UNESP UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RICARDO APARECIDO DE MORAES

ALGORITMO DE RESOLUÇÃO DE EDO DE PRIMEIRA ORDEM COM IMPLEMENTAÇÃO EM HTML

Guaratinguetá
2011

RICARDO APARECIDO DE MORAES

ALGORITMO DE RESOLUÇÃO DE EDO DE PRIMEIRA ORDEM COM IMPLEMENTAÇÃO EM HTML

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos pata obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto

Guaratinguetá
2011

Moraes, Ricardo Aparecido de

M827a Algoritmo de resolução de EDO de primeira ordem com implementação em HTML / Ricardo Aparecido de Moraes. – Guaratinguetá : [s.n.], 2011

83 f.: il.

Bibliografia: f. 82-83

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, 2011

Orientador: Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto

1. Equações diferenciais 2. Algoritmo I. Título

CDU 517.9

UNESP UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

ALGORITMO DE RESOLUÇÃO DE EDO DE PRIMEIRA ORDEM COM IMPLEMENTAÇÃO EM HTML

RICARDO APARECIDO DE MORAES

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Prof[a]. Dr[a]. ANA PAULA MARINS CHIARADIA
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. ERNESTO VIEIRA NETO
Orientadora/UNESP-FEG

Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA
UNESP-FEG

Prof. Dr. DÉCIO CARDOZO MOURÃO
UNESP-FEG

Dezembro de 2011

Dedicatória

Aos meus pais Francisco e Vilma pelo apoio incondicional.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer em primeiro lugar a mim mesmo, antes de criticarem leiam a justificativa, por me superar em diversos momentos complicados, onde desistir parecia ser a opção mais fácil, por exigir sempre o máximo de mim, mesmo quando não era necessário e por ter feito o melhor possível durante esses quatro anos.

Agradeço aos meus pais Francisco e Vilma, pelo apoio e dedicação durante esses últimos 7858 dias.

Agradeço a meu orientador Prof. Ernesto Vieira Neto, por viabilizar todo material necessário para a realização deste trabalho, pela paciência, e por me mostrar um caminho diferente onde posso aplicar meus estudos.

Agradeço a todos os professores da graduação, com quem tive oportunidade de ter aula e é claro aprender alguma coisa.

Agradeço ao Prof. Edison José Perobelli, meu professor de Matemática do Ensino Médio, que foi a primeira pessoa a me mostrar que Matemática era o que eu realmente queria fazer da minha vida.

Agradeço a minha amiga de todas horas Sabrina, por ser simplesmente a melhor pessoa com quem eu tive a oportunidade de conviver, por ficar ao meu lado em todas as mais variadas e absurdas situações desde 2001. E por mais que o tempo passe espero sempre poder te ligar e ouvir um "passa em casa".

Agradeço aos meus amigos Müller, por ser o Müller (essa definição basta para esta figura ímpar), Bruno Augusto, pelas incontáveis horas aplicadas ao desenvolvimento do ócio e Bruno Henrique, com quem estou falando enquanto digito esses agradecimentos, pelos conselhos, ajuda e principalmente pela dedicação e interesse em resolver parte dos meus problemas.

E por fim um agradecimento especial a algumas ilustres pessoas que fizeram da graduação uma parte muito engraçada da minha vida, são eles: Formiga, o faz tudo da FEG, pela insuperável competência no trabalho, e Jorge Henrique, garçom do Pizza 1, por manter meu prato sempre cheio de pizza.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo teórico sobre equações diferenciais ordinárias de primeira ordem dirigido de forma a dar base para o desenvolvimento de um software didático que auxílie aos alunos e pesquisadores que se deparem com este tema. O algoritmo foi desenvolvido em linguagem HTML a fim de que o resultado fornecesse uma página de internet, que permite ao público-alvo acessar o software em qualquer lugar em que disponha de conexão à internet.

Palavras-chave:
Equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, Algoritmo de resolução, desenvolvimento em HTML.

Abstract

This work presents a theoretical study of ordinary differential equations of first order directed so as to provide basis for the development of an educational software that helps students and researchers confronted with this issue. The algorithm was developed in HTML language in to that the results provide a website that allows the audience to access the software anywhere which has internet connection.

Keywords:
Ordinary differential equations of first order, Resolution algorithm, HTML development.

Conteúdo

Lista de Figuras

Introdução

A tarefa de ensinar equações diferenciais não se resume a apenas passar o conteúdo aos alunos, é necessário também que o aluno assimile e compreenda o que foi passado, o que por vezes essa tarefa não é tão simples pela falta de recursos didáticos disponíveis.

Este trabalho trata do assunto equações diferenciais ordinárias de primeira ordem num primeiro momento, realizando uma revisão bibliográfica de uma série de livros que trata desse tema. Essa revisão tem como objetivo nos fornecer o mesmo conhecimento que é passado aos alunos, para ter uma idéia do tipo de material utilizado pelos professores. Num segundo momento apresentamos uma ferramenta didática desenvolvida a partir da revisão bibliográfica realizada, que pode auxiliar os alunos no processo de aprendizagem deste conteúdo.

No primeiro capítulo apresentamos a metodologia orientadora deste trabalho, destacando a questão da revisão bibliográfica, tentamos dar uma visão geral sobre o que é, como é feita e qual sua importância para o restante do trabalho.

O segundo capítulo é fruto desta revisão. Ele traz toda a teoria inicial das equações diferenciais em geral, essa introdução ao assunto se faz necessário para dar base a teoria envolvida na resolução das EDOs de primeira ordem.

No terceiro capítulo tratamos dos diferentes métodos de resolução das EDOs de primeira ordem. Os métodos apresentados são os mais comuns e os que são trabalhados na maioria dos livros didáticos. Com base na análise feita neste capítulo pudemos desenvolver nosso Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem.

As aplicações das EDOs de primeira ordem foram apresentadas no quarto capítulo. Optamos por colocá-las para mostrar a importância dessas equações nas mais variadas áreas do conhecimento. As aplicações trabalhadas aqui vão das mais clássicas até algumas não tão convêncionais.

No quinto capítulo apresentamos o Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem. Esta ferramenta didática se trata de uma página de internet e foi desenvolvida para auxíliar os alunos e também pesquisadores na resolução de tais equações. Este software está liberado na internet e é de uso livre a todos os interessados neste assunto.

Enfim, este trabalho foi realizado com o objeto de ser uma alternativa didática aos métodos convêncionais utilizados atualmente para o ensino das equações diferenciais. O guia apresentado neste trabalho, por ser um recurso digital, pode tornar o ensino deste conteúdo mais atrativo aos alunos, com o advento da técnologia os recursos didático estão se modernizando e este guia segue essa linha.

1 Metodologia

1.1 Revisão Bibliográfica

A metodologia de pesquisa adota para a realização deste trabalho foi a revisão bibiográfica, esse tipo de metodologia visa dar embasamento teórico e sustentação ao tema que será desenvolvido, MORESI (2003, p. 35) define revisão bibliográfica como: "Processo de levantamento e análise do que já foi publicado sobre o tema e o problema de pesquisa escolhidos". Para que uma revisão bibliográfico torne-se expressiva é necessário que o tema escolhido não seja vago, que o pesquisador tenha alguma aptidão ao lidar com ele e que existam diversos recursos bibliográficos disponíveis que trabalhem com este tema, caso contrário corre-se o risco da revisão bibliográfica tornar-se de certa forma pobre de conteúdo ou então pessoal demais ao ponto de não ser de fato uma revisão bibliográfica. A seguir serão apresentadas algumas sugestões que podem dar a uma revisão bibliográfica um alto grau relevância.

LAKATOS e MARCONI (1991) sugerem que para que a revisão bibliográfica se torne efetiva deve-se seguir determinados passos, são eles:

. **Escolha do tema:** Para este trabalho escolhemos trabalhar com as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, devido a sua grande importância nas diversas áreas do conhecimento, e sua difícil assimilação por parte dos alunos da graduação;

. **Elaboração do plano de trabalho:** Decidimos estudar a fundo as propriedades das EDOs de primeira ordem afim de canalizar todo esse conhecimento adquirido para o desenvolvimento de um guia que auxílie os usuários na resolução de tais equações;

. **Identificação do material:** O material utilizado nesta revisão bibliográfico é composto de textos clássicos que tratam de equações diferenciais;

. **Fichamento:** todo o material consultado foi devidamente analisado levando em conta o modo como o tema escolhido era trabalhado por cada um dos autores, buscando um melhor entendimento do conteúdo; redação, buscamos articular todo o conteúdo de maneira clara e objetiva sem perder o caráter teórico necessário num texto como esse.

Apesar da infinidade de recursos disponíveis para consulta, preferimos dar prioridade aos livros didáticos que tratam das equações diferenciais, simplesmente porque toda essa revisão servirá para dar embasamento teórico para o desenvolvimento do Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, apresentado com detalhes no capítulo 5. Como um dos objetivos principais desse guia é auxiliar os alunos que estudam esse tema nada mais justo que buscar conhecimento no material que tais alunos tem como referência, conseguindo assim aproximar essa revisão daquilo que os alunos estão acostumados a ver na sala de aula.

2 Introdução às Equações Diferenciais

Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos das equações diferenciais, tais como classificação, ordem, linearidade, etc. Essa teoria elementar é importante para fundamentar as bases do que será trabalhado nos capítulos seguintes.

2.1 Definições

2.1.1 Equação Diferencial

Uma equação diferencial (ED) pode ser definida como uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes .

Exemplos

$$\frac{dy}{dx} = x$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 2\frac{d^3x}{dt^3} - x = \ln t$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 = 0$$

2.1.2 Equação Diferencial Ordinária

Se uma equação diferencial envolver apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO).

Exemplos

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x + 4y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + \cos y = 0$$

2.1.3 Equação Diferencial Parcial

Se uma equação diferencial envolver apenas derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial parcial (EDP)[1].

Exemplos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}$$

2.1.4 Ordem das Equações Diferenciais

A ordem de uma equação diferencial, ordinária ou parcial, é definida pela derivada de maior ordem na ED.

Exemplos

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \sin y = 4x \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^4 = 5t \tag{2.2}$$

[1]Exceção feita a este capítulo, trabalharemos apenas com as EDO. Sendo assim a expressão **equação diferencial** refere-se somente as EDO.

As equações (2.1) e (2.2) são ambas equações diferenciais de segunda ordem[2], porém a primeira é uma EDO de segunda ordem e a segunda é uma EDP de segunda ordem.

2.1.5 Linearidade das Equações Diferenciais

Se em uma equação diferencial, não encontrarmos em seus termos:

. funções transcendentais da variável ou variáveis dependentes, ou de suas derivadas, por exemplo, $\ln y(x)$, $\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$, $\sin\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$, etc.

. produtos entre as variáveis dependentes, entre as variáveis dependentes e suas derivadas, ou entre as derivadas das variáveis dependentes, por exemplo, $[z(x)]^2$, $z(x)\frac{dz}{dx}$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^3$, $\frac{dz}{dx}\frac{dy}{dx}$, $z(x,y)\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\frac{\partial z}{\partial y}$, etc.

então a equação diferencial é uma equação diferencial linear. Na ocorrência de alguns dos casos citados acima, a equação é dita não linear.

Se uma equação diferencial é linear e ordinária de ordem n e possui apenas uma variável dependente, ela pode ser escrita da seguinte forma

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = g(x)$$

onde $a_0(x)$ não é identicamente nulo, x é uma variável independente e $y(x)$ é a única função de x. A equação acima é a forma mais geral para uma equação diferencial linear e ordinária de ordem n com somente uma variável dependente.

Exemplo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} &= y \\
x^2\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} - 3xy &= x\cos x \\
\frac{dy}{dx} + \sin y &= 0
\end{aligned}$$

As equações do exemplo anterior são todas lineares, exceto a última que apresenta o termo $\sin y$, que é uma função transcendental envolvendo a variável dependente y.

[2] A ordem da ED é dada pela derivada de maior ordem na ED, não importando o valor da potência a qual a derivada foi elevada.

2.2 Soluções de Equações Diferenciais

2.2.1 Solução Explícita de uma Equação Diferencial

Uma solução explícita de uma uma equação diferencial é uma função do tipo $y = f(x)$, na qual a variável dependente é expressa somente em termos da variável independente e das constantes, que quando substituída na equação diferencial, a reduz em uma identidade.

Exemplo

$$\frac{dy}{dx} = x \tag{2.3}$$

A equação (2.3) tem solução explícita dada por

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c \tag{2.4}$$

onde c é uma constante. Se substitirmos $y(x)$ na equação (2.4), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) &= x \\ x &= x \end{aligned}$$

que é uma igualdade.

2.2.2 Solução Implícita de uma Equação Diferencial

Uma solução implícita de uma equação diferencial é uma função do tipo $f(x,y)$ do conjunto de variáveis dependentes e independentes, que através de derivação implícita reduz à solução a equação diferencial inicial.

Exemplo
A função

$$f(x,y) = x^2 + \sin y - 2 = 0$$

é uma solução implícita da equação diferencial

$$2x + \cos y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Para verificar derivamos implicitamente $f(x,y)$ com relação a variável x, assim

$$\frac{d}{dx}(f(x,y)) = \frac{d}{dx}\left(x^2+\sin y-2\right) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$2x+\cos y\frac{dy}{dx} = 0$$

que é a nossa equação diferencial inicial.

2.2.3 Problemas de Valor Inicial

Quando um determinado problema, além de uma equação diferencial que o descreve, tiver ainda que seguir certas condicões iniciais estabelecidas inicialmente, para um mesmo valor da variável independente, dizemos que temos um problema de valor inicial (PVI)[3].

Temos que resolver

$$\frac{d^n}{dx^n} = f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$$

sujeito a

$$y(x_0) = y_0,\;\; y'(x_0) = y_1,\ldots,\;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

2.2.4 Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de uma EDO

Considere o seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Se $f(t,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas num retângulo

$$R = (t,y) \in \mathbb{R} | \alpha < t < \beta, \delta < y < \gamma$$

contendo (t_0, y_0), então o PVI dado tem uma única solução em um intervalo contendo t_0 .

A demonstração desse teorema se encontra no apêndice (A.1).

[3]Além dos PVI, temos também os chamados problemas de valores de contorno (PVC) que seguem a mesma definição dos problemas de valor inicial, com uma diferença, em um PVC as condições são especificadas para dois ou mais valores da variável independente.

3 Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Neste capítulo trabalharemos com os principais métodos analíticos para a resolução das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Apresentaremos esses métodos da maneira mais detalhada possível, dando ênfase as suas demonstrações e mostrando alguns exemplos de equações diferenciais resolvidas por eles, pois esses são os métodos aplicados no Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem apresentado no capitulo 5.

3.1 Método de Separação das Variáveis

A equação geral de primeira ordem é dada por :

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.1}$$

Se a equação geral de primeira ordem não for linear, então não existe um método geral que possa ser aplicado a todas as equações desse tipo. Por este motivo vamos considerar aqui equações de primeira ordem lineares que possam ser escritas na forma

$$-M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{3.2}$$

Sempre poderemos fazer esse tipo de transformação definindo $f(x,y) = M(x,y)$ e $N(x,y) = 1$, ou também podemos escrever $f(x,y)$ como o produto de duas funções de x e y, seja,

$$f(x,y) = M(x,y)n(x,y),$$

onde,

$$n(x,y) = \frac{1}{N(x,y)}$$

assim, temos,

$$f(x,y) = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

aplicando essa igualdade à equação (3.1) temos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

e com algum trabalho algébrico, temos que

$$-M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Vamos supor que M seja uma função dependente apenas de x e N uma função dependente apenas de y, então temos

$$-M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

que é dita separável ou de variáveis separáveis por poder ser escrita na forma:

$$-M(x)dx + N(y)dy = 0.$$

Feitas essas adaptações na equação diferencial podemos resolvê-la simplesmente agrupando-as de maneira conveniente em relação a igualdade e aplicando integração direta em ambos os lados da equação, como mostrado abaixo.

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx,$$

onde c é uma constante de integração.

Exemplos

1.Resolva a seguinte equação diferencial

$$(1+x)dx - ydy = 0$$

Resolução

Note que a equação esta na forma

$$M(x)dx - N(y)dy = 0$$

onde

$$M(x) = 1 + x \;\; e \;\; N(y) = y$$

Portanto, podemos ajustar os termos da equação até obter $M(x)dx = N(y)dy$. Se fizermos isso na nossa equação teremos

$$(1+x)dx = ydy$$

Seguindo nosso algoritmo, agora vamos aplicar integração direta em ambos os lados da igualdade

$$\int (1+x)dx = \int ydy$$
$$x + \frac{x^2}{2} = y^2 + c.$$

Resolvendo para y temos que nossa solução é dada por

$$y = \pm\sqrt{x + \frac{x^2}{2} + c}$$

onde $c =$ constante de integração

2. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \sin(5x)$$

sujeito a $y(0) = 3$

Resolução

Note que a equação desta vez se encontra na forma geral de equação de primeira ordem, ou seja,

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Porém em nossa equação nosso $f(x,y) = \sin(5x)$ que é uma função só de x, ou seja, $f(x,y) = f(x)$.

Reescrevendo nossa equação na forma $M(x)dx = N(y)dy$, temos

$$dy = \sin(5x)dx$$

assim podemos observar que $M(x) = \sin(5x)$ e $N(y) = 1$, feito isso vamos aplicar integração direta em ambos os lados da igualdade

$$\int dy = \int \sin(5x)dx + c$$
$$y = -\frac{\cos(5x)}{5} + c$$

Essa seria nossa solução geral já resolvida para y se não tivessemos um PVI, porém como ele existe vamos aplicar a condição inicial indicada em nossa solução para encontrar c. Como $y(0) = 3$ temos

$$3 = -\frac{\cos(5 \cdot 0)}{5} + c$$

portanto $c = \frac{16}{5}$ e nossa solução que antes era geral, agora se tornou uma solução particular dada por:

$$y = -\frac{\cos(5x)}{5} + \frac{16}{5}$$

3.2 Equações Homogêneas e Método de Substituição Algébrica

Antes de falarmos diretamente sobre os conceitos de equação diferencial homogênea de primeira ordem ou mesmo sobre seu método de resolução, necessitamos examinar o que é uma função homogênea.

Uma função F é chamada de homogênea de grau n, com $n \in \mathbb{N}$, se ela pode ser escrita na forma $F(tx,ty) = t^n F(x,y)$, ou seja, fazendo a substituição em $F(x,y)$, $x = tx$ e $y = ty$ e depois fatorando t, a expressão resultante deve ser como a indicada na equação acima, senão a função não é homogênea[4]

[4]Estamos interessados em trabalhar apenas com funções de duas variáveis, mas a definição acima é valida também para uma função com um numero k de variáveis. Por exemplo, se tivermos uma função do tipo $F(x_1,x_2,...,x_k)$, com $k \in \mathbb{N}$, a função será homogênea de ordem n desde que

$$F(tx_1,tx_2,...,tx_k) = t^n F(x_1,x_2,...,x_k)$$

Uma equação diferencial da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é dita homogênea se ambos os seus coeficientes M e N forem funções homogêneas de mesmo grau, ou seja, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é homogênea se $M(tx,ty) = t^n M(x,y)$ e $N(tx,ty) = t^n N(x,y)$.

De maneira equivalente, a equação diferencial de primeira ordem $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é homogênea se quando à escrevemos na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

e podemos definir um função g tal que $f(x,y)$ possa ser escrita na forma $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ e nossa equação diferencial fica

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Analogamente, se nossa equação diferencial homogênea for escrita na forma $\frac{dx}{dy} = f(x,y)$ podemos definir uma nova função h tal que tal que $f(x,y)$ possa ser escrita na forma $f(x,y) = h\left(\frac{x}{y}\right)$ e nossa equação diferencial fica

$$\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$$

3.2.1 Método de Substituição Algébrica

Uma equação diferencial homogênea do tipo $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ pode ser resolvida por meio de substituição algébrica. A substituição visa transformar nossa equação diferencial homogênea em uma equação diferencial de primeira ordem separável para a partir dai aplicarmos o Método de Separação das Variáveis. A substituição a ser feita será $y = vx$ ou $x = uy$, onde u e v são nossas novas variáveis independentes.

Demonstração do Método de Substituição Algébrica

Seja $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ uma equação diferencial homogênea. Fazendo $y = vx$ ou $v = \frac{y}{x}$, transformamos nossa equação inicial em uma equação diferencial separável nas variáveis v e x.

Como $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ é homogênea podemos escrevê-la na forma $\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$.

Fazendo a substituição $y=vx$, temos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(vx)}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

Então,

$$v+x\frac{dv}{dx}=g(\frac{y}{x}),$$

mas como $y=vx$, temos que

$$v=\frac{y}{x},$$

logo,

$$v+x\frac{dv}{dx}=g(v),$$

reescrevendo esta equação temos,

$$[v-g(v)]dx+xdv=0.$$

Enfim chegamos a nossa equação diferencial separável, que reagrupada pode ser escrita como

$$\frac{dv}{v-g(v)}+\frac{dx}{x}=0$$

Como já vimos anteriormente esse tipo de equação diferencial pode ser resolvida via integração direta:

$$\int\frac{dv}{v-g(v)}+\int\frac{dx}{x}=c,$$

onde c é nossa constante de integração.

A solução geral pode ser escrita por

$$\int\frac{dv}{v-g(v)}+\ln|x|=c, \tag{3.3}$$

e após resolver a integral devemos substituir novamente $v=\frac{y}{x}$, para termos nossa solução nas variáveis iniciais.

A demonstração utilizando a substituição $x=uy$ é análoga, com apenas algumas mudanças na forma de se escrever nossa equação inicial.

Exemplos

1. Resolva a seguinte equação diferencial[5]

$$x^3ydx + x^2y^2dy = 0$$

Resolução

Antes da resolução própriamente dita devemos analisar se nossa equação diferencial é de fato homogênea. Temos dois métodos para efetuar esta análise: primeiro vamos verificar se $M(tx,ty) = t^nM(x,y)$ e se $N(tx,ty) = t^nN(x,y)$

$$M(x,y) = x^3y \quad e$$
$$N(x,y) = x^2y^2$$

logo

$$M(tx,ty) = t^3x^3ty = t^4x^3y = t^4M(x,y) \quad e$$
$$N(tx,ty) = t^2x^2t^2y^2 = t^4x^2y^2 = t^4N(x,y)$$

portanto, $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são funções homogêneas de grau 4, então nossa equação diferencial acima é homogênea.

Agora vamos verificar sua homogeneidade pelo segundo método[6]. Primeiro colocamos nossa equação na forma $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$, fazendo isso temos,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3y}{x^2y^2} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

portanto, nossa equação é homogênea.

Verificada a homogeneidade da nossa função vamos partir agora para o método de solução a partir de uma substituição de variável. Além disso vamos trabalhar com nossa equação na forma $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

A substituição a ser feita é

$$y = vx \tag{3.4}$$

[5] O exemplo a seguir destaca uma equação homogênea e separável, porém vamos resolvê-la via o método de resolução de equações homogêneas, fica a cargo do leitor resolvê-la por separação de variáveis.

[6] Não é necessário utilizar os dois métodos para estudar a homogeneidade de uma equação diferencial, visto que um método serve apenas de alternativa para o outro.

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \tag{3.5}$$

como $g\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{1}{\frac{y}{x}} = -\frac{x}{y}$, temos que,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

fazendo as substituições indicadas em (3.4) e (3.5) temos,

$$\begin{aligned} v + x\frac{dv}{dx} &= -\frac{x}{xv} = -\frac{1}{v} \\ x\frac{dv}{dx} + v + \frac{1}{v} &= 0 \\ x\frac{dv}{dx} + \frac{1+v^2}{v} &= 0 \\ \frac{dx}{x} + \frac{v}{1+v^2}dv &= 0. \end{aligned}$$

Agora aplicando integração direta temos,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{1+v^2}dv &= c \\ \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1+v^2| &= c. \end{aligned}$$

Como c é uma constante podemos fazer $c = \ln|c_1|$, assim temos

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|1+v^2| = \ln|c_1|$$

Multiplicando a equação por 2 temos

$$\begin{aligned} \ln|x^2| + \ln|1+v^2| &= \ln|c_1^2| \\ \ln|1+v^2| &= \ln|c_1^2| - \ln|x^2| \\ \ln|1+v^2| &= \ln\left(\frac{c_1}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

portanto,

$$v^2 = \left(\frac{c_1}{x}\right)^2 - 1$$

mas como $v = \frac{y}{x}$, temos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{x}\right)^2 &= \left(\frac{c_1}{x}\right)^2 - 1 \\ y^2 &= c_1^2 - x^2 \\ y &= \sqrt{c_1^2 - x^2} \end{aligned}$$

que é a nossa solução geral.

2. Resolva

$$xydx + x^2dy = 0$$

Resolução

Assim como no exemplo passado vamos verificar a homogeneidade da nossa equação diferencial, porém vamos utilizar apenas um dos métodos colocando nossa equação na forma $\frac{dx}{dy} = f(x,y)$.

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2}{xy} = -\frac{x}{y} = h\left(\frac{x}{y}\right)$$

portanto, nossa equação é homogênea.

Agora sim, vamos ao método de resolução. Aplicamos a seguinte substituição:

$$\begin{aligned} x &= uy \\ \frac{dx}{dy} &= u + y\frac{du}{dy}. \end{aligned}$$

Com essas substituições em nossa equação dada na forma de $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ temos

$$\begin{aligned} u + y\frac{du}{dy} &= -\frac{uy}{y} = -u \\ u + y\frac{du}{dy} + u &= 0 \\ \frac{dy}{y} + \frac{du}{2u} &= 0. \end{aligned}$$

Através de integração direta temos,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} + \int \frac{du}{2u} &= c \\ \ln|y| + \frac{1}{2}\ln|u| &= c \end{aligned}$$

como c é uma constante podemos fazer $c = \ln|c_1|$, assim temos

$$\ln|y| + \frac{1}{2}\ln|u| = \ln|c_1|.$$

Multiplicando nossa equação por 2 temos

$$\ln|y^2| + \ln|u| = \ln|c_1^2|$$
$$\ln|u| = \ln|c_1^2| - \ln|y^2|$$
$$\ln|u| = \ln\left(\frac{c_1}{y}\right)^2$$
$$u = \left(\frac{c_1}{y}\right)^2$$

mas com $u = \frac{x}{y}$, temos,

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{c_1}{y}\right)^2$$
$$x = \frac{c_1^2}{y}$$

que é a nossa solução geral.

3.3 Equações Lineares

Definimos a forma geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem como

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Dividindo a equação acima pelo coeficiente $a_1(x)$ de $\frac{dy}{dx}$, obtemos a seguinte forma de uma equação diferencial linear

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = F(x), \tag{3.6}$$

onde

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \quad e \quad F(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$$

Procuramos uma solução para (3.6) em um intervalo I, onde as funções $P(x)$ e $F(x)$ são contínuas.

3.3.1 Fator Integrante

Supondo que (3.6) possua solução, podemos escrevê-la como:

$$dy + [P(x)y - F(x)]dx = 0 \tag{3.7}$$

As equações lineares possuem uma propriedade que nos permite encontrar uma função $\mu(x)$, tal que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - F(x)]dx = 0 \tag{3.8}$$

é uma equação diferencial exata. Pelo critério para uma equação exata, visto anteriormente, o lado esquerdo de (3.8) é uma diferencial exata, se

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}(x) = \frac{\partial \mu(x)[P(x)y - F(x)]}{\partial y} \tag{3.9}$$

ou

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \mu(x)P(x)$$

que é uma equação separável, logo podemos determinar μ agrupando os termos de maneira conveniente e integrando diretamente ambos os lados, então

$$\frac{d\mu}{\mu(x)}(x) = P(x)dx$$

ou

$$\int \frac{d\mu}{\mu(x)}(x) = \int P(x)dx$$

$$\ln|\mu(x)| = \int P(x)dx \tag{3.10}$$

ou

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \tag{3.11}$$

A função $\mu(x)$ determinada acima é um fator integrante para a equação diferencial linear, e $\mu(x) \neq 0$ para todo x em I, sendo também uma função contínua e diferenciável neste intervalo.

Podemos observar também que (3.8) é uma equação diferencial exata ainda que $F(x) = 0$, ou seja, $F(x)$ não tem qualquer influência na hora de se determinar o fator integrante $\mu(x)$, pois temos da equação (3.9) que

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x)F(x) = 0$$

Logo,

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}[P(x)y - F(x)]dx = 0$$

e

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)ydx = 0$$

são diferenciais exatas.

Agora, reescrevendo (3.8), temos

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)ydx = e^{\int P(x)dx}F(x)dx.$$

Podemos verificar que o lado esquerdo da equação acima pode ser escrito como:

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)ydx = \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right].$$

Portanto temos,

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}F(x)dx$$

agora integrando esta última em relação a x temos,

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}F(x)dx + c$$

onde c é uma constante de integração.

Resolvendo para y,

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}F(x)dx + c\right] \tag{3.12}$$

Portanto, se (3.6) tiver uma solução, essa solução será da forma de (3.12).

3.3.2 Algoritmo do Método de Resolução de Equações Lineares

1. Coloque a equação diferencial linear na forma da equação (3.6), ou seja, divida sua equação original pelo coeficiente de $\frac{dy}{dx}$;

2. Identifique $P(x)$ e encontre o fator integrante $\mu = e^{\int P(x)dx}$;

3. Multiplique a equação encontrada no passo **1.** pelo fator integrante encontrado no passo **2.**;

4. Coloque o lado esquerdo da equação encontrada no passo **3.** na forma da derivada do produto do fator integrante pela variável dependente y;

5. Integre ambos os lados da equação encontrada no passo anterior isolando a variável y.

Exemplos

1. Resolva

$$x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$$

Resolução

Vamos começar dividindo nossa equação por x, que é o coeficiente de $\frac{dy}{dx}$. Fazendo isso temos,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x.$$

Na equação acima podemos identificar $P(x) = -\frac{4}{x}$, logo o nosso fator de integração μ é dado por

$$\mu = e^{\int -\frac{4}{x}dx}$$
$$\mu = e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Encontrado μ, vamos multiplicar nossa equação por ele:

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x.$$

Podemos observar que a equação acima pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-4}y\right] = xe^x.$$

Agora integrando ambos os lados temos

$$\begin{aligned} \int d\left[x^{-4}y\right] &= \int xe^x dx \\ x^{-4}y &= xe^x - e^x + c \\ y &= x^5e^x - x^4e^x + cx^4 \end{aligned}$$

onde $c =$ constante de integração.

2. Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = x.$$

Sujeito a $y(0) = -3$.

Resolução

Lembre-se que em um problema de valor inicial devemos encontrar o valor da constante de integração aplicando a condição indicada.

Note que o coeficiente de $\frac{dy}{dx}$ é igual a (3.1), logo nossa equação já está na forma ideal para a resolução.

Temos que $P(x) = 2x$, logo μ é dado por

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int 2x dx} \\ \mu &= e^{x^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando o fator integrante encontrado em nossa equação temos,

$$e^{x^2}\frac{dy}{dx} + 2e^{x^2}xy = e^{x^2}x. \tag{3.13}$$

A equação (3.13) pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx}\left[e^{x^2}y\right] = e^{x^2}x.$$

Integrando ambos os lados temos

$$\int d\left[e^{x^2}y\right] = \int e^{x^2}x\,dx$$
$$e^{x^2}y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$
$$y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

Porém, ainda temos que encontrar o valor da constante c em função da condição $y(0) = -3$, aplicando essa condição inicial à equação acima temos,

$$-3 = \frac{1}{2} + ce^0$$
$$c = -\frac{7}{2}.$$

Portanto, nossa solução é dada por $y = \frac{1}{2} - \frac{7}{2}e^{-x^2}$.

3.4 Equações Exatas

3.4.1 Critério para uma Diferencial Exata

Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em uma região retangular $R : a < x < b, c < y < d$, e suponha também uma função F de duas variáveis reais, de forma que F tenha derivadas parciais contínuas. A diferencial total dF é definida como

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy.$$

Então a equação

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

é chamada de diferencial exata em uma região R se existir uma função $F(x,y)$, tal que se verifique

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \quad e \quad N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \tag{3.14}$$

Nota. Se definirmos $F(x,y) = c$, onde $c = constante$

$$dF(x,y) = 0 = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy$$

e

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Se $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma diferencial exata, a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y). \tag{3.15}$$

O critério enunciado acima é uma condição suficiente e necessária para que a diferencial exata seja uma equação exata.

Vamos provar inicialmente que o critério é uma condição necessária, ou seja, se existe uma função F tal que as equações (3.14) são satisfeitas, então a equação (3.15) é verdadeira, temos

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right) \quad e \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$$

Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz[7] temos que a ordem das derivadas mistas não importa, portanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)$$

Assim,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \qquad \text{(c.q.d.)}.$$

Vamos mostrar agora que o critério é uma condição suficiente, ou seja, se $M(x,y)$ e $N(x,y)$ satisfazem a equação (3.15), então $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é uma equação exata. A demonstração consiste na construção de uma função F que satisfaça (3.14). Essa construção ilustra um método básico para a resolução de equações exatas.

Inicialmente integramos a primeira das equações de (3.14) em relação a x mantendo y constante, então temos

$$F(x,y) = H(x,y) + g(y), \tag{3.16}$$

onde $H(x,y)$ é qualquer função diferenciável tal que $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ e $g(y)$ é uma função diferenciável arbitraria dependente apenas de y, fazendo o papel da constante de

[7] Demonstrado no apêndice (A.2).

integração.

Necessitamos agora mostrar que sempre podemos escolher $g(y)$ de modo que a segunda das equações de (3.14) seja satisfeita, ou seja, que $N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$. Vamos então derivar a equação (3.16) em relação a y. Fazendo isso temos

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) + g'(y),$$

mas como

$$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y),$$

podemos escrever

$$N(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) + g'(y)$$

e isolando $g'(y)$ encontramos,

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial H}{\partial y}(x,y). \tag{3.17}$$

Para conseguirmos encontrar $g'(y)$ na equação (3.17), a expressão à direita do sinal de igualdade da equação (3.17) tem que ser uma função dependente apenas de y. Para essa verificação, derivando o lado direito da equação (3.17) em relação a x.

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H}{\partial x}(x,y)\right)$$

mas,

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$$

então,

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)$$

que, se observada a igualdade da equação (3.15), é zero. Verificado que o lado direito da equação (3.17) não depende de x, podemos encontrar $g(y)$ integrando a equação (3.17) em relação a y:

$$g(y) = \int \left[N(x,y) - \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right] dy$$

agora substituindo $g(y)$ em (3.16) temos

$$F(x,y) = H(x,y) + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)\right] dy.$$

Por último fazemos

$$H(x,y) = \int M(x,y)dx \quad e$$

$$\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \int \frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx$$

assim,

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int \left[\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)dx \right] \right] dy \tag{3.18}$$

Se inicialmente tivéssemos integrado a segunda das equações em (3.14) em relação a y mantendo x constante, encontraríamos

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + \int \left[M(x,y) - \int \left[\frac{\partial N}{\partial x}(x,y)dy \right] \right] dx \tag{3.19}$$

3.4.2 Algoritmo para a Resolução de Equações Exatas

A seguir descrevemos um algoritmo para resolver as equações exatas[8], que é basicamente o mesmo utilizado para a demonstração acima:

1. Integrar $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ em relação a x incluindo uma função $g(y)$ ao invés de uma constante de integração;

2. Diferenciar a equação resultante em relação a y, igualando-a à $N(x,y)$;

3. Obter $g(y)$ integrando a equação em relação a y;

4. Substituir $g(y)$ na equação encontrada após o primeiro passo e encontrar $F(x,y)$.

Exemplo

1. Resolva a seguinte equação diferecial:

$$(2x-1)dx + (3y+7)dy = 0$$

[8] O algoritmo é análogo se no primeiro passo integrarmos $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ em relação a y, fazendo as devidas alterações.

Resolução

Devemos primeiro analisar se a equação dada é exata. Para isso devemos identificar $M(x,y)$ e $N(x,y)$ e verificar se $\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$. Temos que,

$$M(x,y) = 2x - 1$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 0$$

e

$$N(x,y) = 3y + 7$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 0$$

portanto, como

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

nossa equação é exata, ou seja, existe um $F(x,y)$ tal que,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x - 1 \quad e$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y + 7$$

Para encontrar a solução para a nossa equação vamos seguir os passos dados pelo algoritmo.

O primeiro passo nos diz para integrar $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ em relação a x acrescentando uma função $g(y)$ no lugar da constante de integração, ou seja,

$$F(x,y) = \int (2x-1)dx$$

$$F(x,y) = x^2 - x + g(y) \tag{3.20}$$

Depois, o passo 2 nos diz para diferenciar a equação encontrada em relação a y e igualá-la à $N(x,y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - x + g(y)) &= 3y + 7 \\ g'(y) &= 3y + 7\end{aligned}$$

Para seguirmos com a resolução devemos encontrar $g(y)$. Para isso vamos integrar $g'(y)$ em relação a y, que é o que indica o passo 3:

$$\begin{aligned}g(y) &= \int 3y + 7dy \\ g(y) &= \frac{3}{2}y^2 + 7y\end{aligned}$$

Feito isso agora é só substituir $g(y)$ na equação (3.20), então

$$F(x,y) = x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y$$

logo,

$$x^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + 7y = c$$

é a solução geral para a nossa equação diferencial, onde $c =$ constante de integração.

3.4.3 Fator Integrante

Algumas vezes é possível transformarmos uma equação diferencial que não é exata em uma equação diferencial exata, multiplicando a equação por um fator de integração apropriado. Vamos multiplicar a equação

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.21}$$

por uma função μ e depois tentar escolher μ de modo que a equação resultante

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0 \tag{3.22}$$

seja exata.

A equação acima é exata se, e somente se

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}(x)M(x,y) = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x)N(x,y) \tag{3.23}$$

Como M e N são funções dadas, a equação (3.23) nos diz que o fator integrante μ tem que satisfazer a equação diferencial de primeira ordem

$$M(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial y}(x) - N(x,y)\frac{\partial\mu}{\partial x}(x) + \left(\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)\right)\mu(x) = 0 \tag{3.24}$$

Se pudermos encontrar uma função μ que satisfaça a equação (3.24), então a equação (3.22) será exata. A solução de (3.22) pode ser obtida então, pelo método de resolução de equações exatas. A solução encontrada desse modo também satisfará a equação (3.21), já que podemos dividir a equação (3.22) pelo fator integrante μ.

Uma equação diferencial da forma de (3.24) pode ter mais de uma solução. Nesse caso, qualquer uma delas pode ser usada como fator integrante para (3.21). Infelizmente, a equação (3.24) que determina o fator integrante μ é, em muitos casos, tão difícil de resolver quanto a equação original (3.21). Portanto, embora a princípio o método dos fatores integrantes seja uma ferramenta útil para resolver equações diferenciais, na prática ele só pode ser usado em alguns casos especiais. As situações mais importantes nas quais os fatores integrantes simples podem ser encontrados ocorrem quando μ é uma função dependente apenas de uma das variáveis x ou y, em vez de ambas.

Vamos agora determinar condições necessárias sobre M e N para que a equação (3.21) tenha um fator que só dependa de x. Supondo que μ é uma função só de x, temos

$$\frac{\partial \mu(x)M(x,y)}{\partial y} = \mu(x)\frac{\partial M}{\partial y}(x,y)$$

e

$$\frac{\partial \mu(x)N(x,y)}{\partial x} = \mu(x)\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) + N(x,y)\frac{d\mu}{dx}(x).$$

Assim, se

$$\frac{\partial \mu(x)M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu(x)N(x,y)}{\partial x}$$

é necessário que

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)}\mu(x)$$

se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)}$$

é uma função só de x, então existe um fator integrante μ que também depende apenas de x. Além disso, μ pode ser encontrado resolvendo-se a equação anterior, que é uma equação diferencial linear e separável. Um procedimento análogo pode ser utilizado para se determinar uma condição sob a qual a equação (3.21) tenha um fator integrante que dependa apenas de y.

Exemplo

2. Resolva a equação diferencial não exata

$$(2y^2 + 3x)dx + (2xy)dy = 0$$

Resolução

Como dito no enunciado do exemplo a equação acima não é exata, logo para transformá-la em exata, devemos encontrar um fator integrante $\mu(x)$ apropriado.

Como $M(x,y) = 2y^2 + 3x$ e $N(x,y) = 2xy$, podemos encontrar suas derivadas parciais em relação a y e x, respectivamente, assim,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4y \quad e$$
$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2y$$

Agora temos que verificar se

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)}$$

é uma função que dependa apenas de x. Substituindo temos,

$$\frac{4y - 2y}{2xy} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x}$$

que é uma função só de x. Agora vamos aplicar o resultado obtido em

$$\frac{d\mu}{dx}(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)}\mu(x)$$

ou

$$\frac{1}{\mu(x)}d\mu = \frac{\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)}{N(x,y)}dx.$$

Substituindo temos

$$\frac{1}{\mu(x)}d\mu = \frac{1}{x}dx$$

que é uma equação linear de variáveis separáveis, então integrando ambos os lados em relação a x temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\mu(x)}d\mu &= \int \frac{1}{x}dx \\ \ln|\mu(x)| &= \ln|x| \\ \mu(x) &= x. \end{aligned}$$

Tendo encontrado nosso fator de integração $\mu(x) = x$, vamos agora multiplicar nossa equação original por ele:

$$(2y^2x + 3x^2)dx + (2x^2y)dy = 0$$

que é uma equação diferencial exata. Por mero rigor vamos aplicar à equação a condição para que ela seja exata

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) &= 4yx \quad e \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) &= 4yx \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 4yx = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

portanto, nossa equação de fato, é exata.

Agora para resolvê-la vamos aplicar o algoritmo visto nesta seção, porém diferentemente do que foi feito no primeiro exemplo, não vamos apontar os passos um a um, vamos aplicá-los de maneira direta.

Para encontrar $F(x,y)$, temos que,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int M(x,y)dx = \int (2y^2x + 3x^2)dx \\ F(x,y) &= y^2x^2 + x^3 + g(y) \end{aligned}$$

agora vamos diferenciar a equação acima em relação a y e igualá-la à $N(x,y)$,

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2x^2+x^3+g(y)) = 2x^2y$$
$$2yx^2+g'(y) = 2x^2y$$
$$g'(y) = 0$$

o que nos diz que $g(y)$ é uma constante qualquer.

Agora substituindo em $F(x,y)$ temos,

$$F(x,y) = y^2x^2+x^3 = c$$

Portanto $y^2x^2+x^3 = c$, é a solução geral para a nossa equação, onde c é uma constante.

3.5 Equação de Bernoulli

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y = f(x)y^n \tag{3.25}$$

onde n é um número real qualquer, é chamada de equação de Bernoulli.

Se $n=0$, (3.25) é uma equação linear.

Se $n=1$, (3.25) é uma equação de variáveis separáveis.

Se $n\neq 0$, $n\neq 1$ e $y\neq 0$ podemos dividir a equação (3.25) por y^n. Fazendo isso temos,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n} = f(x). \tag{3.26}$$

Agora se fizermos $h(x) = y^{1-n}$

$$\frac{dh}{dx}(x) = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Fazendo essa substituição na equação (3.26), temos

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dh}{dx}(x)+P(x)h(x) = f(x) \tag{3.27}$$

multiplicando a equação (3.27) por $(1-n)$ temos,

$$\frac{dh}{dx}(x)+(1-n)P(x)h(x) = (1-n)f(x). \tag{3.28}$$

Como a equação (3.28) é linear podemos resolvê-la pelo método estudado na seção anterior. Feito isso, devemos substituir $y^{1-n} = h(x)$ e assim teremos uma solução para a equação (3.25).

Exemplo

1. Resolva a equação de Bernoulli dada por

$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$$

Resolução

Vamos primeiramente dividir nossa equação pelo coeficiente de $\frac{dy}{dx}$, assim,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{y^{-2}}{x}$$

Como $n = -2$ e $y \neq 0$ podemos dividir nossa equação por y^{-2}

$$y^2\frac{dy}{dx} + \frac{y^3}{x} = \frac{1}{x}$$

Agora aplicando a substituição

$$h = y^{(1-n)} = y^3$$
$$\frac{dh}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

temos

$$\frac{1}{3}\frac{dh}{dx} + \frac{h}{x} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{dh}{dx} + \frac{3}{x}h = \frac{3}{x}.$$

Note que nossa equação é uma equação linear e, portanto, pode ser resolvida pelo método apresentado na seção anterior.

Para o cálculo do fator integrante μ precisamos de $P(x)$, que no nosso caso é $\frac{3}{x}$, então

$$\mu = e^{\int \frac{3}{x}dx}$$
$$\mu = e^{\ln|x^3|}$$
$$\mu = x^3$$

multiplicando μ na nossa equação temos

$$x^3\frac{dh}{dx}+3x^2h=3x^2$$

que pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dx}\left[x^3h\right]=3x^2.$$

Integrando ambos os lados da equação acima temos,

$$\begin{aligned}\int d\left[x^3h\right]&=\int 3x^2dx\\ x^3h&=x^3+c\\ h&=1+\frac{c}{x^3}\end{aligned}$$

onde $c=$ constante de integração.

Mas $h=y^3$

$$\begin{aligned}y^3&=1+\frac{c}{x^3}\\ y&=\sqrt[3]{1+\frac{c}{x^3}}\end{aligned}$$

que é a solução geral da nossa equação.

3.6 Equação de Ricatti

A equação diferencial não linear

$$\frac{dy}{dx}=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2 \tag{3.29}$$

é conhecida como equação de Ricatti. Para resolvermos esse tipo de equação devemos considerar que haja um certo y_p que seja solução particular da equação (3.29), para assim efetuarmos a seguinte substituição

$$y=y_p(x)+u(x)$$

e

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_p}{dx}(x)+\frac{du}{dx}(x)$$

feitas as devidas substituições em (3.29) temos,

$$\frac{dy_p}{dx}(x)+\frac{du}{dx}(x)=P(x)+Q(x)(y_p(x)+u(x))+R(x)(y_p(x)+u(x))^2$$

$$\frac{dy_p}{dx}(x)+\frac{du}{dx}(x)=P(x)+Q(x)y_p(x)+Q(x)u(x)+R(x)y_p(x)^2+2y_p(x)u(x)R(x)+R(x)u(x)^2$$

$$\frac{dy_p}{dx}(x)+\frac{du}{dx}(x)=P(x)+Q(x)y_p(x)+R(x)y_p(x)^2+[Q(x)+2y_p(x)R(x)]\,u(x)+R(x)u(x)^2.$$

Note no lado direito da equação acima que

$$P(x)+Q(x)y_p(x)+R(x)y_p(x)^2=\frac{dy_p}{dx}(x)$$

logo,

$$\frac{dy_p}{dx}(x)+\frac{du}{dx}(x)=\frac{dy_p}{dx}(x)+[Q(x)+2y_p(x)R(x)]\,u(x)+R(x)u(x)^2.$$

Portanto

$$\frac{du}{dx}-[Q(x)+2y_p(x)R(x)]\,u(x)=R(x)u(x)^2 \tag{3.30}$$

Como (3.30) é uma equação de Bernoulli com $n=2$, podemos transformá-la em uma equação linear dividindo a equação acima por $u(x)^2$, encontrando

$$\frac{1}{u(x)^2}\frac{du}{dx}(x)-(Q(x)+2y_p(x)R(x))u(x)^{-1}=R(x)$$

fazendo a seguinte substituição

$$h(x)=u(x)^{-1} \quad e$$

$$\frac{dh}{dx}(x)=-\frac{1}{u(x)^2}\frac{du}{dx}(x)$$

aplicando a substituição acima na equação (3.30), temos

$$\frac{dh}{dx}(x)+(Q(x)+2y_p(x)R(x))h(x)=-R(x)$$

O método de resolução acima agora é análogo ao utilizado para resolver equações de Bernoulli.

Exemplo

1. Resolva a equação de Ricatti sendo y_p uma solução conhecida

$$\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$$
$$y_p = 2.$$

Resolução

Primeiro vamos identificar os coeficientes da equação

$$P(x) = -2$$
$$Q(x) = -1$$
$$R(x) = 1.$$

Agora vamos fazer a seguinte substitução

$$y = y_p + u$$
$$y = 2 + u$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

assim, temos,

$$\frac{du}{dx} = -2 - (2+u) + (2+u)^2$$
$$\frac{du}{dx} = -4 + 4 + 3u + u^2$$
$$\frac{du}{dx} - 3u = u^2$$

que é uma equação de Bernoulli com $n = 2$. A partir de agora vamos resolvê-la pelo método utilizado na seção anterior, primeiramente dividindo a equação acima por u^2

$$\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx} - \frac{3}{u} = 1$$

agora vamos fazer

$$h = u^{-1}$$
$$\frac{dh}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{du}{dx}$$

fazendo essa substituição, nossa equação pode ser escrita como

$$-\frac{dh}{dx} - 3h = 1$$
$$\frac{dh}{dx} + 3h = -1$$

que é uma equação linear, agora precisamos calcular o fator integrante μ

$$\mu = e^{\int 3dx}$$
$$\mu = e^{3x}$$

então, vamos multiplicar nossa equação pelo fator de integração μ,

$$e^{3x}\frac{dh}{dx} + 3e^{3x}h = -e^{3x}$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d}{dx}\left[e^{3x}h\right] = -e^{3x}.$$

Integrando ambos os lados temos,

$$\int d\left[e^{3x}h\right] = \int -e^{3x}dx$$
$$e^{3x}h = -\frac{e^{3x}}{3} + c$$
$$h = -\frac{1}{3} + \frac{c}{e^{3x}}$$

mas, $h = u^{-1}$, então

$$u^{-1} = -\frac{1}{3} + ce^{-3x}$$
$$u = \frac{1}{-\frac{1}{3} + ce^{-3x}}$$

mas, ainda temos que $y = 2 + u$, então

$$y = 2 + \frac{1}{-\frac{1}{3} + ce^{-3x}}$$

onde c é uma constante de integração.

Portanto, a equação acima é nossa solução geral para a equação dada.

3.7 Equações de Clairaut

A forma geral destas equações é dada por

$$y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{3.31}$$

tal que y seja uma função diferenciavel.

Essas equações deram origem ao estudo das soluções singulares.

Para resolvermos as equações de Clairaut devemos buscar fazer a substituição $p(x) = \frac{dy}{dx}$, então podemos escrever (3.31) na forma

$$y = xp(x) + f(p(x)). \tag{3.32}$$

Derivando (3.32) em relação a x, temos

$$\frac{dy}{dx} = p(x) + x\frac{dp}{dx}(x) + f'(p(x))\frac{dp}{dx}$$

$$p(x) = p(x) + x\frac{dp}{dx}(x) + f'(p(x))\frac{dp}{dx}$$

ou seja,

$$\frac{dp}{dx}(x)(x + f'(p(x)) = 0. \tag{3.33}$$

Assim $\frac{dp}{dx}(x) = 0$ ou $x + f'(p(x)) = 0$.

Se $\frac{dp}{dx}(x) = 0$, entao $p(x) = c$, onde c é uma constante qualquer. Substituindo a constante em (3.32), temos

$$y = cx + f(c)$$

que nada mais é do que uma família de retas.

Porém, se $x + f'(p(x)) = 0$, teremos que $x = -f'(p(x))$, logo (3.32) fica na forma

$$y = -p(x)f'(p(x)) + f(p(x)).$$

Substituindo $p(x)$ pelo parâmetro t, podemos escrever a solução singular da equação de Clairaut na seguinte forma paramétrica

$$\begin{cases} x = -f'(t) \\ y = f(t) - tf'(t) \end{cases}$$

Exemplo

1. Resolva a equação de Clairaut dada, obtendo uma solução singular

$$y = x\frac{dy}{dx} + 1 - \ln\left|\frac{dy}{dx}\right|$$

Resolução

Vamos aplicar a seguinte substituição,

$$p(x) = \frac{dy}{dx}$$

assim, temos,

$$y = xp(x) + 1 - \ln|p(x)|$$

derivando a equação acima em relação a x temos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= p(x) + x\frac{dp}{dx}(x) - \frac{1}{p(x)}\frac{dp}{dx}(x) \\ p(x) &= p(x) + \frac{dp}{dx}(x)\left(x - \frac{1}{p(x)}\right) \\ \frac{dp}{dx}(x)\left(x - \frac{1}{p(x)}\right) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, $\frac{dp}{dx}(x) = 0$ ou $\left(x - \frac{1}{p(x)}\right) = 0$.

Se $\frac{dp}{dx}(x) = 0$, $p(x) = c$, onde c é uma constante qualquer. Substituindo esse resultado y temos,

$$y = cx + 1 - \ln|c|$$

que é uma família de retas.

Porém, se $x - \frac{1}{p(x)} = 0$, temos que $x = \frac{1}{p(x)}$, substituindo em y temos,

$$\begin{aligned} y &= 1 + 1 - \ln|p(x)| \\ y &= 2 - \ln\left|\frac{1}{x}\right| \\ y &= 2 + \ln|x| \end{aligned}$$

que é a solução singular da nossa equação, também podemos apresentar essa solução na forma paramétrica, fazendo $p(x) = \frac{1}{x} = t$, onde t é um parâmetro qualquer,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = 2 + \ln|t| \end{cases}$$

4 Aplicações das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Este capítulo traz aplicações das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, algumas clássicas como o Modelo de Dinâmica Populacional de Malthus e outras mais complexas como o Modelo de von Bertalanffy para o crescimento de peixes. O objetivo desse capítulo é exibir a gama de aplicações que essas equações podem ter nas mais variadas áreas do cohecimento, tornando-as muito mais que apenas um objeto de estudo puramente matemático.

4.1 Lei do Resfriamento/Aquecimento de Newton

Segundo a lei empírica de Newton do resfriamento/aquecimento de um corpo, a taxa de variação da temperatura de um corpo é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio que o cerca, chamada de temperatura ambiente. Se $T(t)$ representar a temperatura de um determinado corpo no instante t, T_m a temperatura do meio que o cerca e $\frac{dT}{dt}$ a taxa com que a temperatura do corpo varia, a lei do resfriamento/aquecimento de Newton pode ser escrita matematicamente como:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(T - T_m) \tag{4.1}$$

onde λ é uma constante de proporcionalidade. Em ambos os casos, resfriamento ou aquecimento, se T_m for uma constante $\lambda < 0$.

Note que o modelo da lei de resfriamento/aquecimento de Newton é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear e separável, sendo assim vamos encontrar a solução geral desta equação utilizando o Método das Variáveis Separáveis:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = \lambda dt$$

integrando ambos os lados da nossa última equação, temos

$$\int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int \lambda dt$$

assim,

$$\ln |T - T_m| = \lambda t + c_1$$

portanto,

$$T(t) = T_m + c_2 e^{\lambda t} \tag{4.2}$$

que é a solução geral da lei de resfriamento/aquecimento de Newton, onde $c_2 = e^{c_1}$ é uma constante.

Exemplo 1. Resfriamento de um bolo

Quando retiramos um bolo do forno, ele apresenta temperatura de 150 °C. Três minutos depois sua temperatura é de 94 °C. Quanto tempo demorará para o bolo atingir a temperatura ambiente de 20 °C ?

Resolução

Podemos observar que o problema acima pode ser modelado utilizando a lei de resfriamento/aquecimento de Newton. Porém, antes precisamos identificar a temperatura ambiente (T_m) como sendo $T_m = 20\,^{\mathrm{o}}C$, fazendo isso o que nos resta é resolver o seguinte problema de valor inicial:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda(T - 20)$$

e

$$T(0) = 150$$

e encontrar o valor de λ de tal forma que $T(3) = 94$.

Utilizando a solução geral descrita em (4.2) temos que,

$$T(t) = T_m + c_2 e^{\lambda t}$$

ou

$$T(t) = 20 + c_2 e^{\lambda t}$$

aplicando o PVI $T(0) = 150$, podemos encontrar a constante c_2, assim

$$\begin{aligned} 150 &= 20 + c_2 \\ c_2 &= 130 \end{aligned}$$

como $c_2 = 130$, nossa nova equação pode ser escrita como,

$$T(t) = 20 + 130e^{\lambda t}$$

para encontrar o valor de λ utilizaremos o fato de que $T(3) = 94$, portanto

$$\begin{aligned} 94 &= 20 + 130e^{3\lambda} \\ \lambda &= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{74}{130}\right| \\ \lambda &\approx -0,1878 \end{aligned}$$

assim

$$T(t) = 20 + 130e^{-0,1878t}$$

Porém, a equação acima não nos oferece uma solução finita para $T(t) = 20$, já que $\lim_{x\to\infty} T(t) = 20$, mas podemos ver claramente no gráfico abaixo que o bolo terá temperatura ambiente em aproximadamente 40 minutos.

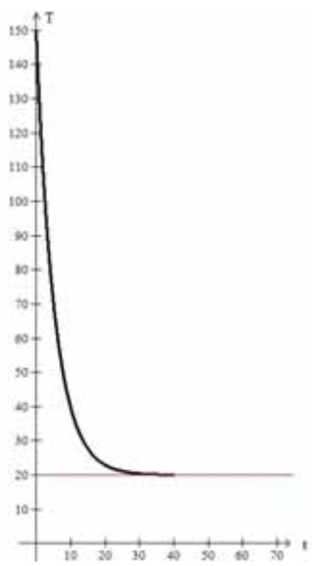

Figura 4.1: Taxa de decaimento da temperatura do bolo

4.2 Dinâmica Populacional

O economista e demógrafo inglês Thomas Malthus, foi um dos primeiros a tentar modelar o crescimento populacional utilizando a matemática. O modelo partia do princípio de que a taxa de crescimento de uma população em um determinado instante é proporcional à população em cada instante, ou seja, quanto mais pessoas existirem em um instante t, mais pessoas haverão no futuro. Matemáticamente, se P(t) é a população total num instante t, temos a seguinte expressão

$$\frac{dP}{dt}(t) = kP(t) \tag{4.3}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. O modelo malthusiano é bem simples e não leva em conta uma série de fatores, tais como imigração e emigração, e as populações que crescem com uma taxa descrita pela equação acima são incomuns, porém ele ainda é utilizado para modelar o crescimento de pequenas populações em um intervalo de tempo razoavelmente curto, como o crescimento de bactérias em uma placa de Petri.

Aos olhos da matemática, podemos observar que a equação (4.3) é ao mesmo tempo uma equação diferencial separável e linear. Colocando-a na forma padrão de uma equação diferencial linear de pimeira ordem temos,

$$\frac{dP}{dt}(t) - kP(t) = 0$$

para resolvê-la, vamos primeiro encontrar o seu fator integrante utilizando (3.11), assim temos,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{-\int k dt} \\ \mu(t) &= e^{-kt} \end{aligned}$$

agora multipicando (4.3) pelo fator de integração encontrado temos

$$\begin{aligned} \mu(t)\frac{dP}{dt}(t) - \mu(t)kP(t) &= 0 \\ e^{-kt}\frac{dP}{dt}(t) - e^{-kt}kP(t) &= 0 \end{aligned}$$

reescrevendo a equação acima

$$\frac{d}{dt}(e^{-kt}P(t)) = 0$$

por fim, integrando os dois lados da equação acima temos

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-kt}P(t))dt = c_1$$
$$e^{-kt}P(t) = c_1$$

portanto, a solução geral para o modelo malthusiano pode ser dada por

$$P(t) = c_1 e^{kt} \tag{4.4}$$

onde c_1 é uma constante de integração.

Exemplo 2. Crescimento de bactérias

O aumento da população de um certo tipo de bactérias está sendo estudado em um laboratório. Inicialmente foram colocadas 3000 bactérias em uma placa de Petri, após 2 horas a população inicial havia triplicado. Se a taxa de crescimento dessa cultura de bactérias é proporcional ao número de bactérias presentes um dado instante, qual o tempo necessário para que o número de bactérias quintuplique ?

Resolução

Como a taxa de crescimento populacional dessa cultura de bactérias é proporcional ao número de bactérias num instante dado, concluímos que o problema acima pode ser modelado pelo modelo de crescimento populacional malthusiano. Assim podemos aplicar a solução geral descrita por (4.4).

$$P(t) = c_1 e^{kt}$$

Para determinar a constante c_1 usaremos o fato de que em $t = 0$, temos $P(0) = 3000$.

Aplicando esta condição temos

$$3000 = c_1 e^0$$
$$c_1 = 3000$$

aplicando $c_1 = 3000$ em (4.4).

$$P(t) = 3000e^{kt}$$

Para encontrarmos a constante de proporcionalidade k utilizaremos o PVI $P(2) =$

9000, assim

$$\begin{aligned} 9000 &= 3000e^{2k} \\ e^{2k} &= 3 \\ k &= \frac{\ln 3}{2} \\ k &\approx 0,5493. \end{aligned}$$

Agora para encontrar o instante em que a quantidade de bactérias quintuplicou, basta resolver a equação

$$\begin{aligned} 15000 &= 3000e^{0,5493t} \\ e^{0,5493t} &= 5 \\ t &= \frac{\ln 5}{0,5493} \\ t &\approx 2,9299. \end{aligned}$$

Logo, temos que a população de bactérias quintuplicará em aproximadamente $2,9299$ horas.

4.3 Crescimento de Peixes (Modelo de von Bertalanffy)

Como sabemos, a pesca sempre foi um importante elemento para a sobrevivência do ser humano, porém a pesca predatória de algumas espécies acabou gerando a extinção dessas espécies. Para combater a pesca predatória, hoje em dia existem leis internacionais que definem como a pesca deve ser efetuada. Os modelos matemáticos podem ser utilizados para se medir os efeitos dessas leis de controle e estabelecer em que condições o peixe pode ser capturado. O peso $p(t)$ de cada espécie é dado pela seguinte equação empírica de von Bertalanffy[9]:

$$\frac{dp}{dt}(t) = \alpha p^{\frac{2}{3}} - \beta p \tag{4.5}$$

que estabelece que o aumento do peso de um peixe é proporcional à área de sua superfície, onde α é uma constante que representa a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do animal (anabolismo), e β é a constante que representa a taxa de diminuição da massa por unidade de massa (catabolismo).

A equação de von Bertalanffy é uma equação de Bernoulli com $n = \frac{2}{3}$, ou seja, pode-

[9] O modelo ao qual nos referimos é para o aumento de peso dos peixes, porém há outros modelos de von Bertalanffy que estudam o tamanho dos peixes, ver BASSANEZI e FERREIRA JR (1988).

mos escrevê-la na forma da equação (3.25) com segue:

$$\frac{dp}{dt}(t) + \beta p = \alpha p^{\frac{2}{3}}. \tag{4.6}$$

Para resolver a equação acima podemos utilizar a seguinte substituição $h(t) = p^{1-n}$. Assim,

$$h(t) = p^{\frac{1}{3}}$$

e

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}}\frac{dp}{dt}(t)$$

ou

$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{1}{3}h^{-2}\frac{dp}{dt}(t)$$

aplicando a substitição acima à (4.6) temos

$$3h^2\frac{dh}{dt}(t) + \beta h^3 = \alpha h^2$$
$$\frac{dh}{dt}(t) = \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3}h$$

reescrevendo temos a seguinte equação linear.

$$\frac{dh}{dt}(t) + \frac{\beta}{3}h = \frac{\alpha}{3} \tag{4.7}$$

Para resover a equação linear (4.7), temos primeiro que encontrar o fator integrante $\mu(t)$, dado por (3.11):

$$\mu(t) = e^{\int \frac{\beta}{3}dt}$$
$$\mu(t) = e^{\frac{\beta}{3}t}$$

multiplicando por $\mu(t)$ em (4.7), temos

$$\mu(t)\frac{dh}{dt}(t) + \mu(t)\frac{\beta}{3}h = \mu(t)\frac{\alpha}{3}$$
$$e^{\frac{\beta}{3}t}\frac{dh}{dt}(t) + e^{\frac{\beta}{3}t}\frac{\beta}{3}h = e^{\frac{\beta}{3}t}\frac{\alpha}{3}$$

simpificando a equação acima, escrevendo o seu lado esquerdo como uma derivada do produto, obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{\frac{\beta}{3}t}h) = e^{\frac{\beta}{3}t}\frac{\alpha}{3}$$

agora integrando os dois lados da equação acima temos,

$$\int \frac{d}{dt}(e^{\frac{\beta}{3}t}h)dt = \int e^{\frac{\beta}{3}t}\frac{\alpha}{3}dt$$
$$e^{\frac{\beta}{3}t}h = \frac{\alpha}{\beta}e^{\frac{\beta}{3}t} + c_1$$
$$h(t) = \frac{\alpha}{\beta} + c_1 e^{-\frac{\beta}{3}t}$$

onde c_1 é a nossa constante de integração.

Mas como $p = h^3$, temos

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} + c_1 e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3 \tag{4.8}$$

quando $t = 0$, o valor de p é desprezável, portanto usando $p(0) \approx 0$, obtemos

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} + c_1\right)^3 = 0$$

então,

$$\frac{\alpha}{\beta} + c_1 = 0 \tag{4.9}$$

ou

$$c_1 = -\frac{\alpha}{\beta} \tag{4.10}$$

aplicando (4.10) em (4.8).

$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3$$
$$p(t) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \left(1 - e^{-\frac{\beta}{3}t}\right)^3$$

Quando t cresce, p tende a $P_\infty = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3$. Fazendo $k = \frac{\beta}{3}$, temos

$$p(t) = P_\infty(1 - e^{-kt})^3 \tag{4.11}$$

que é a solução geral da a equação de von Bertalanffy para o aumento de peso dos peixes[10].

[10]Não será dado nenhum exemplo prático da utilização do modelo de von Bertalanffy para o crescimento de peixes, já que para dar tal exemplo é necessário um certo conhecimento de análise estatística, e aproximação linear, assuntos esses que não são alvo deste estudo. Para ver exemplos ver referências.

4.4 Circuitos em Série

Considere um circuito em série contendo apenas um resistor e um indutor como mostrado na figura abaixo, da segunda lei de Kirchhoff sabemos que a soma das quedas de voltagem no indutor $\left(L\frac{di}{dt}\right)$ e no resistor (iR) é igual à voltagem aplicada no circuito $(E(t))$ constante.

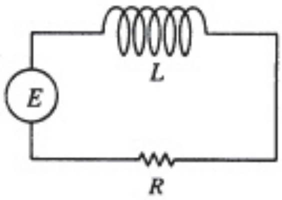

Figura 4.2: Circuito em série LR

Assim a equação diferencial para a corrente $i(t)$ é dada por,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t) \tag{4.12}$$

onde L e R são constantes conhecidas como indutância e resistência, respectivamente, a corrente $i(t)$ também é conhecida como resposta do sistema.

Para o novo circuito em série mostrado na figura (4.3) , a queda de voltagem em um capacitor com capacitância C é dada por $\frac{q}{C}(t)$, onde q é a carga do capacitor.

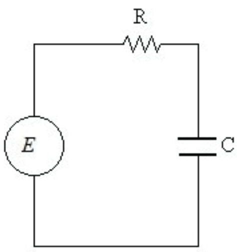

Figura 4.3: Circuito em série RC

Assim, para este circuito a segunda lei de Kirchhoff nos diz que

$$Ri + \frac{1}{C}q = E(t), \tag{4.13}$$

mas como $i = \frac{dq}{dt}$, podemos reescrever (4.13) como a seguinte equação diferencial linear:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \tag{4.14}$$

Como (4.14) é uma equação diferencial linear podemos resolvê-la utilizando o algoritmo apresentado anteriormente; assim devemos primeiro dividir (4.14) pelo coeficiente R

$$\frac{dq}{dt}+\frac{1}{CR}q=\frac{E(t)}{R} \tag{4.15}$$

a seguir vamos encontrar o fator integrante da equação acima utilizando (3.11).

$$\mu(t)=e^{\int\frac{1}{CR}dt}$$
$$\mu(t)=e^{\frac{t}{CR}}$$

Multiplicando (4.15) por $\mu(t)$, temos

$$\mu(t)\frac{dq}{dt}+\mu(t)\frac{1}{CR}q=\mu(t)\frac{E(t)}{R}$$
$$e^{\frac{t}{CR}}\frac{dq}{dt}+e^{\frac{t}{CR}}\frac{1}{CR}q=e^{\frac{t}{CR}}\frac{E(t)}{R}$$

reescrevendo o lado esquerdo da equação acima como uma derivada do produto temos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{t}{CR}}q\right]=e^{\frac{t}{CR}}\frac{E(t)}{R}$$

integrando os dois lados desta equação:

$$\int\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{t}{CR}}q\right]dt=\int e^{\frac{t}{CR}}\frac{E(t)}{R}dt$$
$$e^{\frac{t}{CR}}q=e^{\frac{t}{CR}}CE(t)+c_1$$

onde c_1 é a nossa constante de integração.

Portanto, a solução geral da equação (4.14) é dada por

$$q(t)=CE(t)+e^{-\frac{t}{CR}}c_1. \tag{4.16}$$

Para se obter a solução geral para (4.12) o procedimento é análogo, como será mostrado no exemplo prático a seguir.

Exemplo 3. Circuitos em série

Uma força eletromotriz de 30 volts é aplicada a um circuito em série LR no qual a indutância é de 0,1 henry e a resistência é de 50 ohms. Encontre a corrente $i(t)$ se $i(0)=0$.

Resolução

O primeiro passo é identificar os elementos dados pelo problema na equação diferencial linear (4.12), logo podemos reescrever (4.12) como,

$$0,1\frac{di}{dt}+50i=30.$$

Assim , para resolver nossa equação, vamos seguir o algoritmo e começar dividindo a equação acima pelo coeficiente 0,1:

$$\frac{di}{dt}+500i=300.$$

Agora vamos encontrar o fator integrante da equação acima, dado por (3.11), que por verificação é $\mu(t)=e^{500t}$. Multiplicando $\mu(t)$ na equação acima obtemos,

$$e^{500t}\frac{di}{dt}+e^{500t}500i=e^{500t}300$$

reescrevendo o lado esquerdo da equação na forma de uma derivada do produto temos

$$\frac{d}{dt}(e^{500t}i)=e^{500t}300$$

integrando ambos os lados da equação acima

$$\begin{aligned}\int\frac{d}{dt}(e^{500t}i)dt &= \int e^{500t}300dt\\ e^{500t}i &= 0,6e^{500t}+c_1\\ i(t) &= 0,6+e^{-500t}c_1\end{aligned}$$

onde c_1 é a nossa constante de integração. Para encontrar o valor numérico de c_1, utilizaremos o PVI $i(0)=0$, assim

$$\begin{aligned}0 &= 0,6+e^{0}c_1\\ c_1 &= -0,6\end{aligned}$$

como $c_1=-0,6$, podemos reescrever nossa função $i(t)$ como sendo,

$$i(t)=0,6-0,6e^{-500t}.$$

5 Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Neste capítulo apresentaremos o software desenvolvido a partir da revisão bibliográfica dos livros: AYRES (1994), BASSANEZI e FERREIRA JR (1988), BOYCE e DIPRIMA (2010), BRONSHTEIN e SEMENDYAYEV (1998), EDWARDS e PENNEY (1995), MACHADO (2000), ZILL (2003) e ZILL e CULLEN (2001) sobre equações diferenciais. O Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem foi desenvolvido a fim de auxiliar os alunos de graduação e também os pesquisadores que se deparem com esse tema, na sala de aula ou em suas pesquisas. Este software foi desenvolvido em forma de página da internet para possibilitar o acesso dos usuários a qualquer momento sem necessidade de se fazer qualquer tipo de download.

5.1 Apresentação do Guia

O Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem está disponível na internet para uso das pessoas que se interessam pelo estudo das equações diferenciais, e pode ser acessado no seguinte link http://www.feg.unesp.br/ ernesto/guiaedo /inicio.html.

A seguir serão apresentadas as principais características do nosso guia, incluindo sua estrutura, método utilizado para identificar uma determinada equação, forma com que a solução geral é dada, benefícios aos usuários que são alunos de graduação, entre outras peculiaridades. Mostraremos também todo o material que acompanha o guia, tais como manual de instruções e material de apoio, recursos estes que diferenciam esse software dos outros materias disponíveis na internet, além de garantir um caráter mais didático para o ensino de equações diferenciais. Ele traz também uma fonte de contatos, que serve para estabelecer uma comunicação entre os desenvolvedores e os usuários do guia.

5.1.1 Inicio

Ao acessar o guia o usuário será encaminhado à página inicial, com uma série de links, como mostra a figura (5.1).

Figura 5.1: Página Inicial do Guia.

A partir desta página o usuário pode optar por:

. Iniciar o guia e começar o processo de resolução de sua equação diferencial;

. Acessar o manual de instruções ou o material de apoio para encontrar ajuda, nesses links são fornecidas informações sobre o funcionamento do guia e sobre o conteúdo de ED;

. Utilizar a opção de falar conosco ou ainda ver as referências utilizadas para a elaboação deste guia.

5.1.2 Iniciando o Guia

Ao iniciar o guia o usuário se depara com a página do primeiro teste, mostrada na figura (5.2).

Figura 5.2: Primeiro Teste do Guia.

Este teste indica ao guia em que forma sua equação se encontra, ele é de grande importância no processo de resolução de uma equação diferencial, pois os próximos passos da resoução dependem de como este teste identifica a forma em que a equação a ser trabalhada está escrita.

Escolhemos trabalhar apenas com as duas formas mais comuns de como as equações diferenciais são encontradas, a forma geral $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ e a forma que utiliza as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ escrita como $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Essas duas formas são equivalentes, ou seja, com algum trabalho algébrico é possível a partir de uma escrever a outra, porém para utilizar o guia basta que a equação esteja escrita em uma dessas duas formas. Apesar de incomum pode-se encontrar equações diferenciais em outras formas e se esse for o caso o usuário terá de reescrevê-la adaptando-a a uma das formas indicadas no teste.

Como foi dito no início desta seção, o guia procede de maneira diferente em relação à resolução da equação diferencial dependendo de como ela está escrita. Por esse motivo é importante tomar algum cuidado quando for necessário adaptar uma equação a uma das formas exibidas pelo guia.

Nesta página também foi colocado um link que redireciona o usuário de volta a página inicial do guia. A opção de colocar este link apenas nesta página foi feita porque toda vez que uma equação diferencial é resolvida existe a opção de voltar para esta página, então colocar um link que retorna a página incial em todas as páginas deixaria o guia sobrecarregado de informações.

5.1.3 Acessibilidade ao Pesquisador

Este guia também foi elaborado de maneira a atender às necessidades dos pesquisadores que porventura venham a trabalhar com problemas que envolvam equações diferenciais, visto que muitos dos problemas de diversas áreas do conhecimento podem recair em uma equação diferencial. Seu diferencial em relação aos outros softwares é que o Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem é gratuito e está disponível na internet como uma página, ou seja, não é necessário que o usuário faça algum tipo de download.

A abordagem dada pelo guia aos pesquisadores é diferente da dada aos alunos, isso porque esses dois usuários, na maioria das vezes, buscam coisas diferentes. O foco do pesquisador não é conhecer toda a teoria das equações diferenciais, seu objetivo principal é minimizar o tempo gasto visando um maior desenvolvimento de sua pesquisa, enquanto que o aluno busca aprender um novo conceito que lhe será útil ao longo do tempo, sendo assim foram desenvolvidos recursos que privilegiam cada usuário em sua situação característica.

Para melhor atender aos pesquisadores foi criado um recurso que permite ao pesquisador acessar diretamente a solução geral da sua equação (sem passar pelos testes), desde que ele conheça a sua classificação, como ilustrado pela figura (5.3).

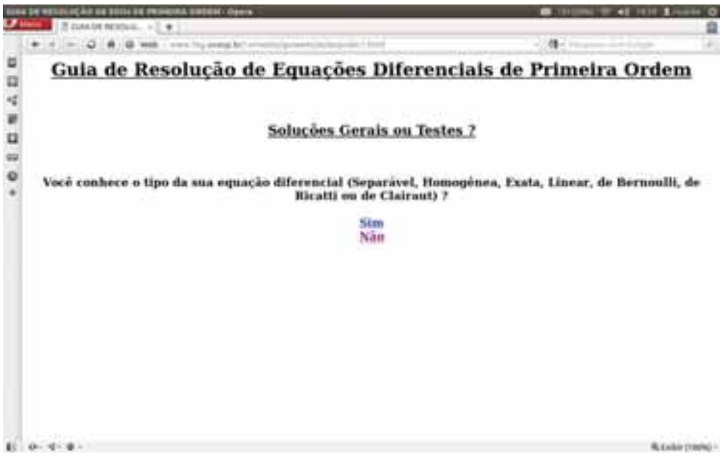

Figura 5.3: Recurso que permite o acesso as soluções gerais sem a utilização dos testes.

Esse recurso foi desenvolvido exclusivamente para os pesquisadores que buscam uma solução analítica rápida para um determinado problema, este recurso permite ao pesquisador acessar determinada solução geral sem passar pelos testes. Porém nada impede que um estudante que conhece a classificação de sua equação diferencial acesse esse recurso. Entretanto o aluno deve ter em mente que a função do guia para ele não é simplesmente resolver equações diferenciais, mas sim ajudá-lo a compreender todos os passos que são necessários para esta resolução e que os testes são de extrema importância nesse processo.

Figura 5.4: Soluções gerais que podem ser acessadas sem a utilização dos testes.

5.1.4 Testes de Classificação

Os testes de classificação das equações diferenciais são diferentes dependendo da forma em que sua equação se encontra. Por esse motivo o primeiro teste é tão importante, pois é ele quem faz essa diferenciação no tratamento da equação diferencial. Cada teste foi elaborado baseado na revisão bibliográfica feita em: BOYCE e DIPRIMA (2010), EDWARDS e PENNEY (1995), MACHADO (2000) e ZILL e CULLEN (2001), de modo a identificar as características das equações e classificá-las. Com essa classificação os testes encaminham o usuário à solução geral adequada.

Os testes de classificação formam a base didática deste guia para a utilização por parte dos estudantes. Eles podem ser evitados, mas devido à sua importância como ferramenta didática esse recurso deve ser utilizado apenas no caso do usuário ser um pesquisador. Os professores da graduação podem utilizar esses testes para desenvolver certas atividades tais como pedir aos alunos que a partir dos testes encontrem certas características de cada tipo de equação, tentar estabelecer alguma relação entre os testes e a solução geral ou qualquer outra possibilidade que o professor encontrar de explorar o guia. Porém esta é apenas uma opção, sua utilização como um guia que auxília os estudantes na resolução de uma EDO de primeira ordem ainda continua sendo a essência desse software, sua sequência lógica consiste em classificar as equações com os testes e depois indicar a solução geral, mas sua flexibilidade permite outros tipos de explorações por parte dos usuários.

Figura 5.5: Teste verificando se a equação diferencial é linear.

No intuito de se tornar ainda mais didático, o guia apenas indica ao usuário o que deve ser testado deixando a seu cargo a realização do teste, com isso o aluno passa a trabalhar com sua equação e o guia assume o papel de apenas auxiliar na resolução e não simplesmente resolver a equação. No caso do teste verificar a classificação de uma determinada equação o guia levará o usuário até a expressão que gera a solução geral. Se o teste não fizer essa verificação o guia indicará o próximo teste.

Ainda pode acontecer de nenhum dos testes identificar a classificação da equação diferencial. Se isso acontecer, o guia mostrará uma página intitulada "Erro", mostrada na figura (5.6), que explica que pode ter acontecido algum erro durante os testes, que é o caso mais comum, ou então que a equação trabalhada não pode ser classificada em nenhuma das classes apresentadas pelo guia (apesar de incomum, existem certos tipos de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem especiais, que normalmente servem para explicar alguns fenômenos bem específicos).

Como solução esta página dá a opção do usuário fazer uma nova consulta, que pode identificar algum possível erro na primeira consulta; acessar o manual de instruções caso o usuário esteja tendo algum tipo de dificuldade em utilizar o guia; ou ainda consultar o material de apoio para tirar algum tipo de dúvida acerca de sua equação.

5.1.5 Soluções Gerais e Problemas de Valor Inicial

Nesta seção trataremos da forma com que o Guia de Resolução de Equações Diferenciais de Primeira Ordem apresenta as soluções gerais das equações diferenciais e como ele lida com o fato da equação trazer algum tipo de problema de valor inicial (PVI).

Visando a maior interação do usuário com o guia, as soluções são dadas na forma

Figura 5.6: Equação não identificada.

genérica, ou seja, as soluções dadas resolvem qualquer tipo de equação diferencial com características similares.

Cabe ao usuário substituir as funções de sua equação na expressão e resolvê-la. Se o usuário em questão é um aluno, a resolução da expressão é o último passo na resolução de uma equação diferencial (se a equação diferencial não apresentar nenhum PVI), e o intuito principal do guia é acompanhar e dar suporte ao estudante de graduação em todos os passos dessa resolução.

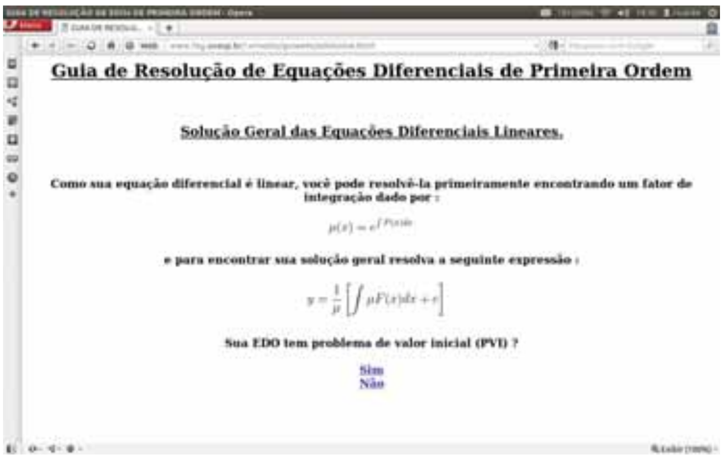

Figura 5.7: Solução geral de uma equação linear.

Aplicar um determinado problema de valor inicial (PVI) à uma equação é o último passo na resolução de uma EDO, e assim como é feito nos passos anteriores o guia apenas orienta o usuário à substituir seu PVI na solução encontrada e trabalha-la até encontrar a constante de integração. Dessa forma o usuário encontrará a solução particular para a sua equação.

Assim como no caso da solução geral, essa metodologia do guia também não favorece os pesquisadores que não tem a pretensão de realizar algum trabalho algébrico.

Nesta página também se encontra um link de retorno, que leva o usuário novamente até a página do primeiro teste. Esse link também está disponível na página para a qual o usuário é direcionado caso sua equação diferencial não apresente nenhum PVI.

Figura 5.8: EDO com problema de valor inicial.

5.1.6 Manual de Instruções

Apesar de ter uma utilização simples, optamos por completar o guia com um manual de instruções. Ele pode ser acessado na página inicial do guia no link "Instruções"ou na página "Erro".

O objetivo do manual é informar ao usuário o que acontece em cada página, como mostra a figura (5.9). As informações foram disponibilizadas em linguagem formal, visando melhorar o entendimento das instruções.

Figura 5.9: Vista parcial do manual de instruções.

O manual de instruções não traz nenhum tipo de ajuda conceitual sobre equações diferenciais, sendo assim optamos por colocar um link no final desta página que redireciona o usuário até o material de apoio, onde ele encontrará um material sobre a teoria das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. As características deste material serão explorados na seção seguinte.

5.1.7 Material de Apoio

O material de apoio citado no guia refere-se aos três capítulos anteriores deste trabalho. Ele pode ser acessado diretamente da página inicial do guia no link "Material de Apoio", na página "Instruções"ou na página "Erro". Essas duas últimas páginas receberam esse link por serem páginas que o usuário ao entrar nelas pode estar com alguma tipo de dúvida conceitual que pode ser sanada por este material.

O material de apoio foi elaborado baseado na revisão biliográfica de livros textos mais utilizados em sala de aula que tratam das equações diferenciais: AYRES (1994), BASSANEZI e FERREIRA JR (1988), BOYCE e DIPRIMA (2010), BRONSHTEIN e SEMENDYAYEV (1998), EDWARDS e PENNEY (1995), MACHADO (2000), ZILL (2003) e ZILL e CULLEN (2001), além de trazer algumas demonstrações e passagens que não aparecem em nenhum desses trabalhos. O texto deste material abrange toda a parte de definições, classificações, métodos de resolução e aplicações das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, além de trazer também alguns exemplos que facilitam o entendimento do conteúdo. Ele pode ser utilizado no auxílio ao usuário durante a utilização do guia, caso o usuário tenha alguma dúvida conceitual sobre como fazer algum dos testes ou então como fazer uma determinada substituição pedida na solução geral; ou também como texto de apoio durante os estudos iniciais das equações diferenciais, servindo de material alternativo ou mesmo complementar ao utilizado pelo professor em sala de aula.

5.1.8 Contatos

Como a maioria dos softwares que são disponibilizados na internet para uso geral o Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem também traz uma página de contatos. Ela pode ser acessada na página inicial do guia no link "Fale Conosco".

O usuário pode enviar critícas, sugestões, comentários, reportar eventuais erros, etc, através do endereço eletrônico: *ricardo.moraes07@gmail.com*. Esse tipo de contato é importante para saber como os usuários de uma forma geral avaliam o guia, além de nos ajudar a manter sempre um material atualizado e de qualidade capaz de auxíliar aos interessados.

5.2 Usuários

Durante o processo de elaboração desse guia, algumas de suas prioridades foram a versatilidade com que ele poderia ser utilizado e a diversidade de seus usuários. Ou seja, ele deveria atender as necessidades do maior número possível de usuários, não apenas alunos e professores da graduação, mas também pesquisadores interessados nesse assunto, ou que apenas estivessem com algum tipo dúvida. Por esse motivo, ao invés de fazer um programa que simplesmente resolve equações diferenciais, optamos por este guia, que pode ser tanto educativo, uma vez que faz com que os alunos tenham que realizar uma série de testes e assim conhecer as características de cada tipo de equação, quanto prático para o usuário que quer apenas encontrar uma solução para o seu problema.

5.2.1 Alunos de Graduação

Ao iniciarmos os estudos sobre equações diferenciais percebemos, através de conversas informais com professores e alunos, que a grande maioria dos estudantes da graduação dos diversos cursos de exatas apresenta dificuldade quando estuda equação diferenciais, sejam elas, ordinárias ou parciais, de primeira ordem ou não. Esse guia não tem a pretensão de se tornar a solução final para isso, mas pode vir a ser um atenuante desta dificuldade.

Estruturado para que o aluno seja levado, em algum momento, à trabalhar de fato com sua equação, esse guia se baseia numa série de testes que servem para classificar a equação que está sendo resolvida. Assim é interessante observar que o guia não realiza esses testes para o usuário, ele apenas indica ao aluno o que deve ser testado. Feito o teste e identificada a classificação da equação o próximo passo é apresentar a solução geral, porém nós optamos por apresentar a solução geral numa forma genérica, ou seja, o usuário terá de fazer as substituições necessárias e ainda calcular uma integral. Esse é um recurso interessante para que a atenção do aluno ao que esta acontecendo com sua equação seja mantida, pois se exibíssemos, após os testes, apenas a solução, o guia perderia um pouco da sua essência como ferramenta didática. Com esse trabalho extra o usuário ao ver sua solução ficará sabendo de qual expressão ela resultou, tendo assim acompanhado todos os passos necessários para a resolução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Além do guia própriamente dito, o aluno dispõe de um texto de apoio sobre equações diferenciais de primeira ordem, disponível através de um link na página principal do guia. Esse material de apoio consiste dos três capítulos anteriores deste trabalho, que contém toda a parte introdutória a teoria das equações diferenciais, os principais métodos de resolução (os mesmos utilizados pelo guia), além de uma série de aplicações das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em diferentes situações, tudo com o objetivo de dar um suporte aos alunos, fornecendo uma fonte alternativa para estudos.

5.2.2 Professores de Graduação

Assim como é difícil para os alunos da graduação aprenderem equações diferenciais, para os professores a dificuldade está em transmitir esses conceitos de maneira clara e compreensível, e para isso o professor deve se valer de todos os recursos disponíveis, visando sempre aprimorar sua metodologia. O nosso guia pode auxiliar o professor no conteúdo conteúdo inicial de um primeiro curso de equações diferenciais, quando é tratado a parte introdutória de equações diferenciais e as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. O guia, nesta situação, serve como uma ferramenta ou facilitador para o professor, no momento de lecionar esse tema. O professor pode utilizar o guia de modo a complementar o ensino tradicional, entendido como a resolução de exercícios apresentados nos diversos livros textos, ou então, utilizá-lo como um instrumento de aprimoraração aos alunos, quanto as características de cada tipo de equação diferencial, visto que, através de conversas informais percebemos que por vezes a maior dificuldade dos estudantes não está na hora de resolver a equação, mas sim na hora de identificar sua classificação (linear, homogênea, etc.). A utilização do material de apoio disponível no guia também é uma boa opção como fonte de consulta, já que se trata de um material desenvolvido a partir de uma revisão bibliográfica dos pricipais livros didáticos que tratam desse assunto. Levando em consideração a diversidade de usuários o guia traz um recurso que permite ao usuário, que conhece o tipo de sua equação, acessar as soluções gerais diretamente. Este recurso pode ser uma armadilha para o professor, um vez que se o aluno souber da classificação da equação de antemão, não acesse a solução geral diretamente sem passar pelos testes, pois como já foi dito os testes são fundamentais para que o aluno absorva as características de cada classe de equações diferenciais.

5.2.3 Pesquisadores em Geral

Nosso guia não é voltado exclusivamente a atender alunos e professores de graduação, os demais pesquisadores de diversas áreas do conhecimento também podem ter seus problemas resolvidos por ele. Por vezes o pesquisador se encontra com uma equação diferencial no momento em que tem que descrever algum fenômeno fisico, estimar uma determinada população, entre outras inúmeras aplicações dessas equações. No entanto, diferentemente do que acontece com os alunos de graduação, os pesquisadores, em sua maioria, sabem como resolver esses problemas, contudo essa resolução demanda um certo tempo. Existem diversos programas que resolvem equações diferenciais (Maple, Mathematica, Matlab), o que torna a utilização desses softwares inviável é o seu custo, nosso guia nao é uma ferramenta tão poderosa quanto esses softwares, porém por ser gratuíto e estar disponível na internet ele acaba se tornando uma opção razoável.

A utilização guia por parte do pesquisador tem um foco diferente quando comparada a utilização dos alunos, enquanto o aluno tem que passar por uma série de testes a fim de classificar sua equação, o pesquisador, desde que conheça a classificação de sua equação, pode acessar diretamente a expressão que gera a solução geral, poupando o tempo que seria perdido fazendo cada um dos testes.

Considerações Finais

A revisão bibliográfica foi útil para dar embasamento teórico suficiente para o desenvolvimento deste trabalho, os textos pesquisados deram suporte necessário para a realização de todo esse estudo apresentado aqui.

O desenvolvimento do Guia de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem, foi benéfico a toda comunidade interessada neste assunto por ser mais um recurso disponível gratuitamente na internet que lida com este tema. Os benefícios na aprendizagem dos alunos não pode ser medido neste momento, pois com o pouco tempo de disponibilização do software e sua pequena divulgação ele ainda não atende um número signficativo de alunos, esperamos que com o passar do tempo esse recurso torne-se popular entre os alunos de graduação e através do canal "Fale Conosco"esperamos receber um retorno por parte dos usuários.

APÊNDICE A – Demonstrações

A.1 Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de uma EDO

Considere o seguinte problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{A.1}$$

Se $f(t,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas num retângulo

$$R = (t,y) \in \mathbb{R} | \alpha < t < \beta, \delta < y < \gamma$$

contendo (t_0, y_0), então o PVI dado tem uma única solução em um intervalo contendo t_0 .

Demonstração

A demonstração do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções de uma EDO foi adaptado de SANTOS(2011, p.148-152).

Vamos dividir a demonstração em duas partes, primeiramente demonstraremos a existência e depois a unicidade da solução de uma EDO.

Existência

Definimos a sequência de funções $y_n(t)$ como:

$$y_0(t) = y_0$$
$$y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Como $f(t,y)$ é contínua no retângulo R, existe uma constante $b > 0$ tal que

$$|f(t,y)| \leq b \qquad\qquad (t,y) \in R.$$

Assim,

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq b\,|t - t_0|, \qquad\qquad \alpha < t < \beta.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em R, existe uma constante $a > 0$ tal que

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq a\,|y - z| \qquad \alpha < t < \beta \qquad e \qquad \delta < y, z < \gamma.$$

Assim

$$\begin{aligned}|y_2(t) - y_1(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,y_1(s)) - f(s,y_0(s))|\,ds \leq a\int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0|\,ds \leq ab\int_{t_0}^{t} |s - t_0|\,ds \\ = ab\frac{|t - t_0|^2}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|y_3(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,y_2(s)) - f(s,y_1(s))|\,ds \leq a\int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1(s)|\,ds \\ &\leq a^2 b\int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^2}{2}ds = a^2 b\frac{|t - t_0|^3}{6}.\end{aligned}$$

Vamos supor, por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b\frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Então

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |f(s,y_{n-1}(s)) - f(s,y_{n-2}(s))|\,ds \leq a\int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)|\,ds$$

$$\leq a\int_{t_0}^{t} a^{n-2} b\frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}ds = a^{n-1} b\frac{|t - t_0|^n}{n!}. \tag{A.2}$$

Estas desigualdades são válidas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$ onde α' e β' são tais que $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$.

Segue de (A.2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta-\alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

logo $y_n(t)$ é convergente. Assim, seja

$$y(t) = \lim_{n\to\infty} y_n(t).$$

Como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^{k-1}(\beta-\alpha)^k}{k!}$$

então aplicando limite quando m tende a infinito temos

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta-\alpha)^k}{k!}. \tag{A.3}$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para $\alpha' < t < \beta'$. Assim segue que $y(t)$ é contínua, pois dado $\varepsilon > 0$, para s suficientemente próximo de t, temos que $|y_n(t) - y_n(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$ e para n suficientemente grande $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ e $|y(s) - y_n(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$, ou seja

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \varepsilon.$$

Ainda, para $\alpha' < t < \beta'$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds,$$

pois, por (A.3), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^{t} f(s,y_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,y(s))ds\right| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))|ds \\ &\leq \int_{t_0}^{t} |y_n(s) - y(s))|ds \leq ab(t-t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta-\alpha)^k}{k!}\end{aligned}$$

que tende a zero quando n tende ao infinito. Portanto

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \end{aligned}$$

Derivando esta equação em relação a t temos que $y(t)$ é solução do problema de valor incial.

O que demonstra a existência de uma solução, agora mostraremos que tal solução é única.

Unicidade

Supondo que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial. Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|\, ds.$$

Assim, como

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \\ z(t) &= \int_{t_0}^{t} z'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} u'(t) = |y(t) - z(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} \left|y'(s) - z'(s)\right| ds \\ = \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|\, ds &\leq a \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|\, ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t).$$

Subtraindo $au(t)$ e multiplicando por e^{-at}, temos

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-at}u(t)\right] \leq 0$$

com $u(t_0) = 0$.

Isso implica que $e^{-at}u(t) = 0$, logo $u(t) = 0$, para todo t. Assim $y(t) = z(t)$, para todo t.

(c.q.d.)

A.2 Teorema de Clairaut-Schwarz

Se $z = f(x,y)$ é de classe C^2, então suas derivadas mistas são iguais, ou seja,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Demonstração

A demonstração do Teorema de Clairaut-Schwarz foi adaptado de PINTO e MORGADO(2008, p.125-126).

Vamos tomar um ponto (x_0, y_0) no domínio de f. Se fixarmos Δy, e definirmos uma função

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

temos que

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0). \tag{A.4}$$

Aplicando o teorema do valor médio para funções de uma variável à função g, temos que $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(x^*)\Delta x$, para x^*, tal que $x_0 \leq x^* \leq x_0 + \Delta x$.

Assim, a equação (A.4) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y_0)\right]\Delta x \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Aplicando o teorema do valor médio à função $h(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y)$, temos que

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y_0)\right]\Delta x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*, y^*)\,\Delta x \Delta y,$$

para um y^*, tal que $y_0 \leq y^* \leq y_0 + \Delta y$, assim a equação (A.4) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*, y^*)\,\Delta x \Delta y = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ é contínua em (x_0, y_0), temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x^*, y^*).$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y}\left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)\right]. \tag{A.5}$$

De modo análogo, mostra-se que o limite que aparece à direita da equação (A.5) também é igual a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$, o que demonstra o teorema.

Referências

AYRES, Jr. F. **Equações Diferenciais: Resumo da Teoria, 560 Problemas Resolvidos, 509 Problemas Propostos**. Tradução: José Rodrigues de Carvalho. 2.ed. rev. e adap. por Antonio Pertence Jr. São Paulo: Editora Makron Books, 1994.

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA, Jr. W. C. **Equações diferenciais com aplicações**. São Paulo : Harbra, 1988.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Tradução e revisão técnica: Valéria de Magalhães Iório. 9.ed. Rio de Janeiro: Editota LTC, 2010.

BRONSHTEIN, I. N.; SEMENDYAYEV, K. A. **Handbook of Mathematics**. English Translation: K. A. Hirsch. 3.ed. Berlim: Editora Springer-Verlag Berlim Heidelberg, 1998.

DUCKETT, J. **Introdução à programação Web com HTML, XHTML e CSS**. tradução: Acauan Fernandes. Rio de Janeiro : Ciência Moderna, 2010.

EDWARDS, Jr. C. H.; PENNEY. D. E. **Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno**. Tradução: Celso Winter e Lafayette Bezerra de Castro, revisão técnica: Paula Viana. 3.ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda, 1995.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Metodologia do Trabalho Científico**. São Paulo: Atlas, 1991.

MACHADO, K. D. **Equações Diferenciais Aplicadas à Física**. 2.ed. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2000.

MCFEDRIES, P. **Guia incrível para criação de páginas Web com HTML**. tradução Elaine Pezzoli. São Paulo : Makron Books, 1998.

MORESI, E.(Org.). **Metodologia de Pesquisa**. Brasília: Universidade Católica de Brasília, 2003.

RAMALHO, J. A. **Iniciando em HTML**. São Paulo: Makron Books, 1996.

PINTO, D.; MORGADO, M. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 2008.

SANTOS, R. J. **Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. Imprensa Universitária da UFMG. Belo Horizonte, 2011.

ZILL, Dennis G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra, revisão: Antônio Luis Pereira. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Tradução: Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Jr. Volume 1. 3.ed. São Paulo: Editora Pearson Makron Books, 2001.