

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

**LUCAS MANGILI ESTEVES**

**CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  COM REALIMENTAÇÃO PARCIAL DOS ESTADOS  
APLICADO A DIFERENTES SISTEMAS MECÂNICOS**

Ilha Solteira  
2020

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**LUCAS MANGILI ESTEVES**

**CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  COM REALIMENTAÇÃO PARCIAL DOS ESTADOS  
APLICADO A DIFERENTES SISTEMAS MECÂNICOS**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação

Prof. Dr. Rodrigo Cardim  
**Orientador**

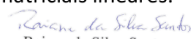
FICHA CATALOGRÁFICA  
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

E79c Esteves, Lucas Mangili.  
Controle robusto  $H^\infty$  com realimentação parcial dos estados aplicado a diferentes sistemas mecânicos / Lucas Mangili Esteves. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020  
70 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2020

Orientador: Rodrigo Cardim  
Inclui bibliografia

1. Realimentação de posição. 2. Realimentação de velocidade. 3. Controle  $H^\infty$ . 4. Suspensão ativa. 5. D-estabilidade. 6. Desigualdades matriciais lineares.

  
Raiane da Silva Santos  
Supervisora Técnica de Seção  
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação  
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação  
CRB/8 - 9999



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

TÍTULO DA TESE: Controle Robusto Hinf com Realimentação Parcial dos Estados Aplicado a Diferentes Sistemas Mecânicos

**AUTOR: LUCAS MANGILI ESTEVES**

**ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC (Participação Virtual)  
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)  
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Ilha Solteira, 30 de outubro de 2020

*Dedico esta tese à minha família  
por todo carinho, amor, compreensão e  
apoio que sempre me ofereceram.*

*“Educação é uma descoberta progressiva  
de nossa própria ignorância.”*

Voltaire

## **AGRADECIMENTOS**

É com muito carinho que dedico meus sinceros agradecimentos:

À minha família e minha namorada, por todo apoio, companheirismo e amor incondicional;

Ao meu orientador, professor Dr. Rodrigo Cardim, pela oportunidade oferecida, pelos ensinamentos, incentivo, confiança e paciência;

Aos professores do Departamento de Engenharia Elétrica da FEIS-UNESP, em especial ao professor Dr. Marcelo C. M. Teixeira, pelos ensinamentos e sugestões;

Aos meus companheiros do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) que me ajudaram neste trabalho de forma direta ou indireta;

Aos meus amigos, por todo companheirismo e amizade;

À Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP) como um todo, local onde estudei durante toda a minha graduação, mestrado e doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

Esta tese propõe o projeto e implementação prática de um controle  $\mathcal{H}_\infty$  robusto aplicado a alguns sistemas mecânicos (com foco num sistema de suspensão ativa), considerando um único vetor de ganhos de realimentação de estados. Uma característica importante, porém, são as limitações consideradas quanto ao acesso aos estados do sistema. Dois métodos são propostos, um que se utiliza realimentação apenas das variáveis de estado relacionadas às posições do sistema e outro que considera realimentação apenas das variáveis de estado relacionadas às velocidades. A estratégia de controle é baseada em desigualdades matriciais lineares (da sigla em inglês LMI), utilizando também a teoria de D-estabilidade, que permite ao projetista alocar os autovalores do sistema em malha fechada em uma região do semi-plano complexo negativo, o que, além de garantir a estabilidade, também garante que certos requisitos de desempenho do sistema realimentado sejam atendidos. A motivação do trabalho é obter resultados de controle satisfatórios mesmo com acesso limitado às variáveis de estado, sem a necessidade de qualquer tipo de estimativa das variáveis de estado consideradas inacessíveis. Portanto, os sistemas de controle propostos são opções interessantes como alternativas para o projeto de realimentação de estados de ordem completa para plantas com parâmetros incertos usando apenas realimentação da saída, considerando que não é necessário projetar um observador para estimar qualquer variável de estado da planta. Além disso, são relativamente mais baratos pelo fato de não haver necessidade de se medir todas as variáveis de estado da planta.

**Palavras-chave:** Realimentação de posição. Realimentação de velocidade. Controle  $\mathcal{H}_\infty$ . Suspensão Ativa. D-estabilidade. Desigualdades matriciais lineares.

## ABSTRACT

This thesis proposes a new design and practical implementation of a robust  $\mathcal{H}_\infty$  control applied to some mechanical systems (focusing on an active suspension system), considering a single state feedback gain vector. An important characteristic, though, is that limitations are considered for the state feedback. Two methods are presented, one that uses feedback only from state variables related to positions of the system and another that uses feedback only from state variables related to velocities. The control strategy is based on linear matrix inequalities (LMIs), using the theory of D-stability, which allows the designer to allocate the closed loop system eigenvalues in a negative complex semi-plane region, which, in addition to ensuring stability, also ensures meeting certain performance requirements of the feedback system. The paper motivation is to provide satisfactory control results even with limited states access, without any kind of estimation of the state variables that are not available. Therefore, the proposed control systems are interesting options as alternative for designing full state feedback for plants with uncertain parameters using only output feedback, considering that it is not needed to build an observer to estimate any plant state variable. Furthermore, they are relatively cheaper because it is not necessary to measure all state variables of the plant.

**Keywords:** Position feedback. Velocity feedback.  $\mathcal{H}_\infty$  Control. Active Suspension. D-stability. Linear Matrix Inequalities.

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

- **LMIs:** *Linear Matrix Inequalities* (Desigualdades matriciais lineares)
- **SLIT:** Sistema Linear Invariante no Tempo.
- **MIMO:** *Multiple-input and multiple-output* (Sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas).
- **SISO:** *Single-input and single-output* (Sistema com uma entrada e uma saída).
- **PO:** Porcentagem de *overshoot*.
- **MS:** Máximo sobressinal.
- **PID:** Proporcional integral derivativo.
- **LPC:** Laboratório de Pesquisa em Controle.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Região $S(\alpha, r, \theta)$ para alocação de autovalores. ....                                             | 24 |
| Figura 2 – Sistema de segunda ordem. ....                                                                               | 25 |
| Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema de controle projetado: Realimentação das posições. ....                        | 31 |
| Figura 4 – Diagrama de blocos da implementação do sistema de controle projetado: Realimentação das posições. ....       | 32 |
| Figura 5 – Modelo esquemático do sistema de pêndulo invertido. ....                                                     | 33 |
| Figura 6 – Posição angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição. ..                              | 35 |
| Figura 7 – Velocidade angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição. ....                         | 36 |
| Figura 8 – Sinal da entrada controlada na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição. ....                | 36 |
| Figura 9 – Diagrama de blocos do sistema de controle projetado: Realimentação das velocidades. ....                     | 39 |
| Figura 10 – Diagrama de blocos da implementação do sistema de controle projetado: Realimentação das velocidades. ....   | 40 |
| Figura 11 – Posição angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade. ....                        | 44 |
| Figura 12 – Velocidade angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade. ....                     | 44 |
| Figura 13 – Sinal da entrada controlada na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade. ....            | 45 |
| Figura 14 – Sistema de suspensão ativa da marca Quanser®, pertencente ao LPC-FEIS-UNESP. ....                           | 46 |
| Figura 15 – Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa. ....                                                      | 47 |
| Figura 16 – Saídas do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das posições. ....                         | 50 |
| Figura 17 – Entrada controlada do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das posições. ....             | 51 |
| Figura 18 – Saídas do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das posições. ....             | 51 |
| Figura 19 – Entrada controlada do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das posições. .... | 52 |

|                                                                                                                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 20 – Comportamento do sistema de suspensão ativa em implementação prática para uma frequência crescente como entrada no perfil da pista: Realimentação das posições.....  | 53 |
| Figura 21 – Saídas do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das velocidades. ....                                                                               | 55 |
| Figura 22 – Entrada controlada do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das velocidades. ....                                                                   | 56 |
| Figura 23 – Saídas do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das velocidades. ....                                                                   | 57 |
| Figura 24 – Entrada controlada do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das velocidades. ....                                                       | 57 |
| Figura 25 – Comportamento do sistema de suspensão ativa em implementação prática para uma frequência crescente como entrada no perfil da pista: Realimentação das velocidades... | 58 |
| Figura 26 – Diagrama de blocos do sistema de controle a ser projetado: Realimentação mista. ....                                                                                 | 60 |
| Figura 27 – Diagrama de blocos do sistema de controle a ser implementado: Realimentação mista. ....                                                                              | 61 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Parâmetros do sistema de suspensão ativa Quanser..... | 48 |
|------------------------------------------------------------------|----|

## SUMÁRIO

|          |                                                                                                 |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                                               | <b>15</b> |
| <b>2</b> | <b>CONTROLE ROBUSTO <math>\mathcal{H}_\infty</math> E <math>\mathcal{D}</math>-ESTABILIDADE</b> | <b>18</b> |
| 2.1      | SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO COM INCERTEZAS                                           | 18        |
| 2.2      | UMA BREVE HISTÓRIA DAS LMIS NA TEORIA DE CONTROLE                                               | 20        |
| 2.3      | CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$                                                           | 21        |
| 2.4      | A TEORIA DA $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE                                                         | 24        |
| <b>3</b> | <b>O CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE POSIÇÃO</b>                                                  | <b>28</b> |
| 3.1      | TEORIA DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE POSIÇÃO                                                 | 28        |
| 3.2      | EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES                                 | 33        |
| 3.3      | CONCLUSÕES PARCIAIS                                                                             | 37        |
| <b>4</b> | <b>O CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE</b>                                               | <b>38</b> |
| 4.1      | TEORIA DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE                                              | 38        |
| 4.2      | EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS VELOCIDADES                              | 43        |
| 4.3      | CONCLUSÕES PARCIAIS                                                                             | 45        |
| <b>5</b> | <b>SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA QUANSER®</b>                                                      | <b>46</b> |
| <b>6</b> | <b>SIMULAÇÕES E RESULTADOS PRÁTICOS EM LABORATÓRIO</b>                                          | <b>49</b> |
| 6.1      | SUSPENSÃO ATIVA COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES                                                  | 49        |
| 6.2      | SUSPENSÃO ATIVA COM REALIMENTAÇÃO DAS VELOCIDADES                                               | 54        |
| <b>7</b> | <b>PRETENSÃO PARA PESQUISAS FUTURAS: CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO MISTA</b>                       | <b>59</b> |
| <b>8</b> | <b>CONCLUSÃO</b>                                                                                | <b>62</b> |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b>                                                                              | <b>64</b> |
|          | <b>APÊNDICE A – DEFINIÇÕES DE ALGUMAS MATRIZES ESPECIAIS</b>                                    | <b>68</b> |
|          | <b>APÊNDICE B – ESTABILIDADE DE LYAPUNOV</b>                                                    | <b>69</b> |
|          | <b>APÊNDICE C – COMPLEMENTO DE SCHUR</b>                                                        | <b>70</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade e o projeto de controladores para sistemas lineares são áreas de pesquisa amplamente exploradas. Este é um campo com inúmeras opções de técnicas de controle, sendo que algumas delas usam uma função de Lyapunov, juntamente com desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities*, LMIs) para garantir a estabilidade do sistema. Exemplos das principais vantagens do uso de LMIs neste tipo de projeto são a inserção de índices de desempenho (taxa de decaimento, porcentagem de *overshoot*, entre outras) no sistema em questão e o fato de que as LMIs podem ser solucionadas eficientemente em microcomputadores utilizando *softwares* já bastante conhecidos e difundidos, como mostrado em Gahinet *et al.* (1995).

Segundo Chen (1999), as pesquisas e publicações envolvendo a teoria de Lyapunov cresceram muito nas décadas que antecederam seu trabalho, sendo ainda hoje uma teoria muito explorada. Como apresentado em Buzachero (2010), isso abriu um leque muito grande para diversas abordagens, como análise de estabilidade robusta de sistemas lineares (LEITE *et al.*, 2004), controle robusto  $\mathcal{H}_2$  (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001, ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2007, ROSA FILHO, 2015), controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  (CHILALI; GAHINET, 1996, DE OLIVEIRA *et al.*, 2014), projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a falhas estruturais com realimentação das derivadas dos estados (ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008), projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a falhas estruturais com realimentação dos estados (PASCOAL; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009) e projeto de controladores baseados em LMIs utilizando realimentação derivativa e sistemas chaveados com estrutura variável (CARDIM, 2009). O projeto de controladores robustos pode ser também aplicado para sistemas não-lineares (SILVA, 2009).

O trabalho aqui apresentado, por sua vez, aborda um tema específico, ligado à limitação do acesso às variáveis de estado dos sistemas. Em muitos casos ter-se acesso a todas as variáveis de estado de um sistema é algo bastante complicado. Uma maneira de superar esse problema, aplicada muitas vezes, é usar alguma forma de estimativa para esses estados que são de difícil acesso. Além disso, sabe-se que esta estimativa se torna mais difícil quando a planta possui parâmetros incertos. No entanto, outra alternativa muito interessante é a implementação de uma técnica de controle que não dependa de todos os estados do sistema. Como exemplo, para alguns sistemas mecânicos o vetor de velocidade não é de acesso tão simples, enquanto que em outros casos o problema é ter acesso aos estados das posições. A solução deste problema pode, portanto, ser de grande importância no projeto e implementação

de controle para esta classe de sistemas. Um método para controlar sistemas mecânicos incertos, onde não há necessidade de se medir velocidades, por exemplo, torna as implementações mais baratas, algo que é altamente valorizado.

Em Shin *et al.* (2013) foi realizado um estudo sobre o controle de posição não-linear para motor de passo de ímã permanente usando apenas realimentação de posição, uma vez que em aplicações industriais a medição de velocidade não tem sido amplamente utilizada devido à preocupação com sua resolução ou custo. Em Guerrero *et al.* (2020) os autores apresentam um controle de velocidade para motores CC medindo apenas a posição angular. Avila-Becerril *et al.* (2016) projetaram um controlador dinâmico que é baseado apenas em medições das posições das articulações e juntas para robôs de articulação flexível. Também trabalhando com robôs, Faigl e Cízek (2019) desenvolveram um controle de locomoção adaptável para um tipo de robô com seis membros para percorrer terrenos irregulares, utilizando somente realimentação de posição. Huang e Huang (2019), por sua vez, projetaram um controle adaptativo para robôs baseado em técnica de aproximação de funções (do inglês FAT - *function approximation technique*) apenas com medições de posição. Salam (1987) apresenta um método onde apenas a realimentação da velocidade é necessária para conseguir o controle de para robôs manipuladores. Um estudo que investiga o problema do controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  quantizado para sistemas de suspensão ativa é apresentado em Li, Gao e Liu (2011), enquanto uma abordagem diferente é feita em Sun *et al.* (2014), onde uma técnica de controle tolerante a falhas é proposta para lidar com o problema de falhas desconhecidas do atuador de sistemas de suspensão ativa.

Este trabalho propõe o projeto e a implementação prática de um controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  aplicado a um sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser® (QUANSER, 2009), onde a realimentação de estados é realizada com certas limitações. Em um dos projetos apenas as variáveis de estado das posições são realimentadas, enquanto no outro somente as variáveis de estado das velocidades são utilizadas na realimentação. Em nenhum dos métodos há necessidade de se medir ou estimar as variáveis de estado do sistema que não fazem parte da realimentação. O controle  $\mathcal{H}_\infty$  é particularmente interessante por aumentar a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios externos e lidar bem com incertezas politópicas presentes nos sistemas apresentados, enquanto a teoria da D-estabilidade, usada na implementação das LMIs, oferece um maior controle sobre o comportamento transitório do sistema. Portanto, os sistemas de controle propostos são opções interessantes como alternativas para o projeto de realimentação de estados de ordem completa para plantas com parâmetros incertos usando apenas realimentação da saída, considerando que não é necessário projetar um observador

para estimar qualquer variável de estado da planta. Além disso, são relativamente mais baratos pelo fato de não haver necessidade de se utilizar sensores para medir todas as variáveis de estado da planta.

O *software* MATLAB<sup>®</sup>, o pacote Yalmip (Löfberg, 2004) e o *solver* LMILab foram utilizados para a realização do projeto de controle aplicando as LMIs. O principal objetivo deste trabalho é mostrar que mesmo com um acesso de realimentação de estados limitado (um caso particular de realimentação da saída) é possível obter um desempenho de controle satisfatório para certos sistemas mecânicos.

O trabalho foi dividido da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresentou-se a teoria do controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  empregado no projeto do controlador, citando suas principais características, vantagens e desvantagens. É apresentada também a teoria da D-estabilidade, deixando claro o objetivo para sua utilização no trabalho.

No Capítulo 3 consta o método do projeto de controle para sistemas mecânicos via realimentação das posições, além de um exemplo de sua aplicação.

No Capítulo 4 é apresentado o método do projeto de controle para sistemas mecânicos via realimentação das velocidades, também com um exemplo de sua aplicação.

No Capítulo 5 consta o modelo e principais características do sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser<sup>®</sup>.

No Capítulo 6 apresenta-se todos os resultados obtidos nas simulações (realizadas via o *software* MATLAB) e nas implementações práticas em laboratório.

No Capítulo 7 é introduzida a ideia do controlador misto, que trabalha com a realimentação de uma parcela das variáveis de estado das posições e uma parcela das variáveis de estado das velocidades.

Finalmente, no Capítulo 8 são apresentadas as conclusões de todas as atividades realizadas no presente trabalho.

## 2 CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ E D-ESTABILIDADE

Há muitos anos o controle automático tem sido indispensável para o desenvolvimento da ciência e tecnologia, especialmente na área da engenharia, devido a sua importância nos processos de produção industrial, na indústria aeroespacial, indústria automotiva, dentre tantos outros setores. Dessa forma, o estudo de problemas acoplados à teoria de controle cresceu muito nas últimas décadas e uma grande parte destes estudos estão associados com análises de estabilidade e com projetos de novos controladores, sendo que parte desses projetos são baseados em LMIs.

Neste capítulo será apresentada uma breve introdução às LMIs e em seguida as teorias por trás do tipo de controlador empregado neste trabalho (controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$ ). Antes disso, no entanto, será introduzido o conceito de sistema linear invariante no tempo (SLIT) com incertezas na planta, visto que este é o tipo de sistema que será abordado no projeto dos controladores desta tese.

### 2.1 SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO COM INCERTEZAS

O estado de um sistema é descrito por meio de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem escrito em termos das variáveis de estado. Estas equações diferenciais de primeira ordem podem ser escritas de forma compacta como (DORF; BISHOP, 2001, p. 96):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

sendo  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  a entrada controlada,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a matriz de estado e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  a matriz de entrada controlada. A equação diferencial de estado relaciona a taxa de variação do estado do sistema aos estados do sistema e aos sinais de entrada. Em geral, as saídas de um sistema linear podem ser relacionadas com as variáveis de estado e com os sinais de entrada pela equação de saída apresentada em (2) (DORF; BISHOP, 2001, p. 97).

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (2)$$

sendo  $y(t) \in \mathbb{R}^q$  a saída controlada,  $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$  a matriz de saída e  $D \in \mathbb{R}^{q \times m}$  a matriz de transmissão direta.

A equação (1) é a equação de estado de um sistema linear invariante no tempo, livre de incertezas, enquanto a equação (2) é a equação de saída para o mesmo sistema. O modelo matemático apresentado em (1) é muito usado para descrever sistemas mecânicos, como pode ser visto em Ogata (2000, p. 27).

Em certos casos, no entanto, a planta do sistema pode apresentar parâmetros incertos. Além disso, em alguns sistemas é considerada a existência de uma ou mais entradas exógenas, que influenciam a dinâmica das variáveis de estados e das saídas desses sistemas.

Considera-se, então, o seguinte modelo para sistema linear incerto invariante no tempo, descrito na forma de variáveis de estado:

$$\dot{x}(t) = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t) + H(\beta)\omega(t), \quad (3)$$

$$y(t) = C(\beta)x(t) + D(\beta)u(t) + G(\beta)\omega(t), \quad (4)$$

sendo  $\omega(t) \in \mathbb{R}^p$  a entrada exógena limitada.  $A(\beta), B(\beta), C(\beta), D(\beta), H(\beta)$  e  $G(\beta)$  são matrizes de dimensões adequadas que descrevem o sistema e pertencem a um conjunto convexo de natureza politópica dado por

$$(A, B, C, D, H, G)(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i (A, B, C, D, H, G)_i, \quad \beta \in \Lambda_p, \quad (5)$$

sendo que  $N$  é dado pela relação  $N = 2^\Phi$ , com  $\Phi$  sendo o número de elementos incertos distintos existentes nas matrizes  $(A, B, C, D, H, G)$ , e  $(A, B, C, D, H, G)_i$  representam os vértices do politopo formado pelas incertezas.  $\beta_i$  são parâmetros invariantes no tempo pertencente ao simplex unitário  $\Lambda_p$  definido como

$$\Lambda_p = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^n: \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, \quad i \in \mathbb{K}_N, \mathbb{K}_N = \{1, 2, \dots, N\} \right\} \quad (6)$$

Supondo que o vetor de estados esteja disponível para realimentação, considera-se a utilização da lei de controle clássica, dado por Boyd *et al.* (1994):

$$u(t) = -Kx(t). \quad (7)$$

Substituindo (7) em (3) e (4), tem-se o seguinte sistema de malha fechada:

$$\dot{x}(t) = (A(\beta) - B(\beta)K)x(t) + H(\beta)\omega(t), \quad (8)$$

$$y(t) = (C(\beta) - D(\beta)K)x(t) + G(\beta)\omega(t). \quad (9)$$

Assim, tem-se em (8)-(9) um sistema linear incerto invariante no tempo em malha fechada.

## 2.2 UMA BREVE HISTÓRIA DAS LMIS NA TEORIA DE CONTROLE

A história das LMIs na análise de sistemas dinâmicos vem de mais de 100 anos atrás. A história começa por volta de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho seminal introduzindo o que hoje chamamos de teoria de Lyapunov. Ele mostrou que a equação diferencial (10) é assintoticamente estável (ou seja, todas as trajetórias convergem para zero) se e somente se existir uma matriz  $P$  positiva definida tal que a inequação (11) seja verdadeira (BOYD *et al.*, 1994).

**Observação 1:** As definições de matriz positiva (negativa) definida (semidefinida) são apresentadas no Apêndice A, enquanto o conceito de estabilidade de Lyapunov consta no Apêndice B.

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad (10)$$

$$A^T P + PA < 0. \quad (11)$$

O requisito  $P > 0$ ,  $A^T P + PA < 0$  é o que hoje chamamos de desigualdade de Lyapunov em  $P$ , que é uma forma especial de uma LMI. Lyapunov também mostrou que esta primeira LMI poderia ser explicitamente solucionada. De fato, pode-se escolher qualquer  $Q = Q^T > 0$  e então resolver a equação linear  $A^T P + PA = -Q$  para a matriz  $P$ , que é garantida como positiva-definida se o sistema (10) for estável. Em resumo, a primeira LMI usada para analisar a estabilidade de um sistema dinâmico foi a desigualdade de Lyapunov (11), que

pode ser solucionada analiticamente (solucionando um conjunto de equações lineares) (BOYD *et al.*, 1994).

O próximo marco importante ocorre na década de 1940. Lur'e, Postnikov e outros na União Soviética aplicaram os métodos de Lyapunov a alguns problemas práticos específicos na engenharia de controle, especialmente, o problema da estabilidade de um sistema de controle com uma não-linearidade no atuador. Embora não tenham explicitamente formado desigualdades matriciais, seus critérios de estabilidade têm a forma de LMIs. Essas desigualdades foram reduzidas a desigualdades polinomiais que foram então verificadas “à mão” (pois, desnecessário dizer, eram sistemas pequenos). Ainda assim, eles estavam justificadamente empolgados com a ideia de que a teoria de Lyapunov poderia ser aplicada a problemas práticos importantes (e difíceis) na engenharia de controle. Em resumo, Lur'e e outros foram os primeiros a aplicar os métodos de Lyapunov a problemas práticos de engenharia de controle. As LMIs resultantes foram resolvidas analiticamente, manualmente. É claro que isso limitou sua aplicação a sistemas pequenos (segunda, terceira ordem) (BOYD *et al.*, 1994).

Ainda de acordo com Boyd *et al.* (1994), o importante papel das LMIs na teoria de controle já era reconhecido no início dos anos 1960, especialmente por Yakubovich (YAKUBOVICH, 1962, 1964, 1967). No início dos anos 80 foi reconhecido que muitas LMIs podiam ser resolvidas por computador através de programação convexa e no final dos anos 80 foram desenvolvidos algoritmos de ponto interior para LMIs. É justo dizer que Yakubovich é o pai do campo e Lyapunov é o avô. O novo desenvolvimento é a capacidade de solucionar diretamente LMIs.

### 2.3 CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$

Formulado pela primeira vez por Zames (1981) a síntese de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser tratada como um problema de otimização no domínio da frequência. O projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  busca minimizar o maior pico da resposta em frequência do sistema e pode ser utilizado quando os níveis de desempenho e estabilidade com respeito a distúrbios externos devem ser garantidos (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005).

Métodos para resolver o problema de projeto dos controladores  $\mathcal{H}_\infty$  foram desenvolvidos nas últimas décadas, por exemplo, os métodos baseados em desigualdades matriciais lineares, os quais tornam o projeto de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  de ordem completa num problema de otimização convexa (BOYD *et al.*, 1994).

Muitos objetivos do controle clássico, como atenuação de distúrbios, estabilização robusta de sistemas incertos ou modelagem da resposta de malha aberta podem ser expressos em termos de desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  e abordados por técnicas de síntese  $\mathcal{H}_\infty$  (DOYLE *et al.*, 1989, FRANCIS, 1987). Como ela envolve apenas a resolução de duas equações de Riccati, a síntese  $\mathcal{H}_\infty$  tem uma baixa complexidade quando comparada a algumas outras técnicas. No entanto, seu projeto lida principalmente com aspectos de domínio de frequência e oferece pouco controle sobre o comportamento transitório e a localização dos polos de malha fechada. Em contraste, um tempo de resposta satisfatório e o amortecimento de malha fechada podem ser obtidos forçando os polos de malha fechada em uma sub-região adequada do semiplano real negativo. Além disso, dinâmicas rápidas do controlador podem ser evitadas proibindo-se polos de malha fechada muito grandes (o que geralmente é desejado para implementação digital). Uma forma de ajustar simultaneamente o desempenho  $\mathcal{H}_\infty$  e o comportamento transitório é, portanto, combinar os objetivos do  $\mathcal{H}_\infty$  e do posicionamento de polos (CHILALI; GAHINET, 1996).

Como citado em Cabello (2014), o projeto  $\mathcal{H}_\infty$  consiste em reduzir a norma infinito da função de transferência da saída de desempenho com respeito às entradas exógenas, o que representa a minimização do maior pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada. No caso de sistemas multivariáveis (MIMO), a resposta em frequência refere-se ao diagrama de valores singulares, e no caso de sistemas de única entrada e única saída (SISO) refere-se ao diagrama de Bode (SKOGESTAD; POSTLETHWAITE, 2005, ZHOU; DOYLE, 1998).

Considerando-se, então, que o sistema (8)-(9) é excitado por uma entrada exógena  $\omega(t)$ , com energia finita. A norma  $\mathcal{H}_\infty$  estabelece um limitante para a influência da entrada exógena  $\omega(t)$  na saída  $y(t)$  (DE OLIVEIRA *et al.*, 2014), calculado como

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \neq 0} \frac{\|y(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2}, \quad \omega(t) \in \mathcal{L}_2, \quad (12)$$

em que  $H(s)$  é a função de transferência que relaciona a saída  $y(t)$  e a entrada exógena  $\omega(t)$  do sistema (8)-(9),  $\|\cdot\|_2$  é a norma euclidiana e  $\mathcal{L}_2$  representa o conjunto de todas as trajetórias, tais que  $\|\xi\|_2^2 < \infty$ .

O custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  ótimo do sistema é definido como o valor mínimo de  $\gamma$ , com  $\gamma > 0$  e finito, tal que

$$\|y(t)\|_2 < \gamma \|\omega(t)\|_2, \quad (13)$$

para qualquer saída  $y(t) \in \mathcal{L}_2$  computada como resposta a qualquer entrada  $\omega(t) \in \mathcal{L}_2$ .  
Então:

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma. \quad (14)$$

Considera-se agora a função quadrática de Lyapunov:

$$v(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0. \quad (15)$$

Se a desigualdade (16) é verdadeira, então a estabilidade do sistema realimentado (8)-(9) com o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$  é assegurada (BOYD *et al.*, 1994).

$$\dot{v}(x) + y^T y - \gamma^2 \omega^T \omega < 0. \quad (16)$$

O objetivo em questão é obter uma matriz de ganho de realimentação  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  que estabilize o sistema (8)-(9) e, simultaneamente, minimize o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste contexto, segue o teorema.

**Teorema 1.** (BOYD *et al.*, 1994) *O sistema (8)-(9) é assintoticamente estável se, dado um escalar  $\mu > 0$ , existirem matrizes  $X = X^T > 0$  e  $M$ , de dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} & \min \mu \\ & \text{s. a } X = X^T > 0 \\ & \begin{bmatrix} \text{He}\{A_i X - B_i M\} & H_i & X C_i^T - M^T D_i^T \\ * & -\mu I & G_i^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

para  $i \in \mathbb{K}_N$ ,  $\mathbb{K}_N = \{1, 2, \dots, N\}$ , sendo  $\gamma^2 = \mu > 0$ . Se (17) for factível, então a matriz de ganho de realimentação é dada por  $K = M X^{-1}$  e assegura  $\|H(s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$ .  $\text{He}\{\cdot\}$  é o operador hermitiano,  $\text{He}\{U\} = U + U^T$ .

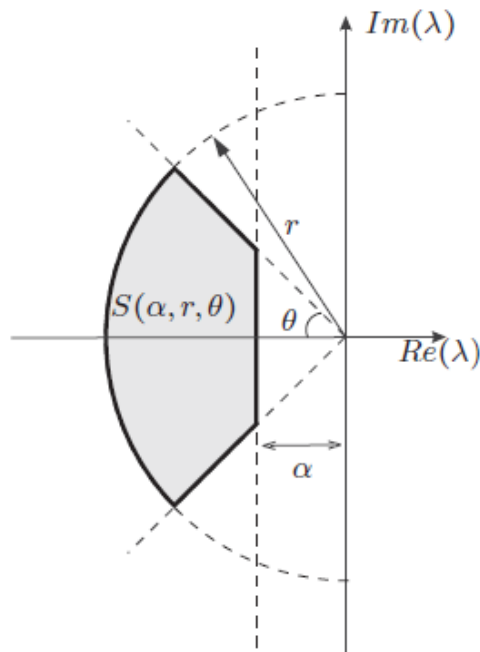
A prova deste teorema pode ser vista em Boyd *et al.* (1994).

## 2.4 A TEORIA DA $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE

A estabilização do sistema (8)-(9) pode não ser o suficiente para um desempenho adequado em aplicações práticas, pois a maioria dos projetos de controle deve atender certos índices de desempenho. Diversas vezes é necessário que os autovalores de malha fechada do sistema estejam alocados dentro de uma determinada região de interesse, com o propósito de assegurar limites para parâmetros como o máximo sobressinal (em inglês, *overshoot*), tempo de subida e tempo de estabelecimento. A porcentagem de *overshoot* (PO) é definida como a porcentagem do máximo sobressinal em relação ao valor de regime permanente da saída. O máximo sobressinal (MS), por sua vez, é a diferença entre o valor de pico e o valor de regime permanente da saída.

Essa região  $S(\alpha, r, \theta)$ , que pode ser vista na Figura 1, é definida em (CHILALI; GAHINET, 1996) e utiliza o conceito de  $\mathcal{D}$ -estabilidade para a alocação dos autovalores (DE OLIVEIRA *et al.*, 2014).

**Figura 1** – Região  $S(\alpha, r, \theta)$  para alocação de autovalores.



Fonte: (DE OLIVEIRA *et al.*, 2014).

Na região  $S(\alpha, r, \theta)$  os autovalores complexos do sistema (na forma  $c \pm jb$ ) satisfazem:

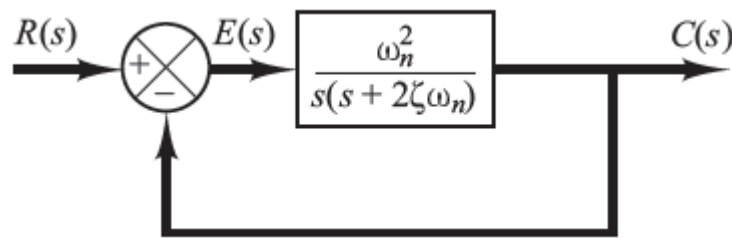
$$S(\alpha, r, \theta) = \begin{cases} c < -\alpha < 0, \\ |c \pm jb| < r, \\ \tan(\theta) c < -|b|. \end{cases} \quad (18)$$

A primeira restrição em (18) representa um semi-plano à esquerda da linha vertical que passa pelo ponto  $(-\alpha, 0)$ , com  $\alpha > 0$ . A segunda restrição em (18) representa um disco de raio  $r$  centrado na origem e a terceira e última restrição de (18) limita o argumento  $\theta$  dos elementos do conjunto.

Em Faria (2005) define-se que: Dada uma matriz  $A$  quadrada e uma região  $S(\alpha, r, \theta)$  localizada no lado esquerdo do plano complexo,  $A$  é considerada D-estável se todos os autovalores de  $A$  pertencem a  $S(\alpha, r, \theta)$ .

Em sistemas de segunda ordem, o comportamento dinâmico do sistema de segunda ordem pode ser descrito em termos de dois parâmetros:  $\zeta$  (coeficiente de amortecimento) e  $\omega_n$  (frequência natural não amortecida) (OGATA, 2000, p. 151). Na Figura 2 mostra-se o diagrama de blocos para um sistema de segunda ordem genérico.

**Figura 2** – Sistema de segunda ordem.



Fonte: (OGATA, 2000, p. 151).

A forma padrão do sistema de segunda ordem é dada, portanto, através da seguinte função de transferência de malha fechada:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (19)$$

Caso o coeficiente de amortecimento seja tal que  $0 < \zeta < 1$ , os polos de malha fechada são complexos conjugados e se situam no semiplano esquerdo do plano complexo. O sistema é então chamado subamortecido, e a resposta transitória é oscilatória. Se  $\zeta = 0$ , a resposta transitória não decai (não-amortecido). Se  $\zeta = 1$ , o sistema é denominado criticamente amortecido. Os sistemas superamortecidos correspondem a  $\zeta > 1$ . Na prática, antes de atingir o regime permanente, a resposta transitória de um sistema de controle apresenta, frequentemente, oscilações amortecidas (OGATA, 2000, p. 151).

Considera-se as seguintes substituições de variáveis para a região  $S(\alpha, r, \theta)$ , de acordo com Chilali e Gahinet (1996):  $r = \omega_n$ ,  $\zeta = \cos(\theta)$  e  $\alpha = \zeta \omega_n$ . Quando os valores próprios de um sistema de segunda ordem pertencem à região  $S(\alpha, r, \theta)$ , o sistema realimentado possui taxa de decaimento  $\alpha$  mínima, coeficiente de amortecimento  $\zeta > \cos(\theta)$  mínimo e frequência amortecida  $\omega_d < r \sin(\theta)$  máxima (CHILALI; GAHINET, 1996).

O teorema a seguir apresenta uma condição suficiente para restringir os autovalores de cada vértice do politopo, em malha fechada, na região  $S(\alpha, r, \theta)$ .

**Teorema 2.** (CHILALI e GAHINET, 1996) O sistema (8)-(9), com a lei de controle  $u(t) = -Kx(t)$  possui autovalores na região  $S(\alpha, r, \theta)$  se existirem as matrizes  $X = X^T > 0$  e  $M$ , de dimensões adequadas, tais que:

$$A_i X + X A_i^T - B_i M - M^T B_i^T + 2\alpha X < 0, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & A_i X - B_i M \\ * & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \cos(\theta)(A_i X - X A_i^T - B_i M + M^T B_i^T) \\ * & \Gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (22)$$

sendo  $\Gamma = \sin(\theta)(A_i X + X A_i^T - B_i M - M^T B_i^T)$ ,  $i \in \mathbb{K}_N$  e a matriz de ganho de realimentação é dada por  $K = MX^{-1}$ .

A prova deste teorema pode ser vista em Chilali e Gahinet (1996).

Juntos, os Teoremas 1 e 2 permitem o projeto de um controlador robusto  $\mathcal{H}_\infty$  que utiliza uma matriz de ganhos fixa para estabilizar o sistema realimentado e garantir que seus polos se encontram na região D-estável. A utilização desse controlador único, por diversas vezes, é suficiente para resolver o problema de controle. Entretanto, os resultados encontrados

podem ser conservadores, restringindo a região de factibilidade das LMIs (DE OLIVEIRA *et al.*, 2014).

O próximo passo é, portanto, trabalhar com o conjunto de LMIs do controle  $\mathcal{H}_\infty$  e da D-estabilidade aplicado aos sistemas de controle propostos (o sistema com realimentações das posições e os sistemas com realimentação das velocidades).

### 3 O CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE POSIÇÃO

Apresenta-se nesta seção o primeiro método proposto nesta tese. Nele, considera-se que um sistema mecânico tem como variáveis de estado grandezas relacionadas a posições e velocidades. No entanto, apesar de no projeto considerar-se acesso a todas as variáveis de estado da planta, na implementação é considerado acesso somente às variáveis de estado de posição para a realimentação.

#### 3.1 TEORIA DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE POSIÇÃO

Considere a clássica equação de estado de um sistema linear invariante no tempo, apresentada em (23).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) = [d(t)^T \ \dot{d}(t)^T]^T, \quad (23)$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $d(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , sendo que  $n = 2q$ .

Para o projeto do controlador, considera-se inicialmente a seguinte lei de controle apresentada em (24), desenvolvida neste trabalho :

$$\dot{u}(t) = -[K_1 \ K_2 \ K_3] \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

em que  $d(t)$  é o vetor de estados das posições e  $\dot{d}(t)$  é o vetor de estados das velocidades do sistema, considerando ambos disponíveis, e  $K_1 \in \mathbb{R}^{m \times q}$ ,  $K_2 \in \mathbb{R}^{m \times q}$  e  $K_3 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  são os ganhos do controlador. A partir de (23) e (24) o sistema de malha fechada pode, então, ser representado como:

$$\dot{x}_{tp}(t) = (A_{tp} - B_{tp}K_{tp})x_{tp}(t), \quad (25)$$

$$x_{tp}(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad A_{tp} = \begin{bmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad B_{tp} = \begin{bmatrix} 0_{q \times m} \\ 0_{q \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$K_{tp} = [K_1 \ K_2 \ K_3]. \quad (27)$$

Com o sistema em malha fechada introduzido, propõe-se o teorema a seguir.

**Teorema 3.** *Se a planta  $(A, B)$  apresentada em (23) for controlável, então a nova planta  $(A_{tp}, B_{tp})$  apresentada em (25) e (26) também será controlável.*

**Prova:**

Analisando a matriz de controlabilidade do sistema aumentado (25), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= [B_{tp} \quad A_{tp}B_{tp} \quad \dots \quad A_{tp}^{n+m-1}B_{tp}], \\ \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} 0 & B & AB & \dots & A^{n-1}B & A^nB & \dots & A^{n+m-1}B \\ I_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

Define-se duas novas matrizes,  $\mathbb{C}_p$  e  $\mathbb{C}_a$ , como

$$\mathbb{C}_p = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad \mathbb{C}_a = [A^nB \quad \dots \quad A^{n+m-1}B]. \quad (29)$$

Logo, a matriz  $\mathbb{C}$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C}_p & \mathbb{C}_a \\ I_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

sendo que  $\mathbb{C}_p \in \mathbb{R}^{n \times (n.m)}$  tem posto  $n$ , pois a planta original é controlável. Assim, como  $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m).m}$ , a partir de (30) nota-se que:

$$\mathbb{C}\mathbb{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C}_p & \mathbb{C}_a \\ I_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ \mathbb{C}_p^T & 0 \\ \mathbb{C}_a^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T + \mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Como o posto de  $\mathbb{C}_p$  é igual a  $n$  e  $\mathbb{C}_p \in \mathbb{R}^{n \times (n.m)}$ , então  $\mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T > 0$ . Além disso,  $\mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T \geq 0$  para todo  $\mathbb{C}_a \in \mathbb{R}^{n \times m^2}$ . Tem-se, então:

$$\mathbb{C}\mathbb{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T + \mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} > 0. \quad (32)$$

Assim,  $\mathbb{C} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m).m}$  tem posto igual a  $(n + m)$  e  $(A_{tp}, B_{tp})$  é controlável. Desta forma, fica provado que a controlabilidade da planta aumentada é mantida. ■

Supondo-se inicialmente que o vetor de estados  $x_{tp}(t)$  esteja disponível, um ganho  $K_{tp}$  é projetado para que o sistema realimentado (25) apresente um desempenho adequado. Este procedimento pode ser feito, por exemplo, utilizando técnicas baseadas em LMIs, considerando vários índices de desempenho, tais como: robustez, região de operação, taxa de decaimento, entre outros. Em seguida, considera-se a existência de  $K_{tp} = [K_1 \ K_2 \ K_3] \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$  tal que o sistema de controle apresente um desempenho adequado. Observe que a condição inicial  $u(0)$  também pode ser especificada, se necessário. Então, a lei de controle projetada (24) pode ser representada como:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \dot{u}(t) dt &= u(t) - u(0) \\
 &= \int_0^t [-K_1 d(t) - K_2 \dot{d}(t) - K_3 u(t)] dt \\
 &= \int_0^t [-K_1 d(t) - K_3 u(t)] dt + \int_0^t [-K_2 \dot{d}(t)] dt \\
 &= \int_0^t [-K_1 d(t) - K_3 u(t)] dt - K_2 [d(t) - d(0)]. \tag{33}
 \end{aligned}$$

É definida agora uma nova função chamada de  $z(t)$  como:

$$z(t) = u(t) + K_2 d(t). \tag{34}$$

Assim, a partir de (33) e (34) tem-se:

$$z(t) = \int_0^t [-K_1 d(t) - K_3 u(t)] dt + u(0) + K_2 d(0), \tag{35}$$

$$z(0) = u(0) + K_2 d(0). \tag{36}$$

Baseado em (34)-(36) a lei de controle (24) pode ser representada exatamente por:

$$\dot{z}(t) = -K_1 d(t) - K_3 u(t), \tag{37}$$

$$u(t) = z(t) - K_2 d(t), \tag{38}$$

$$z(0) = u(0) + K_2 d(0). \quad (39)$$

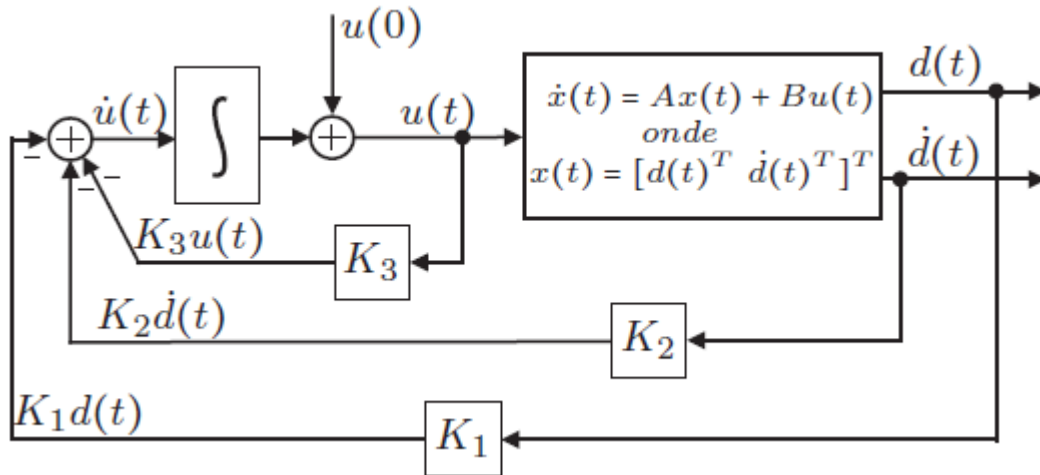
Finalmente, substituindo (38) em (37) segue que:

$$\dot{z}(t) = (-K_1 + K_3 K_2) d(t) - K_3 z(t). \quad (40)$$

É notável que a lei de controle  $u(t)$  implementada como em (38) não depende de  $\dot{d}(t)$  (o vetor das velocidades). Ela é formada apenas através da realimentação de  $d(t)$  (o vetor de posições) e do sinal  $z(t)$ , que por sua vez também não depende de  $\dot{d}(t)$ .

Em termos de diagramas de blocos, as Figuras 3 e 4 ilustram as configurações usadas no projeto (Figura 3) e na implementação (Figura 4) da lei de controle. A configuração da Figura 3 é baseada nas equações (23) e (24), enquanto a configuração da Figura 4, o sistema implementado, é determinada pelas equações (23) e (38)-(40).

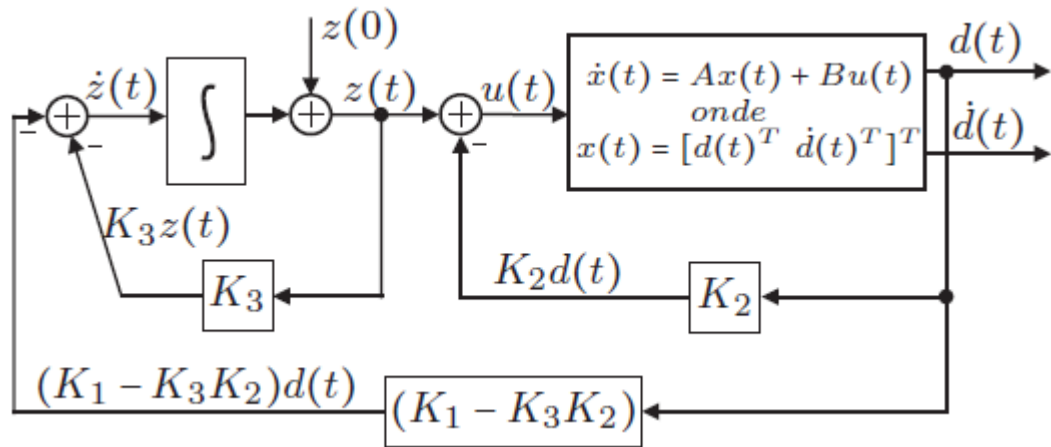
**Figura 3** – Diagrama de blocos do sistema de controle projetado: Realimentação das posições.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Uma possível desvantagem da configuração inicial mostrada na Figura 3 é o uso do integrador para gerar o sinal de controle  $u(t)$ . Este fato pode dificultar a obtenção de certos índices de desempenho devido ao fato de que  $u(t)$  pode ser visto como a área do sinal na entrada do integrador adicionada a uma condição inicial  $u(0)$ .

**Figura 4** – Diagrama de blocos da implementação do sistema de controle projetado: Realimentação das posições.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A especificação apropriada de  $u(0)$  na Figura 4 pode melhorar este possível problema. Por exemplo, se  $u(0) = -K_2d(0)$ , então tem-se que  $z(0) = u(0) + K_2d(0)$  é igual a zero e, portanto, a única condição inicial diferente de zero influenciando no sistema implementado será  $x(0) = [d(0)^T \dot{d}(0)^T]^T$ .

Observa-se que este sistema de controle proposto é uma opção interessante para o projeto de realimentação de estados de ordem completa para plantas mecânicas com parâmetros incertos, considerando que não é necessário construir um observador ou similar para estimar as velocidades da planta. Além disso, é relativamente mais barato por não existir necessidade de se medir as variáveis de estado de velocidades da planta, apenas de posições.

Para o caso de um sistema em que o vetor de estados não seja composto apenas pelo vetor de posições e vetor de velocidades ( $n \neq 2q$ ), por exemplo, o método proposto ainda é aplicável. Para tal, deve-se considerar acesso às variáveis de estado que não façam parte das posições e velocidades correlacionadas, de modo que exista realimentação das mesmas. Para este caso, então, o sistema não seria realimentado apenas com as variáveis de estado de posição, mas continuaria sem a necessidade de realimentação das variáveis de estado de velocidade correspondentes.

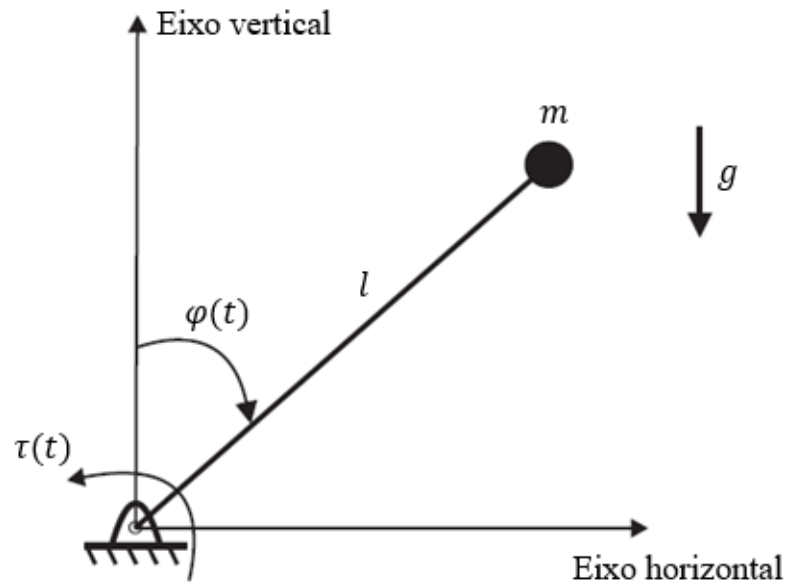
### 3.2 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES

Um exemplo simples de uma planta mecânica de segunda ordem será apresentado na intenção de demonstrar-se o desempenho do sistema de controle com realimentação das posições. Esta planta, portanto, não será abordada de forma tão aprofundada como será o caso do sistema de suspensão ativa, que foi o principal objeto de trabalho para a tese desenvolvida.

Considere o modelo de pêndulo invertido mostrado na Figura 5. A massa do pêndulo ( $m$ ) é concentrada em sua extremidade e seu comprimento é denotado por  $l$ . Um torque variável  $\tau(t)$  deve ser aplicado ao pêndulo na posição de sua articulação a fim mantê-lo equilibrado com o ângulo de 0 radianos.  $\varphi(t)$  representa o ângulo de inclinação do pêndulo, enquanto  $g$  denota a aceleração da gravidade. A dinâmica do sistema é dada por:

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + mgl \sin \varphi(t) = \tau(t). \quad (41)$$

**Figura 5** – Modelo esquemático do sistema de pêndulo invertido.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Representando o sistema (41) na forma de espaço de estados, linearizando-se em torno do ponto de equilíbrio  $(\varphi, \dot{\varphi}) = (0,0)$ , tem-se o modelo apresentado em (42).

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-g}{l} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix} u(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ \dot{\varphi}(t) \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Os seguintes valores foram adotados para os parâmetros do sistema do pêndulo invertido apresentado:  $m = 0,1$  kg,  $l = 0,5$  m e  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>. Além disso, uma incerteza politópica (apresentada em (5)-(6)) é considerada, a fim de demonstrar a robustez do método de controle, para o valor da massa do pêndulo, com uma variação de  $\pm 10\%$ , denotando que esta massa pode abranger valores entre 0,09 e 0,11 kg. Assim, os vértices do politopo no projeto de controle são apresentados em (43).

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -19,6000 & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 36,3636 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 44,4444 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

Com o sistema do pêndulo invertido devidamente apresentado, utilizou-se o *software* MATLAB para o projeto do controlador do sistema utilizando a teoria da realimentação dos estados ligados às posições (no caso em questão, o estado realimentado foi a posição angular). Depois de uma série de testes, o parâmetro  $\alpha$  foi delimitado em ‘2’ e  $r$  em ‘40’, enquanto  $\theta$  não teve restrição (visto que sua limitação não apresentou grandes efeitos durante os testes). Resolvendo as LMIs apresentadas no Teorema 1 e Teorema 2 usando os valores mencionados para  $\alpha$  e  $r$  e considerando (24)-(27), os seguintes valores foram obtidos para a matriz simétrica positiva definida ( $P$ ), o ganho de realimentação ( $K_{tp}$ ) e o custo garantido  $\mathcal{H}_\infty(\gamma)$ :

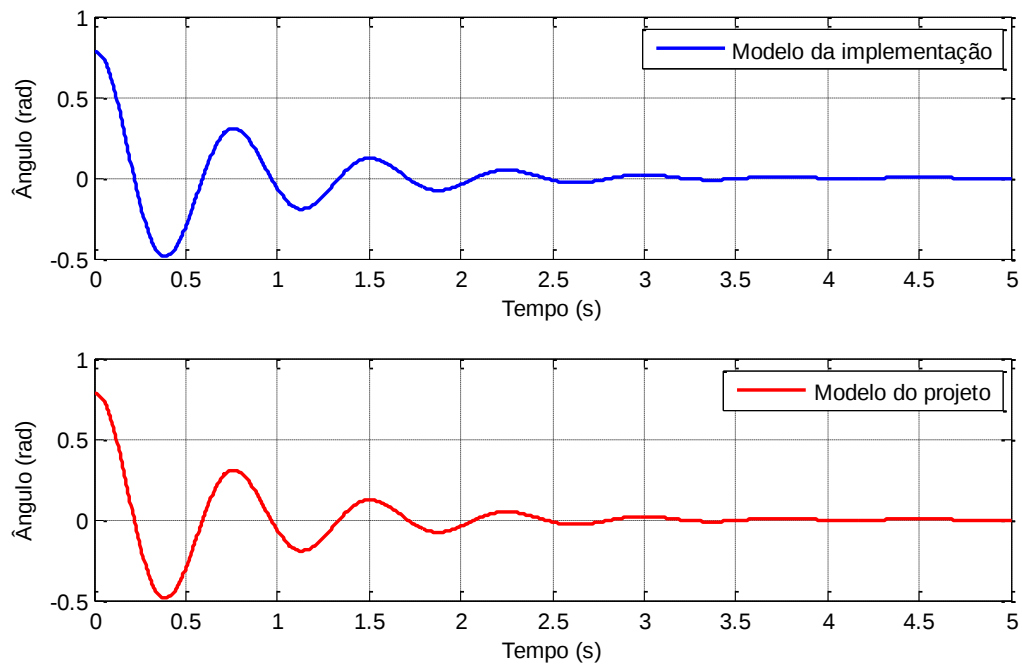
$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 0,0821 & 0,0025 & 0,0018 \\ 0,0025 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0018 & 0,0001 & 0,0001 \end{bmatrix}, \\ K_{tp} &= [781,1146 \quad 50,2633 \quad 62,2170], \\ \|H(s)\|_\infty &\leq \gamma = \sqrt{\mu} = 6,3504 \times 10^{-8}. \end{aligned} \quad (44)$$

O modelo linearizado do pêndulo invertido foi utilizado para o projeto do controlador. Entretanto, os resultados das simulações apresentadas são do controlador aplicado ao modelo real não linear. Na Figura 6 e na Figura 7 é possível ver a variação do ângulo da haste do pêndulo e a velocidade angular da mesma ao longo do tempo, respectivamente, enquanto na Figura 8 é apresentado o sinal da entrada controlada. Em todas as três figuras mencionadas

são realizadas comparações entre o desempenho do modelo do projeto (com realimentação de todos as variáveis de estado) e do modelo da implementação (com realimentação apenas da posição), ficando nítido que os dois modelos apresentam desempenhos idênticos.

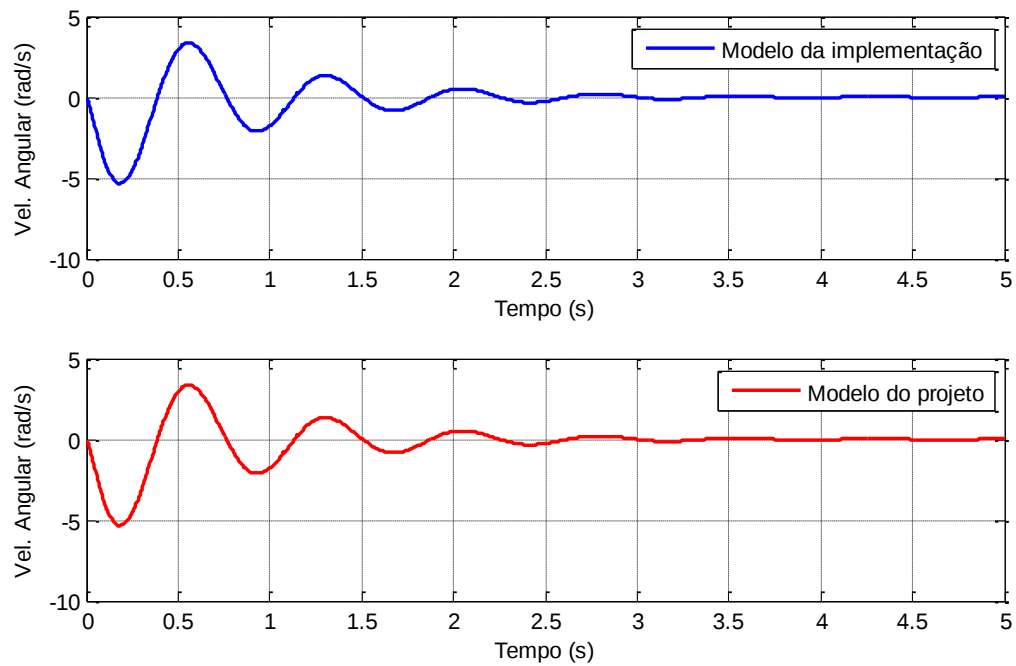
Considera-se que a haste do pêndulo inicialmente tenha um ângulo de inclinação de  $\pi/4$  rad ( $45^\circ$ ) na simulação, como pode ser observado na Figura 6.

**Figura 6** – Posição angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição.



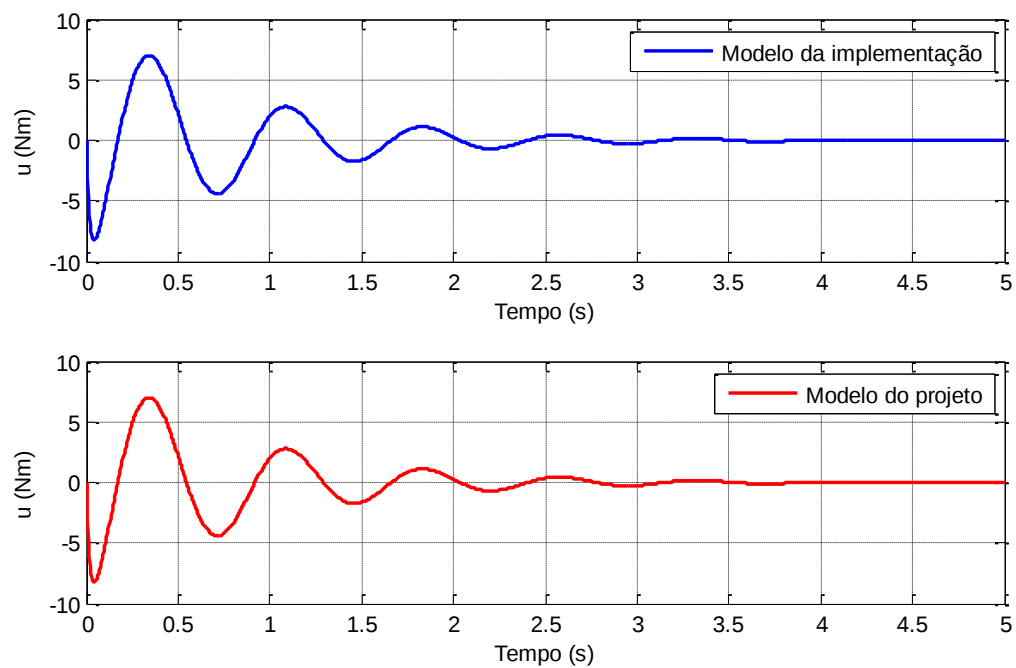
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 7** – Velocidade angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 8** – Sinal da entrada controlada na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

### 3.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

Nesta seção foi proposto um novo método de controle, no qual utiliza-se a realimentação apenas das variáveis de estado das posições. Além disso, um exemplo de um sistema mecânico de um pêndulo invertido é apresentado e testa-se no mesmo o método de controle proposto. Analisando o desempenho do sistema realimentado na Figura 6, Figura 7 e Figura 8 nota-se que o mesmo estabiliza-se em menos de 4 segundos. Assim, a eficácia do método com realimentação limitada ao estado da posição fica comprovada para o exemplo apresentado. Além disso, fica evidenciado que é possível obter o mesmo desempenho de um sistema com realimentação completa das variáveis de estado.

## 4 O CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE

Nessa seção será apresentado o segundo método proposto nesta tese. Novamente considera-se um sistema mecânico que tem como variáveis de estado grandezas relacionadas a posições e velocidades. Para o caso desse método de controle, porém, apesar de no projeto considerar-se acesso a todas as variáveis de estado da planta, na implementação é considerado acesso somente às variáveis de estado de velocidade para a realimentação.

### 4.1 TEORIA DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE

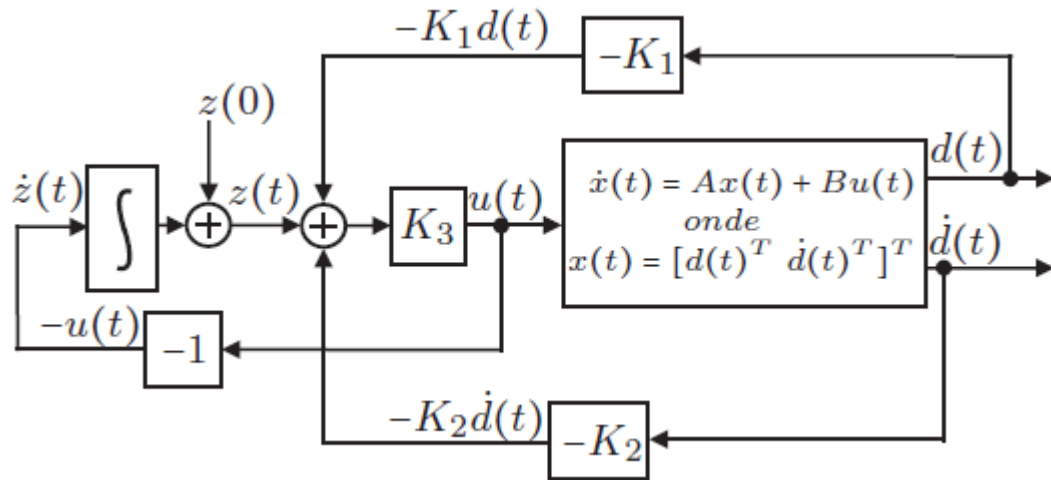
Considera-se novamente a clássica equação de estado de um sistema linear invariante no tempo, apresentada em (23), representando um sistema mecânico cujas variáveis de estado são grandezas de posições e velocidades.

Mais uma vez, na etapa de projeto considera-se que há acesso a todas as variáveis de estado do sistema para realimentação. A nova lei de controle, por sua vez, é apresentada em (45), sendo a mesma composta por três componentes: uma relacionada à posição, uma relacionada à velocidade e outra relacionada à integral do próprio sinal de controle. Observa-se que, analisando a equação apresentada em (45) nota-se uma semelhança com um PID (Controlador proporcional integral derivativo).

$$u(t) = -K_3 \left( K_1 d(t) + K_2 \dot{d}(t) + \int_0^t u(t) dt \right). \quad (45)$$

O diagrama de blocos da Figura 9 representa o projeto inicial do sistema realimentado. Nota-se que uma nova função  $z(t) = -\int_0^t u(t) dt$  é criada no intuito de facilitar o projeto. É necessária, portanto, uma ferramenta para acabar com a dependência direta do sinal de controle pelas variáveis de estado relacionadas às posições ( $d(t)$ ). Para isso, considera-se a igualdade apresentada em (46).

**Figura 9** – Diagrama de blocos do sistema de controle projetado: Realimentação das velocidades.



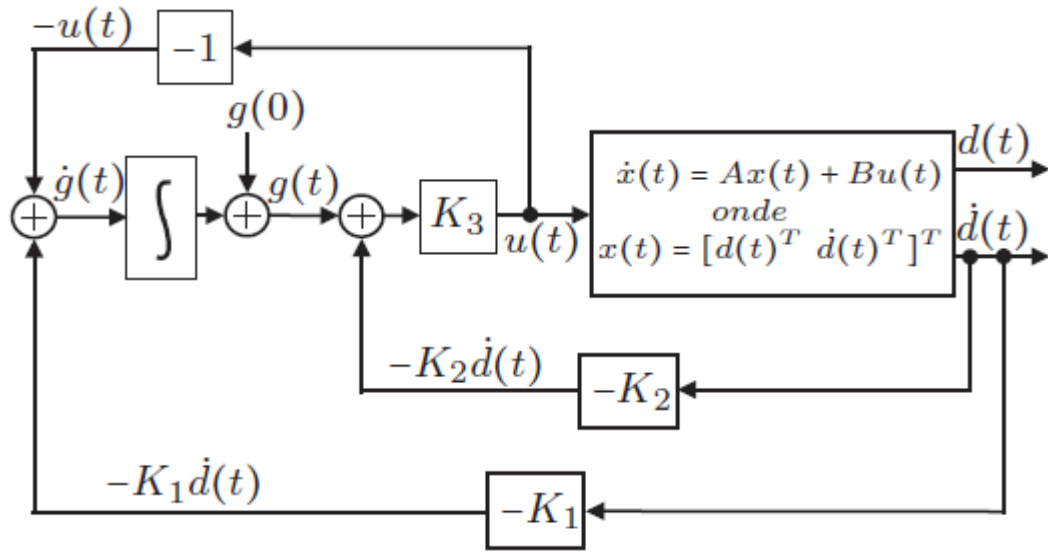
Fonte: Elaboração do próprio autor.

$$\int_0^t \dot{d}(t) dt = d(t) - d(0),$$

$$d(t) = \int_0^t \dot{d}(t) dt + d(0). \quad (46)$$

Com essa pequena manobra é possível representar o sistema através de outro diagrama de blocos, desta vez apresentado na Figura 10 (sendo que  $g(0) = z(0) - K_1 d(0)$ ). O novo diagrama descreve um sistema equivalente ao apresentado na Figura 9, com a importante diferença de que há realimentação apenas dos estados das velocidades. Este, portanto, é o sistema que será implementado e analisado.

**Figura 10** – Diagrama de blocos da implementação do sistema de controle projetado: Realimentação das velocidades.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A partir do diagrama de blocos original da Figura 9 tem-se a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{n \times m} \\ -I_m \end{bmatrix} u(t), \quad (47)$$

$$x_{tv}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad A_{tv} = \begin{bmatrix} A_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad B_{tv} = \begin{bmatrix} B_{n \times m} \\ -I_m \end{bmatrix}, \quad (48)$$

$$u(t) = K_3 \left( -K_1 d(t) - K_2 \dot{d}(t) + z(t) \right) = -[K_3 K_1 \quad K_3 K_2 \quad -K_3] \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ z(t) \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Vale ressaltar que o vetor do ganho de realimentação, como apresentado na lei de controle (49), tem o seguinte formato para um sistema genérico de dimensão  $n$ :

$$K_{tv} = [K_{n+1}K_1 \quad K_{n+1}K_2 \quad \dots \quad K_{n+1}K_n \quad -K_{n+1}]. \quad (50)$$

O sistema aumentado (47)-(48) deve, no entanto, ser controlável, se constatada a controlabilidade do sistema original (23). Com base no que foi apresentado, apresenta-se o teorema a seguir.

**Teorema 4.** *Se a planta  $(A, B)$  apresentada em (23) for controlável e  $\det(A) \neq 0$ , então a nova planta  $(A_{tv}, B_{tv})$  apresentada em (47) e (48) também será controlável.*

**Prova:**

Analisando a matriz de controlabilidade do sistema aumentado (47)-(48), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= [B_{tv} \quad A_{tv}B_{tv} \quad \dots \quad A_{tv}^{n+m-1}B_{tv}], \\ \mathbb{C} &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B & A^nB & \dots & A^{n+m-1}B \\ -I_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (51)$$

São definidas novas matrizes  $\mathbb{C}_p$  e  $\mathbb{C}_a$  como

$$\mathbb{C}_p = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad \mathbb{C}_a = [A^nB \quad \dots \quad A^{n+m-1}B]. \quad (52)$$

Logo, a matriz  $\mathbb{C}$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p & \mathbb{C}_a \\ [-I_m \quad 0] & 0 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

A partir de (53) tem-se que:

$$\mathbb{C}\mathbb{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p & \mathbb{C}_a \\ [-I_m \quad 0] & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p^T & [-I_m] \\ \mathbb{C}_a^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T + \mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T & \mathbb{C}_p \begin{bmatrix} -I_m \\ 0 \end{bmatrix} \\ [-I_m \quad 0]\mathbb{C}_p^T & I_m \end{bmatrix} > 0. \quad (54)$$

Aplicando o complemento de Schur (BOYD *et al.*, 1994), apresentado no Apêndice C, na desigualdade (54) é possível afirmar que

$$\mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T + \mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T - \mathbb{C}_p \begin{bmatrix} -I_m \\ 0 \end{bmatrix} I_m [-I_m \quad 0] \mathbb{C}_p^T > 0, \quad (55)$$

$$[\mathbb{C}_p \quad \mathbb{C}_a] \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p^T \\ \mathbb{C}_a^T \end{bmatrix} - \mathbb{C}_p \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbb{C}_p^T > 0. \quad (56)$$

Calculando um dos termos da desigualdade (56):

$$\mathbb{C}_p \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbb{C}_p^T = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]^T = BB^T. \quad (57)$$

Substituindo (57) em (56):

$$[\mathbb{C}_p \quad \mathbb{C}_a] \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p^T \\ \mathbb{C}_a^T \end{bmatrix} - BB^T > 0 \quad (58)$$

Substituindo-se as matrizes  $\mathbb{C}_p$  e  $\mathbb{C}_a$  em (58):

$$[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n+m-1}B][B^T \quad (AB)^T \quad \dots \quad (A^{n+m-1}B)^T]^T - BB^T > 0, \quad (59)$$

$$[AB \quad \dots \quad A^{n+m-1}B][(AB)^T \quad \dots \quad (A^{n+m-1}B)^T]^T > 0. \quad (60)$$

Utilizando-se de um artifício matemático, a matriz  $A$  é colocada em evidência à esquerda do primeiro termo e a matriz  $A^T$  é colocada em evidência à direita do segundo termo da desigualdade (60). Assim, pode-se escrever:

$$A[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n+m-2}B][B^T \quad (AB)^T \quad \dots \quad (A^{n+m-2}B)^T]^T A^T > 0 \quad (61)$$

e, portanto:

$$A[\mathbb{C}_p \quad \mathbb{C}_a] \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p^T \\ \mathbb{C}_a^T \end{bmatrix} A^T = A(\mathbb{C}_p \mathbb{C}_p^T + \mathbb{C}_a \mathbb{C}_a^T) A^T \geq \mathbb{C}_p \mathbb{C}_p^T > 0, \quad (62)$$

pois  $\mathbb{C}_p \in \mathbb{R}^{n \times (n+m)}$  e a matriz  $A$  tem posto completo igual a  $n$ , tendo em vista que a planta original  $(A, B)$  é controlável e  $\det(A) \neq 0$ . Portanto, a controlabilidade da planta para o sistema aumentado  $(A_{tv}, B_{tv})$  é mantida.

■

**Observação 2:** Quando  $\det(A) = 0$ , então a planta (23) não pode ser estabilizada se apenas  $\dot{d}(t)$  estiver disponível para realimentação (MOREIRA *et al.*, 2010).

Assim como citado para o sistema com realimentação das posições, para o caso de um sistema em que o vetor de estados não seja composto apenas pelo vetor de posições e vetor de velocidades, o método proposto nesta seção ainda é aplicável. Para tal, deve-se considerar acesso às variáveis de estado que não façam parte das posições e velocidades correlacionadas, de modo que exista realimentação das mesmas. Para este caso, então, o sistema não seria realimentado apenas com as variáveis de estado de velocidade, mas continuaria sem a necessidade de realimentação das variáveis de estado de posição correspondentes.

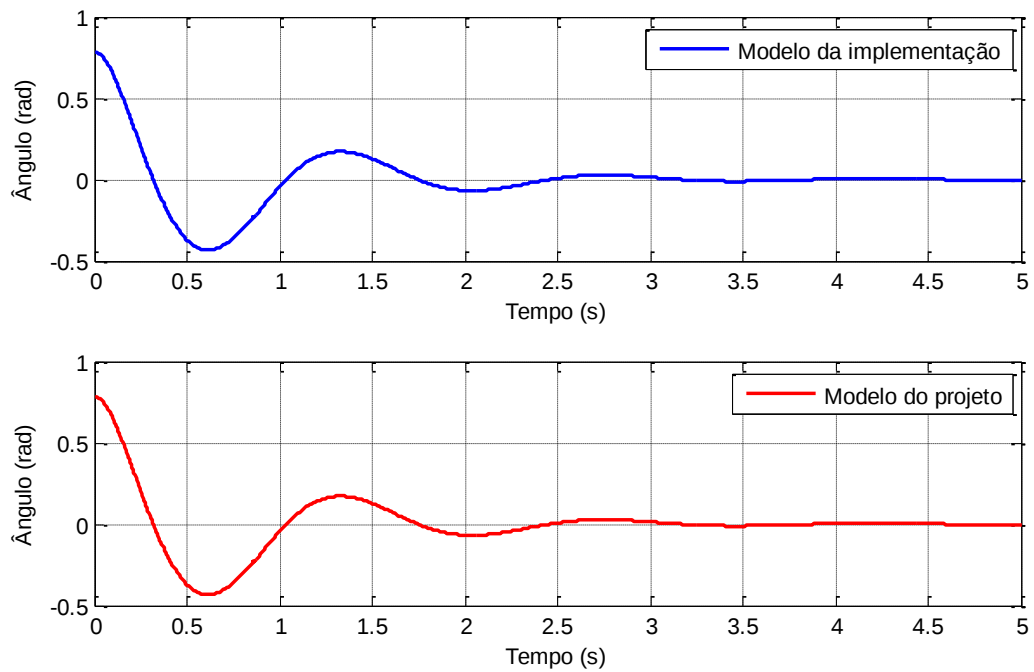
#### 4.2 EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS VELOCIDADES

Considerando o mesmo modelo do pêndulo invertido apresentado na Figura 5 e equações (41)-(43), novas simulações foram realizadas, desta vez com o sistema utilizando o método de realimentação das velocidades. Os parâmetros da região  $\mathcal{D}$ -estável no projeto do controlador foram determinados como:  $\alpha = 0,3$ ,  $r = 40$ , enquanto  $\theta$  mais uma vez foi considerado sem restrição. Solucionando-se as LMIs apresentadas no Teorema 1 e Teorema 2 e considerando (47)-(49), obteve-se:

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 0,1979 & 0,0019 & -0,3080 \\ 0,0019 & 0,0021 & 0,0610 \\ -0,3080 & 0,0610 & 3,0725 \end{bmatrix}, \\ K_{tv} &= [7,1160 \quad 0,4215 \quad -11,2841], \\ \|H(s)\|_{\infty} \leq \gamma = \sqrt{\mu} &= 4,1827 \times 10^{-6}. \end{aligned} \tag{63}$$

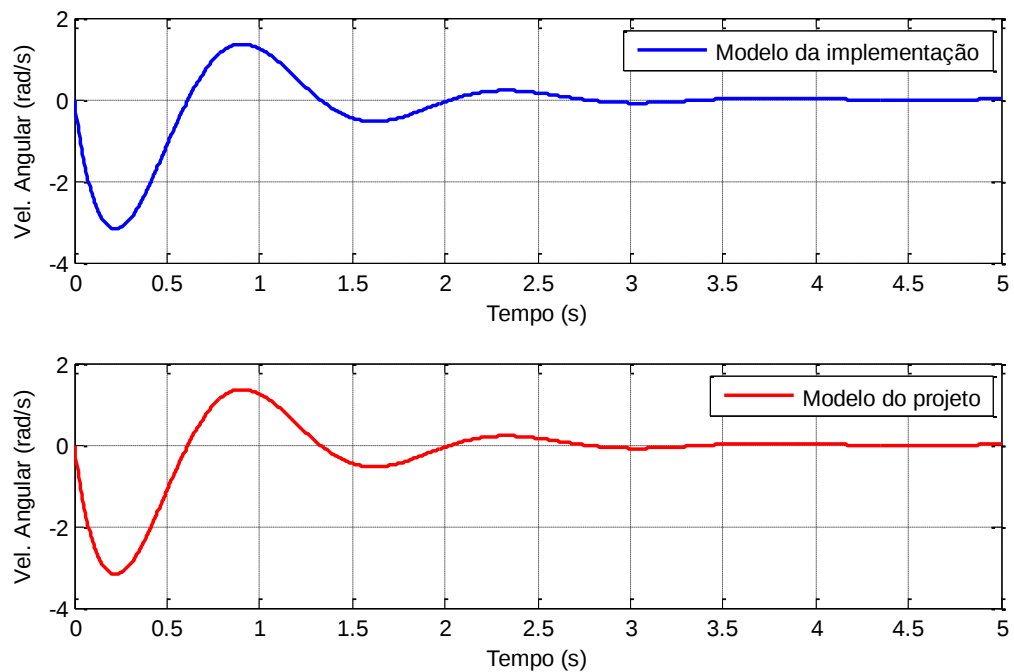
A posição angular da haste do pêndulo nas simulações é apresentada na Figura 11. Comparando-se os gráficos dos modelos do projeto e da implementação, constata-se que eles são, de fato, equivalentes, visto que o desempenho apresentado é idêntico. A velocidade angular da haste é exibida na Figura 12, observando-se mais uma vez gráficos iguais. O sinal da entrada controlada, por sua vez, é mostrado na Figura 13. Novamente considera-se o ângulo inicial da haste do pêndulo como sendo de  $\pi/4$  rad ( $45^\circ$ ).

**Figura 11** – Posição angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade.



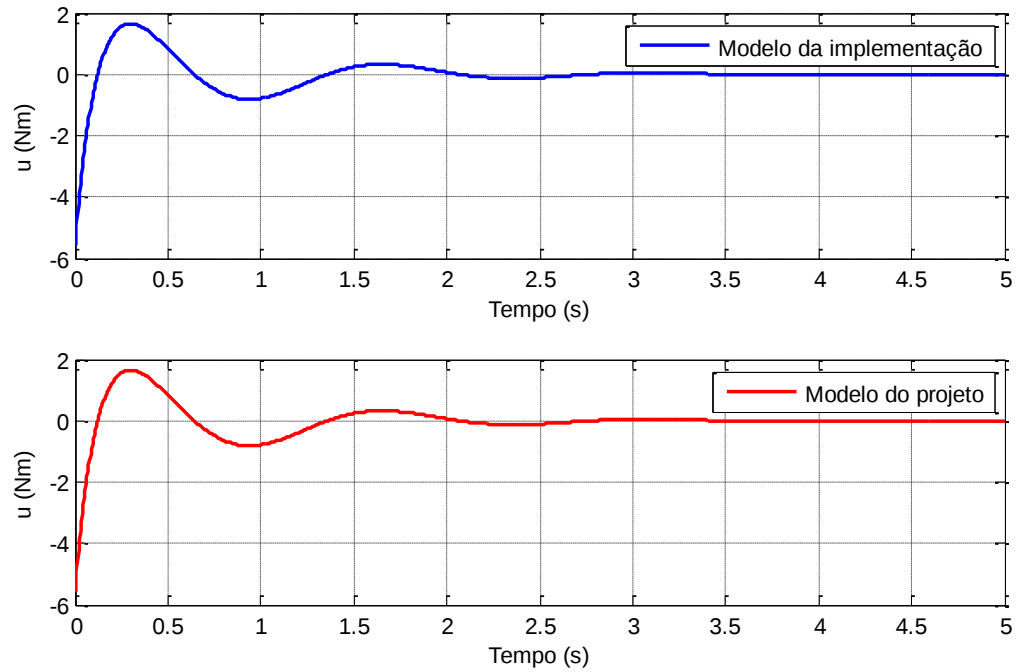
Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 12** – Velocidade angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

**Figura 13** – Sinal da entrada controlada na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

#### 4.3 CONCLUSÕES PARCIAIS

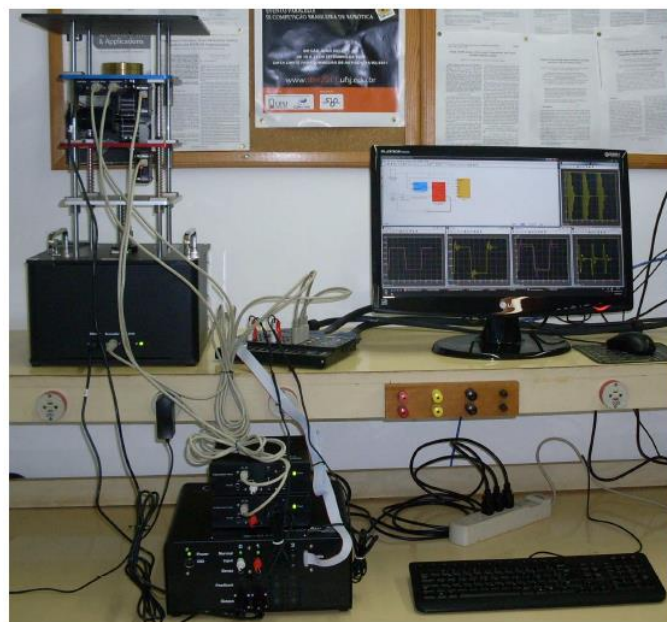
Nesta seção foi proposto um novo método de controle, no qual utiliza-se a realimentação apenas das variáveis de estado das velocidades. Além disso, o mesmo sistema de pêndulo invertido utilizado na seção 3.2 é empregado para testar-se o novo método de controle proposto. Constatou-se que o sistema do pêndulo invertido com realimentação da velocidade foi capaz de se estabilizar de forma ainda mais rápida que o mesmo sistema utilizando a realimentação da posição, além de apresentar um transitório menos oscilatório, com um máximo sobressinal de menor magnitude. Assim, a eficácia do sistema com realimentação limitada foi verificada mais uma vez.

## 5 SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA QUANSER®

Os sistemas de suspensão comuns são compostos apenas por elementos passivos, como molas e amortecedores, geralmente sem nenhum tipo de controle. Os sistemas de suspensão ativa, por sua vez, possuem também um atuador (usualmente ligado a sensores ou câmeras). Estes atuadores trabalham de forma que um sistema de suspensão ativa apresente uma dinâmica muito melhor que a de um sistema de suspensão comum, trabalhando conforme os objetivos da aplicação.

Considere o sistema de suspensão ativa didático fabricado pela Quanser® (QUANSER, 2009) que pode ser visto na Figura 14. Este foi o modelo de suspensão ativa utilizado neste trabalho. De Oliveira *et al.* (2014), García (2015), da Silva *et al.* (2013a) e da Silva *et al.* (2013b) são alguns exemplos de trabalhos que também utilizaram o mesmo sistema para estudo.

**Figura 14** – Sistema de suspensão ativa da marca Quanser®, pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.



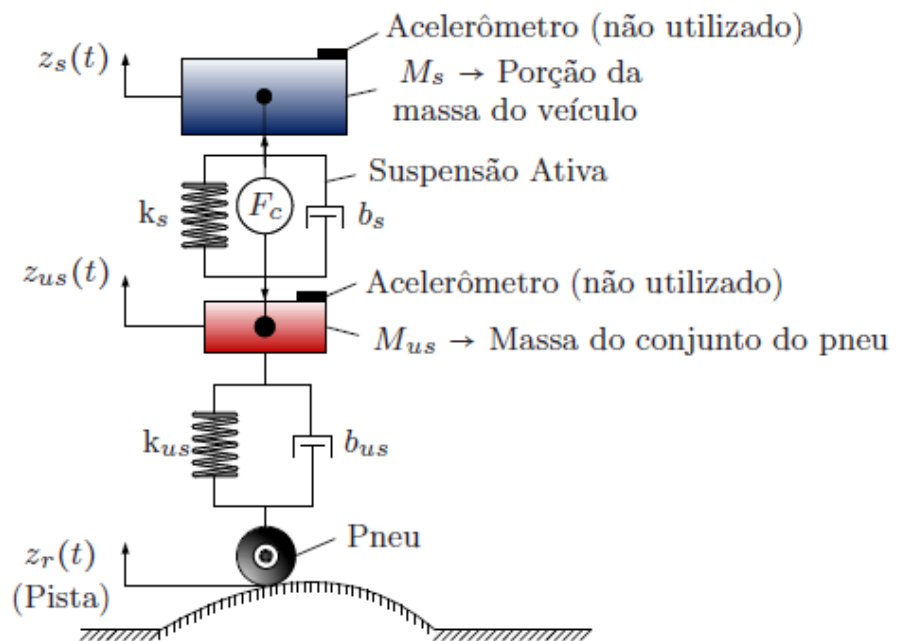
Fonte: (DA SILVA *et al.*, 2013a).

O modelo esquemático com mais detalhes é representado na Figura 15. O sistema consiste em um conjunto de duas massas, chamadas de  $M_s$  e  $M_{us}$ .  $M_s$  representa a massa de 1/4 do corpo total do veículo (considerando a representação de um veículo com quatro rodas) e é suportada pela mola  $k_s$  e pelo amortecedor  $b_s$ .  $M_{us}$  corresponde à massa do conjunto do pneu e é suportada pela mola  $k_{us}$  e pelo amortecedor  $b_{us}$ . As vibrações causadas por

irregularidades na superfície da pista podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão ativa do veículo, representado por um motor (atuador) conectado entre as massas  $M_s$  e  $M_{us}$  e controlado pela força  $F_c$  (DA SILVA *et al.*, 2013a).

Alguns trabalhos, como García (2015), da Silva *et al.* (2013a) e da Silva *et al.* (2013b), realizaram medições de aceleração para o método de controle do sistema de suspensão ativa da Quanser. Para os métodos propostos neste trabalho, no entanto, essas medições não são necessárias, visto que não são utilizados sinais de aceleração, apenas de posição e velocidade.

**Figura 15** – Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.



Fonte: (DE OLIVEIRA *et al.*, 2014).

O modelo dinâmico, de Quanser (2009), pode ser representado na forma de espaço de estados da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & 0 & -\frac{b_s}{M_s} & \frac{b_s}{M_s} \\ \frac{k_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} \omega(t), \quad (64)$$

considerando  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + H \omega(t)$ , sendo que

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}, \quad \omega(t) = \dot{z}_r(t). \quad (65)$$

As posições  $z_s(t)$ ,  $z_{us}(t)$  e  $z_r(t)$  são medidas através de *encoders* e os valores para os parâmetros do sistema de suspensão ativa são apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1** – Parâmetros do sistema de suspensão ativa Quanser.

| Parâmetros                                  | Símbolo  | Valor        |
|---------------------------------------------|----------|--------------|
| Massa de 1/4 do corpo total do veículo (kg) | $M_s$    | 1,455 - 2,45 |
| Massa do conjunto do pneu (kg)              | $M_{us}$ | 1            |
| Constante de rigidez da mola (N / m)        | $k_s$    | 900          |
| Constante de rigidez da mola (N / m)        | $k_{us}$ | 2500         |
| Coeficiente de amortecimento (Ns / m)       | $b_s$    | 7,5          |
| Coeficiente de amortecimento (Ns / m)       | $b_{us}$ | 5            |

Fonte: (QUANSER, 2009).

Para realizar o projeto de controle da suspensão ativa foi considerado que o sistema possui incertezas do tipo politópicas na massa de 1/4 do corpo total do veículo ( $M_s$ ), no intuito de comprovar a robustez dos métodos propostos. Considerou-se o valor mínimo para  $M_s$  de 1,455 kg e o valor máximo de 2,45 kg, de acordo com valores pré-estabelecidos em Quanser (2009). Assim, obteve-se os seguintes vértices do politopo na elaboração do projeto de controle:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -618,5567 & 0 & -5,1546 & 5,1546 \\ 900 & -2500 & 7, & -12,5 \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -367,3469 & 0 & -3,0612 & 3,0612 \\ 900 & -2500 & 7,5 & -12,5 \end{bmatrix}, \\
 B_1 &= [0 \quad 0 \quad 0,6873 \quad -1]^T, \\
 B_2 &= [0 \quad 0 \quad 0,4082 \quad -1]^T, \\
 H_1 &= H_2 = H = [0 \quad -1 \quad 0 \quad 5]^T.
 \end{aligned} \quad (66)$$

## 6 SIMULAÇÕES E RESULTADOS PRÁTICOS EM LABORATÓRIO

Neste capítulo são apresentados vários resultados de simulações e implementações em laboratório referentes ao sistema descrito no capítulo anterior (sistema de suspensão ativa). Para projetar um controlador que garanta um desempenho adequado ao sistema (*overshoot* e tempo de estabelecimento aceitáveis) e, principalmente, que possa ser implementado na prática, alguns valores foram adotados para os parâmetros relacionados à região D-estável  $S(\alpha, r, \theta)$  depois de uma série de testes, assim como realizado anteriormente para o sistema do pêndulo invertido. As simulações mais uma vez foram realizadas no *software* MATLAB, utilizando o ambiente do Simulink, enquanto os resultados práticos foram obtidos no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da FEIS-UNESP, também com o auxílio do MATLAB.

### 6.1 SUSPENSÃO ATIVA COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES

Os resultados foram obtidos baseando-se nas equações (23) e (38)-(40) e no diagrama de blocos exibido na Figura 4. Para a região D-estável do sistema com realimentação das posições, o parâmetro  $\alpha$  foi delimitado em ‘8’ e  $r$  em ‘48’, enquanto  $\theta$ , por outro lado, novamente não teve restrição. Solucionando as LMIs apresentadas nos Teoremas 1 e 2 usando os valores mencionados para a região  $S(\alpha, r, \theta)$  e considerando (24)-(27), os seguintes parâmetros foram obtidos (matriz simétrica  $P$  positiva-definida, ganho de realimentação  $K_t$  e  $\gamma$  limitante, respectivamente):

$$P = \begin{bmatrix} 0,2860 & -0,1615 & -0,0042 & 0,0062 & -0,0003 \\ -0,1615 & 0,5389 & 0,0036 & -0,0026 & 0,0003 \\ -0,0042 & 0,0036 & 0,0017 & -0,0006 & 0,0000 \\ 0,0062 & -0,0026 & -0,0006 & 0,0004 & -0,0000 \\ -0,0003 & 0,0003 & 0,0000 & -0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

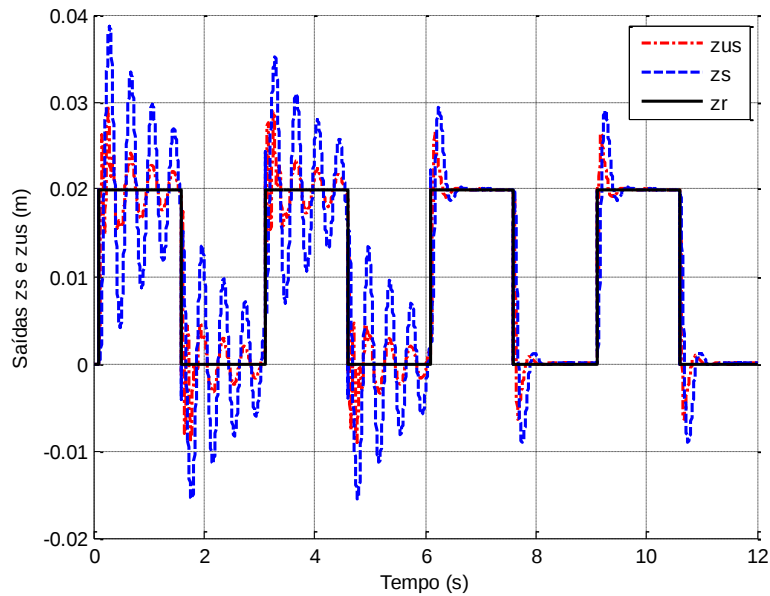
$$K_{tp} = 10^4 \times [-4,4522 \quad 5,6958 \quad 0,1018 \quad 0,0560 \quad 0,0072],$$

$$\|H(s)\|_\infty \leq \gamma = \sqrt{\mu} = 0,1429. \quad (67)$$

Na simulação que gerou as Figuras 16 e 17, uma onda quadrada que varia de 0,00 a 0,02 metro é gerada como perfil da pista. É possível observar na Figura 16 o deslocamento vertical do corpo do veículo ( $z_s(t)$ ), do conjunto do pneu ( $z_{us}(t)$ ), além do próprio perfil da

pista ( $z_r(t)$ ). Na Figura 17, por sua vez, mostra-se o sinal da entrada controlada na simulação. Durante intervalo de tempo de 0 a 6 segundos o sistema encontra-se em malha aberta, enquanto que a partir de 6 segundos o sistema passa a trabalhar em malha fechada, fazendo uso do controlador projetado com realimentação das posições.

**Figura 16** – Saídas do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das posições.



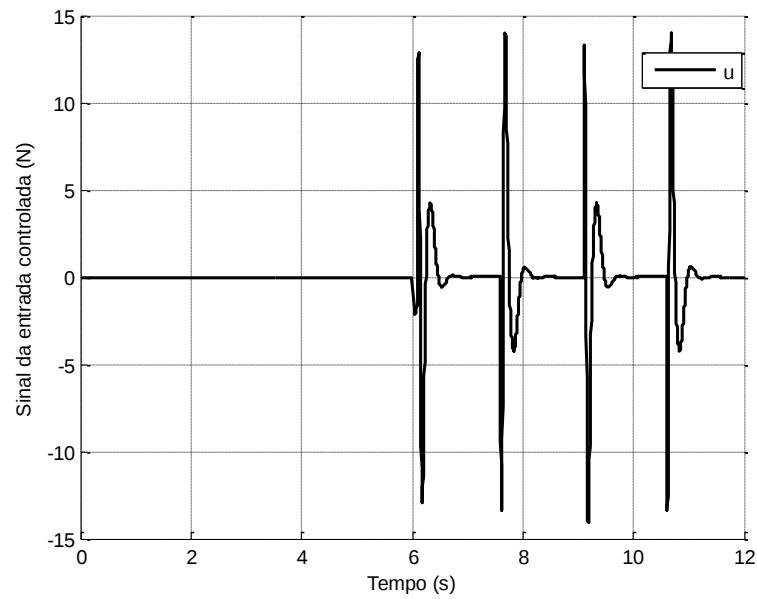
Fonte: Próprio autor.

Calculando-se a porcentagem de *overshoot* para a saída  $z_s(t)$  na simulação, através de (68), tem-se o valor de 46%, o que representa um *overshoot* considerável.

$$PO(\%) = \frac{MS}{y_{rp}} \cdot 100. \quad (68)$$

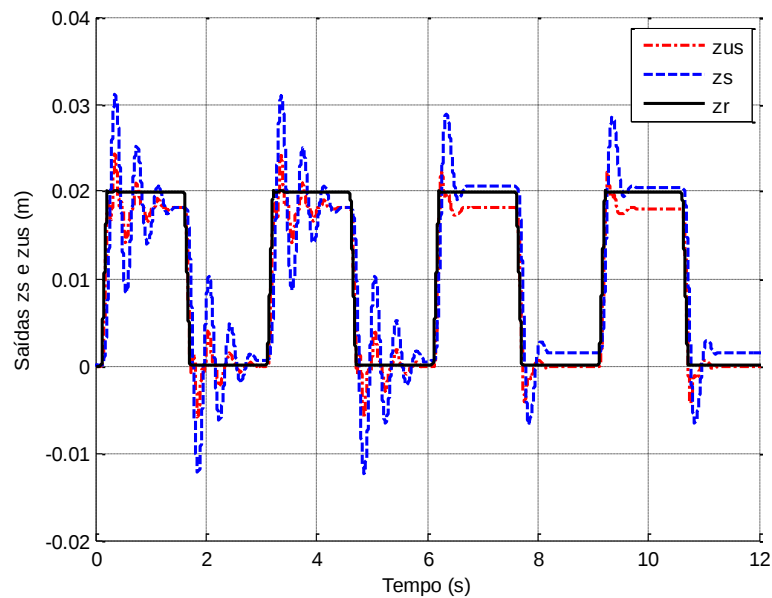
Na Figura 18 tem-se os resultados da implementação em laboratório do mesmo sistema que gerou os resultados da simulação mostrados na Figura 16. Alguns desafios são reduzir o pico transitório do sistema realimentado e eliminar o pequeno erro de regime permanente. Este último, apesar de não existir na simulação (vide Figura 16), está presente nos resultados obtidos na implementação prática (Figura 18). Calculando-se o *overshoot* para a saída  $z_s(t)$  na implementação prática tem-se um valor muito próximo ao da simulação: 45,5%.

**Figura 17** – Entrada controlada do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das posições.



Fonte: Próprio autor.

**Figura 18** – Saídas do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das posições.

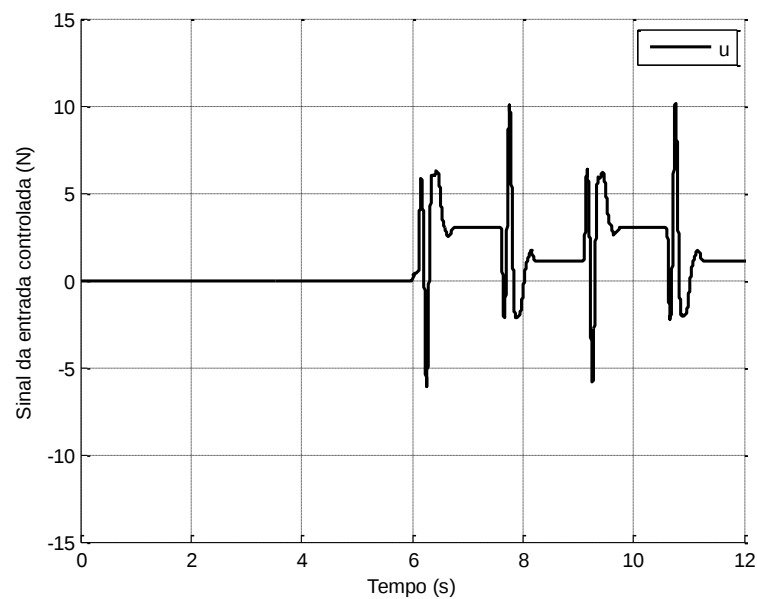


Fonte: Próprio autor.

A entrada controlada  $u(t)$  do sistema é mostrada na Figura 17 e na Figura 19, para o sistema simulado e o sistema implementado em laboratório, respectivamente. Claramente esta

entrada tem valor zero até o instante de 6 segundos em ambas figuras, devido ao fato do sistema estar trabalhando em malha aberta. Com o sistema funcionando em malha fechada, a partir de 6 segundos, o sinal da entrada controlada passa a oscilar conforme a variação do perfil da pista, atingindo uma magnitude máxima de aproximadamente 14 N na simulação em computador e aproximadamente 10 N na implementação em laboratório, sendo que ambos valores são perfeitamente aceitáveis para a implementação prática do projeto, estando dentro da margem admissível para o módulo didático da Quanser® (que é de  $\pm 39,2$  N). Este valor limitante consta nos arquivos originais do *software* MATLAB relacionados ao módulo da suspensão ativa de Quanser (2009).

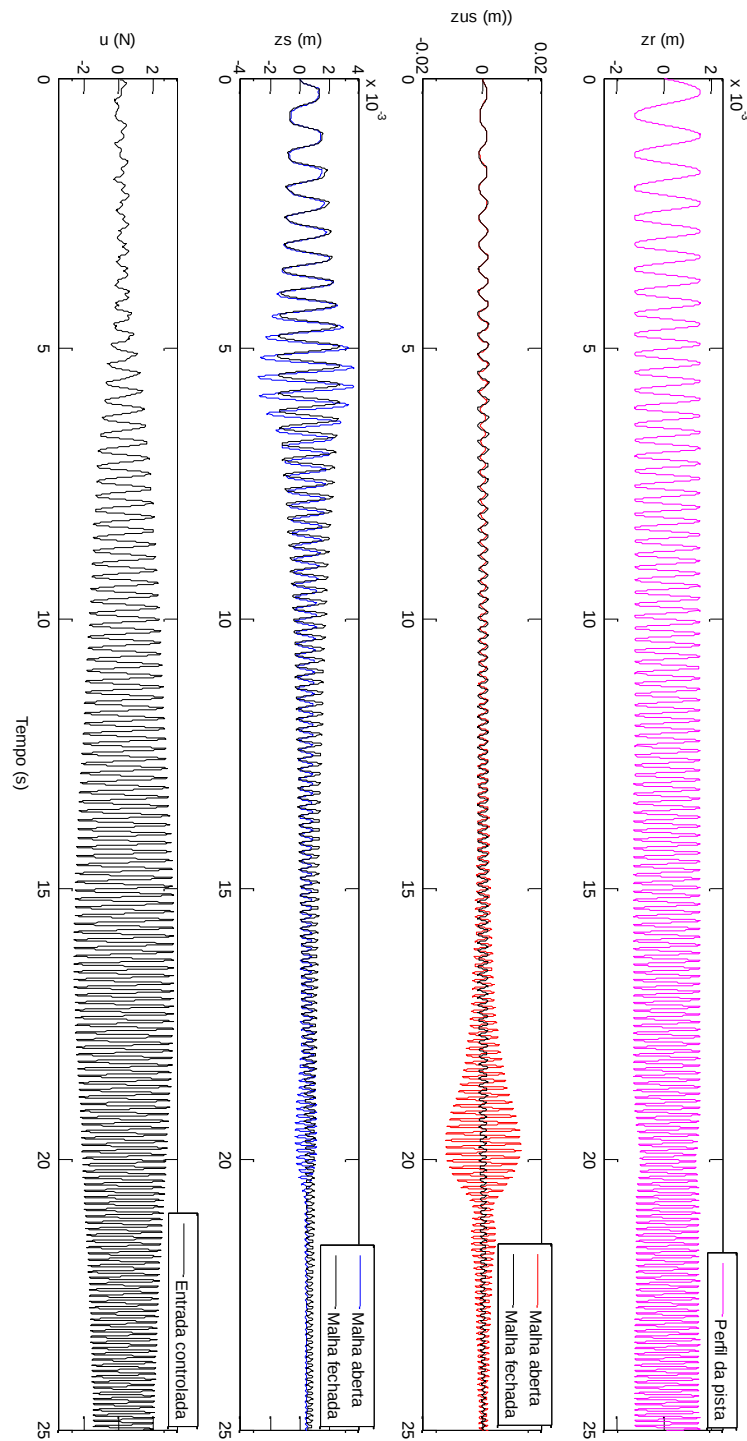
**Figura 19** – Entrada controlada do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das posições.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 20 é apresentado o comportamento do sistema (em malha aberta e em malha fechada) quando o perfil da pista trata-se de uma senoide com 0,002 metro de pico e frequência variável, iniciando com uma frequência de 1 Hz e atingindo o valor de 10 Hz em 25 segundos. Este ensaio foi realizado com o intuito de demonstrar a capacidade do sistema realimentado em atenuar as frequências ressonantes presentes no sistema em malha aberta. Fica bastante claro que o método de controle faz um ótimo trabalho anulando a ressonância presente por volta dos 20 segundos.

**Figura 20** – Comportamento do sistema de suspensão ativa em implementação prática para uma frequência crescente como entrada no perfil da pista: Realimentação das posições.



Fonte: Próprio autor.

Comparando-se a Figura 16 (resultados da simulação) com a Figura 18 (resultados da implementação prática) nota-se nitidamente uma menor oscilação no sistema implementado

em laboratório. Isso se deve provavelmente às condições das molas e amortecedores do sistema de suspensão ativa no qual os experimentos foram realizados.

## 6.2 SUSPENSÃO ATIVA COM REALIMENTAÇÃO DAS VELOCIDADES

Os resultados aqui apresentados foram obtidos baseando-se nas equações (47)-(49) e no diagrama de blocos exibido na Figura 10. Desta vez o parâmetro  $\alpha$  foi delimitado em '6' e  $r$  em '45', enquanto  $\theta$  novamente não teve restrição. Solucionando as LMIs apresentadas nos Teoremas 1 e 2 usando os valores mencionados para a região  $S(\alpha, r, \theta)$  e considerando (47)-(49), obteve-se:

$$P = \begin{bmatrix} 168,9295 & 7,8169 & 5,5849 & -0,3403 & -1,3279 \\ 7,8169 & 196,0425 & -3,2073 & 1,7824 & -0,2172 \\ 5,5849 & -3,2073 & 0,3192 & -0,0446 & -0,0357 \\ -0,3403 & 1,7824 & -0,0446 & 0,0737 & 0,0020 \\ -1,3279 & -0,2172 & -0,0357 & 0,0020 & 0,0123 \end{bmatrix},$$

$$K_{tv} = [-223,8343 \quad 384,0248 \quad 42,6896 \quad -25,8383 \quad -2,7703],$$

$$\|H(s)\|_{\infty} \leq \gamma = \sqrt{\mu} = 2,8111. \quad (69)$$

Como apresentado em (50), o vetor do ganho de realimentação para o sistema de controle com realimentação das velocidades tem como forma genérica  $K_{tv} = [K_{n+1}K_1 \quad K_{n+1}K_2 \quad \dots \quad K_{n+1}K_n \quad -K_{n+1}]$ , considerando um sistema genérico de dimensão  $n$ . O sistema original da suspensão ativa em questão, por sua vez, tem dimensão  $n = 4$ . Assim, o vetor do ganho de realimentação para este caso tem o seguinte formato:

$$K_{tv} = [K_5K_1 \quad K_5K_2 \quad K_5K_3 \quad K_5K_4 \quad -K_5]. \quad (70)$$

Dessa forma, baseando-se nos valores de  $K_{tv}$  apresentados em (69) e no formato apresentado em (70) pode-se afirmar que:

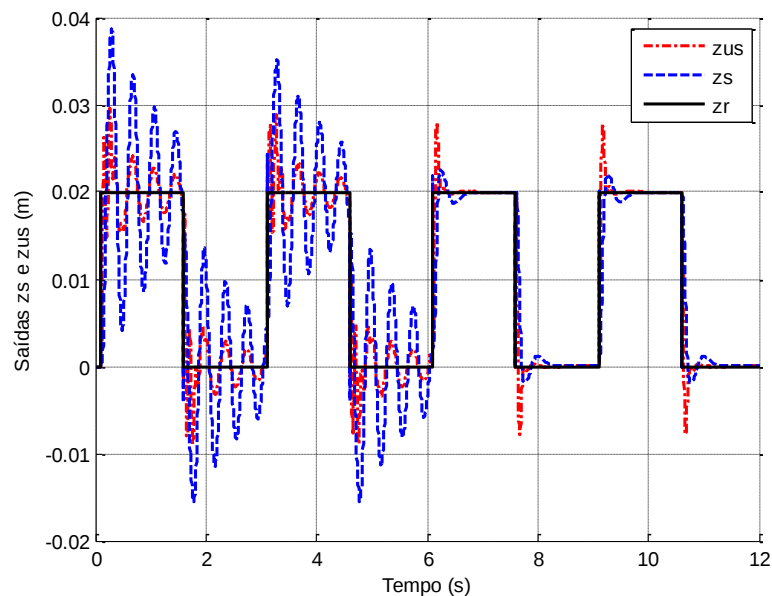
$$K_n = [K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad K_4 \quad K_5] =$$

$$= [-80,7966 \quad 138,6200 \quad 15,4095 \quad -9,3267 \quad 2,7703]. \quad (71)$$

As mesmas condições impostas para o perfil da pista para o método de controle com realimentação das posições são aplicadas para o caso da realimentação das velocidades (sinal

de onda quadrada variando de 0,00 a 0,02 m). Além disso, mais uma vez o sistema trabalha em malha aberta durante o intervalo de 0 a 6 segundos e em malha fechada de 6 a 12 segundos. Observa-se na Figura 21 o deslocamento vertical do corpo do veículo ( $z_s(t)$ ), do conjunto do pneu ( $z_{us}(t)$ ) e o perfil da pista ( $z_r(t)$ ), notando-se novamente uma nítida melhora no desempenho do sistema quando este trabalha em malha fechada. A porcentagem de *overshoot* constatada na simulação do sistema de suspensão ativa realimentado com as velocidades foi de 12,5%, o que é consideravelmente menor do que o valor constatado para o mesmo sistema usando a realimentação das posições (45%).

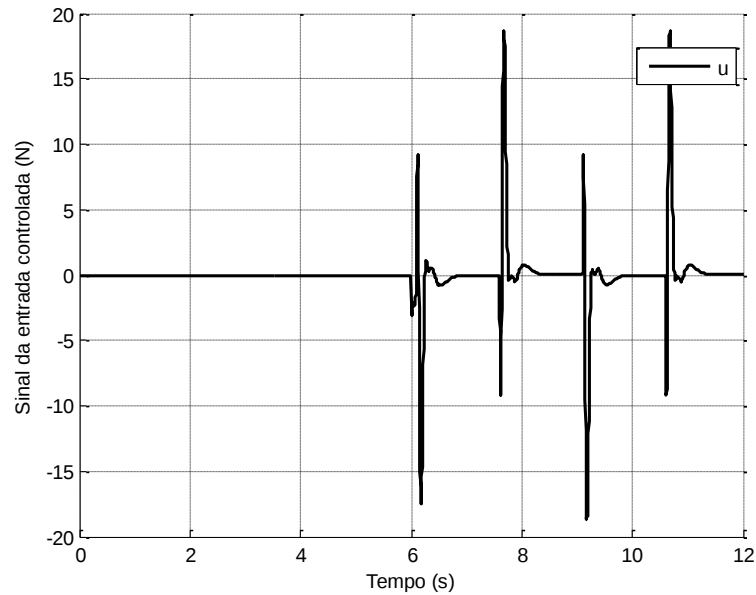
**Figura 21** – Saídas do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 22 é apresentado o sinal da entrada controlada, com sua amplitude mais uma vez dentro das limitações do sistema ( $\pm 39,2$  N), demonstrando que o controlador empregado não oferece riscos de saturar o sinal da entrada controlada.

**Figura 22** – Entrada controlada do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.

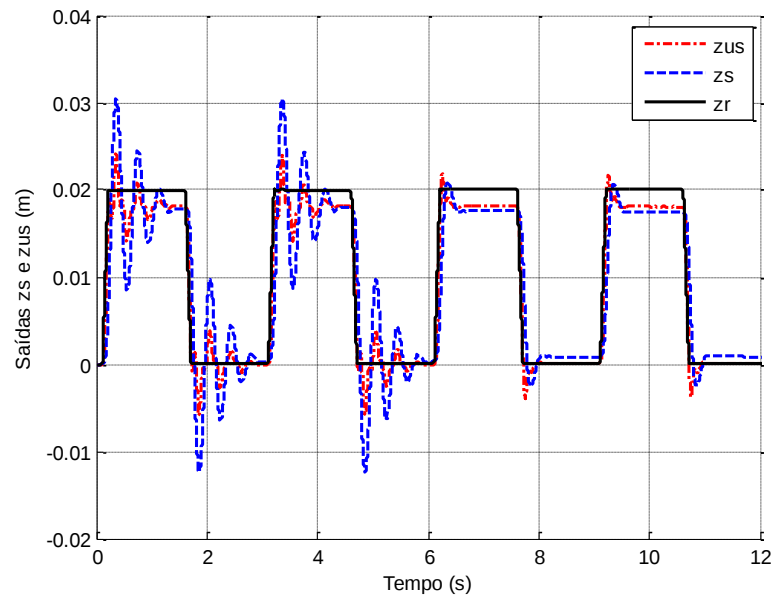


Fonte: Próprio autor.

Os resultados práticos do método de realimentação das velocidades aplicado ao sistema de suspensão ativa podem ser vistos na Figura 23, Figura 24 e Figura 25. Na Figura 23 (onde são apresentadas as variações de  $z_s(t)$ ,  $z_{us}(t)$  e  $z_r(t)$ ) o sistema em malha fechada (a partir de 6 segundos) exibe um desempenho muito bom, comparando-se ao sistema em malha aberta (0 a 6 segundos), mostrando um comportamento semelhante ao da simulação (Figura 21). Mais uma vez, no entanto, a implementação prática apresenta um pequeno erro de regime permanente que não aparece nas simulações. A porcentagem de *overshoot* constatada na implementação prática com realimentação das velocidades foi de 4%, valor bastante menor que o obtido para a implementação prática do mesmo sistema usando a realimentação das posições (44,5%).

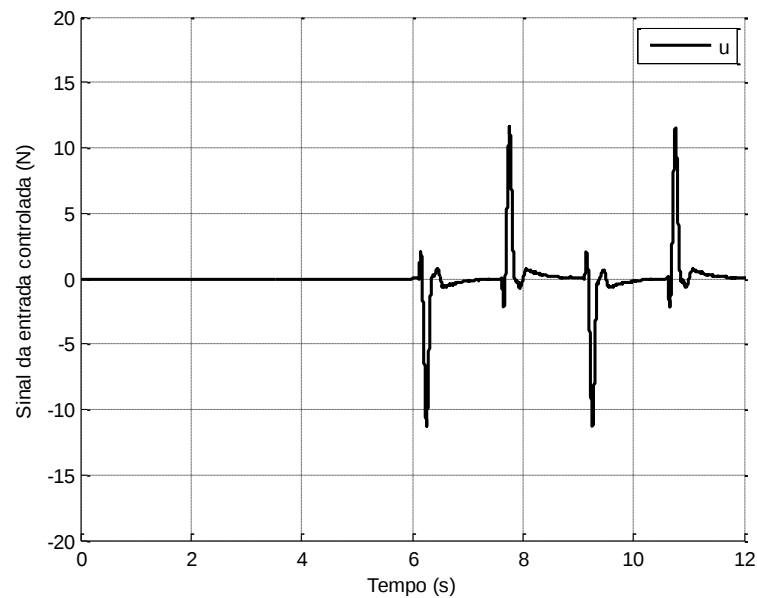
Na Figura 24 o sinal da entrada controlada é exibido e, como esperado, encontra-se tranquilamente dentro das limitações do sistema, enquanto na Figura 25 apresenta-se novamente as respostas do sistema em malha aberta e em malha fechada a um perfil de pista senoidal com frequência crescente (1 a 10 Hz em 25 segundos). O sistema com realimentação das velocidades apresenta um desempenho muito superior ao do sistema em malha aberta, anulando a incômoda ressonância presente no sistema em malha aberta por volta do instante de 20 segundos, assim como aconteceu para o método com realimentação das posições.

**Figura 23** – Saídas do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.



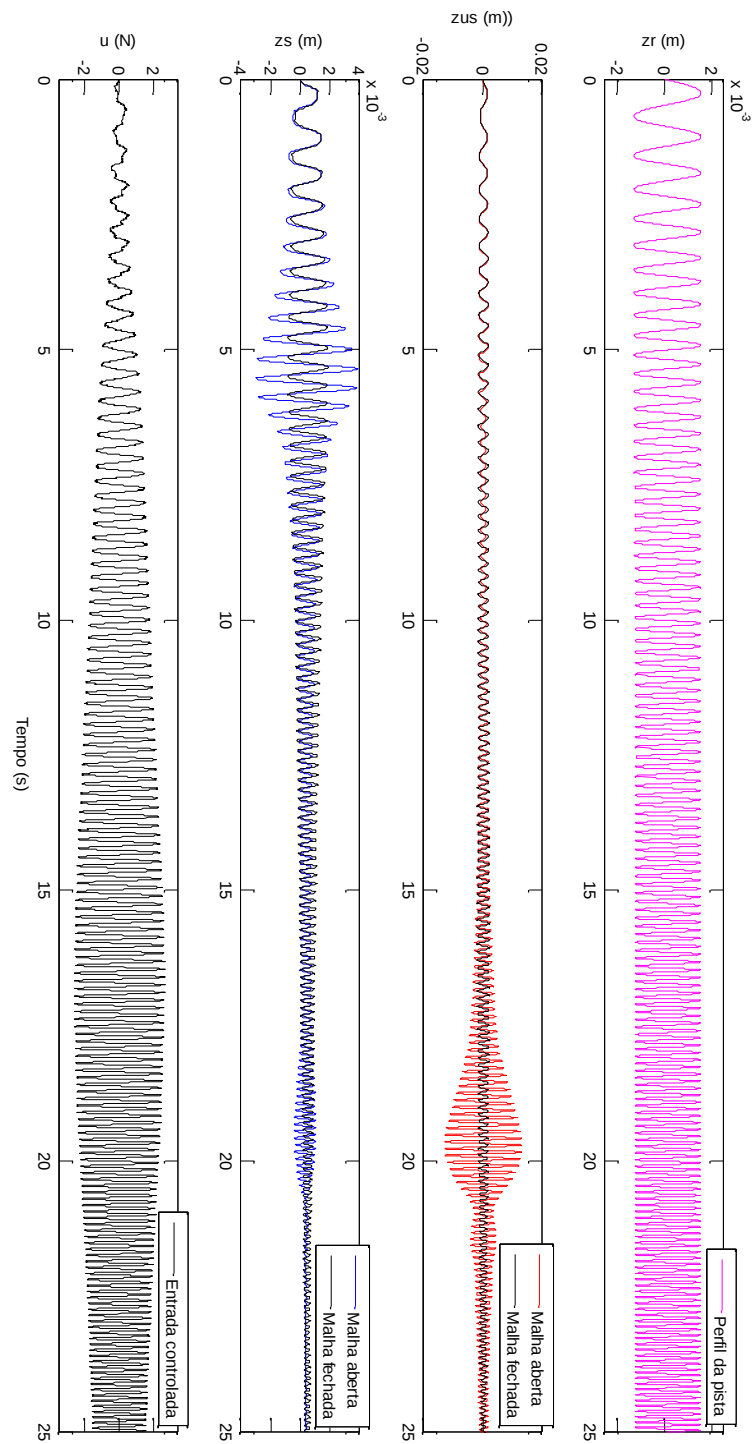
Fonte: Próprio autor.

**Figura 24** – Entrada controlada do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.



Fonte: Próprio autor.

**Figura 25** – Comportamento do sistema de suspensão ativa em implementação prática para uma frequência crescente como entrada no perfil da pista: Realimentação das velocidades.



Fonte: Próprio autor.

## 7 PRETENSÃO PARA PESQUISAS FUTURAS: CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO MISTA

Depois de exploradas as ideias de um sistema com realimentação apenas das posições e outro com realimentação apenas das velocidades, surge a ideia de um sistema com realimentação mista, onde considera-se que há acesso a parte dos estados das posições e parte dos estados das velocidades. Como exemplo, considerando-se um sistema mecânico de dimensão  $4n$ , sendo que  $2n$  variáveis de estado remetem a posições e  $2n$  remetem a velocidades, poderia considerar-se acesso a apenas  $n$  variáveis de estado de posições e outras  $n$  variáveis de estado de velocidades para a realimentação.

Existem, portanto, intenções de seguir este rumo de pesquisa e desenvolver o método de controle citado, que seria uma espécie de híbrido entre os dois métodos propostos nesta tese. Considerando-se mais uma vez o sistema clássico apresentado em (23) representando um sistema mecânico cujas variáveis de estados representam grandezas de posições e velocidades, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ x(t) &= [d(t)^T \dot{d}(t)^T]^T, \quad d(t) = [d_a(t)^T \ d_b(t)^T]^T,\end{aligned}\tag{72}$$

em que  $x(t) \in \mathbb{R}^{4n}$ ,  $d(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $d_a(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $d_b(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{4n \times 4n}$  e  $B \in \mathbb{R}^{4n \times m}$ .

Apresenta-se em (73) a lei de controle proposta para o sistema com realimentação mista, baseando-se nos métodos de controle desenvolvidos e propostos neste trabalho (realimentação das posições e das velocidades). Na Figura 26 é mostrado o diagrama de blocos que esboça o projeto de controle em questão, lembrando que a princípio é considerado acesso a todas as variáveis de estados (assim como no projeto de controle com realimentação das posições e com realimentação das velocidades).

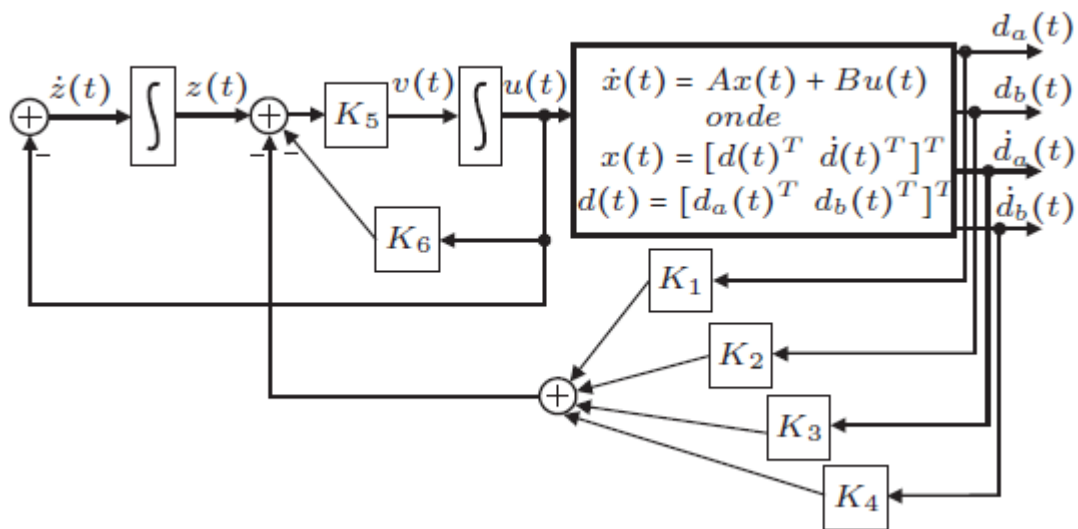
$$\dot{u}(t) = K_5 \left[ - \int_0^t u(t) dt - \left( K_1 d_a(t) + K_2 d_b(t) + K_3 \dot{d}_a(t) + K_4 \dot{d}_b(t) \right) - K_6 u(t) \right],$$

$$\dot{u}(t) = -[K_5K_1 \ K_5K_2 \ K_5K_3 \ K_5K_4 \ -K_5 \ K_5K_6] \begin{bmatrix} d_a(t) \\ d_b(t) \\ \dot{d}_a(t) \\ \dot{d}_b(t) \\ z(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (73)$$

$$x_{tm}(t) = [x(t)^T \ z(t)^T \ u(t)^T]^T, \quad (74)$$

sendo que  $z(t) = -\int_0^t u(t)dt$ .

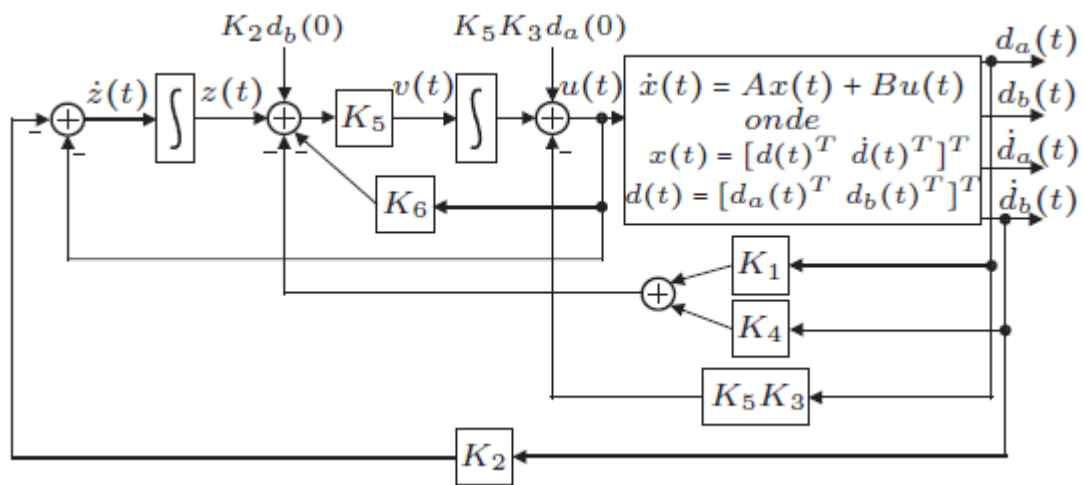
**Figura 26** – Diagrama de blocos do sistema de controle a ser projetado: Realimentação mista.



Fonte: Próprio autor.

Na Figura 27 consta o diagrama de blocos do sistema a ser implementado, com realimentação parcial das variáveis de estado (apenas  $d_a(t)$  e  $\dot{d}_b(t)$ ).

**Figura 27** – Diagrama de blocos do sistema de controle a ser implementado: Realimentação mista.



Fonte: Próprio autor.

Antes de prosseguir com as simulações e implementações, no entanto, deve ser realizada a análise da controlabilidade do sistema proposto pelo método, assim como foi feito para o sistema com realimentação das posições e o sistema com realimentação das velocidades. Se comprovada a controlabilidade do novo sistema aumentado, então será possível dar sequência com as devidas simulações e implementações práticas.

## 8 CONCLUSÃO

Neste trabalho, o projeto de um sinal de controle que depende apenas de alguns elementos do vetor de estados do sistema é a principal característica. Um conjunto de LMIs foi usado para garantir a estabilidade do sistema e ainda assegurar um desempenho mais adequado à dinâmica desejada.

Verificou-se que, apesar das limitações na realimentação do sistema, ambos os métodos propostos (realimentação das posições e das velocidades) apresentaram desempenhos satisfatórios. Para o sistema de suspensão ativa com realimentação das posições constatou-se um considerável máximo sobressinal mesmo no sistema em malha fechada (considerando o perfil de pista como uma onda quadrada), enquanto que no sistema de suspensão ativa com realimentação das velocidades o máximo sobressinal foi bem menor. Porém, os dois sistemas de controle demonstraram uma dinâmica consideravelmente rápida. Para o caso do sistema de suspensão ativa sujeito a um perfil de pista senoidal com frequência variável os dois métodos aplicados à suspensão ativa apresentaram desempenho muito bons e semelhantes, anulando a ressonância característica do sistema em malha aberta por volta do instante de 20 segundos (frequência próxima a 8 Hz). Portanto, os sistemas de controle propostos provaram ser opções interessantes para o projeto de controle de plantas mecânicas com parâmetros incertos usando somente realimentação da saída (apenas realimentação de posições ou apenas realimentação de velocidades), considerando que não é necessário construir um observador para estimar qualquer variável de estado da planta. Além disso, podem ser opções relativamente mais baratas pelo fato de não existir necessidade de se medir todas as variáveis de estado da planta.

Vale destacar que, desde as simulações no sistema do pêndulo invertido até as implementações práticas no sistema de suspensão ativa, foi considerada a existência de incertezas politópicas nos sistemas. Ainda assim, os sistemas de controle superaram tal empecilho e mantiveram um bom desempenho.

O autor não encontrou na literatura uma proposta semelhante relacionada à realimentação de posição ou velocidade em sistemas mecânicos. Em anexo se encontra o artigo do autor que se encontra em estágio final de elaboração e deverá ser submetido em breve a um periódico ainda a ser definido, abordando os sistemas de controle propostos nesta tese.

Um dos possíveis próximos rumos da pesquisa elaborada nesta tese é a possibilidade de se trabalhar com algum tipo controle chaveado, visto que esta é uma opção interessante de controle e o autor já realizou estudos sobre controle chaveado em sistemas dinâmicos em

Tello (2018). Outra possível continuidade para a pesquisa apresentada é o projeto de um método de controle misto, que funcionaria com acesso parcial às variáveis de estado de posição para realimentação e acesso parcial às variáveis de estado de velocidade, como sugerido no final deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and  $\mathcal{H}_2$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (lmi) characterizations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.
- ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M.  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control for the tracking problem with zero variation. **IET Control Theory Applications**, Stevenage, v. 1, n. 3, p. 682–688, 2007.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle robusto de sistemas lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação derivativa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 2008, Presidente Prudente. **Proceedings of the [...]**. Presidente Prudente: [Unesp/FCT], 2008. 6 f.
- AVILA-BECERRIL, S.; LORÍA, A.; PANTELEY, E. **Global position-feedback tracking control of flexiblejoint robots**. 2016 American Control Conference (ACC), Boston, pp. 3008-3013, 2016.
- BARBAZELLI, R. C. **Estudo de funções de lyapunov para a estabilidade de sistemas de potência**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 205 p. Studies in Applied Mathematics, SIAM, 15. Disponível em: <https://stanford.edu/~boyd/lmibook/lmibook.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2021.
- BUZACHERO, L. F. S. **Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2010.
- BUZETTI, A. S.; DE OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 12, 2015, Natal. **Anais [...]**. Natal: UFRN, 2015.
- CABELLO, R. V. C. **Projeto de controladores H-infinito de ordem reduzida e compensação de saturação em estruturas flexíveis**. 2014. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
- CAMATA, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; DA SILVA, E. R. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZARECHO, L. F. S.; ALVES, U. N. L. T.; DE OLIVEIRA, D. R. Implementação de controlador robusto para o sistema ball balancer sujeito a falhas estruturais. In: Anais do CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 20, 2014, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: UFCG, 2014. p. 4099-4106.

CARDIM, R. **Projeto de controladores baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

CHEN, C. **Linear system theory and design**. 3.ed. New York: Oxford, 1999. 352 p. Oxford Series in Electrical and Computer Engineering.

CHILALI, M.; GAHINET, P.  $\mathcal{H}^\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 41, n. 3, p. 358-367, 1996.

DA SILVA, E. R. P.; FAZZOLARI, H. A.; DE OLIVEIRA, P. C.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; LORDELO, A. D. S. Implementação prática da d-estabilidade robusta via realimentação derivativa em um sistema de suspensão ativa. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, SBAI, 11, 2013. **Anais [...]**. 3645, 2013a. Disponível em: <http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/3645.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2020.

DA SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust controller implementation via state-derivative feedback in an active suspension system subjected to fault. *In*: CONFERENCE ON CONTROL AND FAULT-TOLERANT SYSTEMS (SysTol), 2013, Nice. **Proceedings of the [...]**. Nice: IEEE, 2013b. p. 752-757.

DE OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. S.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto  $\mathcal{H}^\infty$  chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. *In*: Anais do XX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 20, 2014, Belo Horizonte. **Anais [...]**. Belo Horizonte, 2014. p. 2194-2201.

DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.; FRANCIS, B. State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}^\infty$  control problems. **IEEE Transaction Automatic Control**, Piscataway, v. 34, p. 831-847, 1989.

FAIGL, J.; CÍZEK, P. Adaptive locomotion control of hexapod walking robot for traversing rough terrains with position feedback only. **Robotics and Autonomous Systems**, Amsterdam, v. 116, p. 136–147, 2019.

FARIA, F. A. **Alocação de pólos com realimentação da derivada dos estados usando LMIs**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

FRANCIS, B. **A course in  $\mathcal{H}^\infty$  control theory**. New York: Springer-Verlag, 1987. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 88.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI control toolbox - for use with MATLAB**. New York: The Math Works Inc, 1995.

GARCÍA, S. D.; PATINO, D. Estimation based on acceleration measures of an active suspension plant. *In*: IEEE COLOMBIAN CONFERENCE ON AUTOMATIC CONTROL, CCAC, 2, 2015, Manizales. **Proceedings of the [...]**. Manizales: IEEE, 2015. p. 1-6.

GUERRERO, C.; SANTIBAÑEZ, V.; ARAIZA-OLVERA, Y.; IBARRA-FIGUEROA, E.; PÉREZ-PÉREZ, B. Control of velocity of DC motors by classical and passivity methods measuring only position: theory and experimental comparison. **IEEE Latin America Transactions**, Piscataway, v.18, n. 5, p. 962–970, 2020.

HUANG, A.; HUANG, C. FAT-based robot adaptive control with position measurements only. *In*: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE, 31, 2019, Nanchang. **Proceedings of the [...]**. Nanchang: IEEE, 2019. p. 3516–3520.

JUNG, W.; NOH, I.; KANG, D. The vibration controller design using positive position feedback control. *In*: CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS, 13, 2013, Gwangju. **Proceedings of the [...]**. Gwangju: IEEE, 2013. p. 1721–1724.

LEITE, V. J. S.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, P. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. **Revista Controle & Automação**, Campinas, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004.

LI, H.; GAO, H.; LIU, H. Robust quantised control for active suspension systems. **IET Control Theory Application**, Stevenage, v. 15, n. 17, p. 1955–1969, 2011.

LÖFBERG, J. **Yalmip**: a toolbox for modeling and optimization in matlab. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, **Proceedings of the [...]**. New Orleans: IEEE, 2004.

MOREIRA, M. R.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; ESTEVES, T. T.; TEIXEIRA, M. C. M. ; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Stabilizability and disturbance rejection with state-derivative feedback. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2010, p. 1-12, 2010.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

PASCOAL, R. M.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Restrição da taxa de decaimento e otimização no projeto de controladores robustos para sistemas sujeitos a falhas. *In*: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 2009, Bauru. **Anais [...]**. Bauru: UNESP, 2009.

QUANSER. **Active Suspension System - User Manual**. Quanser Consulting Inc., Ontario, Canada, 2009.

ROSA FILHO, J. E. A. **Controle robusto  $\mathcal{H}_2$  aplicado ao pêndulo invertido sujeito a incertezas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro de Tecnologia e Urbanismo, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SALAM, F. M. A. Velocity feedback control and the dynamic properties of robot manipulators. *In*: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 26, 1987, Los Angeles. **Proceedings of the [...]**. Los Angeles: IEEE, 1987. p. 2217–2220.

SAUER, P. W.; PAI, M. A. **Power system dynamics and stability**. New Jersey: PrenticeHall, 1998.

SHIN, D.; KIM, W.; LEE, Y.; CHUNG, C. C. Nonlinear position control for permanent magnet stepper motor using only position feedback. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS*, 13, Gwangju. **Proceedings of the [...]**. Gwangju: IEEE, 2013.

SILVA, E. R. P. **Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control - Analysis and Design**. John Wiley & Sons, 2005.

SOUZA, W. A.; DE OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, L. S. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA*, 20, 2014, Belo Horizonte. **Anais [...]**. SBA, 2014. Disponível em: <http://www.swge.inf.br/cba2014/anais/PDF/1569934597.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2020.

SUN, W.; PAN, H.; YU, J.; GAO, H. Reliability control for uncertain half-car active suspension systems with possible actuator faults. **IET Control Theory Application**, Stevenage, v. 8, n. 9, p. 746–754, 2014.

TELLO, I. F. Y.; ESTEVES, L. M.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; DE OLIVEIRA, D. R.; ALVES, U. N. L. T. Robust  $\mathcal{H}_\infty$  switched state-feedback control of uncertain linear systems. *In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, ROCOND2018*, 9, p. 67-72, 2018.

YAKUBOVICH, V. A. **Solution of certain matrix inequalities encountered in non-linear control theory**. **Soviet Mathematike**, Dokl., v. 5, p. 652-656, 1964.

YAKUBOVICH, V. A. The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems, I, II, III. **Automation and Remote Control**, New York, v. 25/26, n. 4, p. 905-917, 577-592, 753-763, 1967.

YAKUBOVICH, V. A. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. **Soviet Mathematike**, Dokl, v. 3, p. 620-623, 1962.

ZAMES, G. Feedback of optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transaction on Automatic Control**, Piscataway, v. 26, n. 2, p. 301–320, 1981.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of robust control**. New York: Prentice Hall, 1998.

### APÊNDICE A – Definições de algumas matrizes especiais

- Uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é simétrica se  $A^T = A$ .
- Uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é hermitiana se  $A^* = A$ , sendo que  $A^* = (\bar{A})^T$ . Os elementos de  $\bar{A}$  são os conjugados dos números complexos dos elementos correspondentes em  $A$ .
- Uma matriz  $A$  simétrica é positiva definida se  $x^T A x > 0, \forall x \neq \mathbb{0}$ . O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e  $x^T$  por  $x^*$ .
- Uma matriz  $A$  simétrica é positiva semidefinida se  $x^T A x \geq 0, \forall x \neq \mathbb{0}$ . O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e  $x^T$  por  $x^*$ .
- Uma matriz  $A$  simétrica é negativa definida se  $x^T A x < 0, \forall x \neq \mathbb{0}$ . O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e  $x^T$  por  $x^*$ .
- Uma matriz  $A$  simétrica é negativa semidefinida se  $x^T A x \leq 0, \forall x \neq \mathbb{0}$ . O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e  $x^T$  por  $x^*$ .

## APÊNDICE B – Estabilidade de Lyapunov

Nos sistemas não-lineares, a estabilidade global nem sempre ocorre. Em geral, apenas um conjunto de condições iniciais, contido no espaço  $\mathbb{R}^n$ , origina trajetórias que convergem para o ponto de equilíbrio estável  $x_0$ . Matematicamente, esse conjunto é denominado área de atração ou região de estabilidade (BARBAZELLI, 2005).

Além de estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio, o Método de Lyapunov fornece uma maneira de se estimar a região de estabilidade. A Estabilidade do sistema é determinada usando funções ditas de Lyapunov definidas no espaço de estados considerando seu sinal e o de sua derivada temporal (BARBAZELLI, 2005).

O teorema de Lyapunov para sistemas autônomos (SAUER; PAI, 1998) é apresentado a seguir. Estuda-se a estabilidade da origem sem perda de generalidade, visto que é possível transformar o problema de um ponto de equilíbrio qualquer em um problema em que o ponto de equilíbrio esteja na origem através de uma translação.

**Teorema B1.** *Considerando-se um sistema dinâmico  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $f(0) = 0$  (a origem é ponto de equilíbrio). Se existe uma função escalar  $V(x)$  positiva definida, isto é,  $V(x) > 0$ , com derivada  $\dot{V}(x) < 0$ , então o sistema é assintoticamente estável em torno de  $x = 0$ . Caso tenha-se que  $V(x) > 0$  e  $\dot{V}(x) \leq 0$ , a origem é ponto de equilíbrio estável.*

## APÊNDICE C – Complemento de Schur

O Complemento de Schur é um método que possibilita converter um conjunto de inequações não-lineares (convexas) em LMIs (GAHINET *et al.*, 1995; CARDIM, 2009).

A ideia básica é que a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{C.1})$$

sendo que  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  e  $S(x)$  têm uma dependência afim de  $x$ , é equivalente ao conjunto de inequações (C.2) e ao conjunto de equações (C.3).

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) > 0. \quad (\text{C.2})$$

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T > 0. \quad (\text{C.3})$$

Maiores detalhes sobre o Complemento de Schur podem ser encontrados em Boyd *et al.* (1994).