

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

“Otimização de Controladores Robustos de Sistemas Dinâmicos Sujeitos a Falhas Estruturais”

LUIZ FRANCISCO SANCHES BUZACHERO

Engenheiro Eletricista - FEIS/UNESP

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP - Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira - SP
Março / 2010

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

Buzachero, Luiz Francisco Sanches.

B992o Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais / Luiz Francisco Sanches Buzachero. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2010.

72 f.:il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2010

Orientador: Edvaldo Assunção

1. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). 2. Controle robusto.
3. Otimização de controladores. 4. Liapunov, Funções de.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Otimização de Controladores Robustos de Sistemas Dinâmicos Sujeitos a Falhas Estruturais

AUTOR: LUIZ FRANCISCO SANCHES BUZACHERO
ORIENTADOR: Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. CELSO CORREIA DE SOUZA
Coordenação de Mestrados Em Meio Ambiente e Desenvolvimento Regional e Produção e Gestão Agro-Industrial / Universidade Anhanguera-Uniderp

Data da realização: 25 de março de 2010.

À minha família, em especial à minha mãe Rosa Maria, à minha avó Remedios e à minha noiva Elisabete, pela paciência, amor, compreensão e incentivo para comigo em todos os momentos.

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos:

- A Deus, pela misericórdia e amor incondicional para com todos nós;
- Ao meu orientador professor Dr. Edvaldo Assunção pela oportunidade que me foi dada, pela amizade e pelo exemplo de homem de bem que é;
- Aos professores Dr. Marcelo C. M. Teixeira e Dr^a. Neusa A. P. da Silva, pelas sugestões para este trabalho;
- Aos meus amigos e companheiros de laboratório Emerson R. P. da Silva, Flávio A. Faria, Rodrigo Cardim, Renato Mendes, Gisele e Fernando por sempre me ajudarem;
- Aos demais amigos e colegas que de forma direta ou indireta me ajudaram, em especial André, Jefferson, Manoel, Talita, Edson e Fabio;
- À minha mãe Rosa Maria, à minha noiva Elisabete e à minha avó Remedios pelo apoio moral que foi imprescindível para o desenvolvimento deste trabalho;
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro;
- Aos desenvolvedores do ABN_TE_X, um pacote de classes L_AT_EX para a criação e formatação de documentos conforme as normas da ABNT.

*“Fé inabalável só o é a que
pode encarar frente a frente a razão,
em todas as épocas da Humanidade.”*

Allan Kardec (1804-1869)

Resumo

Neste trabalho propõem-se novas técnicas para otimização da norma de controladores robustos de sistemas dinâmicos lineares sujeitos a falhas estruturais, utilizando realimentação dos estados. As técnicas de projeto utilizadas baseiam-se em LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) formuladas com base na teoria de estabilidade segundo Lyapunov, utilizando o lema de Finsler e o lema projetivo recíproco. As LMIs utilizadas tiveram o acréscimo da restrição da taxa de decaimento, incluindo o parâmetro γ nas LMIs, responsável por diminuir o tempo de duração do transitório dos sistemas realimentados. Foram realizadas comparações qualitativas e quantitativas entre os métodos de projeto com otimização da norma dos controladores, visando alternativas de controladores com menor norma e melhor desempenho que atendam às restrições do projeto. O trabalho se encerra com uma seção de conclusões e perspectivas futuras.

Palavras chave: Desigualdades matriciais lineares (LMIs), Otimização da norma de controladores, Projeto de controladores robustos, Estabilidade segundo Lyapunov, Taxa de decaimento, Lema de Finsler, Lema projetivo recíproco.

Abstract

This work proposes new techniques to optimize robust controllers norm of linear systems subject to structural failures, with states feedback. The design techniques used are based on LMIs (Linear Matrix Inequalities) formulated on the basis of Lyapunov's stability theory, using Finsler's lemma and reciprocal projection lemma. The LMIs have used the addition of the decay rate restriction, including a parameter γ in the LMIs, responsible for decreasing the settling time of the feedback system. Qualitative and quantitative comparisons were made between methods of design and optimization of the robust controllers norm, seeking alternatives with small norm and better performance that meet the design constraints. The work ends with a section of conclusions and future prospects.

Keywords: Linear matrix inequalities (LMIs), optimization of controllers norm, Robust controller design, Lyapunov stability, Decay rate, Finsler's lemma, Reciprocal projection lemma.

Lista de Figuras

3.1	Sistema massa-mola-amortecedor.	37
3.2	Sistema com suspensão ativa de assento de carro.	39
3.3	Helicóptero 3-DOF da Quanser.	41
3.4	Modelo esquemático do Helicóptero 3-DOF	42
4.1	Comparação entre dois métodos de otimização da norma de K para o sistema massa-mola-amortecedor.	46
4.2	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização existente utilizando as LMIs de estabilidade quadrática para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado	46
4.3	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta neste trabalho utilizando as LMIs de estabilidade quadrática para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado	47
4.4	Comparação entre dois métodos de otimizar a norma de K para o sistema com suspensão ativa.	48
4.5	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização existente para o sistema com suspensão ativa.	49
4.6	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta neste trabalho para o sistema com suspensão ativa.	50
4.7	Comparação entre os dois métodos de otimizar a norma de K para o modelo linear do helicóptero 3-DOF.	51
4.8	Implementação prática do controlador K projetado por estabilidade quadrática com otimização existente no helicóptero 3-DOF.	53

4.9	Implementação prática do controlador K projetado por estabilidade quadrática com otimização proposta neste trabalho no helicóptero 3-DOF.	53
4.10	Quantidade de controladores com menor norma entre os dois casos de otimização para 1000 politopos gerados aleatoriamente.	54
4.11	Comparação entre os métodos de projeto com otimização da norma de K para o sistema massa-mola-amortecedor.	56
4.12	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade quadrática para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado	57
4.13	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade estendida para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado	58
4.14	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade projetiva para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado	58
4.15	Comparação entre os métodos de projeto com otimização da norma de K para o sistema com suspensão ativa de assento de carro.	59
4.16	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta e LMIs de estabilidade quadrática para o sistema com suspensão ativa.	60
4.17	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta e LMIs de estabilidade estendida para o sistema com suspensão ativa.	61
4.18	Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta e LMIs de estabilidade projetiva para o sistema com suspensão ativa.	61
4.19	Comparação entre os métodos de projeto com otimização da norma de K para o modelo linear do helicóptero 3-DOF.	62

4.20	Implementação prática do controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade quadrática no helicóptero 3-DOF. .	64
4.21	Implementação prática do controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade estendida no helicóptero 3-DOF. .	64
4.22	Quantidade de controladores com menor norma entre os três casos de projeto e otimização para 1000 politopos gerados aleatoriamente.	66

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros do helicóptero	43
4.1	Comparação entre os dois métodos de otimização com menor norma de K . . .	55
4.2	Comparação entre os três casos de projeto e otimização com menor norma de K	66

Sumário

Introdução	13
1 Técnica existente para projeto e otimização da norma de controladores robustos	16
1.1 Estabilidade de sistemas lineares contínuos no tempo	16
1.2 Estabilidade quadrática de sistemas lineares contínuos no tempo	16
1.3 Realimentação dos estados para sistemas lineares invariantes no tempo	17
1.4 Estabilidade de sistemas lineares contínuos no tempo com realimentação dos estados	18
1.5 Restrição da taxa de decaimento para sistemas com realimentação dos estados	19
1.6 Estabilidade robusta para sistemas com realimentação dos estados	20
1.7 Otimização da norma da matriz K de realimentação dos estados	21
2 Novas técnicas para projeto e otimização da norma de controladores robustos	23
2.1 Nova otimização da norma da matriz de realimentação dos estados	23
2.2 Lema de Finsler	25
2.2.1 Estabilidade de sistemas utilizando o lema de Finsler	26
2.2.2 Estabilidade robusta de sistemas utilizando o lema de Finsler	28
2.2.3 Otimização da norma da matriz K utilizando o lema de Finsler	29
2.3 Lema projetivo recíproco	30
2.3.1 Estabilidade de sistemas utilizando o lema projetivo recíproco	31
2.3.2 Estabilidade robusta de sistemas utilizando o lema projetivo recíproco	33

2.3.3	Otimização da norma da matriz K utilizando o lema projetivo recíproco . . .	35
3	Exemplos de aplicação	37
3.1	Sistema massa-mola-amortecedor	37
3.2	Sistema com suspensão ativa de assento de carro	38
3.3	Helicóptero 3-DOF	41
4	Comparação entre os métodos de otimização dos controladores	45
4.1	Otimização dos controladores considerando apenas estabilidade quadrática . . .	45
	Exemplo 4.1.1: Sistema massa-mola-amortecedor	45
	Exemplo 4.1.2: Sistema com suspensão ativa de assento de carro	48
	Exemplo 4.1.3: Helicóptero 3-DOF	50
	Exemplo 4.1.4: Comparação geral dos dois métodos de otimização	54
4.2	Otimização do controlador K utilizando as novas técnicas de projeto	55
	Exemplo 4.2.1: Sistema massa-mola-amortecedor	56
	Exemplo 4.2.2: Sistema com suspensão ativa de assento de carro	59
	Exemplo 4.2.3: Helicóptero 3-DOF	62
	Exemplo 4.2.4: Comparação geral dos três métodos de projeto com otimização . . .	65
	Conclusões	68
	Referências	71

Introdução

A história das LMIs (do inglês *Linear Matrix Inequalities*) na análise de sistemas dinâmicos remonta a mais de 100 anos. A história começa em cerca de 1890, quando Lyapunov publicou seu trabalho introduzindo o que hoje chamamos de teoria de Lyapunov (BOYD et al., 1994). As pesquisas e publicações envolvendo a teoria de Lyapunov cresceram muito nas últimas décadas (CHEN, 1999), abrindo um leque muito grande para diversas abordagens como análise de estabilidade robusta de sistemas lineares (LEITE et al., 2004), controle robusto \mathcal{H}_2 (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001, ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2007b) e \mathcal{H}_∞ abordado em Chilali e Gahinet (1996) e Assunção et al. (2007d), projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a falhas estruturais com realimentação das derivadas dos estados (ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008a) e projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a falhas estruturais com realimentação dos estados (PASCOAL; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009a). O projeto de controladores robustos pode ser também aplicado para sistemas não-lineares (SILVA, 2009).

Além das diversas técnicas de projeto de controladores existentes em Ogata (2003) e Dorf e Bishop (2001), o projeto de controladores robustos (ou projeto de controladores por estabilidade quadrática) usando LMIs destaca-se por resolver problemas que até então não possuíam solução conhecida. Esses projetos utilizam pacotes computacionais especializados (GAHINET et al., 1995), o que tornou as LMIs ferramentas importantes na teoria de controle.

Podemos destacar dois pontos críticos no projeto de controladores robustos que são explorados neste trabalho:

- A magnitude dos controladores projetados que, muitas vezes alta, prejudica a implementação prática dos mesmos, sendo assim necessária uma minimização dos ganhos do controlador para viabilizar sua implementação (otimização da norma de K).
- O fato de que o tempo de estabilização do sistema pode ser maior que o requisitado nas especificações do projeto, havendo a necessidade de restrições nas LMIs que limitem a taxa de decaimento, formulada com a inserção do parâmetro γ nas LMIs.

Publicações recentes tem verificado um certo conservadorismo inserido na análise de esta-

bilidade quadrática, o que levou a uma busca por soluções para eliminar esse conservadorismo. O lema de Finsler (SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1997) vem sendo muito utilizado na teoria de controle para a análise de estabilidade por LMIs (LEITE et al., 2004), com resultados equivalentes aos das LMIs de estabilidade quadrática, porém com matrizes extras, o que possibilita uma certa relaxação na análise de estabilidade (comumente denominada "estabilidade estendida"), através da obtenção de uma região de factibilidade maior. A vantagem encontrada em sua aplicação para projeto de sistemas com realimentação dos estados é o fato de que a síntese do ganho K se torna desacoplada da matriz de Lyapunov P , deixando a matriz de Lyapunov livre pois esta já é forçosamente simétrica e definida positiva para atender as restrições de estabilidade iniciais (OLIVEIRA, 2004).

O lema projetivo recíproco, utilizado na literatura para controle robusto \mathcal{H}_2 (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001), também pode ser utilizado para a síntese de controladores robustos, eliminando de certa forma o conservadorismo existente, pois possibilita lidar com múltiplas matrizes de Lyapunov, como no caso da estabilidade estendida, viabilizando através de matrizes extras uma relaxação na análise da estabilidade (denominada aqui de estabilidade projetiva). A síntese do controlador K passa a depender de uma matriz V auxiliar, não necessariamente simétrica, e nesta situação se torna totalmente desacoplada da matriz de Lyapunov P , deixando-a livre.

O foco principal deste trabalho é propor novos métodos de otimização da norma do controlador K e comparar com o método de otimização existente (ASSUNÇÃO et al., 2007) considerando os diferentes critérios de estabilidade, visando as vantagens e desvantagens de cada método, assim como a inserção de uma taxa de decaimento (BOYD et al., 1994) na formulação das LMIs. As LMIs de otimização que serão utilizadas para as novas técnicas de projeto, intituladas no desenvolvimento do texto como otimização proposta neste trabalho, tiveram que ser reformuladas devido a matriz de síntese do controlador não depender mais de uma matriz simétrica, condição essa necessária para a formulação das LMIs da otimização existente. As comparações serão feitas através de três exemplos numéricos e uma análise genérica envolvendo 1000 sistemas incertos politópicos gerados aleatoriamente.

As seções deste trabalho se apresentam da seguinte forma:

- Capítulo 1: Apresentação das teorias de estabilidade segundo Lyapunov, estabilidade robusta, projeto de controladores robustos por estabilidade quadrática, taxa de decaimento e técnicas existentes para a otimização da norma de controladores assim como suas respectivas formulações. Os conceitos enunciados neste capítulo são fundamentais para o desenvolvimento do restante do trabalho.

- Capítulo 2: Propõem-se novas técnicas de otimização da norma de controladores robustos. Nessas novas técnicas incluem-se restrições de taxa de decaimento, formuladas a partir do lema de Finsler e do lema projetivo recíproco e as respectivas adequações para a otimização da norma de controladores robustos.
- Capítulo 3: Apresentam-se três exemplos de aplicação, assim como os respectivos modelos lineares para o desenvolvimento das comparações de desempenho dos controladores robustos. Um sistema massa-mola-amortecedor simples, um sistema de suspensão ativa de assento de carro e o helicóptero 3-DOF da QUANSER.
- Capítulo 4: Apresentam-se os resultados obtidos primeiramente para uma comparação entre as duas formas de otimizar a norma do controlador K (otimização existente e otimização proposta) para o projeto por estabilidade quadrática, utilizando os três exemplos de aplicação e em seguida é feita uma comparação mais geral. Na sequência apresentaram-se os resultados para as comparações entre as três técnicas de projeto (projetos por estabilidade quadrática, estabilidade estendida e estabilidade projetiva) com as respectivas otimizações da norma de K , também para os três exemplos de aplicação e uma comparação mais geral, envolvendo 1000 sistemas incertos politópicos, gerados aleatoriamente.
- Capítulo 5: Fazem-se as conclusões e perspectivas futuras de pesquisas.

1 Técnica existente para projeto e otimização da norma de controladores robustos

1.1 Estabilidade de sistemas lineares contínuos no tempo

Considere um sistema linear dinâmico autônomo, ou seja, sem realimentação dos estados. Lyapunov mostrou que o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.1)$$

com $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ e $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ uma matriz conhecida, é assintoticamente estável (isto é, todas as trajetórias convergem para zero) se e somente se existe uma matriz $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que as LMIs

$$A'P + PA < 0 \quad (1.2)$$

$$P > 0 \quad (1.3)$$

sejam satisfeitas (BOYD et al., 1994).

Note que a desigualdade de Lyapunov (1.2) poderia, sem perda de generalidade ser trocada por $A'P + PA \leq -\rho I$ para qualquer $\rho > 0$ e I a matriz identidade de ordem n . Esta propriedade é chamada de homogeneidade.

1.2 Estabilidade quadrática de sistemas lineares contínuos no tempo

Considere em (1.2) que A não seja precisamente conhecida, mas pertence a um politopo de incertezas \mathcal{A} . Nesse caso, a matriz A dentro do domínio de incertezas pode ser escrita como combinação convexa dos vértices A_j , $j = 1, \dots, N$, do politopo (BOYD et al., 1994), ou seja,

$A(\alpha) \in \mathcal{A}$ com

$$\mathcal{A} = \{A(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n \times n} : A(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j A_j, \sum_{j=1}^N \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0, j = 1 \dots N\} \quad (1.4)$$

Uma condição suficiente para a estabilidade do politopo \mathcal{A} é dada pela existência de uma matriz de Lyapunov $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que as LMIs

$$A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0 \quad (1.5)$$

$$P > 0 \quad (1.6)$$

sejam verificadas para todo $A(\alpha) \in \mathcal{A}$ (BOYD et al., 1994). Esta condição de estabilidade é conhecida como estabilidade quadrática e pode ser facilmente verificada na prática graças à convexidade da desigualdade de Lyapunov que faz com que as condições (1.5) e (1.6) sejam equivalentes à verificação da existência de $P = P' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tal que

$$A_j'P + PA_j < 0 \quad (1.7)$$

$$P > 0 \quad (1.8)$$

com $j = 1, \dots, N$.

Pode-se observar que (1.5) pode ser obtida de (1.7) multiplicando a última por $\alpha_j \geq 0$ e somando em j , de $j = 1$ até $j = N$.

Pelo fato de ser apenas uma condição suficiente para a estabilidade do politopo \mathcal{A} , são gerados resultados conservadores, apesar disto a estabilidade quadrática vem sendo muito utilizada para síntese de controladores robustos (LEITE et al., 2004).

1.3 Realimentação dos estados para sistemas lineares invariantes no tempo

Considere um sistema linear controlável e invariante no tempo descrito na forma de espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.9)$$

sendo $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ a matriz de estados, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ a matriz de entrada do sistema, $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ o vetor de estados e $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ o vetor de entrada. Supondo que todos os estados estão disponíveis para

realimentação, teremos que a lei de controle para a realimentação dos mesmos é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) \quad (1.10)$$

sendo $K \in \Re^{m \times n}$ uma matriz de elementos constantes. Muitas vezes a norma do controlador K pode ser elevada, levando amplificadores à saturação e assim dificultando a implementação em sistemas analógicos. Desta forma é necessária uma redução do módulo dos elementos dos controladores para facilitar sua implementação.

Substituindo (1.10) em (1.9) teremos o seguinte sistema realimentado:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.11)$$

Pode-se assim aplicar a desigualdade de Lyapunov para se obter a estabilidade do sistema realimentado.

1.4 Estabilidade de sistemas lineares contínuos no tempo com realimentação dos estados

Considere o sistema linear realimentado (1.11). Aplicado, agora, para este sistema as LMIs dadas em (1.2), tem-se:

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < 0 \quad (1.12)$$

$$P > 0 \quad (1.13)$$

Como a desigualdade (1.12) tornou-se uma BMI (do inglês *Bilinear Matrix Inequalities*) é necessário realizar manipulações para adequá-las novamente à condição de LMIs.

Multiplicando as desigualdades (1.12) e (1.13) à esquerda e à direita por P^{-1} , fazendo $X = P^{-1}$ e $G = KP$ encontra-se:

$$AX - BG + XA' - G'B' < 0 \quad (1.14)$$

$$X > 0 \quad (1.15)$$

As desigualdades encontradas em (1.14) e (1.15) são LMIs, e sendo factíveis, pode-se projetar uma matriz de realimentação de estados que estabiliza o sistema, por:

$$K = GX^{-1} \quad (1.16)$$

As LMIs (1.14) e (1.15) podem facilmente ser resolvidas por pacotes computacionais de otimização convexa como o LMI *control toolbox* (GAHINET et al., 1995), pacote do *software* MATLAB.

1.5 Restrição da taxa de decaimento para sistemas com realimentação dos estados

Levando-se em conta o sistema controlado (1.11), a taxa de decaimento (ou maior expoente de Lyapunov) é definida como a maior constante positiva γ , tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\gamma t} \|x(t)\| = 0 \quad (1.17)$$

e se mantenha para todas as trajetórias $x(t)$, $t > 0$.

Podemos utilizar a função quadrática de Lyapunov

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t) \quad (1.18)$$

para estabelecer um limite inferior sobre a taxa de decaimento de (1.11), com

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)) \quad (1.19)$$

para todas as trajetórias (BOYD et al., 1994).

De (1.18) e (1.11), temos que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}(t)'Px(t) + x(t)'P\dot{x}(t) \\ &= x(t)'(A - BK)'Px(t) + x(t)'P(A - BK)x(t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Incorporando-se a restrição da taxa de decaimento (1.19) na equação (1.20) e realizando as simplificações apropriadas, teremos:

$$(A - BK)'P + P(A - BK) < -2\gamma P \quad (1.21)$$

$$P > 0 \quad (1.22)$$

Realizando-se as mesmas operações algébricas e mudanças de variáveis que foram feitas em (1.14) e (1.15) teremos as seguintes LMIs:

$$AX - BG + XA' - G'B' + 2\gamma X < 0 \quad (1.23)$$

$$X > 0 \quad (1.24)$$

Da mesma forma como em (1.14) e (1.15), se as LMIs (1.23) e (1.24) são factíveis, um controlador que estabiliza o sistema realimentado pode ser dado por (1.16).

1.6 Estabilidade robusta para sistemas com realimentação dos estados

Considere o sistema linear invariante no tempo e incerto:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) \quad (1.25)$$

Esse sistema pode ser descrito como combinação convexa dos vértices do politopo:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_j x(t) + \sum_{j=1}^r \alpha_j B_j u(t) \quad (1.26)$$

com $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, r$ e

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1 \quad (1.27)$$

sendo r o número de vértices do politopo (BOYD et al., 1994).

Levando-se em conta a ideia desenvolvida para o sistema autônomo incerto (1.5), tem-se o seguinte teorema (BOYD et al., 1994):

Teorema 1.1. *Uma condição suficiente para que se garanta a estabilidade do sistema incerto (1.26) é a existência de matrizes $X = X' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, tais que*

$$A_j X - B_j G + X A_j' - G' B_j' + 2\gamma X < 0 \quad (1.28)$$

$$X > 0 \quad (1.29)$$

com $j = 1, \dots, r$.

Quando as LMIs (1.28) e (1.29) são factíveis, uma matriz de realimentação de estados que estabiliza o sistema pode ser dada por

$$K = GX^{-1} \quad (1.30)$$

Prova: (BOYD et al., 1994) De (1.27) e (1.28), segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^r \alpha_j [A_j X - B_j G + X A_j' - G' B_j' + 2\gamma X] \\ &= \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j A_j \right) X - \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j B_j \right) G + X \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j A_j' \right) - G' \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j B_j' \right) + 2\gamma X \quad (1.31) \\ &= A(\alpha)X - B(\alpha)G + XA(\alpha)' - G'B(\alpha)' + 2\gamma X < 0 \end{aligned}$$

■

Assim, pode-se realimentar o sistema incerto apresentado em (1.25), sendo (1.28) e (1.29) condições suficientes para a estabilidade assintótica do politopo, agora para um sistema com realimentação dos estados sujeito a taxa de decaimento.

1.7 Otimização da norma da matriz K de realimentação dos estados

Em diversas situações a norma da matriz de realimentação dos estados é alta, dificultando sua implementação prática. Assim, o teorema abaixo foi proposto com o intuito de limitar a norma do controlador K (ASSUNÇÃO et al., 2007; FARIA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009a; FARIA et al., 2009b).

Teorema 1.2. *Dada uma constante $\mu_0 > 0$, obtém-se um limitante para a norma da matriz $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ de realimentação dos estados, com $K = GX^{-1}$, $X = X' > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ encontrando o valor mínimo de β , $\beta > 0$, tal que $KK' < \frac{\beta}{\mu_0^2} I_m$. Pode-se obter valor ótimo de β através da solução do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & \text{s.a.} \begin{bmatrix} \beta I_m & G \\ G' & I_n \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$X > \mu_0 I_n \quad (1.33)$$

$$(\text{Conjunto de LMIs (1.14)e(1.15) ou (1.23)e(1.24) ou (1.28)e(1.29)}) \quad (1.34)$$

onde I_m e I_n denotam as matrizes identidade de ordem m e n respectivamente.

Prova: (ASSUNÇÃO et al., 2007) Do complemento de Schur de (1.32) temos:

$$\beta I_m - G I_n G' > 0$$

desta forma

$$GG' < \beta I_m \quad (1.35)$$

Pré e pós-multiplicando a desigualdade (1.33) por \sqrt{X} , note que

$$\sqrt{X}\mu_0 I_n \sqrt{X} < \sqrt{X}X\sqrt{X} \Rightarrow \mu_0 X < XX \quad (1.36)$$

Agora, pré e pós-multiplicando ambos os lados da desigualdade (1.33) por K e K' respectivamente, tem-se:

$$K\mu_0 I_n K' < KXK' \quad (1.37)$$

Realizando o mesmo procedimento em (1.36), obtém-se:

$$K\mu_0 X K' < KX X K' \Rightarrow KXK' < \frac{KX X K'}{\mu_0} \quad (1.38)$$

De (1.37) e (1.38) e fazendo $G = KX$, segue que

$$\mu_0 K K' < \frac{GG'}{\mu_0} \quad (1.39)$$

Finalmente, unindo (1.35) e (1.39), tem-se

$$K K' < \frac{\beta}{\mu_0^2} I_m \quad (1.40)$$

■

Para melhorar o desempenho de otimização, propõem-se novas formas de se minimizar a norma do controlador K no capítulo seguinte.

2 *Novas técnicas para projeto e otimização da norma de controladores robustos*

2.1 Nova otimização da norma da matriz de realimentação dos estados

Levando-se em conta a teoria já existente para a otimização da norma de controladores robustos sujeitos a falhas (ASSUNÇÃO et al., 2007), visto no final do primeiro capítulo, propõe-se, neste trabalho, uma abordagem alternativa para o mesmo problema.

A abordagem da norma ótima utilizada foi modificada para adequar-se às novas estruturas de LMIs que serão enunciadas mais à frente, neste capítulo. A princípio, verificou-se que esta nova abordagem produziu de início resultados melhores que os já existentes para a otimização enunciada no Teorema 1.2 utilizando-se o conjunto de LMIs (1.28) e (1.29).

Lema 2.1. *Considere $L \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ uma matriz dada e $\beta \in \mathfrak{R}$, $\beta > 0$. As condições*

1. $L'L \leq \beta I_m$

2. $LL' \leq \beta I_n$

são equivalentes.

Prova: Observe que se $L = 0$ as condições do lema são verificadas. Então, considere o caso no qual $L \neq 0$.

Note que da primeira afirmação do lema temos:

$$L'L \leq \beta I_m \Leftrightarrow x'(L'L)x \leq \beta x'x \quad (2.1)$$

para todo $x \in \mathfrak{R}^m$.

Sabe-se que

$$x'(L'L)x \leq \lambda_{\max}(L'L)x'x \quad (2.2)$$

sendo $\lambda_{\max}(L'L)$ o máximo autovalor de $L'L$, que é real (toda matriz simétrica tem somente autovalores reais). Adicionalmente, quando x é igual ao autovetor de $L'L$ associado ao autovalor $\lambda_{\max}(L'L)$, tem-se que $x'(L'L)x = \lambda_{\max}(L'L)x'x$. Assim, de (2.1) e (2.2), $\beta \geq \lambda_{\max}(L'L)$.

Analogamente, para todo $z \in \mathfrak{R}^n$, da segunda afirmação do lema,

$$LL' \leq \beta I_n \Leftrightarrow z'(LL')z \leq \lambda_{\max}(LL')z'z \leq \beta z'z \quad (2.3)$$

e assim, $\beta \geq \lambda_{\max}(LL')$.

Agora, note que (CHEN, 1999),

$$\lambda^m \det(\lambda I_n - L'L) = \lambda^n \det(\lambda I_m - LL') \quad (2.4)$$

Desta forma, todo autovalor de $L'L$ não nulo é também um autovalor de LL' . Portanto, $\lambda_{\max}(L'L) = \lambda_{\max}(LL')$, e de (2.2) e (2.3) o lema está demonstrado. ■

Conclui-se que minimizar a norma de uma matriz equivale à minimização de uma variável $\beta > 0$, tal que $K'K < \frac{\beta}{\mu_0} I_n$, com o escalar $\mu_0 > 0$, similar ao procedimento de otimização já publicado para o projeto de um controlador discreto a partir de um controlador contínuo, otimizando o erro entre os controladores (CHANG et al., 2002). Repare que a posição da matriz transposta foi trocada nessa condição, em relação à utilizada no Teorema 1.2. Sabendo que $P = X^{-1}$ é a matriz utilizada para a definição da função quadrática de Lyapunov, propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Dada uma constante $\mu_0 > 0$, obtém-se um limitante para a norma da matriz $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ de realimentação dos estados, com $K = GX^{-1}$, $X = X' > 0$, $X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ encontrando o valor mínimo de β , $\beta > 0$, tal que $K'K < \frac{\beta}{\mu_0} I_n$. Pode-se obter o valor mínimo de β através da solução do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & \text{s.a.} \begin{bmatrix} X & G' \\ G & \beta I_m \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$X > \mu_0 I_n \quad (2.6)$$

$$(\text{Conjunto de LMIs (1.14)e(1.15) ou (1.23)e(1.24) ou (1.28)e(1.29)}) \quad (2.7)$$

onde I_m e I_n denotam as matrizes identidade de ordem m e n respectivamente.

Prova: Do complemento de Schur da primeira desigualdade de (2.5), tem-se:

$$\beta I_m > 0 \text{ e } X - G'(\beta I_m)^{-1}G > 0 \quad (2.8)$$

Assim, de (2.8) obtém-se:

$$X > \frac{1}{\beta} G'G \Rightarrow G'G < \beta X \quad (2.9)$$

Substituindo $G = KX$ em (2.9), temos:

$$XK'KX < \beta X \Rightarrow K'K < \beta X^{-1} \quad (2.10)$$

De (2.6) temos que:

$$X^{-1} < \frac{1}{\mu_0} I_n \quad (2.11)$$

Portanto de (2.10) e (2.11):

$$K'K < \frac{\beta}{\mu_0} I_n \quad (2.12)$$

sendo que K é o controlador ótimo associado a (1.14) e (1.15) ou (1.23) e (1.24) ou (1.28) e (1.29). ■

Ver-se-á uma comparação entre os dois métodos de otimização, utilizando as LMIs robustas sujeitas a taxa de decaimento (1.28) e (1.29) no Capítulo 4. Como o novo método pode se adequar às LMIs relaxadas enunciadas a seguir, o mesmo foi utilizado nas análises comparativas para os projetos de controladores por estabilidade estendida e estabilidade projetiva.

2.2 Lema de Finsler

Pode-se utilizar o lema de Finsler para expressar condições de estabilidade em termos de desigualdades matriciais, com vantagens sobre a teoria já existente de Lyapunov (BOYD et al., 1994), pois introduz novas variáveis gerando novos graus de liberdade na análise de sistemas incertos (OLIVEIRA, 2004) com a possibilidade de eliminação de variáveis e de não-linearidades.

Lema 2.2 (Finsler). *Considere $w \in \mathfrak{R}^{n_x}$, $\mathcal{L} \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e $\mathcal{B} \in \mathfrak{R}^{m_x \times n_x}$ com $\text{rank}(\mathcal{B}) < n_x$ e \mathcal{B}^\perp uma base para o espaço nulo de \mathcal{B} (isto é, $\mathcal{B}\mathcal{B}^\perp = 0$). Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $w' \mathcal{L} w < 0, \forall w \neq 0 : \mathcal{B}w = 0$
2. $\mathcal{B}^{\perp'} \mathcal{L} \mathcal{B}^\perp < 0$
3. $\exists \mu \in \mathfrak{R} : \mathcal{L} - \mu \mathcal{B}' \mathcal{B} < 0$
4. $\exists \mathcal{X} \in \mathfrak{R}^{n_x \times m_x} : \mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}' \mathcal{X}' < 0$

Prova: Pode-se encontrar a prova do lema de Finsler em Skelton, Iwasaki e Grigoriadis (1997) e Oliveira e Skelton (2001). ■

Fez-se a abordagem do Lema de Finsler para a síntese de controladores robustos sujeitos a falhas estruturais e com restrição da taxa de decaimento, tendo como ponto crítico a otimização na norma do controlador.

Realizou-se a síntese de controladores para sistemas contínuos no tempo com a aplicação do lema de Finsler no Capítulo 4 deste trabalho.

2.2.1 Estabilidade de sistemas utilizando o lema de Finsler

Considere o sistema realimentado (1.11). Definindo $w = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} (A - BK) & -I \end{bmatrix}$, $\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} I \\ (A - BK) \end{bmatrix}$ e $\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix}$. Note que $\mathcal{B}w = 0$ corresponde a (1.11) e $w' \mathcal{L} w < 0$ corresponde a restrição de estabilidade com taxa de decaimento dadas por (1.18) e (1.19). Neste caso as dimensões das variáveis do lema (2.2) são: $n_x = 2n$ e $m_x = n$. Considerando que P é a matriz utilizada para a definição da função quadrática de Lyapunov (1.18), teremos as propriedades 1 e 2 do Lema de Finsler escritas como:

1. $\exists P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} < 0 \forall x, \dot{x} \neq 0 : \begin{bmatrix} (A - BK) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = 0$$
2. $\exists P = P' > 0$ tal que

$$\begin{bmatrix} I \\ (A - BK) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ (A - BK) \end{bmatrix} < 0$$

o que resulta nas equações de estabilidade, segundo Lyapunov, incluindo taxa de decaimento:

1. $x(t)'P\dot{x}(t) + \dot{x}(t)'Px(t) + 2\gamma x(t)'Px(t) < 0 \forall x, \dot{x} \neq 0 : \dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$
2. $P(A - BK) + (A - BK)'P + 2\gamma P < 0$

Desta forma, é possível caracterizar estabilidade por meio da função quadrática de Lyapunov ($V(x(t)) = x(t)'Px(t)$), gerando assim, novos graus de liberdade para a síntese de controladores.

Da prova existente do Lema de Finsler conclui-se que, se as propriedades 1 e 2 são verdadeiras, então as propriedades 3 e 4 também serão. Assim, pode-se reescrever a propriedade 4 da seguinte forma:

4. $\exists \mathcal{X} \in \mathfrak{R}^{2n \times n}, P = P' > 0$ tais que

$$\begin{bmatrix} 2\gamma P & P \\ P & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{X} \begin{bmatrix} (A - BK) & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (A - BK)' \\ -I \end{bmatrix} \mathcal{X}' < 0. \quad (2.13)$$

Escolhendo convenientemente a matriz de variáveis $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} Z \\ aZ \end{bmatrix}$, com $Z \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ inversível e não necessariamente simétrica e $a > 0$ uma constante de relaxação da LMI (PIPELEERS et al., 2009). Desenvolvendo a equação (2.13) e aplicando a transformação de congruência $\begin{bmatrix} Z^{-1} & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix}$ a esquerda e $\begin{bmatrix} Z^{-1} & 0 \\ 0 & Z^{-1} \end{bmatrix}'$ a direita, teremos:

$$\begin{bmatrix} AZ^{-1} + Z^{-1}A' - BKZ^{-1} - Z^{-1}K'B' + 2\gamma Z^{-1}PZ^{-1} & Z^{-1}PZ^{-1} + aZ^{-1}A' - aZ^{-1}K'B' - Z^{-1} \\ Z^{-1}PZ^{-1} + aAZ^{-1} - aBKZ^{-1} - Z^{-1} & -aZ^{-1} - aZ^{-1} \end{bmatrix} < 0$$

Fazendo $Y = Z^{-1}$; $G = KY$ e $Q = Y'PY$, foram encontradas as seguintes LMIs sujeitas a taxa de decaimento γ :

$$\begin{bmatrix} AY + Y'A' - BG - G'B' + 2\gamma Q & Q + aY'A' - aG'B' - Y \\ Q + aAY - aBG - Y' & -aY - aY' \end{bmatrix} < 0, \quad (2.14)$$

$$Q > 0 \quad (2.15)$$

sendo $Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}, Y \neq Y', G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}, Q = Q' > 0$, para algum $a > 0$.

Essas LMIs atendem às restrições para a estabilidade assintótica (FERON; APKARIAN; GAHINET, 1996) do sistema descrito em (1.9) com a realimentação de estados dada por (1.10).

Pode-se verificar que o primeiro menor principal da LMI (2.14) possui a estrutura do resultado encontrado no teorema de estabilidade quadrática com taxa de decaimento (FARIA et al., 2009c). Não obstante, verifica-se também, conforme enunciado no lema de Finsler, um maior grau de liberdade, pois a matriz variável Y , responsável pela síntese do controlador, não necessita ser simétrica e a matriz de Lyapunov agora transformada em Q , que continua sendo restrita como positiva definida, está parcialmente desvinculada da síntese do controlador, pois $Q = Y'PY$.

A estabilidade resultante das LMIs deduzidas a partir do lema de Finsler é comumente denominada estabilidade estendida (LEITE et al., 2004) e será assim designada no restante deste trabalho.

2.2.2 Estabilidade robusta de sistemas utilizando o lema de Finsler

Conforme se abordou no primeiro capítulo, pode-se realizar a análise de estabilidade para uma condição de estabilidade robusta considerando o sistema linear invariante no tempo como combinação convexa dos r vértices de polítopos incertos descrito em (1.26). A vantagem de utilizar o lema de Finsler para análise de estabilidade robusta é a liberdade da função de Lyapunov, agora definida como uma $Q(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j Q_j$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$ e $j = 1 \dots r$, ou seja, pode-se definir uma função de Lyapunov Q_j para cada vértice j do polítopo. Para verificar isso, propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Uma condição suficiente para que se garanta a estabilidade do sistema incerto (1.26) é a existência de matrizes $Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $Q_j = Q_j' > 0$ e $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, para algum $a > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} A_j Y + Y' A_j' - B_j G - G' B_j' + 2\gamma Q_j & Q_j + a Y' A_j' - a G' B_j' - Y \\ Q_j + a A_j Y - a B_j G - Y' & -a Y - a Y' \end{bmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

$$Q_j > 0 \quad (2.17)$$

com $j = 1, \dots, r$.

Quando as LMIs (2.16) e (2.17) são factíveis, uma matriz de realimentação de estados que estabiliza o sistema pode ser dada por

$$K = GY^{-1} \quad (2.18)$$

Prova: Multiplicando (2.16) e (2.17) por $\alpha_j \geq 0$, e somando em j , de $j = 1$ até $j = N$, tem-se

$$\left[\begin{array}{l} (\sum_{j=1}^r \alpha_j A_j)Y + Y'(\sum_{j=1}^r \alpha_j A_j)' - (\sum_{j=1}^r \alpha_j B_j)G - G'(\sum_{j=1}^r \alpha_j B_j)' + 2\gamma(\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_j) \\ (\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_j) + a(\sum_{j=1}^r \alpha_j A_j)Y - a(\sum_{j=1}^r \alpha_j B_j)G - Y' \\ (\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_j) + aY'(\sum_{j=1}^r \alpha_j A_j)' - aG'(\sum_{j=1}^r \alpha_j B_j)' - Y \\ -aY - aY' \end{array} \right] < 0$$

$$\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_j > 0$$

$$\left[\begin{array}{ll} A(\alpha)Y + Y'A(\alpha)' - B(\alpha)G - G'B(\alpha)' + 2\gamma Q(\alpha) & Q(\alpha) + aY'A(\alpha)' - aG'B(\alpha)' - Y \\ Q(\alpha) + aA(\alpha)Y - aB(\alpha)G - Y' & -aY - aY' \end{array} \right] < 0 \quad (2.19)$$

$$Q(\alpha) > 0 \quad (2.20)$$

com $Q(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j Q_j$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$ e $j = 1 \dots r$. ■

Assim, pode-se realimentar o sistema incerto apresentado em (1.25), sendo (2.19) e (2.20) condições suficientes para a estabilidade assintótica do politopo.

Observação 2.1. Nas LMIs (2.16) e (2.17), a constante "a" deve ser fixa para todos os vértices e para que as LMIs sejam satisfeitas, observando-se que um $a > 0$ suficientemente pequeno pode resolver o problema.

2.2.3 Otimização da norma da matriz K utilizando o lema de Finsler

A motivação para o estudo de uma otimização alternativa da norma da matriz de controle de realimentação dos estados se deu devido aos resultados menos conservadores obtidos com o lema de Finsler, na expectativa de se encontrar, para algumas situações, controladores com ganhos menores, assim sendo mais fáceis de serem implementados do que os projetados através da teoria de estabilidade quadrática já existente (FARIA et al., 2009b), evitando-se saturações no sinal de controle.

Encontrou-se uma dificuldade para aplicar o teorema já existente (FARIA et al., 2009b) à

nova estrutura de LMIs pelo fato de que a matriz de síntese do controlador Y não é simétrica, condição que era necessária para o desenvolvimento do Teorema (1.2) quando a matriz de síntese do controlador era $X = P^{-1}$. A saída encontrada foi utilizar a ideia do procedimento de otimização para *redesign* apresentado em Chang et al. (2002). Sendo assim, propôs-se a adequação do novo método de otimização com a minimização de um escalar β , sendo a relação de minimização $K'K < \beta P$ com P a matriz de Lyapunov, aos novos parâmetros relaxados por meio do seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Obtém-se um limitante para a norma da matriz $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ de realimentação dos estados, com $K = GY^{-1}$ e $Q = Y'PY$, sendo $Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $G \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $P = P' > 0$ encontrando o valor mínimo de β , $\beta > 0$, tal que $K'K < \beta P$. Pode-se obter o valor ótimo de β através da solução do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & \text{s.a } \begin{bmatrix} Q & G' \\ G & \beta I_m \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$(\text{Conjunto de LMIs (2.14) e (2.15) ou (2.16) e (2.17)}) \quad (2.22)$$

onde I_m denota a matriz identidade de ordem m .

Prova: Do complemento de Schur de (2.21), tem-se:

$$\beta I_m > 0 \text{ e } Q - G'(\beta I_m)^{-1}G > 0 \quad (2.23)$$

Assim, de (2.23) obtém-se:

$$Q > \frac{1}{\beta} G'G \Rightarrow G'G < \beta Q \quad (2.24)$$

Substituindo $G = KY$ e $Q = Y'PY$ em (2.24), temos:

$$Y'K'KY < \beta Y'PY \Rightarrow K'K < \beta P \quad (2.25)$$

sendo que K é o controlador ótimo associado a (2.14) e (2.15) ou (2.16) e (2.17). ■

2.3 Lema projetivo recíproco

Outra ferramenta que se pode utilizar para a análise de estabilidade através de LMIs é o lema projetivo recíproco (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001) enunciado a seguir:

Lema 2.3 (projetivo recíproco). *Considere $Y = Y' > 0$ uma matriz dada. As seguintes afirmações são equivalentes*

1. $\psi + S + S' < 0$
2. A LMI abaixo é factível em relação a W

$$\begin{bmatrix} \psi + Y - (W + W') & S' + W' \\ S + W & -Y \end{bmatrix} < 0$$

Prova: A prova do lema projetivo recíproco pode ser encontrada em Apkarian, Tuan e Bernussou (2001). ■

2.3.1 Estabilidade de sistemas utilizando o lema projetivo recíproco

Considere a desigualdade de Lyapunov sujeita a taxa de decaimento dada por (1.21) e (1.22), que podem ser reescritas na forma:

$$(A - BK)X + X(A - BK)' + 2\gamma X < 0 \quad (2.26)$$

$$X > 0 \quad (2.27)$$

onde $X \triangleq P^{-1}$ e P é a matriz de Lyapunov. A desigualdade de Lyapunov original (1.21) pode ser resgatada multiplicando a desigualdade (2.26) à esquerda e à direita por P .

Assumindo $\psi \triangleq 0$ e $S' = (A - BK)X + \gamma X$, teremos que a primeira afirmação do lema Projetivo Recíproco será exatamente a desigualdade de Lyapunov sujeita a taxa de decaimento descrita em (2.26):

$$\psi + S + S' = (A - BK)X + X(A - BK)' + 2\gamma X < 0$$

Do lema projetivo recíproco, temos que se a primeira afirmativa é verdadeira, então a segunda também será:

$$\begin{bmatrix} Y - (W + W') & (A - BK)X + \gamma X + W' \\ X(A - BK)' + \gamma X + W & -Y \end{bmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

Multiplicando (2.28) à esquerda e à direita por $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & X^{-1} \end{bmatrix}$ com $P \triangleq X^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} Y - (W + W') & (A - BK) + \gamma I + W'P \\ (A - BK)' + \gamma I + PW & -PYP \end{bmatrix} < 0 \quad (2.29)$$

Multiplicando (2.29) à esquerda e à direita por $\begin{bmatrix} W'^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} W^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ respectivamente com $V \triangleq W^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} V'YV - (V + V') & V'(A - BK) + \gamma V' + P \\ (A - BK)'V + \gamma V + P & -PYP \end{bmatrix} < 0 \quad (2.30)$$

Aplicando o complemento de Schur em $V'YV$:

$$\begin{bmatrix} -(V + V') & V'(A - BK) + \gamma V' + P & V' \\ (A - BK)'V + \gamma V + P & -PYP & 0 \\ V & 0 & -Y^{-1} \end{bmatrix} < 0 \quad (2.31)$$

realizando a mudança de variável linearizante $Y \triangleq P^{-1}$ obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -(V + V') & V'(A - BK) + \gamma V' + P & V' \\ (A - BK)'V + \gamma V + P & -P & 0 \\ V & 0 & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.32)$$

Na literatura é possível encontrar uma formulação próxima para a inserção da taxa de decaimento porém com o posicionamento diferente do parâmetro de taxa de decaimento (SHEN; SHEN; GU, 2006). É intuitivo verificar que algum conservadorismo foi introduzido com a escolha $Y \triangleq P^{-1}$, porém a matriz de realimentação dos estados está desvinculada da matriz de Lyapunov P , o que resulta em um relaxamento da LMI de Lyapunov. Utilizando-se a forma dual $(A - BK) \rightarrow (A - BK)'$ (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001), tem-se:

$$\begin{bmatrix} -(V + V') & V'(A - BK)' + \gamma V' + P & V' \\ (A - BK)V + \gamma V + P & -P & 0 \\ V & 0 & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.33)$$

Realizando a mudança de variável $Z \triangleq KV$ e inserindo a restrição $P > 0$, chegamos nas

seguintes LMIs que garantem a estabilidade do sistema realimentado (1.9) - (1.10):

$$\begin{bmatrix} -(V + V') & V'A' - Z'B' + \gamma V' + P & V' \\ AV - BZ + \gamma V + P & -P & 0 \\ V & 0 & -P \end{bmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

$$P > 0 \quad (2.35)$$

As desigualdades (2.34) e (2.35) são LMIs, e sendo factíveis, pode-se deduzir uma matriz de realimentação de estados que pode estabilizar o sistema (1.9) - (1.10) sendo dada por:

$$K = ZV^{-1} \quad (2.36)$$

Esse resultado de flexibilização das LMIs é interessante no projeto de controladores robustos, proposto a seguir.

2.3.2 Estabilidade robusta de sistemas utilizando o lema projetivo recíproco

Pode-se realizar a análise de estabilidade para uma condição de estabilidade robusta, considerando o sistema linear invariante no tempo como combinação convexa dos r vértices de politopos incertos descrito em (1.26). Assim como no caso da estabilidade estendida, a vantagem de utilizar o lema de projetivo recíproco para análise de estabilidade robusta é a liberdade da função de Lyapunov, agora definida como uma $P(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j P_j$, $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$, $\alpha_j \geq 0$ e $j = 1 \dots r$, ou seja, pode-se definir uma função de Lyapunov P_j para cada vértice j do politopo. Para verificar essa situação, propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 2.4. *Uma condição suficiente para que se garanta a estabilidade do sistema incerto (1.26) é a existência de matrizes $V \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $P_j = P_j' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, tais que*

$$\begin{bmatrix} -(V + V') & V'A'_j - Z'B'_j + \gamma V' + P_j & V' \\ A_j V - B_j Z + \gamma V + P_j & -P_j & 0 \\ V & 0 & -P_j \end{bmatrix} < 0 \quad (2.37)$$

$$P_j > 0 \quad (2.38)$$

com $j = 1, \dots, r$.

Quando as LMIs (2.37) e (2.38) são factíveis, uma matriz de realimentação de estados que

2.3.3 Otimização da norma da matriz K utilizando o lema projetivo recíproco

Realizou-se um estudo para adequação aos novos parâmetros relaxados, dado que a matriz de realimentação dos estados K está completamente desvinculada da matriz de Lyapunov $P(\alpha)$. Assim sendo, realizaram-se modificações pertinentes na otimização proposta neste estudo para se adequar ao lema projetivo recíproco. Esta otimização proporcionou resultados interessantes na prática, conforme se verá no Capítulo 4 deste trabalho.

Devido à ausência de relações para montar uma LMI capaz de otimizar o módulo de K propôs-se uma minimização similar ao procedimento de otimização para *redesign* apresentado em (CHANG et al., 2002), inserindo uma restrição a mais em conjunto com as LMIs (2.37) e (2.38). Sendo a matriz M definida como $M = V'^{-1}V^{-1}$ e portanto $M = M' > 0$, é possível encontrar uma relação que otimiza a matriz de realimentação de estados minimizando um escalar β , sendo a relação de minimização $K'K < \beta M$. Com isso propõe-se o seguinte teorema:

Teorema 2.5. *Obtém-se um limitante para a norma da matriz $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ de realimentação dos estados, com $K = ZV^{-1}$, $V \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $Z \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ encontrando o valor mínimo de β , $\beta > 0$, tal que $K'K < \beta M$, sendo $M = V'^{-1}V^{-1}$ e portanto $M = M' > 0$. Pode-se obter o valor ótimo de β através da solução do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ & \text{s.a.} \begin{bmatrix} I_n & Z' \\ Z & \beta I_m \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\text{(Conjunto de LMIs (2.34) e (2.35) ou (2.37) e (2.38))} \quad (2.42)$$

sendo que I_m e I_n denotam as matrizes identidade de ordem m e n respectivamente.

Prova: Do complemento de Schur de (2.41), tem-se:

$$\beta I_m > 0 \text{ e } I_n - Z'(\beta I_m)^{-1}Z > 0 \quad (2.43)$$

Assim, de (2.43) obtém-se:

$$I_n > \frac{1}{\beta} Z'Z \Rightarrow Z'Z < \beta I_n \quad (2.44)$$

Substituindo $Z = KV$ em (2.44), temos:

$$V'K'KV < \beta I_n \quad (2.45)$$

Multiplicando à esquerda e à direita de (2.45) por V'^{-1} e V^{-1} respectivamente e nomeando $V'^{-1}V^{-1} = M$, tem-se:

$$V'K'KV < \beta I_n \Rightarrow K'K < \beta M \quad (2.46)$$

sendo que K é o controlador ótimo associado a (2.34) e (2.35) ou (2.37) e (2.38). ■

No próximo capítulo apresentar-se-ão exemplos práticos que serão utilizados para análise comparativa entre os três métodos de otimização apresentados.

3 Exemplos de aplicação

Neste capítulo descrever-se-ão os modelos dinâmicos de três sistemas práticos: massa-mola-amortecedor, sistema com suspensão ativa de assento de carro e modelo linear do helicóptero 3-DOF.

3.1 Sistema massa-mola-amortecedor

Considere o sistema massa-mola-amortecedor da Figura (3.1), desprezando-se o atrito das rodas com a superfície. Este exemplo foi retirado de (SILVA, 2009) supondo que a constante de elasticidade da mola seja linear.

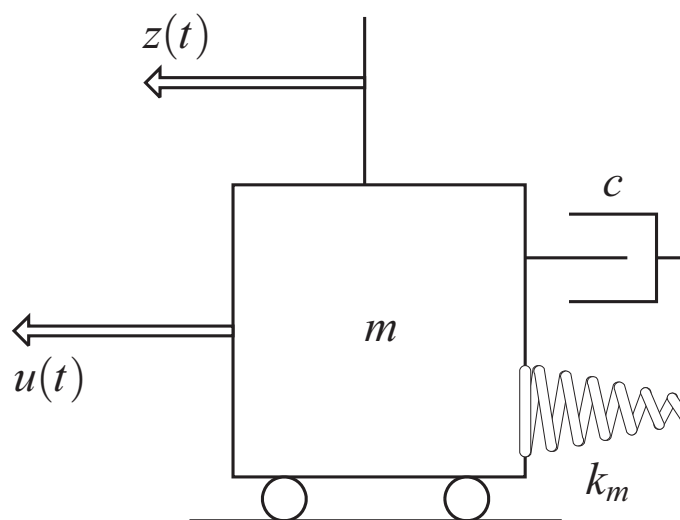


Figura 3.1: Sistema massa-mola-amortecedor.

No sistema da Figura (3.1), $z(t)$ é o deslocamento horizontal da massa móvel, $u(t)$ o sinal de entrada, c o coeficiente de amortecimento, k_m a constante da mola e m a massa móvel. O problema consiste em atenuar as oscilações da massa móvel através do sinal de controle $u(t)$.

Pode-se descrever a dinâmica do sistema pelas equações diferenciais enunciadas em (3.1)

(SILVA, 2009).

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -\frac{k_m}{m}z(t) - \frac{c}{m}\dot{z}(t) + \frac{1}{m}u(t), \\ y(t) = z(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Definindo as variáveis de estado como $x_1(t) = z(t)$ e $x_2(t) = \dot{z}(t)$, e a saída do sistema como $y(t) = x_1(t)$, teremos o seguinte sistema em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_m}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Especificou-se o coeficiente de amortecimento c como incerto e estando sujeito a quebra, desta forma pertencendo ao intervalo $0 \leq c \leq 0,2$ Ns/m. Para $c = 0,2$ Ns/m o amortecedor opera corretamente e $c = 0$ Ns/m está quebrado. A massa do sistema móvel é $m = 1$ kg e a constante da mola $k_m = 100$ N/m. Assim, fica constituído o politopo de dois vértices descritos abaixo.

Vértice 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -0,2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vértice 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Sistema com suspensão ativa de assento de carro

No modelo para suspensão ativa de assento de carro da Figura (3.2) M_c é a massa do carro e m_s é a massa do assento juntamente com a massa do motorista. O sistema de amortecimento do carro é composto pela mola k_m e pelo amortecedor b_1 . O sistema de suspensão ativa é composto pela mola k_2 e pelo amortecedor b_2 . Este modelo foi retirado de trabalhos já publicados (ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008a, PASCOAL; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009) e foi utilizado para comparação entre os métodos de projeto com otimização. O problema consiste em atenuar as vibrações indesejáveis que possam ocorrer no assento do motorista devido a pistas de rodagem irregulares. Dessa forma, pode-se aumentar o amortecimento da vibração da massa através do projeto de um controlador que atue sobre $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

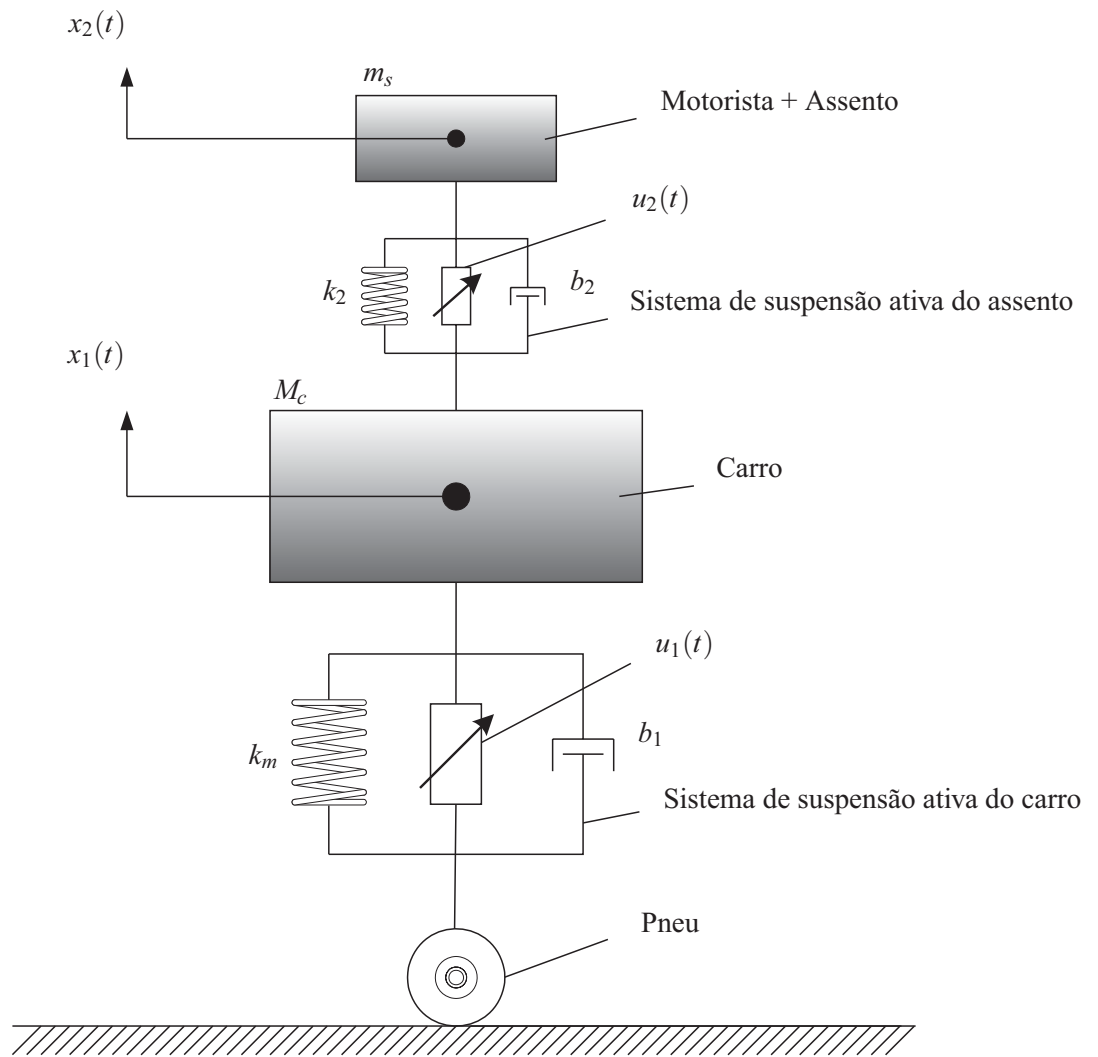


Figura 3.2: Sistema com suspensão ativa de assento de carro.

Os estados $x_1(t)$ e $x_2(t)$ estão disponíveis para realimentação. Sendo $x_3(t) = \dot{x}_1(t)$ e $x_4(t) = \dot{x}_2(t)$, o sistema cujas saídas são $y_1(t) = x_1(t)$ e $y_2(t) = x_2(t)$ têm a representação em espaço de estados descrita em (3.3) (ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008a).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_m - k_2}{M_c} & \frac{k_2}{M_c} & \frac{-b_1 - b_2}{M_c} & \frac{-b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Especificando $M_c = 1500$ kg para a massa do carro e $70 \leq m_s \leq 120$ kg para a massa do assento (20 kg) somada à massa do motorista, que se supõe variar de 50 a 100 kg. Desta forma

m_s será um parâmetro incerto para o problema. Adotaram-se os parâmetros restantes como $k_m = 4 \times 10^4$ N/m, $b_1 = 4 \times 10^3$ Ns/m, $k_2 = 5 \times 10^3$ N/m e $b_2 = 5 \times 10^2$ Ns/m. Considerou-se também a possibilidade de ocorrência de uma falha no amortecedor do assento, ocasionando sua quebra. Desta forma, teremos seu valor pleno ($b_2 = 5 \times 10^2$ Ns/m) quando funcionando e $b_2 = 0$ quando houver a falha. Constituir-se-ão, portanto, dois politopos possuindo dois vértices cada. Os politopos são descritos abaixo:

Primeiro politopo ($m_s = 70$ kg e $0 \leq b_2 \leq 5 \times 10^2$ Ns/m):

Vértice 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,33 & -3 & 0,33 \\ 71,43 & -71,43 & 7,14 & -7,14 \end{bmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^{-4} & -6,67 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,43 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Vértice 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,33 & -2,67 & 0 \\ 71,43 & -71,43 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^{-4} & -6,67 \times 10^{-4} \\ 0 & 1,43 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Segundo politopo ($m_s = 120$ kg e $0 \leq b_2 \leq 5 \times 10^2$ Ns/m):

Vértice 1:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,33 & -3 & 0,33 \\ 41,67 & -41,67 & 4,17 & -4,17 \end{bmatrix} \text{ e } B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^{-4} & -6,67 \times 10^{-4} \\ 0 & 8,33 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Vértice 2:

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -30 & 3,33 & -2,67 & 0 \\ 41,67 & -41,67 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 6,67 \times 10^{-4} & -6,67 \times 10^{-4} \\ 0 & 8,33 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

3.3 Helicóptero 3-DOF

Considere o modelo esquemático na Figura (3.4) do helicóptero 3-DOF (QUANSER, 2002) mostrado na Figura (3.3). Dois motores DC estão montados nas extremidades de uma haste retangular e acionam duas hélices propulsoras. Os eixos dos motores são paralelos entre si, sendo o vetor de empuxo normal em relação à haste. A haste do helicóptero está suspensa por uma junta na extremidade de um braço e está livre para inclinação em torno do seu centro (QUANSER, 2002).

O braço é conectado por uma junta 2-DOF e é livre para inclinar e guinar. Na extremidade oposta do braço existe um contrapeso que torna a massa efetiva leve o suficiente para viabilizar que os motores levantem o helicóptero. Uma voltagem positiva aplicada no motor dianteiro causa uma inclinação positiva enquanto uma voltagem negativa no motor traseiro causa uma inclinação negativa (ângulo *pitch* (ρ)). Uma voltagem positiva em qualquer dos motores causa uma elevação de todo o corpo (ângulo *elevation* (ε) do braço). Se o corpo inclina, o vetor impulsão resulta no deslocamento do corpo (ângulo *travel* (λ) do braço).

O objetivo deste experimento é elaborar um sistema de controle que consiga regular os ângulos de elevação e de deslocamento do helicóptero 3-DOF. O helicóptero 3-DOF também possui um sistema de massa ativa para criar perturbações, que não será utilizada nesse projeto, por isso fixou-se a mesma.



Figura 3.3: Helicóptero 3-DOF da Quanser.

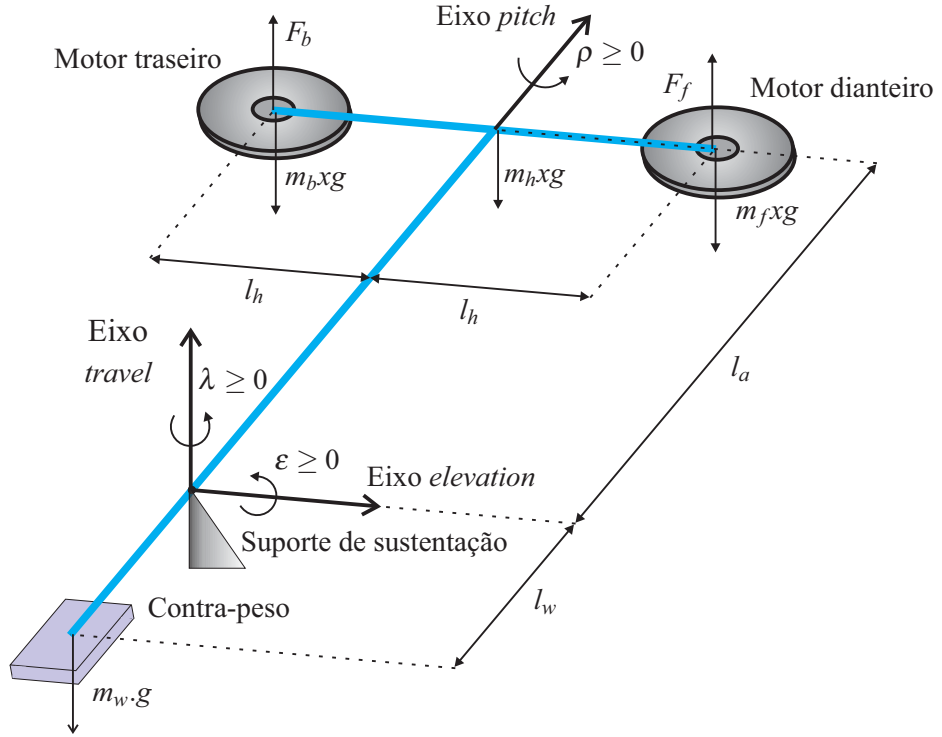


Figura 3.4: Modelo esquemático do Helicóptero 3-DOF

O modelo em espaço de estados que descreve o helicóptero é (QUANSER, 2002):

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\lambda} \\ \ddot{\varepsilon} \\ \ddot{\rho} \\ \ddot{\lambda} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \rho \\ \lambda \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\rho} \\ \dot{\lambda} \\ \xi \\ \gamma \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

As variáveis ξ e γ representam as integrais dos ângulos ε de elevação e λ de deslocamento, respectivamente. As matrizes A e B são apresentadas da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2m_f l_a - m_w l_w g}{2m_f l_a^2 + 2m_f l_h^2 + m_f l_w^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} & \frac{l_a k_f}{m_w l_w^2 + 2m_f l_a^2} \\ \frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} & -\frac{1}{2} \frac{k_f}{m_f l_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores utilizados no projeto foram os que aparecem nos programas MATLAB de execução do projeto original do fabricante, para manter fidelidade aos parâmetros. Descrevem-se na Tabela (3.1) as constantes utilizadas neste trabalho.

Tabela 3.1: Parâmetros do helicóptero

Constante da força de propulsão da hélice (encontrado experimentalmente)	k_f	0,1188
Massa do corpo do helicóptero (kg)	m_h	1,15
Massa do contra-peso (kg)	m_w	1,87
Massa do conjunto da hélice dianteira (kg)	m_f	$m_h/2$
Massa do conjunto da hélice traseira (kg)	m_b	$m_h/2$
Distância entre o eixo de pitch e cada motor (m)	l_h	$7 \times 0,0254$
Distância entre o eixo de elevação e o corpo do helicóptero (m)	l_a	$26 \times 0,0254$
Distancia entre o eixo de elevação e o contra-peso (m)	l_w	$18,5 \times 0,0254$
Constante gravitacional (m/s^2)	g	9,81

Para adicionar robustez ao sistema do helicóptero sem atuar fisicamente no mesmo, o Dr. Rodrigo Cardim (DEE/FEIS/UNESP) sugeriu a inserção de uma queda de 30% da potência do motor traseiro através da inserção de uma chave temporizada conectada a um amplificador com ganho de 0,7 diretamente na tensão de atuação sobre o motor (SENAREZI, 2009), sendo assim constituído o politopo de dois vértices com uma incerteza na matriz de entrada do sistema do helicóptero atuando sobre a tensão traseira entre $0,7V_b$ e V_b . Descreve-se o politopo abaixo.

Vértice 1 (100% de V_b):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vértice 2 (70% de V_b):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0601 \\ 0,5810 & -0,4067 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizar-se-ão, no capítulo seguinte, comparações entre os métodos de otimização apresentados no Capítulo 2 para projeto de controladores para os sistemas aqui descritos.

4 *Comparação entre os métodos de otimização dos controladores*

Realizaram-se comparações de desempenho entre os métodos de otimização enunciados nos Capítulos 1 e 2. Inicialmente, fizeram-se comparações entre os métodos de otimização existente (ASSUNÇÃO et al., 2007) e aquele proposto neste trabalho, adequados às LMIs de estabilidade quadrática e, em seguida, fizeram-se comparações entre os métodos de otimização adequados às LMIs de estabilidade quadrática, estabilidade estendida e estabilidade projetiva.

4.1 **Otimização dos controladores considerando apenas estabilidade quadrática**

Fizeram-se comparações entre as normas de K obtidas pelos dois métodos de otimização expostos nos Teoremas 1.2 e 2.1, utilizando apenas as LMIs de estabilidade quadrática enunciadas em (1.28) e (1.29) para os exemplos de aplicação apresentados no Capítulo 3, tendo como parâmetro variante para a comparação o γ , referente a taxa de decaimento.

Exemplo 4.1.1: Sistema massa-mola-amortecedor

Obteve-se o gráfico da Figura (4.1) para valores de γ no intervalo $0 < \gamma \leq 2$ com os resultados de otimização utilizando-se os Teoremas 1.2 e 2.1, para o sistema massa-mola-amortecedor. Da Figura (4.1) verifica-se que o método proposto neste trabalho possui resultados bem melhores do que o já existente para a faixa de $0 < \gamma \leq 2$. Esta faixa foi adotada por ser mais usual para a implementação de controladores.

Na sequência, seguem as simulações dos dois controladores atuando na planta para $\gamma = 1,9$, valor esse adotado apenas para a visualização das simulações.

Na Figura (4.2) temos a simulação do controlador K projetado com a otimização existente

atuando sobre a planta à condição inicial $x_0 = [0, 1 \ 0, 3]'$.

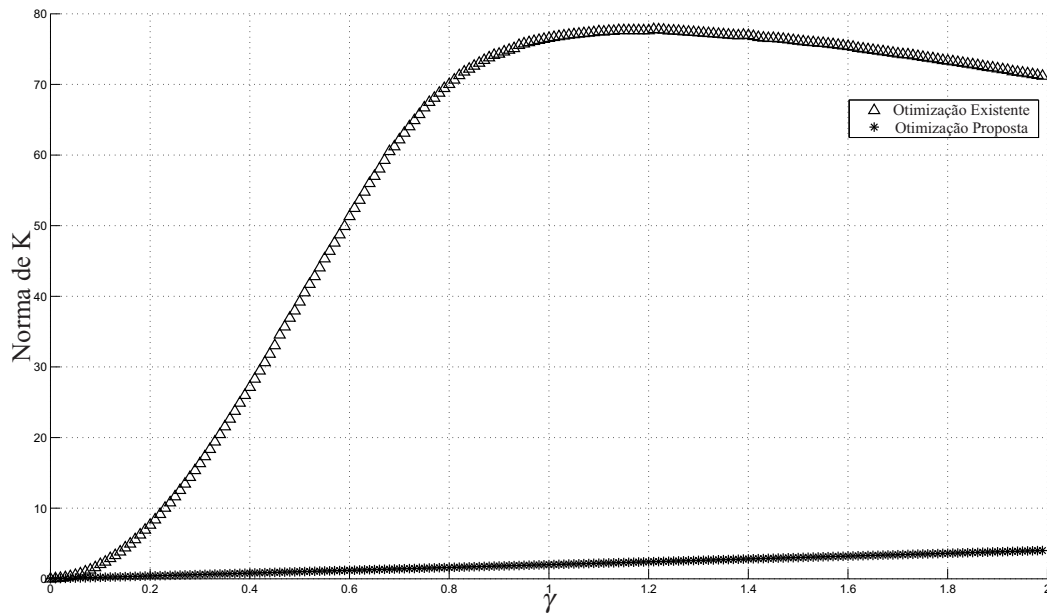


Figura 4.1: Comparação entre dois métodos de otimização da norma de K para o sistema massa-mola-amortecedor.

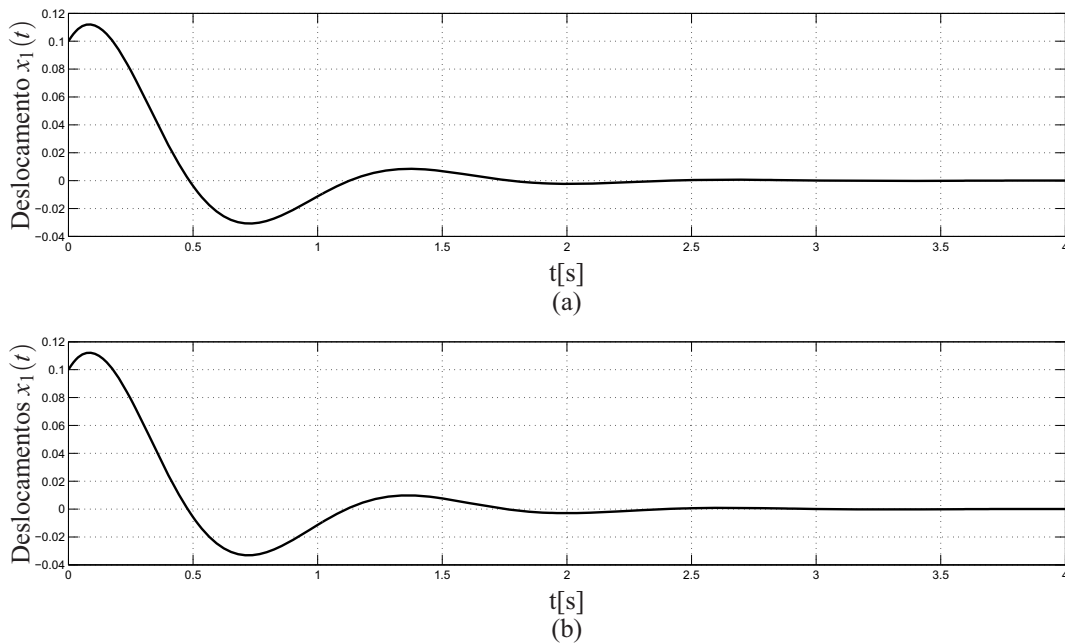


Figura 4.2: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização existente utilizando as LMIs de estabilidade quadrática para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.2) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -72,1214 & 3,8182 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 72,22$$

O controlador utilizado na simulação encontrada na Figura (4.2) teve norma igual a 72,22 e tempo de duração do transitório de 2s para as simulações tanto de amortecedor funcionando como com quebra do amortecedor.

Na Figura (4.3) temos a simulação do controlador K projetado com a otimização proposta atuando sobre a planta à condição inicial $x_0 = [0,1 \ 0,3]'$.

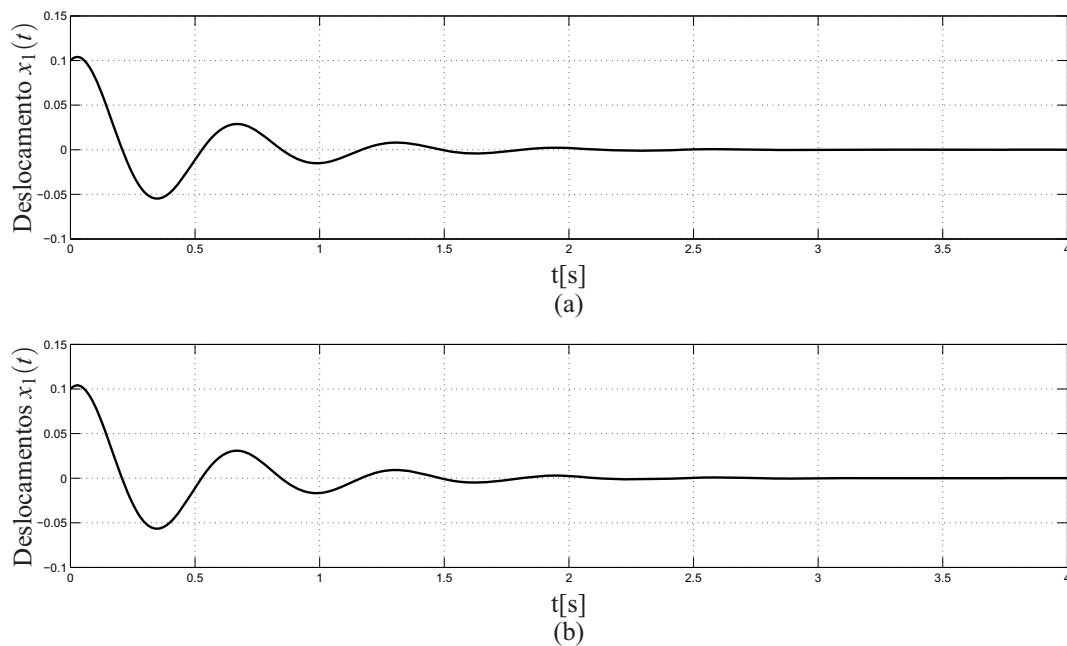


Figura 4.3: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta neste trabalho utilizando as LMIs de estabilidade quadrática para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.3) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} 0,2971 & 3,8040 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 3,82$$

O controlador utilizado na simulação encontrada na Figura (4.3) teve norma igual a 3,82 e tempo de duração do transitório de 2s para as simulações tanto de amortecedor funcionando como com quebra do amortecedor.

Verifica-se que, entre os dois casos, a otimização proposta possui melhores resultados para a menor magnitude da norma com o mesmo tempo de duração do transitório para um mesmo γ . \square

Exemplo 4.1.2: Sistema com suspensão ativa de assento de carro

Para valores de γ no intervalo $0 < \gamma \leq 2$ obteve-se o gráfico mostrado na Figura (4.4) para o sistema com suspensão ativa de assento de carro com os resultados de otimização utilizando os Teoremas 1.2 e 2.1.

O projeto do controlador com a otimização existente (ASSUNÇÃO et al., 2007) tornou-se infactível para $\gamma \geq 1,68$ enquanto que o projeto do controlador com a otimização proposta neste trabalho continuou factível para uma larga faixa.

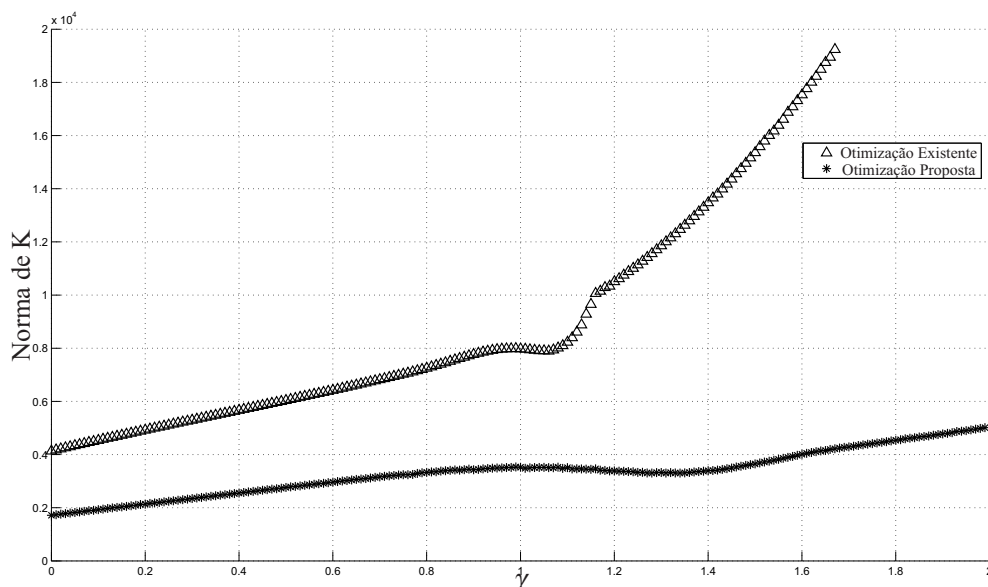


Figura 4.4: Comparação entre dois métodos de otimizar a norma de K para o sistema com suspensão ativa.

O projeto do controlador com a otimização proposta apresentou melhores resultados da norma de K na faixa de comparação factível para os dois casos. Nas Figuras (4.5) e (4.6),

seguem as simulações para os dois controladores atuando na planta para $\gamma = 1,4$.

Na Figura (4.5) temos a simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com a otimização existente (ASSUNÇÃO et al., 2007) atuando sobre a planta à condição inicial $x_0 = [0,1 \ 0,3 \ 0 \ 0]'$. O controlador utilizado na simulação encontrada na Figura (4.5) teve norma igual a $1,35 \times 10^4$ e tempo de duração do transitório de 3s para as simulações.

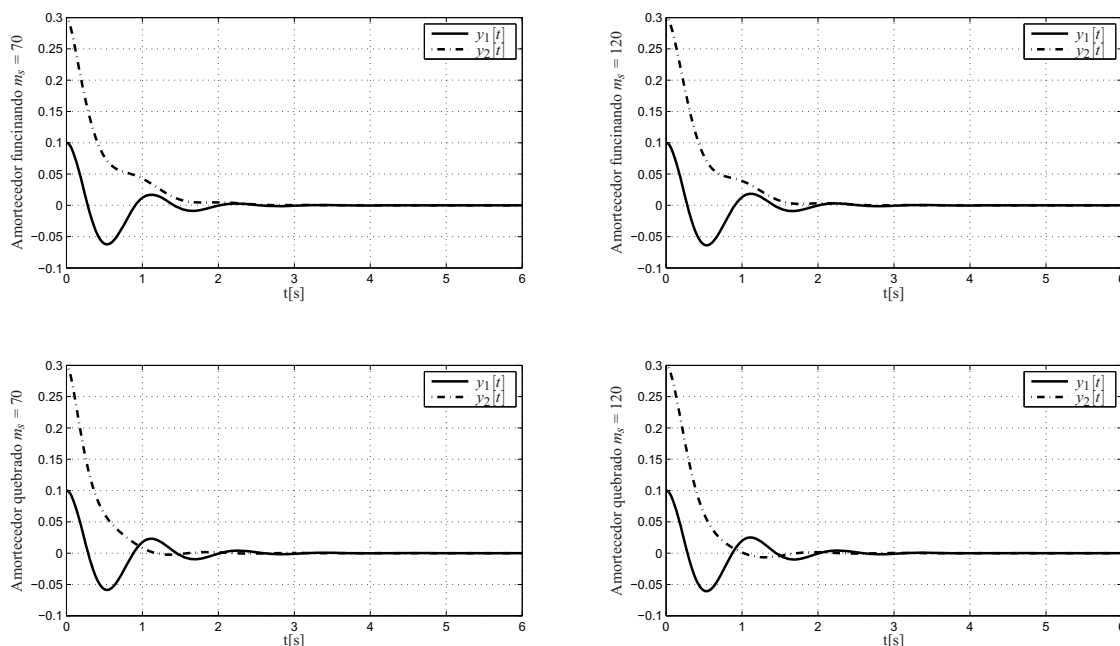


Figura 4.5: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização existente para o sistema com suspensão ativa.

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.5) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} 1,0202 & 0,7805 & 0,0574 & 0,1267 \\ 0,5864 & -0,1985 & 0,0104 & 0,0972 \end{bmatrix} \times 10^4$$

$$\|K\| = 1,35 \times 10^4$$

Na Figura (4.6) temos a simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com a otimização proposta neste trabalho atuando sobre a planta à condição inicial $x_0 = [0,1 \ 0,3 \ 0 \ 0]'$. O controlador projetado para a simulação encontrada na Figura (4.6) teve norma igual a $3,39 \times 10^3$, menor do que o projetado com a otimização existente conforme previsto no gráfico da Figura (4.4).

O tempo de duração do transitório, neste caso, foi igual ao encontrado na Figura (4.5), sendo de 3s para as simulações.

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.6) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} 1,1440 & -0,9685 & 0,8593 & 0,0027 \\ 3,1230 & -0,1379 & -0,0646 & 0,4200 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\|K\| = 3,39 \times 10^3$$

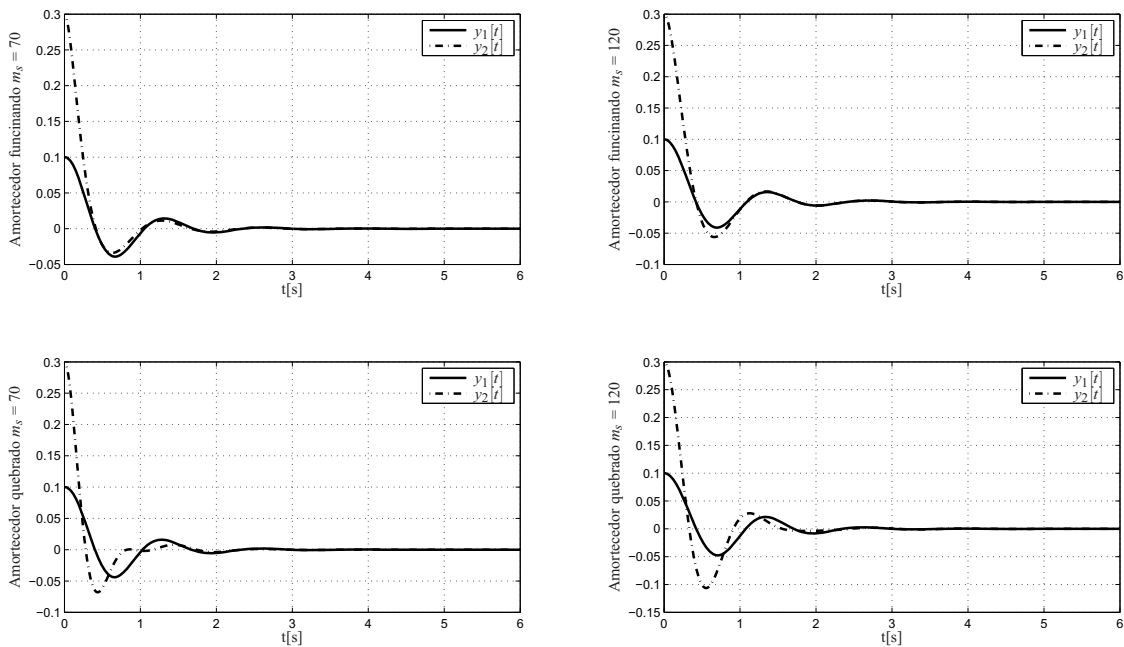


Figura 4.6: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta neste trabalho para o sistema com suspensão ativa.

□

Exemplo 4.1.3: Helicóptero 3-DOF

Para valores de γ no intervalo $0 < \gamma \leq 2$ obteve-se o gráfico mostrado na Figura (4.7) para o modelo linear do sistema Helicóptero 3-DOF com os resultados de otimização utilizando os Teoremas 1.2 e 2.1.

O projeto do controlador com a otimização existente (ASSUNÇÃO et al., 2007) tornou-se infactível para $\gamma \geq 1,21$ enquanto que o projeto do controlador com a otimização proposta neste trabalho continuou factível para uma larga faixa. O projeto do controlador com a otimização proposta neste trabalho apresentou melhores resultados da norma de K na faixa de comparação factível para os dois casos.

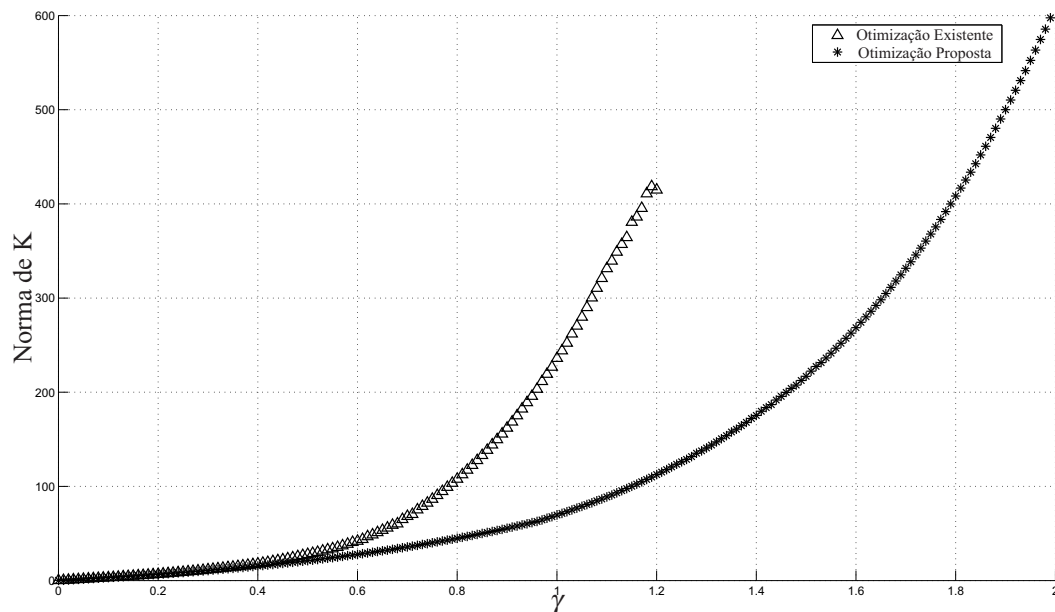


Figura 4.7: Comparação entre os dois métodos de otimizar a norma de K para o modelo linear do helicóptero 3-DOF.

Para este exemplo de aplicação, realizaram-se implementações práticas dos controladores, com o objetivo de visualizar o controlador atuando em sistemas físicos reais sujeitos a falhas.

A trajetória do helicóptero foi dividida em três estágios. O primeiro estágio é de decolagem, em que o helicóptero sobe $27,5^\circ$ alcançando o ângulo de elevação $\varepsilon = 0^\circ$. No segundo estágio o helicóptero viaja 120° mantendo a mesma elevação, ou seja, o helicóptero alcança $\lambda = 120^\circ$ tendo como referência o ponto de decolagem. No terceiro estágio o helicóptero realiza a aterrissagem retomando o ângulo de elevação inicial $\varepsilon = -27,5^\circ$. Durante o estágio de aterrissagem do helicóptero, mais precisamente no instante 22s, insere-se a perda de 30% da potência do motor traseiro. O controlador robusto deverá manter a estabilidade do helicóptero na ocorrência desta falha.

Fixando $\gamma = 0,7$ projetaram-se os dois controladores com otimização existente e otimização proposta neste trabalho e, em seguida, realizada a implementação prática dos mesmos.

As respectivas normas dos controladores foram 68,30 para o controlador projetado com a otimização existente (ASSUNÇÃO et al., 2007) e 53,97 para o controlador projetado com a otimização proposta neste trabalho.

Na sequência temos o controlador projetado para a implementação ilustrada na Figura (4.8) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -30,0224 & -11,8324 & 12,0967 & -18,8649 & -3,3709 & 15,5055 & -15,3017 & 3,6641 \\ -43,7033 & 10,6211 & -6,8949 & -27,6397 & 3,8455 & -11,0346 & -22,1846 & -1,7489 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 68,30$$

Na sequência temos o controlador projetado para a implementação ilustrada na Figura (4.9) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -23,7978 & -13,2497 & 9,3214 & -19,0979 & -5,0932 & 14,2608 & -10,4076 & 2,3609 \\ -31,6120 & 14,9547 & -10,1719 & -24,8832 & 6,0852 & -15,4801 & -13,9039 & -2,7697 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 53,97$$

As Figuras (4.8) e (4.9) referem-se à evolução real no tempo dos ângulos do helicóptero 3-DOF: *elevation* (ϵ), *pitch* (ρ) e *travel* (λ) referentes às implementações práticas dos controladores projetados com as otimizações existente e proposta, respectivamente, atuando no sistema durante a trajetória descrita. Nota-se a ocorrência da falha no instante 22s, porém percebe-se que o sistema retoma a estabilidade rapidamente, mostrando que o controlador robusto atende as requisições de projeto.

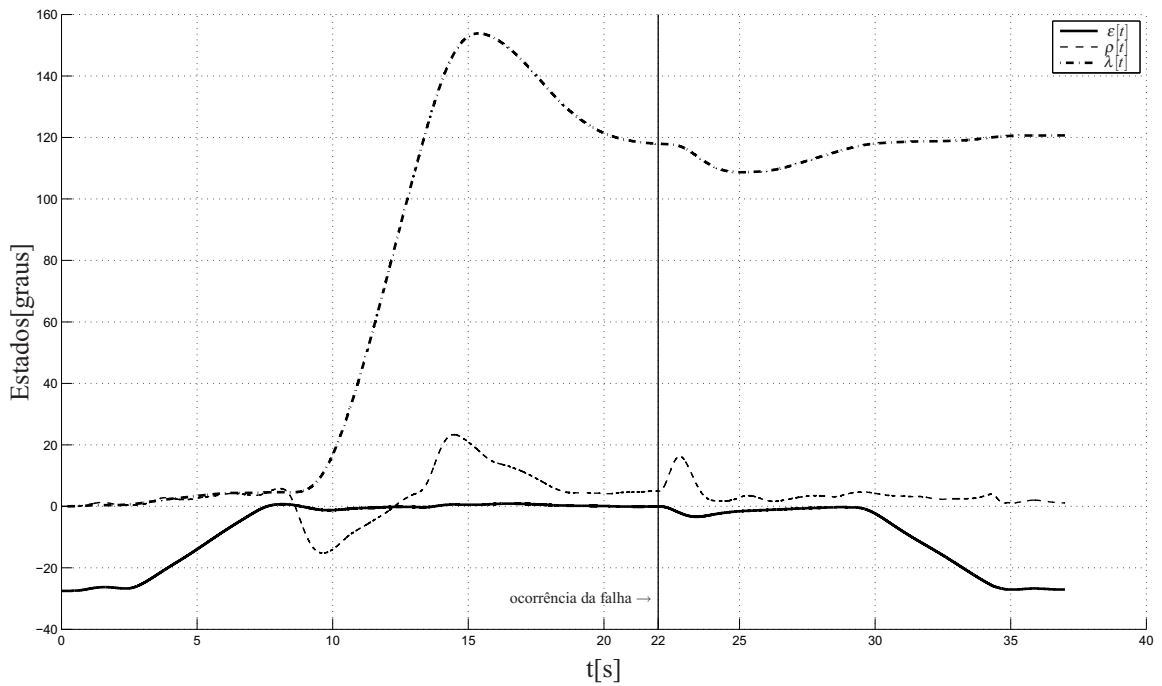


Figura 4.8: Implementação prática do controlador K projetado por estabilidade quadrática com otimização existente no helicóptero 3-DOF.

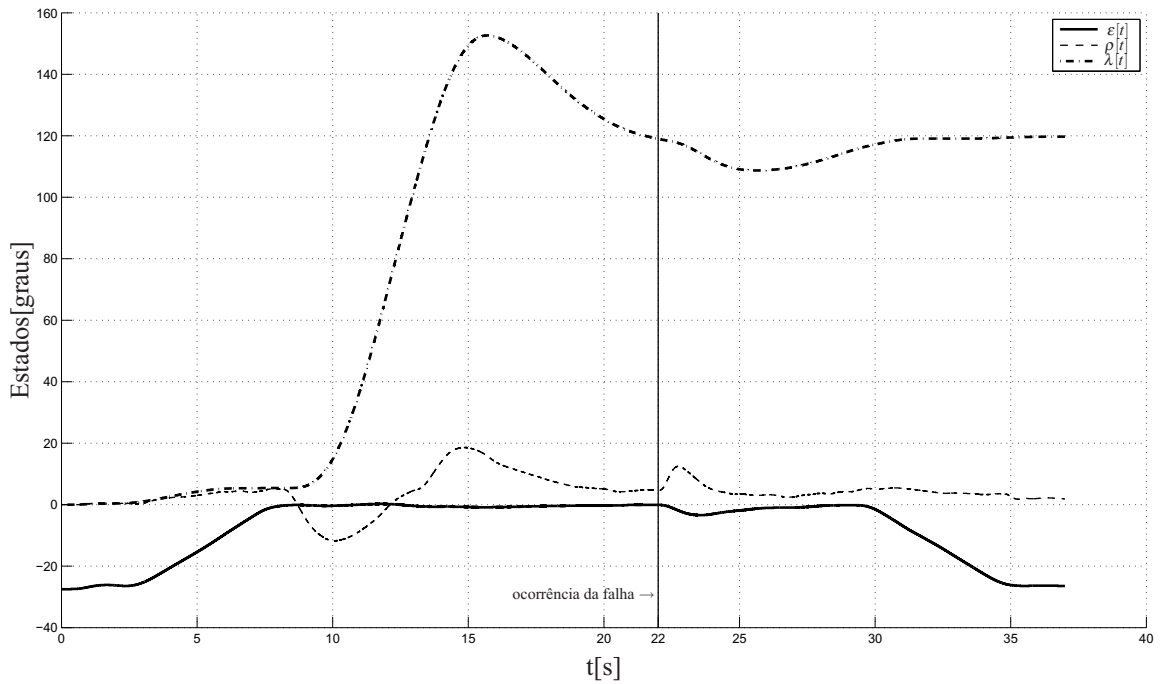


Figura 4.9: Implementação prática do controlador K projetado por estabilidade quadrática com otimização proposta neste trabalho no helicóptero 3-DOF.

Observa-se que, apesar do método proposto ter menor norma que o existente (ASSUNÇÃO et al., 2007), o transitório antes da falha e o transitório após a falha são muito próximos para os dois casos de implementação com pequenas diferenças de amplitude. \square

Exemplo 4.1.4: Comparação geral dos dois métodos de otimização

Para se obterem resultados mais satisfatórios sobre qual seria a melhor forma de otimizar a norma de K foi feita uma comparação mais geral entre os dois métodos.

Geraram-se aleatoriamente 1000 polítopos de sistemas incertos de segunda ordem, com um parâmetro incerto apenas (dois vértices). Os 1000 polítopos foram gerados factíveis em pelo menos um dos casos de otimização para $\gamma = 0,5$ e, em seguida, analisaram-se as consequências do aumento de γ . Assim, obteve-se um gráfico de barras mostrando o número de controladores com menor norma em função de γ , mostrado na Figura (4.10).

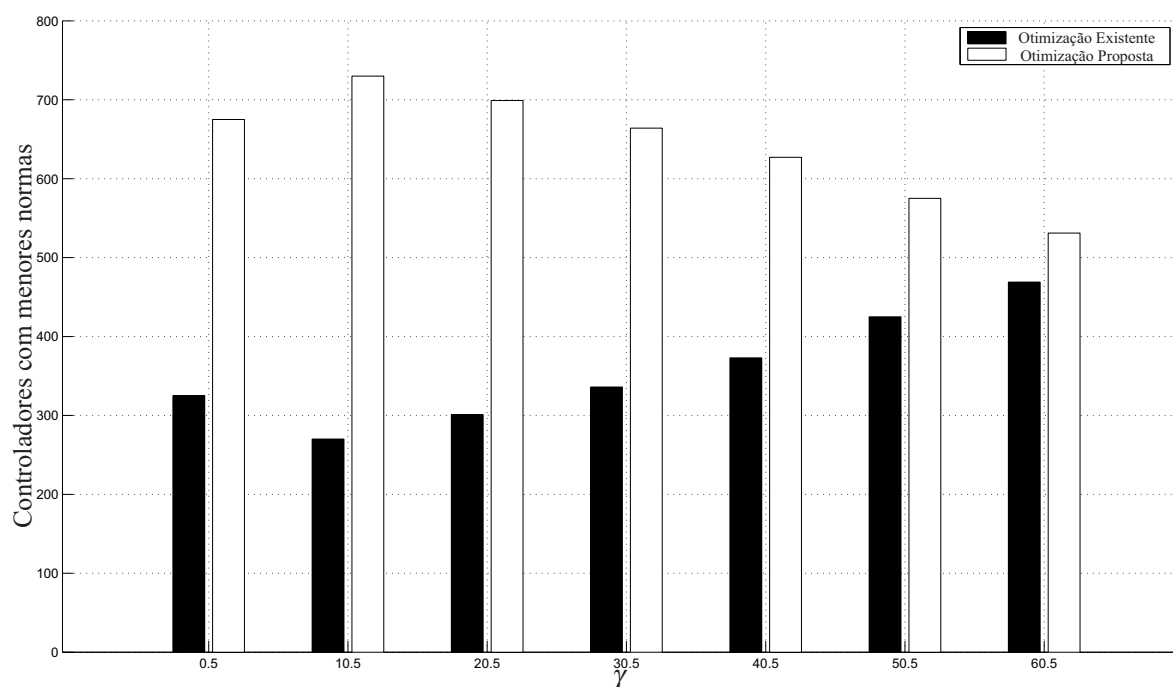


Figura 4.10: Quantidade de controladores com menor norma entre os dois casos de otimização para 1000 polítopos gerados aleatoriamente.

Os controladores projetados com valores de γ elevados não possuem muita aplicação prática

devido ao aumento de γ influenciar consideravelmente no aumento da norma e no aumento de picos das oscilações transitórias, sendo utilizadas aqui apenas com o objetivo de se analisar factibilidade e melhores resultados para a norma de K , portanto as comparações foram encerradas em $\gamma = 60,5$, pois este já é um γ considerado elevado.

Os valores exatos encontrados para a montagem do gráfico de barras da Figura (4.10) aparecem na Tabela (4.1).

Tabela 4.1: Comparação entre os dois métodos de otimização com menor norma de K .

γ	Quantidade de controladores K com menor norma	
	Otimização Existente	Otimização Proposta
0,5	325	675
10,5	270	730
20,5	301	699
30,5	336	664
40,5	373	627
50,5	425	575
60,5	469	531

Verifica-se claramente que o projeto de K através da otimização proposta neste trabalho obteve melhores resultados do que o projeto de K através da otimização existente (ASSUNÇÃO et al., 2007) tanto nessa comparação mais geral como para os exemplos utilizados neste trabalho, utilizando as LMIs de estabilidade quadrática enunciadas em (1.28) e (1.29). Sendo assim, no restante deste trabalho utilizou-se a otimização proposta quando abordado o projeto de controladores por estabilidade quadrática para as comparações com os métodos de otimização utilizando estabilidade estendida e estabilidade projetiva abordados no Capítulo 2. \square

4.2 Otimização do controlador K utilizando as novas técnicas de projeto

Nesta seção, fez-se uma comparação entre os métodos de otimização das normas de K obtidas com as otimizações enunciadas nos Teoremas 2.1, 2.3 e 2.5 referentes às técnicas de projeto por estabilidade quadrática (LMIs (1.28) e (1.29)), estabilidade estendida (LMIs (2.16) e (2.17)) e estabilidade projetiva (LMIs (2.37) e (2.38)), respectivamente. Estas comparações

foram feitas para os exemplos de aplicação enunciados no Capítulo 3, tendo como parâmetro variante para a comparação o γ referente a taxa de decaimento. Essa seção difere da Seção 4.1 pois lá considerou-se apenas a estabilidade quadrática.

Exemplo 4.2.1: Sistema massa-mola-amortecedor

Para valores de γ no intervalo $0 < \gamma \leq 2$ obteve-se o gráfico da Figura (4.11) com os resultados de otimização utilizando-se os Teoremas 2.1 para estabilidade quadrática, 2.3 para estabilidade estendida e 2.5 para estabilidade projetiva, para o sistema massa-mola-amortecedor.

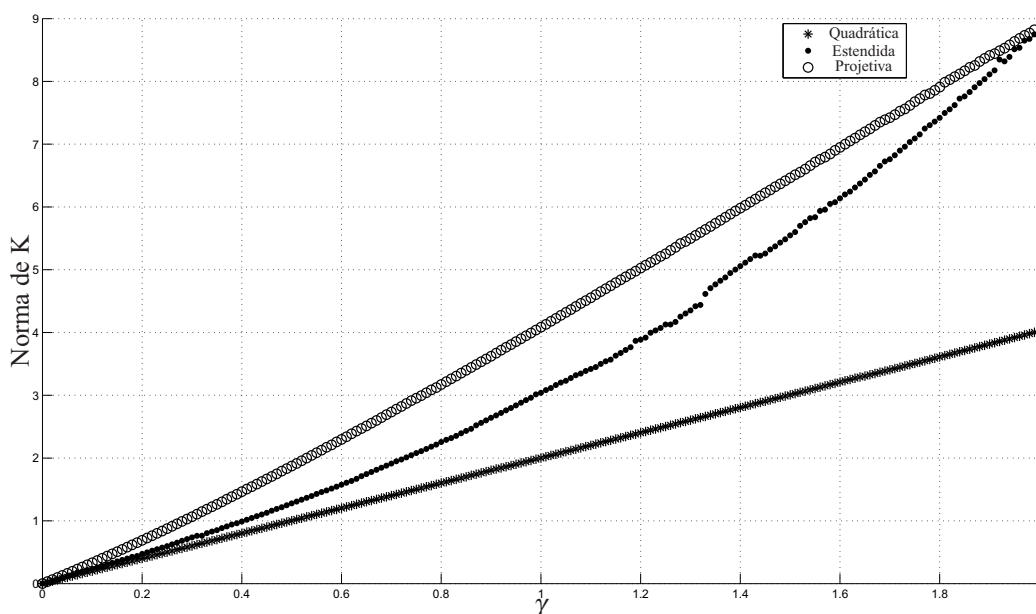


Figura 4.11: Comparação entre os métodos de projeto com otimização da norma de K para o sistema massa-mola-amortecedor.

As normas dos controladores projetados por estabilidade estendida e projetiva mostraram-se mais altas neste exemplo do que as normas dos controladores projetados por estabilidade quadrática.

Fixando $\gamma = 1,5$, obtiveram-se respostas para os três métodos de projeto à condição inicial $x_0 = [0, 1 \ 0, 3]'$ conforme Figuras (4.12), (4.13) e (4.14).

As respectivas normas dos controladores foram 3,01 para o controlador projetado com estabilidade quadrática, 5,85 para o controlador projetado com a estabilidade estendida e 6,46 para o controlador projetado com a estabilidade projetiva, sendo o tempo de duração do transitório

antes da falha como depois da falha de aproximadamente 2,5s para os três métodos de projeto.

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.12) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} 0,1543 & 3,0034 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 3,01$$

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.13) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} 4,5800 & 3,6427 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 5,85$$

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.14) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -5,2118 & 3,8223 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 6,46$$

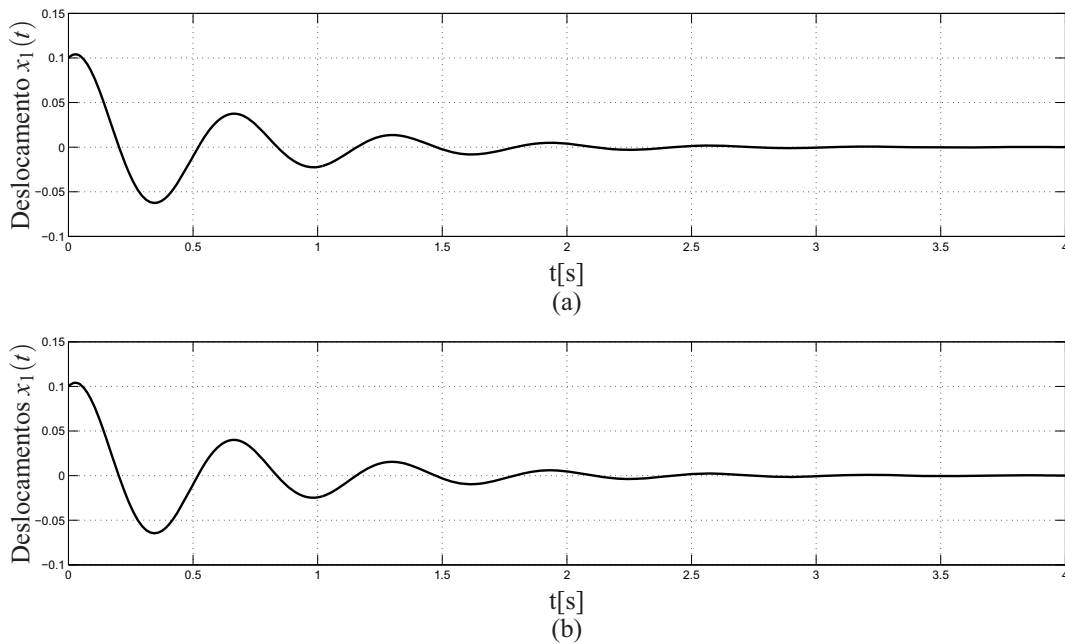


Figura 4.12: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade quadrática para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado

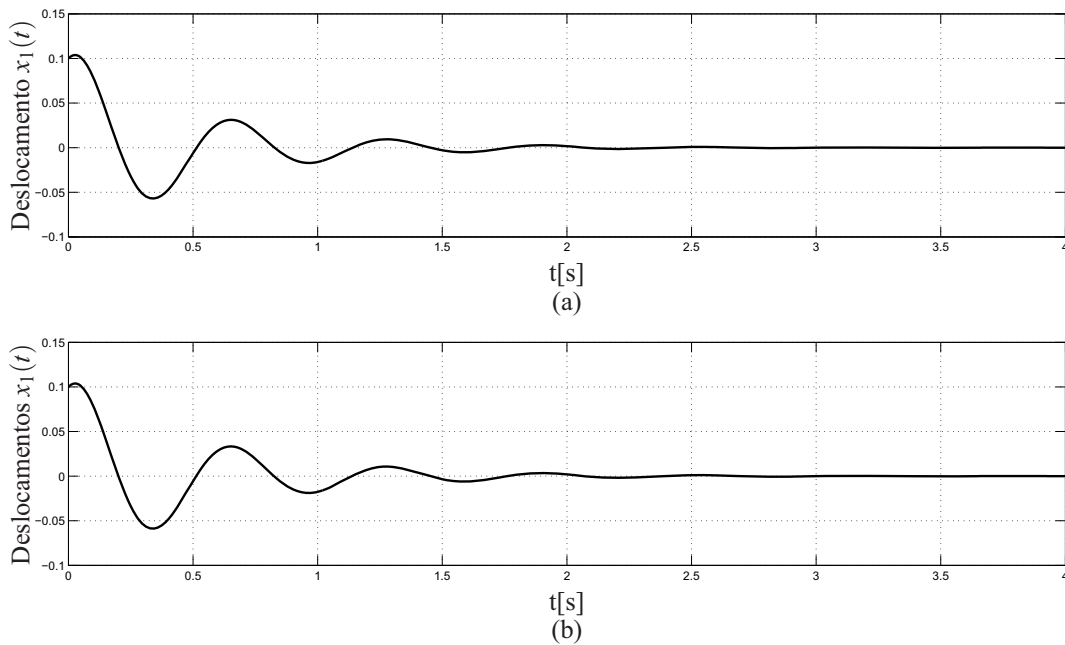


Figura 4.13: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade estendida para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado

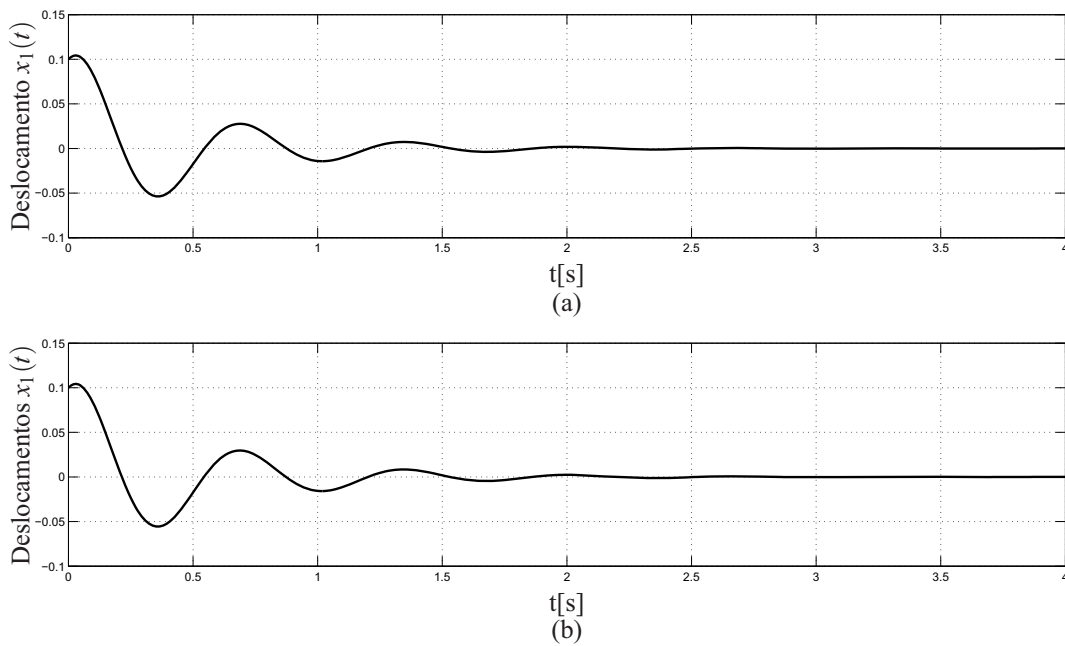


Figura 4.14: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade projetiva para o sistema massa-mola-amortecedor: a) amortecedor operando e; b) amortecedor quebrado



Exemplo 4.2.2: Sistema com suspensão ativa de assento de carro

Para valores de γ no intervalo $0 < \gamma \leq 2$ obteve-se o gráfico mostrado na Figura (4.15) para o sistema com suspensão ativa de assento de carro com os resultados de otimização utilizando os Teoremas 2.1 para estabilidade quadrática, 2.3 para estabilidade estendida e 2.5 para estabilidade projetiva.

Verifica-se claramente do gráfico que os projetos por estabilidade estendida e projetiva possuem a norma de K menor do que o projeto por estabilidade quadrática até $\gamma = 1,55$ quando o projeto por estabilidade projetiva ultrapassa o projeto por estabilidade quadrática, sendo que o projeto por estabilidade projetiva é melhor até $\gamma = 0,9$, quando é superado pelo projeto por estabilidade estendida, esta tendo menor norma no restante das comparações, com exceção de alguns valores dispersos para $\gamma \approx 2$.

Fixando $\gamma = 1,4$, obtiveram-se respostas para os três métodos de projeto à condição inicial $x_0 = [0, 1 \ 0,3 \ 0 \ 0]'$ conforme Figuras (4.16), (4.17) e (4.18).

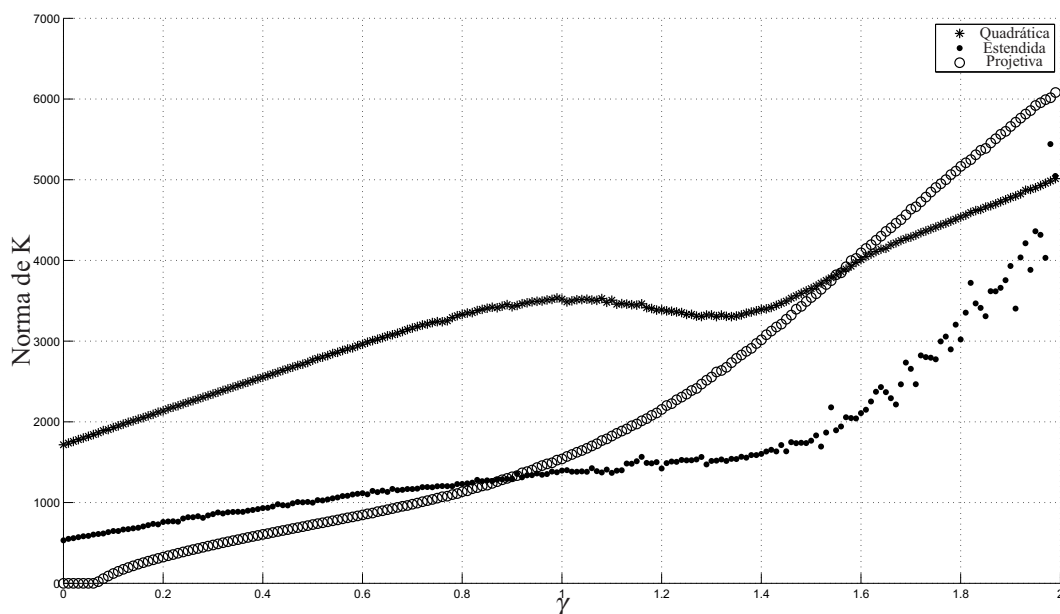


Figura 4.15: Comparação entre os métodos de projeto com otimização da norma de K para o sistema com suspensão ativa de assento de carro.

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.16) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} 1,1440 & -0,9685 & 0,8593 & 0,0027 \\ 3,1230 & -0,1379 & -0,0646 & 0,4200 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\|K\| = 3,39 \times 10^3$$

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.17) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} 0,8100 & -0,2702 & 0,7433 & -0,0199 \\ 1,2215 & 0,4742 & 0,1120 & 0,4014 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\|K\| = 1,60 \times 10^3$$

Na sequência temos o controlador projetado para a simulação na Figura (4.18) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -2,1862 & -0,2409 & 1,7796 & -0,2366 \\ 1,1608 & -0,2815 & -0,1039 & 0,4863 \end{bmatrix} \times 10^3$$

$$\|K\| = 3,02 \times 10^3$$

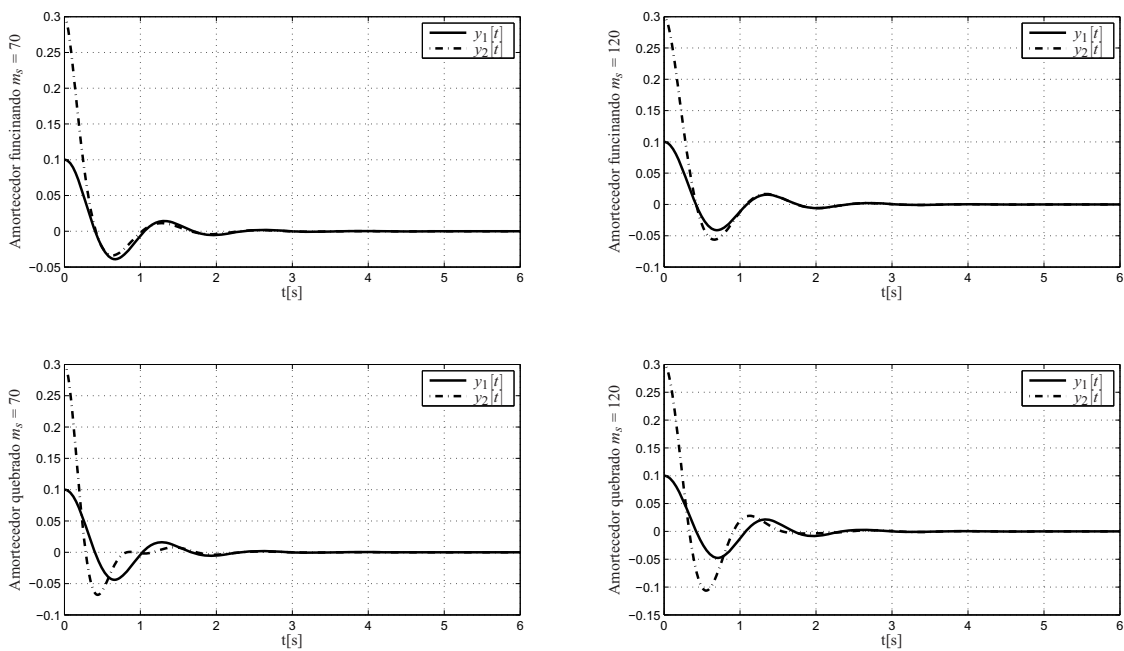


Figura 4.16: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta e LMIs de estabilidade quadrática para o sistema com suspensão ativa.

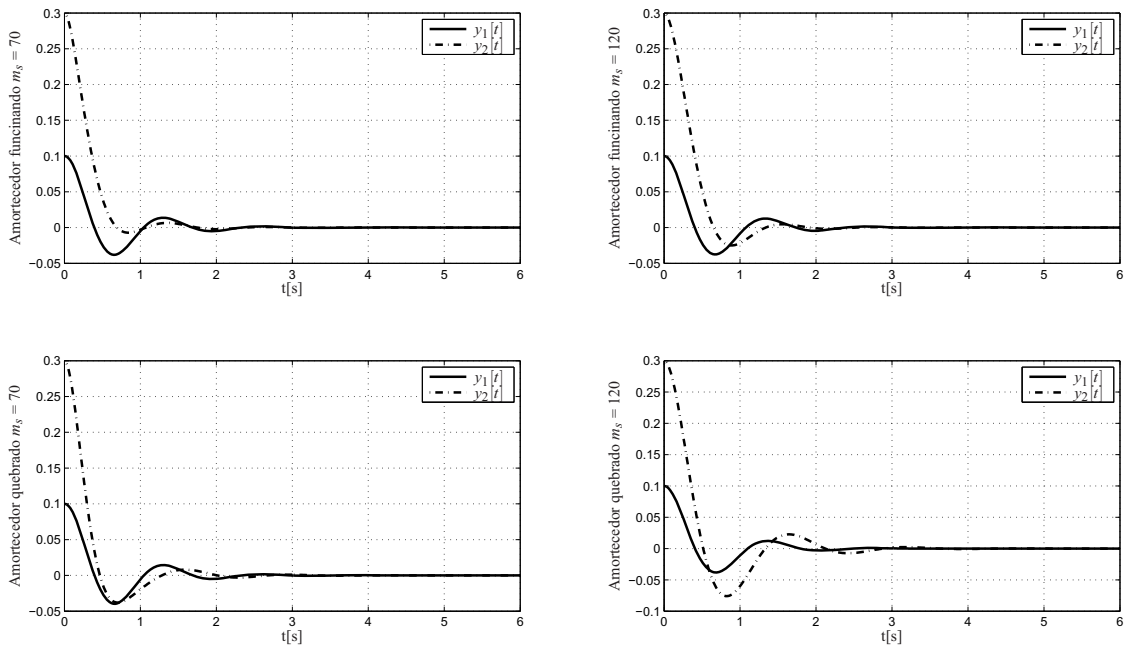


Figura 4.17: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta e LMIs de estabilidade estendida para o sistema com suspensão ativa.

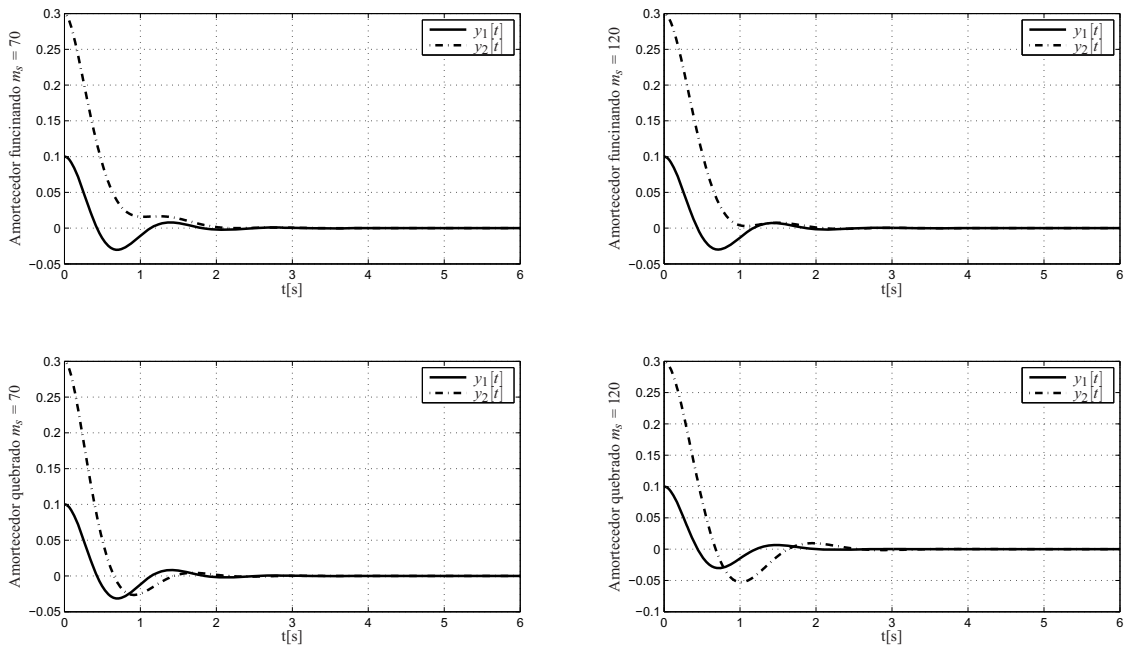


Figura 4.18: Simulação do sistema realimentado com o controlador K projetado com o método de otimização proposta e LMIs de estabilidade projetiva para o sistema com suspensão ativa.

As respectivas normas dos controladores foram $3,39 \times 10^3$ para o controlador projetado com estabilidade quadrática, $1,60 \times 10^3$ para o controlador projetado com a estabilidade estendida e $3,02 \times 10^3$ para o controlador projetado com a estabilidade projetiva, sendo 3s o tempo de duração do transitório tanto antes da falha como depois da falha para os três casos. \square

Exemplo 4.2.3: Helicóptero 3-DOF

Para valores de γ no intervalo $0 < \gamma \leq 2$ obteve-se o gráfico mostrado na Figura (4.19) para o modelo linear do sistema Helicóptero 3-DOF com os resultados de otimização utilizando os Teoremas 2.1 para estabilidade quadrática, 2.3 para estabilidade estendida e 2.5 para estabilidade projetiva.

Verifica-se claramente do gráfico que o projeto por estabilidade quadrática possui a norma de K menor do que os projetos por estabilidade estendida e projetiva, sendo o projeto por estabilidade estendida melhor que o projeto por estabilidade projetiva, apesar de alguns valores dispersos, para todos os valores de γ .

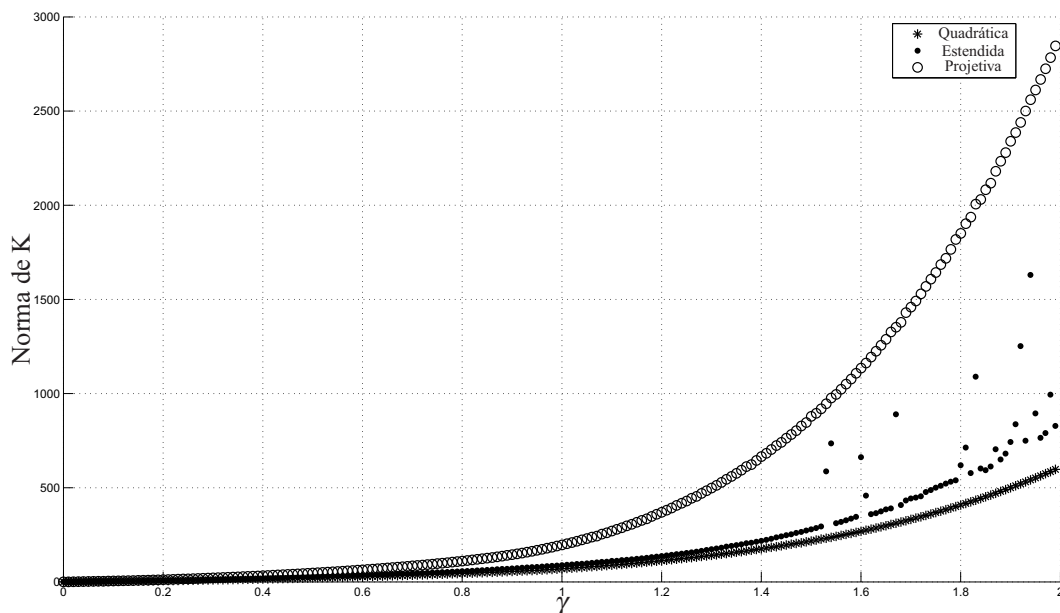


Figura 4.19: Comparação entre os métodos de projeto com otimização da norma de K para o modelo linear do helicóptero 3-DOF.

Realizaram-se implementações práticas dos controladores também para este exemplo, com

o objetivo de visualizar o controlador atuando em sistemas reais sujeitos a falhas. A trajetória do helicóptero é a mesma descrita no Exemplo 4.1.3, bem como a falha na hélice traseira.

Fixando $\gamma = 1,3$ projetaram-se os três controladores e em seguida realizou-se a implementação prática dos mesmos. As Figuras (4.20) e (4.21) referem-se a evolução real no tempo dos ângulos do helicóptero 3-DOF: *elevation* (ϵ), *pitch* (ρ) e *travel* (λ) referente às implementações práticas dos controladores atuando no sistema durante a trajetória descrita. Nota-se a falha suave no instante 22s, e percebe-se que o sistema retoma a estabilidade rapidamente, mostrando que o controlador robusto atende as requisições de projeto.

Na sequência temos o controlador projetado para a implementação ilustrada na Figura (4.20) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -60,0388 & -26,0370 & 57,2286 & -27,5009 & -6,0394 & 49,1746 & -47,0216 & 25,9688 \\ -81,2923 & 28,1798 & -56,7177 & -37,1490 & 7,3748 & -48,6938 & -63,8691 & -28,8009 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 140,80$$

Na sequência temos o controlador projetado para a implementação ilustrada na Figura (4.21) e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -63,2349 & -34,7372 & 72,6144 & -30,5466 & -8,0745 & 63,6443 & -46,9693 & 32,8242 \\ -89,8366 & 40,2116 & -81,0856 & -41,4948 & 9,8358 & -70,7979 & -68,6231 & -39,4567 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 173,64$$

Na sequência temos o controlador projetado por estabilidade projetiva que não foi implementado e sua norma:

$$K = \begin{bmatrix} -167,831 & -100,836 & 415,099 & -54,522 & -15,010 & 265,071 & -171,224 & 252,954 \\ -230,395 & 127,743 & -484,019 & -72,206 & 20,607 & -315,163 & -239,237 & -303,809 \end{bmatrix}$$

$$\|K\| = 878,88$$

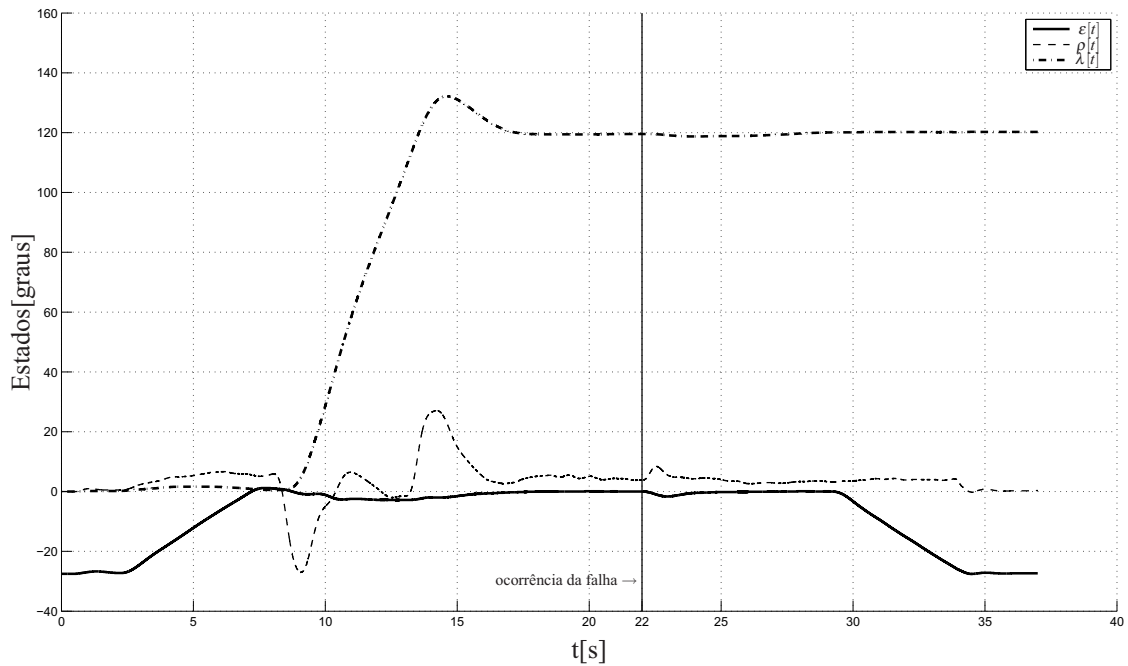


Figura 4.20: Implementação prática do controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade quadrática no helicóptero 3-DOF.

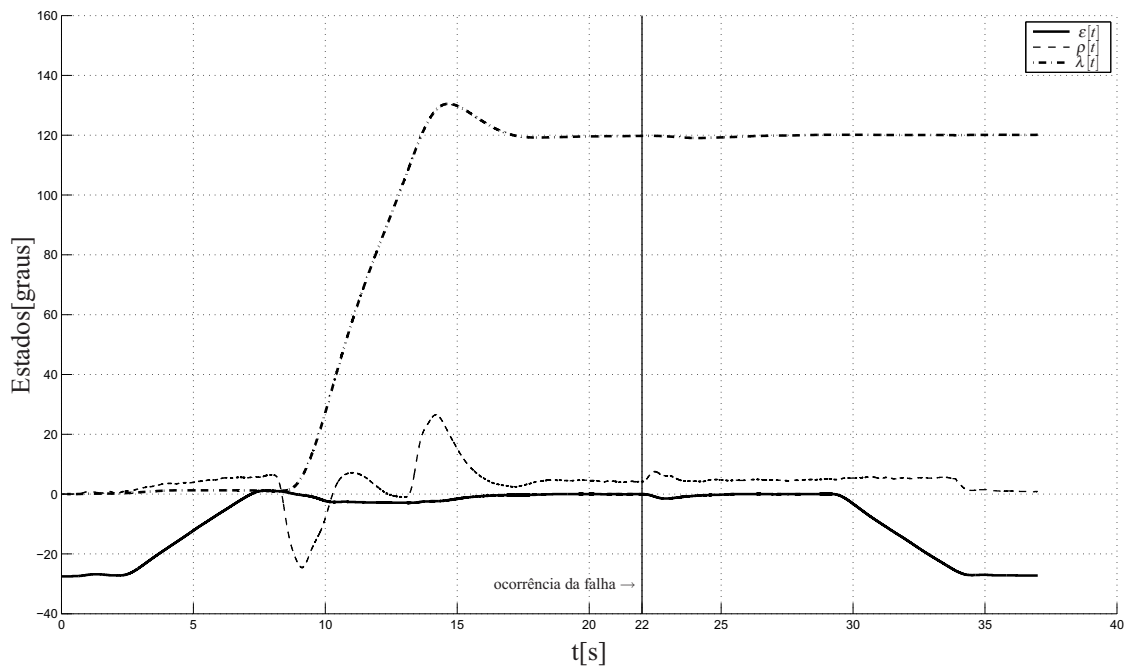


Figura 4.21: Implementação prática do controlador K projetado com o método de otimização proposta utilizando as LMIs de estabilidade estendida no helicóptero 3-DOF.

As respectivas normas dos controladores foram 140,80 para o controlador projetado por estabilidade quadrática com otimização proposta neste trabalho, 173,64 para o controlador projetado por estabilidade estendida com otimização e 878,88 para o controlador projetado por estabilidade projetiva com otimização. Devido a magnitude da norma do controlador projetado por estabilidade projetiva ser elevada, o controlador não foi implementado no sistema prático para evitar danos ao equipamento.

Note que apesar dos dois métodos (projeto por estabilidade quadrática com otimização proposta neste trabalho e projeto por estabilidade estendida com otimização) possuírem normas diferentes, o transitório antes e após a falha são praticamente os mesmos com pequenas diferenças.

Outra observação que pode ser feita deste exemplo é que o parâmetro γ referente a taxa de decaimento utilizado neste exemplo não pode ser utilizado no projeto por estabilidade quadrática com otimização existente, pois este é infactível para valores de $\gamma \geq 1,21$ \square

Exemplo 4.2.4: Comparação geral dos três métodos de projeto com otimização

A fim de encontrar resultados mais conclusivos realizou-se uma comparação genérica entre os três métodos de projeto e otimização de K : projeto por estabilidade quadrática com otimização proposta neste trabalho conforme Teorema 2.1, projeto por estabilidade estendida com otimização conforme Teorema 2.3 e projeto por estabilidade projetiva com otimização conforme Teorema 2.5.

Inicialmente geraram-se aleatoriamente 1000 politopos de sistemas incertos de segunda ordem, com um parâmetro incerto apenas (dois vértices). Os 1000 politopos foram gerados factíveis em pelo menos um dos casos de projeto e otimização para $\gamma = 0,5$ e em seguida analisaram-se as consequências do aumento de γ . Realizou-se esta comparação com a intenção de se analisar factibilidade e melhores resultados para a norma de K . Assim obteve-se um gráfico de barras mostrando o número de controladores com menor norma em função de γ , mostrado na Figura (4.22).

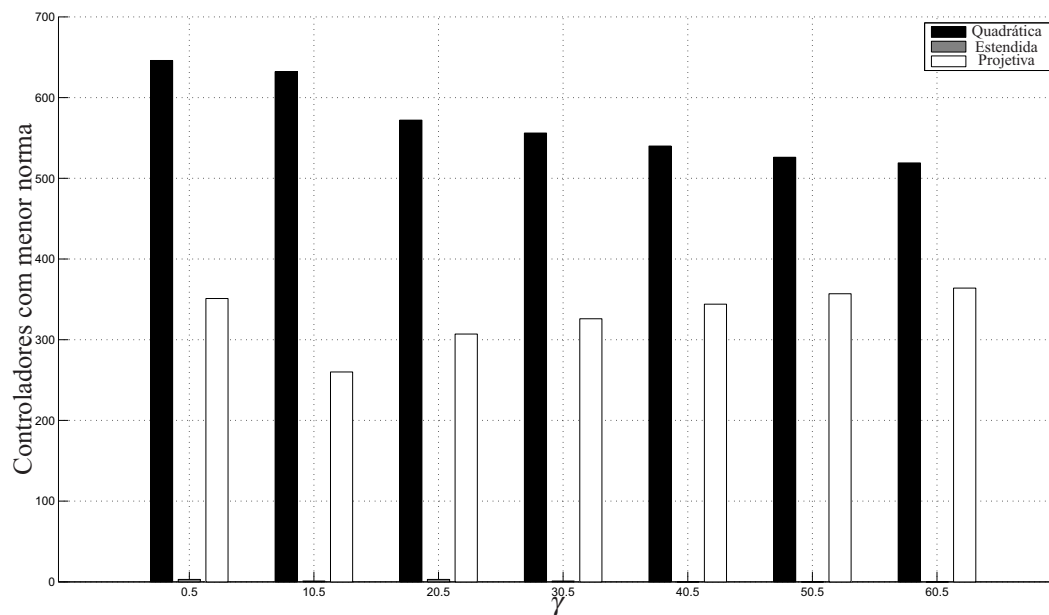


Figura 4.22: Quantidade de controladores com menor norma entre os três casos de projeto e otimização para 1000 polítopos gerados aleatoriamente.

Os valores exatos encontrados para a montagem do gráfico de barras da Figura (4.22) aparecem na Tabela (4.2).

Tabela 4.2: Comparação entre os três casos de projeto e otimização com menor norma de K

γ	Quantidade de controladores K com menor norma para cada projeto ótimo		
	Estabilidade Quadrática	Estabilidade Estendida	Estabilidade Projetiva
0,5	646	3	351
10,5	632	1	260
20,5	572	3	307
30,5	556	1	326
40,5	540	0	344
50,5	526	0	357
60,5	519	0	364

Nota-se, segundo a Tabela (4.2) que houve alguma perda de factibilidade para os três casos com o aumento do γ , porém esta perda não foi muito expressiva. Verifica-se que o projeto por estabilidade quadrática com otimização proposta neste trabalho mostrou melhores resultados em todos os casos de comparação para os 1000 polítopos, dado que a respectiva otimização

enunciada no Teorema 2.1 resultava na relação de otimização (2.12), sendo esta a única relação resultante dentre os três Teoremas 2.1, 2.3 e 2.5 que otimiza diretamente a norma de K . O projeto por estabilidade projetiva com norma ótima também ganhou destaque nesta análise devido aos bons resultados de comparação para os 1000 polítopos. \square

Conclusões

Propuseram-se, neste trabalho, novas técnicas de otimização da norma de controladores robustos sujeitos a falhas estruturais. Estes controladores foram utilizados para a estabilização de sistemas incertos lineares invariantes no tempo, cujas incertezas são do tipo politópicas.

As LMIs para projeto de controladores foram equacionadas a partir da teoria de estabilidade segundo Lyapunov e abordagens dos lemas de Finsler (SKELTON; IWASAKI; GRIGORIADIS, 1997) (referido durante o trabalho como estabilidade estendida) e projetivo recíproco (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001) (referido durante o trabalho como estabilidade projetiva) com o objetivo de encontrar resultados menos conservadores. Os lemas citados têm sido utilizados na literatura para estudo de estabilidade (LEITE et al., 2004) e controle robusto \mathcal{H}_2 (ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2007b), porém bem pouco abordados para projeto de controladores que, no caso deste trabalho, teve a inserção da restrição para taxa de decaimento responsável por diminuir a duração do transitório.

Realizaram-se o projeto e a aplicação dos controladores ótimos abordados no Capítulo 4 objetivando comparações entre os métodos que encontravam menor norma e um transitório mais curto. A princípio realizaram-se comparações entre as normas ótimas existentes (ASSUNÇÃO et al., 2007) e a proposta neste trabalho, ambas para o projeto por estabilidade quadrática, utilizando três exemplos práticos (massa-mola-amortecedor conforme Figura (3.1), sistema com suspensão ativa de carro conforme Figura (3.2) e helicóptero 3-DOF conforme Figura (3.4)). Em seguida realizou-se uma comparação mais geral pela análise dos controladores projetados pelos dois casos para 1000 politopos de sistemas de segunda ordem com um parâmetro incerto, gerados aleatoriamente. Realizaram-se, na sequência do trabalho, comparações entre os três métodos de projeto com otimização (por estabilidade quadrática, por estabilidade estendida e por estabilidade projetiva), também da mesma forma: a princípio utilizando os três exemplos práticos e, na sequência, uma comparação mais geral.

Conforme os resultados enunciados no início do Capítulo 4, o projeto por estabilidade quadrática com a otimização proposta mostrou melhores resultados para a norma de K do que o mesmo projeto com a otimização existente para os três exemplos de aplicação (Figuras (4.1), (4.4) e (4.7)), obtendo inclusive factibilidade com o aumento de γ para situações em que a

otimização existente foi ineficaz (Figuras (4.4) e (4.7)). O transitório em todas as aplicações teve tempo de duração muito próximo para as duas formas de otimização sendo também muito próximo nos dois casos para as implementações práticas no helicóptero 3-DOF, como já era esperado. Na comparação dos projetos para 1000 polítopos, o projeto com a otimização proposta neste trabalho também se mostrou melhor para todos os casos de comparação onde $0,5 \leq \gamma \leq 60,5$. Sendo assim, utilizou-se a otimização proposta tanto para as comparações gerais como para as comparações utilizando os exemplos práticos quando se refere a estabilidade quadrática.

Dando continuidade ao Capítulo 4, onde se realizaram comparações entre os três métodos de projeto com otimização, verificou-se que os melhores resultados alternaram entre os três métodos de projeto, com certa predominância dos melhores resultados para o projeto por estabilidade quadrática com a otimização proposta neste trabalho (Figuras (4.11), (4.15) e (4.19)). O transitório em algumas situações divergiu um pouco pelo fato de que o controlador K foi projetado agora com diferentes técnicas de projeto, porém o tempo de duração do transitório foi próximo para as simulações dos três controladores, devido às restrições da taxa de decaimento não dependerem da técnica de projeto. A implementação prática no helicóptero 3-DOF mostrou resultados muito próximos para o transitório dos controladores projetados por estabilidade quadrática com otimização proposta neste trabalho e estabilidade estendida com otimização sendo que o controlador projetado por estabilidade projetiva não foi implementado devido ao risco de danificar o sistema, pois a norma do controlador resultou em um valor alto. Verifica-se também que para a taxa de decaimento utilizada nesta implementação ($\gamma = 1,3$), o projeto por estabilidade quadrática com otimização existente foi ineficaz (vide Figura (4.7)), mostrando que as novas técnicas de projeto com otimização são mais vantajosas para implementação de valores altos para γ . Na comparação dos projetos para 1000 polítopos, o projeto por estabilidade quadrática mostrou melhores resultados para toda a faixa de γ , porém é importante frisar que os 1000 polítopos utilizados nesta análise eram de segunda ordem, com um parâmetro incerto apenas (dois vértices), podendo os resultados divergirem um pouco quando analisados polítopos de maior ordem e mais parâmetros incertos (como no caso das comparações das Figuras (4.15) e (4.19)). O projeto por estabilidade projetiva com norma ótima também obteve bons resultados para toda a faixa de γ .

Pode-se assim concluir que as novas técnicas de projeto com otimização devem ser estudadas quando a norma do controlador K for um fator crítico para a implementação dos mesmos em sistemas práticos, principalmente quando os sistemas exigem um rápido tempo de estabelecimento, ou seja, γ elevado para seu funcionamento.

Utilizou-se neste trabalho o solver padrão LMILAB, e o pacote LMIEDIT para a representação de LMIs. Os respectivos projetos e simulações foram feitos através do software MATLAB (GAHINET et al., 1995), sendo usado o modelo linear dos sistemas. Os equacionamentos foram feitos na forma de LMIs, assim podendo ser facilmente resolvidos utilizando-se algoritmos de convergência polinomial (BOYD et al., 1994).

Perspectivas futuras:

- Estudar os gráficos de barras para sistemas de ordem maior $n > 2$, com mais incertezas;
- Desenvolvimento de técnicas de otimização desvinculadas da matriz de Lyapunov P para o caso de projeto por estabilidade estendida e da matriz positiva definida M para o caso de projeto por estabilidade projetiva;
- Inserção de LMIs que diminuam o *overshoot* do sistema (ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008b);
- Aplicação para o caso discreto.

Referências

- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and \mathcal{H}_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (lmi) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Notre Dame, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.
- ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ -optimal control for the tracking problem with zero variation. *IET Control Theory Applications*, Stevenage, v. 1, n. 3, p. 682–688, 2007b.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle robusto de sistemas lineares sujeitos à falhas estruturais usando realimentação derivativa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 7., 2008, Presidente Prudente. *Proceedings...* Presidente Prudente: [s.n.], 2008a. 6p.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. \mathcal{D} -estabilidade de sistemas descritores sujeitos a falhas estruturais usando realimentação da derivada dos estados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 17., 2008, Juiz de Fora. *Anais...* Juiz de Fora: SBA, 2008b. v. 1. 6p. (Artigo 38448).
- ASSUNÇÃO, E.; MARCHESI, H. F.; TEIXEIRA, M. C. M.; PERES, P. L. D. Global optimization for the \mathcal{H}_∞ -norm model reduction problem. *International Journal of Systems Science*, Hants, v. 38, n. 2, p. 125–138, 2007d.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback lmi-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, Hants, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. 2nd. ed. [S.l.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, 15).
- CHANG, W.; PARK, J. B.; LEE, H. J.; JOO, Y. H. LMI approach to digital redesign of linear time-invariant systems. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Stevenage, v. 149, n. 4, p. 297–302, July 2002.
- CHEN, C. *Linear system theory and design*. 3rd. ed. New York: Oxford, 1999. 352 p. (Oxford Series in Electrical and Computer Engineering).
- CHILALI, M.; GAHINET, P. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle modernos*. 8th. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 684 p.

- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando LMIs. *Controle & Automação*, Campinas, v. 20, n. 1, p. 83–93, 2009a.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for linear descriptor systems. *Mathematical Problems in Engineering*, Nasr City, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009b.
- FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; SILVA, N. A. P. da. Robust state-derivative pole placement LMI-based designs for linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 82, n. 1, p. 1–12, 2009c.
- FERON, E.; APKARIAN, P.; GAHINET, P. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Notre Dame, v. 41, n. 7, p. 1041–1046, 1996.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. Natick, 1995. 138 p.
- LEITE, V. J. S.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, P. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista Controle & Automação*, Campinas, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004.
- OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4th. ed. New York: Prentice Hall, 2003. 800 p.
- OLIVEIRA, M. C. Novos testes de estabilidade para sistemas lineares. *Revista Controle & Automação*, Campinas, v. 15, n. 1, p. 17–23, 2004.
- OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Perspectives in robust control. In: _____. 1st. ed. Berlin: Springer Berlin / Heidelberg, 2001. cap. Stability tests for constrained linear systems, p. 241–257.
- PASCOAL, R. M.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Restrição da taxa de decaimento e otimização no projeto de controladores robustos para sistemas sujeitos a falhas. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 7., 2009, Bauru. *Proceedings...* Bauru: [s.n.], 2009a. 7p.
- PIPELEERS, G.; DEMEULENAERE, B.; SWEVERS, J.; VANDENBERGHE, L. Extended lmi characterizations for stability and performance of linear systems. *Systems & Control Letters*, San Diego, v. 58, n. 7, p. 510 – 518, 2009.
- QUANSER. *3-DOF helicopter reference manual*. Markham, 2002. 35 p.
- SENAREZI, D. P. *Projeto de controlador robusto para helicóptero de bancada sujeito a falhas estruturais*. Ilha Solteira: UNESP/FE, 2009.
- SHEN, Y.; SHEN, W.; GU, J. A new extended lmis approach for continuous-time multiobjective controllers synthesis. In: . Luoyang: [s.n.], 2006. p. 1054–1059.
- SILVA, E. R. P. *Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais*. 2009. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.
- SKELTON, R. E.; IWASAKI, T. E.; GRIGORIADIS, K. *A unified algebraic approach to control design*. Bristol: Taylor & Francis, 1997. 283 p.