UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Momentos Fracionários e Localização Dinâmica para o Modelo de Anderson Discreto Multidimensional

José Vanterler da Costa Sousa
Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Presidente Prudente, março de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Momentos Fracionários e Localização Dinâmica para o Modelo de Anderson Discreto Multidimensional

José Vanterler da Costa Sousa

Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, março de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

BANCA EXAMINADORA

Roberto de Almeida Prado
PROF. DR. ROBERTO DE ALMEIDA PRADO
ORIENTADOR

PROF. DR. MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA
UNESP/FCT

Silas Luiz de Carvalho
PROF. DR. SILAS LUIZ DE CARVALHO
UFMG

José Vanterler da Costa Sousa
JOSÉ VANTERLER DE COSTA SOUSA

Presidente Prudente (SP), 13 de março de 2014.

RESULTADO: APROVADO

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção Técnica de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5318 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

FICHA CATALOGRÁFICA

S697m

Sousa, José Vanterler da Costa.

Momentos fracionários e localização dinâmica para o modelo de Anderson discreto multidimensional / José Vanterler da Costa Sousa. - Presidente Prudente : [s.n.], 2014

62 f.

Orientador: Roberto de Almeida Prado

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Inclui bibliografia

1. Função de Green. 2. Localização dinâmica. 3. Modelo de Anderson discreto. 4. Momentos fracionários. I. Prado, Roberto de Almeida. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

Aos meus pais, Maria e José, dedico!

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus: Pai, Filho e Espírito Santo, pela sua imensa gratidão, dando-me sabedoria, força, persistência e saúde todos os dias de minha vida para continuar. Obrigado meu Deus, por iluminar meu caminho.

À minha família, de um modo especial aos meus pais José Aquiles e Maria Alves, a minha irmã Maria Josiane, que são o meu alicerce, por todo incentivo, paciência e pelo amor incondicional, sem o qual eu não teria chegado até aqui.

Também incluindo na parte da família, agradeço a minha namorada e amiga Ingrid Juliana pelo incentivo, compreensão, paciência, amor e carinho.

Ao Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado pela orientação, paciência, incentivo e contribuição para meu crescimento científico e pessoal.

Aos professores do DMC-FCT/UNESP pelos ensinamentos dentro e fora de sala de aula. Dentre os quais cito os professores doutores: Vanessa Botta, Cristiane Nespoli, Marcelo Messias, Messias Meneguette, Ronan Reis, Marcos Pimenta, Cássio, Gilcilene, José Roberto, Suetônio e José Carlos (Biroca).

Aos amigos, inicialmente aqueles da primeira e segunda turma do curso de mestrado do PosMAC: Marilaine, Tamires, Diego (Boto), Clóvis (Choquinho 1), Cristiane, Juliano (Brow), Larissa, Pedro (Carneiro), Reginaldo (Merejolli) e Tatiane. Agradeço aqueles que comigo formaram a terceira turma do curso de mestrado do PosMAC: Alisson, Daiane (Dai), Gabriela, Hemily (Gentile), Irineu (Animale), Luana, Luciene, Mariane (A Normal), Marília (Maria), Patrícia (Penny), Rafael (Pão), Renata, Wesley (Várzea). Agradeço também a quarta turma: Adriano (Choquinho 2), Bruno, Caroline (Carol), Cintia, Crislaine, Gustavo (Pancada), Heloísa, Jonas (Din), Junior, Rafael (Castanha).Agradeço também a turma do curso de mestrado em computação: Neto, Lilian, Álvaro, Fernanda, Helton e Jorge. Agradeço a todos pelos conhecimentos que compartilharam todos esses dias.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação, em especial à Erynat, Ivonete e Cintia, pela atenção e apoio oferecido no decorrer do curso de mestrado.

À PROPG-UNESP pelo apoio financeiro.

A todos que direta ou indiretamente me ajudaram na elaboração deste trabalho.

Para finalizar, agradeço a Nossa Senhora que me cobre com seu manto sagrado e intercede por mim todos os dias.

"Tomai, por tanto, a armadura de Deus, para que possais resistir nos dias maus e manter-vos inabaláveis no cumprimento do vosso dever. Ficai alerta, à cintura cingidos com a verdade, o corpo vestido com a couraça da justiça, e os pés calçados de prontidão para anunciar o Evangelho da paz. Sobretudo, embraçai o escudo da fé, com que possais apagar todos os dardos inflamados do Maligno. Tomai, enfim, o capacete da salvação e a espada do Espírito, isto é, a palavra de Deus".

Efésios 6, 13-17.

Resumo

Neste trabalho fizemos um estudo sobre o fenômeno de localização dinâmica para o modelo de Anderson discreto multidimensional, através do método dos momentos fracionários da função de Green, em volumes infinito e finito. Discutimos propriedades espectrais e dinâmicas de localização do modelo e apresentamos a demonstração de que para desordem suficientemente grande, o modelo de Anderson é dinamicamente localizado em seu espectro. Como consequência, obtém-se que este modelo tem espectro pontual puro q.t.p. com as autofunções decaindo exponencialmente.

Palavras-Chave: Função de Green, Localização Dinâmica, Modelo de Anderson Discreto, Momentos Fracionários.

Abstract

In this work we present a study on the phenomenon of dynamic localization for multidimensional discrete Anderson model, through the method of fractional moments of the Green's function in infinite and finite volumes. We discuss spectral and dynamic properties of localization of the model and we present the proof that for sufficiently large disorder, the Anderson model is dynamically located in its spectrum. As a consequence, we obtain that this model has pure point spectrum a.e. with exponentially decaying eigenfunctions.

Keywords: Green's Function, Dynamic Localization, Discrete Anderson Model, Fractional Moments.

Sumário

Introdução

Em 1958 P. W. Anderson introduziu um modelo que descreve os efeitos da mecânica quântica de desordem, como os presentes em ligas de metais e meios cuja estrutura não tem uma ordenação, ou seja, não possuem estruturas atômicas definidas, chamado de modelo de Anderson, apresentado pela primeira vez em [3]. Um dos fenômenos mais conhecido que surge no contexto deste modelo é a chamada localização de Anderson que, matematicamente, significa localização dinâmica ou localização espectral (ver capítulo 2). Ao perceber que o transporte de um elétron era suprimido devido a desordem, estudar localização de Anderson tornou-se bastante importante para os pesquisadores.

Motivado pelo trabalho de I. Goldsheid, S. Molchanov e L. Pastur de 1977 [17] e um pouco mais tarde por uma demonstração de localização para o modelo de Anderson unidimensional, descrita por H. Kunz e B. Souillard [23], o estudo de operadores aleatórios (em particular, o modelo de Anderson), tornou-se um importante campo da Física-Matemática.

Em 1983 Fröhlich e Spencer [16] introduziram o método da análise de multiescala que permite obter localização de Anderson em dimensão arbitrária. Até então, existiam vários modelos que permitiam obter localização de Anderson, porém somente o introduzido por Fröhlich e Spencer em dimensão arbitrária. Em 1993 Aizenman e Molchanov [1] estabeleceram o método dos momentos fracionários, que embora matematicamente seja mais elementar do que o utilizado por Fröhlich e Spencer, resultados mais fortes sobre localização dinâmica são alcançados. O nosso foco principal neste trabalho é o método dos momentos fracionários.

Vamos introduzir o modelo de Anderson que será estudado nesta dissertação. Primeiramente, o Laplaciano discreto multidimensional H_0, atuando sobre o espaço de Hilbert

$$\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right) = \left\{\psi : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C} : \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left|\psi\left(n\right)\right|^2 < \infty\right\},\ d \geq 1,$$

é definido por

$$\left(H_0\psi\right)(n) = -\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d\\|k|=1}} \psi\left(n+k\right), \tag{0.1}$$

com $n \in \mathbb{Z}^d$, $k = (k_1, ..., k_d)$ e $|k| = |k_1| + \cdots + |k_d|$. O modelo de Anderson é o Hamiltoniano aleatório $H_{\omega,\lambda}$ sobre $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$, definido para $\omega \in \Omega$ e $\lambda > 0$ (parâmetro de desordem), por

$$H_{\omega,\lambda} = H_0 + \lambda V_\omega \tag{0.2}$$

em que H_0 é o Laplaciano discreto definido em (0.1), $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ é uma sequência de variavéis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (ver Definição 1.3) e $V_\omega : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ é o potencial aleatório dado por $V_\omega(n) = \omega_n$. Este modelo é um Hamiltoniano aleatório que rege o movimento de um elétron em um meio aleatório do tipo discretizado $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Vale ressaltar que o modelo (0.2) exige que não haja interações entre elétrons e que os átomos da rede estejam todos fixos. Sob este ponto de vista, os núcleos localizados nas posições n da rede $\mathbb{Z}^d$ geram o potencial aleatório V_ω. A aleatoriedade do potencial é responsável pela transição de cargas aleatórias ω_n (ver [35]).

Assumimos que a medida de probabilidade de Borel μ dos parâmetros aleatórios ω_n é absolutamente contínua com densidade ρ, onde ρ é limitada de suporte compacto, isto é:

$$\mu(B) = \int_B \rho(v)\, dv, \quad \text{para cada boreliano } B \subset \mathbb{R},\ \rho \in L_0^\infty(\mathbb{R}),$$

em que $L_0^\infty(\mathbb{R})$ é o espaço das funções limitadas de suporte compacto. Assim, o operador $H_{\omega,\lambda}$ é auto-adjunto e limitado sobre $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$.

Consideremos agora $H : \mathcal{H} \hookleftarrow$ um operador auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Matematicamente, o espectro de H, denotado por $\sigma(H)$, é definido como o complementar do conjunto resolvente

$$\rho(H) = \left\{ z \in \mathbb{C} : R_z(H) = (H - z)^{-1} \text{ é um operador linear limitado} \right\}.$$

Os valores de z para os quais a solução de $H\psi = z\psi$ pertence ao espaço $\mathcal{H}$ são os autovalores de H e o fecho do conjunto de autovalores é chamado de espectro pontual de H, denotado por $\sigma_p(H)$. O restante do espectro de H é o espectro contínuo, denotado por $\sigma_c(H)$, que pode ser decomposto em espectro absolutamente contínuo $\sigma_{ac}(H)$ e espectro singular contínuo $\sigma_{sc}(H)$, de acordo com a decomposição de Lebesgue da parte contínua da medida espectral de H (ver [10]). Os possíveis níveis de energia de uma partícula são dadas pelo espectro $\sigma(H)$.

Quanto a dinâmica da partícula, esta é gerada por um grupo de evolução unitário fortemente contínuo $U(t) = e^{-itH}$, definido via o teorema espectral, o qual fornece a solução $\xi(t) = e^{-itH}\xi$ da equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\frac{d}{dt}\xi(t) = H\xi(t), \qquad \xi(0) = \xi \in \mathcal{H}. \tag{0.3}$$

O fenômeno de localização dinâmica (ver definição 2.2) para o modelo de Anderson $H_{\omega,\lambda}$, definido por (0.2), garante a ausência de transporte quântico, assim exclui-se o espectro contínuo e, portanto, implica que $H_{\omega,\lambda}$ tem espectro pontual puro ω $\mathbb{P}$-q.t.p, através do teorema de RAGE [9, 10] (ver Proposição 2.2).

Considerando o Hamiltoniano aleatório (0.2), a função de Green $G_{\omega,\lambda}(z)$, representada pelos elementos de matriz do resolvente de $H_{\omega,\lambda}$, é definida por

$$G_{\omega,\lambda}(j,k;z) := \left\langle e_j, (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} e_k \right\rangle, \tag{0.4}$$

com $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $\{e_j\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$ base canônica de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

O propósito desta dissertação é utilizar os momentos fracionários da função de Green para estudar localização dinâmica para o modelo de Anderson discreto multidimensional $H_{\omega,\lambda}$ em dois casos: volume infinito e volume finito. Mais precisamente, estudaremos os Teoremas 0.1 e 0.2 descritos abaixo. Para a elaboração deste trabalho, utilizamos como principal referência o artigo [35].

O resultado a seguir estabelece o decaimento exponencial dos momentos fracionários da função de Green [35].

Teorema 0.1. *Seja $0 < s < 1$. Então existe $\lambda_0 > 0$ de modo que para $\lambda \geq \lambda_0$ existem constantes $C < \infty$ e $\nu > 0$ com*

$$\mathbb{E}\left(|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)|^s\right) \leq Ce^{-\nu|j-k|}, \tag{0.5}$$

para quaisquer $j, k \in \mathbb{Z}^d$ e $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

O aparecimento dos momentos fracionários da forma $\mathbb{E}(|\cdot|^s)$, $0 < s < 1$, no teorema acima, motivou o nome "método dos momentos fracionários", que também é frequentemente chamado de "método de Aizenman-Molchanov".

O próximo resultado afirma que as soluções da equação de Schrödinger dependente do tempo (0.3) ficam localizadas no espaço, ou seja, para desordem suficientemente grande o modelo de Anderson (0.2) exibe localização dinâmica em todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ aberto e limitado [35].

Teorema 0.2. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto limitado e $0 < s < 1$. Para cada $\lambda > 0$ em que existem $C < \infty$ e $\nu > 0$ tais que*

$$\mathbb{E}\left(|G_{\omega,\lambda}(j,k;E + i\varepsilon)|^s\right) \leq Ce^{-\nu|j-k|}, \tag{0.6}$$

para quaisquer $E \in I$ e $\varepsilon > 0$, o operador $H_{\omega,\lambda}$ exibe localização dinâmica em I.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no capítulo 1 serão abordados conceitos e resultados preliminares que serão utilizados no desenvolvimento dos capítulos posteriores.

O capítulo 2 é destinado as propriedades de localização dinâmica e espectral, compreendendo que obter localização dinâmica é o principal objetivo desta dissertação. Além do mais, assegurando a existência de localização dinâmica num intervalo I, é garantido a limitação dos momentos do operador posição no tempo, e por fim a ausência de transporte quântico. A fim de obter localização espectral, ou seja, espectro pontual puro em I $\mathbb{P}$-q.t.p. com as autofunções decaindo exponencialmente, finaliza-se o capítulo com uma demonstração, a qual utiliza o teorema de RAGE, que exclui o espectro contínuo; em outras palavras, localização dinâmica implica em localização espectral.

O capítulo 3 é dividido em duas seções, sendo que na primeira é apresentada a importância do método dos momentos fracionários da função de Green para obter localização dinâmica, ou seja, o decaimento exponencial dos momentos fracionários da função de Green. A segunda seção é destinada à relação do segundo momento com os momentos fracionários da função de Green, para o modelo de Anderson multidimensional.

O capítulo 4 é destinado ao estudo do fenômeno localização dinâmica em duas seções. Na seção 1 é apresentada uma forma de obter localização dinâmica sem restringir o Hamiltoniano aleatório a subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$, a qual se denomina método por volume infinito. Na seção 2, introduz-se uma ferramenta importante que são as autofunções correlatoras e fracionárias, as quais são objetos centrais dessa seção. À medida que o Hamiltoniano aleatório é restrito a subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$, mostra-se que também é possível obter localização dinâmica, usando-se o método do volume finito.

No capítulo 5 finalizamos o trabalho com algumas considerações finais importantes, dentre elas, o estudo de localização dinâmica para modelos de Anderson de N partículas com interações, e a adaptação dos resultados estudados para o correspondente modelo de Anderson-Dirac.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo faremos um breve estudo dos principais conceitos e resultados necessários para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Apresentaremos aqui demonstrações de alguns resultados e outras omitiremos por serem resultados familiares, que podem ser encontrados nas referências bibliográficas. Para elaboração deste capítulo foram utilizadas as referências [4, 9, 10, 12, 13, 19, 20, 29, 33, 36].

Seja $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. O subespaço pontual de H, denotado por $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{H}$, é o fecho do subespaço gerado pelos autovetores de H. Seu complemento ortogonal $\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_p^{\perp}$ é o subespaço contínuo de H. Existe uma decomposição do espaço em soma direta $\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \oplus \mathcal{H}_c$ (ver [10]).

Sejam H_1 e H_2 operadores definidos sobre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Denotemos por $D(H_1) \otimes D(H_2)$ o conjunto de todas as combinações lineares finitas de vetores da forma $\varphi \otimes \psi$, com $\varphi \in D(H_1)$ e $\psi \in D(H_2)$. Temos que $D(H_1) \otimes D(H_2)$ é denso em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Definimos o operador $H_1 \otimes H_2$ sobre o espaço $D(H_1) \otimes D(H_2)$ por $(H_1 \otimes H_2)(\varphi \otimes \psi) = H_1\varphi \otimes H_2\psi$ (ver [26]).

O teorema abaixo caracteriza os subespaços $\mathcal{H}_p$ e $\mathcal{H}_c$. Este será usado no capítulo 2 para exclusão do espectro contínuo do modelo de Anderson.

Teorema 1.1 (RAGE). *Seja H um operador auto-adjunto atuando sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então*

(i) $\mathcal{H}_p = \left\{ \varphi \in \mathcal{H} \;\mid\; \lim_{R\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| \chi_{\{|j|>R\}} e^{-itH} \varphi \right\| = 0 \right\}$ *e*

(ii) $\mathcal{H}_c = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \;\mid\; \lim_{R\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \chi_{\{|j|\leq R\}} e^{-itH} \psi \right\| dt = 0 \right\}$,

onde $\chi_{\{|j|\leq R\}}$ e $\chi_{\{|j|>R\}}$ denotam as funções características da bola $|j| \leq R$ e de seu complementar, respectivamente.

Observe que quaisquer dois estados $\varphi \in \mathcal{H}_p$ e $\psi \in \mathcal{H}_c$ são ortogonais, ou seja,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = 0. \tag{1.1}$$

De fato, $\psi \in \mathcal{H}_c$ implica que $\chi_{\{|j| \leq R\}} e^{-itH} \psi \to 0$ para alguma sequência $t \to \infty$. Então pode-se tomar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \left\langle e^{-itH} \varphi, \chi_{\{|j| \leq R\}} e^{-itH} \psi \right\rangle + \left\langle \chi_{\{|j| > R\}} e^{-itH} \varphi, e^{-itH} \psi \right\rangle$$

arbitrariamente pequeno, escolhendo primeiro R e depois tomando t suficientemente grande.

Demonstração: (**RAGE**) Seja H um operador auto-adjunto sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e suponha que 0 não é autovalor de H. Pelo teorema ergódico em média, segue que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-irH} \psi \, dr = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{1.2}$$

Isto vale para $\psi = H\varphi$, por integração implícita, e esses ψ são densos em $\mathcal{H}$, pois 0 não é autovalor de H. Agora suponha que H não tem autovalores. Sendo assim, 0 não é autovalor de $H \otimes I - I \otimes H$ em $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ (consequência do teorema espectral), de modo que, por (1.2), temos

$$0 = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\langle \varphi \otimes \psi, e^{-irH} \psi \otimes e^{irH} \varphi \right\rangle dr = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left| \left\langle \varphi, e^{-irH} \psi \right\rangle \right|^2 dr, \tag{1.3}$$

para quaisquer $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$.

Agora seja $H = H^*$ arbitrário e suponha que $K(i + H)^{-1}$ é compacto para algum operador K limitado. Afirmamos que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left\| K e^{-irH} \psi \right\|^2 dr = 0 \tag{1.4}$$

para algum vetor ψ no subespaço contínuo $\mathcal{H}_c$ de H. De fato, é suficiente mostrar isso para um conjunto denso de vetores $\psi = (i + H)^{-1} \varphi$, $\varphi \in \mathcal{H}_c$, podendo assumir que K é compacto. Então K é o limite, em norma, de uma sequência de operadores de posto finito, o que nos leva a mostrar (1.4) para operadores K de posto 1: $K e^{-irH} \psi = \left\langle u, e^{-irH} \psi \right\rangle v$, com $v, u \in \mathcal{H}$. Como $\psi \in \mathcal{H}_c$, escolha $u \in \mathcal{H}_c$. Então (1.4) segue de (1.3), pois H não tem autovetores em $\mathcal{H}_c$.

A desigualdade abaixo

$$\left\| p^2 \psi \right\| \leq (1 - \alpha)^{-1} \left(\| H\psi \| + \beta(\alpha) \| \psi \| \right),$$

com $0 < \alpha < 1$, donde p^2 é H-limitado (ver [21]), mostra que vale (ii), desde que $\chi_{\{|j|\leq R\}}(i+H)^{-1}$ é compacto. Por outro lado, isto implica em (i), para qualquer autovetor $\varphi \in \mathcal{H}$ e, então, para qualquer $\varphi \in \mathcal{H}_p$. As recíprocas de (i) e (ii) seguem de (1.1). ■

Definição 1.1. *Sejam Ω um conjunto e $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra. Uma medida de probabilidade $\mathbb{P}$ é uma aplicação $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$.*

Definição 1.2. *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade.*

(i) Uma função mensurável $X : \Omega \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ é dita uma variável aleatória.

(ii) Se X é integravél, então

$$\mathbb{E}(X) = \int x \, dF_X(x) = \int_\Omega X d\mathbb{P}$$

é a esperança de X, em que F_X é a função de distribuição.

Definição 1.3. *Seja $\omega = (\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ uma sequência de variáveis aleatórias.*

(i) As variáveis ω_n são identicamente distribuídas se existe uma medida de probabilidade de Borel μ sobre $\mathbb{R}$ satisfazendo

$$\mathbb{P}(\omega_n \in A) = \mu(A), \ \forall n \in \mathbb{Z}^d \text{ e para quaisquer conjuntos de Borel } A \subset \mathbb{R} \ .$$

(ii) As variáveis ω_n são independentes se para cada subconjunto finito $\{n_1, ..., n_\ell\}$ de $\mathbb{Z}^d$ e conjuntos de Borel arbitrários $A_1, ..., A_\ell \subset \mathbb{R}$ tem-se

$$\mathbb{P}(\omega_{n_1} \in A_1, ..., \omega_{n_\ell} \in A_\ell) = \prod_{j=1}^{\ell} \mathbb{P}\left(\omega_{n_j} \in A_j\right) = \prod_{j=1}^{\ell} \mu(A_j).$$

Devido ao parâmetro de desordem $\lambda > 0$, introduzimos a distribuição re-escalonada das variáveis aleatórias $\lambda\omega_n$:

$$\mathbb{P}(\lambda\omega_n \in B) = \mu_\lambda(B) := \mu(B/\lambda).$$

A distribuição μ_λ esta espalhada por suportes maiores para λ grande, correspondendo assim uma maior variedade de possíveis cargas elétricas em um meio discretizado.

Podemos pensar nas variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas como funções mensuráveis sobre um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}^d} (\mathbb{R}, B_\mathbb{R}, \mu)$ com $\mathcal{A}$ e $\mathbb{P}$ denotando, respectivamente, a σ-álgebra e a medida gerada por uma pré-medida induzida por μ nos conjuntos da forma $\{\omega_{n_1} \in A_1, ..., \omega_{n_\ell} \in A_\ell\}$, com $n_1, ..., n_\ell \in \mathbb{Z}^d$ e $A_1, .., A_\ell \subset \mathbb{R}$ conjuntos de Borel em $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ (ver [13]).

Teorema 1.2 (Schur). *Dado uma matriz $M \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, existem $U \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ unitária e $S \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ triangular superior, tais que $M = U^*SU$.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Os dois lemas a seguir garante a limitação superior de certas integrais por uma constante C; ambos são de suma importância para auxiliar na demonstração de resultados do capítulo 3. Para o próximo resultado, são indicadas como referências [12, 20, 33, 36]. Denotemos por $L^1(\mathbb{R})$ o espaço das funções integravéis sobre $\mathbb{R}$.

Lema 1.1. *Sejam $0 < s < 1$ e $\rho \in L^1(\mathbb{R}) \cap L_0^\infty(\mathbb{R})$ com $\rho(\upsilon) \geq 0$ υ-q.t.p. Então existe uma constante $C(s,\rho) < \infty$ de modo que para todo $\theta \in \mathbb{C}$ tem-se*

$$\int_{supp\rho} \frac{1}{|\upsilon+\theta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \;\leq\; C(s,\rho). \tag{1.5}$$

Demonstração: Primeiramente note que $|\upsilon+\theta| \geq |\upsilon + Re(\theta)|$, $\forall \upsilon \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{C}$. Disto obtemos que para todo $s \in (0,1)$, $|\upsilon+\theta|^{-s} \leq |\upsilon+Re(\theta)|^{-s}$. Agora, para todo $b \in \mathbb{R}$ com $b > 0$, temos

$$\int_{supp\rho} \frac{1}{|\upsilon+\theta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \leq \underbrace{\int_{|\upsilon+\theta|\geq b} |\upsilon+\theta|^{-s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon}_{(i)} + \underbrace{\int_{|\upsilon+\theta|<b} |\upsilon+\theta|^{-s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon}_{(ii)}. \tag{1.6}$$

Para as partes (i) e (ii) do lado direito de (1.6), temos

$$\int_{|\upsilon+\theta|\geq b} |\upsilon+\theta|^{-s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \leq \frac{1}{b^s}\int_{|\upsilon+\theta|\geq b}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \leq \frac{1}{b^s}\int_{supp\rho}\rho(\upsilon)\,d\upsilon = \|\rho\|_1\, b^{-s} \tag{1.7}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{|\upsilon+\theta|<b} |\upsilon+\theta|^{-s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon &\leq \int_{|\upsilon+Re(\theta)|<b} |\upsilon+Re(\theta)|^{-s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \\ &\leq \|\rho\|_\infty \int_{|\upsilon+Re(\theta)|<b} |\upsilon+Re(\theta)|^{-s}\,d\upsilon \\ &= \|\rho\|_\infty \frac{2b^{1-s}}{1-s}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Segue de (1.6), (1.7) e (1.8) que

$$\int_{supp\rho} \frac{1}{|\upsilon+\theta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \leq \|\rho\|_1\, b^{-s} + \|\rho\|_\infty \frac{2b^{1-s}}{1-s}.$$

Fazendo alguns cálculos encontra-se que o valor mínimo da função

$$g(b) = \|\rho\|_1\, b^{-s} + \|\rho\|_\infty \frac{2b^{1-s}}{1-s}$$

é a constante $C(s,\rho) = \left(\frac{2}{s}\right)^s (1-s)^{-1} \|\rho\|_1^{1-s} \|\rho\|_\infty^s$, e portanto obtemos

$$\int_{supp\rho} \frac{1}{|\upsilon+\theta|^s} \rho(\upsilon)\, d\upsilon \leq C(s,\rho),$$

com $C(s,\rho)$ independente de θ. ■

Consideremos uma matriz $M \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que Im $M \geq 0$ ou Im $M \leq 0$, em que Im $M = \frac{M-M^*}{2i}$. O lema a seguir utiliza o Teorema 1.2, o qual garante que M é unitariamente equivalente a uma matriz $S \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ triangular superior, ou seja, $M = U^*SU$ para alguma matriz unitária $U \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Utilizando o fato das matrizes M e S serem unitariamente equivalentes, segue que $(M-\theta I)^{-1} = U^*(S-\theta I)^{-1}U$ e portanto, $\left\|(M-\theta I)^{-1}\right\| = \left\|(S-\theta I)^{-1}\right\|$. Para o próximo resultado são indicadas como referências [4, 19].

Lema 1.2. *Para cada $0 < s < 1$ e $r > 0$, existe uma constante $C(r,s) < \infty$ de modo que*

$$\int_{-r}^{r} \left\|(M-\theta I)^{-1}\right\|^s d\theta \;\leq\; C(r,s), \tag{1.9}$$

para toda matriz $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ de forma que Im $M \geq 0$ ou Im $M \leq 0$.

Demonstração: Vamos assumir sem perda de generalidade que Im $M \geq 0$. Devido ao Teorema 1.2, a matriz $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ é unitariamente equivalente a uma matriz triangular superior $S \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Então, assumindo

$$S = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$$

que implica em

$$(S-\theta I)^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11}-\theta & b_{12} \\ 0 & b_{22}-\theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}-\theta} & -\frac{b_{12}}{(b_{11}-\theta)(b_{22}-\theta)} \\ 0 & \frac{1}{b_{22}-\theta} \end{pmatrix}; \tag{1.10}$$

a inversa existe, pois

$$\det(S-\theta I) = \begin{vmatrix} b_{11}-\theta & b_{12} \\ 0 & b_{22}-\theta \end{vmatrix} = (b_{11}-\theta)(b_{22}-\theta) \neq 0.$$

O objetivo agora é estabelecer uma integral correspondente a (1.9), para o valor absoluto de cada entrada de (1.10) separadamente. Para simplificar, denotamos

$$(S-\theta I)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{b_{11}-\theta} & -\frac{b_{12}}{(b_{11}-\theta)(b_{22}-\theta)} \\ 0 & \frac{1}{b_{22}-\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{pmatrix}$$

e utilizamos

$$\left\| \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{pmatrix} \right\| = \sup_{\|(j,k)\|=1} \left\| \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \right\|, \text{ com } (j,k) \in \mathbb{C}^2,$$

para limitar $\left\| \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{pmatrix} \right\|^s$. Note que

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} \right\|^2 &= \left\| \begin{pmatrix} b_{11}^* j + b_{12}^* k \\ b_{22}^* k \end{pmatrix} \right\|^2 \\
&= |b_{11}^* j + b_{12}^* k|^2 + |b_{22}^* k|^2 \le (|b_{11}^* j| + |b_{12}^* k|)^2 + |b_{22}^* k|^2 \\
&\le |b_{11}^*|^2 |j|^2 + |b_{12}^*|^2 |k|^2 + |b_{11}^*|^2 |j|^2 + |b_{12}^*|^2 |k|^2 + |b_{22}^*|^2 |k|^2 \\
&\le 3 |b_{11}^*|^2 |j|^2 + \left(2 |b_{12}^*|^2 + |b_{22}^*|^2\right) |k|^2 \\
&\le 3 b_0^2 \left(|j|^2 + |k|^2\right),
\end{aligned}$$

onde $b_0 = \max\{|b_{11}^*|, |b_{12}^*|, |b_{22}^*|\}$. Portanto,

$$\left\| \begin{pmatrix} b_{11}^* & b_{12}^* \\ 0 & b_{22}^* \end{pmatrix} \right\|^s \le \left(\sqrt{3} b_0\right)^s = 3^{s/2} \max\{|b_{11}^*|^s, |b_{12}^*|^s, |b_{22}^*|^s\}. \tag{1.11}$$

Integrando ambos os lados de (1.11), temos

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r} \left\|(S - \theta I)^{-1}\right\|^s d\theta &\le 3^{s/2} \int_{-r}^{r} \max\left\{ \frac{1}{|b_{11} - \theta|^s}, \left| \frac{b_{12}}{(b_{11} - \theta)(b_{22} - \theta)} \right|^s, \frac{1}{|b_{22} - \theta|^s} \right\} d\theta \\
&\le 3^{s/2} \int_{-r}^{r} \left(\frac{1}{|b_{11} - \theta|^s} + \left| \frac{b_{12}}{(b_{11} - \theta)(b_{22} - \theta)} \right|^s + \frac{1}{|b_{22} - \theta|^s} \right) d\theta.
\end{aligned} \tag{1.12}$$

O intuito é limitar cada uma das integrais em (1.12). O Lema 1.1 garante a limitação da primeira e da terceira integrais. Vamos trabalhar na limitação do segundo termo.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{b_{12}}{(b_{11} - \theta)(b_{22} - \theta)} \right| &\le \frac{|b_{12}|}{|\mathrm{Im}\,((b_{11} - \theta)(b_{22} - \theta))|} \\
&= \frac{|b_{12}|}{|\mathrm{Im}\ (b_{11} b_{12}) - \theta\ \mathrm{Im} b_{11} - \theta\ \mathrm{Im} b_{22}|} \\
&= \frac{1}{\left| \theta \, \frac{\mathrm{Im}\ b_{11} + \mathrm{Im}\ b_{22}}{|b_{12}|} - \frac{\mathrm{Im}\ (b_{11} b_{22})}{|b_{12}|} \right|}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Como Im $S \ge 0$ e a matriz positiva

$$\text{Im } S = \frac{1}{2i}(S - S^*) = \frac{1}{2i}\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & 0 \\ \overline{b_{12}} & \overline{b_{22}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \text{Im } b_{11} & \frac{b_{12}}{2i} \\ \frac{-\overline{b_{12}}}{2i} & \text{Im } b_{22} \end{pmatrix}$$

tem determinante positivo, temos

$$\det(\text{Im } S) = \begin{vmatrix} \text{Im } b_{11} & \frac{b_{12}}{2i} \\ \frac{-\overline{b_{12}}}{2i} & \text{Im } b_{22} \end{vmatrix} = \text{Im } b_{11}\text{Im } b_{22} - \frac{1}{4}|b_{12}|^2 \geq 0. \tag{1.14}$$

Disto, segue que

$$\left|\frac{\text{Im } b_{11} + \text{Im } b_{22}}{b_{12}}\right|^2 \geq \frac{2\text{Im } b_{11}\text{Im } b_{22}}{|b_{12}|^2} \geq \frac{1}{2}. \tag{1.15}$$

Substituindo (1.15) em (1.13), temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{b_{12}}{(b_{11}-\theta)(b_{22}-\theta)}\right| &\leq \frac{1}{\left|\frac{\theta\text{Im } b_{11}+\text{Im } b_{22}}{|b_{12}|} - \frac{\text{Im } (b_{11}b_{22})}{|b_{12}|}\right|} \\ &= \frac{|b_{12}|}{\left|\text{Im } b_{11} + \text{Im } b_{22}\frac{\theta(\text{Im } b_{11}+\text{Im } b_{22})-\text{Im } (b_{11}b_{22})}{\text{Im } b_{11}+\text{Im } b_{22}}\right|} \\ &= \frac{|b_{12}|}{|\text{Im } b_{11} + \text{Im } b_{22}|}\frac{1}{\left|\theta - \frac{\text{Im } (b_{11}b_{22})}{\text{Im } b_{11}+\text{Im } b_{22}}\right|} \\ &\leq \frac{2^{1/2}}{\left|\theta - \frac{\text{Im } (b_{11}b_{22})}{\text{Im } b_{11}+\text{Im } b_{22}}\right|}. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Agora, substituindo (1.16) em (1.12) e aplicando o Lema 1.1 para cada integral, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-r}^{r}\left\|(S-\theta I)^{-1}\right\|^s d\theta &\leq 3^{s/2}\int_{-r}^{r}\left(\frac{1}{|b_{11}-\theta|^s} + \frac{2^{s/2}}{\left|\theta - \frac{\text{Im } (b_{11}b_{22})}{\text{Im } b_{11}+\text{Im } b_{22}}\right|^s} + \frac{1}{|b_{22}-\theta|^s}\right)d\theta \\ &\leq C(r,s). \end{aligned}$$

Como M é unitariamente equivalente a S, concluímos que

$$\int_{-r}^{r}\left\|(M-\theta I)^{-1}\right\|^s d\theta = \int_{-r}^{r}\left\|(S-\theta I)^{-1}\right\|^s d\theta \leq C(r,s). \qquad \blacksquare$$

Lema 1.3. *Para cada $0 < s < 1$ e para qualquer coleção de números complexos $\{y_n\} \subset \mathbb{C}$ tem-se*

$$\left|\sum_{n=1}^{k} y_n\right|^s \leq \sum_{n=1}^{k} |y_n|^s .$$

Demonstração: A demonstração será feita por indução sobre k. Para $k = 1$ vale a igualdade. Para $k = 2$ temos

$$|y_1 + y_2|^s \leq \frac{|y_1| + |y_2|}{(|y_1| + |y_2|)^{1-s}} = \frac{|y_1|}{(|y_1| + |y_2|)^{1-s}} + \frac{|y_2|}{(|y_1| + |y_2|)^{1-s}} \leq |y_1|^s + |y_2|^s .$$

Suponhamos que a desigualdade seja verdadeira para $k - 1$:

$$\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right|^s \leq \sum_{n=1}^{k-1} |y_n|^s .$$

Então,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{k} y_n\right|^s &\leq \frac{\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right| + |y_k|}{\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right| + |y_k|} \left(\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right| + |y_k|\right)^s \\
&= \frac{\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right|}{\left(\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right| + |y_k|\right)^{1-s}} + \frac{|y_k|}{\left(\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right| + |y_k|\right)^{1-s}} \\
&\leq \frac{\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right|}{\left|\sum_{n=1}^{k-1} y_n\right|^{1-s}} + \frac{|y_k|}{|y_k|^{1-s}} \leq \sum_{n=1}^{k-1} |y_n|^s + |y_k|^s = \sum_{n=1}^{k} |y_n|^s .
\end{aligned}$$

■

Os resultados a seguir serão utilizados no capítulo 4.

Teorema 1.3 (Lusin). *Seja $\tilde{X}$ um espaço localmente compacto de Hausdorff e seja μ uma medida positiva sobre uma σ-algebra $\mathcal{A}$ de $\tilde{X}$ que contém a σ-algebra de Borel de $\tilde{X}$. Suponha que g é uma função complexa e mensurável em $\tilde{X}$ com a propriedade que $g(x) = 0$ se $x \in \tilde{D}$, sendo $\tilde{D} \subset \tilde{X}$ tal que $\mu(\tilde{D}) < \infty$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe $f \in C_c(\tilde{X})$ tal que*

$$\mu\left(\left\{x \in \tilde{X} : g(x) \neq f(x)\right\}\right) \leq \varepsilon.$$

Além disso, f pode ser escolhido de forma

$$\sup_{x\in\tilde{X}} |f(x)| \leq \sup_{x\in\tilde{X}} |g(x)| .$$

Demonstração: Ver [29].

■

Para os próximos dois lemas, são indicadas como referências [10, 13, 29, 33].

Lema 1.4. *Seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *uma função limitada e contínua por partes. Então, para todo* $\upsilon \in \mathbb{R}$ *tem-se*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(E)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE = \frac{1}{2} \left(\lim_{t \to \upsilon^+} g(t) + \lim_{t \to \upsilon^-} g(t) \right).$$

Demonstração: Assumimos que g não é contínua para algum $\upsilon \in \mathbb{R}$ fixo. Suponhamos que não existe qualquer descontinuidade em $[\upsilon - \beta, \upsilon + \beta]$ para $\beta > 0$ pequeno. Definimos J do seguinte modo:

$$\begin{aligned} J &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{g(E)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE - \frac{1}{2} \left(\lim_{t \to \upsilon^+} g(t) + \lim_{t \to \upsilon^-} g(t) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(E)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} - \frac{\frac{1}{2} \left(\lim_{t \to \upsilon^+} g(t) + \lim_{t \to \upsilon^-} g(t) \right)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\upsilon} \frac{g(E) - \lim_{t \to \upsilon^-} g(t)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE + \int_{\upsilon}^{\infty} \frac{g(E) - \lim_{t \to \upsilon^+} g(t)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE \right). \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos a função delta de Dirac:

$$\delta_\epsilon = \frac{\varepsilon}{\pi} \frac{1}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} \text{ e } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon \, dE = 1.$$

Se $J = 0$, obtemos o lema. Agora, decompomos a integração em J usando $\delta \in (0, \beta)$ arbitrário:

$$J = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \left(\left(\int_{-\infty}^{\upsilon - \delta} + \int_{\upsilon - \delta}^{\upsilon} \right) \frac{g(E) - \lim_{t \to \upsilon^-} g(t)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE + \left(\int_{\upsilon}^{\upsilon + \delta} + \int_{\upsilon + \delta}^{\infty} \right) \frac{g(E) - \lim_{t \to \upsilon^+} g(t)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE \right).$$

Vamos denotar as quatro integrais acima, na ordem em que elas ocorrem, por I_1, I_2, I_3, I_4 respectivamente. Como g é uma função limitada, temos

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_{-\infty}^{\upsilon-\delta}\frac{g(E)}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE-\int_{-\infty}^{\upsilon-\delta}\frac{\lim\limits_{t\to\upsilon^-}g(t)}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE\right|\\
&\le \int_{-\infty}^{\upsilon-\delta}\frac{|g(E)|}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE+\left|\lim_{t\to\upsilon^-}g(t)\right|\int_{-\infty}^{\upsilon-\delta}\frac{1}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE\\
&\le \|g\|_\infty\int_{-\infty}^{\upsilon-\delta}\frac{1}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE+\left|\lim_{t\to\upsilon^-}g(t)\right|\int_{-\infty}^{\upsilon-\delta}\frac{1}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE\\
&= \left(\|g\|_\infty+\left|\lim_{t\to\upsilon^-}g(t)\right|\right)\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{\upsilon-\delta}\frac{1}{\left(\frac{\upsilon-E}{\varepsilon}\right)^2+1}dE\\
&= \left(\|g\|_\infty+\left|\lim_{t\to\upsilon^-}g(t)\right|\right)\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)\right). \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Agora, tomando o limite $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon}{\pi}$ em ambos os lados da desigualdade (1.17), obtemos

$$
\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon}{\pi}|I_1|\le\left(\|g\|_\infty+\left|\lim_{t\to\upsilon^-}g(t)\right|\right)\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)\right)=0.
$$

Analogamente, temos $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\varepsilon}{\pi}|I_4|=0$, para todo $\delta\in(0,\beta)$.
Agora, para I_3 temos

$$
\begin{aligned}
|I_3| &= \left|\int_{\upsilon}^{\upsilon+\delta}\frac{g(E)-\lim\limits_{t\to\upsilon^+}g(t)}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE\right|\\
&\le \sup_{E\in(\upsilon,\upsilon+\delta]}\left\{\left|g(E)-\lim_{t\to\upsilon^+}g(t)\right|\right\}\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\int_{\upsilon}^{\upsilon+\delta}\frac{1}{\left(\frac{\upsilon-E}{\varepsilon}\right)^2+1}dE\right|\\
&= \sup_{E\in(\upsilon,\upsilon+\delta]}\left\{\left|g(E)-\lim_{t\to\upsilon^+}g(t)\right|\right\}\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\int_{\upsilon-\delta}^{\upsilon}\frac{g(E)-\lim\limits_{t\to\upsilon^-}g(t)}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE\right|\\
&\le \sup_{E\in[\upsilon-\delta,\upsilon)}\left\{\left|g(E)-\lim_{t\to\upsilon^-}g(t)\right|\right\}\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\int_{\upsilon-\delta}^{\upsilon}\frac{1}{\left(\frac{\upsilon-E}{\varepsilon}\right)^2+1}dE\right|\\
&= \sup_{E\in[\upsilon-\delta,\upsilon)}\left\{\left|g(E)-\lim_{t\to\upsilon^-}g(t)\right|\right\}\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right).
\end{aligned}
$$

Então, temos para $\delta \in (0, \beta)$ arbitrário que

$$|J| \leq \sup_{E\in(\upsilon,\upsilon+\delta]} \left\{ \left| g(E) - \lim_{t\to\upsilon^+} g(t) \right| \right\} + \sup_{E\in[\upsilon-\delta,\upsilon)} \left\{ \left| g(E) - \lim_{t\to\upsilon^-} g(t) \right| \right\}.$$

Como $\delta \in (0, \beta)$ é arbitrário e $\lim\limits_{t\to\upsilon^+} g(t)$ é o limite à direita e $\lim\limits_{t\to\upsilon^-} g(t)$ é o limite à esquerda de g em υ respectivamente, segue que $|J| = 0$. ■

Lema 1.5. *Sejam H um operador auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, $\chi_I(H)$ e $\chi_{\overline{I}}(H)$ os projetores espectrais sobre o intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ e sobre o intervalo fechado $\overline{I} \subset \mathbb{R}$ associados ao operador H, respectivamente. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua e limitada. Então*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \langle \psi, g(H) (\chi_I(H) + \chi_{\overline{I}}(H)) \xi \rangle = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I g(E) \left\langle \psi, (H - E - i\varepsilon)^{-1} (H - E + i\varepsilon)^{-1} \xi \right\rangle dE. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Demonstração: Mostremos o caso em que $\psi = \xi$. O caso onde $\psi \neq \xi$ pode ser demonstrado por polarização. Seja $d\mu_\psi(\upsilon) := \langle \psi, E_\upsilon \psi \rangle$ uma medida de Borel positiva e finita. Seja $\{E_\upsilon\}_{\upsilon\in\mathbb{R}}$ a família espectral associada ao operador H e $d\mu_\psi(\upsilon)$.

Pelo Teorema Espectral [10] e por Fubini, podemos escrever o lado direito de (1.18) como

$$\begin{aligned} R &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I g(E) \left\langle \psi, (H - E - i\varepsilon)^{-1} (H - E + i\varepsilon)^{-1} \psi \right\rangle dE \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I g(E) \left\langle \psi, \left((H - E)^2 + \varepsilon^2 \right)^{-1} \psi \right\rangle dE \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{g(E)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} d\mu_\psi(\upsilon) \right) dE \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\upsilon) \, d\mu_\psi(\upsilon), \end{aligned}$$

onde $f_\varepsilon(\upsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{\overline{I}}(E) g(E)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE$.

Pelo Lema 1.4, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} f_\varepsilon(\upsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\chi_{\overline{I}}(E) g(E)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE = \frac{g(\upsilon)}{2} (\chi_I(\upsilon) + \chi_{\overline{I}}(\upsilon))$$

para todo $\upsilon \in \mathbb{R}$.

Seja $I=(d,e)$. Então, para todos $\varepsilon>0$ e $\upsilon\in\mathbb{R}$, também temos

$$\begin{aligned}
|f_\varepsilon(\upsilon)| &\leq \frac{\varepsilon}{\pi}\int_d^e \frac{|g(E)|}{(\upsilon-E)^2+\varepsilon^2}dE \\
&\leq \frac{\|g\|_\infty}{\pi}\frac{1}{\varepsilon}\int_d^e \frac{1}{\left(\frac{\upsilon-E}{\varepsilon}\right)^2+1}dE \\
&= \frac{\|g\|_\infty}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\upsilon-d}{\varepsilon}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{\upsilon-e}{\varepsilon}\right)\right)\leq \|g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue [29], obtemos

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(\upsilon)\,d\mu_\psi(\upsilon)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} g(\upsilon)\left(\chi_I(\upsilon)+\chi_{\overline{I}}(\upsilon)\right)d\mu_\psi(\upsilon) \\
&= \frac{1}{2}\left\langle \psi, g(H)\left(\chi_I(\upsilon)+\chi_{\overline{I}}(\upsilon)\right)\psi\right\rangle .
\end{aligned}$$

■

Capítulo

2

Propriedades de Localização

Neste capítulo apresentaremos a definição do principal assunto desta dissertação: localização dinâmica para o modelo de Anderson (0.2). Além disso, estamos interessados em estudar as propriedades de localização deste modelo, que podem ser descritas pela localização espectral ou pela localização dinâmica do Hamiltoniano. Como consequência de localização dinâmica, obtém-se que este modelo tem espectro pontual puro em I $\mathbb{P}$-q.t.p. (ver [33, 35]). Para este capítulo foram utilizadas as referências [9, 20, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 35].

2.1 Localização Espectral

O objetivo desta seção é definir localização espectral para o modelo de Anderson, a qual será utilizada na segunda seção deste capítulo. Fixado o parâmetro de desordem λ, denotemos o operador $H_{\omega,\lambda}$ por H_ω.

Definição 2.1. *Dizemos que H_ω exibe localização espectral em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, se H_ω tem espectro pontual puro em I $\mathbb{P}$-q.t.p, isto é, I não contém qualquer espectro contínuo de H_ω, e suas autofunções $\varphi_{\omega,E}$ correspondentes aos autovalores $E \in I$, decaem exponencialmente, isto é,*

$$|\varphi_{\omega,E}\,(n)| \leq C_{\omega,E}\; e^{-a|n|},$$

com $n \in \mathbb{Z}^d$ e $C_{\omega,E} < \infty$, $a = a(E) > 0$ constantes.

O mecanismo fisíco de localização é a supressão de encapsulamento ao longo de grandes distâncias, devido ao efeito da decoerência induzido pelo potencial aleatório. O conceito de localização espectral é muitas vezes utilizado na matemática, mas não na física. Os físicos usam o conceito de localização dinâmica com mais freqüência, uma vez que este nos dá uma intuição física direta. Na próxima seção apresentaremos um resultado que garante a ausência de transporte de elétrons, a partir do fenômeno localização dinâmica.

2.2 Localização Dinâmica

Nesta seção temos como objetivo introduzir o conceito de localização dinâmica. Partindo do pressuposto de que H_ω exibe localização dinâmica em I, mostra-se que os momentos do operador posição Z ficam limitados no tempo, isto é, garante-se a ausência de transporte quântico. No final desta seção , utilizaremos o teorema de RAGE [9], que exclui o espectro contínuo, para apresentarmos uma demonstração de que localização dinâmica implica em espectro pontual puro em I $\mathbb{P}$-q.t.p [33, 35].

Como motivação na introdução, foi apresentado o modelo de Anderson (0.2) e a solução da equação de Schrödinger dependente do tempo (0.3), os quais serão utilizados na definição abaixo.

Definição 2.2. *Dizemos que H_ω exibe localização dinâmica em I se existem constantes $C < \infty$ e $\nu > 0$ tais que*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I\left(H_\omega\right)e_k\right\rangle\right|\right) \leq Ce^{-\nu|j-k|} \tag{2.1}$$

para todos $j,k \in \mathbb{Z}^d$, em que $\{e_j\}_{j\in\mathbb{Z}^d}$ é a base canônica de $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ e $\chi_I\left(H_\omega\right)$ denota o projetor espectral de H_ω sobre o intervalo I.

A seguir será apresentado um resultado, cujo objetivo é garantir que os momentos do operador posição Z fiquem limitados no tempo.

Proposição 2.1. *Se H_ω exibe localização dinâmica em I, então os momentos do operador posição são limitados, isto é, para todo $p > 0$ e todo $\psi \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ de suporte finito,*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\left\||Z|^p e^{-itH_\omega}\chi_I\left(H_\omega\right)\psi\right\| < \infty \quad \mathbb{P}-q.t.p. \ , \tag{2.2}$$

em que $|Z|$ é o operador posição definido por $\left(|Z|\varphi\right)(n) = |n|\,\varphi(n)$.

Demonstração: Assumimos (2.1) e que $\psi(k) = 0$ para $|k| > R$. Usando a identidade de Parseval (na 1ª igualdade), o fato que $|Z|^p\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^p\left\langle e_k,\varphi\right\rangle e_k$ (na 2ª igualdade) e a desigualdade de Cauchy-Schwarz (no último passo), temos

$$\begin{aligned}
\left\||Z|^p e^{-itH_\omega}\chi_I\left(H_\omega\right)\psi\right\|^2 &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\left|\left\langle e_j, |Z|^p e^{-itH_\omega}\chi_I\left(H_\omega\right)\psi\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\left|\left\langle e_j, \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^p\left\langle e_k, e^{-itH_\omega}\chi_I\left(H_\omega\right)\psi\right\rangle e_k\right\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^p\left\langle e_k, e^{-itH_\omega}\chi_I\left(H_\omega\right)\psi\right\rangle\left\langle e_j, e_k\right\rangle\right|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left| |j|^p \left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\psi\right\rangle \right|^2 \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |j|^{2p} \left| \left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega) \sum_{|k|\le R} \psi(k)\, e_k \right\rangle \right|^2 \\
&\le \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{|k|\le R} |j|^{2p} \left|\left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\, e_k\right\rangle\right|^2 \|\psi\|^2 . \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\left|\left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\, e_k\right\rangle\right| \le \|e_j\| \left\|e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\, e_k\right\| \le 1 \ ,
$$

pois e^{-itH_ω} é unitário. Tomando o supremo e o valor esperado $\mathbb{E}(\cdot)$ em ambos os lados de (2.3), obtemos

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left\| |Z|^p\, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\psi \right\|^2\right) \\
\le\ & \mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{|k|\le R} |j|^{2p} \left|\left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\, e_k\right\rangle\right| \|\psi\|^2\right) \\
=\ & \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{|k|\le R} |j|^{2p}\, \mathbb{E}\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\, e_k\right\rangle\right|\right) \|\psi\|^2 \\
\le\ & C \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\sum_{|k|\le R} |j|^{2p}\, e^{-\nu|j-k|} \|\psi\|^2 \\
\le\ & C\, \|\psi\|^2\, c(R) e^{\nu R} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} |j|^{2p}\, e^{-\nu|j|} < \infty
\end{aligned}
$$

onde $c(R) = \#\{k \in \mathbb{Z}^d : |k| \le R\}$. Isto implica a afirmação q.t.p. em (2.2). ■

Até então, foi definido o modelo e as propriedades de localização de Anderson, tais como localização espectral e localização dinâmica. O resultado a seguir garante que localização dinâmica não é apenas fisicamente mais interessante do que localização espectral, é também matematicamente uma propriedade mais forte.

Proposição 2.2. *Suponha que H_ω exibe localização dinâmica na forma* (2.1) *em um intervalo aberto I. Então H_ω tem espectro pontual puro em I $\mathbb{P}-q.t.p.$*

Demonstração: Para um operador de Schrödinger discreto $H = H_0 + V$ sobre $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$, seja $P_{cont}(H)$ a projeção sobre seu subespaço espectral contínuo. Usando o Teorema 1.1

de RAGE, para todo $\psi \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$, temos

$$\|P_{cont}(H)\,\chi_I(H)\,\psi\|^2 = \lim_{R\to\infty}\lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{dt}{T}\left\|\chi_{\{|j|\geq R\}}e^{-itH}\chi_I(H)\,\psi\right\|^2. \qquad (2.4)$$

Se ψ tem suporte finito, digamos supp $\psi = \overline{\{t\in\mathbb{R} : \psi(t)\neq 0\}} \subset \{|k|\leq r\}$, então

$$\begin{aligned}
\left\|\chi_{\{|j|\geq R\}}e^{-itH}\chi_I(H)\,\psi\right\|^2 &\leq \left\|\chi_{\{|j|\geq R\}}e^{-itH}\chi_I(H)\,\chi_{\{|k|\leq r\}}\right\|^2\|\psi\|^2 \\
&\leq \left\|\chi_{\{|j|\geq R\}}e^{-itH}\chi_I(H)\,\chi_{\{|k|\leq r\}}\right\|\|\psi\|^2 \\
&= \left\|\sum_{|j|\geq R}\langle e_j,.\rangle\, e_j\; e^{-itH}\chi_I(H)\sum_{|k|\leq r}\langle e_k,.\rangle\, e_k\right\|\|\psi\|^2 \\
&= \sup_{\|\xi\|=1}\left\|\sum_{|j|\geq R}\left\langle e_j, e^{-itH}\chi_I(H)\sum_{|k|\leq r}\langle e_k,\xi\rangle\, e_k\right\rangle e_j\right\|\|\psi\|^2 \\
&= \sup_{\|\xi\|=1}\left\|\sum_{|j|\geq R}\sum_{|k|\leq r}\langle e_k,\xi\rangle\left\langle e_j, e^{-itH}\chi_I(H)\,e_k\right\rangle e_j\right\|\|\psi\|^2 \\
&\leq \sup_{\|\xi\|=1}\sum_{|j|\geq R}\sum_{|k|\leq r}\|e_k\|\,\|\xi\|\left|\left\langle e_j, e^{-itH}\chi_I(H)\,e_k\right\rangle\right|\|e_j\|\,\|\psi\|^2 \\
&= \sum_{|j|\geq R,|k|\leq r}\left|\left\langle e_j, e^{-itH}\chi_I(H)\,e_k\right\rangle\right|\|\psi\|^2, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

onde na segunda passagem utilizou-se $\left\|\chi_{\{|j|\geq R\}}e^{-itH}\chi_I(H)\,\chi_{\{|k|\leq r\}}\right\| \leq 1$.

Agora, substituindo (2.5) em (2.4) e tomando o valor esperado $\mathbb{E}(\cdot)$, depois usando o lema de Fatou e o teorema de Fubini [29], temos

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\|P_{cont}(H_\omega)\,\chi_I(H_\omega)\,\psi\|^2\right) \\
\leq\;& \mathbb{E}\left(\lim_{R\to\infty}\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{dt}{T}\sum_{|j|\geq R,|k|\leq r}\left|\left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\,e_k\right\rangle\right|\|\psi\|^2\right) \\
\leq\;& \lim_{R\to\infty}\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{dt}{T}\sum_{|j|\geq R,|k|\leq r}\mathbb{E}\left(\left|\left\langle e_j, e^{-itH_\omega}\chi_I(H_\omega)\,e_k\right\rangle\right|\right)\|\psi\|^2 \\
\leq\;& \lim_{R\to\infty}\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{dt}{T}\sum_{|j|\geq R,|k|\leq r}Ce^{-\nu|j-k|}\|\psi\|^2 \\
=\;& C\|\psi\|^2\lim_{R\to\infty}\sum_{|j|\geq R,|k|\leq r}e^{-\nu(j-k)} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que $P_{cont}(H_\omega)\,\chi_I(H_\omega)\,\psi = 0$ $\mathbb{P}-q.t.p.$ e para todo ψ de suporte finito. Estes últimos formam um conjunto denso em $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ e então $P_{cont}(H_\omega)\,\chi_I(H_\omega) = 0$ $\mathbb{P}-q.t.p.$, o que significa que o espectro de H_ω é pontual puro em I $\mathbb{P}-q.t.p.$ ■

A proposição acima garante que a existência de localização dinâmica no intervalo aberto I exclui o espectro contínuo, ou seja, os estados de dispersão, e assim obtém-se espectro pontual puro $\mathbb{P}$-q.t.p em I. Além disso, considere os dois teoremas abaixo:

Teorema 2.1. *Sejam $H_{\omega,\lambda}$ o modelo de Anderson* (0.2) *e μ_λ a medida de probabilidade de Borel das variáveis aleatórias $\lambda\omega_n$. Considere as seguintes afirmações:*

1. *Para ω q.t.p, $H_{\omega,\lambda}$ tem espectro pontual puro no intervalo (a,b).*

2. *Para $E \in (a,b)$ q.t.p e ω q.t.p, tem-se*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left| G_{\omega,\lambda}(n,0;E+i\varepsilon) \right|^2 \right] < \infty.$$

Se μ_λ é absolutamente contínua, então (1) implica em (2).

Demonstração: Ver [31]. ■

Teorema 2.2. *Sejam $H_{\omega,\lambda}$ o modelo de Anderson* (0.2). *Suponha que μ_λ é absolutamente contínua e que, para os pares (ω, E) q.t.p ($\omega \in \Omega$ e $E \in (a,b)$), tem-se que para $0 < \varepsilon < 1$*

$$\left| G_{\omega,\lambda}(n,0;E+i\varepsilon) \right| \leq C_{\omega,E} e^{-a|n|}.$$

Então, com probabilidade 1, as correspondentes autofunções satisfazem

$$\left| \varphi_{\omega,E}(n) \right| \leq D_{\omega,E} e^{-a|n|}.$$

Demonstração: Ver [31]. ■

Segue da Proposição 2.2 e dos Teoremas 2.1 e 2.2 que localização dinâmica implica em localização espectral. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Foi mostrado em [30] que espectro pontual puro implica em ausência de movimento balistíco, isto é,

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\left\| |Z|^2 e^{-itH_\omega} \chi_I(H_\omega) \psi \right\|}{t^2} = 0$$

para todas as condições iniciais ψ de suporte compacto, uma vez que o espectro de I é pontual puro.

Existe um exemplo onde $\left\| |Z|^2 e^{-itH_\omega} \chi_I(H_\omega) \psi \right\|$ pode exibir um comportamento que é arbitrariamente próximo ao movimento balistíco, mesmo se o operador exibe localização espectral [27, 28].

Isto indica que localização espectral não é tão forte como localização dinâmica. A principal causa é que o operador H_ω tendo somente espectro pontual puro, a constante $C_{\omega,E}$ na localização espectral pode crescer arbitrariamente em E e os autovetores podem ser estendidos sobre escalas de comprimento arbitrariamente grandes, o que causa um transporte de elétrons arbitrariamente próximo ao movimento balistíco (ver [20]).

Quando se pensa em "localização", geralmente se pensa em autovetores próprios sendo localizados, pelo menos aproximadamente, dentro de uma escala típica. Se as constantes $C_{\omega,E}$ crescem arbitrariamente com a mudança de E, isso significa que os autovetores podem ser estendidos arbitrariamente sobre grandes escalas de comprimento. Em [28] mostra-se que autovetores semi-uniformemente localizados (SULE) e localização dinâmica estão relacionados. A condição SULE significa que existem sítios $n_{\omega,E}$ e $A > 0$ de modo que para cada $\varepsilon > 0$, existem constantes $C_{\omega,\varepsilon}$ para as quais

$$|\varphi_{\omega,E}(n)| \leq C_{\omega,\varepsilon} e^{\varepsilon\left|n_{\omega,E}\right|} e^{-A\left|n-n_{\omega,E}\right|}. \tag{2.6}$$

A desigualdade acima afirma que as constantes $C_{\omega,E}$ da definição 2.1 crescem a uma taxa inferior a distância exponencial de $n_{\omega,E}$ a origem. Autovetores semi-uniformemente localizados estão intimamente relacionados a localização dinâmica semi-uniforme (SUDL):

$$\sup_t \left|e^{-itH_\omega}\psi(n,l)\right| \leq \widetilde{C}_{\omega,E} e^{\varepsilon|l|} e^{-\widetilde{A}|n-l|}. \tag{2.7}$$

Mostra-se que (2.6) implica em (2.7) com A arbitrariamente próximo de $\widetilde{A}$, e se H_ω tem autovalores simples, então (2.7) implica em (2.6) com $A = \frac{1}{2}\widetilde{A}$ (ver [28]). A desigualdade (2.7) é suficiente para mostrar que o segundo momento dinâmico do operador posição $\langle |Z|^2(t)\rangle$ (ou qualquer outro momento positivo de $|Z|$) é limitado. Por argumentos de probabilidade, (2.7) pode ser dado implicitamente por

$$\mathbb{E}\left(\sup_t \left|e^{-itH_\omega}\psi(n,l)\right|\right) \leq Ce^{-\widetilde{A}|n-l|}.$$

Capítulo

3

Método dos Momentos Fracionários

Neste capítulo o nosso objetivo principal é apresentar a demonstração do Teorema 0.1, enunciado na introdução, que estabelece o decaimento exponencial dos momentos fracionários da função de Green. Para sua demonstração, serão utilizados dois resultados importantes: os Lemas 3.1 e 3.2. Na seção 3.2 apresentamos um resultado que relaciona o segundo momento com os momentos fracionários da função de Green. Neste capítulo foram utilizadas as referências [14, 18, 22, 32, 33, 35, 36].

3.1 Momentos Fracionários da Função de Green

O objetivo central desta seção é estudar o decaimento exponencial da função de Green através do método dos momentos fracionários. A fim de garantir localização dinâmica para o modelo de Anderson, o primeiro passo é a demonstração do Lema 3.1 (veja também [32, 33, 35, 36]). Em seguida, discutiremos o lema 3.2 (veja [18, 32]) e, com esses resultados, finalmente garantimos o decaimento exponencial da função de Green.

A idéia subjacente do lema a seguir deixará explícita a importância do método dos momentos fracionários aplicado à função de Green, para obtenção da localização dinâmica.

Denotemos por $B(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores lineares limitados de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$.

Lema 3.1. *Existe uma constante* $C_1 = C_1(s, \rho) < \infty$ *tal que*

$$\mathbb{E}_{j,k}\left(|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)|^s\right) \leq C_1 \lambda^{-s} \tag{3.1}$$

para quaisquer $j, k \in \mathbb{Z}^d$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *e* $\lambda > 0$, *onde*

$$\mathbb{E}_{j,k}(\cdots) = \int\int \cdots \ \rho(\omega_j)d\omega_j \ \rho(\omega_k)d\omega_k$$

é a esperança condicional com $(\omega_u)_{u\in\mathbb{Z}^d\setminus\{j,k\}}$ *fixado.*

Observação 3.1. *Utilizando as propriedades do valor esperado* $\mathbb{E}(\cdot)$ *na estimativa* (3.1) *(veja [22]), temos*

$$\mathbb{E}\left(|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)|^s\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_{j,k}\left(|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)|^s\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(C_1\lambda^{-s}\right) = C_1\lambda^{-s}.$$

Demonstração: A demonstração do lema 3.1 será dividida em dois casos: $j = k$ e $j \neq k$. Primeiramente, será feita para o caso $j = k$, que demonstra a simplicidade da idéia fundamental do método dos momentos fracionários.

Para $j \in \mathbb{Z}^d$ fixado, escrevemos $\omega = (\hat{\omega}, \omega_j)$ onde $\hat{\omega} = (\omega_u)_{u \in \mathbb{Z}^d \setminus \{j\}}$. Seja $P_{e_j} := \langle e_j, \cdot\rangle e_j$ a projeção ortogonal sobre o subespaço gerado por e_j. Podemos separar ω_j e $\hat{\omega}$, e reescrever $H_{\omega,\lambda}$ como

$$H_{\omega,\lambda} = H_{\hat{\omega},\lambda} + \lambda\omega_j P_{e_j}. \tag{3.2}$$

Agora, seja $z \in \rho(H_{\omega,\lambda}) \cap \rho(H_{\hat{\omega},\lambda})$. Temos que $H_{\omega,\lambda}, H_{\hat{\omega},\lambda} \in B\left(\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)\right)$ e denotemos $(H_{\omega,\lambda})_z = (H_{\omega,\lambda} - z)$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
& (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} - (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} \\
= \; & (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} (H_{\omega,\lambda})_z (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} - (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} (H_{\hat{\omega},\lambda})_z (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} \\
= \; & (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} \left[(H_{\omega,\lambda})_z - (H_{\hat{\omega},\lambda})_z\right] (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} \\
= \; & (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} (H_{\omega,\lambda} - H_{\hat{\omega},\lambda}) (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} \\
= \; & \lambda\omega_j (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} P_{e_j} (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1}
\end{aligned}$$

onde na última passagem usamos $H_{\omega,\lambda} - H_{\hat{\omega},\lambda} = \lambda\omega_j P_{e_j}$, fato que se segue de (3.2). Portanto, temos a identidade do resolvente

$$(H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} = (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} - \lambda\omega_j (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} P_{e_j} (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1}. \tag{3.3}$$

Tomando os elementos de matriz, podemos concluir de (3.3) para as correspondentes funções de Green diagonais que

$$\begin{aligned}
G_{\omega,\lambda}(j,j;z) &= \left\langle e_{j,} (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} e_j \right\rangle \\
&= \left\langle e_{j,} (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} e_j \right\rangle - \lambda\omega_j \left\langle e_{j,} (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} P_{e_j} (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} e_j \right\rangle \\
&= \left\langle e_{j,} (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} e_j \right\rangle - \lambda\omega_j \left\langle e_{j,} (H_{\hat{\omega},\lambda} - z)^{-1} \left\langle e_j, (H_{\omega,\lambda} - z)^{-1} e_j \right\rangle e_j \right\rangle \\
&= G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) - \lambda\omega_j G_{\omega,\lambda}(j,j;z)\, G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z), \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
G_{\omega,\lambda}(j,j;z)+\lambda\omega_j G_{\omega,\lambda}(j,j;z)\,G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) &= G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)\\
\Rightarrow\; G_{\omega,\lambda}(j,j;z)\left[1+\lambda\omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)\right] &= G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)\\
\Rightarrow\; G_{\omega,\lambda}(j,j;z) &= \frac{G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)}{1+\lambda\omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)}\ ,
\end{aligned}$$

donde

$$G_{\omega,\lambda}(j,j;z)=\frac{1}{a+\lambda\omega_j}\quad \text{com}\quad a=\frac{1}{G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)}. \tag{3.5}$$

Note que a relação (3.5) está bem definida, pois a função de Green $G_{\omega,\lambda}(j,j;z)$ associada ao operador $H_{\omega,\lambda}$, é um caso particular de função Herglotz, a qual satisfaz a propriedade Im $G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)/\text{Im } z>0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\overline{G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)} &= \overline{\left\langle e_j,(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}e_j\right\rangle}=\left\langle (H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}e_j,e_j\right\rangle\\
&= \left\langle e_j,\left[(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}\right]^{*}e_j\right\rangle=\left\langle e_j,\left[(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{*}\right]^{-1}e_j\right\rangle\\
&= \left\langle e_j,(H_{\hat{\omega},\lambda}-\overline{z})^{-1}e_j\right\rangle=G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;\overline{z}).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Além disso, para $z,\overline{z}\in\rho(H_{\hat{\omega},\lambda})$ temos, pela 1ª identidade do resolvente [10],

$$(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}-(H_{\hat{\omega},\lambda}-\overline{z})^{-1}=(z-\overline{z})\,(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}(H_{\hat{\omega},\lambda}-\overline{z})^{-1}. \tag{3.7}$$

Segue de (3.6) e (3.7) que

$$\begin{aligned}
\text{Im } G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) &= \frac{1}{2i}\left(G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)-\overline{G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\left\langle e_j,(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}e_j\right\rangle-\left\langle e_j,(H_{\hat{\omega},\lambda}-\overline{z})^{-1}e_j\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\left\langle e_j,(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}-(H_{\hat{\omega},\lambda}-\overline{z})^{-1}e_j\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left(\left\langle e_j,(z-\overline{z})\,(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}(H_{\hat{\omega},\lambda}-\overline{z})^{-1}e_j\right\rangle\right)\\
&= \text{Im } z\left(\left\langle\left[(H_{\hat{\omega},\lambda}-\overline{z})^{-1}\right]^{*}e_j,(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}e_j\right\rangle\right)\\
&= \text{Im } z\left(\left\langle(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}e_j,(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}e_j\right\rangle\right)\\
&= \underbrace{\text{Im } z}_{>0}\underbrace{\left\|(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}e_j\right\|^{2}}_{>0}>0.
\end{aligned}$$

Logo, $\frac{\text{Im } G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)}{\text{Im } z}>0$ e (3.5) está bem definido.

O fato importante é que a é um número complexo que não depende de ω_j. Assim, escrevendo $\mathbb{E}_j(\cdots) := \int \cdots \rho(\omega_j)\, d\omega_j$ e usando (3.5), segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_j\left(|G_{\omega,\lambda}(j,j;z)|^s\right) &= \int_{supp\rho} |G_{\omega,\lambda}(j,j;z)|^s \rho(\omega_j)\, d\omega_j \\
&= \int_{supp\rho} \left|\frac{1}{a+\lambda\omega_j}\right|^s \rho(\omega_j)\, d\omega_j \\
&= \frac{1}{\lambda^s}\int_{supp\rho} \left|\frac{1}{\omega_j+\frac{a}{\lambda}}\right|^s \rho(\omega_j)\, d\omega_j \\
&\leq \frac{1}{\lambda^s} C(s,\rho)
\end{aligned}$$

com $C(s,\rho)$ independente de λ e a, e então independente de $\hat{\omega}$, z e j. Na última passagem tomamos em particular $v = a/\lambda$ e aplicamos o Lema 1.1.

Façamos agora a demonstração de (3.1) para $j \neq k$, baseando-se na mesma idéia, substituindo os argumentos de pertubação de posto 1 acima por argumentos de pertubação de posto 2. Escrevemos $\omega = (\hat{\omega}, \omega_j, \omega_k)$, $P = P_{e_j} + P_{e_k}$ e

$$H_{\omega,\lambda} = H_{\hat{\omega},\lambda} + \lambda\omega_j P_{e_j} + \lambda\omega_k P_{e_k}. \tag{3.8}$$

De modo análogo a (3.3) e por (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
(H_{\omega,\lambda}-z)^{-1} &= (H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1} - \lambda\omega_j (H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1} P_{e_j} (H_{\omega,\lambda}-z)^{-1} \\
&\quad -\lambda\omega_k (H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1} P_{e_k} (H_{\omega,\lambda}-z)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ou

$$(H_{\omega,\lambda}-z)^{-1} = (H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1} - (H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}\left(\lambda\omega_j P_{e_j} + \lambda\omega_k P_{e_k}\right)(H_{\omega,\lambda}-z)^{-1}. \tag{3.10}$$

Aplicando o produto interno em ambos os lados de (3.9), obtemos a identidade para a função de Green $G_{\omega,\lambda}(j,k;z)$ de modo análogo a 3.4, dada por

$$G_{\omega,\lambda}(j,k;z) = G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) - \lambda\omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z)\, G_{\omega,\lambda}(j,j;z) - \lambda\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z)\, G_{\omega,\lambda}(j,k;z). \tag{3.11}$$

Aplicando o operador P em ambos os lados de (3.10), temos

$$\begin{aligned}
& P(H_{\omega,\lambda}-z)^{-1} P \\
= \; & P(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1} P - P\left[(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1}\left(\lambda\omega_j P_{e_j} + \lambda\omega_k P_{e_k}\right)(H_{\omega,\lambda}-z)^{-1}\right] P \\
= \; & P(H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1} P - \lambda P (H_{\hat{\omega},\lambda}-z)^{-1} P\left(\omega_j P_{e_j} + \omega_k P_{e_k}\right) P (H_{\omega,\lambda}-z)^{-1} P.
\end{aligned}$$

Agora, sejam $Q = P\left(H_{\omega,\lambda} - z\right)^{-1} P$ e $\hat{Q} = P\left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z\right)^{-1} P$, os quais podem ser representados por matrizes do espaço $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ (que continuamos denotando por Q e $\hat{Q}$) dadas por

$$Q = \begin{pmatrix} G_{\omega,\lambda}(j,j;z) & G_{\omega,\lambda}(j,k;z) \\ G_{\omega,\lambda}(k,j;z) & G_{\omega,\lambda}(k,k;z) \end{pmatrix}, \ \hat{Q} = \begin{pmatrix} G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) \\ G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) \end{pmatrix}.$$

Basta observar que os elementos das matrizes Q e $\hat{Q}$ são dados por:

$$\begin{aligned} G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) &= \left\langle e_j, \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z\right)^{-1} e_k \right\rangle = \left\langle Pe_j, \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z\right)^{-1} Pe_k \right\rangle \\ &= \left\langle e_j, P\left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z\right)^{-1} Pe_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$Q = \hat{Q} - \lambda \hat{Q} \begin{pmatrix} \hat{\omega}_j & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_k \end{pmatrix} Q.$$

De fato,

$$\begin{aligned} &\hat{Q} - \lambda \hat{Q} \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} Q \\ = &\begin{pmatrix} G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) \\ G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) \\ G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{\omega,\lambda}(j,j;z) & G_{\omega,\lambda}(j,k;z) \\ G_{\omega,\lambda}(k,j;z) & G_{\omega,\lambda}(k,k;z) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) \\ G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) & G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) \end{pmatrix} \\ &-\lambda \begin{pmatrix} \omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,j;z) + & \omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,k;z) + \\ +\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,j;z) & +\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,k;z) \\ \omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,j;z) + & \omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,k;z) + \\ +\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,j;z) & +\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,k;z) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

com

$G_{11} = G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) - \lambda\omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,j;z) - \lambda\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,j;z)$,

$G_{12} = G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) - \lambda\omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,k;z) - \lambda\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,k;z)$,

$G_{21} = G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) - \lambda\omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,j;z) - \lambda\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,j;z)$,

$G_{22} = G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) - \lambda\omega_j G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z) G_{\omega,\lambda}(j,k;z) - \lambda\omega_k G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z) G_{\omega,\lambda}(k,k;z)$.

Comparando G_{11}, G_{12}, G_{21} e G_{22} com a identidade da função de Green em (3.11), obtemos

$$Q = \hat{Q} - \lambda \hat{Q} \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} Q \;\Rightarrow\; \hat{Q} = \left(I + \lambda \hat{Q} \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right) Q. \tag{3.12}$$

Aplicando $\left(I + \lambda \hat{Q} \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right)^{-1}$ em ambos os lados de (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} Q &= \left(I + \lambda \hat{Q} \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right)^{-1} \hat{Q} = \left(\hat{Q}^{-1} \left(I + \lambda \hat{Q} \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\hat{Q}^{-1} + \lambda \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto

$$P \left(H_{\omega,\lambda} - z \right)^{-1} P = \left(V + \lambda \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right)^{-1}, \tag{3.13}$$

onde $V = \hat{Q}^{-1} = \left(P \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} P \right)^{-1}$. Isto é um caso especial da fórmula de Krein [1] que caracteriza o resolvente de pertubações de posto finito de operadores auto-adjuntos.

Utilizando a 1ª identidade do resolvente (3.7) e para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Im } \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} &= \frac{1}{2i} \left[\left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} - \overline{\left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1}} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} - \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\left(z - \overline{z} \right) \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} \right] \\ &= \text{Im } z \left[\left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Note que a matriz V é independente de ω_j e ω_k. Além disso, verifica-se que $\text{Im } V = \frac{1}{2i} \left(V - V^* \right) < 0$ se $\text{Im } z > 0$ e $\text{Im } V = \frac{1}{2i} \left(V - V^* \right) > 0$ se $\text{Im } z < 0$. De fato, utilizando a 1ª identidade do resolvente (3.7) e a identidade acima (3.14), obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\text{Im } V}{\text{Im } z} &= \frac{1}{\text{Im } z} \frac{V^* V^{-1} V - V^* \left(V^* \right)^{-1} V}{2i} \\ &= \frac{1}{\text{Im } z} \frac{V^* \left[\left(P \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} P \right)^{-1} \right]^{-1} V - V^* \left[\left(P \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} P \right)^{-1} \right]^{-1} V}{2i} \\ &= \frac{1}{\text{Im } z} \frac{V^* P \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} P V - V^* P \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} P V}{2i} \\ &= \frac{1}{\text{Im } z} \frac{V^* P \left[\left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} - \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} \right] P V}{2i} \\ &= \frac{1}{\text{Im } z} \frac{V^* P \left[\left(z - \overline{z} \right) \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} \right] P V}{2i} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathrm{Im}\ z} V^* P \left[\mathrm{Im}\ z \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - \overline{z} \right)^{-1} \right] PV \\
&= \frac{V^* P \ \mathrm{Im}\ \left(H_{\hat{\omega},\lambda} - z \right)^{-1} PV}{\mathrm{Im}\ z} > 0,
\end{aligned}
$$

pois $P, V > 0$ e $\frac{\mathrm{Im}\ \left(H_{\hat{\omega},\lambda}-z\right)^{-1}}{\mathrm{Im}\ z} > 0$.

Observe que $G_{\omega,\lambda}(j,k;z)$ é um elemento da entrada superior direita de $P\left(H_{\omega,\lambda}-z\right)^{-1}P$, ou seja, $G_{\omega,\lambda}(j,k;z) = \left\langle e_j, P\left(H_{\omega,\lambda}-z\right)^{-1} Pe_k \right\rangle$. Utilizando (3.13) e o fato acima, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{j,k}\left(\left|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)\right|^s\right) &= \mathbb{E}_{j,k}\left(\left| \left\langle e_j, P\left(H_{\omega,\lambda}-z\right)^{-1} Pe_k \right\rangle \right|^s \right) \\
&\leq \mathbb{E}_{j,k}\left(\left\| P\left(H_{\omega,\lambda}-z\right)^{-1} P \right\|^s \right) \\
&= \mathbb{E}_{j,k}\left(\left\| \left(V + \lambda \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|^s \right) \\
&= \lambda^{-s}\mathbb{E}_{j,k}\left(\left\| \left(-\frac{V}{\lambda} - \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|^s \right) \\
&\leq \frac{1}{\lambda^s}\left\|\rho\right\|_\infty^2 \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} \left\| \left(-\frac{V}{\lambda} - \begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|^s d\omega_j d\omega_k,
\end{aligned}
$$

onde $[-r,r]$ é um intervalo contendo supp ρ. Na integral dupla façamos a mudança de variavéis $u = \frac{1}{2}\left(\omega_j + \omega_k\right)$ e $v = \frac{1}{2}\left(\omega_j - \omega_k\right)$, que nos dá o fator Jacobiano $\left|\frac{\partial(\omega_j,\omega_k)}{\partial(u,v)}\right| = 2$. Como $\left(\omega_j,\omega_k\right) \in [-r,r]^2$ implica $(u,v) \in [-r,r]^2$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{j,k}\left(\left|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)\right|^s\right) &\leq \frac{2\left\|\rho\right\|_\infty^2}{\lambda^s} \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} \left\| \left(-\frac{V}{\lambda} - \begin{pmatrix} u+v & 0 \\ 0 & u-v \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\|^s du\ dv \\
&= \frac{2\left\|\rho\right\|_\infty^2}{\lambda^s} \int_{-r}^{r}\int_{-r}^{r} \left\| \left(-\frac{V}{\lambda} + \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} - uI \right)^{-1} \right\|^s du\ dv \\
&\leq \frac{2\left\|\rho\right\|_\infty^2}{\lambda^s} \int_{-r}^{r} C(r,s)\, dv = \frac{4r\left\|\rho\right\|_\infty^2}{\lambda^s} C(r,s) = \frac{C(s,\rho)}{\lambda^s}. \quad (3.15)
\end{aligned}
$$

Na terceira passagem da estimativa (3.15) acima, aplicamos o Lema 1.2 para a matriz

$$
M = -\frac{1}{\lambda}V + \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}
$$

pois esta matriz M tem parte imaginária positiva ou negativa.

■

A idéia do próximo resultado (ver [18]) é obter uma limitação uniforme em β e η para um quociente de duas integrais, com o intuito de desacoplá-las; isto é possível pois quando $|\beta|$ e $|\eta|$ tornam-se grandes, o lado esquerdo de (3.16) tem limite finito. Além disso, as duas integrais do lado esquerdo de (3.16) são funções contínuas de β e η, não se anulam e nem divergem. Este resultado será usado na demonstração do Teorema 0.1.

Lema 3.2. *Seja* $0 < s < 1$. *Para uma função* $\rho \in L_0^\infty(\mathbb{R})$, *existe uma constante* $C_2 < \infty$ *tal que*

$$\frac{\int \frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon}{\int \frac{|\upsilon-\eta|^s}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon} \leq C_2 \tag{3.16}$$

uniformemente em $\eta, \beta \in \mathbb{C}$.

Demonstração: Primeiramente, observe que

$$\frac{\int \frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon}{\int \frac{|\upsilon-\eta|^s}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon} \leq C_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\int \frac{|\upsilon-\eta|^s}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon}{\int \frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon} \geq \tilde{C}_2 \ ,$$

com $C_2, \tilde{C}_2$ constantes. Para demonstrarmos o lema, vamos mostrar a desigualdade do lado direito da equivalência acima. Denotemos por N o numerador e por D o denominador do quociente que desejamos obter a limitação uniforme inferior.

Podemos assumir que $\eta \in \mathbb{R}$, pois em (3.16) a integral do denominador torna-se menor se substituírmos η por sua parte real $Re(\eta)$. Sem perda de generalidade suponhamos $\eta = 0$ e que $\|\rho\|_\infty = \|\rho\|_1 = 1$. Faremos a demonstração nos dois casos seguintes: $(i)\int_{|\upsilon|\geq|\beta|}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \geq \frac{1}{2}$ e $(ii)\int_{|\upsilon|<|\beta|}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \geq \frac{1}{2}$. Com efeito,

(i) Para todos $\beta \in \mathbb{C}$ e $\upsilon \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} N &= \int \frac{|\upsilon-\eta|^s}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \geq \int_{|\upsilon|\geq|\beta|} \frac{|\upsilon|^s}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \\ &\geq \int_{|\upsilon|\geq|\beta|} \frac{|\upsilon|^s}{(2|\upsilon|)^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \\ &= \frac{1}{2^s}\int_{|\upsilon|\geq|\beta|}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \\ &\geq \frac{1}{2^s}\frac{1}{2} = 2^{-(s+1)}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Por outro lado, como $\|\rho\|_1 = \|\rho\|_\infty = 1$ então pelo Lema 1.1, obtemos

$$D = \int \frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \leq C(s) = \left(\frac{2}{s}\right)^s (1-s)^{-1}. \tag{3.18}$$

De (3.17) e (3.18) segue que

$$\frac{N}{D}=\frac{\int\frac{|v-\eta|^s}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv}{\int\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv}\geq\frac{2^{-(s+1)}}{\left(\frac{2}{s}\right)^s(1-s)^{-1}}=\frac{s^s(1-s)}{2^{2s+1}}=\tilde{C}_2.$$

(ii) Para qualquer $\lambda>0$ temos

$$\begin{aligned}\int_{|v|\leq\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv &\leq \|\rho\|_\infty\int_{|v|\leq\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}dv\\ &\leq \|\rho\|_\infty\int_{|v|\leq\lambda}\frac{1}{(|\beta|-|v|)^s}dv\\ &\leq \frac{1}{(|\beta|-\lambda)_+^s}\int_{|v|\leq\lambda}dv\\ &= \frac{2\lambda}{(|\beta|-\lambda)_+^s},\end{aligned}\tag{3.19}$$

onde $r_+=\max\{r,0\}$ é a parte positiva de $r\in\mathbb{R}$. Por outro lado, de (1.8) segue que

$$\int_{|v|\leq\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv\leq 2\frac{\lambda^{1-s}}{1-s}.\tag{3.20}$$

Tomando o mínimo das expressões (3.19) e (3.20), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{|v|\leq\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv &\leq \min\left(2\frac{\lambda}{(|\beta|-\lambda)_+^s},2\frac{\lambda^{1-s}}{1-s}\right)\\ &= 2\frac{\lambda}{(|\beta|-\lambda)_+^s}\leq\tilde{c}\lambda\,|\beta|^{-s},\end{aligned}\tag{3.21}$$

onde $\tilde{c}$ é uma constante.

Note que

$$N=\int\frac{|v-\eta|^s}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv\geq\int_{|v|>\lambda}\frac{|v|^s}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv\geq\int_{|v|>\lambda}\frac{\lambda^s}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv\tag{3.22}$$

e

$$D=\int\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv=\int_{|v|\leq\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv+\int_{|v|>\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv$$

$$\Rightarrow\int_{|v|>\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv=\int\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv-\int_{|v|\leq\lambda}\frac{1}{|v-\beta|^s}\rho(v)\,dv.\tag{3.23}$$

Substituindo (3.23) em (3.22) e usando (3.21), obtemos

$$
\begin{aligned}
N = \int \frac{|\upsilon-\eta|^s}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \;&\geq\; \lambda^s\left(\int \frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon - \int_{|\upsilon|\leq\lambda}\frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon\right)\\
&\geq\; \lambda^s\left(D-\tilde{c}\lambda\,|\beta|^{-s}\right), \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
D = \int \frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \;&\geq\; \int_{|\upsilon|<|\beta|}\frac{1}{|\upsilon-\beta|^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon\\
&\geq\; \int_{|\upsilon|<|\beta|}\frac{1}{(2\,|\beta|)^s}\rho(\upsilon)\,d\upsilon\\
&=\; (2\,|\beta|)^{-s}\int_{|\upsilon|<|\beta|}\rho(\upsilon)\,d\upsilon \geq \frac{(2\,|\beta|)^{-s}}{2}.
\end{aligned}
$$

Dividindo por D ambos os lados de (3.24) e usando a desigualdade acima, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{N}{D} \;&\geq\; \lambda^s\left(1-\tilde{c}\lambda\,|\beta|^{-s}\,\frac{1}{\frac{1}{2}(2\,|\beta|)^{-s}}\right)\\
&=\; \lambda^s\left(1-\tilde{c}\lambda\,|\beta|^{-s}\,2^{s+1}\,|\beta|^s\right)\\
&=\; \lambda^s\left(1-\tilde{c}\lambda 2^{s+1}\right) = \lambda^s\left(1-\tilde{b}\lambda\right) \geq \tilde{C}_2,
\end{aligned}
$$

para constantes $\tilde{b} = \tilde{c}2^{s+1}$, $\tilde{C}_2$ com $\lambda = \frac{1}{2\tilde{b}}$. ∎

Com o estudo detalhado dos Lemas 3.1 e 3.2, agora estamos preparados para a demonstração do Teorema 0.1.

Demonstração: (**Teorema 0.1**) A demonstração do teorema é dividida em dois casos: $j = k$ e $j \neq k$. Para $j = k$, o teorema segue diretamente do Lema 3.1. Suponhamos $j \neq k$. Temos a seguinte identidade:

$$
\begin{aligned}
0 \;&=\; \langle e_j, e_k\rangle = \left\langle e_j, (H_{\omega,\lambda}-z)^{-1}(H_{\omega,\lambda}-z)\,e_k\right\rangle\\
&=\; \left\langle e_j, (H_{\omega,\lambda}-z)^{-1}\left(-\sum_{l:|l-k|=1} e_l + (\lambda\omega_k - z)\,e_k\right)\right\rangle\\
&=\; -\sum_{l:|l-k|=1}\left\langle e_j, (H_{\omega,\lambda}-z)^{-1}e_l\right\rangle + \left\langle e_j, (H_{\omega,\lambda}-z)^{-1}(\lambda\omega_k - z)\,e_k\right\rangle\\
&=\; -\sum_{l:|l-k|=1} G_{\omega,\lambda}(j,l;z) + (\lambda\omega_k - z)\,G_{\omega,\lambda}(j,k;z). \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Como $G_{\omega,\lambda}(j,k;z)$ é a entrada superior direita da matriz do lado esquerdo da fórmula de Krein (3.13), explicitando o lado direito de (3.13) obteremos uma expressão importante para $G_{\omega,\lambda}(j,k;z)$.

Para facilitar os cálculos, denotamos as entradas da matriz V de (3.13) por: $G_1 = G_{\hat{\omega},\lambda}(j,j;z)$, $G_2 = G_{\hat{\omega},\lambda}(j,k;z)$, $G_3 = G_{\hat{\omega},\lambda}(k,j;z)$ e $G_4 = G_{\hat{\omega},\lambda}(k,k;z)$, onde sua inversa é dada por

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{G_4}{G_1G_4-G_2G_3} & -\frac{G_2}{G_1G_4-G_2G_3} \\ -\frac{G_3}{G_1G_4-G_2G_3} & \frac{G_1}{G_1G_4-G_2G_3} \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

Substituindo (3.26) em (3.13) resulta que

$$\begin{aligned} P\left(H_{\omega,\lambda}-z\right)^{-1}P &= \begin{pmatrix} \frac{G_4+\lambda\omega_jG_1G_4-\lambda\omega_jG_2G_3}{G_1G_4-G_2G_3} & -\frac{G_2}{G_1G_4-G_2G_3} \\ -\frac{G_3}{G_1G_4-G_2G_3} & \frac{G_1+\lambda\omega_kG_1G_4-\lambda\omega_kG_2G_3}{G_1G_4-G_2G_3} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\tilde{b}_1}\begin{pmatrix} G_1+\lambda\omega_kG_1G_4-\lambda\omega_kG_2G_3 & G_2 \\ G_3 & G_4+\lambda\omega_jG_1G_4-\lambda\omega_jG_2G_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{b}_1 = \det\left[V + \lambda\begin{pmatrix} \omega_j & 0 \\ 0 & \omega_k \end{pmatrix}\right]$.

Como queremos obter uma expressão para $G_{\omega,\lambda}(j,k;z)$, igualamos ao termo q_{12} da matriz (3.13). Assim, concluímos que

$$G_{\omega,\lambda}(j,k;z) = \frac{\alpha}{\lambda\omega_k-\beta} \tag{3.27}$$

onde

$$\alpha = -\frac{G_2\left[G_1G_4-G_2G_4\right]}{\lambda\omega_jG_2G_3+G_4-\lambda\omega_jG_1G_4},\ \beta = \frac{-\lambda\omega_jG_1-1}{\lambda\omega_jG_2G_3+G_4-\lambda\omega_jG_1G_4}$$

não dependem de ω_k.

Utilizando os Lemas 3.2, 1.3 e a identidade (3.25), temos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)\right|^s\right) &= \mathbb{E}\left(\left|\frac{\alpha}{\lambda\omega_k-\beta}\right|^s\right) = \frac{1}{\lambda^s}\mathbb{E}\left(\left|\frac{\alpha}{\omega_k-\frac{\beta}{\lambda}}\right|^s\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^s}\mathbb{E}\left(\mathbb{E}_k\left(|\alpha|^s\left|\frac{1}{\omega_k-\frac{\beta}{\lambda}}\right|^s\right)\right) \\ &= \frac{1}{\lambda^s}\mathbb{E}\left(|\alpha|^s\int\left|\frac{1}{\omega_k-\frac{\beta}{\lambda}}\right|^s\rho(\omega_k)\,d\omega_k\right) \\ &\leq \frac{C_2}{\lambda^s}\mathbb{E}\left(|\alpha|^s\int\left|\frac{\omega_k-\frac{z}{\lambda}}{\omega_k-\frac{\beta}{\lambda}}\right|^s\rho(\omega_k)\,d\omega_k\right) \\ &= \frac{C_2}{\lambda^s}\mathbb{E}\left(|\alpha|^s\left|\frac{\lambda\omega_k-z}{\lambda\omega_k-\beta}\right|^s\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{C_2}{\lambda^s}\mathbb{E}\left(|\lambda\omega_k - z|^s \left|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)\right|^s\right) \\
&\leq \frac{C_2}{\lambda^s}\sum_{l:|l-k|=1}\mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}(j,l;z)\right|^s\right).
\end{aligned}
$$

Esse argumento pode ser iterado se a posição l não for igual a j. Para j e k dados, podemos iterar $|j-k|$ vezes, em cada passo escolhendo um fator $2dC_2/\lambda^s$, depois um máximo é tomado sobre os $2d$ termos nas somas sobre as vizinhanças próximas.

Agora escolha $\lambda_0 > 0$ suficientemente grande de modo que $\frac{2dC_2}{\lambda_0^s} < 1$. Definindo $\nu := -\ln\left(\frac{2dC_2}{\lambda_0^s}\right) > 0$ temos que para $\lambda \geq \lambda_0$, $\frac{2dC_2}{\lambda^s} \leq \frac{2dC_2}{\lambda_0^s} = e^{-\nu}$. Portanto, segue da estimativa anterior e do Lema 3.1 que

$$
\mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}(j,k;z)\right|^s\right) \leq \left(\frac{2dC_2}{\lambda^s}\right)^{|j-k|}\sup_{l\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}(j,l;z)\right|^s\right) \leq e^{-\nu|j-k|}\frac{C_1}{\lambda^s} = Ce^{-\nu|j-k|}. \quad \blacksquare
$$

3.2 Segundo Momento e Momentos Fracionários da Função de Green

Nesta seção fizemos um estudo sobre a relação entre o segundo momento e os momentos fracionários da função de Green do Hamiltoniano aleatório (0.2). Esta relação será usada no próximo capítulo, juntamente com o Teorema 0.1, para obtermos localização dinâmica para o modelo de Anderson.

Lema 3.3. *Existe uma constante $C = C(\rho) < \infty$ tal que*

$$
|Im\ w|\,|w|^s \int \frac{\rho(\omega_j + \alpha)}{|\alpha + w|^2}d\alpha \leq C
$$

para quaisquer $w \in \mathbb{C}$ e $\omega_j \in supp\ \rho$.

Demonstração: Segue do Lema 1.7 que

$$
|w|^s = |w + \alpha - \alpha|^s \leq |w + \alpha|^s + |\alpha|^s .
$$

Usando esta desigualdade, temos

$$
|\mathrm{Im}\ w|\,|w|^s \int \frac{\rho(\omega_j + \alpha)}{|\alpha + w|^2}d\alpha \leq \underbrace{|\mathrm{Im}\ w|\,|\alpha|^s \int \frac{\rho(\omega_j + \alpha)}{|\alpha + w|^2}d\alpha}_{(i)} + \underbrace{|\mathrm{Im}\ w|\,|\alpha + w|^s \int \frac{\rho(\omega_j + \alpha)}{|\alpha + w|^2}d\alpha}_{(ii)}
$$

e precisamos estimar as parcelas (i) e (ii).

(i)

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\ w|\,|\alpha|^s \int \frac{\rho(\omega_j+\alpha)}{|\alpha+w|^2}d\alpha &\leq |\mathrm{Im}\ w|\,\||\alpha|^s\rho(\omega_j+\alpha)\|_\infty \int \frac{1}{|\alpha+w|^2}d\alpha \\
&\leq |\mathrm{Im}\ w|\,\||\alpha|^s\rho(\omega_j+\alpha)\|_\infty \int \frac{1}{(\alpha+w_1)^2+w_2^2}d\alpha \\
&= |\mathrm{Im}\ w|\,\||\alpha|^s\rho(\omega_j+\alpha)\|_\infty \int \frac{1}{\theta^2+w_2^2}d\theta \\
&= |\mathrm{Im}\ w|\,\||\alpha|^s\rho(\omega_j+\alpha)\|_\infty 2\pi i \mathrm{Res}(f, iw_2), \quad (3.28)
\end{aligned}
$$

onde na terceira e quarta passagens usamos uma mudança de variável e aplicamos o Teorema dos Resíduos [14]. Note que $f(\theta) = \frac{1}{\theta^2+w_2^2} = \frac{1}{\theta+iw_2}\frac{1}{\theta-iw_2} = \frac{g(\theta)}{\theta-iw_2}$ onde $g(\theta) = \frac{1}{\theta+iw_2}$ é analitíca com $\theta \in \Delta(iw_2, r)$ e $g(iw_2) = \frac{1}{2iw_2} \neq 0$. Então pelo Teorema 5 e pela Proposição 15 de [14], temos $\mathrm{Res}(f, iw_2) = \frac{1}{2iw_2}$. Portanto, substituindo em (3.28), temos

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\ w|\,|\alpha|^s \int \frac{\rho(\omega_j+\alpha)}{|\alpha+w|^2}d\alpha &\leq |\mathrm{Im}\ w|\,\||\alpha|^s\rho(\omega_j+\alpha)\|_\infty \frac{\pi}{w_2} \\
&= \pi\,\||\alpha|^s\rho(\omega_j+\alpha)\|_\infty \\
&\leq \pi\,\|(|\gamma|^s+|\omega_j|^s)\rho(\gamma)\|_\infty \\
&= \pi \sup_{\gamma\in\mathbb{R}} |(|\gamma|^s+|\omega_j|^s)\rho(\gamma)| \\
&\leq \pi\left(\sup_{\gamma\in\mathbb{R}} ||\gamma|^s\rho(\gamma)| + \sup_{\gamma\in\mathbb{R}} ||\omega_j|^s\rho(\gamma)|\right) \\
&= \pi\left(|\omega_j|^s\|\rho\|_\infty + \||\gamma|^s\rho(\gamma)\|_\infty\right).
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\ w| \int \frac{\rho(\omega_j+\alpha)}{|\alpha+w|^{2-s}}d\alpha &\leq |\mathrm{Im}\ w|\,\|\rho\|_\infty \int \frac{1}{|\alpha+w|^{2-s}}d\alpha \\
&= |\mathrm{Im}\ w|\,\|\rho\|_\infty \int \frac{1}{|\alpha+w_1+iw_2|^{2-s}}d\alpha \\
&\leq |w_2|\,\|\rho\|_\infty \int \frac{1}{|\beta w_2+iw_2|^{2-s}}|w_2|\,d\beta \\
&= |w_2|^2\,\|\rho\|_\infty \int \frac{1}{|w_2|^{2-s}|\beta+i|^{2-s}}d\beta \\
&= \|\rho\|_\infty \int \frac{1}{|w_2|^{-s}|\beta+i|^{2-s}}d\beta \\
&= w_2^s\,\|\rho\|_\infty C, \quad (3.29)
\end{aligned}
$$

com $C = \int \frac{1}{|\beta+i|^{2-s}}d\beta$. Na terceira passagem fizemos a mudança de variável $\alpha+w_1 = w_2\beta$.

Note que $|\alpha + w|^{2-s} \geq |\text{Im } w|^{2-s}$ implica $\frac{1}{|\alpha+w|^{2-s}} \leq \frac{1}{|\text{Im } w|^{2-s}}$, pois $2 - s \geq 1$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} |\text{Im } w| \int \frac{\rho(\omega_j + \alpha)}{|\alpha + w|^{2-s}} d\alpha &\leq |\text{Im } w| \int \frac{1}{|\text{Im } w|^{2-s}} \rho(\omega_j + \alpha)\, d\alpha \\ &= \frac{|\text{Im } w|}{|\text{Im } w|^{2-s}} \int \rho(\omega_j + \alpha)\, d\alpha = \frac{1}{|\text{Im } w|^{1-s}}. \quad (3.30) \end{aligned}$$

Tomando o mínimo entre (3.29) e (3.30), concluímos que

$$|\text{Im } w| \int \frac{\rho(\omega_j + \alpha)}{|\alpha + w|^{2-s}} d\alpha \leq \min\left(\frac{1}{|\text{Im } w|^{1-s}}, C \|\rho\|_\infty |\text{Im } w|^s \right) \leq (C \|\rho\|_\infty)^{1-s}.$$

Portanto, de (i) e (ii) finalizamos a demonstração.

■

O próximo resultado relaciona o segundo momento com os momentos fracionários da função de Green. Como tal resultado não depende do parâmetro de desordem λ, denotaremos o Hamiltoniano $H_{\lambda,\omega}$ por H_ω e a função de Green $G_{\lambda,\omega}(j,k;z)$ por $G_\omega(j,k;z)$.

Proposição 3.1. *Para cada $s \in (0,1)$ existe uma constante $C = C(s,\rho) < \infty$ tal que*

$$|Im\ z|\ \mathbb{E}_j \left(|G_\omega(j,k;z)|^2 \right) \leq C \mathbb{E}_j \left(|G_\omega(j,k;z)|^s \right),$$

para quaisquer $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ e $j,k \in \mathbb{Z}^d$, onde

$$\mathbb{E}_j(\cdots) = \int \cdots\ \rho(\omega_j) d\omega_j$$

é a esperança condicional com $(\omega_u)_{u \in \mathbb{Z}^d \setminus \{j\}}$ fixado.

Observação 3.2. *(1) O resultado acima também vale com $\mathbb{E}_j$ substituído por $\mathbb{E}$.*
(2) O nosso principal objetivo é obter localização dinâmica para o modelo de Anderson e na demonstração deste fato (veja demonstração do Teorema 4.1) aparece exatamente o produto $|Im\ z|\, \mathbb{E}\left(|G_\omega(j,k;z)|^2\right)$. O resultado acima se justifica pelo fato de conseguirmos limitar este produto por um decaimento exponencial, através do Teorema 0.1; em outras palavras, o decaimento exponencial dos momentos fracionários da função de Green implica no decaimento exponencial do produto acima. Dessa forma, fica claro a importância do método dos momentos fracionários juntamente com este resultado, que por fim faz a principal ligação para se obter localização dinâmica para o modelo de Anderson.

Demonstração: Como na demonstração do Lema 3.1, escrevemos $\omega = (\hat{\omega}, \omega_j)$. Mantendo $\hat{\omega}$ fixo, consideremos o Hamiltoniano

$$H_\omega^{(\alpha)} = H_{(\hat{\omega}, \omega_j + \alpha)} = H_\omega + \alpha P_{e_j}$$

obtido pertubando o potencial em j por $\alpha \in \mathbb{R}$. Denotemos por $G_\omega^{(\alpha)}$ a função de Green correspondente ao operador $H_\omega^{(\alpha)}$. De modo análogo a (3.3) e (3.5), obtemos

$$(H_\omega - z)^{-1} = \left(H_\omega^{(\alpha)} - z\right)^{-1} + \alpha (H_\omega - z)^{-1} P_{e_j} \left(H_\omega^{(\alpha)} - z\right)^{-1}$$

e

$$G_\omega^{(\alpha)}(j, k; z) = \frac{G_\omega(j, k; z)}{1 + \alpha G_\omega(j, j; z)} = \frac{1}{\alpha + G_\omega(j, j; z)^{-1}} \frac{G_\omega(j, k; z)}{G_\omega(j, j; z)}. \tag{3.31}$$

Para o caso especial $j = k$ e $\widetilde{\alpha} = -\mathrm{Re}\ G_\omega(j, j; z)^{-1}$, obtemos de (3.31) que

$$\begin{aligned} G_\omega^{(\widetilde{\alpha})}(j, j; z) &= \frac{1}{\widetilde{\alpha} + G_\omega(j, j; z)^{-1}} \frac{G_\omega(j, j; z)}{G_\omega(j, j; z)} \\ &= \frac{1}{-\mathrm{Re}\ G_\omega(j, j; z)^{-1} + G_\omega(j, j; z)^{-1}} = \frac{1}{i\mathrm{Im}\ G_\omega(j, j; z)^{-1}}. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Agora, sejam $z = E + i\varepsilon$ e $\xi \in \mathrm{dom}\,(H_\omega)$. Temos

$$\left|G_\omega^{(\widetilde{\alpha})}(j, j; z)\right| = \left|\left\langle e_j, \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z\right)^{-1} e_j\right\rangle\right| \leq \left\|\left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z\right)^{-1}\right\| \tag{3.33}$$

e

$$\begin{aligned} \left\|\left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z\right)\xi\right\|^2 &= \left\langle \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z\right)\xi, \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z\right)\xi \right\rangle \\ &= \left\langle \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi - i\varepsilon\xi, \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi - i\varepsilon\xi \right\rangle \\ &= \left\langle \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi, \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi \right\rangle - \left\langle i\varepsilon\xi, \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi, i\varepsilon\xi \right\rangle + \langle i\varepsilon\xi, i\varepsilon\xi \rangle \\ &= \left\langle \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi, \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi \right\rangle + i\varepsilon \left\langle \xi, \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi \right\rangle \\ &\quad - i\varepsilon \left\langle \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi, \xi \right\rangle + |\varepsilon|^2 \langle \xi, \xi \rangle \\ &= \left\|\left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - E\right)\xi\right\|^2 + |\varepsilon|^2 \|\xi\|^2 \\ &\geq |\varepsilon|^2 \|\xi\|^2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Como $\varepsilon > 0$, $|\varepsilon| = |\text{Im } z| \neq 0$, de (3.34) segue que

$$\left\| \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z \right)^{-1} \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z \right) \xi \right\| = \|\xi\| \leq \frac{\left\| \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z \right) \xi \right\|}{|\text{Im } z|}.$$

Daí, vem que

$$\left\| \left(H_\omega^{(\widetilde{\alpha})} - z \right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\text{Im } z|}. \tag{3.35}$$

Resulta de (3.32), (3.33) e (3.35) que

$$\left| \frac{1}{\text{Im } G_\omega (j,j;z)^{-1}} \right| = \left| G_\omega^{(\widetilde{\alpha})} (j,j;z) \right| \leq \frac{1}{|\text{Im} z|}$$

o que implica $\left| \text{Im } G_\omega (j,j;z)^{-1} \right| \geq |\text{Im } z|$. Inserindo isto em (3.31) obtemos

$$|\text{Im } z| \left| G_\omega^{(\alpha)} (j,k;z) \right|^2 \leq \frac{\left| \text{Im } G_\omega (j,j;z)^{-1} \right|}{\left| \alpha + G_\omega (j,j;z)^{-1} \right|^2} \frac{|G_\omega (j,k;z)|^2}{|G_\omega (j,j;z)|^2}. \tag{3.36}$$

Por outro lado, podemos limitar a mesma expressão por

$$\begin{aligned}
|\text{Im } z| \left| G_\omega^{(\alpha)} (j,k;z) \right|^2 &\leq |\text{Im } z| \sum_{k' \in \mathbb{Z}^d} \left| G_\omega^{(\alpha)} (j,k';z) \right|^2 \\
&= |\text{Im } z| \left\| \left(H_\omega^{(\alpha)} - z \right)^{-1} e_j \right\|^2 \\
&= |\text{Im } z| \left\langle e_j, \left(H_\omega^{(\alpha)} - \overline{z} \right)^{-1} \left(H_\omega^{(\alpha)} - z \right)^{-1} e_j \right\rangle \\
&= |\text{Im } z| \left\langle e_j, \frac{1}{z - \overline{z}} \left(\left(H_\omega^{(\alpha)} - z \right)^{-1} - \left(H_\omega^{(\alpha)} - \overline{z} \right)^{-1} \right) e_j \right\rangle \\
&= \left| \text{Im } z \left\langle e_j, \frac{1}{2i \text{Im } z} \left(\left(H_\omega^{(\alpha)} - z \right)^{-1} - \overline{\left(H_\omega^{(\alpha)} - z \right)^{-1}} \right) e_j \right\rangle \right| \\
&= \left| \frac{1}{2i} \left(G_\omega^{(\alpha)} (j,j;z) - \overline{G_\omega^{(\alpha)} (j,j;z)} \right) \right| \\
&= \left| \text{Im } G_\omega^{(\alpha)} (j,j;z) \right| \\
&= \frac{\left| \text{Im } G_\omega (j,j;z)^{-1} \right|}{\left| \alpha + G_\omega (j,j;z)^{-1} \right|^2},
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde na última passagem usamos (3.31) com $j = k$.

Para $t \geq 0$ tem-se $\min(1, t^2) \leq t^s$. Usando isto com $t = \frac{|G_\omega(j,k;z)|}{|G_\omega(j,j;z)|}$ e fazendo uma interpolação entre (3.36) e (3.37), obtemos

$$|\text{Im } z| \left| G_\omega^{(\alpha)} (j,k;z) \right|^2 \leq \frac{\left| \text{Im } G_\omega (j,j;z)^{-1} \right|}{\left| \alpha + G_\omega (j,j;z)^{-1} \right|^2} \frac{|G_\omega (j,k;z)|^s}{|G_\omega (j,j;z)|^s}. \tag{3.38}$$

Temos também que, para uma função de Borel não-negativa f sobre $\mathbb{R}$, vale

$$\begin{aligned}
\int\int f(\omega_j+\alpha)\,\rho(\omega_j+\alpha)\,d\alpha\rho(\omega_j)\,d\omega_j &= \int\int f(\omega_j+\alpha)\,\rho(\omega_j+\alpha)\,\rho(\omega_j)\,d\omega_j d\alpha \\
&= \int\int f(\omega_j)\,\rho(\omega_j)\,\rho(\omega_j-\alpha)\,d\omega_j d\alpha \\
&= \int f(\omega_j)\,\rho(\omega_j)\left(\int \rho(\omega_j-\alpha)\,d\alpha\right)d\omega_j \\
&= \int f(\omega_j)\,\rho(\omega_j)\,d\omega_j, \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

onde na primeira e na terceira passagens utilizamos o Teorema de Fubini e na segunda utilizamos a invariância por translação da medida de Lebesgue [29].

Dado que $G_\omega(j,k;z) = G_{(\hat{\omega},\omega_j+\alpha)}(j,k;z) - \alpha\delta_{jk}$ onde $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , se j = k \\ 0 & , se j \neq k \end{cases}$ e substituindo em (3.31), temos

$$\left|G_\omega^{(\alpha)}(j,k;z)\right|^2 = \left|\frac{G_\omega(j,k;z)}{1+\alpha G_\omega(j,j;z)}\right|^2 = \left|\frac{G_{(\hat{\omega},\omega_j+\alpha)}(j,k;z)-\alpha\delta_{jk}}{1+\alpha G_{(\hat{\omega},\omega_j+\alpha)}(j,j;z)-\alpha^2\delta_{jk}}\right|^2.$$

Escolhendo

$$f(\omega_j+\alpha) = \left|\frac{G_{(\hat{\omega},\omega_j+\alpha)}(j,k;z)-\alpha\delta_{jk}}{1+\alpha G_{(\hat{\omega},\omega_j+\alpha)}(j,j;z)-\alpha^2\delta_{jk}}\right|^2$$

e tomando em particular $\alpha = 0$, segue que $\left|G_\omega^{(\alpha)}(j,k;z)\right|^2 = \left|G_{(\hat{\omega},\omega_j)}(j,k;z)\right|^2 = f(\omega_j)$.

Agora por (3.38) e (3.39), temos

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Im}\ z|\,\mathbb{E}_j\left(|G_\omega(j,k;z)|^2\right) \\
= \ & |\mathrm{Im}\ z|\int |G_\omega(j,k;z)|^2\,\rho(\omega_j)\,d\omega_j \\
= \ & |\mathrm{Im}\ z|\int\int \left|G_\omega^{(\alpha)}(j,k;z)\right|^2\rho(\omega_j+\alpha)\,d\alpha\rho(\omega_j)\,d\omega_j \\
= \ & |\mathrm{Im}\ z|\,\mathbb{E}_j\left(\int \left|G_\omega^{(\alpha)}(j,k;z)\right|^2\rho(\omega_j+\alpha)\,d\alpha\right) \\
\leq \ & \mathbb{E}_j\left(\left|\mathrm{Im}\ G_\omega(j,j;z)^{-1}\right|\frac{|G_\omega(j,k;z)|^s}{|G_\omega(j,j;z)|^s}\int\frac{\rho(\omega_j+\alpha)}{\left|\alpha+G_\omega(j,j;z)^{-1}\right|^2}d\alpha\right). \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Utilizando o Lema 3.3 com $w = G_\omega(j,j;z)^{-1}$, segue de (3.40) que

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Im}\ z|\,\mathbb{E}_j\left(|G_\omega(j,k;z)|^2\right) &\leq \mathbb{E}_j\left(|\mathrm{Im}\ w|\,|G_\omega(j,k;z)|^s\,|w|^s\int\frac{\rho(\omega_j+\alpha)}{|\alpha+w|^2}d\alpha\right) \\
&\leq C\mathbb{E}_j\left(|G_\omega(j,k;z)|^s\right)
\end{aligned}$$

com a constante $C < \infty$ dependendo somente de supp ρ, mas não de j, k e z.

$\blacksquare$

Capítulo

4

Dos Momentos Fracionários à Localização Dinâmica

A partir do decaimento exponencial dos momentos fracionários da função de Green, apresentaremos neste capítulo a demonstração de localização dinâmica para o modelo de Anderson, em dois casos: volume infinito e volume finito. No caso do volume infinito, consideramos o Hamiltoniano de Anderson H_ω sobre o espaço $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$, sem restrições, e usamos a Proposição 3.1 para relacionar o segundo momento com os momentos fracionários da função de Green. Recentemente este argumento foi usado em [19] para obter localização dinâmica para o modelo de Anderson unitário. No caso do volume finito, consideramos o Hamiltoniano H_ω restrito a subconjuntos finitos $\Lambda_L := [-L, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, $L \in \mathbb{N}$, e fazemos uso de autofunções correlatoras.

Suzuki [32] também obteve localização dinâmica para o modelo de Anderson sobre grafos, com uma representação especial para a função de Green, em que foi utilizado o método dos momentos fracionários no caso do volume infinito. Para este capítulo utilizamos as referências [19, 23, 24, 25, 29, 34, 35].

4.1 Volume Infinito

Nesta seção apresentamos a demonstração de que o decaimento exponencial dos momentos fracionários da função de Green, como demonstrado no Teorema 0.1, implica em localização dinâmica (veja Teorema 4.1 abaixo). Como o resultado é geral, vamos absorver o parâmetro de desordem λ nas variáveis aleatórias ω_j. Deixamos também implícita a dependência da variável aleatória ω e escrevemos $H = H_\omega$, $G = G_\omega$, etc.

Nosso objetivo é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 4.1. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e limitado. Se existem $s \in (0,1)$, $\tilde{C} < \infty$ e $\nu > 0$ de modo que*

$$\mathbb{E}\left(\left|G\left(j,k;E+i\varepsilon\right)\right|^{s}\right) \leq \tilde{C}e^{-\nu|j-k|}$$

para quaisquer $E \in I$ e $\varepsilon > 0$, então H exibe localização dinâmica em I.

Observação 4.1. *(1) Note que o Teorema 0.2 é um caso particular do Teorema 4.1.*
(2) Segue dos Teoremas 0.1 e 4.1 que para desordem λ suficientemente grande, o modelo de Anderson é dinamicamente localizado em todo seu espectro.

Demonstração: Consideremos as medidas espectrais $\mu_{j,k}$ de H, que são medidas de Borel complexas definidas por

$$\mu_{j,k}\left(B\right) := \left\langle e_j, \chi_B\left(H\right)e_k\right\rangle \tag{4.1}$$

para conjuntos de Borel $B \subset \mathbb{R}$. Seja $\mathcal{B} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ boreliana tal que $|g| \leq 1\}$. A variação total $|\mu_{j,k}|$ de $\mu_{j,k}$ é uma medida de Borel regular limitada, que pode ser caracterizada por (ver [29])

$$\begin{aligned} \left|\mu_{j,k}\right|\left(B\right) &= \sup_{g\in\mathcal{B}} \left|\left\langle e_j, P\left(g\right)e_k\right\rangle\right| \\ &= \sup_{g\in\mathcal{B}} \left|\int g\left(\upsilon\right)d\mu_{j,k}\left(\upsilon\right)\right| \\ &= \sup_{g\in\mathcal{B}} \left|\int \chi_B\left(H\right)g\left(\upsilon\right)d\mu_{j,k}\left(\upsilon\right)\right| \\ &= \sup_{g\in\mathcal{B}} \left|\left\langle e_j, g\left(H\right)\chi_B\left(H\right)e_k\right\rangle\right|. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Tomando em particular $g_t\left(\upsilon\right) = e^{-it\upsilon}$ em (4.2) e $B = I$ intervalo aberto limitado, segue que

$$\left|\mu_{j,k}\right|\left(I\right) \geq \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\left\langle e_j, e^{-itH}\chi_I\left(H\right)e_k\right\rangle\right|. \tag{4.3}$$

Portanto, devido a (4.3) obteremos o Teorema 4.1 demonstrando o correspondente decaimento exponencial para $\mathbb{E}\left(\left|\mu_{j,k}\right|\right)\left(I\right)$.

Pelo Teorema de Lusin (Teorema 1.3) podemos substituir as funções de Borel em (4.2) por funções contínuas de suporte compacto em I,

$$\left|\mu_{j,k}\right|\left(I\right) = \sup_{\substack{g\in C_c(I)\\ |g|\leq 1}} \left|\left\langle e_j, g\left(H\right)e_k\right\rangle\right|, \tag{4.4}$$

onde $C_c(I)$ denota o conjunto das funções contínuas de suporte compacto em I.

Para cada $g \in C_c(I)$, segue-se do Lema 1.4 que, uniformemente em $\upsilon \in \mathbb{R}$,

$$g(\upsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int \frac{g(E)}{(\upsilon - E)^2 + \varepsilon^2} dE.$$

Utilizando-se o Lema 1.5 (consequência do teorema espectral), temos

$$\langle e_j, g(H) e_k \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I g(E) \left\langle e_j, (H - E - i\varepsilon)^{-1} (H - E + i\varepsilon)^{-1} e_k \right\rangle dE.$$

Isto permite estimar o valor esperado de (4.4) por

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|\mu_{j,k}|(I)) = \\
= \;& \mathbb{E}\left(\sup_{|g| \le 1} \left| \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I g(E) \left\langle e_j, (H - E - i\varepsilon)^{-1} (H - E + i\varepsilon)^{-1} e_k \right\rangle dE \right| \right) \\
\le \;& \mathbb{E}\left(\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{|g| \le 1} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I |g(E)| \left| \left\langle e_j, (H - E - i\varepsilon)^{-1} (H - E + i\varepsilon)^{-1} e_k \right\rangle \right| dE \right) \\
\le \;& \mathbb{E}\left(\liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_I \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \left| \left\langle e_j, (H - E - i\varepsilon)^{-1} e_m \right\rangle \right| \left| \left\langle e_m, (H - E + i\varepsilon)^{-1} e_k \right\rangle \right| dE \right) \\
\le \;& \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\varepsilon}{\pi} \mathbb{E}\left(\int_I \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \left| \left\langle e_j, (H - E - i\varepsilon)^{-1} e_m \right\rangle \right| \left| \left\langle e_m, (H - E + i\varepsilon)^{-1} e_k \right\rangle \right| dE \right) \\
= \;& \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_I \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \left(\mathbb{E}\left(\varepsilon \left| \left\langle e_j, (H - E - i\varepsilon)^{-1} e_m \right\rangle \right| \left| \left\langle e_m, (H - E + i\varepsilon)^{-1} e_k \right\rangle \right| \right) \right) dE \\
\le \;& \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_I \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \left(\mathbb{E}\left(\varepsilon \left| \left\langle e_j, (H - E - i\varepsilon)^{-1} e_m \right\rangle \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \\
& \cdot \left(\mathbb{E}\left(\varepsilon \left| \left\langle e_m, (H - E + i\varepsilon)^{-1} e_k \right\rangle \right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} dE,
\end{aligned}$$

onde usamos, nesta ordem, o Lema de Fatou, Teorema de Fubini [29] e a desigualdade de Cauchy-Schwarz sobre $\mathbb{E}$ [25]. Agora, aplicando a Proposição 3.1 e usando a hipótese do teorema (que também se aplica a $|G(j, m; E - i\varepsilon)| = |G(j, m; E + i\varepsilon)|$), segue que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(|\mu_{j,k}|(I)) \le \\
\le \;& \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_I \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} C \left(\mathbb{E}\left(|G(j, m; E + i\varepsilon)|^s \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left(|G(m, k; E + i\varepsilon)|^s \right) \right)^{\frac{1}{2}} dE \\
\le \;& \liminf_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_I \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} C \left(\tilde{C} e^{-\nu|j-m|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{C} e^{-\nu|m-k|} \right)^{\frac{1}{2}} dE \\
= \;& \frac{C\tilde{C}|I|}{\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} e^{-\nu \frac{|j-m|}{2}} e^{-\nu \frac{|m-k|}{2}}.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular e Cauchy-Schwarz sobre o somatório, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|\mu_{j,k}|\,(I)\right) &\leq \frac{C\tilde{C}|I|}{\pi}e^{-\nu\frac{|j-k|}{4}}\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}e^{-\nu\frac{|j-m|}{4}}e^{-\nu\frac{|m-k|}{4}} \\
&\leq \frac{C\tilde{C}|I|}{\pi}e^{-\nu\frac{|j-k|}{4}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}e^{-\nu\frac{|j-m|}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}e^{-\nu\frac{|m-k|}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C\tilde{C}|I|}{\pi}e^{-\nu\frac{|j-k|}{4}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=\bar{d}(0,l)}e^{-\nu\frac{l}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=\bar{d}(0,l)}e^{-\nu\frac{l}{2}}\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde $m = \bar{d}(0,l)$ significa que m se situa na superfície do cubo $\Lambda_l := [-l,l]^d \cap \mathbb{Z}^d$. A quantidade desses m's pode ser limitada superiormente pelo volume $|\Lambda_l| = (2l+1)^d$ desse cubo. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|\mu_{j,k}|\,(I)\right) &\leq \frac{C\tilde{C}|I|}{\pi}e^{-\nu\frac{|j-k|}{4}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^d e^{-\nu\frac{l}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^d e^{-\nu\frac{l}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{C\tilde{C}|I|}{\pi}e^{-\nu\frac{|j-k|}{4}}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)^d e^{-\nu\frac{l}{2}} \\
&= \tilde{C}_1 e^{-\tilde{\nu}|j-k|},
\end{aligned}$$

onde $\tilde{C}_1 = \frac{C\tilde{C}|I|}{\pi}\sum\limits_{l=0}^{\infty}(2l+1)^d e^{-\nu\frac{l}{2}} < \infty$ e $\tilde{\nu} = \frac{\nu}{4}$.

Portanto, existem constantes $\tilde{C}_1 < \infty$ e $\tilde{\nu} > 0$ tais que $\mathbb{E}\left(|\mu_{j,k}|\,(I)\right) \leq \tilde{C}_1 e^{-\tilde{\nu}|j-k|}$, para todos $j,k \in \mathbb{Z}^d$, ou seja, H exibe localização dinâmica em I. ■

4.2 Volume Finito

Nesta seção apresentamos uma demonstração de localização dinâmica para o modelo de Anderson H_ω, usando o método do volume finito. Neste método consideram-se restrições do Hamiltoniano H_ω a subconjuntos finitos $\Lambda_L = [-L,L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, $L \in \mathbb{N}$, mostra-se, como anteriormente, o decaimento exponencial dos momentos fracionários das correspondentes funções de Green restritas a Λ_L, e então obtém-se localização dinâmica tomando-se o limite volume infinito $L \to \infty$. Isto tem vantagens conceituais tais como ter somente espectro discreto, o que permite expressar funções do Hamiltoniano através da expansão de autofunções e estudar diretamente a função de Green em energias reais.

Muitas das idéias usadas aqui podem ser encontradas na aproximação de Kunz-Souillard [23] para obter localização para o modelo de Anderson unidimensional. Um objeto central do método do volume finito são as chamadas autofunções correlatoras, que surgem da expansão de autofunções. As autofunções correlatoras também são usadas de modo similar em demonstrações de localização dinâmica via o método da análise de multiescala (ver [24, 34]). O método descrito aqui não é completamente disjunto do método da seção anterior.

Como anteriormente, o Laplaciano discreto $H_0^{\Lambda_L}$, atuando sobre o espaço de Hilbert

$$\ell^2(\Lambda_L) = \left\{ \psi : \Lambda_L \to \mathbb{C} : \sum_{n \in \Lambda_L} |\psi(n)|^2 < \infty \right\},$$

onde $\Lambda_L = [-L, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, $L \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, é definido por

$$\left(H_0^{\Lambda_L}\psi\right)(n) = -\sum_{\substack{k \in \Lambda_L \\ |k|=1}} \psi(n+k),$$

com $n \in \Lambda_L$, $k = (k_1, ..., k_d)$, $|k| = |k_1| + \cdots + |k_d|$ e com a condição de contorno de Dirichlet $\psi(j) = 0$ para $j \notin \Lambda_L$.

O modelo de Anderson $H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}$ sobre $\ell^2(\Lambda_L)$ é definido, para $\omega \in \Omega$ e $\lambda > 0$ (parâmetro de desordem), por

$$H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L} = H_0^{\Lambda_L} + \lambda V_\omega^{\Lambda_L} \tag{4.5}$$

em que $H_0^{\Lambda_L}$ é o Laplaciano discreto, $\omega = (\omega_n)_{n \in \Lambda_L}$ é a sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e $V_\omega^{\Lambda_L} : \Lambda_L \to \mathbb{R}$ é o potencial aleatório dado por $V_\omega^{\Lambda_L}(n) = \omega_n$.

Por fim, considerando o Hamiltoniano (4.5), a correspondente função de Green $G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}$ representada pelos elementos de matriz do resolvente de $H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}$, é definida por

$$G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;z) = \left\langle e_j, \left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L} - z\right)^{-1} e_k \right\rangle,$$

com $j, k \in \Lambda_L$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $\{e_j\}_{j \in \Lambda_L}$ a base canônica de $\ell^2(\Lambda_L)$.

De modo análogo a demonstração do Teorema 0.1, verifica-se o seguinte resultado:

Teorema 4.2. *Seja $0 < s < 1$. Então existe $\lambda_0 > 0$ de modo que para $\lambda \geq \lambda_0$ existem constantes $C < \infty$ e $\nu > 0$ com*

$$\mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;z)\right|^s\right) \leq Ce^{-\nu|j-k|}, \tag{4.6}$$

para quaisquer $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ e $j, k \in \Lambda_L$, $L \in \mathbb{N}$.

No caso do volume finito, a estimativa (4.6) vale para quase todo $z \in \mathbb{C}$, em particular para quase toda energia real. A razão para isto é que os operadores $H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}$ atuam sobre os espaços $\ell^2(\Lambda_L)$ de dimensão finita e que qualquer número real E dado não é um autovalor de $H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}$ q.t.p.. Mais precisamente, mostremos, a partir de (4.6), que para $\lambda \geq \lambda_0$ existem constantes $C<\infty$ e $\nu>0$ com

$$\mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;E)\right|^s\right)\le Ce^{-\nu|j-k|},\quad E-q.t.p. \tag{4.7}$$

para quaisquer $j,k\in\Lambda_L,\ L\in\mathbb{N}$. De fato, para todo $E\notin\sigma\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}\right)$ e pela 1ª identidade do resolvente, temos

$$\begin{aligned}
&\left|G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;E+i\varepsilon)-G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;E)\right|=\\
=\ &\left|\left\langle e_j,\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E-i\varepsilon\right)^{-1}e_k\right\rangle-\left\langle e_j,\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E\right)^{-1}e_k\right\rangle\right|\\
=\ &\left|\left\langle e_j,\left(\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E-i\varepsilon\right)^{-1}-\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E\right)^{-1}\right)e_k\right\rangle\right|\\
=\ &\left|\left\langle e_j,i\varepsilon\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E-i\varepsilon\right)^{-1}\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E\right)^{-1}e_k\right\rangle\right|\\
\le\ &|\varepsilon|\left\|\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E-i\varepsilon\right)^{-1}\right\|\left\|\left(H_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}-E\right)^{-1}\right\|\le|\varepsilon|\,\tilde{c}_0,
\end{aligned}$$

onde $\tilde{c}_0$ é uma constante. Portanto,

$$\left|G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;E)\right|^s=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left|G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;E+i\varepsilon)\right|^s,\ E-q.t.p. \tag{4.8}$$

Aplicando o valor esperado $\mathbb{E}(\cdot)$ em (4.8) e usando a estimativa (4.6), obtemos

$$\mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;E)\right|^s\right)\le\lim_{\varepsilon\to0^+}\mathbb{E}\left(\left|G_{\omega,\lambda}^{\Lambda_L}(j,k;E+i\varepsilon)\right|^s\right)\le Ce^{-\nu|j-k|},\ E-q.t.p.$$

Da mesma forma que nas Seções 3.2 e 4.1, por um fato geral eliminaremos o parâmetro de desordem $\lambda>0$. Como na Seção 4.1, consideremos as medidas espectrais $\mu_{j,k}$ de H definidas em (4.1) e suas variações totais $|\mu_{j,k}|$ dadas por (4.2). Como se tornará claro na relação (4.14) a frente, $|\mu_{j,k}|$ pode ser considerada como uma autofunção correlatora em volume infinito para H. Através da limitação por decaimento exponencial das autofunções correlatoras em volume finito, que vale uniformemente no volume, obteremos de (4.14) a limitação de $|\mu_{j,k}|$ por um decaimento exponencial, o que implica em localização dinâmica. O principal resultado desta seção é o seguinte:

Proposição 4.1. *Sejam $0<s<1$ e I um intervalo aberto e limitado. Então existe uma constante $C=C(s,\rho,d)<\infty$ tal que*

$$\mathbb{E}\left(|\mu_{j,k}|(I)\right)\le C\liminf_{L\to\infty}\left(\int_I\mathbb{E}\left(\left|G_\omega^{\Lambda_L}(j,k;E)\right|^s\right)dE\right)^{\frac{1}{2-s}}. \tag{4.9}$$

Com base em (4.3), segue da estimativa (4.7) e da Proposição 4.1 acima que para desordem λ suficientemente grande, o modelo de Anderson $H_{\omega,\lambda}$ exibe localização dinâmica no espectro inteiro. Vamos agora apresentar a demonstração da Proposição 4.1.

Demonstração: Comecemos reduzindo a afirmação (4.9) à propriedades da medida espectral em volume finito. Usamos novamente a caracterização (4.3) de $|\mu_{j,k}(I)|$ para intervalos I abertos e limitados. A convergência forte do resolvente de H^{Λ_L} para H implica, para g contínua de suporte compacto, que

$$\left\langle e_j, g\left(H^{\Lambda_L}\right) e_k\right\rangle \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} \left\langle e_j, g\left(H\right) e_k\right\rangle. \tag{4.10}$$

De fato, note que para todo $\psi \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ é suficiente mostrar para ψ em um subespaço denso, tal como $\psi = (H-z)\varphi$ com φ da mesma forma em um subespaço denso, usando que z está no resolvente de H. Para cada φ temos que $H^{\Lambda_L}\varphi = H\varphi$, para L grande. Note que pela 1ª identidade do resolvente, temos a seguinte identidade

$$\left(H^{\Lambda_L}-z\right)^{-1} - (H-z)^{-1} = \left(H^{\Lambda_L}-z\right)^{-1}\left(H^{\Lambda_L}-H\right)(H-z)^{-1}.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\left(H^{\Lambda_L}-z\right)^{-1} - (H-z)^{-1}\right)\psi\right\| &= \left\|\left(\left(H^{\Lambda_L}-z\right)^{-1}\left(H^{\Lambda_L}-H\right)(H-z)^{-1}\right)\psi\right\| \\
&= \left\|\left(H^{\Lambda_L}-z\right)^{-1}\left(H^{\Lambda_L}-H\right)(H-z)^{-1}\psi\right\| \\
&= \left\|\left(H^{\Lambda_L}-z\right)^{-1}\left(H^{\Lambda_L}-H\right)\varphi\right\| = 0,
\end{aligned}$$

para L grande. Logo, $\left\|R_z\left(H^{\Lambda_L}\right)\psi - R_z(H)\psi\right\| \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Portanto, pelo Teorema VIII-19 (b) de [26], obtemos que $\left\|H^{\Lambda_L}\psi - H\psi\right\| \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Agora, utilizando o Teorema VIII-20 de [26], concluimos que

$$\left\langle e_j, g\left(H^{\Lambda_L}\right) e_k\right\rangle \stackrel{L\to\infty}{\longrightarrow} \left\langle e_j, g\left(H\right) e_k\right\rangle.$$

Assim, por (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}
|\mu_{j,k}|(I) &= \sup_{|g|\le 1}\left|\left\langle e_j, g(H) e_k\right\rangle\right| \\
&= \sup_{|g|\le 1}\lim_{L\to\infty}\left|\left\langle e_j, g\left(H^{\Lambda_L}\right) e_k\right\rangle\right| \\
&\le \liminf_{L\to\infty}\sup_{|g|\le 1}\left|\left\langle e_j, g\left(H^{\Lambda_L}\right) e_k\right\rangle\right|.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Seja H_j^L a restrição de H^{Λ_L} ao subespaço $\mathcal{H}_j = \{\alpha e_j \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$ e seja P_j a projeção ortogonal sobre $\mathcal{H}_j$. Então e_j é um vetor cíclico para H_j^L e todos os autovalores E de H_j^L são simples. Denotemos por ψ_E^L os correspondentes autovetores normalizados. Usamos a notação ψ_E^L também para $\psi_j^L \oplus 0$ em $\ell^2(\Lambda_L) = \mathcal{H}_j \oplus \mathcal{H}_j^{\perp}$.

Note que $\psi_n = \psi_{n,j} + 0$ com $P_j\psi_n = \psi_{n,j}$; logo temos

$$\begin{aligned}
g\left(H^{\Lambda_L}\right) P_j e_k &= \sum_{n:E_n^L \in I} g\left(E_n^L\right) P_{\psi_n^L} P_j e_k = \sum_{n:E_n^L \in I} g\left(E_n^L\right) \left\langle \psi_n^L, e_j \right\rangle \psi_n^L \delta_{jk} \\
&= \sum_{n:E_n^L \in I} g\left(E_n^L\right) \left\langle \psi_{n,j}^L, e_j \right\rangle \psi_{n,j}^L \delta_{jk} = \sum_{n:E_n^L \in I} g\left(E_n^L\right) P_{\psi_{n,j}^L} P_j e_k \\
&= g\left(H_j^L\right) P_j e_k, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

onde $P_j e_k = \begin{cases} e_k, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$.

Expandindo em função dos autovetores ψ_E^L e usando (4.12), temos

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle e_j, g\left(H^{\Lambda_L}\right) e_k \right\rangle\right| &= \left|\left\langle e_j, g\left(H^{\Lambda_L}\right) P_j e_k \right\rangle\right| = \left|\left\langle e_j, g\left(H_j^L\right) P_j e_k \right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle e_j, \sum_{E \in I \cap \sigma\left(H_j^L\right)} g(E) P_{\psi_E^L} P_j e_k \right\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{E \in I \cap \sigma\left(H_j^L\right)} \left\langle e_j, g(E) P_{\psi_E^L} e_k \right\rangle\right| \\
&= \left|\sum_{E \in I \cap \sigma\left(H_j^L\right)} g(E) \left\langle e_j, \psi_E^L \right\rangle \left\langle \psi_E^L, e_k \right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{E \in I \cap \sigma\left(H_j^L\right)} \left|g(E)\right| \left|\left\langle e_j, \psi_E^L \right\rangle\right| \left|\left\langle \psi_E^L, e_k \right\rangle\right| \\
&\leq \sum_{E \in I \cap \sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right| \left|\psi_E^L(k)\right| =: Q_L(j, k; I), \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

onde $Q_L(j,k;I)$ são as autofunções correlatoras; em particular,

$$\sup_{|g| \leq 1} \left|\left\langle e_j, g\left(H^{\Lambda_L}\right) e_k \right\rangle\right| \leq Q_L(j,k;I).$$

Substituindo a desigualdade acima em (4.11), segue que

$$\left|\mu_{j,k}\right|(I) \leq \liminf_{L \to \infty} Q_L(j,k;I).$$

Aplicando o valor esperado $\mathbb{E}(\cdot)$ em ambos os lados da desigualdade acima e usando o Lema de Fatou, obtemos

$$\mathbb{E}\left(\left|\mu_{j,k}\right|(I)\right) \leq \liminf_{L \to \infty} \mathbb{E}\left(Q_L(j,k;I)\right). \qquad (4.14)$$

Com o intuito de estabelecer uma relação com os momentos fracionários da função de Green, introduzimos as autofunções correlatoras fracionárias

$$Q_L(j,k;I,r) := \sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right|^{2-r} \left|\psi_E^L(k)\right|^{r} \tag{4.15}$$

para $0 < r \leq 2$. Note que $Q_L(j,k;I) = Q_L(j,k;I,1)$.

Afirmamos que para qualquer $0 < s < 1$, vale

$$\mathbb{E}\left(Q_L(j,k;I)\right) \leq \left(\mathbb{E}Q_L(j,k;I,s)\right)^{\frac{1}{2-s}}. \tag{4.16}$$

De fato, interpolamos $s < 1 < 2$ via $1 = \frac{s}{p} + \frac{2}{q}$ com os expoentes conjugados $p = 2-s$ e $q = \frac{2-s}{1-s}$. Aplicando a desigualdade de Hölder [25], temos

$$\begin{aligned}
Q_L(j,k;I,1) &= \sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right| \left|\psi_E^L(k)\right| \\
&= \sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right|^{\frac{2-s}{2-s}} \left|\psi_E^L(k)\right|^{\frac{s+2-2s}{2-s}} \\
&= \sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right|^{\frac{1}{2-s}} \left|\psi_E^L(j)\right|^{\frac{1-s}{2-s}} \left|\psi_E^L(k)\right|^{\frac{s}{2-s}} \left|\psi_E^L(k)\right|^{2\left(\frac{1-s}{2-s}\right)} \\
&\leq \left(\sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right| \left|\psi_E^L(k)\right|^{s}\right)^{\frac{1}{2-s}} \left(\sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right| \left|\psi_E^L(k)\right|^{2}\right)^{\frac{1-s}{2-s}} \\
&\leq \sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right|^{\frac{1}{2-s}} \left|\psi_E^L(k)\right|^{\frac{s}{2-s}} \sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(j)\right|^{\frac{1-s}{2-s}} \left|\psi_E^L(k)\right|^{2\left(\frac{1-s}{2-s}\right)} \\
&= Q_L(j,k;I,s)^{\frac{1}{2-s}} Q_L(j,k;I,2)^{\frac{1-s}{2-s}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$Q_L(j,k;I,1) \leq Q_L(j,k;I,s)^{\frac{1}{2-s}} Q_L(j,k;I,2)^{\frac{1-s}{2-s}}. \tag{4.17}$$

Aplicando o valor esperado em ambos os lados da desigualdade (4.17) e mais uma vez pela Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\mathbb{E}\left(Q_L(j,k;I,1)\right) \leq \left(\mathbb{E}Q_L(j,k;I,s)\right)^{\frac{1}{2-s}} \left(\mathbb{E}Q_L(j,k;I,2)\right)^{\frac{1-s}{2-s}}. \tag{4.18}$$

Observe que $Q_L(j,k;I,2) = \sum_{E\in I\cap\sigma\left(H_j^L\right)} \left|\psi_E^L(k)\right|^2 \leq 1$. Com isso a desigualdade (4.18) implica em (4.16).

Agora relacionaremos as autofunções correlatoras fracionárias com os momentos fracionários da função de Green, mostrando que existe uma constante $C = C(s,\rho,d)$ de modo que

$$\mathbb{E}\left(Q_L\left(j,k;I,s\right)\right) \le C\int_I \mathbb{E}\left(\left|G^{\Lambda_L}\left(j,k;E\right)\right|^s\right)dE. \tag{4.19}$$

Para mostrar (4.19) usamos as autofunções correlatoras fracionárias $Q_{L,\upsilon}(j,k;I,s)$, definidas como em (4.15), mas com o somatório sendo sobre os autovalores e autovetores de $H_j^L+\upsilon P_{e_j}$. Note que, como e_j é um vetor cíclico para H_j^L, então $H_j^L+\upsilon P_{e_j}$ é o mesmo que a restrição de $H^{\Lambda_L}+\upsilon P_{e_j}$ a $\mathcal{H}_j$ e que e_j é um vetor cíclico para este operador, para todos os valores de $\upsilon\in\mathbb{R}$.

Note que $\int\frac{\rho(u)}{|u-\theta|^s}du$ é contínua e não se anula como uma função de $\theta\in\mathbb{R}$. Assim, existe uma constante $C=C(s,\rho)<\infty$ tal que

$$\frac{\rho\left(\theta\right)}{\int\frac{\rho(u)}{|u-\theta|^s}du}\le C,\quad\forall\theta\in\mathbb{R}. \tag{4.20}$$

Escrevendo $\omega=(\hat{\omega},\omega_j)$, denotando a esperança sobre $\hat{\omega}$ por $\hat{\mathbb{E}}$ e usando (4.20), temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Q_L^\omega\left(j,k;I,s\right)\right) &= \hat{\mathbb{E}}\,\mathbb{E}_j\left(Q_L^{(\hat{\omega},\omega_j)}\left(j,k;I,s\right)\right)\\
&= \hat{\mathbb{E}}\int_{\mathbb{R}} Q_L^{(\hat{\omega},\omega_j)}\left(j,k;I,s\right)\rho\left(\omega_j\right)d\omega_j\\
&\le C\hat{\mathbb{E}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} Q_L^{(\hat{\omega},\omega_j)}\left(j,k;I,s\right)\frac{d\omega_j}{\left|u-\omega_j\right|^s}\right)\rho\left(u\right)du.
\end{aligned}\tag{4.21}$$

Usando a mudança de variável $\upsilon=\omega_j-u$, a Proposição A.2 de [35] e a estimativa (4.21), segue que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Q_L^\omega\left(j,k;I,s\right)\right) &\le C\hat{\mathbb{E}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} Q_{L,\upsilon}^{(\hat{\omega},u)}\left(j,k;I,s\right)\frac{d\upsilon}{\left|\upsilon\right|^s}\right)\rho\left(u\right)du\\
&= C\hat{\mathbb{E}}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_I\left|G_{(\hat{\omega},u)}^{\Lambda_L}\left(j,k;E\right)\right|^s dE\right)\rho\left(u\right)du\\
&= C\hat{\mathbb{E}}\,\mathbb{E}_u\int_I\left|G_{(\hat{\omega},u)}^{\Lambda_L}\left(j,k;E\right)\right|^s dE\\
&= C\mathbb{E}\int_I\left|G_\omega^{\Lambda_L}\left(j,k;E\right)\right|^s dE.
\end{aligned}$$

Finalmente, combinando (4.19) com (4.14) e (4.16), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\left|\mu_{j,k}\right|(I)\right) &\le \liminf_{L\to\infty}\left(\mathbb{E}Q_L\left(j,k;I,s\right)\right)^{\frac{1}{2-s}}\\
&\le C^{1/(2-s)}\liminf_{L\to\infty}\left(\int_I\mathbb{E}\left(\left|G_\omega^{\Lambda_L}\left(j,k;E\right)\right|^s\right)dE\right)^{\frac{1}{2-s}}.
\end{aligned}$$

■

Capítulo

5

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre localização dinâmica para o modelo de Anderson discreto multidimensional, em volume infinito e volume finito, usando o método dos momentos fracionários da função de Green. Este resultado foi publicado recentemente em [35] e mostra que o transporte de um elétron é suprimido devido a desordem. Este trabalho baseia-se em dois teoremas importantes: o primeiro diz a respeito do decaimento exponencial dos momentos fracionários da função de Green, descrito no Teorema 0.1. Este resultado também é satisfeito para o Hamiltoniano aleatório H_ω restrito a subconjuntos $\Lambda_L = [-L, L] \cap \mathbb{Z}^d$. O segundo teorema (Teorema 0.2) assegura que o modelo de Anderson H_ω exibe localização dinâmica em I, a partir do Teorema 0.1. Para isso, fizemos um estudo relacionando o segundo momento da função de Green com os seus respectivos momentos fracionários, que é uma relação central e importante do trabalho. Ao mostrarmos que o modelo de Anderson H_ω exibe localização dinâmica num intervalo I, garantimos que H_ω tem espectro pontual puro em I $\mathbb{P}$-q.t.p. com as autofunções decaindo exponencialmente.

Como uma próxima etapa da pesquisa, podemos trabalhar na adaptação dos resultados estudados do modelo de Anderson para o modelo de Dirac aleatório, discreto e unidimensional [6, 11]:

$$\left(\mathbb{D}_{\omega,\lambda}\left(m,c\right)\Psi\right)\left(n\right) = \begin{pmatrix} mc^2 & cD^* \\ cD & -mc^2 \end{pmatrix} \Psi\left(n\right) + \lambda V_\omega I_2 \Psi\left(n\right)$$

atuando sobre $\ell^2\left(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2\right) = \left\{\Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^2 / \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\|\Psi\left(n\right)\right\|^2 < \infty\right\}$, em que $c > 0$ representa a velocidade da luz, $m \geq 0$ denota a massa da partícula, I_2 é a matriz identidade de ordem 2, D é o operador derivada discreta definido por $(D\varphi)(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n)$ e D^* seu operador adjunto. Impomos que o potencial V_ω satisfaz as mesmas condições que no modelo de Anderson. O objetivo é demonstrar que o modelo aleatório $\mathbb{D}_{\omega,\lambda}\left(m,c\right)$ exibe localização dinâmica no seu espectro, em desordem λ suficientemente grande, através do método dos momentos fracionários da correspondente função de Green.

Como trabalho futuro, podemos pensar nas interações entre partículas e sistemas de várias partículas. O modelo de Anderson discutido acima, é um modelo para uma única partícula e sem interações com outras partículas. Recentemente, foi demonstrado propriedades de localização para um modelo do tipo Anderson com um número fixo N de interações de elétrons numa base aleatória. Chulaevsky e Suhov [7, 8] tem feito isto por uma extensão do método da análise de multiescala, enquanto [2] fornece resultados similares baseados no método dos momentos fracionários. Um modelo do tipo Anderson discreto de N-partículas pode ser definido como

$$\left(H_\omega^{(N)}\psi\right)(n) = \sum_{m:|m-n|=1} \psi(m) + \left(U(n) + \lambda \sum_{l=1}^{N} \omega_{n_l}\right)\psi(n),$$

onde $\psi \in \ell^2\left(\mathbb{Z}^{Nd}\right)$, $n = (n_1, ..., n_N) \in \mathbb{Z}^{Nd}$ e $m \in \mathbb{Z}^{Nd}$. Como no modelo original, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas, com densidade limitada e de suporte compacto. Assumimos, por simplicidade, que $U(n)$ é um termo de interação de duas partículas de imagem finita,

$$U(n) = \sum_{1\leq l<p\leq N} \Phi(n_l - n_p), \quad \mathrm{supp}\Phi \text{ finito.}$$

Então, vale localização em desordem grande [2, 8]:

Teorema 5.1. *Se λ é suficientemente grande, então $H_\omega^{(N)}$ é espectralmente e dinamicamente localizado em todas as energias do espectro.*

Referências Bibliográficas

[1] AIZENMAN, M.; MOLCHANOV, S. Localization at large disorder and at extreme energies: an elementary derivation. *Comm. Math. Phys.* **157**, 245-278, 1993.

[2] AIZENMAN, M.; WARZEL, S. Localization bounds for multiparticle systems. *Comm. Math. Phys.* **290**, 903-934, 2009.

[3] ANDERSON, P. W. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.* **109**, 1492-1505, 1958.

[4] BUENO, H. P. Álgebra Linear: Um segundo Curso. Textos Universitários, SBM, 2006.

[5] CARMONA, R.; LACROIX, J. Spectral theory of random Schrödinger operators. Probability Theory and its Applications, Birkaüser, Boston, 1990.

[6] CARVALHO, S. L.; DE OLIVEIRA, C. R; PRADO, R. A. Sparse one-dimensional discrete Dirac operators II: Spectral properties. *J. Math. Phys.* **52**, 073501-073521, 2011.

[7] CHULAEVSKY, V.; SUHOV, Y. Wegner bounds for a two-particle tight binding model. *Comm. Math. Phys.* **283**, 479-489, 2008.

[8] CHULAEVSKY, V.; SUHOV, Y. Multi-particle Anderson localization: induction on the number of particles. *Math. Phys. Anal. Geom.* **12**, 117-139, 2009.

[9] CYCON, H. L.; FROESE, R. G.; KIRSCH, W.; SIMON, B. Schrödinger Operators with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry. Texts and Monographs in Physics Springer, Berlin, 1987.

[10] DE OLIVEIRA, C. R. Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics. Birkhaüser, Basel, v. **54**, Progress in Mathematical Physics, 2008.

[11] DE OLIVEIRA, C. R; PRADO, R. A. Dynamical Lower Bounds for 1D Dirac Operators. *Math. Z.* **259**, 45-60, 2008.

[12] ELGART, A.; TAUTENHAHN, M.; VESELIÉ, I. Anderson localization for a class of models with a sign-indefinite single-site potential via fractional moment method. *Annales Henri Poincaré* **12**, 1571-1599, 2011.

[13] FERNANDEZ, P. J. Medida e Integração. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, Projeto Euclides, 1976.

[14] FERNANDEZ, C. E; JUNIOR, N. C. B. Introdução as Funções de uma Variável Complexa. Textos Universitários, SBM, 2006.

[15] FRÖHLICH, J.; MARTINELLI, F.; SCOPPOLA, E.; SPENCER, T. Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model. *Comm. Math. Phys.* **101**, 21-46, 1985.

[16] FRÖHLICH, J.; SPENCER, T. Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy. *Comm. Math. Phys.* **88**, 151-184, 1983.

[17] GOLDSHEID, I. YA.; MOLCHANOV, S. A.; PASTUR, L. A random homogeneous Schrödinger operator has a pure point spectrum. *(Russian) Funkcional. Anal. I Prilozen.* **11**, 96, 1977.

[18] GRAF, G. M. Anderson localization and the space-time characteristic of continuum states. *J. Stat. Phys.* **75**, 337-346, 1994.

[19] HAMZA, E.; JOYE, A.; STOLZ, G. Dynamical localization for unitary Anderson models. *Math. Phys. Anal. Geom.* **12**, 381-444, 2009.

[20] HUNDERTMARK, D. A short introduction to Anderson localization. In Analysis and Stochastics of Growth Processes and Interface Models. *Oxford Scholarship Online Monographs*, 194-219, 2007.

[21] HUNZIKER, W.; SIGAL, I. M. The Quantum N-body problem. *J. Math. Phys.* vol **41**, nº6, 3448-3510, 2000.

[22] JAMES, B. R. Probabilidade: um curso em nível intermediário. 3ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, Projeto Euclides, 2011.

[23] KUNZ, H.; SOUILLARD, B. Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires. *Comm. Math. Phys.* **78**, 201-246, 1980/81.

[24] KLEIN, A. Multiscale analysis and localization of random operators. Panor. Synthéses 25, Random Schrödinger operators, 121-159 *Soc. Math. France, Paris*, 2008.

[25] KREYSZIG, E. Introductory Funcional Analysis with Aplications. Editora John Wiley and Sons, New York, 1978.

[26] REED, W.; SIMON, B. Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis, 2nd Edition, Academic Press, New York, 1980.

[27] RIO DEL, R.; JITOMIRSKAYA, S.; LAST, Y.; SIMON, B. Operators with singular continuous spectrum, IV. Hausdorff dimensions, rank one pertubations, and localization. *J. Anal. Math.* **69**, 153-200, 1996.

[28] RIO DEL, R.; JITOMIRSKAYA, S.; LAST, Y.; SIMON, B. What is localization?. *Phys. Rev. Lett.* **75**, 117-119, 1995.

[29] RUDIN, W. Real and Complex Analysis. 3rd Edition, McGraw-Hill, Boston, 1987.

[30] SIMON, B. Absence of ballistic motion. *Comm. Math. Phys.* **134**, 209-212, 1990.

[31] SIMON, B.; WOLFF, T. Singular continuous spectra under rank one pertubations and localization for random Hamiltonians. *Commun. Pure Appl. Math.* **39**, 75-90, 1986.

[32] SUZUKI, F. Fractional moment methods for Anderson localization with SAW representation. *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 1-13, 2013.

[33] SUZUKI, F. Anderson localization with self-avoiding walk representation. MSc Thesis University of British Columbia, 2010.

[34] STOLLMANN, P. Caught by disorder: bound states in random media. Progress in mathematical Physics **20**, Birkhäuser, Boston, 2001.

[35] STOLZ, G. An introduction to the mathematics of Anderson localization. Lecture notes of the Arizona School of Analysis with Applications, 2011.

[36] TAUTENHAHN, M. Localization criteria for Anderson models on locally finite graphs. *J. Stat. Phys.* **144**, 60-75, 2011.