

UNESP

Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá

Guaratinguetá

2005



CARD LEITOR NA  
FRENTE DO LIVRO

ANTONIO CARLOS AMARO DE FARIA JÚNIOR

1110000585



EQUIVALÊNCIA

SÓLITONS

***"Equivalência Clássica e Quântica  
entre Sólitos"***

Orientador: Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra

**ANTONIO CARLOS AMARO DE FARIA JÚNIOR**

**277**

Quadrimestral  
2014

INSTITUTO DE CIÊNCIAS  
DE SÃO CARLOS

BIBLIOTECA

ANTÔNIO CARLOS AMARO DE FARIA JÚNIOR

EQUIVALÊNCIA CLÁSSICA E QUÂNTICA ENTRE SÓLITONS

Dissertação apresentada à  
Faculdade de Engenharia do  
Campus de Guaratinguetá,  
Universidade Estadual Paulista,  
para a obtenção do título de  
Mestre em Física na área de  
Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Alvaro de Souza Dutra

Guaratinguetá  
2005

585

FACULDADE DE ENGENHARIA  
DE GUARATINGUETÁ

BIBLIOTECA

Data: \_\_\_\_\_  
Valor: \_\_\_\_\_  
C/D/T: \_\_\_\_\_

F224e Faria Júnior, Antônio Carlos Amaro de  
Equivalência clássica e quântica entre sólitons / Antônio Carlos  
Amaro de Faria Júnior . – Guaratinguetá : [s.n.], 2005  
79f. : il.

Bibliografia: f. 77-79  
Inclui apêndice  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade  
de Engenharia de Guaratinguetá, 2005  
Orientador: Prof. Dr. Álvaro Souza Dutra

1. Teoria quântica de campos 2. Sólitons I. Título

CDU 530.145



**“EQUIVALÊNCIA CLÁSSICA E QUÂNTICA ENTRE SÓLITONS”**

**ANTONIO CARLOS AMARO DE FARIA JÚNIOR**

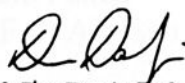
**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO**

**DE**

**“MESTRE EM FÍSICA”**

**PROGRAMA: FÍSICA**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

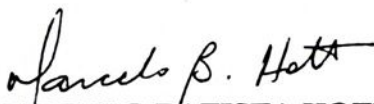


**Prof. Dr. Denis Dalmazi**  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA**  
Orientador / Unesp-Feg



**Prof. Dr. MARCELO BATISTA HOTT**  
Unesp-Feg



**Prof. Dr. HENRIQUE BOSCHI FILHO**  
UFRJ

*Junho de 2005*

## **DADOS CURRICULARES**

**ANTÔNIO CARLOS AMARO DE FARIA JÚNIOR**

|            |                                                                                                                            |
|------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NASCIMENTO | 14.07.1976 – SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP                                                                                      |
| FILIAÇÃO   | Antônio Carlos Amaro de Faria<br>Tereza Prado de Faria                                                                     |
| 1999/2002  | Curso de Graduação – Licenciatura em Física<br>Faculdade de Ciências Aplicadas – FACAP, São José<br>dos Campos / São Paulo |
| 2003/2005  | Curso de Pós-Graduação em Física, nível de Mestrado,<br>na Faculdade de Engenharia do Campus de<br>Guaratinguetá da UNESP  |



1. O Brasil é um país muito grande e muito bonito. Ele tem muitas cidades e muitas pessoas. O Brasil é um país muito bom.

2. O Brasil é um país muito bom. Ele tem muitas cidades e muitas pessoas. O Brasil é um país muito bom.

## AGRADECIMENTOS

Às pessoas que me acompanharam ao longo da vida, especialmente à minha mãe, que me ensinou a importância da fé e do amor.

Às pessoas que me ajudaram a superar as dificuldades da vida, especialmente à minha esposa, que me deu a força necessária para continuar em frente.

Às pessoas que me ajudaram a superar as dificuldades da vida, especialmente à minha filha, que me deu a alegria de ver crescer.

Às pessoas que me ajudaram a superar as dificuldades da vida, especialmente à minha família, que me deu o apoio necessário para continuar em frente.

Às pessoas que me ajudaram a superar as dificuldades da vida, especialmente à minha comunidade, que me deu a força necessária para continuar em frente.

*Ao grande João Paulo II que com seu testemunho de fé em nosso Senhor Jesus Cristo  
dignificou o sofrimento e a senilidade*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Álvaro de Souza Dutra pela orientação, sugestão, estímulo e competência com que conduziu este trabalho, ajudando-me e compreendendo as minhas dificuldades.

Aos professores do grupo de partículas e campos da Unesp-Campus de Guaratinguetá: Dr. Antônio S. de Castro, Dr. Denis Dalmazi e Dr. Marcelo B. Hott pelas enriquecidas discussões e pelo estímulo que recebi durante a preparação deste trabalho.

Aos colegas, aos professores e funcionários do curso de pós-graduação, pela convivência durante o tempo de trabalho.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Enfim a todos que de alguma maneira possibilitaram a realização desta dissertação.



DE FARIA JÚNIOR, A. C. A. **Equivalência Clássica e Quântica entre Sólitons**. 2005.

79 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.

## RESUMO

Em teoria quântica de campos, defeitos topológicos são soluções clássicas de equações de campo, não lineares. Nesta perspectiva, este trabalho tratará de algumas propriedades dessas soluções, entre elas, o mapeamento entre as soluções clássicas dos modelos SineGordon, Liouville,  $\lambda\phi^4$  e outros em  $1 + 1$  dimensões, no espaço de Minkowski. Este procedimento é realizado por meio de uma quantidade invariante que relaciona os modelos. A equivalência clássica é explorada no sentido relacionar as soluções dos correspondentes modelos e como consequência obter novas informações a respeito delas.

Considerações com respeito à estabilidade das excitações solitônicas foram realizadas no sentido de mostrar que, uma deformação na lagrangiana do sistema, pode reproduzir soluções mapeáveis, estáveis.

Analizamos também as dificuldades e consequências que surgem ao tentarmos estender a deformação para uma versão quântica dessa equivalência, ao nível de árvore, demonstrando a correspondência com o método empregado nos defeitos deformados.

Mostramos ainda que qualquer kink em  $1 + 1$  dimensões, proveniente de modelos com um campo escalar, pode ser gerado de uma simples equação diferencial linear de primeira ordem. Assim tratamos uma extensa variedade de modelos cujas propriedades foram discutidas pelo método desenvolvido nesta dissertação.

**PALAVRAS-CHAVE:** Sólitons, defeitos deformados, soluções BPS, mapeamento, estabilidade linear.



DE FARIA JÚNIOR, A. C. A. **Classical and Quantum Equivalence of Solitons**. 2005.

79 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2005.

## **ABSTRACT**

In quantum field theory, topologic defects are classical solutions of non-linear field equations. In this perspective, this work will treat some properties about these solutions as the mapping between the Sine-Gordon, Liouville,  $\lambda\phi^4$  models classical solutions, and others in  $1 + 1$  dimensions, in Minkowski space. This is going to be done by using an invariant quantity which relates the models. The classical equivalence is explored in order to relate the solutions of the corresponding models and, as a consequence, try to get new information about them.

Considerations concerning to the stability solitonic excitations were realized in order to show that a transformation in lagrangian of the system can reproduce stable mapable solutions.

We also analyse the difficulties and consequences which appear when one try to extend the deformation in order to take into account the quantum version of the models.

We also show, that any kink in  $1 + 1$  dimensions, coming from models with just one scalar field, can be obtained from a master linear first-order differential equation. In this way, we treat a large variety of models and present a new one by using the method developed in this dissertation.

**KEYWORDS:** Solitons, topologic defects, BPS solutions, mapping, linear stability.



# Índice

|          |                                                                                     |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução</b>                                                                   | <b>11</b> |
| <b>2</b> | <b>Sólitons Clássicos</b>                                                           | <b>14</b> |
| 2.1      | O método usual . . . . .                                                            | 15        |
| 2.1.1    | Kinks . . . . .                                                                     | 18        |
| 2.2      | O método de Bogomol'nyi . . . . .                                                   | 21        |
| 2.3      | Caracterização topológica das soluções BPS . . . . .                                | 21        |
| <b>3</b> | <b>Equivalência clássica e quântica entre sólitons</b>                              | <b>25</b> |
| 3.1      | Introdução . . . . .                                                                | 25        |
| 3.2      | Mapeamento <sup>1</sup> entre os modelos Sine-Gordon e $\lambda\varphi^4$ . . . . . | 26        |
| 3.3      | Mapeamento entre os modelos de Liouville e $\lambda\varphi^4$ . . . . .             | 27        |
| 3.4      | Equivalência para a equação diferencial de 2ª ordem . . . . .                       | 31        |
| 3.5      | Considerações acerca da energia . . . . .                                           | 32        |
| <b>4</b> | <b>Estabilidade Linear</b>                                                          | <b>34</b> |
| 4.1      | Introdução . . . . .                                                                | 34        |
| 4.2      | Linearização da equação de movimento . . . . .                                      | 34        |
| 4.2.1    | Estabilidade das soluções BPS . . . . .                                             | 37        |
| 4.3      | Estabilidade linear para a lagrangiana deformada . . . . .                          | 39        |
| 4.4      | Aplicação do método . . . . .                                                       | 45        |
| 4.4.1    | Cálculo da energia . . . . .                                                        | 48        |

---

<sup>1</sup>Para o modelo  $\lambda\varphi^4$ , neste capítulo, adotamos a letra grega  $\varphi$ .



|          |                                                   |           |
|----------|---------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Origem das soluções BPS</b>                    | <b>50</b> |
| 5.1      | O método . . . . .                                | 51        |
| 5.2      | Solução para o modelo $\lambda\phi^4$ . . . . .   | 52        |
| 5.3      | Solução para o modelo de Sine-Gordon . . . . .    | 53        |
| 5.4      | Solução para o modelo de Liouville . . . . .      | 54        |
| 5.5      | O modelo Sinh-Gordon duplo . . . . .              | 54        |
| 5.6      | O modelo de Sine-Gordon duplo . . . . .           | 56        |
| 5.7      | Potenciais com vácuos não convencionais . . . . . | 57        |
| 5.8      | Potencial interpolante . . . . .                  | 58        |
| 5.9      | Caso em que $B > A$ . . . . .                     | 60        |
| 5.10     | Caso em que $A \rightarrow 0$ . . . . .           | 61        |
| 5.11     | Caso em que $A > B$ . . . . .                     | 62        |
| <b>6</b> | <b>Conclusões e comentários</b>                   | <b>65</b> |
| <b>A</b> | <b>Boost de Lorentz</b>                           | <b>68</b> |
| <b>B</b> | <b>Compatificação na teoria de Liouville</b>      | <b>71</b> |
| <b>C</b> | <b>Energia dos defeitos deformados</b>            | <b>74</b> |
| <b>D</b> | <b>Estabilidade das soluções deformadas</b>       | <b>75</b> |
|          | <b>Referências</b>                                | <b>77</b> |

# Lista de Figuras

|     |                                                                                                                                               |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2-1 | Potencial do modelo $\lambda\phi^4$ com $a = \lambda = 1$ . . . . .                                                                           | 18 |
| 2-2 | Perfil típico para o kink e o antikink do modelo $\lambda\phi^4$ com $a = \lambda = 1$ . . . .                                                | 19 |
| 2-3 | Densidade de energia $\varepsilon(x)$ do kink, com $m^4/2\lambda = 1$ . . . . .                                                               | 20 |
| 3-1 | Potencial Sine-Gordon com $\lambda = 1$ . . . . .                                                                                             | 26 |
| 3-2 | Perfil do kink do modelo Sine-Gordon . . . . .                                                                                                | 27 |
| 3-3 | Potencial de Liouville com $m = \beta = 1$ . . . . .                                                                                          | 28 |
| 3-4 | Perfil típico para o kink do modelo de Liouville . . . . .                                                                                    | 29 |
| 3-5 | Perfil da segunda solução do modelo de Liouville, onde as constantes $\beta, m$<br>e $\gamma$ foram normalizadas . . . . .                    | 29 |
| 3-6 | Solução não topológica do modelo $\lambda\phi^4$ obtida a partir do modelo de Liou-<br>ville, onde as constantes estão normalizadas . . . . . | 30 |
| 4-1 | Aspecto de $V(\varphi)$ para valores ímpares de $n$ , onde as constantes foram<br>normalizadas . . . . .                                      | 46 |
| 4-2 | Aspecto de $V(\varphi)$ para valores pares de $n$ , onde as constantes foram nor-<br>malizadas . . . . .                                      | 46 |
| 4-3 | Perfil da solução $\varphi(x)$ para $a = 1$ . . . . .                                                                                         | 48 |
| 5-1 | Potencial Double Sine-Gordon com $\zeta = 1$ e $n = 1$ . . . . .                                                                              | 55 |
| 5-2 | Kink do modelo double Sinh-Gordon . . . . .                                                                                                   | 55 |
| 5-3 | Potencial double Sine-Gordon com $\varepsilon = B = 1$ . . . . .                                                                              | 56 |
| 5-4 | Kink do modelo double Sine-Gordon . . . . .                                                                                                   | 57 |
| 5-5 | Potencial não convencional, com $\lambda = m = 1$ . . . . .                                                                                   | 57 |
| 5-6 | Kink do potencial não convencional, com $\lambda = m = 1$ . . . . .                                                                           | 58 |
| 5-7 | Aspecto do potencial interpolante com $A = 1$ e $B = 2$ . . . . .                                                                             | 60 |

|      |                                                                                      |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5-8  | Kink do potencial interpolante para $A = 1$ e $B = 2$ . . . . .                      | 60 |
| 5-9  | Aspecto do potencial interpolante com $A \rightarrow 0$ e $B = -1$ . . . . .         | 61 |
| 5-10 | Configuração BPS do potencial interpolante quando $A \rightarrow 0$ , e $B = -1$ . . | 62 |
| 5-11 | Potencial interpolante com $A = 2$ e $B = 1$ . . . . .                               | 63 |
| 5-12 | Configuração BPS do potencial interpolante para $A = 2$ , $\lambda = 1$ e $B = 1$ .  | 63 |

## Capítulo 1

# Introdução

Este trabalho trata de uma classe de soluções de equações de campo em teorias de gauge não abelianas, especificamente no contexto da teoria de Yang-Mills em quatro dimensões. O foco principal é a análise das soluções de tipo BPS (Bogomolny-Prasad-Sommerfeld) para o potencial interpolante, considerando diferentes valores dos parâmetros  $A$  e  $B$ . A primeira parte do capítulo apresenta uma revisão dos conceitos básicos da teoria de gauge e das equações de movimento. A segunda parte discute as propriedades das soluções de tipo BPS, incluindo a análise da energia e a estabilidade das configurações. A terceira parte apresenta os resultados numéricos e analíticos para as configurações BPS em diferentes regimes dos parâmetros.

Na primeira seção, discutimos a teoria de gauge em quatro dimensões e as equações de movimento para os campos de gauge e os campos de matéria. Em seguida, apresentamos a formulação do problema de encontrar soluções de tipo BPS, que são soluções das equações de movimento que minimizam a energia para uma dada carga topológica. A segunda seção trata da análise das soluções de tipo BPS para o potencial interpolante, considerando diferentes valores dos parâmetros  $A$  e  $B$ . A terceira seção apresenta os resultados numéricos e analíticos para as configurações BPS em diferentes regimes dos parâmetros.

Na quarta seção, discutimos as propriedades das soluções de tipo BPS, incluindo a análise da energia e a estabilidade das configurações. A quinta seção apresenta os resultados numéricos e analíticos para as configurações BPS em diferentes regimes dos parâmetros. A sexta seção trata da conclusão e das perspectivas futuras.

$$u \neq \text{const} \Rightarrow \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{2} \phi^2 = 0$$

Na sétima seção, discutimos as propriedades das soluções de tipo BPS, incluindo a análise da energia e a estabilidade das configurações. A oitava seção apresenta os resultados numéricos e analíticos para as configurações BPS em diferentes regimes dos parâmetros.

# Capítulo 1

## Introdução

Introdutoriamente o presente trabalho busca obter informações sobre teoria quântica de campos relativística a partir das soluções clássicas de equações de campo não lineares. Isto é resultado da possibilidade de soluções para um número cada vez maior de equações de onda relativística não lineares, que vêm sendo objeto de atenção desde a década de 1970 [1][2].

Estas soluções clássicas correspondem em alguns casos a equações de campo na métrica de Minkowski. Mais especificamente tais soluções terão densidade de energia finita, localizada e não dispersiva. Essa não dispersividade da energia e sua concentração no espaço possibilita que o pacote de energia então formado se movimente com velocidade uniforme, mantendo sua forma inalterada. Tais soluções, na literatura especializada, são chamadas de sólitons ou ondas solitárias [3].

Outro aspecto importante dessas soluções são suas propriedades topológicas [4]. Para que elas tenham energia finita é necessário que o campo tenha comportamento assintótico que leve aos diferentes mínimos do potencial. Assim só ocorrerá  $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$  e conseqüentemente uma carga topológica diferente de zero, ou seja

$$Q = W[\phi(\infty)] - W[\phi(-\infty)] \neq 0$$

se o potencial tiver mais de um mínimo. De certa maneira pode-se dizer que a estabilidade das soluções solitônicas na teoria de campo não linear é uma consequência das



propriedades topológicas do espaço.

Desde que partículas elementares na natureza sejam também pacotes de energia localizados e que possam ser descritas por alguma teoria de campo relativística, o estudo dos sólitons pode eventualmente ser estendido à física de partículas, embora este seja um estágio de difícil desenvolvimento [3].

Apesar de serem menos usuais que sistemas lineares, os não lineares, particularmente aqueles que têm excitações solitônicas, são também importantes no modelamento de sistemas biológicos e químicos [5]. Uma importante aplicação de sóliton, por exemplo, está relacionada com a condutividade elétrica através das moléculas de DNA [6].

Existem vários modelos de soluções solitônicas, por exemplo, para os potenciais de Sine-Gordon, Liouville,  $\lambda\phi^4$  e outros em  $1 + 1$  dimensão. Entretanto em nossa investigação consideraremos a possibilidade de se mapear clássica e quanticamente informações entre esses modelos [7]. Este procedimento deverá ser feito utilizando-se uma quantidade invariante que relaciona os modelos, e o método desenvolvido nesta dissertação é semelhante ao usado por D. Bazeia e colaboradores nos assim chamados sólitons deformados [8].

A extensão do método a fim de incluir uma abordagem quântica implica em algumas consequências, como por exemplo a relação entre a energia dos sistemas deformados e os não deformados.

Um outro aspecto importante desses modelos é que eles apresentam quebra espontânea de simetria, onde usualmente o perfil topológico pode estar presente bem como nas paredes de domínio [9][10], vórtices, cordas [11] e monopólos.

Nos capítulos seguintes será discorrido a respeito de algumas propriedades das soluções solitônicas e do ingrediente que viabiliza o mapeamento de qualquer par de kinks em  $1 + 1$  dimensões, o que deverá ser feito através de um método usual, que implica em buscar soluções das equações de movimento, e através das soluções BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) [12], as quais são provenientes de equações diferenciais não lineares de primeira ordem que minimizam a energia do sistema.

Outra característica importante de nossa investigação, que será discorrida no capítulo



4, é que tanto as soluções BPS como as soluções provenientes da deformação solitônica, quando sujeitas a pequenas perturbações não divergem, garantindo assim a estabilidade linear de tais soluções. Em nossa análise, entretanto, concentramos a atenção na modificação da lagrangiana do sistema capaz de informar-nos a respeito da equivalência entre as soluções de interesse.

O resultado que encontramos quando conduzimos nosso estudo para um tratamento quântico desta equivalência, sugere uma particularidade no espectro de soluções estáveis. Essa particularidade vincula tais soluções a uma condição de estabilidade, que nos norteia na busca de soluções que sirvam de exemplos de aplicação do método, além de se reduzir à mesma relação que conduz ao mapeamento entre os campos, tratado nos defeitos deformados. Uma visão mais ampla com respeito à equivalência é tratada no capítulo 5 onde demonstramos que qualquer kink em  $1+1$  dimensões, provenientes de modelos com um campo escalar, pode ser obtido a partir de uma equação diferencial linear de primeira ordem. Utilizamos então esse procedimento a fim de tratar uma ampla variedade de sistemas, bem como introduzir um novo modelo cujas propriedades são então analisadas através do método desenvolvido nesta dissertação.



## Capítulo 2

### Sólitons Clássicos

Os nomes ondas solitárias e sólitons referem-se a certas soluções de equações de onda não lineares. Inicialmente no sentido de esboçar um panorama qualitativo das características dessas soluções, considere a mais simples de todas as equações relativísticas

$$\square\phi = \partial^\mu \partial_\mu \phi = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) = 0, \quad (2.1)$$

onde  $\phi(x, t)$  é um campo escalar real em (1+1) dimensões e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. Algumas propriedades dessa equação são relevantes para a nossa discussão:

(i) a sua linearidade

(ii) a sua não dispersividade.

A primeira propriedade está relacionada ao fato de, por exemplo, duas soluções  $f_1(x - ct)$  e  $f_2(x + ct)$  que sejam pacotes de onda localizados que se aproximam em sentidos contrários, sem distorção das suas formas, colidirem e imediatamente após a colisão recuperarem sua forma e velocidade originais. A segunda propriedade é que embasa a primeira, está relacionada ao fato de que qualquer função bem comportada da forma  $f(x \pm ct)$  é uma solução de (2.1). Particularmente se nós escolhermos uma função localizada  $f$ , podemos a princípio construir um pacote de onda localizado que se deslocará com velocidade uniforme  $v = c$  sem distorção da sua forma. Isto está relacionado ao fato de que as soluções do tipo onda plana  $\cos(kx \pm wt)$  e  $\sin(kx \pm wt)$  com  $w = kc$  formarem



um conjunto completo de soluções de (2.1), formando uma base completa no espaço das funções. Qualquer função localizada bem comportada, digamos  $f(x - ct)$ , pode ser escrita como

$$f(x - ct) = \int dk [a_1(k) \cos(kx - wt) + a_2(k) \sin(kx - wt)]. \quad (2.2)$$

A razão pela qual o pacote de onda  $f(x - ct)$  se desloca sem modificação da sua forma com velocidade  $c$  pode ser entendida pelo fato de todas as componentes do pacote de ondas planas possuírem a mesma velocidade  $w/k = c$ . Portanto as propriedades (i) e (ii) estão presentes em (2.1) devido a linearidade e a não dispersividade daquela equação. No entanto, as equações de onda em várias áreas da física são muito mais complexas. Elas podem conter termos não lineares, termos dispersivos e ainda campos acoplados. Uma questão porém alvora no horizonte das soluções de equações de campo dessa natureza. Podem estas equações apesar de sua complexidade comparada à equação (2.1) possuírem soluções que obedeçam (i) e (ii)?

De fato considere a equação

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(x, t) + \lambda_1 \phi(x, t) + \lambda_2 \phi^3(x, t) = 0 \quad (2.3)$$

onde estão presentes o termo não linear  $\lambda_2 \phi^3$  e o termo de dispersividade representado por  $\lambda_1 \phi$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são constantes que deixam (2.3) adimensional. É possível que em equações como esta, estes termos se compensem de modo que as propriedades (i) e (ii) se satisfaçam. Neste caso estamos tratando de sólitons. As propriedades gerais dessas soluções em sistemas simples podem ser obtidas a priori a partir de dois caminhos: o método usual [3] e o método de Bogoml'nyi [15].

## 2.1 O método usual

Considere um campo escalar  $\phi(x, t)$  cuja dinâmica é governada pela densidade de lagrangiana invariante de Lorentz em 1+1 dimensões

$$L(x, t) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \phi'^2 - V(\phi), \quad (2.4)$$



onde

$$\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi' \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}. \quad (2.5)$$

Quando o princípio variacional

$$\delta \left[ \int dt \int_{-\infty}^{\infty} dx L(x, t) \right] = 0, \quad (2.6)$$

é aplicado a ação em (2.6), obtém-se a equação de onda

$$\square \phi \equiv \ddot{\phi} - \phi'' = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (2.7)$$

Esta é uma equação de onda cujos termos não lineares dependem da escolha de  $V(\phi)$ .

A equação conserva, a medida que  $t$  varia, a energia funcional total  $E$  dada por

$$E(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right). \quad (2.8)$$

É interessante considerarmos sistemas em que  $V(\phi)$  seja limitado inferiormente

$$V(\phi) \geq V(\phi)_{\text{Mínimo}}, \quad (2.9)$$

em que existam  $M$  pontos de mínimo absoluto ou mais formalmente

$$\phi = g^i, i = 1, \dots, M. \quad (2.10)$$

Então a energia funcional é também minimizada quando o campo  $\phi(x, t)$  é constante no espaço-tempo para qualquer um desses valores.

A partir de agora, o nosso interesse recai sobre as soluções estáticas, para as quais 2.7 se reduz

$$\phi'' = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad (2.11)$$

uma vez que, como pode-se fazer um boost de Lorentz a fim de obter o campo em qualquer instante [3], podemos calculá-lo a partir das soluções estáticas acima - veja o Apêndice

A.

Neste caso as soluções estão sujeitas a algumas condições de contorno. A onda solitária deve ter energia finita e densidade de energia localizada. E em vista de (2.10) o campo deve se aproximar, quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , de um dos valores  $g^i$ . Entretanto se  $V(\phi)$  tem um único mínimo em  $\phi = g$ , então a solução estática deve ter  $\phi(x) \rightarrow g$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Se houver vários mínimos degenerados, então  $\phi(x)$  deve tender para algum valor de  $g^i$  quando  $x \rightarrow -\infty$  e qualquer outro valor  $g^i$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

Sujeita a essas condições de contorno, pode-se obter uma solução de (2.7), uma vez que se trata de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, por quadratura, qualquer que seja  $V(\phi)$ .

Assim multiplicando a equação (2.11) por  $\phi'$  e integrando-a tem-se

$$\int \phi' \phi'' dx = \int \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi' dx, \quad (2.12)$$

ou ainda

$$\frac{1}{2} \phi'^2 = V(\phi), \quad (2.13)$$

o que resulta em

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm [2V(\phi)]^{1/2} \quad (2.14)$$

e que após a integração obtém-se

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{[2V(\phi)]^{1/2}}, \quad (2.15)$$

onde  $x_0$ , a constante de integração, é qualquer ponto arbitrário do espaço onde o campo tem valor  $\phi(x_0)$ . É oportuno salientar que a quadratura não esgota as soluções da equação de 2ª ordem (2.11). Nossa recente discussão a respeito das condições de contorno das soluções de (2.11), nos diz que quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $\phi(x)$  deve se aproximar da vizinhança dos mínimos de  $V(\phi)$ . Consequentemente  $V(\phi)$  se anulará somente quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Assim o integrando (2.15) será portanto não singular exceto quando  $x \rightarrow \infty$  ou  $x_0 \rightarrow -\infty$ . A solução  $\phi(x)$  pode ser obtida a princípio explicitamente, dado um  $x_0$  e um  $\phi(x_0)$ , pela respectiva integração e inversão de (2.15). Naturalmente, na prática, isto pode ser

realizado analiticamente, dada a integrabilidade de  $V(\phi)$ .

Nesse sentido, a análise está orientada para a busca de soluções para equações diferenciais ordinárias, de segunda ordem, porém não lineares. A não linearidade, representada pelo potencial  $V(\phi)$ , está relacionada à existência de mais de um mínimo do modelo. Na verdade, busca-se encontrar mínimos desse potencial, para então, interpretar estas soluções que minimizam o potencial como soluções do vácuo do sistema. Assim, a partir desses argumentos, é interessante que o potencial seja limitado inferiormente, uma função bem comportada e não negativa, do campo escalar real  $\phi$ .

### 2.1.1 Kinks

Como uma aplicação deste método, vamos considerar a solução BPS da teoria  $\lambda\phi^4$  [13][14]. A densidade de lagrangiana tem a forma (2.4) onde o potencial do modelo é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda(\phi^2 - a^2)^2, \quad (2.16)$$

com  $\lambda$  e  $a$  constantes. Este potencial possui dois mínimos e é limitado inferiormente, conforme mostra a figura 2-1. A equação do movimento então será

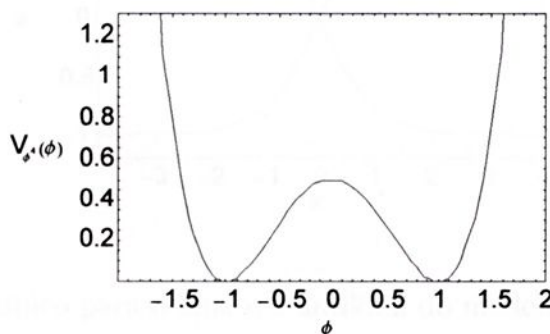


Figura 2-1: Potencial do modelo  $\lambda\phi^4$  com  $a = \lambda = 1$

$$\ddot{\phi} - \phi'' = -2\lambda \phi(\phi^2 - a^2). \quad (2.17)$$

Pode-se notar que (2.16) se anulará em dois mínimos degenerados  $\phi = \pm\sqrt{a}$ . Con-

sequentemente as soluções devem tender para  $\pm\sqrt{a}$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , respectivamente. Para a solução de campo estático encontramos a equação

$$\phi'' = \frac{dV}{d\phi} = 2\lambda\phi(\phi^2 - a^2), \quad (2.18)$$

que pode ser resolvida usando (2.15) para dar

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{\lambda(\phi^2 - a^2)}. \quad (2.19)$$

Escolhendo  $\phi(x_0) = 0$ , integrando sobre  $\phi$  e invertendo a equação a fim de obter  $\phi$  em função de  $x$ , nós temos

$$\phi(x) = \pm a \tanh \left[ \frac{\sqrt{2\lambda}a}{2}(x - x_0) \right], \quad (2.20)$$

onde os sinais  $\pm$  referem-se respectivamente ao kink e ao antikink conforme se pode ver da figura 2-2.

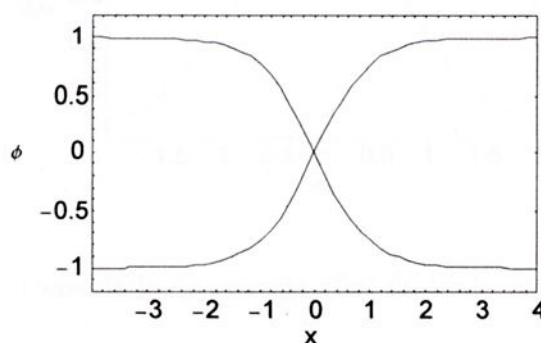


Figura 2-2: Perfil típico para o kink e o antikink do modelo  $\lambda\phi^4$  com  $a = \lambda = 1$ .

É interessante destacarmos algumas propriedades simétricas da densidade de lagrangiana sob as transformações

$$x \leftrightarrow -x \quad (2.21)$$

e

$$\phi \leftrightarrow -\phi, \quad (2.22)$$

que separadamente estão refletidas em relações que assumem, particularmente, uma forma simples ao escolhermos  $x_0 = 0$ ,

$$\phi_{kink}(x) = -\phi_{antikink}(x) = \phi_{antikink}(-x). \quad (2.23)$$

A densidade de energia da solução tipo kink será, usando (2.13),

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\phi')^2 + V(\phi) = 2V(\phi), \quad (2.24)$$

e usando (2.20) vemos que

$$\varepsilon(x) = \left(\frac{\lambda a^4}{2}\right) \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{a(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right], \quad (2.25)$$

cuja aparência pode ser vista na figura 2-3.

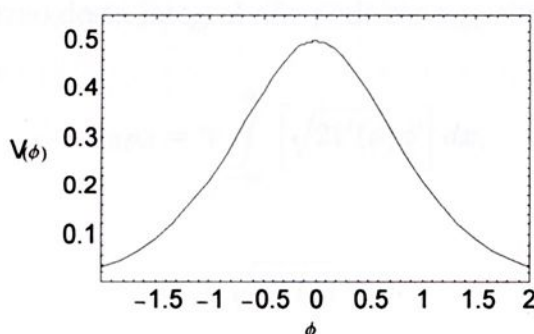


Figura 2-3: Densidade de energia  $\varepsilon(x)$  do kink, com  $m^4/2\lambda = 1$

A energia total do kink, algumas vezes chamada de massa clássica do kink  $M_{cl}$  é dada por

$$M_{cl} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varepsilon(x) = \frac{2\sqrt{2}\lambda a^3}{3}, \quad (2.26)$$

que é portanto finita.

## 2.2 O método de Bogomol'nyi

A energia do sistema cuja densidade de lagrangiana é dada por

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.27)$$

para a configuração estática é

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \phi'^2 + V(\phi) \right) dx. \quad (2.28)$$

Bogomol'nyi [15] a reescreveu na forma

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \phi' \pm \sqrt{2V(\phi)} \right)^2 \mp \sqrt{2V(\phi)} \phi' \right] dx. \quad (2.29)$$

Como o primeiro termo desta integral não pode ser negativo, então a energia mínima ou *BPS*, será dada por

$$E_{BPS} = \mp \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sqrt{2V(\phi)} \phi' \right] dx, \quad (2.30)$$

com a condição

$$\phi' \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (2.31)$$

É interessante ressaltar que a equação acima é de primeira ordem e suas soluções são as mesmas soluções da equação de movimento (2.11), já que (2.31) é exatamente (2.14). Podemos ainda observar que o método de Bogomol'nyi, além de possibilitar a obtenção da equação diferencial de primeira ordem (2.14), permite escrever a energia *BPS* associada à configuração estática.

## 2.3 Caracterização topológica das soluções BPS

Vamos considerar um campo escalar  $\phi$  em 1+1 dimensão. É interessante a análise de sistemas em que  $V(\phi)$ , conforme exposto na seção 2.1, seja limitado inferiormente e tenha

um número discreto de mínimos degenerados, onde o mesmo se anule. Naturalmente, estamos interessados em soluções não singulares com energia finita. Assim o campo, seja ele estático ou dependente do tempo, deve tender para algum mínimo de  $V(\phi)$  em qualquer ponto do espaço para que a energia  $E(\phi)$  em (2.8) seja finita. Em uma dimensão espacial, esses pontos são  $x = \pm\infty$ . Considere  $x = \infty$ , inicialmente, para um dado instante  $t_0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x, t_0) \equiv \phi(\infty, t_0) = \phi_1 \quad (2.32)$$

onde  $\phi_1$  é um mínimo de  $V(\phi)$ . Então a medida que  $t$  varia o campo  $\phi$  mudará continuamente com  $t$  em todo  $x$  governado pela equação diferencial (2.7), e não poderá saltar de  $\phi_1$  para outro mínimo discreto se variar continuamente com  $t$ . Portanto  $\phi(\infty, t)$  deve permanecer estacionário em  $\phi_1$ . O mesmo argumento pode ser aplicado para  $x \rightarrow -\infty$ , onde  $\phi(-\infty, t) = \phi_2$ , deve ser também independente do tempo e um mínimo de  $V(\phi)$ , mas não necessariamente o mesmo que  $\phi_1$ . Nós podemos, portanto, dividir todo o espaço das soluções não singulares com energia finita em setores caracterizados por dois índices, designando respectivamente os valores de  $\phi(\infty)$  e  $\phi(-\infty)$ . Estes setores são topologicamente inconectáveis, no sentido de que os campos de um setor não podem ser distorcidos continuamente para os campos de outro setor sem a violação da propriedade de que a energia permaneça finita. Em particular desde que a evolução temporal seja um exemplo de distorção contínua, uma configuração de campo de qualquer um dos setores permanece dentro daquele setor à medida que o tempo evolui. Naturalmente quando  $V(\phi)$  tem um único mínimo,  $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$ , e portanto existe somente um setor. Como ilustração considere o sistema (2.16) do item 2.1.1. O potencial tem dois mínimos degenerados em  $\phi = \pm a$ . Consequentemente todas as soluções não singulares com energia finita, estática ou dependentes temporais se encontram em 4 setores topológicos caracterizados pelos pares de índices,  $(-a, a), (a, -a), (-a, -a)$  e  $(a, a)$  respectivamente, que representam os valores de  $[\phi(x = -\infty), \phi(x = +\infty)]$ . Assim o kink, o antikink e as soluções constantes triviais  $\phi(x) = \mp a$  são membros dos quatro setores respectivamente. Quando o kink e o antikink se aproximam um do outro a configuração de campo permanece no setor  $(-a, -a)$ . Embora não saibamos eventualmente calcular o que acontece depois de sua colisão, a configuração resultante de campos permanecerá no setor  $(-a, -a)$ . Essa análise percorrida até aqui nos leva a definir uma quantidade frequentemente chamada de carga

topológica, que pode ser definida como

$$Q = W(\phi = \infty) - W(\phi = -\infty), \quad (2.33)$$

e associada a ela existe uma corrente conservada

$$k^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi), \quad (2.34)$$

onde a notação de soma covariante

$$\mu, \nu = 0, 1; \quad g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

foi usada e  $\varepsilon^{\mu\nu}$  é o tensor antisimétrico. Naturalmente

$$\partial_\mu k^\mu = 0 \text{ e } Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx k_0. \quad (2.36)$$

É interessante notar que o kink e o antikink são soluções topológicas pois  $Q \neq 0$ , ou ainda, para um campo escalar em 1+1 dimensões, soluções estáticas não triviais são necessariamente topológicas. Estes índices topológicos são diferentes da maioria das quantidades conservadas, como energia, momento, carga e ou simetrias contínuas da lagrangiana sob uma translação espacial, temporal, grupos internos etc. Contrastantemente os índices topológicos são condições de contorno conservadas porque a energia do sistema deve ser finita. Em alguns casos estes índices estão relacionados a um certo tipo de quebra de alguma simetria. Isto é, suponha que a lagrangiana e  $V(\phi)$  sejam invariantes sob alguma transformação de simetria no campo  $\phi(x)$ . Se  $V(\phi)$  tem um único mínimo em  $\phi = \phi_0$ , então  $\phi_0$  deve permanecer invariante sob tal transformação [16][17]. No entanto considerando o caso de setores topológicos não triviais, precisamos ter dois ou mais mínimos degenerados. Então enquanto o grupo completo de mínimos é invariante sob a transformação, cada mínimo individual, não necessariamente o será. Por exemplo, o sistema (2.16) que permite 4 setores topológicos, é invariante sob a transformação  $\phi \leftrightarrow -\phi$ . Entretanto dois de seus mínimos,  $\phi = -a$  e  $\phi = a$ , não o são, individualmente.

Na realidade, um transforma-se no outro. Este fato é conhecido como quebra espontânea de simetria e tem grande importância em teoria quântica, bem como em mecânica estatística de sistemas de campos.

## Capítulo 3

# Equivalência clássica e quântica entre solitons

## 3.1 Introdução

Consideremos, inicialmente, uma partícula clássica movendo-se em um potencial  $V(x)$ . A equação de movimento é dada por

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx} \quad (3.1)$$

onde  $m$  é a massa da partícula. A energia total da partícula é dada por

$$E = \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) \quad (3.2)$$

onde  $E$  é a energia total da partícula. A equação de movimento pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))} \quad (3.3)$$

## Capítulo 3

# Equivalência clássica e quântica entre sólitons

### 3.1 Introdução

Como foi exposto nos capítulos precedentes o ingrediente que possibilita o mapeamento entre qualquer par de kinks em 1+1 dimensões provém do cálculo das soluções BPS

$$\frac{d\phi}{dx} \pm \sqrt{2V(\phi)} = 0. \quad (3.1)$$

Assim, pode-se estabelecer uma quantidade invariante responsável pela conexão entre os kinks de diferentes modelos [7]

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}} = x - x_0 = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2V(\varphi)}}. \quad (3.2)$$

Este capítulo tratará das propriedades deste mapeamento<sup>1</sup> entre os diferentes kinks, da extensão do método para o caso de equações diferenciais de segunda ordem, não lineares e das consequências para a análise de uma versão quântica desta equivalência.

---

<sup>1</sup>Por simplicidade, adotamos as letras gregas  $\phi$  e  $\varphi$  para o mapeamento entre os modelos



## 3.2 Mapeamento<sup>2</sup> entre os modelos Sine-Gordon e $\lambda\varphi^4$ .

O modelo Sine-Gordon é caracterizado pelo potencial

$$V_{SG}(\phi) = \lambda/2 \cos(\phi) - 1, \quad (3.3)$$

onde  $\lambda$  é uma constante de acoplamento, [3], cujo aspecto é mostrado na figura 3-1.

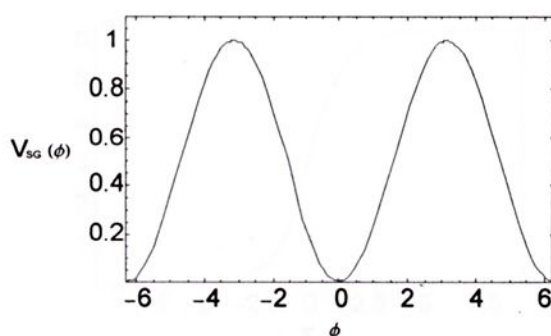


Figura 3-1: Potencial Sine-Gordon com  $\lambda = 1$

Este sistema é muito importante em modelos bidimensionais de partículas elementares, surgindo como versão bosonizada de férmions de Dirac massivos em 1+1 dimensões [18] e também em física do estado sólido. O objetivo é obter o sóliton do modelo Sine-Gordon através do modelo  $\lambda\varphi^4$ , que por sua vez é caracterizado pelo potencial

$$V_{\varphi^4}(\varphi) = \frac{\lambda}{2}(\varphi^2 - a^2)^2. \quad (3.4)$$

Isto é feito integrando a relação (3.2), para os respectivos modelos (3.3) e (3.4), a fim de se obter a seguinte relação que conecta estes dois modelos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left[ \tan \left( \frac{\phi}{2} \right) \right] = -\frac{1}{a} \arctan h \left( \frac{\varphi}{a} \right). \quad (3.5)$$

<sup>2</sup>Para o modelo  $\lambda\varphi^4$ , neste capítulo, adotamos a letra grega  $\varphi$ .

Substituindo o kink do modelo  $\varphi^4$

$$\varphi_{\pm}(x) = \pm a \tanh[\lambda a(x + x_0)], \quad (3.6)$$

na equação (3.5), obtém-se o kink correspondente do modelo de Sine-Gordon

$$\phi(x) = \arctan e^{\sqrt{2}a(x-x_0)}, \quad (3.7)$$

como pode-se ver na figura 3-2.

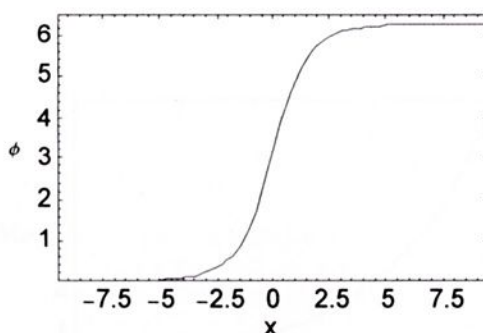


Figura 3-2: Perfil do kink do modelo Sine-Gordon

### 3.3 Mapeamento entre os modelos de Liouville e $\lambda\varphi^4$ .

Um outro modelo, que quando mapeado pelo modelo  $\varphi^4$ , produz interessantes consequências é o modelo de Liouville - veja Apêndice B. Tal modelo tem um significado geométrico: quando o tensor métrico para o espaço curvo bidimensional é escrito como

$$\gamma_{\mu\nu} = e^{\beta\phi} g_{\mu\nu}, \quad (3.8)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo plano, então a curvatura escalar é dada por

$$R = \beta e^{-\beta\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi. \quad (3.9)$$

Conseqüentemente as soluções para a sua equação de movimento

$$\square\phi + (m^2/\beta)e^{\beta\phi} = 0, \quad (3.10)$$

determinam superfícies bidimensionais com curvatura negativa constante [19][20].

O modelo de Liouville é caracterizado pelo potencial

$$V_{\text{Liouville}}(\eta) = \left(\frac{m}{\beta}\right)^2 e^{\beta\phi}, \quad (3.11)$$

onde  $\beta$  e  $m$  são constantes.

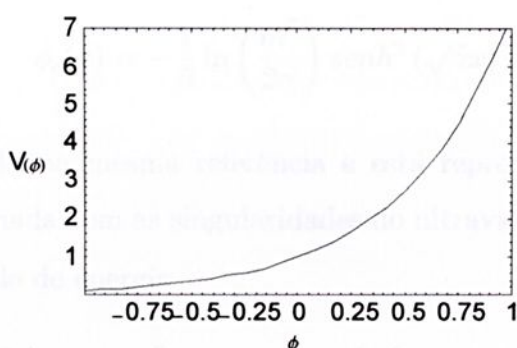


Figura 3-3: Potencial de Liouville com  $m = \beta = 1$

O modelo de Liouville ao ser resolvido através do modelo  $\varphi^4$ , considerando (3.2), resulta na equação

$$\left(\frac{2}{m}\right) e^{-\frac{\beta\phi}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{a} \arctan h\left(\frac{\varphi}{a}\right), \quad (3.12)$$

onde, por simplicidade, adotou-se  $\lambda = 1$ .

Ao se substituir o kink do modelo  $\varphi^4$  (3.6), em (3.12), encontra-se

$$\phi(x) = -\frac{1}{\beta} \ln\left(\frac{m^2}{2} x^2\right), \quad (3.13)$$

cujas aparência é mostrada na figura 3-4.

O resultado deste mapeamento para  $\phi(x)$  é o mesmo encontrado na referência [19]

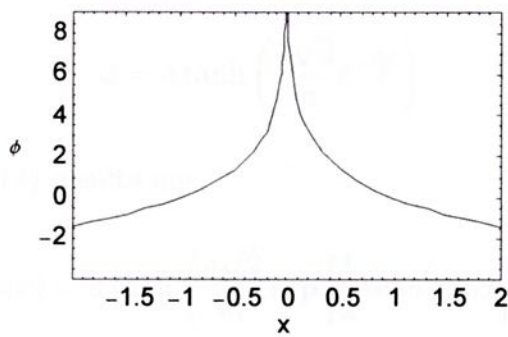


Figura 3-4: Perfil típico para o kink do modelo de Liouville

por D 'Hoker e Jackiw em constraste com a solução

$$\phi_c(x) = -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{m^2}{2\gamma} \right) \operatorname{senh}^2(\sqrt{\gamma}x), \tag{3.14}$$

que pode ser encontrada na mesma referência e está representada na figura 3-5. A constante  $\gamma$  está relacionada com as singularidades do ultravioleta e do infravermelho da correspondente densidade de energia

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(\phi'_c)^2 + \frac{m^2}{\beta^2} \exp(\beta\phi_c) = \frac{4}{\beta^2} \left\{ \frac{\gamma}{\operatorname{senh}^2 \sqrt{\gamma}x} + \frac{\gamma}{2} \right\}, \tag{3.15}$$

onde  $\phi_c$  denota a solução estática de (3.10).

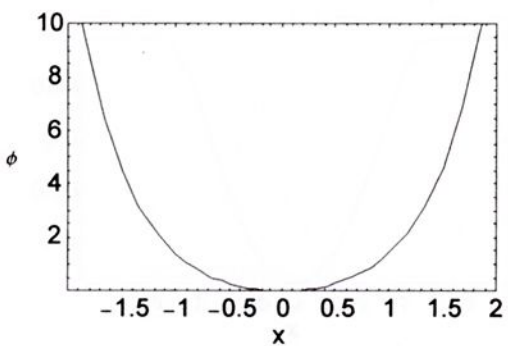


Figura 3-5: Perfil da segunda solução do modelo de Liouville, onde as constantes  $\beta, m$  e  $\gamma$  foram normalizadas

Esta solução (3.14) também pode ser mapeada, por exemplo pelo modelo  $\lambda\varphi^4$ , a fim

de gerar a correspondente solução

$$\varphi = a \tanh \left( \frac{a\sqrt{2}}{m} e^{-\frac{\beta\phi}{2}} \right), \tag{3.16}$$

que ao substituirmos (3.14) resulta em

$$\varphi(x) = a \tanh \left( \frac{a\sqrt{2}}{m} \exp \left[ \frac{1}{2} \sinh^2 \sqrt{\gamma} x \right] \right), \tag{3.17}$$

onde, por simplicidade, normalizamos  $\ln(m^2/2\gamma)$ .

É interessante notar que esta é uma solução não topológica, uma vez que ela conecta o mesmo vácuo quando  $x$  varre o intervalo  $[-\infty, \infty]$ , como mostra a figura 3-6. De fato tal solução não obedece à equação de primeira ordem que caracteriza as soluções topológicas BPS. No entanto esta é uma solução da equação diferencial de segunda ordem do modelo de Liouville e deve ser conectada com a solução de segunda ordem do modelo  $\lambda\varphi^4$ . É importante ressaltar que este método baseado nas propriedades invariantes dos modelos e o chamado método das deformações introduzido por Bazeia [8], são equivalentes quando discutidos à luz das soluções BPS. É oportuno observar que a solução não topológica obtida para o modelo  $\lambda\varphi^4$  a partir do modelo de Liouville pelo mapeamento clássico é uma nova solução ao se considerar o modelo  $\lambda\varphi^4$ , até onde sabemos. Isto ilustra o poder destes mapeamentos ao se estudar soluções de equações diferenciais não lineares.

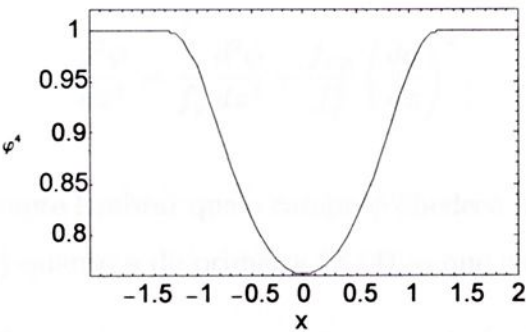


Figura 3-6: Solução não topológica do modelo  $\lambda\varphi^4$  obtida a partir do modelo de Liouville, onde as constantes estão normalizadas

### 3.4 Equivalência para a equação diferencial de 2ª ordem

Outro aspecto importante na investigação do mapeamento entre soluções topológicas é que a equação diferencial de segunda ordem obedece a mesma lei de equivalência da equação diferencial de primeira ordem.

Em outras palavras pode-se mostrar que a solução que conecta uma solução clássica com a outra é ainda válida para o caso da equação diferencial não linear de segunda ordem. Considere a relação (3.2) que de uma forma genérica pode ser reescrita como uma transformação ligando dois campos escalares

$$\phi = f(\varphi). \quad (3.18)$$

Diferenciando (3.18) em relação a  $x$  tem-se

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} \equiv f_{\varphi} \frac{d\varphi}{dx}, \quad (3.19)$$

e

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = f_{\varphi\varphi} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + f_{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad (3.20)$$

de maneira que usando (3.19) obtém-se

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{f_{\varphi}} \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{f_{\varphi\varphi}}{f_{\varphi}^3} \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2. \quad (3.21)$$

Neste ponto é importante lembrar que o campo  $\phi$  obedece tanto a equação diferencial de segunda ordem (2.11) quanto a de primeira (2.14), o que conduz à

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{V_{\phi}}{f_{\phi}} - \frac{f_{\varphi\varphi}}{f_{\varphi}^3} (2V) = \frac{V_{\phi}}{f_{\varphi}} + V \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{f_{\varphi}^2} \right). \quad (3.22)$$

Usando agora o fato que

$$V_{\varphi} = f_{\varphi} V_{\phi}, \quad (3.23)$$

chega-se a relação geral que permite o mapeamento entre os potenciais através da equação diferencial de segunda ordem

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{V}{f_\varphi^2} \right) \equiv \tilde{V}_\varphi \quad (3.24)$$

que é precisamente a mesma relação entre os potenciais mapeados, proveniente da equação diferencial de primeira ordem (3.1) [7][8].

### 3.5 Considerações acerca da energia

Uma abordagem quântica desta equivalência poderia ser iniciada pela densidade de lagrangiana original

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (3.25)$$

que é o ingrediente central da quantização via integral de Feynman[21].

Usando agora a transformação (3.18) em (3.25) obtém-se

$$L = \frac{1}{2} f_\varphi^2 \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(f(\varphi)), \quad (3.26)$$

e a densidade de hamiltoniana aparece como

$$H = \frac{1}{2f_\varphi^2} \delta_\mu \delta^\mu + V(f(\varphi)), \quad (3.27)$$

onde  $\delta_\mu = f_\varphi^2 \partial_\mu \varphi$ .

É interessante notar que a densidade de lagrangiana (3.26) tem a mesma forma, nesta dimensão, que sistemas gravitacionais desde que  $f_\varphi$  esteja relacionado com a métrica do espaço-tempo curvo.

Utilizando o método de Bogomol'nyi para a energia das configurações estáticas temos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ f_\varphi \frac{d\varphi}{dx} \pm \sqrt{2V(f(\varphi))} \right]^2 \mp \int_{-\infty}^{\infty} dx W_\varphi \frac{d\varphi}{dx}, \quad (3.28)$$

onde

$$W_\varphi = \frac{dW}{d\varphi} \equiv f_\varphi \sqrt{2V(f(\varphi))}, \quad (3.29)$$

e o mínimo de energia corresponderá ao caso onde

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\sqrt{2V(f(\varphi))}}{f_\varphi}, \quad (3.30)$$

cujas correspondente equação de segunda ordem é dada por

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{f_{\varphi\varphi}}{f_\varphi} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \frac{V_\varphi}{f_\varphi^2} = 0. \quad (3.31)$$

Não é difícil ver que as soluções da equação diferencial de primeira ordem (3.30) são soluções da correspondente equação de segunda ordem. Este resultado é importante pois mostra que a deformação no termo cinético da lagrangiana (3.26), em consequência de uma transformação entre os campos, é capaz de reproduzir as soluções BPS.

Como uma importante conclusão, que surge como consequência da transformação  $\phi(x) = f[\varphi(x)]$ , é o fato de ser possível perceber que a energia de ambos os sistemas serão iguais quando a transformação é feita diretamente na densidade lagrangiana como pode-se verificar da equação (3.28). Considerando a energia BPS

$$E = \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(\infty)} d\varphi f_\varphi \sqrt{2V(f(\varphi))} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{2V(f(\varphi))}, \quad (3.32)$$

em contraste com o resultado proveniente da deformação usual apresentada por Bazeia e colaboradores [8], onde o sistema deformado apresenta energia diferente da energia do sistema original - veja Apêndice C.

## Capítulo 4

# Estabilidade Linear

### 4.1 Introdução

As propriedades topológicas das soluções estáticas de (2.7) bem como a forma de  $V(\phi)$  (limitado inferiormente pelos mínimos que saturam o limite de Bogomol'nyi) sugerem que estas soluções se restrinjam a determinadas condições de contorno que dizem respeito ao comportamento assintótico do campo, daí a implicação topológica do sistema, e também à energia, que deve ser finita, nos correspondentes vácuos do modelo. A análise da estabilidade, é realizada a fim de verificar se pequenas perturbações não são suficientes para destruir a configuração inicialmente estável do sóliton. São justamente essas peculiaridades da teoria que conduzem a uma análise da estabilidade linear de tais soluções.

### 4.2 Linearização da equação de movimento

Para tratar este problema consideram-se modos de pequena amplitude em torno da solução estática  $\phi_c(x)$

$$\phi(x, t) = \phi_c(x) + \eta(x, t), \quad (4.1)$$

a fim de linearizar a equação dependente do tempo. Isto é realizado substituindo a



solução perturbada (4.1) na equação de movimento, fazendo a expansão de Taylor para  $V(\phi)$  em torno da solução estática  $\phi_c(x)$  e preservando termos somente até a ordem em  $\eta$ . Entretanto esse processo pode ser realizado considerando a perturbação da solução estática (4.1) direto na lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi), \quad (4.2)$$

e expandindo seus termos até  $\eta^2$

$$(\partial_\mu \phi)^2 = (\partial_\mu \phi_c + \partial_\mu \eta)^2 = (\partial_\mu \eta)^2 + 2\partial_\mu \phi_c \partial^\mu \eta + (\partial_\mu \phi_c)^2, \quad (4.3)$$

$$V \cong V_c + \eta V'_c + \frac{1}{2} \eta^2 V''_c, \quad (4.4)$$

resultando então para  $L$

$$L \cong \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} \eta^2 V''_c - \frac{d\phi_c}{dx} \frac{d\eta}{dx} - \eta V'_c - \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi_c}{dx} \right)^2 - V_c. \quad (4.5)$$

Algumas simplificações podem ser feitas na densidade de lagrangiana, provenientes de integrações por partes e eliminação dos termos de superfície

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta = -\frac{1}{2} \eta (\partial_\mu \partial^\mu) \eta, \quad (4.6)$$

$$-\frac{d\phi_c}{dx} \frac{d\eta}{dx} = \eta \frac{d^2 \phi_c}{dx^2}, \quad (4.7)$$

onde

$$V'_c \equiv \frac{dV}{d\phi} \Big|_{\phi_c}, \quad V''_c \equiv \frac{d^2 V}{d\phi^2} \Big|_{\phi_c}, \quad \square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (4.8)$$

e  $L$  então toma a forma

$$L \cong -\frac{1}{2}\eta(\square + V_c'')\eta + \eta\left(\frac{d^2\phi_c}{dx^2} - V_c'\right) - \left[V_c + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_c}{dx}\right)^2\right]. \quad (4.9)$$

Considerando a solução clássica  $\phi_c(x, 0)$  da equação

$$\frac{d^2\phi_c}{dx^2} - V_c' = 0 \quad (4.10)$$

e desconsiderando o termo independente de  $\eta$ , que não altera a equação de movimento para  $\eta$ ,  $L$  assume a forma

$$L \cong -\frac{1}{2}\eta(\square + V_c'')\eta, \quad (4.11)$$

que conduz à equação de movimento para o campo da perturbação  $\eta(x, t)$

$$-\eta'' + V_c'' = \ddot{\eta}, \quad (4.12)$$

onde

$$\eta'' = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \quad (4.13)$$

A equação (4.12) é uma equação diferencial parcial linear em  $\eta$ . Assim tendo em vista que

$$V_c'' \equiv \frac{d^2 V}{d\phi^2} |_{\phi(x)}, \quad (4.14)$$

é função só de  $x$ , podemos usar aqui o método de separação de variáveis. Substituindo, pois,  $\eta(x, t) = n(x)T(t)$  na equação (4.12) e dividindo o resultado por  $\eta = nT$  tem-se

$$\frac{1}{n} \left( -\frac{d^2}{dx^2} + V_c'' \right) n = -\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}, \quad (4.15)$$

em que de um lado temos dependência só em  $x$  e de outro só em  $t$ . Dessa forma, ambos os lados devem ser iguais a uma constante, digamos  $\varepsilon$ , de onde seguem as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \varepsilon T(t) = 0, \quad (4.16)$$

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + V_c'' \right) n(x) = \varepsilon n(x). \quad (4.17)$$

A primeira destas equações possui a solução

$$T(t) = \text{const.} e^{\pm \sqrt{-\varepsilon} t}, \quad (4.18)$$

e então vemos que se  $\varepsilon < 0$ , esta solução "explode" devanesce quando  $t \rightarrow \pm\infty$ , o que destruiria totalmente o sóliton. Como estamos considerando pequenas perturbações  $\eta(x, t) = n(x)T(t)$  então devemos ter  $\varepsilon \geq 0$  (neste caso  $T(t)$  é oscilatória). Agora, tendo em vista que (4.17) é uma equação de autovalor do tipo da equação Schrodinger, podemos ver que o problema da estabilidade linear se reduz a determinar se o operador

$$\hat{O} \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + V_c'', \quad (4.19)$$

é não negativo, ou seja, se seus autovalores são maiores ou iguais a zero. Se for este o caso, então a solução  $\phi_c(x)$  é linearmente estável.

### 4.2.1 Estabilidade das soluções BPS

Até aqui não especificamos o potencial  $V(\phi)$ , nem impusemos condição alguma sobre ele. Vamos, então, considerar os modelos descritos por potenciais inferiormente limitados, da forma

$$V(\phi) = \frac{1}{2} U^2(\phi), \quad (4.20)$$



cujas soluções saturam o limite de Bogomol'nyi (minimizam a energia do sistema). Para estes modelos temos, considerando (4.14) e (4.17)

$$\hat{O} = -\frac{d^2}{dx^2} + U_\phi^2 + UU_{\phi\phi}, \quad (4.21)$$

onde

$$U_\phi = \frac{dU}{d\phi}, \quad U_{\phi\phi} = \frac{d^2U}{d\phi^2}. \quad (4.22)$$

Não é difícil verificar que este operador pode ser fatorado na forma

$$\hat{O} = A^\dagger A, \quad (4.23)$$

onde

$$A = \frac{d}{dx} \pm U, \quad (4.24)$$

$$A^\dagger = -\frac{d}{dx} \pm U, \quad (4.25)$$

como pode ser verificado

$$A^\dagger A = \left( -\frac{d}{dx} \pm U_\phi \right) \left( \frac{d}{dx} \pm U_\phi \right) = -\frac{d^2}{dx^2} \mp \frac{d}{dx} U_\phi \pm U_\phi \frac{d}{dx} + U_\phi^2. \quad (4.26)$$

Tendo o operador  $\hat{O}$  a forma (4.23) então seus autovalores são não-negativos. Para mostrarmos este fato, notemos primeiro que  $\hat{O}$  é auto-adjunto, pois

$$\hat{O}^\dagger = (A^\dagger A)^\dagger = A^\dagger (A^\dagger)^\dagger = A^\dagger A = \hat{O}, \quad (4.27)$$

então, suas autofunções associadas a diferentes autovalores, são ortogonais e podem ser normalizadas, pois estamos considerando o espaço das funções contínuas quadrado-integráveis no intervalo de  $-\infty$  a  $\infty$ . Consideremos um conjunto ortonormal completo

de autofunções de  $\hat{O}$  de modo que

$$\hat{O}n_{\alpha}(x) = \varepsilon_{\alpha}n_{\alpha}, \quad (4.28)$$

com

$$\langle n_{\alpha} | n_{\beta} \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.29)$$

onde  $\alpha = 0, 1, \dots$ .

Então, tendo em vista o operador identidade

$$I = \sum_{\beta} |n_{\beta}\rangle \langle n_{\beta}|, \quad (4.30)$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \langle n_{\alpha} | H | n_{\alpha} \rangle = \langle n_{\alpha} | A^{\dagger} I A | n_{\alpha} \rangle = \sum_{\beta} \langle n_{\alpha} | A^{\dagger} | n_{\beta} \rangle \langle n_{\beta} | A | n_{\alpha} \rangle \\ &= \sum_{\beta} \langle n_{\beta} | A | n_{\alpha} \rangle^* \langle n_{\beta} | A | n_{\alpha} \rangle = \sum_{\beta} |\langle n_{\beta} | A | n_{\alpha} \rangle|^2 \geq 0 \quad \forall \alpha. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Logo, soluções estáticas que minimizam a energia em sistemas de um campo descrito por potenciais limitados inferiormente são linearmente estáveis.

### 4.3 Estabilidade linear para a lagrangiana deformada

Considerando a expressão (3.2) que relaciona diferentes modelos, pode-se investigar a questão da estabilidade linear para os campos deformados (3.18). Isto se reduz, como exposto no item 4.2.1, a determinar se o operador  $\hat{O}$  gerado no caso da deformação (3.18) é não negativo. Assim considerando a deformação direto na densidade de lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}g(\varphi)(\partial_\mu\varphi)^2 - V(\varphi), \quad (4.32)$$

onde  $g(\varphi)$  se reduz à  $f_\varphi^2$  em (3.26) e aplicando a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) = 0, \quad (4.33)$$

obtemos a equação de movimento

$$g_c \square \varphi + \frac{1}{2}g'(\partial_\mu \varphi)^2 + V' = 0. \quad (4.34)$$

Fazendo agora a expansão da densidade de lagrangiana em torno da solução clássica  $\varphi_c(x)$

$$\varphi(x, t) = \varphi_c(x) + \eta(x, t) \quad (4.35)$$

e preservando os termos até segunda ordem em  $\eta^2$ , para

$$g \cong g_c + \eta g'_c + \frac{1}{2}\eta^2 g''_c, \quad (4.36)$$

$$V \cong V_c + \eta V'_c + \frac{1}{2}\eta^2 V''_c, \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \varphi)^2 &\cong (\partial_\mu \varphi_c + \partial_\mu \eta)^2 = (\partial_\mu \eta)^2 + 2\partial_\mu \varphi_c \partial^\mu \eta + (\partial_\mu \varphi_c)^2 = \\ &\cong (\partial_\mu \eta)^2 - 2 \frac{d\varphi_c}{dx} \frac{d\eta}{dx} - \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde

$$g'_c \equiv \frac{dV}{d\varphi} |_{\varphi_c} \quad g''_c \equiv \frac{d^2V}{d\varphi^2} |_{\varphi_c} \quad V'_c \equiv \frac{dV}{d\varphi} |_{\varphi_c} \quad V''_c \equiv \frac{d^2V}{d\varphi^2} |_{\varphi_c}, \quad (4.39)$$

verificamos que  $L$  toma a forma

$$\begin{aligned} L \cong & \frac{1}{2}g_c(\partial_\mu\eta)^2 - \eta g'_c \frac{d\varphi_c}{dx} \frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{4}\eta^2 g''_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta^2 V''_c + \\ & -g_c \frac{d\varphi_c}{dx} \frac{d\eta}{dx} - \frac{1}{2}\eta g'_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 - \eta V'_c - \frac{1}{2}g_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 - V_c. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Fazendo algumas integrações por partes a fim de simplificar a densidade de lagrangiana acima

$$\frac{1}{2}g_c\partial^\mu\eta\partial_\mu\eta \cong -\frac{1}{2}\eta\left(\frac{d^2g_c}{dx^2} + g_c\partial^\mu\partial_\mu\right)\eta, \quad (4.41)$$

$$-\eta g'_c \frac{d\varphi_c}{dx} \frac{d\eta}{dx} \cong \eta \left[ g''_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 + g'_c \left(\frac{d^2\varphi_c}{dx^2}\right) \right], \quad (4.42)$$

$$-g_c \frac{d\varphi_c}{dx} \frac{d\eta}{dx} \cong \eta \left[ g'_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 + g_c \frac{d^2\varphi_c}{dx^2} \right], \quad (4.43)$$

onde os termos de superfície foram desconsiderados, uma vez que a perturbação  $\eta(x, t)$  deve se anular no contorno, e lembrando ainda que

$$\frac{d^2g_c}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( g'_c \frac{d\varphi_c}{dx} = g''_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 + g'_c \left(\frac{d^2\varphi_c}{dx^2}\right) \right), \quad (4.44)$$

podemos reescrever a densidade de lagrangiana (4.32) como

$$\begin{aligned} L \cong & \eta \left[ \frac{1}{2}g''_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 + g'_c \left(\frac{d^2\varphi_c}{dx^2}\right) - V''_c - g_c \square \right] \eta + \\ & + \eta \left[ g_c \frac{d^2\varphi_c}{dx^2} + \frac{1}{2}g'_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 - V'_c \right] - \left[ V_c + \frac{1}{2}g_c \left(\frac{d\varphi_c}{dx}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Notando agora que a solução clássica  $\varphi_c(x, 0)$ , obedece a equação

$$g_c \frac{d^2 \varphi_c}{dx^2} + \frac{1}{2} g'_c \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - V'_c = 0, \quad (4.46)$$

e desconsiderando o termo independente de  $\eta(x, t)$ , uma vez que ele não altera a equação de movimento para  $\eta$ , chega-se finalmente a

$$L \cong \eta \left[ \frac{1}{2} g_c'' \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 + g'_c \left( \frac{d^2 \varphi_c}{dx^2} \right) - V_c'' - g_c \square \right] \eta, \quad (4.47)$$

o que nos leva à equação de movimento para o campo da perturbação  $\eta(x, t)$

$$-g_c \square \eta - \left[ -\frac{1}{2} g_c'' \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - g'_c \left( \frac{d^2 \varphi_c}{dx^2} \right) + V_c'' \right] \eta = 0. \quad (4.48)$$

Uma vez que o termo

$$\square \eta = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad (4.49)$$

enquanto os demais termos da equação independem do tempo pode-se fazer uma separação de variáveis, de tal forma que podemos escrever

$$\eta(x, t) = e^{\pm i \varepsilon t} n(x) \quad (4.50)$$

e assim

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -e^{\pm i \varepsilon t} \varepsilon^2 n, \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = e^{\pm i \varepsilon t} \frac{d^2 n}{dx^2}, \quad (4.52)$$

o que nos leva à equação do tipo da equação de Schroedinger

$$-\frac{d^2 n}{dx^2} - \left[ -\frac{1}{2} \frac{g_c''}{g_c} \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - \frac{g_c'}{g_c} \left( \frac{d^2 \varphi_c}{dx^2} \right) + \frac{V_c''}{g_c} \right] n = \varepsilon^2 n, \quad (4.53)$$

ou ainda

$$\left( -\frac{d^2 n}{dx^2} + V_{eff} \right) n = En, \quad (4.54)$$

onde

$$E \equiv \varepsilon^2 \quad (4.55)$$

e

$$V_{efetivo} \equiv V_{eff} \equiv \frac{g_c'}{g_c} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{g_c''}{g_c} \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - \frac{V_c''}{g_c}. \quad (4.56)$$

Na tentativa de verificarmos se o espectro de energia dos sistemas que estamos considerando é positivo definido para que possamos garantir a estabilidade quântica dos mesmos, é conveniente procurarmos uma forma para (4.54) que nos permita construir um operador que como (4.19) seja fatorável [22][23]. Nesse sentido podemos reescrever (4.56) como

$$V_{eff} = \frac{1}{g} \left[ g' \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{2} g'' \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - V'' \right]. \quad (4.57)$$

Utilizando (4.46) vemos que

$$V'' = g' \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{1}{2} g'' \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + g \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} g' \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2. \quad (4.58)$$

Ao substituírmos esse resultado em (4.56) obtemos

$$V_{eff} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{g'}{g} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2. \quad (4.59)$$

Usando agora as relações (3.19) e (3.24), (4.59) se reduz a

$$V_{eff} = \frac{d}{d\varphi} (\tilde{V}_\varphi) + \frac{g'}{g} \tilde{V}_\varphi = \tilde{V}_{\varphi\varphi} + \frac{g'}{g} \tilde{V}_\varphi, \quad (4.60)$$

que pode ser escrita ainda como

$$V_{eff} = \frac{1}{g} \frac{d}{d\varphi} (g \tilde{V}_\varphi). \quad (4.61)$$

Isto nos permite definir um novo potencial  $H$ , tal que (4.54) poderá ser escrita como

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + H'' \right) n = En, \quad (4.62)$$

desde que  $H$  satisfaça a equação

$$\frac{d^2 H}{d\varphi^2} = \frac{1}{g} \frac{d}{d\varphi} (g \tilde{V}_\varphi), \quad (4.63)$$

veja Apêndice D.

Como procedemos na seção (4.2) é interessante escrevermos  $H$  como

$$H(\varphi) = \frac{1}{2} [\tilde{U}(\varphi)]^2, \quad (4.64)$$

de maneira que

$$H'' = \tilde{U}_\varphi^2 + \tilde{U}_\varphi \tilde{U}_{\varphi\varphi}, \quad (4.65)$$

onde

$$\tilde{U}_\varphi = \frac{d\tilde{U}}{d\varphi}, \quad \tilde{U}_{\varphi\varphi} = \frac{d^2\tilde{U}}{d\varphi^2}. \quad (4.66)$$

Isto permite que escrevamos (4.62) na forma

$$\hat{O}n_\alpha = E_\alpha n_\alpha \quad (4.67)$$

uma vez que (4.62) é uma equação de autovalor do tipo da equação de Schroedinger,

onde

$$\hat{O} = A^\dagger A, \quad (4.68)$$

$$A = \frac{d}{dx} + \tilde{U}, \quad (4.69)$$

e

$$A^\dagger = -\frac{d}{dx} + \tilde{U}. \quad (4.70)$$

Com isto temos que

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \langle n_\alpha | \hat{O} | n_\alpha \rangle = \langle n_\alpha | A^\dagger A | n_\alpha \rangle \\ &= \int n_\alpha^\dagger (A^\dagger A) n_\alpha dx = \int (A n_\alpha)^\dagger (A n_\alpha) dx \\ &= \int |A n_\alpha|^2 dx, \end{aligned} \quad (4.71)$$

o que mostra que os autovalores de (4.62) são positivo definidos e, portanto, as soluções topológicas para a densidade de lagrangiana deformada (4.32) sob pequenas flutuações são estáveis.

## 4.4 Aplicação do método

A fim de obtermos um exemplo de solução da equação diferencial de segunda ordem (3.24) linearmente estável, analisamos o potencial

$$V(\varphi) = \frac{\lambda \varphi^n (\varphi^2 - a^2)^2}{4}, \quad (4.72)$$

onde  $\lambda$  e  $a$  são constantes.

Este potencial é interessante pois para valores inteiros pares e ímpares de  $n$  apresenta dois tipos básicos de configurações correspondentes, mostrados nas figuras abaixo, para  $n$  ímpar (figura 4-1) e par (figura 4-2), respectivamente.

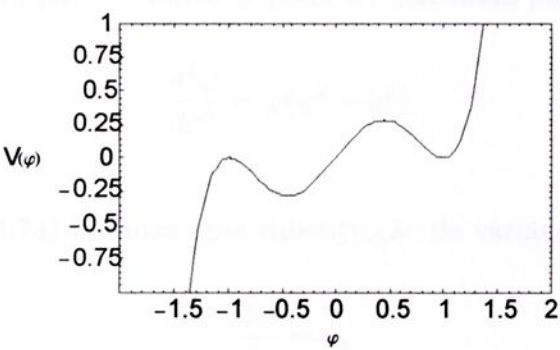


Figura 4-1: Aspecto de  $V(\varphi)$  para valores ímpares de  $n$ , onde as constantes foram normalizadas

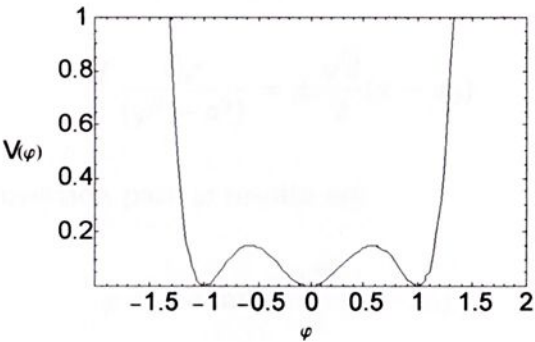


Figura 4-2: Aspecto de  $V(\varphi)$  para valores pares de  $n$ , onde as constantes foram normalizadas

Particularizando a densidade de lagrangiana (4.32), através da escolha de  $g(\varphi)$  como sendo dado por

$$g(\varphi) = \varphi^n, \quad (4.73)$$

a equação de movimento para o campo  $\varphi$  pode ser calculada partir de (4.32-4.34)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi(\varphi^2 - a^2). \quad (4.74)$$

Para resolvermos (4.74) fazemos uma substituição de variáveis

$$\frac{d\varphi}{dx} = u, \quad (4.75)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{du}{d\varphi}u, \quad (4.76)$$

reduzindo sua ordem

$$udu = \varphi(\varphi^2 - a^2)d\varphi \quad (4.77)$$

que pode ser integrada trivialmente

$$u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\varphi^2 - a^2). \quad (4.78)$$

Voltando para a variável  $\varphi$ , encontramos

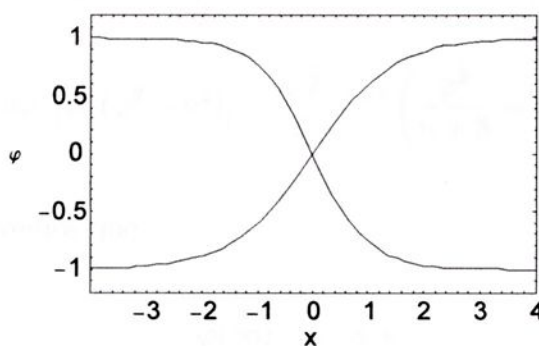
$$\int \frac{d\varphi}{(\varphi^2 - a^2)} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(x - x_0) \quad (4.79)$$

que ao ser integrada e invertida para  $\varphi$  resulta em

$$\varphi = \pm a \tanh a \frac{\sqrt{2}}{2}(x - x_0). \quad (4.80)$$

É importante lembrar que no caso usual, a equação do kink BPS, para (4.72) porém



Figura 4-3: Perfil da solução  $\varphi(x)$  para  $a = 1$ 

com a lagrangiana convencional, seria

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi^{n/2} (\varphi^2 - a^2), \quad (4.81)$$

o que leva a soluções totalmente distintas em geral daquelas obtidas em nosso caso. O resultado que obtivemos em (4.80) é interessante porque independentemente da forma de  $V(\varphi)$ , para  $n$  par ou ímpar, a solução é um kink, o que mostra que de alguma forma a transformação que efetuamos (4.73) na lagrangiana (4.32) foi capaz de reproduzir as configurações topológicas (4.78) a partir do modelo (4.70).

#### 4.4.1 Cálculo da energia

Como podemos ver na figura 4-2 o aspecto de  $V(\varphi)$  para valores pares de  $n$ , sugere que sua configuração estática que conecta os dois vácuos do modelo em  $\varphi = \pm 1$ , é exatamente a configuração que encontramos em (4.80). Portanto a energia dessa configuração deve ser finita, conforme exposto no capítulo 2, item 2.1.1, onde discorreremos a respeito. Por outro lado pelo aspecto de  $V(\varphi)$  na figura 4-1, não parece claro que exista uma configuração estática interpolando os vácuos do correspondente modelo. Entretanto o cálculo da energia de sua configuração estática pode nos informar a respeito da existência ou não de soluções topológicas que o modelo possa ter. Conforme procedemos no capítulo 3, seção 3.5, a energia BPS para as configurações estáticas de (4.71), considerando (4.72),

pode ser calculada pela relação (3.32). Assim temos

$$E_{BPS} = \int_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(\infty)} \frac{\sqrt{2}}{2} d\varphi |\varphi^n(\varphi^2 - a^2)| = \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi^{n+1} \left( \frac{\varphi^2}{n+3} - \frac{a^2}{n+1} \right) \Big|_{\varphi(-\infty)}^{\varphi(\infty)}. \quad (4.82)$$

Assim, usando (4.80), vemos que

$$\varphi(\infty) = \pm a, \quad (4.83)$$

$$\varphi(-\infty) = \mp a,$$

conforme se pode observar pelo aspecto do kink da figura 4-3. Logo, ao calcularmos a energia BPS para as configurações de (4.72) para valores pares e ímpares de  $n$ , encontramos

$$E_{BPS} = \frac{2\sqrt{2}a^{n+3}}{(n+3)(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.84)$$

Este resultado para os valores ímpares de  $n$  para (4.72), nos revela que pode existir uma configuração topológica conectando os vácuos deste modelo, como podemos observar de (4.84), ao menos para a escolha particular feita de  $g(\varphi)$  em (4.73).

## Capítulo 5

# Origem das soluções BPS

Este capítulo abordará uma análise mais profunda do mapeamento entre qualquer par de kinks de campos escalares em 1+1 dimensões mostrando ser possível que as soluções do tipo kink podem ser geradas a partir de uma simples equação diferencial linear de primeira ordem. Na realidade podemos verificar que a função de mapeamento entre os kinks é uma ferramenta poderosa e que constitui em última análise a uma técnica matemática para a solução de equações diferenciais não lineares quando estamos tratando o espectro das soluções BPS.

Através de uma conveniente transformação de campo que obedece a equação diferencial linear (3.2), reproduzimos a função de transformação que viabiliza o mapeamento entre os kinks através da forma mais geral de uma equação diferencial linear de primeira ordem. O formalismo pelo qual procedemos é coerente com a investigação de Bazeia e colaboradores [8] a respeito dos defeitos deformados num recente estudo sobre tal teoria, cujas consequências quânticas [7] estão presentes nesta dissertação. A nossa primeira intenção será aplicar o método e discutir sua aplicação para alguns importantes sistemas físicos. Em seguida utilizamos o fato de que o método demonstra que as soluções desses sistemas se originam de uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Utilizando o mesmo procedimento introduzimos um modelo até onde sabemos novo, e cujas propriedades são interessantes no sentido de que para alguns valores de seus parâmetros o sistema apresenta quebra de simetria como o modelo  $\lambda\phi^4$  e para outros



valores o sistema não apresenta mínimos convencionais [24][25] o que, entretanto, não compromete as configurações kink para o campo escalar.

## 5.1 O método

Considere a forma geral como pode ser escrita uma equação diferencial linear de primeira ordem para um campo escalar em 1+1 dimensões, considerando que possamos aplicar um boost de Lorentz à este campo,

$$\frac{d\theta}{(\alpha\theta + \beta)} = dx, \quad (5.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. Esta equação pode ser integrada fazendo a substituição

$$u = \alpha\theta + \beta, \quad (5.2)$$

com

$$du = \alpha d\theta, \quad (5.3)$$

na equação (5.1)

$$\frac{1}{\alpha} \int \frac{du}{u} = \int dx, \quad (5.4)$$

e que uma vez integrada resulta em

$$\theta(x) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_0 e^{\alpha x}. \quad (5.5)$$

Usando os resultados (5.1) e (5.5) podemos gerar a transformação entre os campos que viabiliza o mapeamento entre as soluções BPS cuja equação de primeira ordem é

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V(\phi)} \equiv W_\phi(\phi), \quad (5.6)$$

onde  $W_\phi(\phi)$  origina-se do superpotencial [8]. É oportuno ressaltar que a relação acima

pode ser obtida a partir da equação diferencial de segunda ordem para configurações estáticas

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV(\phi)}{d\phi} \quad (5.7)$$

que uma vez multiplicada por  $\frac{d\phi}{dx}$  e integrada resulta justamente em (5.6), o que nos permite dizer que de certa maneira o método se estende, mesmo que particularmente às soluções no limite de Bogomol'nyi, às equações diferenciais de segunda ordem na forma (5.7).

Considerando uma transformação do campo escalar  $\theta$

$$\theta = f(\phi), \quad (5.8)$$

proveniente da equação BPS para modelos não lineares temos

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{[\alpha f(\phi) + \beta]}{f_\phi(\phi)} \equiv W_\phi(\phi), \quad (5.9)$$

onde  $f_\phi(\phi) \equiv \frac{df(\phi)}{d\phi}$  de onde segue

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = \frac{[\alpha f(\phi) + \beta]}{W_\phi(\phi)}, \quad (5.10)$$

que uma vez resolvida fornece a expressão para a função de mapeamento. Neste ponto é importante frisar que esta equação é linear em  $f(\phi)$ , o que permite utilizar todas as propriedades deste tipo de equação diferencial.

## 5.2 Solução para o modelo $\lambda\phi^4$ .

Como uma aplicação do método consideremos o modelo  $\lambda\phi^4$  caracterizado pelo potencial (3.4). Para este modelo a primeira derivada do superpotencial nos fornece

$$W_\phi(\phi) = \sqrt{\lambda}(\phi^2 - a^2), \quad (5.11)$$

e a correspondente equação (5.10) para este modelo

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = \frac{\alpha f(\phi) + \beta}{\sqrt{\lambda}(\phi^2 - a^2)}, \quad (5.12)$$

uma vez integrada

$$\int \frac{df(\phi)}{\alpha f(\phi) + \beta} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\lambda}(\phi^2 - a^2)}, \quad (5.13)$$

nos dá

$$f(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp \left[ -\frac{\alpha}{a\sqrt{\lambda}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{\phi}{a} \right) \right], \quad (5.14)$$

onde  $c_1$  é uma constante arbitrária de integração.

Substituindo essa solução na equação (5.5) e invertendo para  $\phi(x)$  chegamos à familiar expressão para o kink do modelo  $\lambda\phi^4$

$$\phi(x) = a \tanh[-a\sqrt{\lambda}(x - x_0)], \quad (5.15)$$

onde  $x_0 \equiv \ln \left( \frac{c_1}{c_0} \right)$ .

### 5.3 Solução para o modelo de Sine-Gordon

Caracterizado pelo potencial (3.3) a solução da equação (5.10) para este modelo

$$\int \frac{df(\phi)}{\alpha f(\phi) + \beta} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \sin^2 \phi}, \quad (5.16)$$

é

$$f(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \tan \left( \frac{\phi}{2} \right)^{\frac{\alpha}{\sqrt{\lambda}}}, \quad (5.17)$$

que substituída na equação (5.5) nos fornece o kink do modelo de Sine-Gordon

$$\phi(x) = 2 \arctan e^{\sqrt{\lambda}(x-x_0)}. \quad (5.18)$$

## 5.4 Solução para o modelo de Liouville

O modelo de Liouville é caracterizado pelo potencial (3.11) e a equação (5.10) para este modelo pode ser integrada

$$\int \frac{df(\phi)}{\alpha f(\phi) + \beta} = \int \frac{d\phi}{\frac{m}{\beta} e^{\frac{\beta\phi}{2}}}, \quad (5.19)$$

cuja solução

$$f(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp\left[-\frac{\alpha\sqrt{2}}{m} \exp\left(-\frac{\beta\phi}{2}\right)\right], \quad (5.20)$$

substituída na equação (5.5) e invertida para  $\phi(x)$  nos dá a solução

$$\phi(x) = -\frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{m^2}{2} (x - x_0)^2 \right], \quad (5.21)$$

que apresenta propriedades solitônicas cujas características topológicas estão discutidas no capítulo 3.

## 5.5 O modelo Sinh-Gordon duplo

Este modelo é caracterizado pelo potencial

$$V_{DSHG} = \frac{1}{2} [\zeta \cosh(2\phi) - n]^2, \quad (5.22)$$

onde  $\zeta$  e  $n$  são constantes, cujo aspecto aparece na figura 5-1.

Embora não tenhamos discutido este potencial anteriormente, ele possui dois mínimos degenerados que são interpolados por uma configuração solitônica, além de suas interessantes propriedades termodinâmicas [26].

A solução da equação (5.10) para este modelo pode ser encontrada integrando-se

$$\int \frac{df(\phi)}{\alpha f(\phi) + \beta} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{1}{2}\zeta \cosh(2\phi) - n}}, \quad (5.23)$$

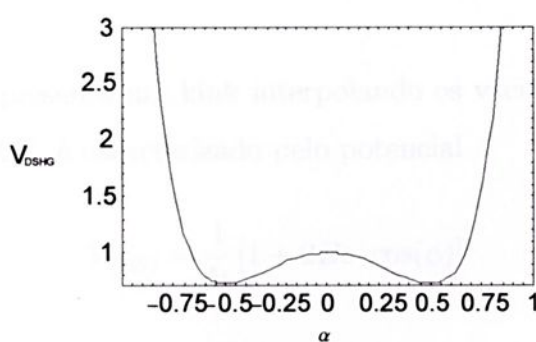


Figura 5-1: Potencial Double Sine-Gordon com  $\zeta = 1$  e  $n = 1$

o que nos fornece

$$f_{DSHG}(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp \left\{ \frac{\alpha \arctan \left[ \left( (n + \zeta) \frac{\tanh(\phi)}{\sqrt{\zeta^2 - n^2}} \right) \right]}{\sqrt{\zeta^2 - n^2}} \right\}, \quad (5.24)$$

que uma vez substituída na equação (5.5) fornece a expressão para o kink deste modelo que aparece na figura 5-2.

$$\phi_{DSHG}(x) = \arctan h \left\{ \sqrt{\frac{\zeta - n}{\zeta + n}} \tan \left[ \sqrt{\zeta^2 - n^2} (x - x_0) \right] \right\}. \quad (5.25)$$

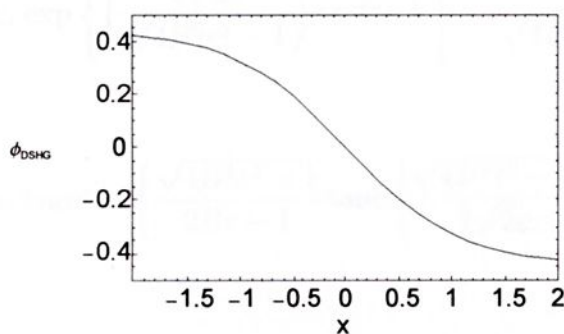


Figura 5-2: Kink do modelo double Sinh-Gordon

## 5.6 O modelo de Sine-Gordon duplo

Este modelo também apresenta um kink interpolando os vácuos do sistema. O modelo de Sine-Gordon duplo [27], é caracterizado pelo potencial

$$V_{DSG} = \frac{1}{4\varepsilon} [1 + 2B\varepsilon \cos(\phi)]^2 \quad (5.26)$$

onde  $\varepsilon$  e  $B$  são constantes, como mostra a figura 5-3.

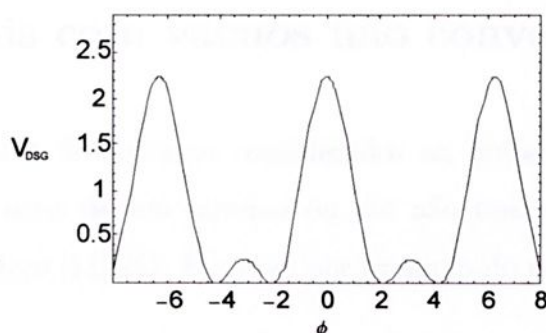


Figura 5-3: Potencial double Sine-Gordon com  $\varepsilon = B = 1$

A solução da equação (5.10) para este modelo e a solução kink correspondente são respectivamente

$$f_{DSG}(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp \left\{ \left( \frac{2\sqrt{2\varepsilon}}{\sqrt{4B^2\varepsilon^2 - 1}} \right) \arctan h \left[ \frac{(2B\varepsilon - 1) \tanh\left(\frac{\phi}{2}\right)}{\sqrt{4B^2\varepsilon^2 - 1}} \right] \right\}, \quad (5.27)$$

$$\phi_{DSG}(x) = 2 \arctan \left\{ \frac{\sqrt{4B^2\varepsilon^2 - 1}}{2B\varepsilon - 1} \tanh \left[ \frac{\sqrt{4B^2\varepsilon^2 - 1}}{2\sqrt{2\varepsilon}} (x - x_0) \right] \right\}. \quad (5.28)$$

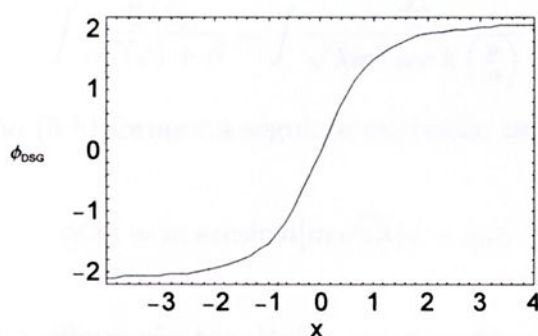


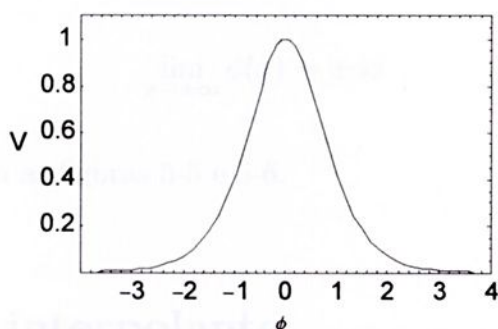
Figura 5-4: Kink do modelo double Sine-Gordon

## 5.7 Potenciais com vácuos não convencionais

Há um número crescente de sistemas considerados na literatura recente [24][25] que, embora não possuam mais de um mínimo ou até não tenham mínimo convencional, geram defeitos topológicos [11][25]. É o caso por exemplo do potencial

$$V(\phi) = \lambda m^4 \sec h^2 \left( \frac{\phi}{m} \right), \quad (5.29)$$

como mostra a figura 5-5 e cuja solução topológica desejamos encontrar.

Figura 5-5: Potencial não convencional, com  $\lambda = m = 1$ 

Para este potencial considere a equação (5.10)

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = \frac{\alpha f(\phi) + \beta}{\sqrt{\lambda} m^2 \sec h \left( \frac{\phi}{m} \right)}, \quad (5.30)$$

que ao ser integrada

$$\int \frac{df(\phi)}{\alpha f(\phi) + \beta} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\lambda} m^2 \operatorname{sech} h\left(\frac{\phi}{m}\right)} \quad (5.31)$$

e substituída na equação (5.5) fornece a seguinte expressão para o kink do modelo

$$\phi(x) = m \operatorname{arcsinh} h[m\sqrt{2\lambda}(x - x_0)] \quad (5.32)$$

e que de fato apresenta configuração topológica, como podemos ver na figura 5-6.

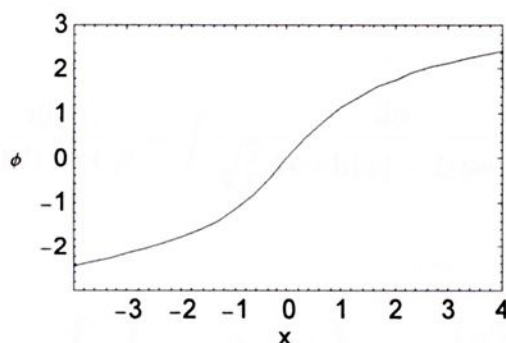


Figura 5-6: Kink do potencial não convencional, com  $\lambda = m = 1$

Ao observarmos a figura 5-5, vemos que o potencial possui dois mínimos quando  $\phi \rightarrow \pm\infty$ . Podemos calcular o limite de (5.32) quando  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \pm\infty \quad (5.33)$$

o que está de acordo com as figuras 5-5 e 5-6.

## 5.8 Potencial interpolante

Modelos que apresentam características como quebra espontânea de simetria são bastante freqüentes na literatura versando sobre teoria quântica de campos e especialmente quando se prestam ao uso da análise de uma determinada fenomenologia. Portanto são interessantes nessa perspectiva, modelos inéditos que apresentem essa característica, uma vez que se colocam no horizonte das soluções que eventualmente detêm certas pro-

priedades, entre as quais, algumas, em particular, estamos tratando, como por exemplo, o aspecto topológico que encerram as configurações BPS de potenciais como

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} [A \cosh(\phi) - B \sec h(\phi)]^2. \quad (5.34)$$

A equação (5.10) para este modelo

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = \frac{\alpha f(\phi) + \beta}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}} A \cosh(\phi) - B \sec h(\phi)}, \quad (5.35)$$

ao ser integrada

$$\int \frac{df(\phi)}{\alpha f(\phi) + \beta} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{\frac{\lambda}{2}} A \cosh(\phi) - B \sec h(\phi)}, \quad (5.36)$$

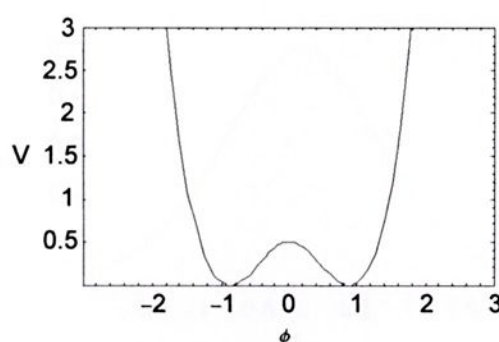
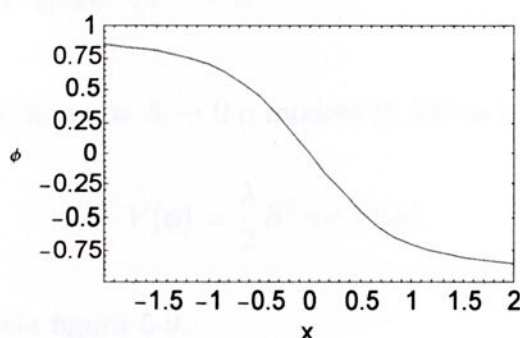
nos fornece

$$f(\phi) = -\frac{\beta}{\alpha} + c_1 \exp \left\{ - \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\lambda A(A-B)}} \right) \arctan \left[ \frac{\sqrt{A} \sinh(\phi)}{\sqrt{A-B}} \right] \right\}, \quad (5.37)$$

e que, uma vez substituída na equação (5.5) pode ser invertida para  $\phi(x)$ , de onde então obtemos o kink do modelo

$$\phi(x) = \arcsin h \left\{ \sqrt{\frac{A-B}{A}} \tan \left[ \sqrt{\lambda A(A-B)} (x - x_0) \right] \right\}. \quad (5.38)$$

É interessante notar que através de uma escolha conveniente dos parâmetros  $A$  e  $B$  o modelo (5.34) pode reproduzir tanto sistemas com dois mínimos como sistemas com um único mínimo, e cuas soluções são singulares. A fim de analisarmos as configurações BPS do sistema (5.34), consideraremos alguns casos para os valores de seus parâmetros  $A$  e  $B$ .

Figura 5-7: Aspecto do potencial interpolante com  $A = 1$  e  $B = 2$ Figura 5-8: Kink do potencial interpolante para  $A = 1$  e  $B = 2$ 

## 5.9 Caso em que $B > A$

Para este caso consideramos valores de  $B$  maiores que os valores de  $A$ . Assim o potencial (5.34), se assemelha ao modelo  $\lambda\phi^4$  por apresentar dois mínimos e ser limitado inferiormente, conforme mostra a figura 5-7.

A solução BPS (5.38) do modelo neste caso será

$$\phi(x) = \arcsin h\{i \tan[i(x - x_0)]\}, \quad (5.39)$$

representada pela figura 5-8.

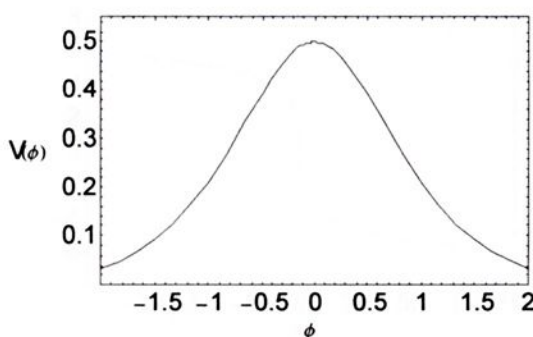


Figura 5-9: Aspecto do potencial interpolante com  $A \rightarrow 0$  e  $B = -1$

### 5.10 Caso em que $A \rightarrow 0$

Neste caso, em que consideramos  $A \rightarrow 0$  o modelo (5.34) se torna

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} B^2 \sec h^2(\phi), \quad (5.40)$$

que está representado pela figura 5-9.

Seria interessante tomarmos o limite desse modelo, neste caso, quando  $\phi \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} \frac{\lambda}{2} B^2 \sec h^2(\phi) = \frac{2B^2 e^{\pm\infty}}{(1 + e^{\pm\infty})^2} = 0. \quad (5.41)$$

Para obtermos a configuração BPS deste modelo, precisamos tomar o limite de (5.38) quando  $A \rightarrow 0$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \phi(x) = -\operatorname{arcsenh}(Bx), \quad (5.42)$$

que está representada na figura 5-10.

Ao calcularmos o limite de (5.42) quando  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \mp\infty \quad (5.43)$$

observamos que o resultado recupera o encontrado em (5.33), a menos dos limites trocados devido ao sinal de (5.42). Entretanto é oportuno lembrar que este é o caso em que  $A \rightarrow 0$ .

A princípio esta liberdade assintótica nos permite que se faça  $A$  tão pequeno quanto

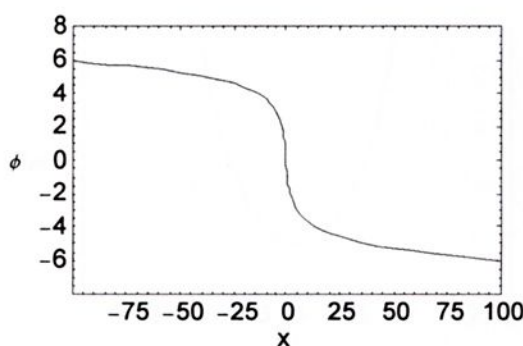


Figura 5-10: Configuração BPS do potencial interpolante quando  $A \rightarrow 0$ , e  $B = -1$

se queira, porém não zero. Neste caso ao fazermos, por exemplo,  $A \rightarrow 1,0 \cdot 10^{-16}$  ao calcularmos o limite de (5.38) quando  $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \mp 19,4604 \quad (5.44)$$

mostramos que de fato existem dois mínimos de (5.34) quando  $\phi(x) = \mp 19,4604$ . Isto mostra que o caso em que  $A \rightarrow 0$ , representa na realidade o afastamento dos mínimos de (5.34), quando o valor do parâmetro  $A$  deixa de ser significativo em relação ao valor do parâmetro  $B$ , o que claramente permite que o termo  $B \operatorname{sech}(\phi)$  prevaleça sobre o termo  $A \cosh(\phi)$ . Neste caso o modelo (5.34) se aproxima do modelo (5.29).

## 5.11 Caso em que $A > B$

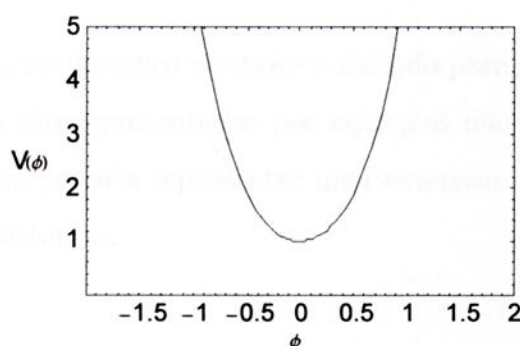
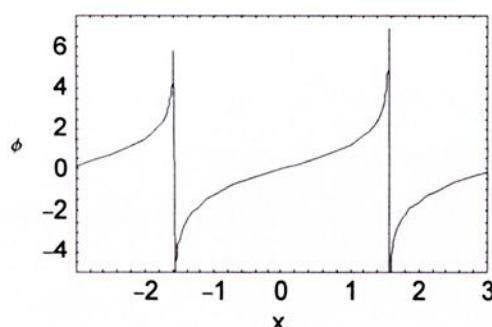
Neste caso para valores de  $A$  maiores que os de  $B$ , escolhendo  $A = 2$  e  $B = 1$  temos para (5.34)

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} [2 \cosh(\phi) - 1 \operatorname{sech}(\phi)]^2, \quad (5.45)$$

representado pela figura 5-11.

A configuração BPS, neste caso será

$$\phi(x) = \operatorname{arcsinh} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \tan \left[ \sqrt{\lambda 2} (x - x_0) \right] \right\}, \quad (5.46)$$

Figura 5-11: Potencial interpolante com  $A = 2$  e  $B = 1$ Figura 5-12: Configuração BPS do potencial interpolante para  $A = 2$ ,  $\lambda = 1$  e  $B = 1$ 

representada na figura 5-12.

A figura 5-12 apresenta várias divergências para o campo  $\phi$ , para vários intervalos de  $x$ . De certa maneira este fato parece estar incoerente com a figura 5-11 que apresenta apenas um infinito em  $\phi \rightarrow \pm\infty$ , e não vários infinitos, como nos leva a supor uma análise da forma do potencial deste modelo através estritamente de sua configuração BPS (5.46). Poderíamos ser levados ainda, na tentativa de explicar essa incoerência, a supor que o espaço para este modelo esteja espontaneamente quebrado, o que nos leva a compatificar espacialmente o sistema, para os valores dos parâmetros  $A$  e  $B$  neste caso, semelhantemente ao que acontece no modelo de Liouville - veja Apêndice B.

Conclusivamente, a respeito do método pelo qual procedemos a fim de obter as configurações que satisfazem o critério de Bogomol'nyi, de fato representa a gênese de qualquer kink em 1+1 dimensões uma simples equação diferencial linear, naturalmente, quando

consideramos o caso de campos escalares [28].

Quiçá, notavelmente, pudéssemos estender o método para outros defeitos topológicos como os instantons que são representados por equações não lineares do tipo presentes neste trabalho [29], o que poderia representar uma extensão bastante útil deste método quando aplicado a tais sistemas.

## Conclusões e comentários

Em nosso trabalho, procuramos investigar as propriedades de estabilidade de configurações de campos escalares e vetoriais em teorias de gauge não abelianas, considerando tanto o caso de campos escalares quanto o de campos vetoriais.

É interessante notar que, como esperado, os resultados obtidos para os instantons são consistentes com os resultados obtidos para os monopólios, o que sugere uma conexão profunda entre as duas classes de soluções. Além disso, os resultados obtidos para os instantons são consistentes com os resultados obtidos para os monopólios, o que sugere uma conexão profunda entre as duas classes de soluções.

Por fim, vale a pena mencionar que os resultados obtidos para os instantons são consistentes com os resultados obtidos para os monopólios, o que sugere uma conexão profunda entre as duas classes de soluções.

Em conclusão, os resultados obtidos neste trabalho sugerem que os instantons e os monopólios são soluções de energia mínima em teorias de gauge não abelianas, o que é consistente com as previsões da teoria de gauge.

Os autores agradecem a FAPESP pelo apoio financeiro.

## Capítulo 6

### Conclusões e comentários

Em nosso trabalho, procuramos investigar as propriedades e consequências da equivalência entre as soluções clássicas de uma classe de equações de campo não lineares, estendendo este estudo para os efeitos quânticos desta equivalência, ao nível de árvore.

É conveniente lembrar que, como exposto no capítulo 2, tais soluções apresentam relevantes propriedades à luz da teoria quântica de campos : aparecem em modelos que suportam quebra espontânea de simetria, conectam os vácuos do sistema, fenômeno relacionado às características topológicas de sistemas onde o campo se comporta assintoticamente em  $\pm \infty$ , e apresentam uma energia finita e concentrada numa região do espaço.

Partindo do método usual ou do método de Bogomol'nyi, para o cálculo das soluções BPS, introduzimos a relação responsável pela equivalência entre os vários modelos de sólitons, dentre os quais demonstramos especificamente o mapeamento entre os kinks do modelo de Sine-Gordon, Liouville e  $\lambda\phi^4$ .

Vale a pena ressaltar a importância desses mapeamentos, no sentido de que possibilitam eventuais soluções e propriedades a partir de diferentes modelos. Isto ilustra como o procedimento pode ser aplicado ao discutirmos as soluções de equações diferenciais não lineares.

É interessante destacar a equivalência que demonstramos entre o método utilizado



neste trabalho, que origina os mapeamentos e o utilizado por Bazeia e colaboradores em seu trabalho sobre os defeitos deformados [8].

Outro aspecto importante de nossa investigação, são as consequências de estendermos a análise, ao construirmos uma versão quântica da equivalência entre as soluções propostas no Capítulo 3. Ao considerarmos a transformação entre os campos diretamente na densidade de lagrangiana, demonstramos que as energias do sistema original e transformado são iguais [7], ao contrário dos sistemas deformados em que a correspondente energia leva em conta a deformação [8].

Com respeito a análise perturbativa das soluções no Capítulo 4, a fim de estudarmos a estabilidade linear das mesmas, agora levando em conta a deformação do termo cinético na densidade de lagrangiana, demonstramos que teremos um operador fatorável em determinadas condições onde, por exemplo, a deformação no potencial sugerida nos defeitos deformados aparece como um caso particular.

A fim de mostrarmos que uma deformação no termo cinético da densidade de lagrangiana é capaz de gerar soluções estáveis mapeáveis, particularizamos a condição de vínculo da estabilidade a fim de obtermos uma solução explícita. O que observamos foi que uma transformação apropriada na densidade de lagrangiana, é capaz de gerar soluções topológicas provenientes de modelos que a princípio não as gerariam, o que de certa maneira representa o êxito da aplicação do método restringindo-nos, é claro, às soluções de interesse.

Uma visão mais profunda acerca das soluções BPS, provenientes de modelos para um campo escalar em  $1+1$ , dimensões foi tratada no Capítulo 5, onde mostramos que qualquer excitação solitônica de um campo escalar pode ser gerada a partir de uma equação diferencial mestre de primeira ordem, através de uma transformação conveniente do campo.

Então, utilizamos o método para introduzir um modelo ainda não citado na literatura e cujas propriedades são interessantes porque, tanto se assemelha à teoria  $\lambda\phi^4$ , por apresentar um potencial com quebra espontânea de simetria, quanto a modelos com potencial sem mínimo, dependendo naturalmente de uma escolha apropriada de seus parâmetros.



Uma análise quântica mais profunda, que leve em conta correções a um loop por exemplo, deverá ser feita futuramente. Sabemos, no entanto de antemão, que devem surgir novos termos efetivos, proporcionais a  $\hbar^2$ , na densidade de lagrangiana [30].

Podemos ainda utilizar o método desenvolvido no capítulo 5, a fim de buscar novos modelos com soluções topológicas analíticas, além de usar a equação de mapeamento entre os modelos clássicos no sentido de verificar qual modelo quântico seria equivalente.

Boost de Lorentz

A transformação de Lorentz, ou boost de Lorentz, é uma transformação que relaciona as coordenadas espaciais e temporais de dois referenciais inerciais que se movem um em relação ao outro com velocidade constante.

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Valendo a princípio, podemos usar as equações (6.1), para obter as equações de movimento de uma partícula em movimento retilíneo e uniforme em um referencial inercial.

$$\frac{dx'}{dt'} = v$$

onde,  $v$  é a velocidade da partícula em relação ao referencial inercial.

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{v}{\gamma(1 - vx/c^2)} \end{aligned}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \gamma(1 - vx/c^2)$$

# Apêndice A

## Boost de Lorentz

Transformações denominadas "boost de Lorentz" são aquelas que conectam dois referenciais inerciais que se movem com velocidade relativa  $v$ . Se o movimento relativo é ao longo do eixo comum  $x$ , as equações são

$$x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - vx/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.1})$$

Então, a princípio, podemos usar as equações (A.1), para obtermos as soluções estáticas de uma equação de movimento, já que as transformações nos oferecem uma arbitrariedade na escolha de  $v$ . Isto é claro, devido à invariância da equação de onda

$$\square^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2},$$

em 1+1 dimensões, mediante (A.1). Considerando um campo  $\phi[x'(x, t), t'(x, t)]$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x'} + \left( \frac{\partial t'}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial x'} - v \frac{\partial}{\partial t'} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \left( \frac{\partial x'}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x'} + \left( \frac{\partial t'}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left( -v \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right),$$



$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \gamma^2 \left( v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right),$$

de modo que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

Denominando

$$\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}, \beta = -v/c, x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z, \quad (\text{A.2})$$

as equações de transformação (A.1) podem ser expressas como

$$x^{0'} = \gamma(x^0 + \beta x^1), x^{1'} = \gamma(\beta x^0 + x^1), x^{2'} = x^2, x^{3'} = x^3. \quad (\text{A.3})$$

Observando que

$$\gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1 \quad (\text{A.4})$$

podemos escrever

$$\gamma = \cosh \phi, \gamma\beta = \sinh \phi, \tanh \phi = v/c. \quad (\text{A.5})$$

Parametrisando assim a transformação em termos da variável  $\phi$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

A matriz acima é conhecida como matriz de boost, a qual iremos designar por  $B$ . O gerador  $K_x$  desta transformação de boost ao longo do eixo  $x$  é definido como

$$K_x = \frac{1}{i} \frac{\partial B}{\partial \phi} \Big|_{\phi=0} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Similarmente, os outros geradores boost são

$$K_y = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K_z = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Como estamos considerando o caso em que a lagrangiana do sistema (2.4) é invariante de Lorentz, dada a solução estática de (2.11), pode-se a princípio, aplicar as transformações de Lorentz (A.1) a fim de obter a solução do kink em movimento. Este é o caso da solução que encontramos em (2.20) da teoria  $\lambda\phi^4$ , à qual desejamos encontrar a solução da equação de movimento. Como  $\phi$  é um campo escalar, precisamos somente transformar suas coordenadas, o que gera

$$\phi(x, t) = a \tanh \lambda a \left\{ \left[ \frac{(x - x_0) - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \right\}$$

onde  $1 > u > -1$  é a velocidade, e trabalhamos em um sistema de unidades em que  $c = 1$ .

## Apêndice B

# Compatificação na teoria de Liouville

Na teoria quântica de campos do modelo de Liouville, em 1+1 dimensões, uma teoria de perturbação renormalizável pode ser definida, na qual a invariância da translação espacial é quebrada espontaneamente e o espaço-tempo semi-compaticado espontaneamente [31].

A teoria de Liouville é governada pela densidade de lagrangiana

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \left( \frac{m^2}{\beta^2} \right) e^{\beta \phi}, \quad (\text{B.1})$$

onde  $\beta, m^2 > 0$  e  $c = 1$ , cuja equação de movimento correspondente é dada por

$$\square \phi + \left( \frac{m^2}{\beta} \right) e^{\beta \phi} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Este modelo foi proposto e resolvido por Liouville no século dezenove [32]. Na década de 1970 ele ressurgiu no estudo de instantons e na reformulação da corda dual [33].

A ação deste modelo

$$S = \int d^2 x L, \quad (\text{B.3})$$

é invariante sob transformação conforme

$$\delta x^\mu = -f^\mu, \quad (\text{B.4})$$

$$\delta \phi = f^\mu \partial_\mu \phi + \beta^{-1} \partial_\mu f^\mu, \quad (\text{B.5})$$

onde  $f^\mu$  é um vetor de Killing conforme [34][35],

$$\partial^\mu f^\nu + \partial^\nu f^\mu - g^{\mu\nu} \partial_\alpha f^\alpha = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\Rightarrow f^+ = f^+(x^+), f^- = f^-(x^-). \quad (\text{B.7})$$

A corrente conservada pode ser expressada em termos de um tensor energia-momento conformalmente modificado

$$J_f^\mu = \theta^{\mu\nu} f_\nu, \partial_\mu J_f^\mu = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\theta^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} L + \frac{2}{\beta} (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \phi. \quad (\text{B.9})$$

A solução da equação de movimento B.2, para a qual deseja-se construir o estado quântico solitônico, provém da equação de primeira ordem BPS, para o campo estático :

$$\phi(x) = -\beta^{-1} \ln \left[ \frac{1}{2} x - x_0 \right]. \quad (\text{B.10})$$

Pequenas oscilações não desestabilizam B.10. Se a solução for perturbada

$$\Phi(x) = \phi(x) + \exp(-i\omega t) \psi_\omega(x) \quad (\text{B.11})$$

e B.2 for linearizada em torno de  $\phi$ , então  $\psi_\omega(x)$  satisfaz (com  $x_0 = 0$ )

$$-\psi_\omega'' + \frac{2}{x^2} \psi_\omega = \omega^2 \psi_\omega. \quad (\text{B.12})$$

Esta equação tem autovalores positivos, uma vez que  $\omega$  é real.

$$\psi_\omega(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\text{sen}(\omega x)}{\omega x} - \cos(\omega x) \right]. \quad (\text{B.13})$$

É importante destacar que não há modos de frequência zero:

$$\psi_{\omega=0} = 0. \quad (\text{B.14})$$

Entretanto os modos B.13 sendo de paridade par, são completos em somente metade do semi-eixo e estão normalizados.

Retornando agora à teoria quântica de campos, postula-se que B.10 é uma aproximação do valor esperado do estado fundamental do campo quântico. Em outras palavras, postula-se que a invariância translacional do espaço é quebrada espontaneamente e há estados fundamentais equivalentes degenerados,  $x_0$  :

$$\langle x_0 | \Phi(x) | x_0 \rangle = -\beta^{-1} \ln \left[ \frac{1}{2} m^2(x) \right] + \text{c.q.}, \quad (\text{B.15})$$

onde c.q. denota as correções quânticas.

O fato de que a energia é infinita não é um obstáculo, desde que se considere este infinito como a energia do vácuo que pode ser subtraída do hamiltoniano. Além disso, o estado quântico do sóliton situa-se no mesmo espaço de Hilbert que aqueles no setor de vácuo, conforme exposto no capítulo 2.

A consistência destes postulados é revelada ao se computar as correções quânticas de ordens superiores. Assim lembrando que pequenas oscilações são completas somente em metade do intervalo,

$$x \geq x_0, \quad (\text{B.16})$$

ou

$$x \leq x_0, \quad (\text{B.17})$$

postula-se que a coordenada espacial se contrai espontaneamente para B.16 ou B.17. Esta é a semi-compatificação da teoria.

## Apêndice C

### Energia dos defeitos deformados

A teoria introduzida por Bazeia e colaboradores [8] a fim de gerar novas soluções BPS, é definida por meio de um potencial deformado por uma função bijetora bem comportada  $f = f(\phi)$ , tal que

$$\tilde{V}(\phi) = \frac{V[f(\phi)]}{[f'(\phi)]^2}, \quad (\text{C.1})$$

onde  $\tilde{V}(\phi)$  é o potencial deformado e  $f'(\phi) = df/d\phi$ .

Neste caso

$$\tilde{v}_i = f^{-1}(v_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{C.2})$$

são mínimos da nova teoria conectados pelos defeitos originais por meio da relação

$$\tilde{\phi}(x) = f^{-1}[\phi(x)]. \quad (\text{C.3})$$

Assim a energia dos defeitos deformados será

$$\tilde{E}_{BPS} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{d\tilde{\phi}}{dx} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( \frac{df^{-1}}{d\phi} \right)^2 \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2, \quad (\text{C.4})$$

onde  $\tilde{E}_{BPS}$  representa a energia no limite de Bogomol'nyi.

Claramente vemos na relação (C.4) que a energia dos defeitos deformados depende da deformação introduzida no potencial.



## Apêndice D

### Estabilidade das soluções deformadas

Conforme exposto na seção (4.3) a estabilidade das soluções deformadas estavam vinculadas à equação (4.63). Em outras palavras, garantindo a existência de  $H(\varphi)$ , asseguramos a estabilidade das soluções mapeáveis qualquer que seja  $g(\varphi)$  na densidade de lagrangiana (4.33). Assim, é interessante encontrar uma forma para  $H(\varphi)$ , que atenda a exigência de estabilidade das soluções que estamos tratando. Reescrevendo (4.63), onde

$$\tilde{V} = \frac{V}{f_\varphi^2} \quad (\text{D.1})$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H}{d\varphi^2} &= \tilde{V}_{\varphi\varphi} + \frac{g_\varphi}{g} \tilde{V}_\varphi \\ &= \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{d\tilde{V}}{d\varphi} \right) - \frac{d}{d\varphi} \ln(g) \frac{d\tilde{V}}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

portanto

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{dH}{d\varphi} - \frac{d\tilde{V}}{d\varphi} \right] = -\frac{d}{d\varphi} \ln(g) \frac{d}{d\varphi} \tilde{V}. \quad (\text{D.3})$$

Por outro lado

$$\frac{d}{d\varphi} \ln(g) \frac{d\tilde{V}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left( \tilde{V} \frac{d}{d\varphi} \ln(g) \right) - \tilde{V} \frac{d^2 \ln(g)}{d\varphi^2}, \quad (\text{D.4})$$

logo podemos escrever

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ \frac{dH}{d\varphi} - \frac{d\tilde{V}}{d\varphi} + \tilde{V} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{g} \right) \right] = \tilde{V} \frac{d^2 \ln g}{d\varphi^2}. \quad (\text{D.5})$$

No entanto se

$$\frac{dH}{d\varphi} - \frac{d\tilde{V}}{d\varphi} + \tilde{V} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{g} \right) = F(\varphi), \quad (\text{D.6})$$

temos que

$$\frac{dF}{d\varphi} = \tilde{V} \frac{d^2}{d\varphi^2} \ln(g), \quad (\text{D.7})$$

$$F(\varphi) = \int \left[ \tilde{V} \frac{d^2 \ln(g)}{d\varphi^2} \right] d\varphi, \quad (\text{D.8})$$

o que nos leva facilmente à expressão

$$H(\varphi) = \tilde{V} + \int d\varphi \left[ F(\varphi) - \tilde{V} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{g} \right) \right], \quad (\text{D.9})$$

que uma vez integrada, nos fornece a função  $H(\varphi)$  que garante a estabilidade dos kinks introduzidos nesta dissertação.

## Referências

- [1] Whitham, G.B., *Linear e Non-Linear Waves*, John Wiley and Sons, New York, (1974).
- [2] Scott, A. C., Chiu, F. Y. F. e D. W. McLaughlin, Proc. I.E.E.E. **61**, 1443, (1973).
- [3] Rajaraman, R., *Solitons and Instantons*, North Holland, Amsterdam, (1982).
- [4] Skyrme, T.H.R., Proc. R. Soc. **A247**, 260, (1958).
- [5] C.K. Chiang, C. R. Fincher, Jr., Y.W. Park, A.J. Heeger, H. Shirakawa, Phys. Rev. Letters **39** 1098 (1977).
- [6] H.W. Fink e Schönenberger: Nature **398** 407 (1999).
- [7] Dutra, A. S. e Faria, A. C., Czech. J. Phys. **54** (2004).
- [8] D. Bazeia, L. Losano, e J.M.C. Malbouisson : Phys. Rev. D **66** 101701 (2002).
- [9] R. Durrer, M. Kunz, e A. Melchiorri, Phys. Rep. **364**, 1 (2002).
- [10] Walgraef, D., *Spatio-Temporal Pattern Formation* (Springer-Verlag, New York, 1997).
- [11] A. Vilenkin and E.P.S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994).
- [12] M.K. Prasad and C.M. Sommerfield: Phys. Rev. Letters. **35** 760, (1975).
- [13] Dashen, R. F., Hasslacher, B. e Neveu, A., Phys. Rev. **D10**, 4130, (1974).
- [14] Goldstone, J. and Jackiw, R. (1975), Phys. Rev. **D11**, 1486, (1975).



- [15] E. B. Bogomol'nyi, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449 (1976).
- [16] Filkelstein, D. e Misner, C., Ann. Phys. (N.Y) **6**, 230, (1959).
- [17] Coleman, S. "Classical lumps and their Quantum Descendants", 1975 Erice Lectures published in "New Phenomena in Sub-Nuclear Physics", Ed. A. Zichichi, Plenum Press, New York, (1977).
- [18] Abdalla, E., Abdalla, M. C. B., Rothe, K. D., *Non-perturbative methods in 2 Dimensional quantum Field Theory*, World Scientific, Singapore, (1991).
- [19] E. D'Hoker and R. Jackiw: Phys. Rev. Lett. **50** 2583 (1983).
- [20] E. D'Hoker, D.Z. Freedman, and R. Jackiw: Phys. Rev. D **28** 2583 (1983).
- [21] Ryder, L. H., *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1985).
- [22] L. Infeld and T.E. Hull, Rev. Mod. Phys. **23**, 21 (1951).
- [23] F. Cooper, A. Khare, e U. Sukhatme, Phys. Rep. **251**, 267 (1995).
- [24] I. Cho and A. Vilenkin, Phys. Rev. D **59** 021701(R) (1998).
- [25] D. Bazeia, Phys. Rev. D **60** 067705 (1999).
- [26] A. Khare, S. Habib, e A. Saxena: Phys. Rev. Letters. **79** 3797 (1997).
- [27] Y.S. Kyvshar, D.E. Pelinovsky, T. Cretegny, and M. Peyard., Phys. Rev. Lett. **80** 5032 (1998).
- [28] Dutra, A. S. e Faria, A. C., (submetido) (2005).
- [29] S. Vandoren e P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B **499** 280 (2000).
- [30] Gervais, J-L. e Jevicki, A., Nuclear Physics **B110**, **93** (1976).
- [31] D'Hoker, E. e Jackiw, R., Phys. Rev. Letters, **50** 1719 (1983).
- [32] J. Liouville, J. Math. Pures Appl. **18**, 71 (1953).
- [33] E. Witten, Phys. Rev. Letters. **38**, 121 (1977).



- [34] E. D'Hoker e R. Jackiw, Phys. Rev. **D26**, 3517 (1982).
- [35] R. Jackiw, "*Ahead of his time* ", Bryce S. Dewitt, a collection of essays in honor of his 60th birthday, edited by S. M. Christensen (Adam Hilger, Bristol, 1983).



