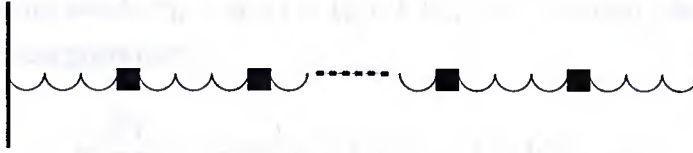


Figura 1.1: oscilador

acopladas, conforme as condições de contorno indicadas no desenho:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y_1}{dt^2} &= \exp(y_2 - y_1) \\ m \frac{d^2 y_2}{dt^2} &= \exp(y_3 - y_2) - \exp(y_2 - y_1) \\ &\vdots \\ m \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= \exp(y_{n+1} - y_n) - \exp(y_n - y_{n-1}) \\ m \frac{d^2 y_{n+1}}{dt^2} &= -\exp(y_{n+1} - y_n) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Utilizando a variável $\Delta_n = y_{n+1} - y_n$, podemos reescrever o sistema acoplado de equações como,

$$m \frac{d^2 \Delta_j}{dt^2} = - \sum_i M_{ji} \exp \Delta_i \quad (1.65)$$

onde $i = 1, \dots, \text{máx}j$, com isso obtemos,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

1.3.2 Construção das Soluções Exatas

Vamos avançar agora no sentido de construir as soluções exatas para o sistema e equações (1.64). As equações do sistema (1.64) podem ser reescritas em termos da variável $V(r)$ da seguinte maneira,

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = -V(r_{n-1}) + V(r_n) \quad (1.67)$$

redefinimos r_n como sendo $r_n = y_{n+1} - y_n$ e $V(r_n) = -a((\exp -br) - 1)$ e usando a equação (1.67) conseguiremos,

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = -2V(r_n) + V(r_{n+1}) + V(r_{n-1}). \quad (1.68)$$

Neste ponto fazemos mais uma mudança de variável,

$$\frac{d^2 S_n}{dt^2} \equiv \ddot{S}_n \equiv -V(r_n) \quad (1.69)$$

e a equação (1.68) fica,

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = 2\ddot{S}_n - \ddot{S}_n - \ddot{S}_n \quad (1.70)$$

e obtemos uma equação algébrica,

$$mr_n = 2S_n - S_{n+1} - S_{n-1} \quad (1.71)$$

Notemos que:

$$\ddot{S}_n \equiv -V(r_n) = a(\exp(-br) - 1) \quad (1.72)$$

e através desta equação,

$$r_n = -\frac{1}{b} \ln \left(\frac{1}{a} \ddot{S}_n + 1 \right) \quad (1.73)$$

e então, usando o resultado da equação (1.73), a equação (1.71) pode ser reescrita como,

$$-\frac{mr}{b} \ln \left(\frac{1}{a} \ddot{S}_n + 1 \right) = 2S_n - S_{n+1} - S_{n-1}. \quad (1.74)$$

Fazendo uma nova mudança de variável temos,

$$S_n \equiv \frac{m}{b} \ln \sigma_n \quad (1.75)$$

e a equação (1.71) pode ser novamente reescrita,

$$\ln \left(\frac{1}{a} \ddot{S}_n + 1 \right) = \ln \left(\frac{\sigma_{n+1} \sigma_{n-1}}{\sigma_n^2} \right) \quad (1.76)$$

Antes de voltarmos a equação (1.76) notemos que,

$$S_n = \frac{m}{b} \ln \sigma_n \quad (1.77)$$

e então

$$\dot{S}_n = \frac{m}{b} \frac{\dot{\sigma}_n}{\sigma_n} \quad (1.78)$$

$$\ddot{S}_n = \frac{m}{b} \left(\frac{\ddot{\sigma}_n}{\sigma_n} - \left(\frac{\dot{\sigma}_n}{\sigma_n} \right)^2 \right) \quad (1.79)$$

usando os resultados eq. (1.78) e eq. (1.79) a equação (1.76) fica,

$$\frac{m}{ab} \left(\ddot{\sigma}_n \sigma_n - \dot{\sigma}_n^2 \right) = \sigma_{n+1} \sigma_{n-1} - \sigma_n^2 \quad (1.80)$$

que é conhecida como equação de Hirota.

Podemos verificar que $\sigma_n = 1$ é solução. Propomos um ansatz para σ na forma de expansão em um parâmetro ε

$$\sigma_n = 1 + \varepsilon \exp 2(kn - \beta t + \delta) + o(\varepsilon^2) \quad (1.81)$$

onde k e β e δ são constantes e n indica a posição do oscilador. Substituindo a equação (1.81) na equação (1.80) e coletando as potências em ε obtemos:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^0 &\rightarrow 0 = 1 - 1 \\
\varepsilon^1 &\rightarrow \beta = \pm \left(\frac{ab}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh k \\
\varepsilon^2 &\rightarrow 0 = 0
\end{aligned} \tag{1.82}$$

onde truncamos a (1.81) em primeira ordem.

Pode-se verificar que a equação de Hirota é trivialmente satisfeita em todas as ordens acima da segunda se truncarmos σ na primeira ordem. Truncando a solução (1.81) em primeira ordem obteremos a solução,

$$\sigma_n = 1 + \varepsilon \exp 2(kn - \beta t + \delta) \tag{1.83}$$

para qualquer k e δ onde $\beta = \pm \left(\frac{ab}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh k$.

Voltando as variáveis originais a solução pode ser escrita como:

$$y_n = \frac{1}{b} \ln \frac{1 + \exp 2[k(n-1) - \beta t + \delta]}{1 + \exp 2(kn - \beta t + \delta)} \tag{1.84}$$

com comportamento assintótico,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\frac{2k}{b} \tag{1.85}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} y_n = 0 \tag{1.86}$$

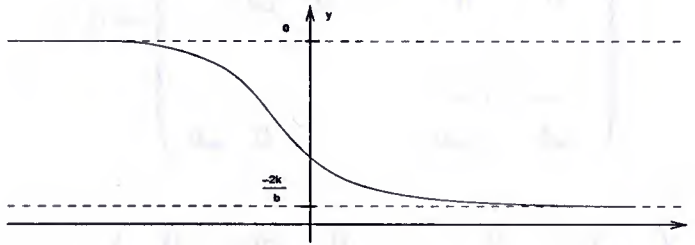


Figura 1.2: olaola

Ou seja, a consideração de Hirota não apenas nos permitiu resolver exatamente o sistema, mas nos permitiu também encontrar sólitos se propagando na rede. Queremos fazer uma mudança de variável a fim de reescrever a equação de movimento eq. (1.67) em termos operatoriais. Sejam as transformações:

$$\begin{aligned}
t &\rightarrow \sqrt{\frac{m}{ab}} t \\
y_n &\rightarrow \frac{1}{b} q_n
\end{aligned} \tag{1.87}$$

e a equação (1.67) fica,

$$\ddot{q}_n = \exp - (q_n - q_{n-1}) - \exp - (q_{n+1} - q_n) \equiv \frac{dp_n}{dt} \quad (1.88)$$

definimos $p_n \equiv \dot{q}_n$.

Definimos as novas quantidades,

$$a_n = \frac{1}{2} \exp - \frac{1}{2} (q_{n+1} - q_n) \quad (1.89)$$

$$b_n = \frac{1}{2} p_n \quad (1.90)$$

e então conseguimos escrever as equações,

$$\frac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) \quad (1.91)$$

$$\frac{da_n}{dt} = 2(b_n - b_{n+1}) \quad (1.92)$$

estas equações nada mais são do que a equação (1.67) redefinida em termos das variáveis a_n e b_n . E as equações (1.91) e (1.92) podem ser reescritas como,

$$\frac{dL}{dt} = [M, L] \quad (1.93)$$

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & . & . & 0 & a_n \\ a_1 & b_2 & a_2 & . & . & 0 & 0 \\ & a_2 & b_3 & . & . & 0 & 0 \\ . & & & & & & . \\ . & & & & b_{n-1} & a_{n-1} & \\ a_n & 0 & . & . & . & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & . & . & 0 & a_n \\ a_1 & 0 & -a_2 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & -a_{n-1} \\ -a_n & 0 & . & . & . & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

Como já vimos anteriormente, uma das consequências disso é,

$$\frac{dL^n}{dt} = [M, L^n] \quad (1.96)$$

então,

$$\frac{d}{dt} \text{tr} L^n = \text{tr} [M, L^n] = 0 \quad (1.97)$$

ou seja, o traço das potências de L^n são quantidades conservadas no tempo.

Como estamos falando, até agora, de sistemas bidimensionais, vale apenas lembrar que a existência de curvatura nula para um dado sistema bidimensional é critério de integrabilidade. Uma vez encontrada a curvatura nula para um dado sistema, existem procedimentos para encontrar a solução analítica das equações como o Método de Dressing, o Espalhamento Inverso e alguns outros.

1.3.3 O Modelo de Sine-Gordon

Finalmente chegamos ao ponto onde definimos o modelo de Sine-Gordon. Considere então a equação (1.88) para $n = 2$ com, q_0, q_1 sendo as variáveis, com a escolha $q_2 = q_0$, e $q_{-1} = q_1$, que é o caso periódico com duas partículas. Então as equações de movimento ficam:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_0 &= \exp(-(q_0 - q_1)) - \exp(-(q_1 - q_0)) \\ \ddot{q}_1 &= \exp(-(q_1 - q_0)) - \exp(-(q_0 - q_1)) \end{aligned} \quad (1.98)$$

subtraindo uma da outra teremos,

$$\frac{d^2}{dt^2} (q_0 - q_1) = 2 [\exp(-(q_0 - q_1)) - \exp(-(q_1 - q_0))] \quad (1.99)$$

somando as duas obtemos,

$$\frac{d^2}{dt^2} (q_0 + q_1) = 0 \quad (1.100)$$

portanto a dinâmica é dada por $q_0 - q_1$. Redefinindo as variáveis $q \equiv i(q_0 - q_1)$, teremos, $-iq = 2[\exp -iq - \exp +iq]$ e então,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = 4 \sin q \quad (1.101)$$

Generalizando a equação (1.101) para duas dimensões e passando o sistema das variáveis discretas (q_0, q_1) para o campo contínuo $\phi(x, t)$, conseguimos a equação,

$$\square \phi(x, t) + \frac{m}{\beta} \sin \beta \phi(x, t) = 0 \quad (1.102)$$

que é conhecida como equação de Sine-Gordon, onde,

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (1.103)$$

A equação (1.102) pode também ser obtida da seguinte Lagrangiana,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{2m^2}{\beta^2} \sin^2 \left(\frac{\beta \phi}{2} \right) \quad (1.104)$$

onde o potencial é $V(\phi) = \frac{2m^2}{\beta^2} \sin^2 \left(\frac{\beta \phi}{2} \right)$. Analogamente a introdução das matrizes (1.94) e (1.95), para o caso contínuo introduziremos os seguintes potenciais,

$$A_0 = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} \frac{i\beta}{m} \partial_1 \phi & \exp \frac{1}{2} i\beta \phi + \frac{1}{\lambda} \exp -\frac{1}{2} i\beta \phi \\ \exp \frac{1}{2} i\beta \phi + \lambda \exp -\frac{1}{2} i\beta \phi & -\frac{i\beta}{m} \partial_1 \phi \end{pmatrix} \quad (1.105)$$

$$A_1 = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} \frac{i\beta}{m} \partial_0 \phi & \exp \frac{1}{2} i\beta \phi - \frac{1}{\lambda} \exp -\frac{1}{2} i\beta \phi \\ -\exp \frac{1}{2} i\beta \phi + \lambda \exp -\frac{1}{2} i\beta \phi & -\frac{i\beta}{m} \partial_0 \phi \end{pmatrix} \quad (1.106)$$

onde λ é conhecido como sendo o parâmetro espectral.

Pode-se verificar através da equação de curvatura nula,

$$\partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 + [A_0, A_1] = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(x, t) + \frac{m}{\beta} \sin \beta \phi(x, t) = 0 \quad (1.107)$$

portanto o modelo de Sine Gordon possui uma representação em termos de curvatura nula, e enfim possui toda a estrutura que já discutimos.

1.4 O Modelo Sine-Gordon e as Soluções tipo Sólitons

Agora que já adquirimos alguma familiaridade com os modelos integráveis e alguns aspectos de sua estrutura, veremos como soluções tipo sóliton ocorrem em tais modelos. Usaremos para tal finalidade o modelo de Sine-Gordon que acabamos de estudar. Veremos que as soluções solitônicas são as que minimizam a energia do sistema. A solução solitônica do modelo de Sine-Gordon, pode ser visualizada, para o caso discreto, na eq.(1.2).

Como vimos na seção anterior, o modelo de Sine-Gordon pode ser construído a partir de uma rede de osciladores, e generalizado para o caso contínuo, ou através de uma dada Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial \phi)^2 + \frac{\mu^2}{\beta^2} (\cos(\beta \phi) - 1) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{2\mu^2}{\beta^2} \left(\sin\left(\frac{1}{2} \beta \phi\right) \right)^2 \equiv T - V \quad (1.108)$$

e então

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{\mu^2}{\beta^2} \text{sen}(\beta\phi)\beta = -\frac{\mu^2}{\beta} \text{sen}\beta\phi \quad (1.109)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 \phi \quad (1.110)$$

e a equação de movimento fica

$$\partial^2 \phi + \frac{\mu^2}{\beta} \text{sen}(\beta\phi) = 0 \quad (1.111)$$

e o potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{2\mu^2}{\beta^2} \left(\text{sen} \frac{\beta\phi}{2} \right)^2 \quad (1.112)$$

e os vácuos são

$$V(\phi) = 0 \Rightarrow \text{sen} \frac{\beta\phi}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\beta\phi}{2} = n\pi \quad (1.113)$$

ou então

$$\phi = \frac{2n\pi}{\beta} \quad (1.114)$$

e o potencial é invariante por simetria

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{2n\pi}{\beta} \quad (1.115)$$

e é fácil perceber que é invariante por:

$$\phi \rightarrow -\phi \quad (1.116)$$

Linearizando a equação (3.7) conseguimos,

$$\partial^2 \phi + \mu^2 \phi = 0 \quad (1.117)$$

e o termo de massa é dado por,

$$m = \mu\hbar \quad (1.118)$$

Onde as excitações quânticas do campo ϕ correspondem a partículas de massa m

1.5 Segundo Tipo de Partícula

Para que a energia seja finita o campo deverá ir para zero no infinito, ou seja,

$$\phi(x) \rightarrow \frac{2n\pi}{\beta} \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (1.119)$$

A energia associada ao sistema é dada por

$$E = \frac{1}{2\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\dot{\sigma}^2 + \sigma'^2 + (2\mu \text{sen} \frac{\sigma}{2})^2] \quad (1.120)$$

sendo que, $\sigma = \beta\phi$ e o integrando pode ser rearranjado da seguinte maneira

$$\dot{\sigma}^2 + (2\mu \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2})^2 = (\dot{\sigma} \pm 2\mu \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2})^2 \mp 4\dot{\sigma} \mu \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2} \quad (1.121)$$

e a energia fica,

$$E = \frac{1}{2\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\dot{\sigma}^2 + (\dot{\sigma} \pm 2\mu \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2})^2 \mp 4\dot{\sigma} \mu \operatorname{sen} \frac{\sigma}{2}] \quad (1.122)$$

onde $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dx}$.

Sabendo que o termo quadrático na equação (1.122) é responsável por sempre adicionar energia, temos como verdade a seguinte inequação

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\dot{\sigma}^2 + (\dot{\sigma} \pm 2\mu \sin \frac{\sigma}{2})^2 \mp 4\dot{\sigma} \mu \sin \frac{\sigma}{2}] \geq \\ &\geq \left| \frac{2\mu}{\beta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \dot{\sigma} \sin \frac{\sigma}{2} \right| = \\ &= \left| \frac{2\mu}{\beta^2} \int_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(+\infty)} d\sigma \sin \frac{\sigma}{2} \right| = \left| \frac{4\mu}{\beta^2} \cos \frac{\sigma}{2} \right|_{\sigma(-\infty)=0}^{\sigma(+\infty)=2\pi} = \frac{8\mu}{\beta^2} \end{aligned}$$

e concluímos que,

$$E \geq \frac{8\mu}{\beta^2} \quad (1.124)$$

e a energia é minimizada quando $\dot{\sigma} = 0$ e $\dot{\sigma} = \mp 2\mu \sin \frac{\sigma}{2}$. Estes dois pares de equações diferenciais implicam diretamente na equação de Sine-Gordon, e são conhecidas como setor auto-dual. Ou seja, elas constituem um subconjunto de soluções da equação de Sine-Gordon que minimizam a energia. Ou seja,

$$\sigma = 0$$

$$\Rightarrow \partial^2 \phi = \frac{\mu}{\beta} \sin \beta\phi$$

$$\dot{\sigma} = \pm 2\mu \sin \frac{\sigma}{2}$$

e então,

$$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \ddot{\sigma} = 0 \Rightarrow \partial^0 \partial_0 \sigma = 0 \quad (1.125)$$

onde $\sigma = \beta\phi$, portanto

$$\beta \partial^0 \partial_0 \phi = 0 \quad (1.126)$$

e conseguimos,

$$\beta \partial_1 \phi = \pm 2\mu \sin \frac{\beta\phi}{2} \quad (1.127)$$

e então

$$\beta \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \pm 2\mu \cos \frac{\beta\phi}{2} \left(\frac{\beta}{2} \right) \frac{d\phi}{dx} = \pm \mu \beta \cos \frac{\beta\phi}{2} \frac{d\phi}{dx} \quad (1.128)$$

sabendo que,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{2\mu}{\beta} \sin \frac{\beta\phi}{2} \quad (1.129)$$

e então conseguimos

$$\beta \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 2\mu^2 \cos \frac{\beta \phi}{2} \sin \frac{\beta \phi}{2} \quad (1.130)$$

subtraindo a equação (1.126) e a equação (1.130) conseguimos,

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} - \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{2\mu^2}{\beta} \cos \frac{\beta \phi}{2} \sin \frac{\beta \phi}{2} = \frac{\mu^2}{\beta} \sin \beta \phi \quad (1.131)$$

ou seja

$$\square \phi = \frac{\mu^2}{\beta} \sin \beta \phi \quad (1.132)$$

portanto, o setor auto dual, $\dot{\sigma} = 0$ e $\dot{\sigma} = \pm 2\mu \sin \frac{\sigma}{2}$, que é o responsável por minimizar a energia, implica diretamente na equação de Sine-Gordon, que por sua vez possui solução solitonica,

$$\phi = \pm \frac{4}{\beta} \arctan \left(e^{\frac{m(x-vt-x_0)}{\sqrt{1-v^2}}} \right) \quad (1.133)$$

Portanto, neste caso, sóltons são as excitações de menor energia da rede.

Para a solução de um sólton podemos tomar um referencial de Lorentz onde a solução é estática. A energia da solução neste referencial pode ser interpretada como a massa do sólton. E a massa é dada por,

$$M_{sol} = \frac{8m}{\beta^2} \quad (1.134)$$

Capítulo 2

Integrabilidade em Dimensão Maior que Dois

2.1 A Curvatura Nula é Uma Lei de Conservação

Antes de iniciarmos os estudos em dimensão maior que dois vamos fundamentar um pouco mais o formalismo em dimensão igual a dois.

Nas seções anteriores, vimos de maneira informal e um tanto desconexa alguns resultados ligando curvatura nula e quantidades conservadas. Iniciaremos esta seção mostrando, de maneira mais formal, que a curvatura nula $F_{\mu\nu} = 0$ é uma lei de conservação em duas dimensões.

Considere uma curva c parametrizada por σ . Seja $w = w(x^\mu)$ onde $x^\mu = x^\mu(\sigma)$. Tal curva satisfaz a seguinte equação diferencial,

$$\frac{dw}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} w = 0 \quad (2.1)$$

onde A_μ é um elemento da álgebra associada, e w não necessariamente comuta com A_μ . A solução desta equação é dada pela exponencial ordenada no caminho,

$$w = P \exp \left[- \int_c d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right] \quad (2.2)$$

que conseguimos da seguinte maneira,

$$\frac{dw}{d\sigma} = -A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} w \quad (2.3)$$

e então

$$\begin{aligned} w(\sigma + d\sigma) - w(\sigma) &= -A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} w(\sigma) d\sigma \\ w(\sigma + d\sigma) &= (1 - A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma) w(\sigma) \end{aligned} \quad (2.4)$$

e em primeira ordem temos,

$$w(\sigma + d\sigma) = \exp \left(-A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma \right) w(\sigma) \quad (2.5)$$

portanto podemos dividir um dado cominho σ em vários deltas. Somando sobre os deltas obtemos $w(\sigma)$ calculado sobre o caminho, ou seja,

$$\begin{aligned} w(n\Delta\sigma) &= \left(1 - A_\mu[(n-1)\Delta\sigma] \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma\right) \left(1 - A_\mu[(n-2)\Delta\sigma] \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma\right) \dots \\ &\dots \left(1 - A_\mu[0] \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

que em primeira ordem, e fazendo,

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} w(n\Delta\sigma) = w(\sigma) \quad (2.7)$$

obtemos,

$$\begin{aligned} w(\sigma) &= \exp\left(-A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma_{n-1}\right) \exp\left(-A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma_{n-2}\right) \dots \\ &\dots \exp\left(-A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma\right) \equiv P \exp\left[-\int_c d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma}\right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Uma outra maneira de conseguir esta solução é verificar que,

$$\begin{aligned} w(\sigma) &= 1 - \int_0^\sigma d\sigma_1 A_\mu(\sigma_1) \frac{dx^\mu}{d\sigma_1} + \int_0^\sigma d\sigma_1 A_\mu(\sigma_1) \frac{dx^\mu}{d\sigma_1} \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 A_\mu(\sigma_2) \frac{dx^\mu}{d\sigma_2} + \dots \\ \frac{dw}{d\sigma} &= -A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \left(1 - \int_0^\sigma d\sigma_1 A_\mu(\sigma_1) \frac{dx^\mu}{d\sigma_1} + \int_0^\sigma d\sigma_1 A_\mu(\sigma_1) \frac{dx^\mu}{d\sigma_1} \int_0^{\sigma_1} d\sigma_2 A_\mu(\sigma_2) \frac{dx^\mu}{d\sigma_2} + \dots\right) \\ &\Rightarrow \\ \frac{dw}{d\sigma} &= -A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} w \end{aligned} \quad (2.9)$$

Neste momento vamos calcular a variação funcional de $w(\sigma)$. Para tanto usaremos a equação que o define, eq.(2.2), e então,

$$\frac{d}{d\sigma} \delta w + \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) w + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta w = 0 \quad (2.10)$$

devemos atentar para o fato de que,

$$\frac{dw^{-1}}{d\sigma} = w^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \quad (2.11)$$

que é facilmente obtida fazendo uso da eq.(2.6) e atentando para o fato de que $ww^{-1} = 1$, portanto deverá existir uma mudança no ordenamento, e consequentemente no sinal dos argumentos das exponenciais da equação (2.6).

Da equação (2.11) obtemos que,

$$\frac{dw^{-1}}{d\sigma} = -w^{-1} \frac{dw}{d\sigma} w^{-1} \quad (2.12)$$

Multiplicando a equação (2.61) pela esquerda por w^{-1} , conseguimos,

$$w^{-1} \frac{d}{d\sigma} \delta w + w^{-1} \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) w + w^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta w = 0 \quad (2.13)$$

fazendo uso da equação (2.11) colocamos a eq.(2.13) na seguinte forma,

$$\frac{d}{d\sigma} (w^{-1} \delta w) = -w^{-1} \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) w \quad (2.14)$$

onde a condição de contorno a ser tomada é,

$$\delta x^\mu(0) = 0 \quad (2.15)$$

Integrando a equação (2.14) obtemos,

$$w^{-1} = - \int_0^\sigma w^{-1} \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) w d\sigma \quad (2.16)$$

sabendo que $A_\mu = A_\mu(x^\mu)$ e $x^\mu = x^\mu(\sigma)$, obtemos para a diferencial funcional,

$$\delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right) = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} + A_\mu \frac{d}{d\sigma} \delta x^\mu \quad (2.17)$$

e a equação (2.16) fica,

$$w^{-1} \delta w = - \int_0^\sigma d\sigma' w^{-1} \left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} + A_\mu \frac{d}{d\sigma'} \delta x^\mu \right] w \quad (2.18)$$

$$= - \int_0^\sigma d\sigma' \left[w^{-1} \partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} w + w^{-1} A_\mu \frac{d}{d\sigma'} \delta x^\mu w \right] \quad (2.19)$$

vamos adicionar e subtrair o mesmo termo abaixo da equação (2.18),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} (w^{-1} A_\mu \delta x^\mu w) &= \frac{dw^{-1}}{d\sigma} A_\mu \delta x^\mu w + w^{-1} \partial_\lambda A_\mu \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \delta x^\mu w + \\ &+ w^{-1} A_\mu \delta x^\mu \frac{dw}{d\sigma} + w^{-1} A_\mu \frac{d}{d\sigma} \delta x^\mu \end{aligned} \quad (2.20)$$

e a equação (2.18) fica,

$$\begin{aligned} w^{-1} \delta w &= - \int_0^\sigma d\sigma' \left[w^{-1} \partial_\lambda A_\mu \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} w + \frac{d}{d\sigma'} (w^{-1} A_\mu \delta x^\mu w) - \right. \\ &\left. - \frac{dw^{-1}}{d\sigma'} A_\mu \delta x^\mu w - w^{-1} \partial_\lambda A_\mu \frac{dx^\lambda}{d\sigma'} \delta x^\mu w - w^{-1} A_\mu \delta x^\mu \frac{dw}{d\sigma'} \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

usando o resultado já conhecido abaixo,

$$\begin{aligned} - \frac{dw^{-1}}{d\sigma} A_\mu \delta x^\mu w &= -w^{-1} \left(A_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\sigma} A_\mu \delta x^\mu \right) w \\ - w^{-1} A_\mu \delta x^\mu \frac{dw}{d\sigma} &= w^{-1} \left(A_\mu \delta x^\mu A_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \right) w \end{aligned} \quad (2.22)$$

a equação (2.21) fica,

$$w^{-1}\delta w(\sigma) = -w^{-1}A_\mu\delta x^\mu(\sigma)w - \int_0^\sigma d\sigma' [w^{-1}\partial_\lambda A_\mu\delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma'} w - w^{-1}\left(A_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\sigma'} A_\mu\delta x^\mu\right) w - w^{-1}\partial_\lambda A_\mu \frac{dx^\lambda}{d\sigma'} \delta x^\mu w + w^{-1}\left(A_\mu\delta x^\mu A_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\sigma'}\right) w] \quad (2.23)$$

que é o mesmo que,

$$w^{-1}\delta w(\sigma) = -w^{-1}A_\mu\delta x^\mu(\sigma)w - \int_0^\sigma d\sigma' w^{-1} \overbrace{\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda + [A_\lambda, A_\mu]}^{F_{\lambda\mu}} \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\lambda w \quad (2.24)$$

ou seja,

$$w^{-1}\delta w(\sigma) = -w^{-1}A_\mu\delta x^\mu(\sigma)w - \int_0^\sigma d\sigma' w^{-1} F_{\lambda\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\lambda w \quad (2.25)$$

Vamos considerar o ponto $\sigma = 2\pi$ como fixo, isso implica que $\delta x^\lambda(2\pi) = 0$, e a equação (2.25) fica,

$$w^{-1}\delta w(2\pi) = \int_0^{2\pi} d\sigma w^{-1} F_{\nu\lambda} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\lambda w \quad (2.26)$$

Estavamos anteriormente considerando curvas parametrizadas por σ onde $\delta w(\sigma)$ era a variação funcional de uma dada curva em outras possíveis curvas com pontos extremos fixos. O que faremos agora é unir os pontos extremos de maneira a formar um loop iniciando e terminando em x_0 , e desta maneira vamos considerar a variação funcional δw como a variação de um loop em outro, onde cada um destes loop agora serão parametrizados por τ , de tal maneira que.

$$\delta \rightarrow \delta\tau \frac{d}{d\tau} \quad (2.27)$$

sendo $\tau = 0$ corresponde a um loop infinitesimal em torno de x_0 e $\tau = 2\pi$ Com o uso da relação eq.(2.27) podemos reescrever a equação (2.26) como,

$$\frac{d}{d\tau} w(2\pi) - w(2\pi) \int_0^{2\pi} d\sigma w^{-1} F_{\nu\lambda} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\tau} w = 0 \quad (2.28)$$

Usando o mesmo método usado para resolver a equação (2.2), teremos,

$$w(\sigma) = \exp \int_\Pi d\tau d\sigma w^{-1} F_{\nu\lambda} w \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \quad (2.29)$$

onde Π indica a superfície considerada. Portanto concluímos que,

$$\exp \int_\Pi d\tau d\sigma w^{-1} F_{\nu\lambda} w \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = P \exp \left[- \int_c d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right] \quad (2.30)$$

onde P indicam ordenamento no caminho e na superfície respectivamente. Ou seja, a integral ordenada sobre o caminho c está ligada com a integral ordenada sobre a superfície Π através da relação eq.(2.30). Vejamos agora como surgem as leis de conservação.

A equação de curvatura nula (1.43), diz que em duas dimensões, $F_{\mu\nu} = 0$, $\mu, \nu = 0, 1$. Portanto através da equação (2.26) concluímos que $\delta w = 0$, e obtemos independência no caminho,

$$F_{\mu\nu} = 0 \rightarrow \delta w(2\pi) = 0 \quad (2.31)$$

Portanto para $F_{\mu\nu} = 0$ implica que independente do loop que fizermos, o valor da integral sobre o loop é o mesmo, portanto podemos fazer um loop infinitesimal que corresponderá a $w(x_0)$ calculado no ponto x_0 . Tomemos agora o seguinte contorno abaixo,

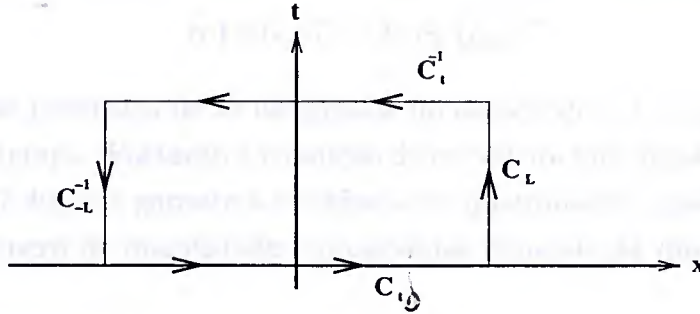


Figura 2.1: loop

Tomando $x_0 = (-L, 0)$ e $w(x_0) = 1$. Notemos que

$$w(\sigma) = \exp\left(-A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma_{n-1}} d\sigma_{n-1}\right) \exp\left(-A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma_{n-2}} d\sigma_{n-2}\right) \dots \exp\left(-A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma\right) \quad (2.32)$$

$$w(\sigma^{-1}) = \exp\left(+A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} d\sigma\right) \dots \exp\left(+A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma_{n-2}} d\sigma_{n-2}\right) \exp\left(+A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma_{n-1}} d\sigma_{n-1}\right) \quad (2.33)$$

o sinal dos argumentos da equação (2.33) mudam pois dx^μ está no sentido oposto, e temos então que,

$$w(\sigma) w(\sigma^{-1}) = 1 \Rightarrow w^{-1}(\sigma) = w(\sigma^{-1}) \quad (2.34)$$

e para a integral sobre o contorno acima temos que,

$$w(c_{-L}^{-1}) w(c_t^{-1}) w(c_L) w(c_{t_0}) = 1$$

ou,

$$w^{-1}(c_{-L})w^{-1}(c_t)w(c_L)w(c_{t_0}) = 1 \quad (2.37)$$

ou,

$$w(c_L)w(c_{t_0}) = w(c_t)w(c_{-L}) \quad (2.38)$$

e então,

$$w(c_t) = w(c_L)w(c_{t_0})w^{-1}(c_{-L}) \quad (2.39)$$

e impondo a condição de contorno periódica,

$$A_t(-L, t) = A_t(L, t) \quad (2.40)$$

conseguimos,

$$w(c_L) = w(c_{-L}) \quad (2.41)$$

usando a condição eq.(2.41) na equação (2.38) encontramos a seguinte relação,

$$\text{tr}(w(c_t))^n = \text{tr}(w(c_{t_0}))^n \quad (2.42)$$

ou seja, traço de potências de w integrados no espaço de $-L$ a L são quantidades conservadas no tempo. Portanto a condição de curvatura nula mais a condição de periodicidade eq.(2.40) nos garante a existência de quantidades conservadas eq.(2.42), sendo que o número de quantidades conservadas depende da dimensão da álgebra onde vive A_μ .

Tomando o seguinte gauge,

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \quad (2.43)$$

podemos conseguir para a equação (2.2) a lei de transformação para o w ,

$$\begin{aligned} & \frac{dw'}{d\sigma} + A'_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} w' = \\ &= \frac{dw'}{d\sigma} + (gA_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1}) \frac{dx^\mu}{d\sigma} w' \\ &= \frac{dw'}{d\sigma} + gA_\mu g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} w' - \partial_\mu g g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} w' \\ &= g \left\{ g^{-1} \frac{dw'}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} g^{-1} w' - g^{-1} \partial_\mu g g^{-1} w' \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right\} \\ &= g \left\{ \frac{d}{d\sigma} (g^{-1} w') + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} (g^{-1} w') \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

onde usamos as seguintes relações,

$$\frac{d}{d\sigma} g^{-1} = \frac{\partial g^{-1}}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\sigma} = -g^{-1} (\partial_\mu g) g^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \quad (2.45)$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} (g^{-1}w) &= g^{-1} \frac{dw}{d\sigma} + \frac{dg^{-1}}{d\sigma} w = g^{-1} \\ \frac{dw}{d\sigma} + A_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} w &= g \left\{ \frac{d}{d\sigma} (g^{-1}w) + A_{\mu} \frac{dx^{\mu}}{d\sigma} (g^{-1}w) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

portanto $g^{-1}w$ satisfaz a mesma equação que w .

Seja um $\bar{g}$ independente de σ . Multiplicamos a equação (2.2) pela direita por $\bar{g}$, e conseguimos,

$$w' = gw\bar{g}^{-1} \quad (2.48)$$

Considere as duas curvas unidas abaixo,

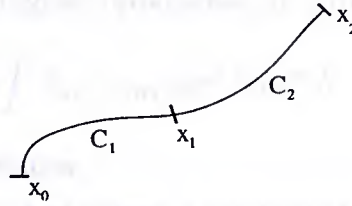


Figura 2.2: curva

Temos que,

$$\begin{aligned} w(c_1) &\rightarrow g(x_1)w(c_1)\bar{g}_1^{-1} \\ w(c_2) &\rightarrow g(x_2)w(c_2)\bar{g}_2^{-1} \\ w(c) &\rightarrow g(x_2)w(c)\bar{g}^{-1} \end{aligned} \quad (2.49)$$

sabendo que,

$$w(c) = w(c_2)w(c_1) \quad (2.50)$$

que implica,

$$\bar{g}_2 = g(x_1) \quad (2.51)$$

e um dado w se transforma como,

$$w \rightarrow g(x_1)wg^{-1}(x_0) \quad (2.52)$$

mas unindo os pontos em um loop teremos,

$$w \rightarrow g(x_0)wg^{-1}(x_0) \quad (2.53)$$

e portanto trw^n é invariante de gauge.

2.2 Modelos Integráveis em Dimensão Maior que Dois

2.2.1 Integrabilidade em Dimensão Maior que Dois

Agora, de posse das principais idéias e resultados envolvendo sistemas integráveis em duas dimensões, partiremos para a generalização em qualquer dimensão [18].

A idéia é utilizar o fato de que a curvatura nula é condição suficiente para que a integral ordenada no caminho,

$$P \exp \left[\int_c d\sigma A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} \right], \quad (2.54)$$

seja independente do caminho, neste caso em 2 dimensões, onde P indica ordenamento na integração.

Em um espaço tempo de dimensão $(d+1)$ queremos construir a curvatura nula como a condição para que integrais ordenadas em superfícies de dimensão d ,

$$P \exp \left[\int A_{\mu_1, \dots, \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d} \right] \quad (2.55)$$

sejam independentes da varredura.

Da mesma maneira que introduzimos a quantidade,

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0, \quad (2.56)$$

que definia um dado caminho em uma superfície bidimensional, introduziremos uma outra quantidade, que da mesma maneira define um caminho qualquer, mas agora sobre uma superfície d -dimensional. Primeiramente consideraremos o caso em $(2+1)$ dimensões. Para isso faz-se necessário introduzir um tensor antissimétrico $B_{\mu\nu}$, que não necessariamente é obtido da conexão A_μ , como foi feito com $F_{\mu\nu}$ utilizando a equação (2.56).

Seja uma quantidade V satisfazendo a seguinte equação:

$$\frac{dV}{d\tau} - VT_{2\pi} = 0, \quad (2.57)$$

que define um caminho sobre uma superfície 2-dimensional Σ de borda Γ , onde

$$T_{2\pi}(B, A, \tau) = \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (2.58)$$

e

$$W(\sigma) = P \exp \int_{\Sigma} d\tau d\sigma W^{-1} F_{\mu\lambda} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \quad (2.59)$$

Para que V independa da varredura, precisamos primeiramente impor que $F_{\mu\nu} = 0$, pois V depende de W , e para que W independa da varredura, temos que impor $F_{\mu\nu} = 0$

Variando a superfície Σ e mantendo a borda Γ fixa veremos como V varia. Variando a eq.(2.57) conseguimos,

$$\frac{d\delta V}{d\tau} - \delta V T - V \delta T = 0, \quad (2.60)$$

$$\frac{d\delta V}{d\tau} V^{-1} - \delta V T V^{-1} - V \delta T V^{-1} = 0, \quad (2.61)$$

sabendo que,

$$\frac{d(VV^{-1})}{d\tau} = 0, \quad (2.62)$$

usando a eq.(2.57), obtemos

$$\frac{dV^{-1}}{d\tau} - T V^{-1} = 0, \quad (2.63)$$

e a eq.(2.61), fica

$$\frac{d\delta V}{d\tau} V^{-1} + \delta V \frac{dV^{-1}}{d\tau} - V \delta T V^{-1}. \quad (2.64)$$

$$\Rightarrow \quad (2.65)$$

$$\frac{d}{d\tau} (\delta V V^{-1}) = V \delta T V^{-1}. \quad (2.66)$$

$$\delta V V^{-1} = \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1}. \quad (2.67)$$

e então

$$\begin{aligned} \delta V V^{-1} &= \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1} = V(\tau) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V(\tau)^{-1} + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V(\tau) \left(W^{-1} D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} \right) W \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \delta x^\lambda - \\ &- \left[\int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}(\sigma') B_{\rho\nu} W(\sigma') \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau}, W^{-1} B_{\mu\nu} W \right] \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu V(\tau)^{-1} \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde esta última passagem pode ser encontrada no apêndice C

Note que se fizermos $\tau = 2\pi$ e usar a condição de contorno $\delta x^\nu(2\pi) = 0$, o primeiro termo da equação(2.68) irá desaparecer.

Podemos agora escanear o volume Ω definido por $V(\tau)$, com superfícies parametrizadas por ξ , sendo assim posso fazer $\delta \equiv d\xi \frac{d}{d\xi}$, e a eq.(2.68) fica

$$\begin{aligned} \frac{dV_c}{d\xi} V_c^{-1} &= \int_0^{2\pi} d\tau V(\tau) \left[\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} \{D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}\} W \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\xi} \right] V(\tau) \\ &- \int_0^{2\pi} d\tau V(\tau) \left[\int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}(\sigma') B_{\rho\nu} W(\sigma') \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \int_0^{2\pi} d\sigma W(\sigma)^{-1} B_{\mu\nu} W(\sigma) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\xi} \right] V \end{aligned}$$

e finalmente

$$\frac{dV_c}{d\xi} - \left(\int_0^{2\pi} d\tau V(\tau) \mathbf{K} V(\tau)^{-1} \right) V_c^{-1} = 0, \quad (2.69)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} \{D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu}\} W \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\xi} - \\ &- [T(B, A, \tau), T(B, A, \xi)] \end{aligned} \quad (2.70)$$

e $K = 0$ é a curvatura nula em 2+1 dimensões.

Finalmete integrando as equações, eq.(2.57), e eq.(2.69) conseguimos o teorema de Stokes não Abelian em 2+1 dimensões

$$P \exp \left(\int_\Sigma d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = \overline{P} \exp \left(\int_\Omega d\xi d\tau \mathbf{V} \mathbf{K} \mathbf{V}^{-1} \right), \quad (2.71)$$

onde P e $\overline{P}$ denotam ordenamento na integração da superfície e do volume respectivamente.

2.3 Condições Locais de Integrabilidade

Agora discutiremos algumas possibilidades de tornar a equação $\mathbf{K} = 0$ local. Mostraremos também, como a formulação geométrica possibilitará construir as soluções e as cargas conservadas.

2.3.1 Primeiro Tipo de Modelo Integrável

Percebemos então que a condição $\mathbf{K} = 0$ não é local, pois o comutador $[T(B, A, \tau), T(B, A, \xi)]$ depende dos termos

$$T(B, A, \tau) = \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}(\sigma') B_{\rho\nu} W(\sigma') \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (2.72)$$

e

$$T(B, A, \xi) = \int_0^{2\pi} d\sigma W(\sigma)^{-1} B_{\mu\nu} W(\sigma) \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\xi} \quad (2.73)$$

que por sua vez dependem de integrações de regiões distintas do espaço-tempo, ς e τ .

Para conseguir que a condição $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ seja local, irei impor que $B_{\mu\nu}$ seja covariantemente constante $D_\lambda B_{\mu\nu} = 0$, e $F_{\mu\nu} = 0$ para conseguir independência no caminho de W . Para alcançar esse objetivo, escolheremos $B_{\mu\nu}$ em um dado ponto do espaço tempo x , como sendo

$$B_{\mu\nu}(x) = W(x) B_{\mu\nu}^{(0)} W^{-1}(x) \quad (2.74)$$

com $B_{\mu\nu}^{(0)}$ constante, onde $[B_{\rho\nu}^{(0)}, B_{\mu\nu}^{(0)}] = 0$. E então usando a condição $A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1}$ que nada mais é do que a condição $F_{\mu\nu} = 0$ pode-se verificar

$$D_\lambda B_{\mu\nu} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda (W(x) B_{\mu\nu}^{(0)} W^{-1}(x)) + A_\lambda (W(x) B_{\mu\nu}^{(0)} W^{-1}(x)) - (W(x) B_{\mu\nu}^{(0)} W^{-1}(x)) A_\lambda = \\ = (\partial_\lambda W(x)) W^{-1}(x) W(x) B_{\mu\nu}^{(0)} W^{-1}(x) + A_\lambda W(x) B_{\mu\nu}^{(0)} W^{-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

Com a condição (2.74) perceber-se que

$$\begin{aligned} T(B, A, \tau) &= \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}(\sigma') B_{\rho\nu} W(\sigma') \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \\ &= \int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}(\sigma') W(\sigma') B_{\mu\nu}^{(0)} W^{-1}(\sigma') W(\sigma') \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \\ &= B_{\mu\nu}^{(0)} \int_0^{2\pi} d\sigma' \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

que é uma constante. E então

$$[T(B, A, \tau), T(B, A, \xi)] = c [B_{\rho\nu}^{(0)}, B_{\mu\nu}^{(0)}] = 0 \quad (2.76)$$

onde c é uma constante qualquer.

Concluimos portanto, que o uso da condição (2.74) nos possibilita $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ local.

2.3.2 Segundo Tipo de Modelo Integrável

Neste segundo tipo de modelo integrável, buscaremos a mesma condição, ou seja, $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ local. Mas aqui faremos por um outro caminho. Este novo caminho é conseguido através da imposição de uma álgebra não semi-simples, e esta estrutura por si só faz $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ local, como veremos adiante.

Seja G uma álgebra de Lie não semi-simples, e seja P uma subálgebra abeliana invariante e ideal de G , $[P, G] \subset P$. Então tomando

$$A_\mu \in G \quad (2.77)$$

$$B_{\mu\nu} \in P \quad (2.78)$$

conseguimos,

$$W^{-1}B_{\mu\nu}W \in P \quad (2.79)$$

pois, $B_{\mu\nu}$ é subálgebra invariante, e W é a exponenciação dos elementos da álgebra que pertence ao grupo g . Sabemos que a conjugação de qualquer elemento da álgebra por um elemento qualquer do grupo continua sendo um elemento da álgebra. Lembrando que P é também Abelian, temos que $T(B, A, \tau) \in P$, e então o comutador

$$[T(B, A, \tau), T(B, A, \xi)] = 0. \quad (2.80)$$

E agora para que a condição $K = 0$ se consolide devo impor

$$D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} = 0. \quad (2.81)$$

Fazendo o produto da eq.(2.81) pelo termo antissimétrico $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ conseguimos

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0, \quad (2.82)$$

onde

$$\tilde{B}^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}B_{\nu\rho}. \quad (2.83)$$

E então as condições (2.78), (2.82) e $F_{\mu\nu} = 0$ são as necessárias e suficientes para conseguir $K = 0$ local. Note entretanto que a condição de localidade $[T(B, A, \tau), T(B, A, \xi)] = 0$ está associada a existência de uma álgebra não semi-simples.

No entanto, o que podemos perceber agregado a esta estrutura algébrica, é a existência de correntes conservadas no sistema. Para deixar explícito o vínculo entre a estrutura algébrica não semi-simples e a existência de correntes conservadas, construiremos uma álgebra G não semi-simples da seguinte maneira: Seja G uma álgebra de Lie, e R uma representação, então

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= f_{ab}^c T_c \\ [T_a, P_i] &= P_j R_{ji}(T_a) \\ [P_i, P_j] &= 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

onde T_a é base de G , e P_i base de uma subálgebra abeliana e ideal.

Tomando $A_\mu \in T$, e $B_{\mu\nu} \in P_i$ ou seja, $A_\mu = A_\mu^a T_a$ e $B_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}^i T_i$. Percebe-se que usando a equação (2.82) e a condição $\partial_\mu W W^{-1} = A_\mu \Rightarrow F_{\mu\nu} = 0$ conseguimos

$$\partial^\mu J_\mu = 0 \quad (2.85)$$

onde,

$$J_\mu = W^{-1} \tilde{B}_\mu W \quad (2.86)$$

que podemos verificar

$$\partial^\mu J_\mu = W^{-1} A^\mu \tilde{B}_\mu W + W^{-1} \partial^\mu \tilde{B}_\mu W \quad (2.87)$$

$$= W^{-1} D^\mu \tilde{B}_\mu W = 0, \quad (2.88)$$

ou seja, a condição de curvatura nula e a existência da corrente conservada, estão diretamente ligadas a estrutura não semi-simples do modelo. Notemos ainda que a condição

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0, \quad (2.89)$$

e

$$F_{\mu\nu} = 0 \quad (2.90)$$

são invariantes pelo gauge

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1} \\ B_{\mu\nu} &\rightarrow g B_{\mu\nu} g^{-1} \end{aligned} \quad (2.91)$$

que podemos verificar,

$$\begin{aligned} D_\mu \tilde{B}^\mu &= \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho} \right) + \left[A_\mu, \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho} \right] \xrightarrow{\text{gauge}} \\ &\xrightarrow{\text{gauge}} \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} g B_{\nu\rho} g^{-1} \right) + \left[g A_\mu g^{-1} - \partial_\mu g g^{-1}, \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} g B_{\nu\rho} g^{-1} \right] = \\ &= g \left\{ \partial_\mu \left(\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho} \right) + \left[A_\mu, \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} B_{\nu\rho} \right] \right\} g^{-1} + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \left\{ \partial_\mu g B_{\nu\rho} g^{-1} + g B_{\nu\rho} \partial_\mu g^{-1} \right\} - \\ &- \left[\partial_\mu g g^{-1}, \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} g B_{\nu\rho} g^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde os dois últimos termos se cancelam, portanto,

$$D_\mu \tilde{B}^\mu = 0 \xrightarrow{\text{gauge}} g D_\mu \tilde{B}^\mu g^{-1} = 0 \quad (2.93)$$

que verifica a invariância de gauge. Também facilmente pode-se verificar que a condição $F_{\mu\nu} = 0 \xrightarrow{\text{gauge}} g F_{\mu\nu} g^{-1} = 0$ é invariante de gauge.

Capítulo 3

O Modelo na Esfera e no Plano

Neste capítulo, desenvolveremos uma teoria de dois campos escalares [4] que possui representação em termos de curvatura nula. De início faremos uma abordagem genérica, escrevendo a curvatura nula para qualquer teoria parametrizada por dois campos escalares. Posteriormente indicaremos quais devem ser as formas de possíveis Lagrangianas que correspondem a um modelo em termos da mesma curvatura nula.

Consideremos então os campos escalares complexos u e u^* , que parametrizam nossa teoria em termos da álgebra $sl(2)$. Os potenciais são dados por,

$$A_\mu \equiv \frac{1}{1+|u|^2} \left(-i\partial_\mu u \lambda \frac{d}{d\lambda} - i\partial_\mu u^* \bar{\lambda} \frac{d}{d\bar{\lambda}} + (u\partial_\mu u^* - u^*\partial_\mu u) \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{d}{d\lambda} - \bar{\lambda} \frac{d}{d\bar{\lambda}} \right) \right) \quad (3.1)$$

$$B_\mu^{(s)} \equiv \frac{1}{1+|u|^2} \left(\mathcal{K}_\mu \lambda^{s+1} \bar{\lambda}^{s-1} - \mathcal{K}_\mu^* \lambda^{s-1} \bar{\lambda}^{s+1} \right) \quad (3.2)$$

onde os operadores

$$T_+ \equiv \lambda \frac{d}{d\lambda} \quad T_- \equiv \bar{\lambda} \frac{d}{d\bar{\lambda}} \quad T_3 \equiv \frac{1}{2} \left(\lambda \frac{d}{d\lambda} - \bar{\lambda} \frac{d}{d\bar{\lambda}} \right) \quad (3.3)$$

satisfazem a álgebra $sl(2)$, ou seja

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm \quad [T_+, T_-] = 2T_3 \quad (3.4)$$

onde A_μ é um puro gauge

$$A_\mu = W^{-1} \partial_\mu W \quad W \equiv e^{iuT_+} e^{\varphi T_3} e^{iu^*T_-} \quad \varphi \equiv \log(1+u^2) \quad (3.5)$$

e a condição de curvatura nula

$$D^\mu \tilde{B}_\mu = \partial^\mu \tilde{B}_\mu + [A^\mu, \tilde{B}_\mu] = 0 \quad (3.6)$$

implica nas equações de movimento

$$\partial^\mu \mathcal{K}_\mu = 0 \quad \partial^\mu u \mathcal{K}_\mu = 0 \quad \partial^\mu u^* \mathcal{K}_\mu - \partial^\mu u \mathcal{K}_\mu^* = 0 \quad (3.7)$$

e a respectiva corrente conservada fica

$$J_\mu = W^{-1} \tilde{B}_\mu W \quad (3.8)$$

e como vimos nas seções anteriores

$$\partial^\mu J_\mu = W^{-1} A^\mu \tilde{B}_\mu W + W^{-1} \partial^\mu \tilde{B}_\mu W \quad (3.9)$$

$$= W^{-1} D^\mu \tilde{B}_\mu W = 0 \quad (3.10)$$

É interessante notar que os operadores $A_\mu^{(\alpha)} = \partial_\mu \alpha(u) Q$ e $\tilde{B}_\mu^{(\beta)} = K_\mu P$, onde Q e P satisfazem a álgebra de Heisenberg $[Q, P] = 1$, também são uma representação possível para as equações de movimento (3.7). No entanto não existe uma razão óbvia para a ligação entre tais estruturas, apenas se verifica a equivalência. Entretanto percebemos que estamos com 5 equações diferenciais, as duas primeiras da série (3.7) e seus complexos conjugados, mais a última que é real, e duas variáveis, u e u^* . Portanto nosso sistema é vinculado. Para resolvermos esse problema introduziremos uma função real $F(u, u^*, \partial u, \partial u^*)$ da seguinte maneira,

$$K_\mu \rightarrow FK_\mu \quad (3.11)$$

e escolhemos K_μ como,

$$K_\mu = h_{\mu\nu} \partial^\nu u = (\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*) \partial^\nu u \quad (3.12)$$

e a segunda equação da série (3.7) se anula identicamente,

$$\partial^\mu u K_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad F h_{\mu\nu} \partial^\mu u \partial^\nu u = 0 \quad (3.13)$$

onde $h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*$. O mesmo ocorre com a terceira equação da série (3.7),

$$\partial^\mu u^* K_\mu - \partial^\mu u K_\mu^* = 0 \quad (3.14)$$

e usando (3.11) conseguimos

$$\begin{aligned} F(\partial^\mu u^* K_\mu - \partial^\mu K_\mu^*) &= F(\partial^\mu u^* \partial^\nu u \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial^\mu u^* \partial^\nu u \partial_\nu u \partial_\mu u^*) \\ &+ F(\partial^\mu u \partial^\nu u^* \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial^\mu u \partial^\nu u^* \partial_\nu u \partial_\mu u^*) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

e conseguimos tornar a terceira equação da série (3.7) identicamente nula. Conseguimos desta maneira eliminar três equações de movimento, e portanto nos restou apenas a equação

$$\partial^\mu K_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \partial^\mu (FK_\mu) = 0 \quad (3.16)$$

e seu complexo conjugado, que soluciona o problema inicial dos vínculos.

Chegamos agora em um ponto crucial. Escrevemos a equação de curvatura nula para qualquer teoria parametrizada por dois campos escalares u e u^* , e por fim encontramos a equação diferencial (3.16) que rege a dinâmica de tal teoria. A pergunta que devemos nos fazer agora é quais são as teorias, com equação diferencial (3.16) que possuem Lagrangiana. Mostra-se em [4] que a Lagrangiana para tal teoria deve ser função de $\frac{h^2}{2f}$, onde F na equação (3.16) deve ser $F = \frac{f'}{f}$, ou seja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left(\frac{h^2}{2f^2} \right) \quad (3.17)$$

onde $f = 1$ corresponde ao modelo no plano, e $f = (1 + u^*u)^2$ corresponde ao modelo na esfera*. Lembrando também que

$$h^2 = h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} \quad h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^* \quad (3.18)$$

Em particular, o modelo que aqui iremos trabalhar† é um modelo no espaço-tempo Euclideano de 4 dimensões.

Como estamos interessados em soluções tipo sólitons, queremos a estabilidade a la Derrick [6]. Consideremos então a Lagrangiana da forma

$$\mathcal{L} = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^\alpha \quad (3.19)$$

e a energia estática do sistema

$$E = \int d^d x \left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^\alpha \quad (3.20)$$

e então para que tenhamos estabilidade a energia estática deve ser invariante por reescalonamento espacial $x \rightarrow \lambda x$ e para isso $\alpha = \frac{d}{4}$

E os correspondentes termos da equação de movimento são,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^*)} \right) &= \partial_\mu \left(2 \frac{\mathcal{L}'}{f^2} K^\mu \right) = -\frac{\mathcal{L}' K^\mu}{f} \frac{2}{f^2} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \partial_\mu u + \frac{\partial f}{\partial u^*} \partial_\mu u^* \right) + \frac{2}{f} \partial_\mu \left(\frac{\mathcal{L}' K^\mu}{f} \right) \\ &= -\frac{\mathcal{L}'}{f^3} h^2 \frac{\partial f}{\partial u^*} + \frac{2}{f} \partial_\mu \left(\frac{\mathcal{L}' K^\mu}{f} \right) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} &= -\mathcal{L}' \frac{h^2}{f^3} \frac{\partial f}{\partial u^*} \end{aligned} \quad (3.21)$$

e então conseguimos

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu u^*)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu \left(\frac{\mathcal{L}' K^\mu}{f} \right) = 0 \quad (3.22)$$

*A construção da Lagrangiana para as duas escolhas de f fica clara no apêndice A

†Uma outra escolha para a Lagrangiana, correspondendo a um outro modelo, pode ser encontrado em [9]

lembrando que $K^\mu \partial_\mu u^* = -\frac{1}{2}h^2$ e $\mathcal{L}'$ é a derivada da Lagrangiana com respeito ao argumento.

E então a equação diferencial fica,

$$\partial_\mu \left(\frac{\mathcal{L}' K^\mu}{f} \right) = \frac{1}{f^2} \left(\mathcal{L}' + \frac{\mathcal{L}''}{f^2} h^2 \right) \partial^\mu f K_\mu + \frac{\mathcal{L}''}{2f^3} (\partial^\mu h^2) K_\mu + \frac{\mathcal{L}'}{f} \partial^\mu K_\mu = 0 \quad (3.23)$$

Substituindo as derivadas

$$\mathcal{L}' = \frac{d}{4} \left[\left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^{\frac{d}{4}-1} \right] \quad \mathcal{L}'' = \frac{1}{8} d(d-4) \frac{f^2}{h^2} \left[\left(\frac{h^2}{2f^2} \right)^{\frac{d}{4}-1} \right] \quad (3.24)$$

na equação (3.23), conseguimos

$$-\frac{1}{f^2} \frac{1}{8} d(d-2) \partial^\mu f K_\mu + \frac{1}{16f h^2} d(d-4) (\partial^\mu h^2) K_\mu + \frac{1}{4f} d \partial^\mu K_\mu = 0 \quad (3.25)$$

e finalmente a equação diferencial fica

$$f \left((d-4) (\partial^\mu h^2) K_\mu + 4h^2 \partial^\mu K_\mu \right) - 2(d-2) h^2 \partial^\mu f K_\mu = 0 \quad (3.26)$$

ou equivalentemente, dividindo tudo por f e expandindo $\partial^\mu f$ conseguimos

$$\varepsilon \equiv (d-4) h_{\mu\nu} \partial^\nu u \partial^\mu h^2 + 4h^2 \partial^\mu h_{\mu\nu} \partial^\nu u + (d-2) (h^2)^2 \partial_{u^*} \log f = 0 \quad (3.27)$$

3.1 Simetrias

Nesta seção iremos trabalhar na busca das simetrias da equação diferencial (3.27).

3.1.1 Simetrias do Espaço Tempo

Por definição, as simetrias de uma dada equação diferencial são o conjunto de transformações que deixam a equação invariante. Para dizer que $x^\rho \rightarrow x^\rho + \xi^\rho$ é simetria de uma equação diferencial

$$\varepsilon(x, u(x), \partial_\mu u(x), \partial_{\mu\nu} u(x)) = 0 \quad (3.28)$$

onde $\partial_{\mu\nu} = \partial_\mu \partial_\nu$, então $\tilde{u}(x) \equiv u(x - \xi)$ continuará sendo solução de (3.28) se

$$\varepsilon(x, \tilde{u}(x), \partial_\mu \tilde{u}(x), \partial_{\mu\nu} \tilde{u}(x)) = 0 \quad (3.29)$$

Avaliando a equação (3.29) em $x + \xi$, em primeira ordem temos

$$\varepsilon(x - \xi, u(x - \xi), \partial_\mu u(x - \xi), \partial_{\mu\nu} u(x - \xi)) = \varepsilon(x, u(x), \partial_\mu u(x), \partial_{\mu\nu} u(x)) + \xi^\rho \partial_\rho \varepsilon$$

e então

$$\delta\varepsilon = \xi^\rho \partial_\rho \varepsilon \quad (3.30)$$

portanto o campo

$$V = \xi^\rho \partial_\rho \quad (3.31)$$

define a simetria da equação (3.28). A busca explícita da forma funcional de $\xi(x)$ definirá exatamente que tipo de simetria está envolvida na equação de movimento. Para que possamos calcular a variação funcional da equação (3.27), precisamos primeiramente calcular a variação funcional das coordenadas x , dos campos $\tilde{u}(x)$ e de suas derivadas. Considerando

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x - \xi) \quad w \equiv (x - \xi) \quad (3.32)$$

portanto

$$\partial_\mu \tilde{u}(x) = \frac{\delta u}{\delta w} \partial_\mu w = \frac{\partial u}{\partial w} \partial_\mu (x^\rho - \xi^\rho) \quad (3.33)$$

sabendo que

$$\frac{\partial u}{\partial x^\rho} = \frac{\partial u}{\partial w} \quad \frac{\partial u}{\partial \xi^\rho} = -\frac{\partial u}{\partial w} \quad (3.34)$$

e então a equação (3.146) fica

$$\partial_\mu \tilde{u} = \partial_\mu u(x - \xi) - \partial_\mu \xi^\rho(x) \partial_\rho u(x - \xi) \quad (3.35)$$

procedendo da mesma maneira e desprezando os termos de ordem ξ^2 conseguimos

$$\partial_{\mu\nu} \tilde{u}(x) = \partial_{\mu\nu} u(x - \xi) - \partial_{\mu\nu} \xi^\rho(x) \partial_\rho u(x - \xi) - \partial_\mu \xi^\rho(x) \partial_{\rho\nu} u(x - \xi) - \partial_\nu \xi^\rho(x) \partial_{\rho\mu} u(x - \xi) \quad (3.36)$$

e podemos concluir

$$\begin{aligned} \delta x^\rho &= \tilde{x}^\rho - x^\rho = \xi^\rho \\ \delta u &= \tilde{u} - u = 0 \\ \delta \partial_\mu u &= \partial_\mu \tilde{u} - \partial_\mu u = -\partial_\mu \xi^\nu \partial_\nu u \\ \delta \partial_\mu \partial_\nu u &= \partial_\mu \partial_\nu \tilde{u} - \partial_\mu \partial_\nu u = -\partial_\mu \partial_\nu \xi^\rho \partial_\rho u - \partial_\mu \xi^\rho \partial_\rho \partial_\nu u - \partial_\nu \xi^\rho \partial_\rho \partial_\mu u \end{aligned} \quad (3.37)$$

De posse das quantidades (3.37) podemos calcular a variação de todos os termos da equação de movimento (3.27), e então,

$$\delta h_{\mu\nu} = \delta(\partial_\mu u) \partial_\nu u^* + \partial_\mu u \delta(\partial_\nu u^*) - \delta(\partial_\nu u) \partial_\mu u^* - \partial_\nu u \delta(\partial_\mu u^*) \quad (3.38)$$

e então conseguimos

$$\delta h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \xi^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu \xi^\rho h_{\mu\rho} \quad (3.39)$$

procedendo da mesma maneira conseguimos encontrar as seguintes quantidades

$$\begin{aligned}\delta(\partial_\sigma h_{\mu\nu}) &= \partial_{\sigma\mu}\xi^\rho h_{\rho\nu} - \partial_{\sigma\nu}\xi^\rho h_{\mu\rho} - \partial_\sigma\xi^\rho\partial_\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi^\rho\partial_\sigma h_{\rho\nu} - \partial_\nu\xi^\rho\partial_\sigma h_{\mu\rho} \\ \delta h^2 &= -2(\partial^\mu\xi^\rho + \partial^\rho\xi^\mu)h_{\mu\nu}h_\mu{}^\nu\end{aligned}\quad (3.40)$$

para facilitar o cálculo da simetria vamos definir a quantidade $D \equiv \partial_\mu\xi^\mu$, onde a contração dos índices não significa soma. Usando a notação da métrica como $\eta_{ef}^{\mu\nu}$ que é a métrica Euclidiana, onde o índice "ef" indica uma métrica efetiva, ou seja, é a métrica do subspaço a que restringimos a equação (3.27). E com isso podemos definir a quantidade

$$\partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu = 2D\eta_{ef}^{\mu\nu}\quad (3.41)$$

ou seja, quando $\mu \neq \nu$ conseguimos $\partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu = 0$, e quando $\mu = \nu$ a quantidade (3.41) fica $\partial^1\xi^1 = D$ ou para qualquer outra escolha dos índices. E a equação (3.40) fica

$$h^2 = -4Dh^2\quad (3.42)$$

Continuando com o cálculo da variação das quantidades da equação de movimento conseguimos

$$\delta\partial^\mu h_{\mu\nu} = -(\partial^2\xi^\rho)h_{\rho\nu} - 2(\partial^\nu D)h_{\mu\nu} - 2D\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu\xi^\rho\partial^\mu h_{\mu\rho}\quad (3.43)$$

considerando que

$$\begin{aligned}\partial^2\xi^\rho &= \partial_\mu(\partial^\mu\xi^{\rho h o}) = \partial_\mu(\partial^\mu\xi^\rho + \partial^\rho\xi^\mu) - \partial_\mu\partial^\rho\xi^\mu = -\partial_\mu\partial^\rho\xi^\mu + 2\partial_\mu D\eta^{\mu\rho} \\ &= -\partial^\rho\partial_\mu\xi^\mu + 2\partial^\rho D = -(d_{ef} - 2)\partial^{\rho h o} D\end{aligned}\quad (3.44)$$

onde a quantidade $d_{ef} \equiv (\text{número da dimensão efetiva})$, foi conseguida na soma dos índices da quantidade $\partial_\mu\xi^\mu$, ou seja $\partial_\mu\xi^\mu = d_{ef}$, e então a equação (3.43) pode ser reescrita como

$$\delta\partial^\mu h_{\mu\nu} = (d_{ef} - 4)\partial^\mu D h_{\mu\nu} - 2D\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu\xi^\rho\partial^\mu h_{\mu\rho}\quad (3.45)$$

com o uso destas últimas quantidades, podemos calcular a variação das seguintes quantidades

$$\begin{aligned}\delta(h^2\partial^\mu h_{\mu\nu}\partial^\nu u) &= -8Dh^2\partial^\mu h_{\mu\nu}\partial^\nu u + (d_{ef} - 4)h^2(\partial^\mu D)h_{\mu\nu}\partial^\nu u \\ \delta(h_{\mu\nu}\partial^\nu u\partial^\mu h^2) &= -8Dh_{\mu\nu}\partial^\nu u\partial^\mu h^2 - 4h^2(\partial^\mu D)h_{\mu\nu}\partial^\nu u\end{aligned}$$

usando o cálculo da variação das quantidades envolvidas na equação de movimento (3.27), podemos calcular a variação total da mesma, ou seja

$$\delta\varepsilon = -8D\varepsilon - 4(d - d_{ef})h^2\partial^\mu D h_{\mu\nu}\partial^\nu u\quad (3.46)$$

E concluímos que

- Se $d_{ef} = d$, que é o caso das soluções estáticas, a equação (3.41) define a simetria para todo D

- Se $d_{ef} \neq d$, a equação (3.41) define a simetria somente no caso em que $\partial^\mu D = 0$. Como podemos perceber, o caso estático é o caso em que a simetria é a mais geral possível, pois não se faz qualquer tipo de restrição a quantidade D , e é por este motivo que estamos interessados nas soluções estáticas.

Chegamos agora ao ponto onde determinaremos que tipo de simetrias estão envolvidas, ou seja, estaremos preocupados em calcular a quantidade ξ .

Considerando o caso em que $\mu \neq \nu$ e aplicando $\partial^\mu \partial^\nu$ sobre $\partial^\mu \xi^\mu + \partial^\nu \xi^\nu$, e então

$$\partial_\mu \partial_\nu (\partial^\mu \xi^\mu + \partial^\nu \xi^\nu) = (\partial_\mu \partial^\mu + \partial_\nu \partial^\nu) (\partial_\nu \xi^\nu + \partial_\mu \xi^\mu) = (\partial_\mu \partial^\mu + \partial_\nu \partial^\nu) D = 0 \quad (3.47)$$

para todos os pares de diferentes índices, e isso implica que

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2)D - (\partial_2^2 + \partial_3^2)D + (\partial_3^2 + \partial_1^2)D = 2\partial_1^2 D = 0 \quad (3.48)$$

e então

$$\partial_1^2 D = 0 \quad (3.49)$$

e concluímos

$$\partial_\mu \partial_\nu D = \partial_\mu \partial_\nu^2 \xi^\nu = -\partial_\nu^3 \xi^\mu = 0 \quad (3.50)$$

portanto D deverá ser uma função linear de x^ν o que implica de (3.41) que ,

$$\xi^{(\mu)\nu} = x^\mu x^\nu - \frac{1}{2} \eta_{ef}^{\mu\nu} x^2 \quad (3.51)$$

que define a simetria da equação (3.27).

3.2 Soluções

Estamos interessados em resolver a equação de movimento (3.26) para o caso estático. Como vimos na seção anterior a simetria para este caso é dada por

$$x'^i = x^i + (\epsilon \cdot x)x^i - \frac{1}{2}x^2 \epsilon^i \quad i = 1, 2, \dots, d \quad (3.52)$$

e estas são as simetrias conforme no espaço Euclidiano d -dimensional.

Estas simetrias podem ser usadas para encontrar a solução estática para a equação de movimento (3.26) através do uso de um ansatz, que introduzirá variáveis cíclicas no sistema.

Para tanto faremos uma breve descrição de simetrias conforme no espaço Euclidiano.

Considere pontos do espaço Euclidiano d -dimensional como sendo esferas de raio nulo. A equação para esferas é da forma

$$\begin{aligned}\alpha \vec{x}^2 - 2\vec{\beta} \cdot \vec{x} + \gamma &= 0 \\ \alpha \left(\vec{x} - \frac{\vec{\beta}}{\alpha} \right)^2 - \frac{\vec{\beta}^2}{\alpha} + \gamma &= 0 \\ \left(\vec{x} - \frac{\vec{\beta}}{\alpha} \right)^2 &= \frac{\vec{\beta}^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2}\end{aligned}\quad (3.53)$$

onde $\vec{x}$ e $\vec{\beta}$ são vetores no espaço Euclidiano d -dimensional. E o espaço Euclidiano é descrito por esferas de raio nulo

$$\vec{\beta}^2 - \alpha\gamma = 0 \quad (3.54)$$

ou equivalentemente

$$\vec{x} = \frac{\vec{\beta}}{\alpha} \quad (3.55)$$

E a equação (3.54) define a simetria conforme no espaço Euclidiano. Podemos reescrever a equação (3.54) como uma soma de quadrados, o que nos facilitará uma análise de como se constroem rotações nesse espaço,

$$\vec{\beta}^2 - \alpha\gamma = \sum_{i=1}^d \beta^2 + \left(\frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{a\alpha + a^{-1}\gamma}{2} \right)^2 \quad (3.56)$$

onde a é uma constante arbitrária. O ganho de ter escrito a equação (3.54) como a soma de quadrados, dada em (3.56), é tornar explícito os eixos do espaço em questão. Portanto nosso espaço pode ter dimensão par, $d = 2n$, ou dimensão ímpar, $d = 2n - 1$. Nosso interesse aqui é analisar as rotações compactas, ou seja, o último termo da equação (3.56) será desconsiderado para este fim. No caso da dimensão do espaço ser ímpar, $d = 2n - 1$, as rotações dos respectivos eixos, lembrando que a variação dos eixos operam-se aos pares, ficam

$$\delta\beta_{2j-1} = \beta_{2j} \quad \delta\beta_{2j} = -\beta_{2j-1} \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.57)$$

e a rotação dos dois últimos eixos $(\beta_{2n-1}, \frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2})$ ficam

$$\delta\beta_{2n-1} = \frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2} \quad \delta\frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2} = -\beta_{2n-1} \quad \delta\frac{a\alpha + a^{-1}\gamma}{2} = 0 \quad (3.58)$$

onde o último eixo permanece estático. No caso da dimensão do espaço ser par, $d = 2n$, existem duas possibilidades para se operar as rotações. O primeiro caso são exatamente as rotações (3.57) onde $j = 1, 2, \dots, n$. No segundo caso tornamos o eixo

β_{2n} estático e procedemos exatamente como no caso ímpar, dado pelas equações (3.57) e (3.58).

Usando a condição (3.55) podemos trasportar as rotações (3.57) do espaço- β para o espaço- x

$$\delta x_{2j-1} = x_{2j} \quad \delta x_{2j} = -x_{2j-1} \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.59)$$

da mesma maneira procedemos com as rotações (3.58)

$$\delta \left(\frac{a\alpha - a^{-1}\gamma}{2} \right) = -\beta_{2n-1}$$

$$\frac{a}{2}\delta\alpha + \frac{a^{-1}}{2}a^2\delta\alpha = -\beta_{2n-1}$$

e então

$$\delta\alpha = -a^{-1}\beta_{2n-1} \quad (3.60)$$

da mesma maneira

$$\delta\beta_{2n-1} = \frac{a}{2}\alpha - \frac{a^{-1}}{2\alpha}\beta^2 \quad \delta\gamma = a\beta_{2n-1} \quad (3.61)$$

e no caso par, a variável extra β_{2n} fica

$$\beta_{2n} = 0 \quad (3.62)$$

e finalmente, usando as variações anteriores, conseguimos

$$\delta x_i = a^{-1} \frac{\beta_i \beta_{2n-1}}{\alpha^2} = \frac{x_i x_{2n-1}}{a} \quad i \neq 2n-1$$

$$\delta x_{2n-1} = \frac{1}{2a} \left(a^2 + x_{2n-1}^2 - \sum_{i \neq 2n-1} x_i^2 \right)$$

que são exatamente a simetria conforme (3.52) mais uma translação na direção x_{2n-1} . E com estes resultados, usando como analogia as rotações no plano

$$\delta f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y \quad (3.63)$$

com

$$\delta y = x \quad \delta x = -y \quad (3.64)$$

conseguimos

$$\frac{\partial}{\partial z} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.65)$$

Analogamente,

$$\partial_{\theta_i} = x_{2i} \partial_{x_{2i-1}} - x_{2i-1} \partial_{x_{2i}} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.66)$$

$$\partial_{\theta_n} = \frac{x_{2n-1}}{a} \sum_{i \neq 2n-1} x_i \partial_{x_i} + \frac{1}{2a} \left(a^2 + x_{2n-1}^2 + x_{2n-1}^2 - \sum_{i \neq 2n-1} x_i^2 \right) \partial_{x_{2n-1}} \quad (3.67)$$

onde (3.66) e (3.67) foram construídas como consequência das simetrias da equação de movimento para o caso estático.

No caso do espaço dos campos u e u^* , onde $u \rightarrow ue^{im_j\theta_{ex}}$ uma rotação infinitesimal é dada por

$$\delta u = im_j u \quad \delta u^* = -im_j u^* \quad (3.68)$$

e então

$$\partial_{\theta_{ex}} = im_j (u \partial_u - u^* \partial_{u^*}) \quad (3.69)$$

onde m_j é o parâmetro de rotação.

Para que possamos alcançar o objetivo de impor coordenadas cíclicas no sistema, deveremos exigir que a solução da equação (3.27) seja invariante por rotações externas e internas do sistema, onde no fundo, estamos impondo um sistema de coordenadas que seja invariante pela ação das simetrias da nossa equação, ou seja,

$$[\partial_{\theta_j} - im_j (u \partial_u - u^* \partial_{u^*})] u = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (3.70)$$

onde o ansatz é conseguido pela solução da equação diferencial (3.70). No entanto, como discutimos anteriormente, existem duas maneiras de se processar as rotações no espaço interno, uma para o caso em que a dimensão é par (3.67), e outra para o caso em que a dimensão é ímpar (3.66), como para cada caso a simetria é distinta, teremos dois ansatz para a equação diferencial (3.27) que serão conseguidos resolvendo (3.70) para θ_j no caso par e θ_j no caso ímpar. E então, para o caso da dimensão d ser ímpar (3.67), as rotações que comutam entre si, nos impõe, através de (3.70), o seguinte ansatz

$$u = R(\xi_l) e^{i \sum_{j=1}^n m_j \theta_j} \quad (3.71)$$

onde ξ_l é tal que $\partial_{\theta_j} \xi_l = 0$, ou seja

$$\xi_l = \frac{a^2 (x_{2l-1}^2 + x_{2l}^2)}{(a^2 + \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2)^2} \quad l = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.72)$$

mas no caso da dimensão d ser par, a variável extra ξ fica

$$\xi_n = \frac{(a^2 x_{2n}^2)}{(a^2 + \sum_{i=1}^{2n-1} x_i^2)^2} \quad (3.73)$$

Para o caso da dimensão d ser par (3.66), as rotações que comutam entre si, nos impõe o seguinte ansatz

$$u = S(\rho_l) e^{i \sum_{j=1}^n m_j \theta_j} \quad (3.74)$$

onde $\partial_{\theta_j} \rho_l = 0$, ou seja

$$\rho_l = \frac{1}{a} \sqrt{x_{2l-1}^2 + x_{2l}^2} \quad l = 1, \dots, n \quad (3.75)$$

onde a equação (3.70) impõe n coordenadas cíclicas θ_j que desaparecerão da equação diferencial (3.27). Onde as coordenadas ξ e θ , para o caso toroidal em que $d = 4$, são explicitadas no apêndice B.

3.3 Substituição do Ansatz

Antes de substituirmos efetivamente o ansatz na equação diferencial (3.27) vale lembrar que estaremos trabalhando na solução estática da equação de movimento, ou seja, o espaço efetivo é Euclideano de dimensão igual a 4. Relembrando, a Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right) \quad (3.76)$$

onde

$$h_{\mu\nu} = \partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^* \quad (3.77)$$

onde

$$f = 1 \quad (\text{caso do plano}) \quad (3.78)$$

$$f = (1 + |u|^2) \quad (\text{caso da esfera}) \quad (3.79)$$

A equação diferencial (3.27) para o caso em que $d = 4$ se reduz a

$$\mathcal{E} \equiv 2\partial^\mu h_{\mu\nu} \partial^\nu u + h^2 \partial_u \log f = 0 \quad (3.80)$$

Como já discutimos anteriormente, existem dois possíveis ansatz. Existem também duas maneiras de se efetuar a substituição do ansatz. A primeira delas é a substituição direta na equação diferencial, e a segunda, que é a menos árdua, é a substituição na Lagrangiana, onde posteriormente, usando o princípio variacional, chegamos a equação de movimento. Não é óbvio que se processando distintamente, com a substituição na Lagrangiana, ou com a substituição do ansatz na equação de movimento, se consiga chegar ao mesmo resultado, mas isso se verifica na realidade.

3.3.1 O Ansatz Toroidal

Para o caso toroidal temos dois ângulos ξ e φ , duas coordenadas ζ_i definidas em termos de quatro coordenadas Cartesianas x_i , ou seja

$$-\partial_\varphi = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} \quad (3.81)$$

$$-\partial_\xi = \frac{x_3}{a} (x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} + x_4 \partial_{x_4}) + \frac{1}{2a} (a^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2) \partial_{x_3} \quad (3.82)$$

onde

$$\zeta_1 = \frac{a^2(x_1^2 + x_2^2)}{(a^2 + r^2)} \quad \zeta_2 = \frac{a^2 x_4^2}{(a^2 + r^2)} \quad r^2 = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \quad (3.83)$$

E o campo u é então escrito como

$$u = S(\zeta_1, \zeta_2) e^{i(m_1 \xi + m_2 \varphi)} \quad (3.84)$$

E as coordenadas toroidais, dadas no apêndice B, ficam

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= \frac{a}{q} \sin \xi \\ x_4 &= \frac{a}{q} \sinh \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde

$$q = \cosh \eta - \cos \xi \quad (3.86)$$

então

$$\zeta_1 = \frac{1}{4} \tanh^2 \eta \sin^2 \theta \quad \zeta_2 = \frac{1}{4} \tanh^2 \eta \cos^2 \theta \quad (3.87)$$

Agora estamos exatamente no ponto onde se efetua a substituição do ansatz. Faremos a substituição primeiramente para o caso da esfera, ou seja, quando $f = (1 + |u|^2)$. Procedendo distintamente ou seja, fazendo a substituição do ansatz na Lagrangiana, ou na própria equação de movimento, conseguimos para a equação (3.80), através do Maple, o seguinte resultado,

$$\begin{aligned} &\alpha \left((1 - 3S^2) (\sinh^2 \eta (\partial_\eta S)^2 + (\partial_\theta S)^2 + (S + S^3) (\sinh^2 \eta \partial_\eta^2 S + \partial_\theta^2 S) \right. \\ &\quad \left. + (S + S^3) (\beta \sinh^2 \eta \partial_\eta S + \gamma \partial_\theta S) \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

onde os coeficientes são

$$\begin{aligned} \alpha &= \sinh^2 \eta \sin^2 \theta m_1^2 + m_2^2 \\ \beta &= \partial_\eta \alpha = 2 \sinh \eta \cosh \eta \sin^2 \theta m_1^2 \\ \gamma &= \left(\sinh^2 \eta m_1^2 - \frac{m_2^2}{\sin^2 \theta} \right) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.89)$$

Manipulando a equação de movimento (3.88) conseguimos

$$\sinh^2 \eta \left(\partial_\eta^2 g + \frac{\beta}{\alpha} \partial_\eta g \right) + \partial_\theta^2 g + \frac{\gamma}{\alpha} \partial_\theta g = 0 \quad (3.90)$$

onde

$$g = \frac{1}{1 + S(\eta, \theta)^2} \quad (3.91)$$

É interessante notar que para o caso do plano, onde $f = 1$ a substituição do ansatz na equação de movimento leva a mesma equação (3.90), com a diferença que

$$g = S(\eta, \theta)^2 \quad (3.92)$$

Neste ponto devemos atentar para o importante fato da passagem da equação (3.88) para a equação (3.90). A manipulação feita nesta passagem permitiu a linearização da equação (3.88). Como veremos nas seções posteriores, o preço pago por esta linearização é a perda de informação no sentido de que o espaço de soluções da equação linear é muito mais abrangente que o espaço de soluções da equação não linear. Isso fará com que tenhamos que escolher soluções que mantenham algumas características que serão explicadas mais adiante.

Como salientamos anteriormente, a equação diferencial (3.90) pode ser derivada da substituição do ansatz na própria Lagrangiana. E usando o programa Maple conseguimos

$$h^2 = -8q^4 \frac{m_1^2 \sinh^2 \eta \sin^2 \theta + m_2^2}{\sinh^4 \eta \sin^2 \theta} S^2 \left(\sinh^2 \eta (\partial_\eta S)^2 + (\partial_\theta S)^2 \right) \quad (3.93)$$

onde q é definido em (3.86). E a Lagrangiana fica

$$\mathcal{L} = \frac{h^2}{2f^2} = -q^4 \frac{m_1^2 \sinh^2 \eta \sin^2 \theta + m_2^2}{\sinh^4 \eta \sin^2 \theta} \left(\sinh^2 \eta (\partial_\eta g)^2 + (\partial_\theta g)^2 \right) \quad (3.94)$$

onde para o caso do plano, g é dado por (3.92) e para o caso da esfera pela (3.91). E usando o princípio variacional conseguimos a mesma equação (3.90), e como $S(\rho_1, \rho_2)$ é função real, g deve estar sujeito as condições,

$$\begin{array}{lll} \text{para o plano} & \rightarrow & g \equiv S(\rho_1, \rho_2)^2 \quad g \geq 0 \\ \text{para } S^2 & \rightarrow & g \equiv \frac{1}{1 + S(\rho_1, \rho_2)^2} \quad 0 \leq g \leq 1 \end{array} \quad (3.95)$$

Podemos checar que o Jacobiano da transformação de coordenadas é dado por

$$d^4x = \frac{\sinh^2 \eta \sin \theta}{q^4} d\eta d\theta d\xi d\varphi \quad (3.96)$$

e então a energia estática, ou equivalentemente a ação, é dada por

$$S = -(2\pi)^2 \int_0^\infty d\eta \int_0^\pi d\theta \frac{m_1^2 \sinh^2 \eta \sin^2 \theta + m_2^2}{\sinh^2 \eta \sin \theta} \left(\sinh^2 \eta (\partial_\eta g)^2 + (\partial_\theta g)^2 \right) \quad (3.97)$$

e variando a ação conseguimos a equação

$$\sinh^2 \eta \partial_\eta (\alpha \partial_\eta g) + \sin \theta \partial_\theta \left(\frac{\alpha}{\sin \theta} \partial_\theta g \right) = 0 \quad (3.98)$$

que é equivalente a equação (3.90). Onde α é o mesmo dado anteriormente.

O cálculo fica muito melhor, se fizermos a seguinte mudança de variável para a coordenada η

$$\zeta = -\ln \tanh \frac{\eta}{2} = -\ln \frac{\cosh \eta - 1}{\cosh \eta + 1} \quad (3.99)$$

Onde temos que

$$\partial_\zeta = -\sinh \eta \partial_\eta \quad (3.100)$$

e

$$\sinh \eta = \frac{1}{\sinh \zeta} \quad \cosh \eta = \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} \quad (3.101)$$

Note que $\eta = 0 \rightarrow \zeta = \infty$ e $\eta = \infty \rightarrow \zeta = 0$. E as coordenadas Cartesianas ficam

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{p} \sin \theta \cos \xi \\ x_2 &= \frac{a}{p} \sin \theta \sin \xi \\ x_3 &= \frac{a}{p} \sinh \zeta \sin \theta \\ x_4 &= \frac{a}{p} \cosh \zeta \end{aligned} \quad (3.102)$$

onde

$$p = \cosh \zeta - \cos \xi \sinh \zeta \quad (3.103)$$

E a equação (3.98) é reescrita como

$$\partial_\zeta (\Omega \partial_\zeta g) + \partial_\theta (\Omega \partial_\theta g) = 0 \quad (3.104)$$

onde

$$\Omega = m_1^2 \frac{\sin \theta}{\sinh \zeta} + m_2^2 \frac{\sinh \zeta}{\sin \theta} \quad (3.105)$$

Note que $\Omega \geq 0$, então $\zeta \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq \pi$. E a ação (3.97) fica

$$S = -(2\pi)^2 \int_0^\infty d\zeta \int_0^\pi d\theta \Omega \left((\partial_\zeta g)^2 + (\partial_\theta g)^2 \right) \quad (3.106)$$

3.3.2 Solução do Caso Toroidal

Para resolver a equação diferencial (3.104), usaremos o método de expansão em Série de potência. Expandimos g em uma série de potências na variável θ em torno do ponto $\theta = \pi/2$. Como estamos resolvendo uma equação diferencial de segunda ordem, temos que especificar o campo e suas primeiras derivadas sobre um dado ponto. Escolhemos o campo g em $x_4 = 0$ para ter a forma da função de hopfion tridimensional.

E então iniciamos expandindo g como

$$g(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta) \frac{\varepsilon^n}{n!} \quad \varepsilon \equiv \theta - \frac{\pi}{2} \quad (3.107)$$

com

$$g_n(\zeta) = \partial_{\zeta}^n g(\zeta, \theta) |_{\theta=\pi/2} \quad (3.108)$$

Também expandimos Ω dado em (3.105). Entretanto, os termos que aparecem na equação são

$$\frac{\partial_{\zeta} \Omega}{\Omega} = -\frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} \Delta \quad \frac{\partial_{\theta} \Omega}{\Omega} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Delta \quad (3.109)$$

onde

$$\Delta = \frac{m_1^2 \sin^2 \theta - m_2^2 \sinh^2 \zeta}{m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \sinh^2 \zeta} \quad (3.110)$$

Expandindo Δ , que é uma função par de ε ,

$$\Delta = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{2n} \frac{\varepsilon^{2n}}{(2n)!} \quad (3.111)$$

Substituindo esta expansão em (3.104) conseguimos um número infinito de equações para os g_n 's. Entretanto, temos que dar o valor inicial das funções $g_0(\zeta)$ e $g_1(\zeta)$, determinando o valor de todos os outros g_n 's em termo dos dois primeiros, sem qualquer necessidade de integração. E então $\partial_{\zeta} \Omega / \Omega$ é uma função par de ε , e $\partial_{\theta} \Omega / \Omega$ uma função ímpar de ε , e então os g_n 's são determinados somente através do g_0 , e de g_1 . De fato, através da (3.104)

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad g_2 &= -\partial_{\zeta}^2 g_0 + \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} \Delta_0 \partial_{\zeta} g_0 \\ \varepsilon^1 : \quad g_3 &= -\partial_{\zeta}^2 g_1 + \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} \Delta_0 \partial_{\zeta} g_1 + \Delta_0 g_1 \\ \varepsilon^2 : \quad g_4 &= -\partial_{\zeta}^2 g_2 + \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} \Delta_0 \partial_{\zeta} g_2 + \frac{\cosh \zeta}{\sinh \zeta} \Delta_2 \partial_{\zeta} g_0 + 2\Delta_0 g_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

O Caso $m_1^2 = m_2^2$

A solução tridimensional de hopfion para $m_1^2 = m_2^2$, é dada por

$$u = f(\eta) e^{im(\xi+\epsilon)} \quad f = \frac{1}{\sinh \eta} = \sinh \zeta \quad (3.112)$$

Fazemos então g_0 corresponder a tal solução, ou seja

$$g_0 = \frac{1}{1+f^2} = \frac{1}{\cosh^2 \zeta} \quad (3.113)$$

E por comodidade, escolhemos

$$g_1(\zeta) = 0 \quad (3.114)$$

Em [4] se demonstra que é sempre possível utilizar a invariância pelos difeomorfismo de área, de maneira a garantir sempre uma função $\tilde{S}$ real, portanto temos que procurar soluções da equação de movimento para S real. Esta é a condição a que nos referimos no início da seção quando falávamos da restrição do espaço de solução devido a linearização da equação diferencial. Isso justifica o fato de buscarmos a condição inicial (3.113), pois esta foi a única escolha a nos garantir um intervalo de variação em g sendo $0 < g < 1$, que é o mesmo que exigir S real.

Usamos o Mathematica para encontrar os dez primeiros g_n 's através do algoritmo dado acima. O resultado dado pelo Mathematica é da forma

$$g_0 = \frac{1}{\cosh(\zeta)^2} \quad (3.115)$$

$$g_2 = -2 \operatorname{sech}(\zeta)^2 \tanh(\zeta)^2$$

$$g_4 = 4(-5 + \cosh(2\zeta)) \operatorname{sech}(\zeta)^4 \tanh(\zeta)^2$$

$$g_6 = -4(123 - 56 \cosh(2\zeta) + \cosh(4\zeta)) \operatorname{sech}(\zeta)^6 \tanh(\zeta)^2$$

$$g_8 = 4(-5786 + 4047 \cosh(2\zeta) - 246 \cosh(4\zeta)$$

$$+ \cosh(6\zeta)) \operatorname{sech}(\zeta)^8 \tanh(\zeta)^2$$

$$g_{10} = -4(450995 - 408364 \cosh(2\zeta) + 46828 \cosh(4\zeta) - 1012 \cosh(6\zeta) + \cosh(8\zeta)) \operatorname{sech}(\zeta)^{10} \tanh(\zeta)^2 \quad (3.116)$$

Com a escolha (3.114) segue que os g_n 's de índice ímpar se anulam

$$g_{2n+1} = 0 \quad n = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (3.117)$$

Pode-se verificar, nos gráficos no apêndice F, que a exigência $0 < g < 1$ é satisfeita.

3.3.3 O Ansatz Polar

No caso do ansatz polar as coordenadas do espaço-tempo são dadas por

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho_1 \cos \theta_1 \\x_2 &= \rho_1 \sin \theta_1 \\x_3 &= \rho_2 \cos \theta_2 \\x_4 &= \rho_2 \sin \theta_2\end{aligned}\tag{3.118}$$

E o ansatz é escrito como

$$u = S(\rho_1, \rho_2) e^{i(m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2)}\tag{3.119}$$

Analogamente ao caso anterior, substituindo o ansatz (3.119) na equação diferencial (3.80), conseguimos usando o Matematica a equação

$$\rho_1 \rho_2 (m_1^2 \rho_2^2 + m_2^2 \rho_1^2) (\partial_{\rho_1}^2 + \partial_{\rho_2}^2) g - (m_1^2 \rho_2^2 - m_2^2 \rho_1^2) (\rho_2 \partial_{\rho_1} - \rho_1 \partial_{\rho_2}) g = 0\tag{3.120}$$

e da mesma maneira a equação diferencial tem a mesma forma, tanto para o caso do plano $f = 1$, quanto para o caso da esfera $f = (1 + |u|^2)^2$, e as condições a que o g devem estar sujeitas são

$$\begin{array}{lll}\text{para o plano} & \rightarrow & g \equiv S(\rho_1, \rho_2)^2 \quad g \geq 0 \\ \text{para a esfera } S^2 & \rightarrow & g \equiv \frac{1}{1 + S(\rho_1, \rho_2)^2} \quad 0 \leq g \leq 1\end{array}\tag{3.121}$$

Para este caso, o cálculo da substituição do ansatz na Lagrangiana não é tão árduo de se fazer a mão, e conseguimos

$$\begin{aligned}h^2 &= -8 \frac{(m_1^2 \rho_2^2 + m_2^2 \rho_1^2)}{\rho_1^2 \rho_2^2} S^2 ((\partial_{\rho_1} S)^2 + (\partial_{\rho_2} S)^2) \\ &= -2 \frac{(m_1^2 \rho_2^2 + m_2^2 \rho_1^2)}{\rho_1^2 \rho_2^2} ((\partial_{\rho_1} S^2)^2 + (\partial_{\rho_2} S^2)^2)\end{aligned}\tag{3.122}$$

e finalmente a Lagrangiana fica

$$\mathcal{L} = \left(\frac{h^2}{2f^2} \right) = - \frac{(m_1^2 \rho_2^2 + m_2^2 \rho_1^2)}{\rho_1^2 \rho_2^2} ((\partial_{\rho_1} g)^2 + (\partial_{\rho_2} g)^2)\tag{3.123}$$

e usando o princípio variacional, encontramos a mesma equação diferencial (3.120).

Notemos que na equação (3.120), o operador do segundo termo corresponde a rotação no plano (ρ_1, ρ_2) , e isto nos sugere fazer a seguinte mudança de variável

$$\rho_1 = r \cos \theta \quad \rho_2 = r \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\tag{3.124}$$

E então

$$\begin{aligned}\partial_r &= \cos \theta \partial_{\rho_1} + \sin \theta \partial_{\rho_2} \\ \partial_\theta &= -r \sin \theta \partial_{\rho_1} + r \cos \theta \partial_{\rho_2}\end{aligned}\quad (3.125)$$

ou

$$\begin{aligned}\partial_{\rho_1} &= \cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \\ \partial_{\rho_2} &= \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta\end{aligned}\quad (3.126)$$

E finalmente conseguimos

$$\begin{aligned}\rho_2 \partial_{\rho_1} - \rho_1 \partial_{\rho_2} &= -\partial_\theta \\ \partial_{\rho_1}^2 + \partial_{\rho_2}^2 &= \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2\end{aligned}\quad (3.127)$$

e então a equação (3.120) fica

$$\sin \theta \cos \theta \left(r^2 \partial_r^2 + r \partial_r + \partial_\theta^2 \right) g + \frac{m_1^2 \sin^2 \theta - m_2^2 \cos^2 \theta}{m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta} \partial_\theta g = 0 \quad (3.128)$$

Note que manipulando alguns termos da equação (3.128), conseguimos

$$\begin{aligned}\Delta \equiv \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{m_1^2 \sin^2 \theta - m_2^2 \cos^2 \theta}{m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta} &= \frac{2}{\sin 2\theta} \frac{m_1^2 - m_2^2 - (m_1^2 + m_2^2) \cos 2\theta}{m_1^2 + m_2^2 - (m_1^2 - m_2^2) \cos 2\theta} \\ &= \partial_\theta \ln \frac{m_1^2 + m_2^2 - (m_1^2 - m_2^2) \cos 2\theta}{\sin 2\theta}\end{aligned}\quad (3.129)$$

e a equação (3.128) fica

$$\left(r^2 \partial_r^2 + r \partial_r \right) g + \partial_\theta^2 g + \frac{\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \partial_\theta g = 0 \quad (3.130)$$

onde

$$\Lambda \equiv \frac{m_1^2 + m_2^2 - (m_1^2 - m_2^2) \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = m_1^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} + m_2^2 \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (3.131)$$

Introduzimos

$$r = e^z \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{r} = dz \quad (3.132)$$

e então

$$\partial_z = r \partial_r \quad \partial_z^2 = r \partial_r + r^2 \partial_r^2 \quad (3.133)$$

E a equação (3.130) fica

$$\partial_z^2 g + \partial_\theta^2 g + \frac{\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \partial_\theta g = 0 \quad \rightarrow \quad \partial_z (\Lambda \partial_z g) + \partial_\theta (\Lambda \partial_\theta g) = 0 \quad (3.134)$$

E ação pode ser escrita como

$$S = -(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{\pi/2} d\theta \Lambda \left((\partial_z g)^2 + (\partial_\theta g)^2 \right) \quad (3.135)$$

3.3.4 A solução por separação de variáveis para o caso polar.

Neste caso, como veremos, é possível introduzirmos a separação de variáveis, e encontrar a solução analítica para a equação diferencial (3.128). O problema é que a solução por separação de variáveis, como veremos adiante, não nos garante a condição $0 < g < 1$. De qualquer forma, encontraremos as soluções separáveis, e posteriormente partiremos para o cálculo no Mathematica, para calcular soluções em termos de uma expansão em série de potência, que facilita a procura de soluções com as condições exigidas acima.

A equação (3.134) é separável. Consideremos

$$g(z, \theta) = H(z) J(\theta) \quad (3.136)$$

e da equação (3.134) conseguimos

$$\partial_z^2 H - \lambda^2 H = 0 \quad (3.137)$$

e

$$\partial_\theta^2 J + \frac{\partial_\theta \Lambda}{\Lambda} \partial_\theta J + \lambda^2 J = 0 \quad (3.138)$$

onde λ^2 é a constante introduzida na separação de variáveis.

As soluções da equação (3.137) são

$$H = c_1 e^{\lambda z} + c_2 e^{-\lambda z} \quad \text{para } \lambda \text{ real} \quad (3.139)$$

$$H = c_3 + c_4 z \quad \text{para } \lambda = 0 \quad (3.140)$$

$$H = c_5 e^{i\omega z} + c_5^* r^{-i\omega z} \quad \text{para } \lambda = i\omega, \text{ e } \omega \text{ real} \quad (3.141)$$

para a parte angular, notemos que a equação (3.138) pode ser reescrita como

$$\partial_\theta^2 J - \cot \theta \partial_\theta J + \frac{\lambda^2}{4} J = 0 \quad (3.142)$$

e fazendo a mudança de variável $x = \cos \theta$ conseguimos a equação

$$(1 - x^2) \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{\lambda^2}{4} J = 0 \quad (3.143)$$

Esta equação possui solução dada pela série de potência

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad (3.144)$$

A série converge para vários valores de λ . A relação entre os coeficientes de expansão são

$$C_{n+2} = \frac{n(n-1) - \frac{\lambda^2}{4}}{(n+2)(n+1)} C_n \quad (3.145)$$

e os valores de λ para os quais a série trunca são

$$\begin{array}{ll}
\lambda^2 = 0 & J = \cos 2\theta \\
\lambda^2 = 8 & J = \sin^2 2\theta \\
\lambda^2 = 24 & J = \cos 2\theta \sin^2 2\theta \\
\lambda^2 = 48 & J = 1 - 6\cos^2 2\theta + 5\cos^4 2\theta \\
\lambda^2 = 80 & J = \cos 2\theta - \frac{10}{3}\cos^3 2\theta + \frac{7}{3}\cos^5 2\theta \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Podemos verificar que soluções deste tipo não satisfazem as condições discutidas para g . A solução aceitável será conseguida na seção posterior, em termos de uma expansão em série de potencia.

3.3.5 A Solução em Série para o Caso Polar

E então iniciamos expandindo g como

$$g(z, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(z) \frac{\varepsilon^n}{n!} \quad \varepsilon \equiv \theta - \frac{\pi}{4} \quad (3.146)$$

com

$$g_n(z) = \partial_z^n g(z, \theta) \big|_{\theta=\pi/4} \quad (3.147)$$

onde a equação para o caso polar é

$$\partial_z^2 g + \partial_\theta^2 g + \Delta \partial_\theta g = 0 \quad (3.148)$$

lembrando que

$$\Delta \equiv \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{m_1^2 \sin^2 \theta - m_2^2 \cos^2 \theta}{m_1^2 \sin^2 \theta + m_2^2 \cos^2 \theta} \quad (3.149)$$

e a expansão em Δ , onde $\varepsilon = \theta - \frac{\pi}{4}$ é indicada como

$$\Delta(\varepsilon) = \Delta_0 + \Delta_1 \varepsilon + \Delta_2 \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \quad (3.150)$$

onde

$$\Delta_n = \left. \frac{\partial^n \Delta(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0} \quad (3.151)$$

Substituindo a equação (3.146) em (3.148), com a expansão (3.150), conseguimos calcular as potências em ε

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon^0 : & \partial_y^2 g_0(z, \theta) + g_2(z, \theta) + \Delta_0 g_1(z, \theta) = 0 \\
\varepsilon^1 : & \partial_y^2 g_1(z, \theta) + g_3(z, \theta) + \Delta_0 g_2(z, \theta) + \Delta_1 g_1(z, \theta) = 0 \\
\varepsilon^2 : & \partial_y^2 g_2(z, \theta) + g_4(z, \theta) + \Delta_0 g_3(z, \theta) + 2\Delta_1 g_2(z, \theta) + \Delta_2 g_1(z, \theta) = 0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Tomamos o valor inicial para os campos com $g_0 = \frac{2}{\pi} \operatorname{arccotg}(e^2)$ e $g_1 = 0$. Implementando este processo no Mathematica obtemos os primeiros dez termos da expansão para os casos onde $(m_1 = 1, m_2 = 1)$, $(m_1 = 1, m_2 = 2)$, $(m_1 = 2, m_2 = 1)$, $(m_1 = 2, m_2 = 2)$:

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 1:$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{-2e^z}{\pi(1+e^{2z})^2}(-1+e^{2z}) \\ g_4 &= \frac{6e^z}{\pi(1+e^{2z})^4}(-3+5e^{2z}-5e^{4z}+3e^{6z}) \\ g_6 &= \frac{1}{\pi(1+e^{2z})^6}(50e^z-1482e^{3z}+2308e^{5z}-2308e^{7z}+1482e^{9z}-50e^{11z}) \\ g_8 &= \frac{2e^z}{\pi(1+e^{2z})^8}(-1009+7123e^{2z}-131937e^{4z}+192491e^{6z}-182491e^{8z}+131937e^{10z} \\ &\quad -7123e^{12z}+1009e^{14z}) \\ g_{10} &= \frac{2e^z}{\pi(1+e^{2z})^{10}}(-52463-804329e^{2z}+3381620e^{4z}-38453636e^{6z}+50310158e^{8z} \\ &\quad -50310158e^{10z}+38453636e^{12z}-3381620e^{14z}+804329e^{16z}+524663e^{18z}) \end{aligned}$$

$$m_1 = 1 \quad m_2 = 2:$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{-2e^z}{(1+e^{2z})^2\pi}(-1+e^{2z}) \\ g_3 &= \frac{-12e^z}{5(1+e^{2z})^2\pi}(-1+e^{2z}) \\ g_4 &= \frac{6e^z}{25(1+e^{2z})^4\pi}(-39+161e^{2z}-161e^{4z}+39e^{6z}) \\ g_5 &= \frac{24e^z}{125(1+e^{2z})^4\pi}(-209+391e^{2z}-391e^{4z}+209e^{6z}) \\ g_6 &= \frac{2e^z}{125(1+e^{2z})^6\pi}(-18943-119949e^{2z}+138994e^{4z}-138994e^{6z}+119949e^{8z} \\ &\quad +18943e^{10z}) \\ g_7 &= \frac{12e^z}{625(1+e^{2z})^6\pi}(-67693-480759e^{2z}+306934e^{4z}-306934e^{6z}+480759e^{8z} \\ &\quad +67693e^{10z}) \\ g_8 &= \frac{2e^z}{3125(1+e^{2z})^8\pi}(-8533901-93118105e^{2z}-570630909e^{4z}+521953295e^{6z} \\ &\quad -521953295e^{8z}+570630909e^{10z}+93118105e^{12z}+8533901e^{14z}) \\ g_9 &= \frac{-144e^z}{15625(1+e^{2z})^8\pi}(-3163741+2554295e^{2z}+177605331e^{4z}-164112705e^{6z} \\ &\quad +164112705e^{8z}-177605331e^{10z}-2554295e^{12z}+3163741e^{14z}) \\ g_{10} &= \frac{-2e^z}{78125(1+e^{2z})^{10}\pi}(-24882886133-145864227731e^{2z}-201217846660e^{4z} \\ &\quad +3066862965076e^{6z}-4110500529862e^{8z}+4110500529862e^{10z} \\ &\quad -3066862965076e^{12z}+201217846660e^{14z}+145864227731e^{16z} \\ &\quad +24882886133e^{18z}) \end{aligned}$$

$$m_1 = 2 \quad m_2 = 2:$$

$$g_2 = \frac{-2e^z}{(1+e^{2z})^2 \pi} (-1 + e^{2z})$$

$$g_4 = \frac{6e^z}{(1+e^{2z})^4 \pi} (-3 + 5e^{2z} - 5e^{4z} + 3e^{6z})$$

$$g_6 = \frac{(1+e^{2z})}{6\pi} (50e^z - 1482e^{3z} + 2308e^{5z} - 2308e^{7z} + 1482e^{9z} - 50e^{11z})$$

$$g_8 = \frac{2e^z}{(1+e^{2z})^8 \pi} (-1009 + 7123e^{2z} - 131937e^{4z} + 182491e^{6z} - 182491e^{8z} + 131937e^{10z} - 7123e^{12z} + 1009e^{14z})$$

$$g_{10} = \frac{2e^z}{(1+e^{2z})^{10} \pi} (-52463 - 804329e^{2z} + 3381620e^{4z} - 38453636e^{6z} + 50310158e^{8z} - 50310158e^{10z} + 38453636e^{12z} - 3381620e^{14z} + 804329e^{16z} + 52463e^{18z})$$

$$m_1 = 2 \quad m_2 = 1:$$

$$g_2 = \frac{-2e^z}{(1+e^{2z})^2 \pi} (-1 + e^{2z})$$

$$g_3 = \frac{12e^z}{5(1+e^{2z})^2 \pi} (-1 + e^{2z})$$

$$g_4 = \frac{6e^z}{25(1+e^{2z})^4 \pi} (-39 + 161e^{2z} - 161e^{4z} + 39e^{6z})$$

$$g_5 = \frac{-24e^z}{125(1+e^{2z})^4 \pi} (-209 + 391e^{2z} - 391e^{4z} + 209e^{6z})$$

$$g_6 = \frac{2e^z}{125(1+e^{2z})^6 \pi} (-18943 - 119949e^{2z} + 138994e^{4z} - 138994e^{6z} + 119949e^{8z} + 18943e^{10z})$$

$$g_7 = \frac{-12e^z}{625(1+e^{2z})^6 \pi} (-67693 - 480759e^{2z} + 306934e^{4z} - 306934e^{6z} + 480759e^{8z} + 67693e^{10z})$$

$$g_8 = \frac{2e^z}{3125(1+e^{2z})^8 \pi} (-8533901 - 93118105e^{2z} - 570630909e^{4z} + 521953295e^{6z} - 521953295e^{8z} + 570630909e^{10z} + 93118105e^{12z} + 8533901e^{14z})$$

$$g_9 = \frac{144e^z}{15625(1+e^{2z})^8 \pi} (-3163741 + 2554295e^{2z} + 177605331e^{4z} - 164112705e^{6z} + 164112705e^{8z} - 177605331e^{10z} - 2554295e^{12z} + 3163741e^{14z})$$

$$g_{10} = \frac{-2e^z}{78125(1+e^{2z})^{10} \pi} (-24882886133 - 145864227731e^{2z} - 201217846660e^{4z} + 3066862965076e^{6z} - 4110500529862e^{8z} + 4110500529862e^{10z} - 3066862965076e^{12z} + 201217846660e^{14z} + 145864227731e^{16z} + 24882886133e^{18z})$$

onde os termos ímpares da expansão para os casos em que $m_1 = m_2$ são nulos. Notemos a semelhança entre os termos de expansão para os casos $m_1 = 1 \quad m_2 = 2$ e $m_1 = 2 \quad m_2 = 1$. A única diferença existente são os sinais do terceiro e do nono termo no primeiro caso, e do quinto e do sétimo no segundo caso.

Percebemos no apêndice E, que o objetivo de garantir g bem definido no intervalo $0 < g < 1$ foi alcançado.

Várias outras tentativas foram feitas com relação a escolha da função inicial g_0 , e também com escolhas $g_1 \neq 0$. Todas se mostraram infrutíferas no sentido de garantir a convergência no intervalo $0 < g < 1$.

3.3.6 O Cálculo da Ação

Para o cálculo da ação vamos analisar primeiramente o caso polar. Como vimos a ação pode ser escrita como,

$$S = -(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\pi/2} d\theta \Lambda \left((\partial_z g)^2 + (\partial_\theta g)^2 \right) \quad (3.152)$$

Fazendo uso da equação de movimento (3.134), podemos reescrever a ação como um elemento de superfície,

$$S = -(2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\pi/2} d\theta \left(\partial_z (\Lambda g \partial_z g) + \partial_\theta (\Lambda g \partial_\theta g) \right) \quad (3.153)$$

integrando em z e θ conseguimos

$$S = -(2\pi)^2 \left(\int_0^{\pi/2} dz \Lambda g \partial_z g \Big|_{z=-\infty}^{z=\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} dz \Lambda g \partial_\theta g \Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \right) \quad (3.154)$$

Foram feitas várias tentativas para calcular a integral acima usando os resultados do Mathematica para a solução em série truncada em uma dada ordem. Percebemos que para a expansão até ordem vinte por exemplo, o valor da ação oscilava entre zero e infinito com pequenas variações dos pontos ao longo do contorno em (3.154). Portanto não é possível concluir nada a respeito do valor da ação utilizando o método da expansão em série de potência. Acreditamos que para este cálculo devemos usar alguma outra ferramenta algébrica. Os cálculos do caso toroidal são análogos.

Apêndice A

Projeção Estereográfica e a Forma Volume na Esfera

A.1 Projeção da Esfera no Plano

Dado um sistema cartesiano de coordenadas x, y e z . Considere uma esfera S^2 centrada na origem com vetor normal $\hat{n}$ onde $\hat{n}^2 = 1$, e as projeções são

$$n_x = \sin \theta \cos \phi$$

$$n_y = \sin \theta \sin \phi$$

$$n_z = \cos \theta$$

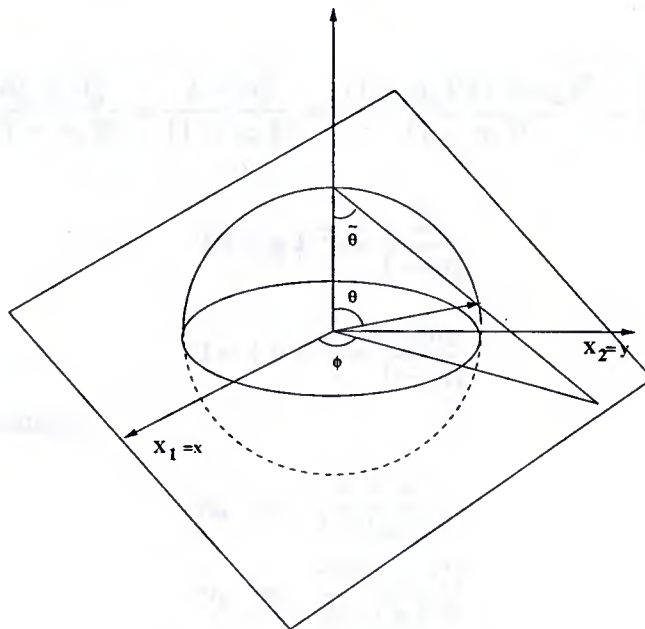


Figura A.1: projeção estereográfica

onde também temos que

$$\begin{aligned}x &= \tilde{\theta} \cos \phi \\y &= \tilde{\theta} \sin \phi \\\tilde{\theta} &= \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

Seja, $tg \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$, e $2\tilde{\theta} + \theta = \pi$, e (θ, ϕ) um ponto sobre a esfera S^2 , correspondendo a um ponto sobre o plano, que é dado por,

$$\begin{aligned}x &= \sin \tilde{\theta} \cos \phi = \tilde{\theta} \cos \phi \\y &= \sin \tilde{\theta} \sin \phi = \tilde{\theta} \sin \phi\end{aligned}$$

onde $\cos \tilde{\theta} = 1$, ou também de outra maneira conseguimos,

$$\begin{aligned}x &= \frac{\theta}{2} \cos \phi \\y &= \frac{\theta}{2} \sin \phi\end{aligned}$$

onde, $\frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$

Definindo a quantidade

$$u = \frac{n_x + in_y}{1 - n_z} \quad (\text{A.1})$$

e então,

$$= \frac{n_x + in_y}{1 - n_z} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \exp(i\phi) = \frac{2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \cot \frac{\theta}{2} \exp(i\phi) = x + iy \quad (\text{A.2})$$

e conseguimos

$$|u|^2 = \frac{n_x^2 + n_y^2}{(1 - n_z)^2} = \frac{1 - n_z^2}{(1 - n_z)^2} = \frac{(1 - n_z)^2(1 + n_z)^2}{(1 - n_z)^2} = \frac{1 + n_z}{1 - n_z} \quad (\text{A.3})$$

então

$$1 + |u|^2 = \frac{2}{1 - n_z} \quad (\text{A.4})$$

e

$$1 - |u|^2 = \frac{-2n_z}{1 - n_z} \quad (\text{A.5})$$

finalmente conseguimos,

$$n_x = \frac{u + u^*}{1 + |u|^2} \quad (\text{A.6})$$

$$n_y = \frac{-i(u - u^*)}{1 + |u|^2} \quad (\text{A.7})$$

$$n_z = \frac{|u|^2 - 1}{1 + |u|^2} \quad (\text{A.8})$$

$$(\text{A.9})$$

e o vetor normal

$$\hat{n} = \frac{1}{1 + |u|^2} (u + u^*, -i(u - u^*), |u|^2 - 1) \quad (\text{A.10})$$

e então um dado ponto $\hat{n}$ da esfera S^2 , de coordenadas (θ, ϕ) , é mapeado no plano complexo por W através da equação (A.2) e equação (A.10). Ou seja, dado um ponto no plano complexo de coordenadas (x, y) , determinamos univocamente W , que por sua vez determina univocamente $\hat{n}$, que define um ponto sobre esfera S^2 .

A.2 A Forma Volume

A forma volume sobre uma dada esfera S^2 é definida da seguinte maneira,

$$V_{\mu\nu} = \hat{n} \cdot (\partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n}) \quad (\text{A.11})$$

Primeiramente definiremos $K = \frac{1}{1+|u|^2}$, $A = u + u^*$, $B = -i(u - u^*)$ e $C = 1 - |u|^2$. Calculando termo a termo a equação (A.11), conseguimos,

$$\begin{aligned} \partial_\mu \hat{n} &= \partial_\mu K(A, B, C) + K(\partial_\mu A, \partial_\mu B, \partial_\mu C) \\ \partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n} &= [\partial_\mu K(A, B, C) + K(\partial_\mu A, \partial_\mu B, \partial_\mu C)] \times [\partial_\nu K(A, B, C) + \\ &\quad + K(\partial_\nu A, \partial_\nu B, \partial_\nu C)] \\ &= \partial_\mu K K(A, B, C) \times (\partial_\nu A, \partial_\nu B, \partial_\nu C) + K \partial_\nu K(\partial_\mu A, \partial_\mu B, \partial_\mu C) \times \\ &\quad \times (A, B, C) + K^2(\partial_\mu A, \partial_\mu B, \partial_\mu C) \times (\partial_\nu A, \partial_\nu B, \partial_\nu C) \\ &= K \partial_\mu K [B \partial_\nu C - C \partial_\nu B, C \partial_\nu A - A \partial_\nu C, A \partial_\nu B - B \partial_\nu A] + \\ &\quad K \partial_\nu K [\partial_\mu B C - \partial_\mu C B, \partial_\mu C A - \partial_\mu A C, \partial_\mu A B - \partial_\mu B A] + \\ &\quad K^2 [\partial_\mu B \partial_\nu C - \partial_\mu C \partial_\nu B, \partial_\mu C \partial_\nu A - \partial_\mu A \partial_\nu C, \partial_\mu A \partial_\nu B - \partial_\mu B \partial_\nu A] \end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot (\partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n}) &= K^3 [A(\partial_\mu B \partial_\nu C - \partial_\mu C \partial_\nu B) + B(\partial_\mu C \partial_\nu A - \partial_\mu A \partial_\nu C) + \\ &\quad + C(\partial_\mu A \partial_\nu B - \partial_\mu B \partial_\nu A)] \\ &= K^3 [(u + u^*)i(u + u^*)(\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^* - \\ &\quad - i(u - u^*)(\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*) + \\ &\quad + (1 - |u|^2)2i(\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*)] \\ &= \frac{2i}{(1 + |u|^2)^2} (\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*) \\ &\equiv H_{\mu\nu} \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

A.3 A Forma Area no Plano

No caso do plano a forma area é dada por

$$\vec{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n}$$

onde

$$\hat{n} = (x, y, 0) = \frac{1}{2}[u + u^*, -i(u - u^*), 0] \quad (\text{A.14})$$

pois

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u + u^*) \\ y &= \frac{-i}{2}(u - u^*) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

e então conseguimos

$$\vec{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{n} \times \partial_\nu \hat{n} = \frac{1}{4} \overbrace{2i(\partial_\mu u \partial_\nu u^* - \partial_\nu u \partial_\mu u^*)}^{\equiv h_{\mu\nu}} \vec{K}$$

onde $\vec{K}$ é o vetor unitário normal ao plano.

Apêndice B

As Coordenadas Toroidais

Estamos interessados em fazer a seguinte mudança de variável $(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (\eta, \zeta, \theta, \varphi)$, através da seguinte definição,

$$-\partial_{\theta_1} = x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} \quad (\text{B.1})$$

$$-\partial_{\theta_2} = \frac{x_3}{a}(x_1 \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_2} + x_4 \partial_{x_4}) + \frac{1}{2a}(a^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2) \partial_{x_3} \quad (\text{B.2})$$

onde,

$$\xi_1 = \frac{a^2(x_1^2 + x_2^2)}{(a^2 + r^2)^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\xi_2 = \frac{a^2 x_4^2}{(a^2 + r^2)^2} \quad (\text{B.4})$$

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \quad (\text{B.5})$$

e a é uma constante.

E então através das equações, equação (B.1) e equação (B.2), conseguimos

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} = -x_2 \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} = x_1 \quad \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} = \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} = 0 \quad (\text{B.6})$$

e o nosso primeiro resultado pode ser resumido como

$$x_1 = \bar{\alpha} \cos \theta_1 \quad x_2 = \bar{\alpha} \sin \theta_1 \quad (\text{B.7})$$

onde $\bar{\alpha} \geq 0$ e independe de θ_1

No mesmo sentido usando a equação (B.2), conseguimos

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} = -\frac{x_1 x_3}{a} \quad \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} = -\frac{x_2 x_3}{a} \quad \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} = -\frac{x_4 x_3}{a} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2a}(a^2 + x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2) \quad (\text{B.9})$$

e então substituindo o primeiro bloco da equação (B.7) no primeiro bloco da equação (B.8), conseguimos

$$\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \theta_2} = -\bar{\alpha} \frac{x_3}{a} \quad (\text{B.10})$$

e a seguinte derivada nos dá

$$\frac{\partial \ln \bar{\alpha}}{\partial \theta_2} = \frac{\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \theta_2}}{\bar{\alpha}} = -\frac{x_3}{a} \quad (\text{B.11})$$

Usando a terceira equação do bloco (B.8) conseguimos

$$\frac{\partial \ln x_4}{\partial \theta_2} = -\frac{x_3}{a} \quad (\text{B.12})$$

e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln \frac{\bar{\alpha}}{x_4}}{\partial \theta_2} &= \frac{\frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \theta_2}}{\frac{\bar{\alpha}}{x_4}} = \frac{x_4}{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\bar{\alpha}}{x_4} \right) = \frac{x_4}{\bar{\alpha}} \left[\frac{1}{x_4} \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial \theta_2} - \frac{\bar{\alpha}}{x_4^2} \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} \right] \\ &= \frac{x_4}{\bar{\alpha}} \left[-\frac{1}{x_4} \frac{\bar{\alpha} x_3}{a} + \frac{1}{x_4} \frac{\bar{\alpha} x_3}{a} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

portanto $\frac{\partial \ln \frac{\bar{\alpha}}{x_4}}{\partial \theta_2}$ é independente de θ_2 , lembrando que $\bar{\alpha}$ é independente de θ_1 , conseguimos $\frac{\partial \ln \frac{\bar{\alpha}}{x_4}}{\partial \theta_2}$ independente de θ_1 e θ_2 . E então podemos escrever

$$\bar{\alpha} = \alpha \quad x_4 = \beta \cdot f \quad (\text{B.14})$$

com α e β independentes de θ_1 e θ_2 e f independente de θ_1 .

Substituindo a equação (B.10) na equação (B.14), conseguimos

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_2} = -\frac{f x_3}{a} \quad (\text{B.15})$$

Usando os resultados, equação (B.7) e equação (B.14), conseguimos

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_4^2 = -\alpha^2 f^2 - \beta^2 f^2 \quad (\text{B.16})$$

e a equação (B.9) fica

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} = -\frac{1}{2a} (a^2 + x_3^2 - \alpha^2 f^2 - \beta^2 f^2) \quad (\text{B.17})$$

Usando a equação (B.15), conseguimos

$$\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_2} = -\frac{x_3}{a} \quad (\text{B.18})$$

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_2^2} = -\frac{1}{a} \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} \quad (\text{B.19})$$

portanto

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_2^2} = \frac{1}{2a^2}(a^2 + x_3^2 - \alpha^2 f^2 - \beta^2 f^2) \quad (\text{B.20})$$

e finalmente

$$\frac{\partial^2 \ln f}{\partial \theta_2^2} = \frac{1}{2a^2}(a^2 + a^2(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta_2})^2 - f^2(\alpha^2 - \beta^2)) \quad (\text{B.21})$$

Lembrando que f depende de θ_2 , vamos definir

$$f \equiv \frac{1}{q} = q^{-1} \quad (\text{B.22})$$

e a equação (B.21) fica

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \ln q}{\partial \theta_2^2} &= \frac{1}{2a^2}(a^2 + a^2(\frac{\partial \ln q}{\partial \theta_2})^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{q^2}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + (\frac{\partial \ln q}{\partial \theta_2})^2 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2 q^2}) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

definindo $\delta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2}$ a equação (B.23), fica

$$-\frac{\partial^2 \ln q}{\partial \theta_2^2} = \frac{1}{2}(1 + (\frac{\partial \ln q}{\partial \theta_2})^2 - \frac{\delta^2}{q^2}) \quad (\text{B.24})$$

mas temos que

$$d^2 \ln q = \frac{d^2 q}{q} - (\frac{dq}{q})^2 \quad (\text{B.25})$$

Usando a equação (B.25) na equação (B.24) conseguimos

$$\begin{aligned} -d^2 \ln q &= \frac{1}{2}(1 + (d \ln q)^2 - \frac{\delta^2}{q^2}) \\ (\frac{dq}{q})^2 - \frac{d^2 q}{q} &= \frac{1}{2}(1 + (\frac{dq}{q})^2 - \frac{\delta^2}{q^2}) \\ -qd^2 q + (dq)^2 &= \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}(dq)^2 - \frac{1}{2}\delta^2 \end{aligned}$$

e finalmente

$$qd^2 q - \frac{1}{2}(dq)^2 = \frac{1}{2}(\delta^2 - q^2) \quad (\text{B.26})$$

e então a equação (B.26) nos dá uma equação diferencial para a variável q .

Vamos tentar, na equação (B.26), uma solução do tipo $q = x - \cos \theta_2$, e então substituindo $q = x - \cos \theta_2$ na equação (B.26), conseguimos

$$-\frac{1}{2} \cos^2 \theta_2 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_2 = \frac{1}{2}(\delta^2 - x^2) = -\frac{1}{2} \quad (\text{B.27})$$

e portanto

$$x = \sqrt{\delta^2 + 1} \quad (\text{B.28})$$

e finalmente

$$q = \sqrt{\delta^2 + 1} - \cos \theta_2 \quad (\text{B.29})$$

Voltando para a equação em x_3 , temos

$$\frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} = -\frac{a}{2} \left(1 + \frac{x_3^2}{a^2} - \frac{\delta^2}{q^2} \right) \quad (\text{B.30})$$

E então definindo a nova variável γ como sendo

$$\frac{x_3}{a} = \frac{\gamma}{q} \Rightarrow \frac{1}{a} \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} = \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\frac{\gamma}{q} \right) \quad (\text{B.31})$$

e então

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_3^2}{a^2} - \frac{\delta^2}{q^2} \right) \\ \frac{1}{q} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} - \frac{1}{q^2} \sin \theta_2 \gamma &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_3^2}{a^2} - \frac{\delta^2}{q^2} \right) \\ \sqrt{\delta^2 + 1} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} - \cos \theta_2 \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_2} - \gamma \sin \theta_2 &= \frac{1}{2} (\delta^2 + 1 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \sqrt{\delta^2 + 1} + \gamma^2 - \delta^2) \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

e então escolhendo $\gamma = \sin \theta_2$ conseguimos que a equação (B.32) seja satisfeita

$$\begin{aligned} \sqrt{\delta^2 + 1} \cos \theta_2 - \cos^2 \theta_2 - \sin^2 \theta_2 &= -\frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta_2 - 2 \cos \theta_2 \sqrt{\delta^2 + 1} + \sin^2 \theta_2) \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

e até agora podemos concluir que

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{\alpha} \cos \theta_1 \\ x_2 &= \bar{\alpha} \sin \theta_2 \\ x_3 &= a \frac{\gamma}{q} \\ x_4 &= \beta f \end{aligned}$$

onde $\bar{\alpha} = \alpha f$, $f = \frac{1}{q}$ e $\gamma = \sin \theta_2$ e conseguimos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha}{q} \cos \theta_1 \\ x_2 &= \frac{\alpha}{q} \sin \theta_2 \\ x_3 &= a \frac{\sin \theta_2}{q} \\ x_4 &= \frac{\beta}{q} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

não esquecendo que $q = \sqrt{\delta^2 + 1} - \cos \theta_2$

Trabalhando um pouco com as variáveis conseguimos

$$\begin{aligned}
 r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= \frac{\alpha^2}{q^2} \cos^2 \theta_1 + \frac{\alpha^2}{q^2} \sin^2 \theta_1 + \frac{a^2}{q^2} \sin^2 \theta_2 + \frac{\beta^2}{q^2} \\
 &= \frac{\alpha^2}{q^2} + \frac{a^2}{q^2} \sin^2 \theta_2 + \frac{\beta^2}{q^2} \\
 &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{q^2} + \frac{a^2}{q^2} \sin^2 \theta_2 \\
 &= \frac{a^2}{q^2} \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{a^2} + \sin^2 \theta_2 \right)
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

e então

$$\begin{aligned}
 a^2 + r^2 &= \frac{a^2}{q^2} (\delta^2 + \sin^2 \theta_2 + q^2) \\
 &= \frac{a^2}{q^2} (\delta^2 + \sin^2 \theta_2 + \delta^2 + 1 + \cos^2 \theta_2 - 2\sqrt{\delta^2 + 1} \cos \theta_2) \\
 &= \frac{a^2}{q^2} (2\delta^2 + 2 - 2\sqrt{\delta^2 + 1} \cos \theta_2) \\
 &= \frac{2a^2}{q^2} \sqrt{\delta^2 + 1} (\sqrt{\delta^2 + 1} - \cos \theta_2) \\
 &= \frac{2a^2}{q^2} \sqrt{\delta^2 + 1}
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

e

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{\alpha^2}{q^2} \quad x_4^2 = \frac{\beta^2}{q^2} \tag{B.36}$$

relembrando a definição

$$\xi_1 = a^2 \frac{x_1^2 + x_2^2}{(a^2 + r^2)^2} \tag{B.37}$$

$$\xi_2 = a^2 \frac{x_4^2}{(a^2 + r^2)^2} \tag{B.38}$$

Substituindo as Equações(B.33)nas coordenadas ξ_1, ξ_2 , conseguimos

$$\xi_1 = \frac{\alpha^2}{4a^2(\delta^2 + 1)} \tag{B.39}$$

$$\xi_2 = \frac{\beta^2}{4a^2(\delta^2 + 1)} \tag{B.40}$$

onde α e β são independentes de θ_1 e θ_2 , e então definimos $\alpha = a \sinh \eta \sin \phi$ e $\beta = a \sinh \eta \cos \phi$ e então

$$\xi_1 = \frac{1}{4} \tanh^2 \eta \sin^2 \phi \tag{B.41}$$

$$\xi_2 = \frac{1}{4} \tanh^2 \eta \cos^2 \phi \tag{B.42}$$

com a definição de α e β conseguimos para as equações(B.33)

$$x_1 = \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \phi \cos \theta_1 \quad (\text{B.43})$$

$$x_2 = \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \phi \sin \theta_1 \quad (\text{B.44})$$

$$x_3 = \frac{a}{q} \sinh \eta \sin \phi \sin \theta_2 \quad (\text{B.45})$$

$$x_4 = \frac{a}{q} \sinh \eta \cos \phi \quad (\text{B.46})$$

lembrando que

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\delta^2 + 1 - \cos \theta_2} \\ &= \cosh \eta - \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (\text{B.47})$$

Apêndice C

O Cálculo da Quantidade $\delta V V^{-1}$

Queremos calcular a quantidade

$$\delta V V^{-1} = \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1}. \quad (C.1)$$

e para isso é preciso calcular a quantidade δT . As quantidades envolvidas são,

$$T(B, A, \tau) = \int d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau}, \quad (C.2)$$

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0, \quad (C.3)$$

$$\frac{dW^{-1}}{d\sigma} - W^{-1} A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0, \quad (C.4)$$

$$\delta W^{-1} = -W^{-1} (\delta W) W^{-1}. \quad (C.5)$$

Variando a eq.(C.2), obtemos

$$\begin{aligned} \delta T = \int d\sigma & \left[\delta W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right. \\ & + W^{-1} \delta B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \\ & + W^{-1} B_{\mu\nu} \delta W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \\ & + W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \\ & \left. + W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \right], \end{aligned}$$

e podemos reescrever

$$\delta T = \int d\sigma \left[-W^{-1} (\delta W) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right. \quad (C.6)$$

$$\left. + W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} \delta x^\lambda W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \right. \quad (C.7)$$

$$\left. + W^{-1} B_{\mu\nu} \delta W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \right. \quad (C.8)$$

$$\left. + W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \right. \quad (C.9)$$

$$\left. + W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \right]. \quad (C.10)$$

Agora, trabalharemos com os termos individualmente. Podemos agora reescrever o termo (C.9) utilizando a seguinte igualdade

$$W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) - \delta x^\mu \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\tau} \right), \quad (C.11)$$

e o termo (C.9), pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\sigma \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) &\equiv \overbrace{\int_0^{2\pi} d\sigma \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \delta x^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \right)}^{=0} - \\ &\quad - \int_0^{2\pi} d\sigma \delta x^\mu \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \\ &\Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} d\sigma \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) &= - \int_0^{2\pi} d\sigma \delta x^\mu \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \quad (C.12) \end{aligned}$$

e o primeiro termo se anula pois estamos mantendo a borda fixa nos extremos, ou seja,

$$\delta x^\mu(0) = \delta x^\mu(2\pi) = 0. \quad (C.13)$$

Trabalhando um pouco com a eq.(C.12),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) &= \left(\frac{d}{d\sigma} W^{-1} \right) B_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\tau} + W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} W \frac{dx^\nu}{d\tau} + W^{-1} B_{\mu\nu} \frac{dW}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \\ &\quad + W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d^2 x^\nu}{d\sigma d\tau} \\ &\Rightarrow \\ \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) &= W^{-1} (A_\lambda B_{\mu\nu} + \partial_\lambda B_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} A_\lambda) W \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d^2 x^\nu}{d\sigma d\tau} \\
 \frac{d}{d\sigma} \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) & = W^{-1} (\partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\lambda, B_{\mu\nu}]) W \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d^2 x^\nu}{d\sigma d\tau}
 \end{aligned}$$

finalmente obtemos o termo (C.9)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} d\sigma \left(W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) & = - \int_0^{2\pi} d\sigma \delta x^\mu W^{-1} (\partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\lambda, B_{\mu\nu}]) W \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \\
 & - \int_0^{2\pi} d\sigma \delta x^\mu W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d^2 x^\nu}{d\sigma d\tau} \quad (C.14)
 \end{aligned}$$

Só para lembrar, estamos em busca do cálculo explícito do termo,

$$\delta V V^{-1} = \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1} \quad (C.15)$$

onde a variação δT foi dividida em quatro termos. **Analizando agora o quinto termo** integrado em τ . Usando a eq.(C.15) e o quinto termo (C.31), conseguimos

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} d\tau V(\tau) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \right) V(\tau)^{-1} = \\
 & = \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} V(\tau)^{-1} \right). \quad (C.16)
 \end{aligned}$$

sabendo que

$$\begin{aligned}
 V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} V(\tau)^{-1} & = \frac{d}{d\tau} \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu V(\tau)^{-1} \right) - \\
 & - \delta x^\nu \frac{d}{d\tau} \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} \right) \quad (C.17)
 \end{aligned}$$

a eq.(C.16) fica

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} V(\tau)^{-1} \right) = \\
 & = - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \delta x^\nu \frac{d}{d\tau} \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} \right) + \\
 & + V(\tau) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V(\tau)^{-1}. \quad (C.18)
 \end{aligned}$$

Antes de desenvolver o último termo da eq.(C.18) faremos uma pequena pausa para calcular o termo $\frac{dW^{-1}}{d\tau}$. Para isso partiremos da equação

$$\frac{dW}{d\sigma} + A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} W = 0 \quad (C.19)$$

c

$$\frac{dW^{-1}}{d\sigma} - W^{-1}A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0. \quad (C.20)$$

Variando a eq.(C.19) e utilizando a eq.(C.20) conseguimos

$$\begin{aligned} W^{-1}\delta W &= - \int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} \delta \left(A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \right) W = \\ &= - \int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} \left(\partial_\lambda A_\mu \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \delta x^\lambda + A_\mu \frac{d\delta x^\mu}{d\sigma'} \right) W. \end{aligned} \quad (C.21)$$

integrando por partes o segundo termo da eq.(C.21), e fazendo algumas manipulações, conseguimos

$$W^{-1}\delta W = \int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} \overbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu])}^{F_{\mu\nu}} W \frac{dx^\nu}{d\sigma'} \delta x^\mu - \quad (C.22)$$

$$- W(\sigma)^{-1} A_\mu W(\sigma) \delta x^\mu. \quad (C.23)$$

Fazendo

$$\delta \equiv \delta\tau \frac{d}{d\tau}, \quad (C.24)$$

obtemos da eq.(C.22)

$$W^{-1} \frac{dW}{d\tau} = \overbrace{\int_0^\sigma d\sigma' W^{-1} F_{\mu\nu} W \frac{dx^\nu}{d\sigma'} \frac{dx^\mu}{d\tau}}^{T_\sigma(F)} - W^{-1} A_\mu W \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (C.25)$$

$$W^{-1} \frac{dW}{d\tau} = T_\sigma(F) - W^{-1} A_\mu W \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (C.26)$$

e então

$$\frac{dW}{d\tau} = W T_\sigma(F) - A_\mu W \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (C.27)$$

que é o que eu queria calcular.

Fazendo uso das equações, eq.(C.22) e eq.(C.27), podemos calcular explicitamente o termo $\frac{d}{d\tau} \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} \right)$ que proporcionara o cálculo explícito do primeiro termo da eq.(C.18). Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} \right) &= \frac{dV(\tau)}{d\tau} W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + \\ &+ V(\tau) \frac{dW^{-1}}{d\tau} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + V(\tau) W^{-1} \frac{dB_{\mu\nu}}{d\tau} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + \end{aligned} \quad (C.28)$$

$$\begin{aligned} &+ V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} \frac{dW}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d^2 x^\mu}{d\tau d\sigma} V(\tau)^{-1} \\ &+ V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dV(\tau)^{-1}}{d\tau} \end{aligned} \quad (C.29)$$

e cada um dos termos pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\tau} \left(V W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V^{-1} \right) = V T_{2\pi} W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + \\
 & + V(\tau) \left(W^{-1} A_\lambda \frac{dx^\lambda}{d\tau} - T_\sigma(F) W^{-1} \right) B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + \\
 & + V(\tau) W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} \frac{dx^\lambda}{d\tau} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + \\
 & + V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} \left(W T_\sigma(F) - A_\mu W \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} + \\
 & + V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{d^2 x^\mu}{d\tau d\sigma} V(\tau)^{-1} - V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} T_{2\pi} V^{-1}. \quad (C.30)
 \end{aligned}$$

Rearranjando os termos conseguimos

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\tau} \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} \right) &= V W^{-1} (\partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\lambda, B_{\mu\nu}]) W \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\sigma} V^{-1} + \\
 &+ V \left([T_{2\pi}(B) - T_\sigma(F), W^{-1} B_{\mu\nu} W] \right) V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} + V W^{-1} B_{\mu\nu} W V^{-1} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau d\sigma}
 \end{aligned}$$

e finalmente podemos escrever o primeiro termo da eq.(C.18) explicitamente:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma \delta x^\nu \frac{d}{d\tau} \left(V(\tau) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} V(\tau)^{-1} \right) = - \\
 & - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} (\partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\lambda, B_{\mu\nu}]) W V^{-1} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\sigma} - \\
 & - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V [T_{2\pi}(B) - T_\sigma(F), W^{-1} B_{\mu\nu} W] V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu - \\
 & - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} B_{\mu\nu} W V^{-1} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau d\sigma} \delta x^\nu. \quad (C.31)
 \end{aligned}$$

Temos que ter bem em mente que $T_{2\pi}(B)$ e V não dependem de σ , mas $T_{2\pi}$ sim. Analizando agora o termo (C.6)+(C.8), conseguimos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} d\sigma \left(-W^{-1} (\delta W) W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + W^{-1} B_{\mu\nu} \delta W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) &= \\
 &= \int_0^{2\pi} d\sigma [W^{-1} B_{\mu\nu} W, W^{-1} \delta W] \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (C.32)
 \end{aligned}$$

Para calcular esse comutador precisamos utilizar a eq.(C.22), então,

$$\begin{aligned}
 [W^{-1} B_{\mu\nu} W, W^{-1} \delta W] &= \left[W^{-1} B_{\mu\nu} W, \int_0^\sigma d\sigma' W_{\sigma'}^{-1} F_{\rho\lambda} W_{\sigma'} \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \delta x^\lambda - W^{-1} A_\lambda W \delta x^\lambda \right] = \\
 &= -[W^{-1} B_{\mu\nu} W, W^{-1} A_\lambda W \delta x^\lambda] + \left[W^{-1} B_{\mu\nu} W, \int_0^\sigma d\sigma' W_{\sigma'}^{-1} F_{\rho\lambda} W_{\sigma'} \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \delta x^\lambda \right] = \\
 &= -W^{-1} [B_{\mu\nu}, A_\lambda] W \delta x^\lambda + \left[W^{-1} B_{\mu\nu} W, \int_0^\sigma d\sigma' W_{\sigma'}^{-1} F_{\rho\lambda} W_{\sigma'} \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \delta x^\lambda \right]
 \end{aligned}$$

e a eq.(C.32) fica

$$\int_0^{2\pi} d\sigma \left[W^{-1} B_{\mu\nu} W, W^{-1} \delta W \right] \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} = - \int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} [B_{\mu\nu}, A_\lambda] W \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \\ + \int_0^{2\pi} d\sigma \left[W_\sigma^{-1} B_{\mu\nu} W_\sigma, \int_0^\sigma d\sigma' W_\sigma'^{-1} F_{\rho\lambda} W_\sigma' \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \delta x^\lambda \right] \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (C.33)$$

Agora, de posse das equações, eq.(C.33), eq.(C.31), eq.(C.14), e do termo (C.7), podemos calcular explicitamente a equação

$$\delta V V^{-1} = \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1} = V(\tau) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V(\tau)^{-1} + \\ - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} [B_{\mu\nu}, A_\lambda] W V^{-1} \delta x^\lambda \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} + \quad (C.34)$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V \left[W_\sigma^{-1} B_{\mu\nu} W_\sigma, \int_0^\sigma d\sigma' W_\sigma'^{-1} F_{\rho\lambda} W_\sigma' \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \delta x^\lambda \right] V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \\ - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} (\partial_\mu B_{\lambda\nu} + [A_\mu, B_{\lambda\nu}]) W V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \delta x^\lambda - \\ - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V [T_{2\pi}(B) - T_\sigma(F), W^{-1} B_{\mu\nu} W] V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu - \\ - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} B_{\mu\nu} W V^{-1} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau d\sigma} \delta x^\nu - \quad (C.35)$$

$$- \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} (\partial_\nu B_{\mu\lambda} + [A_\nu, B_{\mu\lambda}]) W V^{-1} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\lambda - \quad (C.36)$$

$$- \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} B_{\mu\nu} W V^{-1} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau d\sigma} \delta x^\mu + \quad (C.37)$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} \partial_\lambda B_{\mu\nu} W V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \delta x^\lambda \quad (C.38)$$

onde os termos (C.37) e (C.35) se cancelam pois podemos fazer $\mu \rightarrow \nu$ e $\nu \rightarrow \mu$, e $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. Reagrupando os termos C.34, C.36 e C.38 e obtemos

$$\delta V V^{-1} = \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1} = V(\tau) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V(\tau)^{-1} + \\ + \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} \{ [A_\lambda, B_{\mu\nu}] + \partial_\lambda B_{\mu\nu} + [A_\mu, B_{\nu\lambda}] + \\ + \partial_\mu B_{\nu\lambda} + [A_\nu, B_{\lambda\mu}] + \partial_\nu B_{\lambda\mu} \} W V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \delta x^\lambda + \\ + \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V \left[W_\sigma^{-1} B_{\mu\nu} W_\sigma, \int_0^\sigma d\sigma' W_\sigma'^{-1} F_{\rho\lambda} W_\sigma' \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \delta x^\lambda \right] V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} - \\ - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V [T_{2\pi}(B), W^{-1} B_{\mu\nu} W] V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu - \\ - \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V \left[\int_0^\sigma d\sigma' W_\sigma'^{-1} F_{\mu\nu} W_\sigma' \frac{dx^\mu}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau}, W^{-1} B_{\mu\nu} W \right] V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu$$

Tomando, é claro, $F_{\mu\nu} = F_{\rho\lambda} = 0$, que é a condição de independência no caminho para W , conseguimos

$$\begin{aligned} \delta V V^{-1} &= \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1} = V(\tau) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V(\tau)^{-1} + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V W^{-1} \{ D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} \} W V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \delta x^\lambda - \\ &- \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V [T_{2\pi}(B), W^{-1} B_{\mu\nu} W] V^{-1} \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \end{aligned}$$

Note ainda que V e $T_{2\pi}(B)$ não dependem de σ portanto, ainda podemos reagrupar os termos e conseguir definitivamente

$$\begin{aligned} \delta V V^{-1} &= \int_0^{2\pi} d\tau V (\delta T) V^{-1} = V(\tau) \left(\int_0^{2\pi} d\sigma W^{-1} B_{\mu\nu} W \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu \right) V(\tau)^{-1} + \\ &+ \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} d\sigma V(\tau) \left(W^{-1} \{ D_\lambda B_{\mu\nu} + D_\mu B_{\nu\lambda} + D_\nu B_{\lambda\mu} \} W \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \delta x^\lambda - \right. \\ &\left. - \left[\int_0^{2\pi} d\sigma' W^{-1}(\sigma') B_{\rho\nu} W(\sigma') \frac{dx^\rho}{d\sigma'} \frac{dx^\nu}{d\tau}, W^{-1} B_{\mu\nu} W \right] \frac{dx^\mu}{d\sigma} \delta x^\nu V(\tau)^{-1} \right) \end{aligned}$$

Apêndice D

Programa Mathematica

```
delta:=(m1^2Sin[e + Pi/4]^2 - m2^2Cos[e + Pi/4]^2) / ((m1^2Sin[e + Pi/4]^2  
+ m2^2Cos[e + Pi/4]^2Cos[e + Pi/4]Sin[e + Pi/4];  
g[k_,z_,e_]:= Sum[f[n,z] e^n/n!, {n, 0, k}];  
eq[k_,e_]:=D[g[k,z,e],{z,2}]+ D[g[k,z,e],{e,2}] + delta D[g[k,z,e],z];  
eqexp[k_,n_]:=D[eq[k,e],{e,n}] /. e-->0;  
rule[k_,n_]:=Simplify[Solve[eqexp[k,n]==0,f[n+2,z]],TimeConstraint-->10000];  
  
exec[k_,n_]:=Block[{ftest},ftest[n+2,z]=f[n+2,z] /.rule[k,n];  
f[n+2,z]=ftest[n+2,z][[1]];InputForm[n+2]>>>output.m;  
"*****">>>output.m;  
InputForm[f[n+2,z]]>>>output.m;  
"*****">>>output.m];  
  
calc[k_]:=Do[exec[k,n],{n,0,k-2}];  
  
f[0,z]:=(2/Pi)ArcCot[Exp[z]];  
  
f[1,z]:=0;
```

Apêndice E

Gráficos para expansão de g em ordem 20 no caso do ansatz polar

Nesta seção analisamos os gráficos tri-dimensionais para uma expansão da função g em ordem vinte com variação em z de -3 à 3 e variação em e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$. São feitos alguns cortes nos gráficos em g para alguns pontos com e fixo, e alguns pontos com z fixo. O objetivo é ver com um pouco mais de detalhes a variação da expansão da função g no eixo z , quando e está fixo, e no eixo e , quando z está fixo. Os gráficos da expansão da função g vem sempre acompanhados do gráfico da equação diferencial, que foi gerado pela substituição da expansão em ordem vinte de g na equação diferencial polar (3.134).

Segue abaixo os gráficos da expansão de g em ordem vinte, e das equações diferenciais, para as escolhas de $(m_1 = m_2 = 1)$, $(m_1 = 1 \ m_2 = 2)$, $(m_1 = 2 \ m_2 = 1)$ e $(m_1 = m_2 = 2)$ sempre para o caso polar.

E.0.1 O caso polar $m_1 = m_2 = 1$

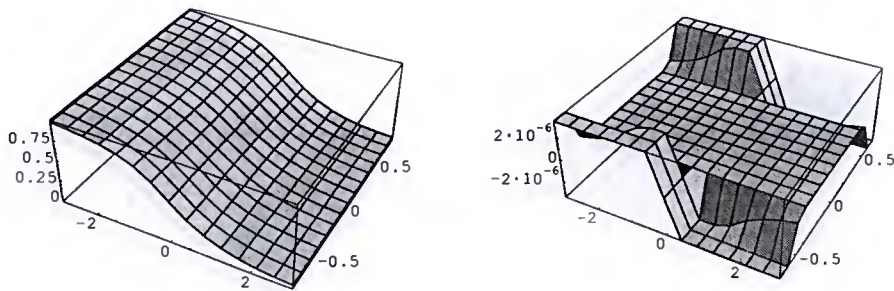


Figura E.1: Respectivamente os gráficos da função g e da equação diferencial, com variação no eixo z de -3 à 3 e variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

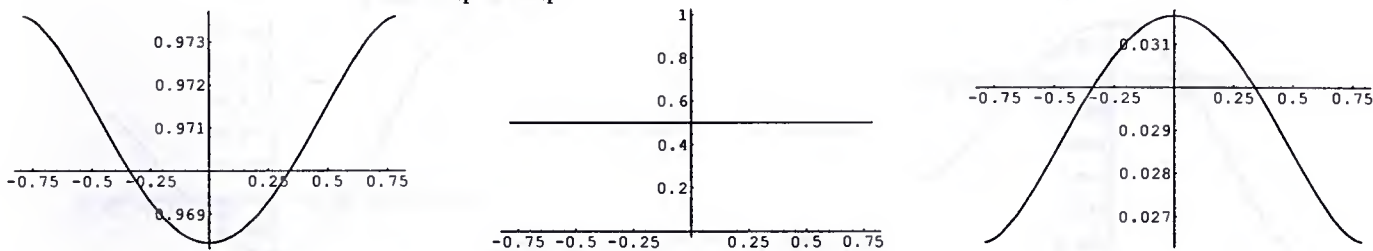


Figura E.2: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-3, 0, 3)$ em z , com variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

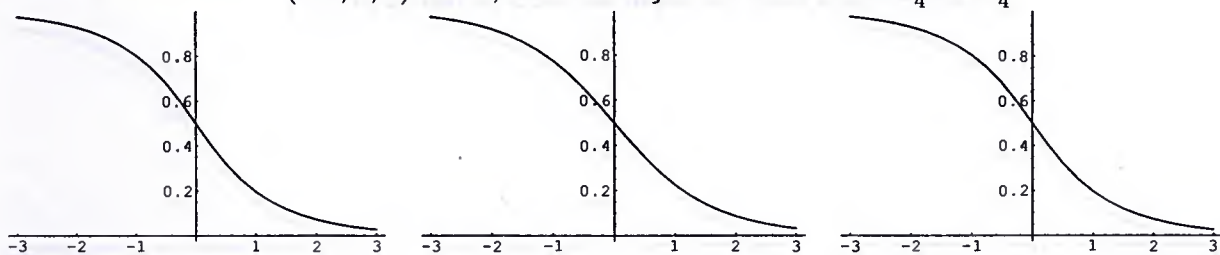


Figura E.3: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4})$ em e , com variação no eixo z de -3 à 3

E.0.2 O caso polar $m_1 = 1, m_2 = 2$

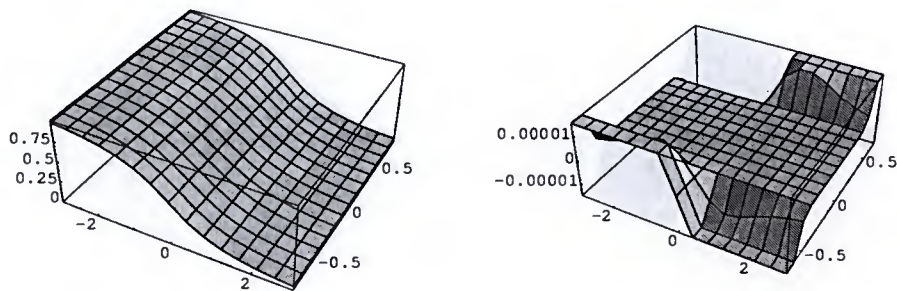


Figura E.4: Respectivamente os gráficos da função g e da equação diferencial, com variação no eixo z de -3 à 3 e variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

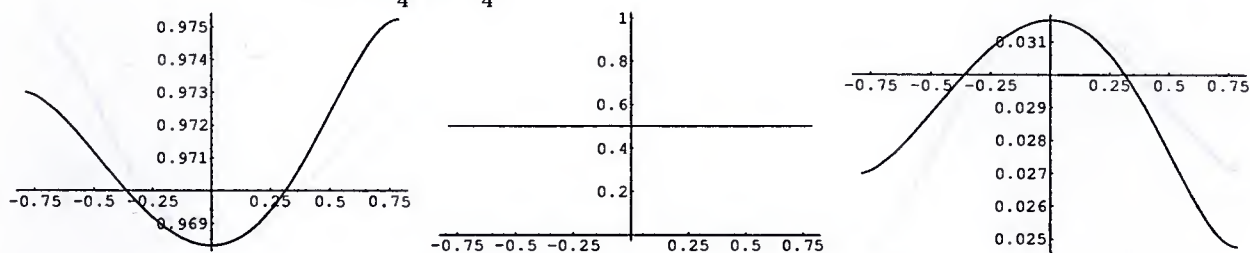


Figura E.5: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-3, 0, 3)$ em z , com variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

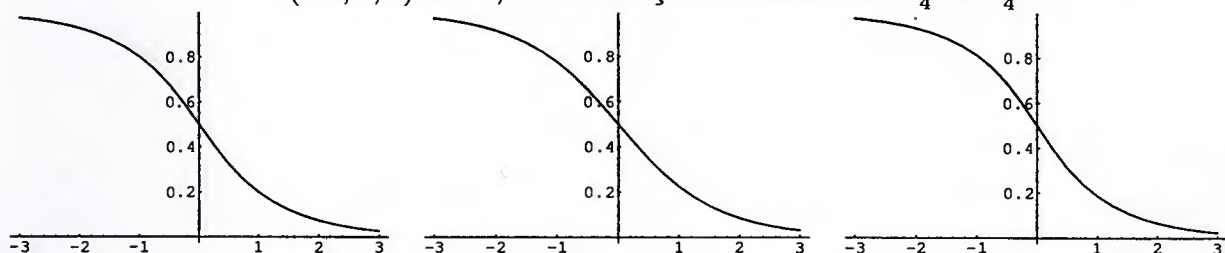


Figura E.6: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4})$ em e , com variação no eixo z de -3 à 3

E.0.3 O caso polar $m_1 = 2, m_2 = 1$

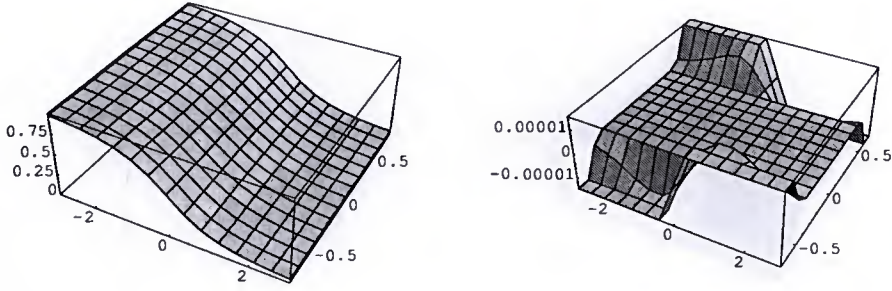


Figura E.7: Respectivamente os gráficos da função g e da equação diferencial, com variação no eixo z de -3 à 3 e variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

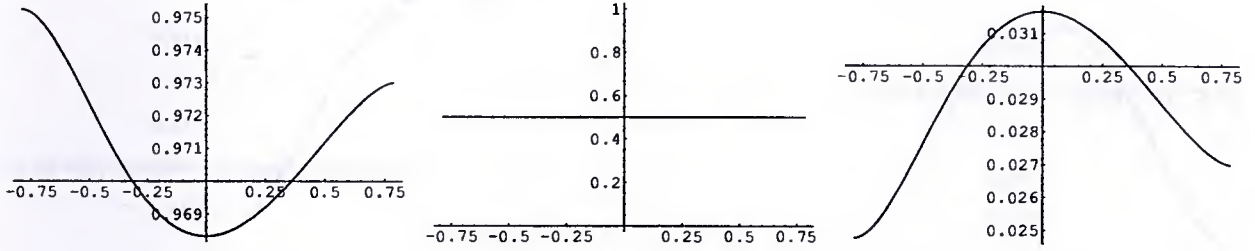


Figura E.8: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-3, 0, 3)$ em z , com variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

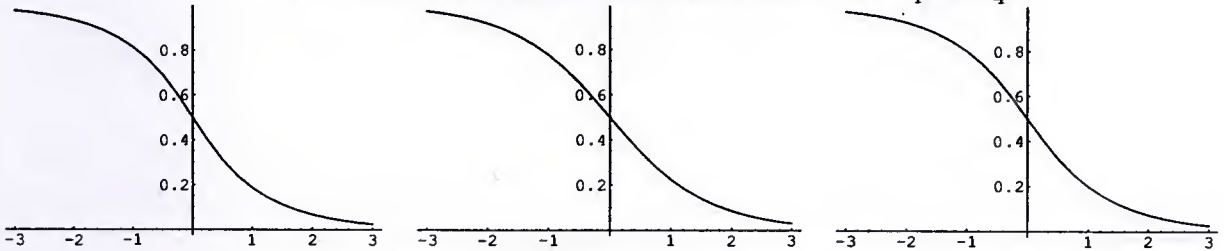


Figura E.9: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4})$ em e , com variação no eixo z de -3 à 3

E.0.4 O caso polar $m_1 = m_2 = 2$

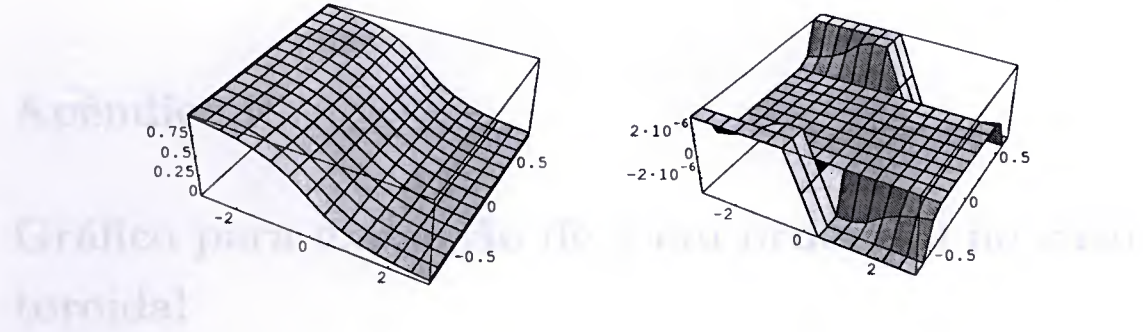


Figura E.10: Respectivamente os gráficos da função g e da equação diferencial, com variação no eixo z de -3 à 3 e variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

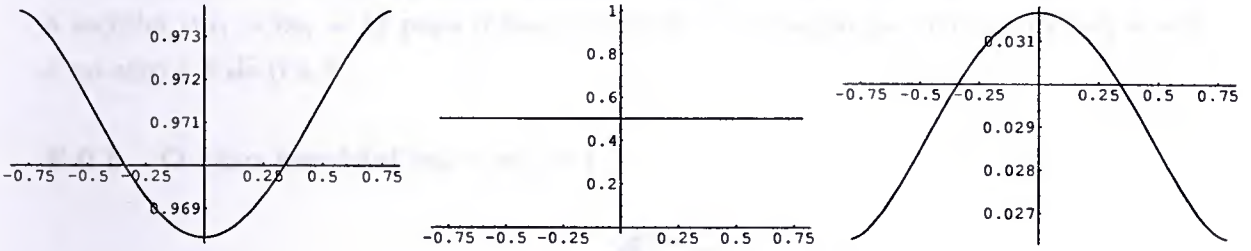


Figura E.11: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-3, 0, 3)$ em z , com variação no eixo e de $-\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{4}$

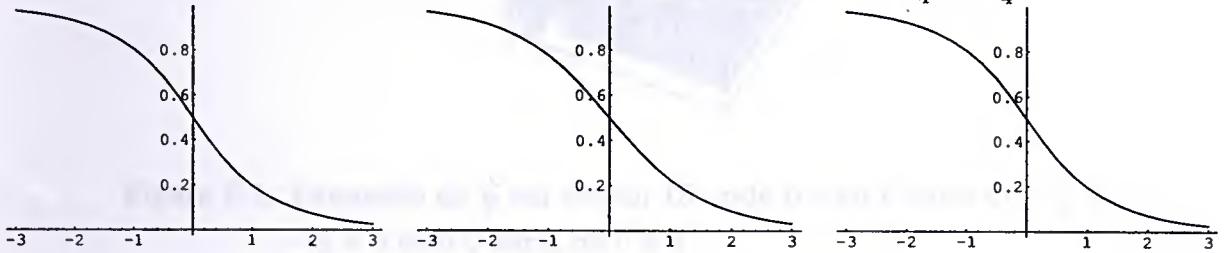


Figura E.12: Cortes do gráfico da função g para os três pontos fixos $(-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4})$ em e , com variação no eixo z de -3 à 3

Apêndice F

Gráfico para expansão de g em ordem 20 no caso toroidal

Nesta seção são obtidos os gráficos para a expansão de g em ordem 15, 36, e 60, com a escolha ($m_1 = m_2 = 1$) para o caso toroidal. A variação no eixo e é de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ e no eixo ζ é de 0 à 3.

F.0.5 O caso toroidal $m_1 = m_2 = 1$

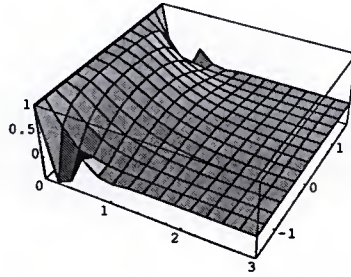


Figura F.1: Expansão de g em ordem 15 onde o eixo e varia de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ e o eixo ζ varia de 0 à 3

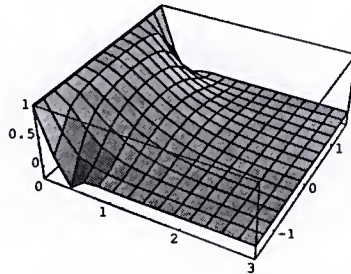


Figura F.2: Expansão de g em ordem 36 onde o eixo e varia de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ e o eixo ζ varia de 0 à 3

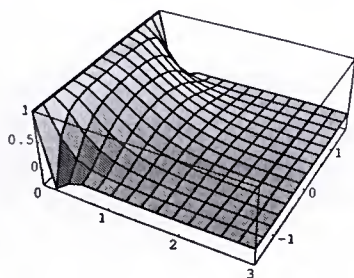


Figura F.3: Expansão de g em ordem 60 onde o eixo e varia de $-\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ e o eixo ζ varia de 0 à 3

Referências

- [1] Allan P. Fordy *Soliton theory: a survey of results* (Manchester University Press)
- [2] V.L. Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin)
- [3] Aschok Das *Integrable Models* (World Scientific, Singapore, (1989))
- [4] O.Babelon e L.A.Ferreira, *Integrability and Conformal Symmetry in Higher Dimensions: A Model whith Hopfion Solutions* (hep-th/0210154)
- [5] J.C. Brunelli *Dispersionless Limit of Integrable Models* (Brazilian Jornal of Physics, vol. 30, no. 2, June, (2000))
- [6] Derrick G.M. (J. Math. Phys. 5 1252, (1964))
- [7] P.G. Drazin and R.S. Johnson *Solitons: An Introduction* (Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1989)
- [8] L.A.Ferreira *Sistemas Integráveis* (Notas de Aula, dezembro de 1999)
- [9] L.A.Ferreira e A.V.Razumov, *Hopf solitons and area preserving diffeomorphisms of the sphere* (hep-th/0012176)
- [10] Gardner, C.S. *The Korteweg-de Vries equation and eneralizations. IV. The Korteweg-de Vries equation as Hamiltonian system.* (J. Math. Phys. 12, 1548-51, (1971))
- [11] Gardner, C.S., Greene, J.M., Kruskal, M.D. and Miura, R.M. *The Korteweg-de Vries equation and eneralizations. VI Methods for exact solution* (Commun. Pure Appl. Math. 27, 97-133, (1974))
- [12] J.F.Gomes *A Estrutura Algébrica dos Modelos Integráveis* (Tese apresentada a Universidade Estadual Paulista para a obtenção do Título de Livre Docente, Outubro de 2001)

- [13] Korteweg, D.J. and de Vries. *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves* (Philos. Mag. Ser. 5, 39, 422-43 (1895))
- [14] Kruskal, M. D., Miura, R. M., Gardner, C. S. and Zabusky, N. J. *Korteweg-de Vries equation and generalizations. V. Uniqueness and non existence of polynomial conservation laws.* (J.Math. Phys. 11, 952-60 (1970))
- [15] Lax, P. D. *Integrals of nonlinear equation of evolution and solitary waves* (Commun. Pure Appl. math. 21, 467-90 (1968))
- [16] Miura, R. M., Gardner, C. S. and Kruskal, M. D. *Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motions* (J. Math. Phys. 9, 1204-9 (1968))
- [17] Miura, R. M. *Korteweg-de Vries equation and generalizations I. A remarkable explicit nonlinear transformation* (J. Math. Phys. 9, 1202-4 (1968))
- [18] Orlando Alvarez, L.A.Ferreira e Sánchez Guillén *A New Approach to Integrable Theories in any Dimension* (hep-th/9710147)
- [19] Su, C.H. and Gardner, C.S. *Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries and Burgers equation* (J. Math. Phys. 10, 536-9 (1969))
- [20] Zabusky, N. J. and Kruskal, M. D. *Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states* (Phys. Rev. Lett. 15,240-3 (1965))

