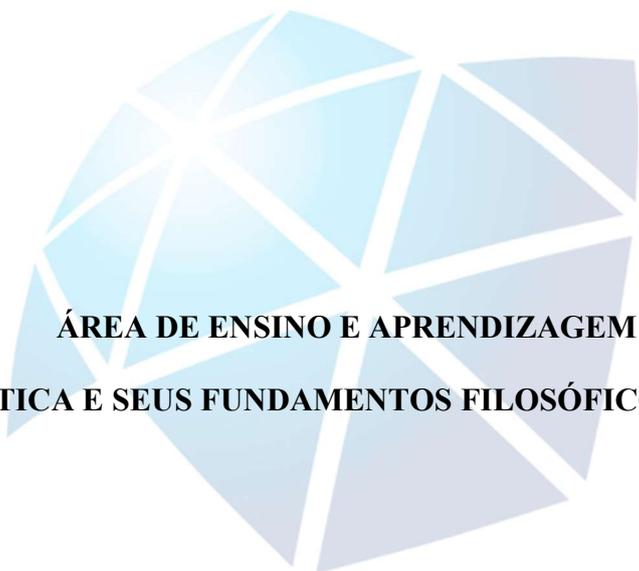




**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

**PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO  
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**



**ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA  
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICOS-CIENTÍFICOS**

**AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM:  
A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de  
Matemática através da Resolução de Problemas em Ação**

**Márcio Pironel**

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS  
RIO CLARO**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

MÁRCIO PIRONEL

**AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM:  
A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de  
Matemática através da Resolução de Problemas em Ação**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic

Rio Claro – SP

2019

P672a Pironel, Márcio  
Avaliação para a Aprendizagem : A Metodologia de  
Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução  
de Problemas em Ação / Márcio Pironel. -- Rio Claro, 2019  
296 p. : il., fotos

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro  
Orientadora: Lourdes de la Rosa Onuchic

1. Avaliação para a Aprendizagem. 2. Resolução de Problemas. 3.  
Ensino-Aprendizagem-Avaliação. 4. Aprendizagem Matemática. I.  
Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

MÁRCIO PIRONEL

**AVALIAÇÃO PARA A APRENDIZAGEM:  
A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de  
Matemática através da Resolução de Problemas em Ação**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática.

Comissão Avaliadora:

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic (Orientadora)

Prof. Dr. Nelson Antonio Pirola

Prof. Dr. Niltom Vieira Junior

Profa. Dra. Norma Suely Gomes Allevato

Profa. Dra. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner

Conceito: APROVADO

Rio Claro – SP, 9 de outubro de 2019.

Dedico a Rita, José Márcio e Maria Vitória, fontes de inspiração, e aos meus pais, Armando e Vitória, exemplos de vida e sabedoria.

## RESUMO

O principal objetivo deste trabalho foi entender como a Avaliação para a Aprendizagem acontece, ou poderia acontecer, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nossa pesquisa foi amparada pelo Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic e possui um viés qualitativo. Para alcançar o nosso objetivo, criamos um Projeto de aplicação dessa Metodologia, que fora desenvolvido no sétimo ano da Educação Básica de um colégio privado da cidade de Lisboa, em Portugal, com 24 alunos com idades entre 12 e 14 anos. O Projeto, com cinco problemas geradores, foi implementado durante o terceiro trimestre do ano letivo de 2017/2018, entre os meses de março e junho. Esses problemas foram trabalhados segundo a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. O registro das aulas foi realizado através da gravação de áudios (distribuídos entre os grupos de alunos), de anotações do pesquisador em diário de campo, pelo recolhimento da produção dos alunos e pelo registro de aula produzido pela lousa eletrônica. Além disso, a pesquisa contou com o registro de algumas aulas, também por áudio, anotações e registros da lousa, e com os depoimentos espontâneos da professora titular da turma e de alguns alunos. Nossa pesquisa revelou que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode ser utilizada como um instrumento de Avaliação para a Aprendizagem, segundo os princípios do *Assessment Reform Group* (ARG). Essa avaliação acontece naturalmente durante a aula que utiliza essa metodologia, através do *feedback* oral do professor e das intervenções que são realizadas desde o início da atividade até a formalização do conteúdo trabalhado.

**Palavras-Chave:** Ensino-Aprendizagem-Avaliação; Resolução de Problemas; Avaliação para a Aprendizagem; Aprendizagem matemática.

## ABSTRACT

The main objective of this study was to understand how the Assessment for Learning happens, or could happen, in Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving. Our research was supported by the Romberg-Onuchic Methodological Model and has a qualitative bias. To achieve our goal, we created a Project to apply this Methodology, which was developed in the seventh year of Basic Education of a private school in the city of Lisbon, in Portugal, with 24 students aged 12 to 14 years. The project, with five generating problems, was implemented during the third quarter of the 2017/2018 school year, between March and June. These problems were worked according to the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving. Classes were recorded by recording audios (distributed among student groups), notes by the researcher in a field diary, collecting student production and by the class record, produced by the electronic whiteboard. In addition, the research included the recording of some lessons, also by audio, notes and whiteboard records and with the spontaneous testimonials of the head teacher and some students. Our research revealed that the Methodology of Teaching-Learning-Assessment of Mathematics through Problem Solving can be used as an Assessment for Learning tool, according to the principles of the Assessment Reform Group - ARG. This assessment happens naturally during the class that uses this methodology, through oral feedback from the teacher and interventions that are made from the beginning of the activity until the formalization of the content worked.

**Keywords:** Teaching-Learning-Assessment; Problem Solving; Assessment for Learning; Mathematics Learning.

## Lista de Figuras

Figura 1: Fluxograma de Romberg .....	21
Figura 2: Fluxograma de Romberg-Onuchic.....	24
Figura 3: Modelo Preliminar de Pesquisa.....	32
Figura 4: Os quatro propósitos da avaliação e seus resultados .....	102
Figura 5: Perspectivas sobre ambientes de aprendizagem.....	113
Figura 6: O papel de professores e alunos em tarefas que promovam raciocínio e resolução de problemas .....	139
Figura 7: As quatro fases da avaliação .....	149
Figura 8: Uma estrutura para os tipos de questões usadas no Ensino de Matemática .....	156
Figura 9: Avaliação para a Aprendizagem: Dez Princípios .....	161
Figura 10: Modelo de Pesquisa Modificado .....	167
Figura 11: Colégio Pedro Arrupe - CPA.....	175
Figura 12: Problema 1 .....	190
Figura 13: Parte 1 da resolução do problema pelo Grupo 2 .....	195
Figura 14: Segunda parte da resolução do problema pelo Grupo 2 .....	196
Figura 15: Resolução do problema pelo Grupo 1 .....	198
Figura 16: Resolução do problema pelo Grupo 2 .....	198
Figura 17: Resolução do problema pelo Grupo 3 .....	199
Figura 18: Resolução do problema pelo Grupo 4 .....	199
Figura 19: Problema 2 .....	203
Figura 20: Primeira resolução do Problema 2 pelo Grupo 1 .....	206
Figura 21: Resolução final do Problema 2 pelo Grupo 1.....	207
Figura 22: Resolução aritmética do Problema 2 pelo Grupo 2.....	209
Figura 23: Primeira equalização da resposta do Problema 2 pelo Grupo 2 .....	210
Figura 24: Resolução algébrica do Problema 2 pelo Grupo 2.....	210
Figura 25: Resolução do Problema 2 pelo grupo 2 .....	211
Figura 26: Resolução do Problema 2 pelo grupo 3 .....	211
Figura 27: Resolução do Problema 2 pelo grupo 4 .....	212
Figura 28: Resolução do Problema 2 pela Professora Tânia .....	213
Figura 29: Resolução do Problema.....	214
Figura 30: Resolução do Problema.....	215
Figura 31: Problema 3 .....	217

Figura 32: Primeira solução do item 1 pelo Grupo 3 .....	218
Figura 33: Resolução do item 1 pelo Grupo 2 .....	221
Figura 34: Segunda resolução do item 1 pelo Grupo 2 .....	222
Figura 35: Resolução do item 1, eleita pela turma como a mais adequada .....	225
Figura 36: Resolução do item 2 pela Professora Tânia .....	227
Figura 37: Anotação da professora no quadro.....	229
Figura 38: Problema 4 .....	234
Figura 39: Ilustração apresentada pela Professora Tânia .....	235
Figura 40: Ilustração apresentada pela Professora Tânia .....	235
Figura 41: Resolução do problema “O muro do terreno” pelo grupo 1 .....	239
Figura 42: Resolução do Problema 4 pelo Grupo 2 .....	241
Figura 43: Diferentes resoluções do Problema 4 .....	244
Figura 44: Explicação da resolução do Gabriel .....	246
Figura 45: A resolução do Gabriel, pela professora.....	246
Figura 46: Desenho da professora .....	248
Figura 47: Representação do Teorema de Tales pela professora.....	250
Figura 48: Ponte Vasco da Gama – foto tirada de dentro do CPA.....	252
Figura 49: Ponte Vasco da Gama – vista aérea .....	253
Figura 50: Problema 5 .....	254
Figura 51: Resolução do item 1 do Problema pelo Grupo 1.....	256
Figura 52: Resolução do item 2, pelo Grupo 1 .....	257
Figura 53: Resposta ao item 4, pelo Grupo 1 .....	259
Figura 54: Resposta ao item 5, pelo Grupo 1 .....	259
Figura 55: Resolução do item 5, pelo Grupo 2 .....	261
Figura 56: Respostas escolhidas pelos alunos para os itens de 1 a 4.....	263
Figura 57: Resposta ao item 5 escolhida na Plenária .....	264
Figura 58: Resolução do item 2, pelo grupo da Leonor .....	266
Figura 59: Sobre sequências .....	268
Figura 60: Sobre sucessões.....	269
Figura 61: Finalização.....	270

## Sumário

<b>Introdução.....</b>	<b>11</b>
<b>1. Metodologia de Pesquisa.....</b>	<b>20</b>
1.1. O Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg.....	21
1.2. O Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg-Onuchic.....	22
1.2.1. O Primeiro Bloco de Romberg-Onuchic.....	24
1.2.2. O Segundo Bloco de Romberg-Onuchic.....	25
1.2.3. O Terceiro Bloco de Romberg-Onuchic.....	26
<b>2. DANDO INÍCIO À PESQUISA - A identificação do Problema da Pesquisa segundo o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic.....</b>	<b>28</b>
2.1. O Meu Fenômeno de Interesse.....	28
2.2. O Meu Modelo Preliminar.....	30
2.3. Relacionando com Ideias dos Outros.....	33
<b>3. História e Concepções sobre Avaliação.....</b>	<b>35</b>
3.1. A Avaliação e a Pedagogia Tradicional.....	35
3.1.1. A Avaliação Segundo a Visão da Pedagogia Jesuíta.....	37
3.1.2. A Avaliação Segundo a Visão da Pedagogia de Comenius.....	40
3.1.3. A Avaliação Segundo a Visão da Pedagogia de Herbart.....	41
3.2. A Avaliação no Brasil e no Mundo nos Séculos XIX e XX.....	45
3.2.1. A Nova-Escola.....	75
3.2.2. Na Segunda Metade do Século XX.....	78
3.3. Avaliação Vista pelo NCTM: Relações com a Resolução de Problemas.....	83
3.3.1. Padrões Profissionais: Avaliação para Professores.....	91
3.3.2. Os Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar no NCTM.....	96
3.4. A pesquisa sobre Avaliação no Brasil atual.....	103
<b>4. Sobre a Aprendizagem.....</b>	<b>105</b>
4.1. O que é a Aprendizagem?.....	106
4.2. Como os Alunos Aprendem?.....	107
4.3. A Zona do Desenvolvimento Proximal.....	114
4.4. Princípios e Padrões para a Matemática Escolar.....	121
4.4.1. Os Princípios para a Matemática Escolar.....	123
<b>5. Resolução de Problemas.....</b>	<b>129</b>

5.1. Qual é o Problema?.....	130
5.2. A Resolução de Problemas como Alternativa à Matemática Moderna.....	132
5.3. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas...138	
5.4. Avaliação e Resolução de Problemas.....	143
5.5. A procura de uma Avaliação para a Aprendizagem de Matemática.....	148
5.5.1. A Avaliação no Documento Princípios para Ações, do NCTM.....	155
5.5.2. Avaliação para a Aprendizagem: Dez Princípios.....	160
<b>6. O Modelo Modificado e a Pergunta de Pesquisa.....</b>	<b>166</b>
<b>7. Estratégias e Procedimentos de Pesquisa.....</b>	<b>169</b>
7.1. Estratégias e Procedimentos da Nossa Pesquisa.....	169
7.2. Procedimentos em Ação.....	172
7.2.1. O Projeto Criado.....	186
7.2.1.1. O Primeiro Problema.....	190
7.2.1.2. O Segundo Problema.....	203
7.2.1.3. O Terceiro Problema.....	216
7.2.1.4. O Quarto Problema.....	233
7.2.1.5. O Quinto Problema.....	252
<b>8. Relatando Resultados de Pesquisa.....</b>	<b>272</b>
8.1. Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.....	272
8.2. Sobre Avaliação para a Aprendizagem.....	276
8.3. Sobre a Avaliação para a Aprendizagem numa abordagem baseada na Resolução de Problemas.....	277
<b>Considerações Finais: Para onde vamos?.....</b>	<b>285</b>
<b>Referências.....</b>	<b>288</b>

## INTRODUÇÃO

### **Quando tudo começa**

O meu passado faz parte de mim e tudo o que sou hoje dependeu dos caminhos que percorri e das escolhas que fiz, por vontade ou necessidade. Não há como compreender meus interesses atuais sem realizar uma visita às minhas memórias e ao meu passado.

Damásio (1996, p. 122) diz que “O conhecimento factual necessário para o raciocínio e a tomada de decisões chega à mente sob a forma de imagens”. Segundo Damásio, as imagens que ocorrem quando evocamos recordações de coisas do passado são chamadas de imagens evocadas. Quando utilizamos imagens evocadas é possível recuperar um determinado tipo de imagens do passado que são formadas quando planejamos algo que ainda não aconteceu, mas que esperávamos que pudesse acontecer.

Ainda, de acordo com Damásio (1996),

Todos possuímos provas concretas de que sempre que recordamos um dado objeto, um rosto ou uma cena, não obtemos uma reprodução exata, mas antes uma interpretação, uma nova versão reconstruída do original. Mais ainda, à medida que a idade e a experiência se modificam, as versões da mesma coisa evoluem. (DAMÁSIO, 1996, p. 128)

Embora exista a pretensão de ser, tanto quanto possível, fiel aos fatos aqui narrados, compreendemos que este relato é uma interpretação de imagens evocadas do passado, influenciado pela distância temporal e por outras experiências.

Recordo que os professores, tanto de Matemática quanto das demais disciplinas, antes do início das provas, ressaltavam a necessidade de que as questões fossem respondidas sem quaisquer consultas ao material utilizado na sala de aula, livros e cadernos, além disso, as provas eram individuais e os alunos não poderiam nem conversar, nem olhar para as provas dos colegas. Todos sabíamos que a aprovação para as séries seguintes dependia das notas obtidas nessas provas e tal situação gerava algum mal-estar. Mais do que isso,

comecei a perceber que alguns alunos nutriam uma necessidade de burlar tais regras para escaparem da reprovação.

Na sexta série, tive minha primeira experiência frustrante com a avaliação. Houve um concurso de redação sobre o dia da árvore e devíamos escrever um texto com a finalidade de participar de um concurso. Quando as redações foram devolvidas, a professora, na frente de todos os alunos, disse que eu devia ter copiado a redação de algum outro texto ou que alguém mais velho a tivesse feito por mim, porque “uma criança de doze anos não seria capaz de escrever um texto com tal grau de reflexão”.

Talvez essa avaliação equivocada, sobre a minha conduta e sobre o trabalho que realizei, tenha influenciado, muitos anos depois, o meu interesse pela avaliação que é realizada na sala de aula. Depois desse episódio comecei a perceber que muitos dos meus colegas faziam exatamente aquilo de que eu fora acusado: copiavam textos de outros e apresentavam como seus. Ou copiavam respostas de outros, espiavam o material escolar durante a prova, traziam respostas prontas em pedaços de folha de papel, rascunhavam coisas nas fórmicas das carteiras. Ou seja, burlavam o sistema de avaliação e produziam falsos resultados e erros nas avaliações que os professores se propunham a fazer. Tais práticas de enganação eram e, ainda hoje, são chamadas popularmente de ‘cola’.

Iniciei o curso de Licenciatura em Ciências Físicas, Químicas e Biológicas e Matemática, com Habilitação Plena em Matemática no ano de 1991. Devido à escassez de professores nas áreas de ciências, foram criados cursos de dois anos, chamados Licenciaturas Curtas, que habilitavam o estudante a lecionar as disciplinas Ciências e Matemática para o 1º grau (atual Ensino Fundamental). Após a conclusão desse curso, o aluno poderia optar por continuar os estudos por mais dois anos, obtendo a Habilitação Plena nas áreas de Física, Química, Biologia ou Matemática. A Faculdade Barão de Mauá, em Ribeirão Preto, hoje conhecida como UNIMAUÁ – Centro Universitário Barão de Mauá, oferecia cursos para Habilitação Plena em Biologia ou em Matemática. Essa opção era

realizada desde a inscrição para o vestibular e as turmas eram direcionadas desde o início para a área escolhida.

Mesmo com as licenciaturas de dois anos, a falta de professores era muito grande, de modo que pude iniciar minha carreira docente no dia 27 de outubro de 1992, antes mesmo de terminar o segundo ano do curso de licenciatura.

Lecionar enquanto estudava me fez comparar as diferentes visões de avaliação que a mim se apresentavam. Comecei a pensar em como seria possível acabar com as 'colas' ou utilizá-las em favor da aprendizagem. Como fazer para diminuir a sensação de injustiça que as avaliações me causavam? Eu não queria ser injusto. Não queria que as provas fossem apenas uma oportunidade para que me sentisse poderoso ou impotente diante de uma situação de aprendizagem. Perdia tempo preparando, aplicando e corrigindo provas e todo esse movimento não me parecia refletir sobre a aprendizagem percebida na sala de aula. Bons alunos cometiam erros grotescos, alunos displicentes acertavam problemas difíceis e eu, com meu juízo de valor construído durante as aulas, tendo que julgar objetivamente toda aquela subjetividade.

Terminei o curso de Licenciatura, aumentei a quantidade de aulas que ministrava. As dúvidas sobre formas de avaliar foram se avolumando e minha angústia foi crescendo. Comecei a pensar numa pós-graduação.

Minha preocupação com a avaliação na sala de aula tem raízes profundas e perpassam os limites entre ser avaliado e ser avaliador. Enquanto estudante avaliado sofri com avaliações que julguei serem injustas e me deleitei com as boas notas que recebia da maioria dos meus professores. Como avaliador, frustrei-me com a impossibilidade de avaliar com correção e justiça. Percebi que, embora quisesse avaliar objetivamente uma atividade, minhas percepções acerca dos erros dos alunos eram distintas, dependendo do momento que a correção era realizada. Comecei a observar que meu estado emocional interferia em minha avaliação das aprendizagens e isso começou a me incomodar. Também me incomodava o fato de que a avaliação era sempre realizada como

um episódio estranho à sala de aula, aplicadas ao final de um conteúdo, de um mês ou bimestre.

Por outro lado, as metodologias pedagógicas tradicionais, baseadas na profissão de um discurso sistematizado e na repetição exaustiva de fórmulas e exercícios matemáticos, não resultavam em sucesso por parte dos alunos e aumentavam minha frustração profissional. Tímida e intuitivamente comecei a alterar minha prática, incluindo em minhas aulas tópicos de história da matemática, problemas e uma análise etimológica de conceitos matemáticos.

Comecei a refletir sobre o sistema de ensino e de avaliação vigentes à época e a questionar sobre a possibilidade de integrar o processo de avaliação ao processo de ensino-aprendizagem. O amadurecimento dessa reflexão me levou ao curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista, em Rio Claro, onde conheci a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, por intermédio da professora Lourdes Onuchic, que orientou minha pesquisa de mestrado entre os anos de 1999 e 2002.

### **A busca por respostas**

Minha pesquisa de mestrado tinha a pretensão de transformar o processo de avaliação. Eu queria que a avaliação deixasse de ser um elemento externo ao processo de ensino-aprendizagem e se transformasse num movimento sempre presente na sala de aula. Ensejava que a própria avaliação pudesse representar para o aluno um momento de aprendizagem, conforme introdução de nossa dissertação (PIRONEL, 2002):

[...] nossa principal motivação para a elaboração deste trabalho é a de considerar o papel da avaliação, na sala de aula de matemática, como um instrumento capaz de auxiliar e de apoiar a aprendizagem do educando de tal modo que ele possa, através de um trabalho bem feito de avaliação, aprender mais matemática tomando-se um cidadão crítico-reflexivo, criativo e participativo na sociedade em que vive. (PIRONEL, 2002, p.1)

Para alcançar esse objetivo tivemos um trabalho bastante árduo de pesquisa onde, apoiados pela Metodologia de Pesquisa de Romberg

(ROMBERG, 1992), defendíamos a seguinte conjectura: “A Avaliação na sala de aula de matemática pode contribuir para a formação de um cidadão crítico, reflexivo e criativo ao participar, de forma significativa, na aprendizagem do educando”.

Embora muitas de minhas inquietações não tivessem sido respondidas durante o mestrado, minha dissertação me ajudou a entender como a avaliação poderia assumir um papel muito maior no processo de ensino-aprendizagem da matemática. E, mais do que isso, a avaliação poderia fazer parte desse processo. Essa conclusão levou-me a sugerir que deveríamos pensar num processo que incluísse, além do ensino e da aprendizagem, a avaliação. Sugerimos então a adoção do termo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, que mais tarde seria adotado pelo GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Para assumir definitivamente que a avaliação pudesse contribuir para a formação crítica, reflexiva e criativa do estudante precisamos estudar os instrumentos de avaliação que tínhamos disponíveis à época. Estudamos a legislação tentando entendê-la, entrevistamos professores, aplicamos instrumentos de avaliação na sala de aula e questionamos nossos alunos para entender como a avaliação realizada era percebida por eles. Tudo isso vislumbrado à luz da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Após a defesa de minha dissertação de mestrado, ocorrida no dia 4 de junho de 2002, fiquei convencido de que deveria compartilhar minhas descobertas com outros professores e iniciei, no ano seguinte, minha carreira docente no Ensino Superior.

Comecei a trabalhar no Ensino Superior no início de 2003 na Universidade do Vale do Rio Doce – UNIVALE, em Governador Valadares – MG, onde lecionava as disciplinas de Avaliação e Estatística para o Curso de Pedagogia; de Metodologia do Ensino de Matemática e de História da Matemática para o

curso de Licenciatura em Matemática; e de Bioestatística para o curso de Licenciatura em Biologia.

No ano seguinte, comecei a trabalhar na Universidade Estadual do Rio Grande do Sul – UERGS, Campus Vacaria, onde lecionava diversas disciplinas para o curso de Pedagogia, dentre as quais trabalhei com as disciplinas de Avaliação Educacional e de Fundamentos de Matemática e coordenei o Estágio Supervisionado. O clima de incerteza política da UERGS me levou a, em meados de 2006, pedir exoneração ao aceitar convite para trabalhar na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ituverava – FFCL Ituverava.

Durante os dois anos e seis meses que estive na FFCL Ituverava pude lecionar diversas disciplinas nos cursos de Licenciatura em Matemática, de Pedagogia e de Administração e orientei oito trabalhos de conclusão de curso e outros dois de conclusão de curso de especialização, dos quais gostaria de destacar os trabalhos “A Resolução de Problemas no Ensino Fundamental”, de Jardel de Oliveira Rosa, “Ensino e Aprendizagem de Matemática nas Séries Iniciais através da Resolução de Problemas”, de Camila dos Anjos de Oliveira e “Dificuldades na Aprendizagem da Matemática”, de Gláucia Barbosa, cujos temas implicaram na aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e na reflexão sobre a avaliação realizada em sala de aula.

No final de 2008 ingressei no Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG, Campus Formiga, onde tive a oportunidade de coordenar o curso de Licenciatura em Matemática por quatro anos, a partir de janeiro de 2009, justamente durante sua implantação e consolidação. No ano de 2010 construímos o projeto do IFMG para o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID que, selecionado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, teve início em 2011 sob minha coordenação institucional. Em 2013, com a ampliação do PIBID, tivemos um novo projeto aprovado, mantive sua coordenação até o ano de 2015.

Ao exercer papéis de coordenação, tanto de um curso de Licenciatura em Matemática quanto de um Programa de Iniciação à Docência, senti que a

necessidade de avaliação extrapola as paredes da sala de aula, sendo imprescindível para o sucesso de estudantes, mas também fundamental para o desenvolvimento de currículos e para o ajuste de metas educacionais, dentre outras utilidades.

Durante minha jornada estudantil e em grande parte de minha carreira docente convivi com muitas distorções sobre os objetivos e os usos da avaliação na sala de aula. Em 2009, comecei a ouvir, de um professor que lecionava Cálculo Diferencial e Integral, coisas do tipo “Hoje consegui que mais um aluno desistisse” ou “Aqueles alunos me pagam, amanhã terão prova, ninguém vai conseguir resolver os exercícios que preparei”. Essas situações se repetiam e comecei a refletir sobre possíveis desvios de finalidade na aplicação de provas ou durante outras atividades avaliativas.

Mais do que questionar possíveis desvios de finalidade das avaliações, comecei a refletir sobre a natureza da avaliação na sala de aula. Afinal, quando um instrumento de coleta de dados para a avaliação não serve a propósitos de avaliação, há uma avaliação? E faz sentido avaliar se a avaliação não estiver a serviço das aprendizagens? Foi a primeira inquietação com implicações neste trabalho de doutorado.

## **A ESTRUTURA DA TESE**

Esta tese está organizada em 8 Capítulos, além da Introdução e das Considerações Finais:

### **Introdução**

Neste capítulo, descrevemos a trajetória que nos trouxe a desenvolver esta pesquisa e a organização estrutural da presente tese.

#### **1. Metodologia de Pesquisa**

No Capítulo 1 eu localizo a metodologia da pesquisa na qual este trabalho foi desenvolvido. Apresento o Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg e

o Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg-Onuchic que amparou nossa pesquisa.

## **2. Dando Início à Pesquisa - A identificação do Problema da Pesquisa segundo o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic**

O Capítulo 2 se presta a apresentar o meu interesse pelo tema avaliação e a mostrar como se deu o processo de criação de um modelo preliminar para a pesquisa, que nos levaria a definir a identificação de nosso problema.

## **3. História e Concepções sobre Avaliação**

No Capítulo 3 apresentamos uma trajetória histórica da avaliação na Educação desde o século XVI, com a Pedagogia Tradicional até os últimos anos do século XX, dicotomizando a abordagem entre a História da Avaliação desenvolvida no Brasil e no Mundo. Ainda nesse capítulo, apresentamos a Avaliação pelo viés do National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, pela relevância de suas publicações e implicações às práticas avaliativas no Brasil e no resto do mundo.

## **4. Sobre a Aprendizagem**

No Capítulo 4, apresentamos um quadro teórico tentando compreender o que é a aprendizagem e como os estudantes aprendem, principalmente a partir das ideias discutidas nas publicações das National Academies of Science, Engineering and Medicine e discorreremos sobre a Zona do Desenvolvimento Proximal, que fundamenta ideias e práticas do GTERP. No final do capítulo tratamos dos princípios para a matemática escolar no século XXI.

## **5. Resolução de Problemas**

O quinto capítulo se debruça a explicitar um amplo trabalho de pesquisa sobre Resolução de Problemas. Enfocamos o período a partir dos anos 1970, com a crise da Matemática Moderna e o surgimento de teorias de Resolução de Problemas como alternativas a ela. Apresentamos, logo a seguir, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de

Problemas e suas relações com a Avaliação. Depois, voltamos a tratar de Avaliação para situá-la no nosso século, enfatizando os documentos ‘Principles to Actions’, do NCTM e ‘*Assessment for Learning: Ten Principles*’, do Assessment Reform Group – ARG.

## **6. O Modelo Modificado e a Pergunta de Pesquisa**

O Capítulo 6 apresenta, a partir da análise da bibliografia consultada, o Modelo Modificado de Pesquisa e a Pergunta da Pesquisa.

## **7. Estratégias e Procedimentos de Pesquisa**

No Capítulo 7, apresentamos as Estratégias e os Procedimentos de nossa pesquisa, detalhando o Projeto Criado e descrevemos os procedimentos postos em ação. Esse projeto foi desenvolvido numa escola privada da cidade de Lisboa, em Portugal. As práticas investigativas foram descritas e, após cada uma delas, fizemos um comentário destacando algumas evidências que julgamos importantes para responder a nossa pergunta de pesquisa.

## **8. Relatando Resultados de Pesquisa**

No oitavo capítulo retornamos à pergunta de pesquisa e procuramos respondê-la à luz das evidências encontradas na aplicação do nosso projeto e fundamentadas pela bibliografia estudada.

## **Considerações Finais: Para onde vamos?**

Fomos conduzidos a novas considerações, além daquelas apresentadas no capítulo 8, quando propúnhamos responder a pergunta estabelecida. Aqui, tecemos novas considerações, que emergiram das conclusões realizadas em nossa pesquisa, tentando apontar novos caminhos e possibilidades.

## 1. METODOLOGIA CIENTÍFICA DE PESQUISA

Não há método empírico sem conceitos e sistemas especulativos; e não há pensamento especulativo cujos conceitos não revelem, em uma investigação mais aprofundada, o material empírico do qual eles são derivados.

Albert Einstein

Nesta pesquisa procura-se identificar nas ciências sociais as amplas tendências de pesquisa relacionadas à Avaliação em ambientes escolares e determinar como essas tendências têm influenciado o Ensino e a Aprendizagem de Matemática nas escolas.

Pensar em pesquisa nos remete à ideia de que se deve olhar para algo que possivelmente já tenha sido estudado (ou parcialmente estudado) e enxergar algo que ninguém ainda tenha visto, pelo menos sob a mesma ótica. Mas, segundo Santos (2007), pesquisa não se refere a algo qualquer, a pesquisa científica é caracterizada por uma atividade intelectual intencional com o objetivo de responder às necessidades humanas, compreendendo que as necessidades humanas básicas são aquelas percebidas pelos indivíduos como uma sensação de insatisfação com o estado atual das coisas.

Além disso, Santos (2007) nos adverte que, como seres racionais, o ser humano consegue transformar as necessidades percebidas em problemas manifestos através de questões. Essas questões precisam merecer a busca por soluções. Ao ato de levantar questões e buscar respostas para elas é o que podemos chamar de atividade intelectual.

Em Schoenfeld (2007) pode-se ler que toda pesquisa se preocupa com observação e interpretação. Além disso, ele argumenta que a pergunta que se faz e os meios que se utilizam para ganhar evidências têm um impacto fundamental sobre as conclusões a que se pode chegar. Ou seja, as soluções para os problemas levantados são diretamente influenciadas pelas estratégias e pelos procedimentos criados e aplicados durante a pesquisa.

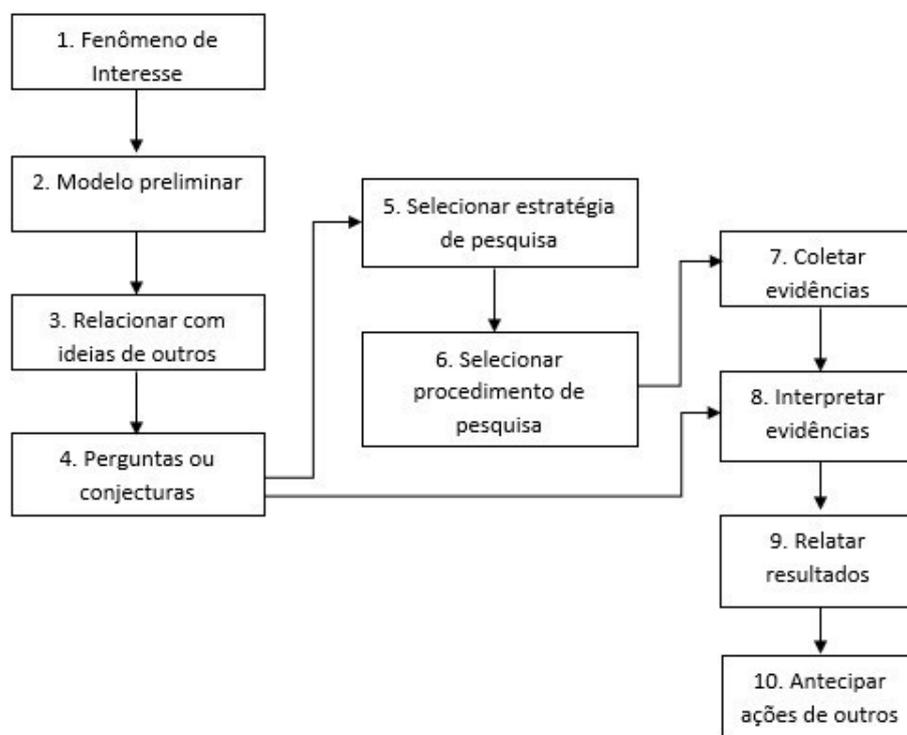
### 1.1. O Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg<sup>1</sup>

Thomas Romberg, em seu artigo *Perspectives on Scholarship and Research Methods*, publicado originalmente pelo NCTM no livro *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, em 1992 define que:

O termo pesquisa refere-se a processos - aquilo que é feito, não objetos que possam ser tocados ou vistos. Além disso, fazer pesquisa não pode ser visto como um processo mecânico ou como uma gama de atividades que os indivíduos seguem de um modo prescrito ou predeterminado. As atividades envolvidas na pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente mecânica. Como em todas as artes, existe uma concordância num sentido amplo sobre que procedimentos devam ser seguidos e o que é considerado trabalho aceitável (ROMBERG, 1992, p. 51, Tradução minha).

Numa tentativa de facilitar o desenvolvimento de uma pesquisa, Romberg (1992, p. 51) propõe a estruturação de um trabalho de pesquisa, oferecendo-nos o fluxograma apresentado na Figura 1:

Figura 1: Fluxograma de Romberg



Fonte: Romberg (1992, p. 51)

<sup>1</sup> Thomas A. Romberg é professor emérito da School of Education da Universidade de Wisconsin-Madison e diretor do National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, do Wisconsin Center for Education Research.

Romberg (1992) salienta que embora essas atividades estejam colocadas de maneira sequencial, elas não precisam obedecer, necessariamente, a essa ordem. Mais do que isso, as interações entre diversos fatores relacionados à pesquisa não podem ser separadas de maneira tão nítida. Mas essa estrutura pode dar suporte à discussão de tendências de pesquisa apoiando, desse modo, o trabalho do investigador.

Na tentativa de entender a base dessas tendências, o autor descreve algumas características da Educação Matemática como um campo de estudos. Depois, esboça as atividades que os pesquisadores desempenham para desenvolver a pesquisa e resume a variedade de métodos de pesquisa utilizados.

O GTERP, após alguns anos desenvolvendo pesquisa com base no Modelo Metodológico de Romberg, sugere algumas alterações ao modelo inicialmente proposto e, ainda, acrescenta uma nova atividade a ser desenvolvida ao longo da pesquisa. A esse novo Modelo, que iremos apresentar aqui, chamamos Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.57)

## **1.2. O Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg-Onuchic**

A metodologia de pesquisa de Romberg vem sendo utilizada pelos elementos do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP, desde o final do século passado. Conforme as pesquisas desse grupo foram se desenvolvendo, necessidades de adequação da proposta metodológica de Romberg foram surgindo e o modelo ganhou novas contribuições.

Segundo Onuchic e Noguti (2014), os membros do GTERP foram percebendo, ao longo dos anos, que alguns passos do Modelo Metodológico de Romberg poderiam ganhar novos contornos para estabelecer um modelo mais completo para a realidade e para os objetivos do grupo. Essa proposta de pesquisa foi denominada “Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic” (ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

Quando se inicia uma pesquisa, após a definição de um modelo preliminar e de relacionar as ideias iniciais com ideias de outros pesquisadores, não é incomum que o foco de interesse sofra alterações e surja a necessidade de se

elaborar um novo modelo de pesquisa. Uma das principais contribuições do GTERP às reflexões sobre a metodologia de pesquisa proposta por Romberg foi a inclusão de um novo item ao seu modelo, denominado “Modelo Modificado” (ONUChic; NOGUTI, 2014, p. 59). Mas essa não foi a única alteração proposta pelo GTERP, as atividades propostas por Romberg foram redefinidas, ganhando novos contornos e sutilezas.

O Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg-Onuchic pode ser dividido em três blocos de atividades, separados de acordo com a natureza da atividade. Para nós, esses três blocos de atividades se referem à Identificação do Problema, à Elaboração das Atividades Empíricas e à Produção do Conhecimento.

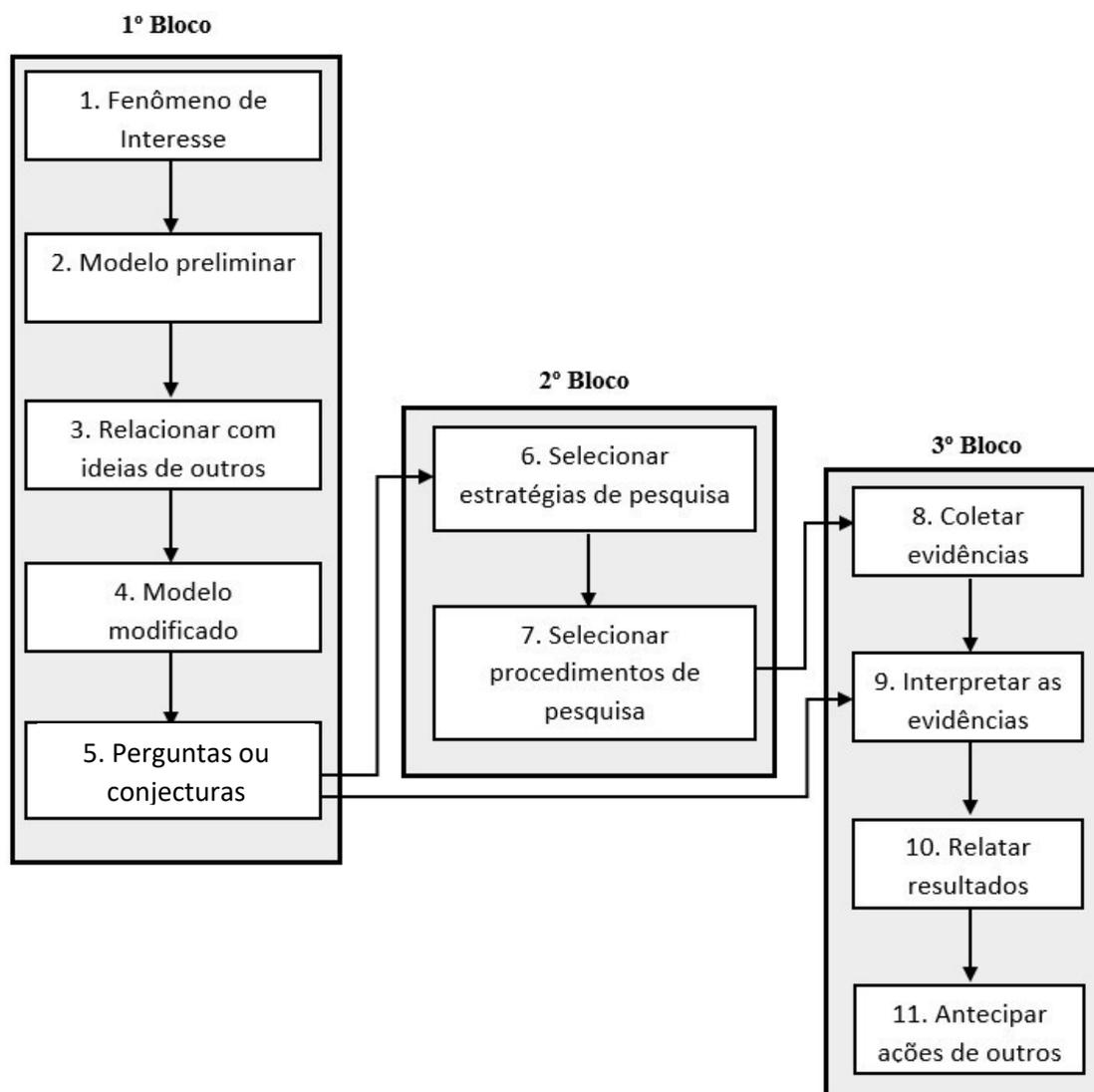
Podemos dizer que o primeiro Bloco é destinado à Identificação do Problema, focalizando as atividades relacionadas ao ato de pensar a pesquisa e contempla as etapas de determinação do fenômeno de interesse, da construção do modelo preliminar, do relacionar com ideias de outros, da construção do modelo modificado e da elaboração de perguntas ou conjecturas.

O segundo Bloco é destinado à Elaboração das Atividades Empíricas, busca criar e descrever as atividades relacionadas com a ação e contempla as etapas de seleção das estratégias de pesquisa e de seleção dos correspondentes procedimentos de pesquisa.

O terceiro Bloco está identificado à Produção do Conhecimento, com atividades relacionadas à reflexão e à finalização da pesquisa e contempla as etapas de Coleta de Evidências, de Interpretação de Evidências, Relato de Resultados e Antecipação de Ações de outros pesquisadores.

As mudanças propostas pelo GTERP demandaram a necessidade de adaptação do Fluxograma de Pesquisa proposto por Romberg. Ressaltamos que as mudanças foram motivadas pela necessidade de adequação do Modelo Metodológico de Romberg às pesquisas desenvolvidas pelo GTERP. Onuchic e Noguti (2014) propuseram, então, o seguinte fluxograma, que foi denominado Fluxograma de Romberg-Onuchic:

Figura 2: Fluxograma de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic; Noguti, 2014, p. 59

### 1.2.1. O Primeiro Bloco de Romberg-Onuchic

Segundo Onuchic e Noguti (2014), toda pesquisa nasce de uma curiosidade sobre um determinado fenômeno do mundo real. Esse fenômeno é denominado Fenômeno de Interesse e pode se manifestar de diversas maneiras, refletindo questões que incomodam o pesquisador e que, geralmente, têm a ver com sua prática profissional ou com sua formação.

[...] na Educação Matemática o Fenômeno de Interesse se manifesta, em geral, no envolvimento de professores; de alunos; de como se relacionam professores e alunos; de como os alunos se comportam nesse processo; de como os professores ensinam e como os alunos aprendem (ONUChic; NOGUTI, 2014, p. 59-60).

A partir da definição desse fenômeno o pesquisador relaciona as diferentes variáveis que possam interferir nos resultados de sua pesquisa, criando um Modelo Preliminar de Pesquisa. Esse modelo dá uma visão do caminho que se pode percorrer para alcançar os objetivos inicialmente pretendidos para a pesquisa. Segundo Onuchic e Noguti (2014):

A partir do Modelo Preliminar, o pesquisador obtém variáveis-chave que irão auxiliá-lo a identificar e a relacionar o fenômeno e o modelo às ideias de outros – ou seja, pesquisar é “ouvir” o que outros (comunidade, pesquisadores, teóricos, os que fazem aplicação...) podem contribuir com sua pesquisa – trata-se de uma revisão teórica e de outros trabalhos já realizados que irão auxiliar o pesquisador, fundamentando sua pesquisa (ONUChic; NOGUTI, 2014, p. 61).

Mais do que isso, ao buscar fundamentação teórica para suas ideias, o pesquisador poderá, inclusive, alterar os rumos de sua pesquisa, podendo ou não alterar seus objetivos, seu modelo preliminar de pesquisa, levando a um Modelo Modificado de Pesquisa e auxiliando a delimitar o seu problema, que poderá ser expresso por meio de uma ou mais conjecturas ou perguntas.

### **1.2.2. O Segundo Bloco de Romberg-Onuchic**

O segundo Bloco de Romberg-Onuchic está organizado para responder as perguntas: O que vou fazer para responder minha pergunta/conjectura? Como vou fazer isso?

A atividade de pesquisa exige do pesquisador a elaboração de uma estratégia geral de pesquisa e uma gama de estratégias auxiliares que sejam as mais adequadas para responder a pergunta levantada ou defender a conjectura proposta.

A decisão sobre que métodos utilizar depende diretamente das questões selecionadas (ROMBERG, 1992), sendo que tanto a estratégia geral quanto as estratégias auxiliares só devem ser selecionadas após a definição da pergunta ou da conjectura da pesquisa.

No dicionário Houaiss, a palavra estratégia está definida como a “arte de aplicar com eficácia os recursos de que se dispõe ou de explorar as condições favoráveis de que porventura se desfrute, visando ao alcance de determinados objetivos” (HOUAISS; VILLAR, 2009, p. 840). Para cada estratégia de pesquisa selecionada, precisa-se determinar um procedimento correspondente. A estratégia define o que esperamos realizar e o procedimento nos diz que passos devemos seguir para colocar cada uma das estratégias em ação.

### **1.2.3. O Terceiro Bloco de Romberg-Onuchic**

O pesquisador precisa colocar suas estratégias e procedimentos em ação para levantar informações sobre o fenômeno de interesse e selecionar, dentre as informações obtidas, aquelas que podem ser consideradas como evidências válidas para os propósitos da pesquisa. Ou seja, é preciso que o pesquisador tenha sensibilidade para selecionar as evidências que, segundo Romberg (2007), têm relação com a pergunta/conjectura da pesquisa, de modo que possam ser auxiliares na resolução do problema de pesquisa levantado.

Após a seleção das informações importantes, as evidências precisam ser interpretadas. Segundo Romberg (2007), em toda pesquisa, há uma quantidade de informação maior do que a necessária para se responder à questão. A dificuldade do pesquisador está em encontrar, dentre todas as informações, quais são as de maior relevância.

Onuchic e Noguti (2014) atentam para o fato de que, após ter coletado e interpretado as evidências, é preciso que o pesquisador relate os resultados obtidos, descrevendo o percurso de sua pesquisa, suas referências teóricas e aplicações, visando sempre a responder a pergunta definida para sua pesquisa.

Ressaltam ainda que esse relato pode ser apresentado na forma de um artigo, de uma dissertação ou mesmo de uma tese.

Mas a pesquisa não se encerra aí, como membros de uma comunidade acadêmica, o pesquisador precisa mostrar novas possibilidades de estudos e trabalhos que envolvam o seu objeto de pesquisa, ou seja, é preciso antecipar ações de outros pesquisadores (ROMBERG, 2007; ONUCHIC; NOGUTI, 2014).

## **2. DANDO INÍCIO À PESQUISA - A identificação do Problema da Pesquisa segundo o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic**

Seguindo o Modelo Metodológico de Romberg-Onuchic, pretendemos apresentar meu interesse pelo tema avaliação e mostrar o processo de criação de um modelo preliminar da pesquisa, para definir a pergunta ou a conjectura da pesquisa.

### **2.1. O meu Fenômeno de Interesse**

Como toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real e, na Educação Matemática, esse fenômeno envolve professores e alunos, essa curiosidade leva a uma inquietação e a inquietação leva, por sua vez, à necessidade de se construir uma pesquisa.

Santos (2007) diz que:

Embora a escolha de um tema pareça tarefa fácil, inicia-se aqui uma caminhada científica, cujo conteúdo e cujo sucesso dependem bastante deste momento. Além disso, diante da vastidão das possibilidades de temas sugeridos pela atividade humana, sabe-se por experiência da dificuldade e até mesmo da angústia diante da escolha de um tema, que implica sempre o abandono de outros, também interessantes. (SANTOS, 2007, p.75)

Ainda sugere esse autor a adoção de três critérios para facilitar o processo de escolha de um tema para a pesquisa: a) gosto pessoal, preparo técnico e tempo disponível; b) importância ou utilidade do tema; e c) existência de fontes.

Como o processo de avaliação faz parte da minha vida desde os meus primeiros anos escolares, não foi difícil perceber que este tema respondia a esses critérios. Entretanto, ele deveria ser significativamente delimitado devido a sua abrangência e pela abundância de fontes.

Segundo Santos (2007):

As pesquisas podem considerar a extensão e a profundidade do assunto, isto é, podem ser feitas privilegiando a multiplicidade dos aspectos conhecidos que compõem um tema, seus aspectos horizontais, a extensão do assunto. Podem também se concentrar em aspectos verticais. Tenderiam, nesse caso, a diminuir a extensão do assunto, sua multiplicidade horizontal, para possibilitar o aprofundamento. (SANTOS, 2007, p.79)

Após terminar o mestrado em Educação Matemática, em meados de 2002, contive o ímpeto de continuar minha pesquisa num curso de Doutorado por entender que precisava lograr maturação profissional antes de iniciar estudos de doutoramento. Comecei a lecionar em cursos superiores, concomitantemente com aulas no Ensino Médio.

Uma transformação aconteceu quando, em dezembro de 2008, fui nomeado para o cargo de Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico do Instituto Federal de Minas Gerais – IFMG, Campus de Formiga, e tive que deixar as aulas da Educação Básica da Rede Pública do Estado de São Paulo.

De acordo com a legislação vigente à época, eu deveria terminar o estágio probatório, de quatro anos, para poder solicitar afastamento para o doutoramento. Quando pude legalmente me inscrever num curso de pós-graduação, havia assumido outras responsabilidades, adiando assim o início do meu doutoramento para o ano de 2015.

Quando me candidatei a uma vaga para o Doutorado no Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Campus de Rio Claro, estava bastante claro para mim que meu fenômeno de interesse seria o estudo de Princípios para a Avaliação na sala de aula de Matemática. Mas, conforme a pesquisa foi se desenvolvendo, nosso interesse foi se desviando dele por motivos diversos e acabamos focando no tema Avaliação na sala de aula.

A partir daí, o desenvolvimento de nossa pesquisa, amparada pela Metodologia de Pesquisa de Romberg-Onuchic<sup>2</sup> (ONUCHIC; NOGUTTI, 2014), nos encaminhou para a questão: Como poderia ocorrer a avaliação para a aprendizagem durante a aula de matemática baseada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Assim, conforme mostraremos nos próximos itens deste capítulo, o fenômeno de interesse, que era apenas Avaliação na sala de aula, foi delimitado para **Avaliação para melhorar o Ensino e a Aprendizagem de Matemática na sala de aula**, uma vez que, como já foi trabalhada por nós, a avaliação deve estar integrada ao ensino para promover a aprendizagem (PIRONEL, 2002).

## 2.2. O Meu Modelo Preliminar

É importante que o pesquisador faça suposições sobre certos aspectos importantes da pesquisa, como variáveis do fenômeno de interesse e, depois, segundo Onuchic e Noguti (2014), as ilustrem em um modelo. Esse modelo, chamado Modelo Preliminar deve nos dar uma ideia geral visual de nossa futura pesquisa, mostrando possíveis caminhos e variáveis. Embora, conforme salientou Romberg (2007):

Situações reais são raramente bem definidas e frequentemente estão fixadas em um meio que torna difícil obter uma afirmação clara da situação. Formular um modelo preliminar usualmente ajuda porque fazer assim envolve especificar as variáveis que se acredita estarem operando na situação real. (ROMBERG, 2007, p. 99-100)

A partir da delimitação de nosso fenômeno de interesse, precisávamos construir um modelo preliminar. Afinal, conforme sugerem Onuchic e Noguti (2014), o Modelo Preliminar objetiva ser como um guia para o pesquisador

---

<sup>2</sup> A Metodologia de Pesquisa de Romberg-Onuchic foi desenvolvida a partir de contribuições do GTERP ao Modelo Metodológico de Pesquisa de Romberg

enquanto a pesquisa se desenvolve e pode sofrer alterações em consonância com os avanços observados.

Minha prática docente tem, ao longo de minha experiência profissional, mostrado a importância de adequar as metodologias de ensino utilizadas ao perfil dos alunos em cada turma e com o conteúdo a ser trabalhado. Nesse sentido, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem surgido, para mim, não como uma alternativa, mas como um instrumento chave para a construção do conhecimento pelo aluno. Essa metodologia não descarta a utilização de métodos complementares e é, em si mesma, uma grande aliada na busca do sucesso dos alunos em matemática.

Por integrar os processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação a metodologia desenvolvida pelo GTERP demonstra a rara oportunidade de potencialização das aprendizagens, através de um ensino eficaz acompanhado por uma avaliação continuada durante sua aplicação.

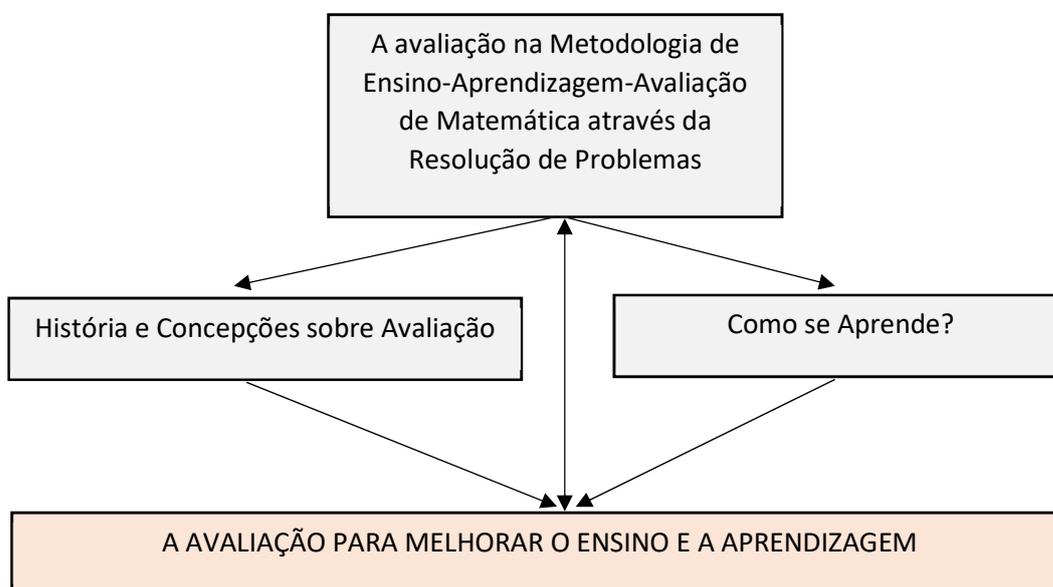
Várias pesquisas têm certificado sua eficiência no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática e sua utilização na sala de aula a tem revelado como um importante componente no movimento educacional tanto nos níveis fundamental e médio da Educação Básica quanto no nível da Educação Superior. Mas, de que maneira a avaliação se desenvolve quando se trabalha com resolução de problemas dentro da sala de aula, na perspectiva do GTERP? A avaliação desenvolvida durante a aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é, ela própria, um momento de aprendizagem?

Para a construção do modelo preliminar da pesquisa, levamos em consideração determinados aspectos históricos da avaliação que marcaram o seu desenvolvimento; instrumentos de coleta de evidências para a avaliação; seus objetivos; a avaliação da resolução de problemas; e a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, entendendo que “Resolução de Problemas vem ocupando, cada vez mais, um lugar importante nos currículos escolares, graças aos esforços de

muitos matemáticos, educadores matemáticos e principalmente pesquisadores e grupos de pesquisa consolidados” (FERREIRA, 2017, p. 74).

Questionamos ainda qual o papel que a avaliação desempenha na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. E, partindo dessa premissa, de minha própria experiência com essa metodologia e de minhas leituras e reflexões sobre o tema construímos o seguinte Modelo Preliminar de Pesquisa:

Figura 3: Modelo Preliminar de Pesquisa



Fonte: O autor

A partir do Modelo Preliminar, o pesquisador obtém variáveis-chave que irão auxiliá-lo a identificar e a relacionar o fenômeno e o modelo às ideias de outros – ou seja, pesquisar é “ouvir” o que outros (comunidade, pesquisadores, teóricos, os que fazem aplicação, ...) podem contribuir com sua pesquisa – trata-se de uma revisão teórica e de outros trabalhos já realizados que irão auxiliar o pesquisador, fundamentando sua pesquisa.

[...] Ao relacionar com ideias de outros o pesquisador deverá apresentar, em um texto, as contribuições de outros pesquisadores que ele julga importantes para a sua pesquisa, sem, no entanto, discutir tais ideias. Trata-se de um momento em que o pesquisador “ouve” os outros sem se manifestar. Utiliza “recortes” de outros autores ou suas obras para que, num segundo momento, possa se apoiar nas ideias desses autores. (ONUICHIC; NOGUTI, 2014, p. 61)

Três temas fundamentais emergem com naturalidade a partir de nossas inquietações e configuram as variáveis-chave, fundamentais para a compreensão do nosso fenômeno de interesse e para que chegássemos a um modelo de pesquisa modificado e à nossa pergunta, ou conjectura, de pesquisa.

Se nossa pesquisa está ancorada na proposta de uma metodologia pedagógica calcada na utilização da Resolução de Problemas, é natural que o tema Resolução de Problemas surja como variável-chave. Por outro lado, a Avaliação, como elemento central desta pesquisa, é outro tema que deve fundamentar nosso trabalho. Além disso, entendemos que haja necessidade de se compreender como a aprendizagem ocorre, no contexto da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução, para dirigir o processo de ensino e substanciar quaisquer processos avaliativos que possam pretender melhorar o desempenho do aluno na sala de aula. Assim, definimos que nossas variáveis-chave seriam: Resolução de Problemas, Avaliação e o Modo como os Alunos Aprendem. Esses temas serão trabalhados nos três próximos capítulos.

### **2.3. Relacionando com Ideias dos Outros**

Ao definir nossas variáveis-chave imaginamos um caminho de discussão que fosse pertinente a nossas pretensões. Ao “ouvir” o que outros pesquisadores pensam sobre nossas variáveis fortalecemos nossos pressupostos, abrimos horizontes sobre os conceitos envolvidos, cercamo-nos daquilo que já fora desenvolvido sobre nossos temas, redefinimos nossas crenças e projetamos um caminho de pesquisa com alicerces mais sólidos.

Para nossa pesquisa, pensamos inicialmente em desenvolver um caminho histórico da avaliação, através do qual abordaríamos definições, objetivos e pressupostos que foram sendo desenvolvidos ao longo do tempo de modo a compreender alguns porquês de a avaliação conviver, atualmente, com uma variedade de definições e objetivos, obtidos por meio de uma variedade enorme de instrumentos de coleta de dados. Ou seja, queríamos, com isso,

entender o porquê de a avaliação ser como ela é trabalhada atualmente. Durante a pesquisa surgiu-nos a necessidade de ampliar essa abordagem incluindo, em nossa pesquisa, o modo como a avaliação se desenvolveu legalmente no Brasil e um espectro do estado da pesquisa sobre avaliação, relacionado à Matemática, com a finalidade de fortalecer os argumentos que justificam esta pesquisa.

Sobre Resolução de Problemas, procuramos posicionar a Resolução de Problemas na História da Humanidade e o seu uso, relativamente recente, no ensino de matemática, desde as considerações de Polya até sua utilização na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

É evidente que, para que possamos obter uma visão mais esclarecedora dos pressupostos em que se ancoram as relações entre ensino, aprendizagem e avaliação, na perspectiva do GTERP, é preciso compreender como a aprendizagem pode ocorrer. A busca por essa compreensão nos levou a “ouvir” autores que teorizaram e/ou teorizam sobre o como se aprende e que dialogassem entre si. Nossa principal referência, nessa variável-chave, é Lev Semenovitch Vigotski e a teoria sociocultural.

### 3. HISTÓRIA E CONCEPÇÕES SOBRE AVALIAÇÃO

Para entender a avaliação na sala de aula hoje, tanto de matemática como de quaisquer outras áreas do conhecimento, é necessário dialogar com suas raízes (quando for possível encontrá-las) ou mesmo com episódios de sua história, para que se possa ter a ideia de uma trajetória percorrida desde a informação mais antiga disponível até a atualidade, a fim de melhor compreender o como a avaliação é vista e entendida

Nossa investigação conseguiu encontrar elementos relacionados à avaliação presentes na educação formal desde a Idade Moderna, berço das pedagogias tradicionais. Nesse capítulo, procuramos capturar um percurso do desenvolvimento da avaliação, desde essa gênese histórica até os dias atuais, enfocando, porém, no século presente, aspectos mais formativos da avaliação.

#### 3.1. A Avaliação e a Pedagogia Tradicional

Luckesi (1992) define a Pedagogia Tradicional, ressaltando que sua denominação não provém do fato de ter sido provavelmente a primeira e a mais antiga organização do pensamento pedagógico da Idade Moderna<sup>3</sup>. Ela possui características próprias que a diferencia de outras correntes pedagógicas, tanto epistemológica quanto pedagogicamente.

Segundo Luckesi (1992), a Pedagogia Tradicional foi constituída durante a Idade Moderna, especialmente nos anos de sua emergência, com o Renascimento<sup>4</sup>, e de sua cristalização, com a Revolução Francesa<sup>5</sup>. A Pedagogia Tradicional encontra forte respaldo nas propostas pedagógicas dos padres jesuítas, de João Amós Comênio e de Johan Herbart – três propostas pedagógicas identificadas com a ideia de um entendimento metafísico de mundo, que implicaria a ordem, o método e a disciplina.

---

<sup>3</sup> A idade Moderna é localizada historicamente entre os anos 1453 e 1789.

<sup>4</sup> O Renascimento ocorre, historicamente, entre meados do século XIV e o final do século XVI.

<sup>5</sup> 1789.

Luckesi (1992) reforça que:

A avaliação da aprendizagem escolar, nessa perspectiva pedagógica, estava e está diretamente articulada com o controle dos educandos não só no que se refere à aprendizagem dos conhecimentos e das habilidades de raciocinar, debater, discutir, mas também no que se refere à doutrina e às condutas morais e de civildade dentro da sociedade. A avaliação serve para estimular o esforço do estudante, a fim de que chegue ao padrão esperado de conduta. (LUCHESEI, 1992, p. 57-58)

Segundo esse autor, os séculos XVII e XVIII são os séculos da consolidação da disciplina. Ele enfatiza que esse período inventa a disciplina arcaica e a modernidade abre as portas para o Renascimento em termos de filosofia e arte e emergência de um método científico, como um modo de o sujeito observar e interpretar a realidade numa relação com ela mesma, enquanto a metafísica explicava a realidade com um olhar de fora dessa realidade. Os séculos XVII e XVIII teriam aprofundado os modos de disciplinamento, mesmo depois da modernidade ter aberto as portas para a subjetividade.

Luckesi (1992) argumenta também que as pedagogias tradicionais se centram no disciplinamento dos corpos e das almas com a finalidade de tornar os educandos pessoas dóceis e úteis à sociedade e aos anseios dos modos de produção dominantes. Ainda, segundo Luckesi (1992):

A sociedade burguesa não suportou e não suportaria a subjetividade em sua razão plena. Ela necessitava e necessita de controles para que o seu modo de produção atinja os fins que deseja. Um ser humano livre tem possibilidades imponderáveis de conduta e isso não interessa a um modelo de sociedade que necessita da submissão dos indivíduos para que seus níveis de lucratividade sejam mantidos. (LUCKESI, 1992, p. 59)

O desejo da Pedagogia Tradicional buscava desenvolver uma certa hegemonia, formando o caráter dos estudantes. Segundo Luckesi (1992), essa pedagogia poderia ser chamada de “pedagogia do esforço” porque o aluno deveria dedicar-se e esforçar-se para se formar em conformidade com os padrões de conduta considerados verdadeiros. A avaliação aparece então como

o instrumento de controle do processo de construção do ser humano sábio e moralmente correto. A sabedoria e a moralidade seriam adquiridas através de uma compreensão do como se deveria agir, do conhecimento e de diversos exercícios realizados intermitentemente.

Para Luckesi (1992), o período emergente da Pedagogia Tradicional vai da segunda metade do século XVI até a primeira metade do século XIX, muito embora, até os dias atuais, ainda possamos vislumbrar traços dessa Pedagogia em muitas salas de aula. Mais do que isso, pode-se perceber um certo inconformismo, em muitos professores, com o distanciamento entre as práticas avaliativas contemporâneas e o controle disciplinar exercido pela avaliação praticada pela Pedagogia Tradicional.

Mesmo que essas correntes pedagógicas convirjam em diversos pontos, especialmente no que se refere à preocupação com a ordem, com o método e com a disciplina, elas divergem em diversos aspectos, evidenciando a necessidade de diferenciar os paradigmas de avaliação propostos por cada uma delas.

### **3.1.1. A Avaliação Segundo a Visão da Pedagogia Jesuíta**

Segundo Luckesi (1992), os Jesuítas foram elaborando propostas e normas pedagógicas, durante o período de 1550 a 1599, que culminaram numa normativa denominada Ratio Atque Institutio Studiorum Societatis Jesu. Além de estruturar as ações educativas das escolas jesuítas, a Ratio pretendia disciplinar e ordenar as condutas que deveriam ser seguidas para que todos os estabelecimentos de ensino, bem como todos os participantes do processo educativo, mantivessem uma conduta semelhante.

Com relação à avaliação da aprendizagem escolar, Luckesi (1992) nos relata que “os autores da Ratio definiram com precisão e detalhe as práticas que deveriam ser realizadas no processo de julgamento e promoção do estudante; estabeleceram o desenho das condutas” (LUCKESI, 1992, p. 81).

A avaliação era definida, primeiramente, pelo estabelecimento do mérito do aluno. Seu resultado poderia servir para a promoção de uma classe para outra ou para ascensão na hierarquia da Ordem dos Jesuítas, para estudantes que pretendiam exercer o ministério religioso. Mas a avaliação também tinha a função de estabelecer um modo de controlar a formação do aluno no saber, na piedade, na moralidade e na disciplina.

Segundo Luckesi (1992):

Do ponto de vista operacional, a Ratio define que a avaliação da aprendizagem deve dar-se de duas formas: uma, realizada pelo professor, especialmente através de exercícios, que constituem o acompanhamento do aluno ao longo do período letivo; outra, realizada através dos exames, tendo em vista a promoção do escolástico de uma classe para outra ou, no caso do ensino superior, de um curso para outro. Enquanto o acompanhamento do estudante era de responsabilidade do respectivo professor, os exames eram realizados por uma banca examinadora, especificamente constituída para isso. (LUCKESI, 1992, p. 82-83)

O papel exercido pelo professor no processo de avaliação da aprendizagem aparece na Ratio de modo bastante difuso, embora intermitente. Nas prescrições das atividades docentes era exigido do professor que exercesse o papel de avaliador do rendimento do aluno, através do seu desempenho em todas as atividades, especialmente nas atividades de exercitação, que eram exigidas em todos os níveis de ensino. O professor não poderia aprovar e nem reprovar o estudante, mas, para efeitos de sua promoção, deveria estar presente tanto no seu ensino, através das preleções, como no processo de estudos, nos exercícios de repetição, de debate, de desafios, de lições públicas, de defesas de teses. Por outro lado, o professor deveria se manter ausente dos procedimentos de promoção, sendo permitido participar da banca avaliadora apenas no caso das classes de ensino superior.

Segundo Luckesi (1992), o professor deveria estar sempre atento ao desempenho de seus alunos, por ser o mediador diretamente responsável por sua aprendizagem. Como era o professor quem ensinava, precisaria cuidar para saber se os alunos haviam estudado e aprendido aquilo que fora ensinado,

verificando seus erros e corrigindo-os imediatamente. O professor precisaria trabalhar para que os escolásticos aprendessem efetivamente as lições. Quando um estudante era promovido de uma classe a outra, a glória e o mérito era seu, mas o professor também recebia o mérito pela promoção.

O professor deveria registrar todos os resultados obtidos por seus alunos durante todo o período letivo. Esses resultados eram entregues à banca de exames que os utilizariam durante o processo de promoção de uma classe a outra. O poder para a aprovação ou reprovação do aluno era prerrogativa da banca examinadora, porém, em alguns casos, esse poder era outorgado ao superior hierarquicamente estabelecido. Esse procedimento tinha como objetivo evitar que o comprometimento pessoal do professor pudesse influenciar o seu julgamento a respeito do estudante, em outras palavras, tentava alcançar a imparcialidade do julgamento (embora isso não fosse possível). Eis uma ação diametralmente contrária às concepções atuais de avaliação para a aprendizagem, que destacam a necessidade do envolvimento do professor nas práticas avaliativas com a finalidade de garantir o sucesso dos alunos.

A Pedagogia Jesuíta, conforme pontua Luckesi (1992), nutria uma certa desconfiança do trabalho do professor, fato que reflete o pensamento da época sobre a condição corrompida da natureza humana. Acreditava-se que o professor atuaria como juiz do próprio trabalho e, por esse motivo, poderia cometer enganos. Sem contar que, pela aprovação ou reprovação de um grande número de alunos de um determinado professor, poderiam ponderar sobre a qualidade do seu trabalho docente.

Em outras palavras, os exames buscavam controlar tanto alunos quanto professores. Para Luckesi (1992), os exames passaram a polarizar a vida estudantil e os alunos começaram a se preocupar mais com a preparação para os exames do que com a aprendizagem. Essa supervalorização dos exames dava margem a uma “pedagogia dos exames”.

### 3.1.2. A Avaliação Segundo a Visão da Pedagogia de Comenius

A obra *Didactica Magna* é, certamente, a obra mais importante do pensador tcheco, Iohannis Amos Comenius (1592 – 1670). Mas, para além disso, Comenius formulou uma concepção pedagógica e mostrou um encaminhamento possível para o ensino, com importância reconhecida, tanto por teóricos da educação quanto por historiadores da pedagogia. Isso faz dele um dos precursores da didática moderna, se não o primeiro a sistematizar uma didática (LUCKESI, 1992).

A Didática Magna foi escrita originalmente em 1632, em tcheco, e, posteriormente em 1657 traduzida para o latim. Nela, Comenius (2001) define que o homem possui três requisitos autênticos, que podem ser descritos pelas seguintes palavras, vulgarmente conhecidas: 1. Instrução; 2. virtude, ou seja, honestidade de costumes; e 3. religião, ou seja, piedade.

A instrução seria o conhecimento pleno das coisas, das artes e das línguas; os costumes, mais do que a urbanidade exterior, seriam a plena formação interior e exterior dos movimentos da alma; e a religião, entendida como a veneração interior, pela qual a alma humana se liga ao Ser supremo (COMENIUS, 2001).

Segundo Luckesi (1992), a Didática Magna, de Comenius, não tem uma preocupação específica com a promoção dos estudantes. Antes disso, sua preocupação primeira era com um ensino satisfatório e a promoção seria apenas uma consequência da aprendizagem dos estudantes. Ele indica, ao longo da obra, atividades que são identificadas atualmente como atividades de avaliação, mas essas são mais veladas que explícitas.

Para Comenius, parece que não importava, prioritariamente, selecionar os melhores, mas sim ensinar e aprender com eficiência. O mínimo, todos deveriam aprender com eficiência, para que pudessem ser cidadãos sábios, virtuosos e piedosos. (LUCKESI, 1992, p. 155)

Para Comenius, o aluno deveria aprender bem tudo o que fosse ensinado e, para isso, era necessário que o professor utilizasse um método de

ensino eficiente e, se o aluno não aprendesse, a responsabilidade era do professor (LUCKESI, 1992).

Com foco no desenvolvimento da aprendizagem do estudante, Comenius (2001) sugeriu nove regras aplicáveis ao ensino de ciências, dentre as quais encontram-se o ensino de geometria e de geodésia:

1. Ensine-se tudo o que se deve saber;
2. Tudo o que se ensina, ensine-se como uma coisa do mundo de hoje, e de utilidade certa;
3. Tudo o que se ensina, ensine-se de maneira direta, e não com rodeios;
4. Tudo o que se ensina, ensine-se tal qual é e acontece, isto é, pelas suas causas;
5. Tudo o que se oferece ao conhecimento, ofereça-se primeiro de modo geral, depois por partes;
6. Conheçam-se todas as partes da coisa, mesmo as mais pequeninas, mesmo sem omitir nenhuma, respeitando a ordem, a posição e as relações que umas têm com as outras;
7. Ensinem-se todas as coisas sucessivamente, e durante o mesmo tempo não se ensine senão uma coisa só;
8. Insista-se sobre cada matéria, até que ela seja perfeitamente compreendida;
9. Ensinem-se bem as diferenças das coisas, para que o conhecimento das coisas seja distinto. (COMENIUS, (2001, p. 340-346)

Quanto à promoção, Comenius defendia a adoção de exames públicos. Para ele, a expectativa de um exame geral público motivaria os estudantes a estudar e a existência objetiva do exame os coagiria para tal. Para ele, o medo do fracasso geraria a busca de resultados positivos (COMENIUS, 2001).

### **3.1.3. A Avaliação Segundo a Visão da Pedagogia de Herbart**

Johann Friederich Herbart nasceu na Alemanha, na cidade de Oldenburg, em 1776. A mãe dedicou-se inteiramente aos seus cuidados e formação, além de supervisionar os seus estudos, estando presente em todas as suas tarefas. Sua instrução elementar foi dada pelo Pastor Ulzen, cujo método criterioso teria tido uma forte influência sobre a formação da teoria pedagógica de Herbart. O Pastor Ulzen tinha uma filosofia educacional curta, mas eficaz: O objetivo de

toda instrução é cultivar a clareza, a definição e a continuidade do pensamento. (EBY; ARROWOOD, 1934).

Segundo Luckesi (1992), o principal objetivo de Herbart era estabelecer os princípios científicos para a prática educativa, de modo que a instrução promovesse o desenvolvimento moral dos educandos. Ele foi o primeiro pedagogo a tentar mostrar a pedagogia como uma ciência da educação e não como a arte de ensinar. Queria que a educação fosse prática, consciente e consistente, com fundamentação tanto prática quanto teórica.

Os objetivos da educação herbartiana são bastante claros e versam sobre a intencionalidade do aprendiz em desenvolver em si valores éticos e a aquisição de cultura:

[...] O objetivo da educação e do ensino é a produção do homem culto, que seja consistentemente devotado pela intenção consciente de alcançar os mais altos ideais éticos da vida. Não é que o homem sem instrução não possa ser bom; ele pode ser mecanicamente bom - ou seja, pode ser bom pelo hábito ou pela imitação; mas ele não pode ser tão inteligentemente bom, tão livremente bom, ou tão minuciosamente bom, como o homem educado. (EBY; ARROWOOD, p. 761-762, Tradução minha)

Para Herbart (apud LUCKESI, 1992), a educação deve gerar uma internalização das condutas e essa perspectiva lhe confere uma atitude de desconfiança sobre a validade da prática dos exames, na medida em que eles adquirem um caráter ritualístico ou formalístico no processo de ensino. Corrobora com essa desconfiança o fato de que Herbart acreditava que exames impostos não poderiam contribuir para a formação do jovem pois, segundo ele: “Não interessa o caráter formado por coação, mas sim o caráter que decorre de um consentimento interno” (apud LUCKESI, 1992, p. 205).

Por outro lado, Luckesi (1992) afirma que Herbart não recusava os exames, mas colocava condições para que eles acontecessem. Era preciso que eles fossem realizados pelo sujeito de forma consentida e que significassem uma internalização de condutas que auxiliassem na formação do caráter. Assim,

a essência da crítica de Herbart a respeito dos exames, e que ele recusava, estaria no seu formalismo.

Em seu livro *Letters and Lectures on Education*, escrito originalmente em 1832, em alemão, e traduzido para o inglês em 1898, Herbart apontava a importância da matemática e questionava a ideia, já presente à sua época, de que a capacidade para a matemática é mais rara que a capacidade para quaisquer outros temas. Segundo ele (1898), isso é uma ilusão causada por se negligenciar determinados conteúdos matemáticos e por postergar o ensino de outros (HERBART, 1898).

Embora Herbart não tenha tido, segundo Luckesi (1992), um cuidado especial com a avaliação da aprendizagem, baseado em suas conclusões acerca das dificuldades apresentadas pelos alunos, especialmente os de matemática, e das orientações dadas a professores no livro *Letters and Lectures on Education* podemos concluir que Herbart dedicou parte de seus estudos a uma criteriosa avaliação do processo de ensino-aprendizagem.

É através dessa cuidadosa avaliação que Herbart (1898) atribuía a dificuldade encontrada pelos alunos de sua época com o aprendizado de matemática a três outros fatores:

1. A linguagem utilizada pela matemática seria uma ‘pedra de tropeço’ mesmo nos processos mais simples como, por exemplo, na enunciação de uma multiplicação de frações:  $2/3 \cdot 4/5$ , que é lido como dois terços vezes quatro quintos, onde ao invés dizer multiplica-se 2 por 4 e divide-se pelo produto de 3 e 5, dever-se-ia chamar a atenção de que a terça parte de um todo envolve a concepção desse todo. Ou seja, há uma multiplicação de três fatores: 2,  $1/3$  e  $4/5$ . E  $1/3$ , nesse caso, só pode ser um multiplicando, nunca um multiplicador. Palavras ou termos de origem

misteriosa, como “raiz quadrada<sup>6</sup>”, também confundiriam os alunos, principalmente quando “raízes” de equações são estudadas (HERBART, 1898);

2. Os erros de se considerar números como soma de unidades. Isso não é mais verdade quando consideramos que todo produto é uma soma. “Dois” não implica uma soma ( $1 + 1$ ), mas um dobro ( $\times 2$ ), se a quantidade a dobrar é uma unidade ou um múltiplo. O conceito de uma dúzia de cadeiras não implica doze cadeiras individuais, mas possui duas representações, o conceito geral de cadeira e a ideia única de “doze vezes”. O conceito de número não é devidamente desenvolvido, por ser considerado soma de unidades, o que obriga a enumeração sucessiva para a obtenção de um número (HERBART, 1898);

3. A dificuldade de compreensão da natureza das quantidades envolvidas adicionada à dificuldade no cálculo aritmético simples. Valor principal, juros e tempo, velocidade, espaço e tempo, por exemplo, são conceitos com suas próprias unidades de medida com os quais os alunos deveriam estar familiarizados (HERBART, 1898). Herbart defende, portanto, que tais conceitos sejam trabalhados muito antes de serem utilizados como material para a prática de cálculos aritméticos.

Herbart (1898) propõe, então, que a prática do trabalho matemático na escola não pode manter o aluno numa rotina prolongada e a explicação dos conteúdos deve ser progressiva.

Se o único objeto fosse incentivar a autoatividade individual do aluno, as partes elementares do conteúdo seriam uma fonte amplamente suficiente para exercícios intermináveis, fazendo com que o aluno ficasse encantado ao descobrir que sua destreza aumentaria e, ocasionalmente, se alegraria até mesmo com uma pequena descoberta, sem ter qualquer ideia da magnitude da ciência. (HERBART, 1898, p.246 – Tradução minha)

---

<sup>6</sup> No latim “radix quadrata”

Para Herbart (1898), a avaliação, por ele denominada julgamento, é para o aluno como um espelho humano, onde o que seria o reflexo é uma pessoa diferente de si, que mostra suas falhas e potencialidades. Quando um exame obriga o aluno a ficar em silêncio, este percebe que está exposto a possíveis erros de julgamento. Daí, a estética do julgamento passaria a ser artificial e não estimulada.

A Pedagogia Tradicional, embora alicerçada no século XVII, manteve influência sobre a pedagogia do século XX e, até hoje, é possível observar-se algumas das práticas tradicionais arraigadas na sala de aula de Matemática do Sistema Educacional Brasileiro.

### **3.2. A Avaliação no Brasil<sup>7</sup> e no Mundo nos Séculos XIX e XX**

A história da avaliação no Brasil é mais recente, em comparação à avaliação praticada pelos jesuítas, por Comenius ou por Herbart, por exemplo. Porém, antes mesmo do Brasil se tornar uma república o assunto já era considerado. O decreto nº 630, de 17 de setembro de 1851, assinado por José da Costa Carvalho, então Visconde de Mont’Alegre<sup>8</sup>, versava sobre a reforma do ensino primário e secundário e indicava no parágrafo 7º do Art. 01 que o Governo deveria regulamentar a forma dos exames.

Essa regulamentação aconteceu por meio do Decreto nº 1331–A, de 17 de fevereiro de 1854, assinado por Luís Pedreira do Couto Ferraz, o Visconde do Bom Retiro, então Ministro e Secretário de Estado dos Negócios do Império, e ficou conhecido como a “Reforma Couto Ferraz”. Essa Reforma regulamenta a instrução primária e secundária em 135 artigos, muitos dos quais destinados aos exames para a contratação de professores e à instrução sobre a realização de exames para os alunos.

---

<sup>7</sup> As adequações da língua portuguesa às normas vigentes foram realizadas pelo pesquisador.

<sup>8</sup> José da Costa Carvalho se tornaria o Marquês de Monte Alegre, título com o qual ficou conhecido. O Visconde de Mont’Alegre foi Presidente do Conselho de Ministros no período de 1849 a 1852.

O artigo 75, dessa reforma, imputa ao regulamento das escolas a responsabilidade sobre as regras para a realização dos exercícios escolares, a forma da realização dos exames, horas de aulas e outros objetos que não estivessem descritos nominalmente no decreto. Da mesma forma, o artigo 78, que versa sobre a instrução secundária, revela em seu caput que:

As matérias de cada ano, sua distribuição por aulas, o sistema das lições, o método dos exames, o regime interno do estabelecimento e a distribuição de prêmios até o número de três no fim de cada ano letivo do curso, farão objeto de um Regulamento especial que será organizado pelo Conselho Diretor, e sujeito á aprovação do Governo. (BRASIL, 1854)

Como consequência da aplicação dos exames, a Reforma Couto Ferraz descreve os critérios para a aprovação ou reprovação do estudante. Segundo este decreto, a reprovação deveria ocorrer quando a maioria dos membros da comissão julgadora dos exames considerasse o aluno como reprovado. As notas que a comissão deveria conferir aos alunos seriam as de *aprovado*, *aprovado com distinção* e *reprovado*. Quando um aluno era reprovado ficava impedido durante um ano de realizar novos exames, não podendo, portanto, avançar à série seguinte.

Depois, em 24 de outubro de 1857, Pedro de Araújo Lima, o Marquês de Olinda, Conselheiro de Estado, Presidente do Conselho de Ministros, Ministro e Secretário de Estado dos Negócios do Império assinou o Decreto nº 2006, que aprovava o Regulamento para os colégios públicos de instrução secundária do Município da Corte, com 78 artigos que alteravam algumas regulamentações impetradas pela Reforma Couto Ferraz. Dentre as mudanças, o documento inclui a reprovação por faltas. Segundo o artigo 27, ficará inibido de fazer o exame e, conseqüentemente, perderá o ano, o aluno que tiver 45 faltas sem justificativa ou 135 faltas, mesmo que justificadas. O Capítulo II do Decreto nº 2006, compreende os artigos de 28 a 46 e versa sobre Exames, Prêmios e Colação de Grau. O artigo 29 descreve a abrangência dos conteúdos abordados nos exames:

Art. 29. Os exames serão feitos sobre pontos tirados à sorte pelos examinandos; e que devem compreender todas as matérias que tiverem sido lecionadas nas aulas, segundo o programa de ensino organizado pelo conselho diretor no princípio de cada ano, e aprovado pelo Governo.

§ 1º Os exames do 5º ano, para o curso especial de cinco anos, versarão sobre as matérias que formam este curso especial de estudos.

§ 2º Os do 7º ano, sobre as matérias que formam o curso completo de estudos.

§ 3º Os do 5º ano, quando façam parte do curso completo, e os dos outros anos sobre as matérias ensinadas em cada um deles, e somente para se verificar se os alunos aproveitaram, e se podem passar para o ano seguinte.

§ 4º Os exames de todos os anos serão feitos no colégio a que pertencerem os alunos; exceto quanto aos do 5º do curso especial; e quanto aos do 7º; os quais serão feitos no colégio que for determinado por ordem superior. (BRASIL, 1857)

Os artigos de 31 a 38 procuram descrever o processo de avaliação do desempenho dos alunos, realizado através de provas escritas e orais.

Art. 31. Nos exames do 5º ano para o curso especial, e nos do 7º ano, haverá uma prova oral, e outra escrita.

Na prova oral os examinadores poderão interrogar sobre os princípios gerais que tiverem relação com o ponto; e se o exame for de línguas versará sobre a leitura e gramática e, se for da latina e do 7º ano, sobre medição de versos.

Art. 32. Na prova escrita cada examinando terá uma hora para preparar a prova de cada exame de língua, e hora e meia para as de história, e ciências. No exame de matemática poderá este tempo ser aumentado, conforme julgar necessário a comissão de exame; a qual concederá também no exame oral algum tempo para orientar o aluno no ponto que lhe tiver saído por sorte.

Em qualquer destes casos o aluno estudará o ponto na presença de um dos membros da dita comissão, que for designado pelo Inspector Geral.

Art. 33. Os alunos que no mesmo dia tiverem de fazer exame por escrito da mesma matéria, serão examinados em um só ponto que a sorte designar.

§ Único. Para esse fim prepararão os alunos as respectivas provas em mesas separadas, onde serão inspecionados pelos examinadores, para evitar que se auxiliem mutuamente, ou que uns observem os trabalhos dos outros.

Art. 34. Os alunos do 5º ano do curso especial e os do 7º ano serão interrogados em cada matéria pelos professores respectivos (do Internato, e do Externato), e julgados por uma comissão composta do Inspector Geral da instrução primária e

secundária, que será o presidente, do Reitor e Vice Reitor do respectivo colégio, de um membro do conselho diretor, nomeado pelo Governo e, no caso de falta repentina, pelo Inspector Geral; e de mais três professores nomeados indistintamente de qualquer dos colégios pelo Inspector Geral.

Art. 35. Findo o tempo marcado para o exame por escrito, apresentarão os alunos as respectivas provas no estado em que se acharem, assinando cada um seu nome logo em seguida da última linha que tiver escrito.

§ 1º Estas provas serão rubricadas no alto de cada meia folha pelo presidente da comissão, e depois distribuídas com igualdade pelos examinadores.

§ 2º Concluídas as provas escritas de todos os alunos, passar-se-á à prova oral, que será de meia hora para cada examinando.

Art. 36. No dia imediato, reunida a comissão na sala dos exames, antes de outro qualquer trabalho, apresentarão os examinadores as provas que lhes tiverem sido distribuídas, notando por escrito em cada uma os erros que o respectivo aluno houver cometido, e declarando também por escrito qual a sua opinião acerca do merecimento de cada prova.

Art. 37. Os membros da comissão, examinando entre si as ditas provas, e combinando-as com os apontamentos tomados sobre os exames orais do dia anterior, e com as notas do aproveitamento dos alunos durante os respectivos anos, formarão o seu juízo sobre o merecimento de cada um deles, mas não se procederá a votação senão depois que tiver cada aluno feito exame de todas as matérias do respectivo curso.

Art. 38. Terminados os exames, na conformidade do final do artigo antecedente, e reunida a comissão, proceder-se-á a votação por escrutínio secreto sobre cada matéria, à medida que os nomes dos alunos examinados forem lidos pelo presidente.

§ 1º A totalidade, ou o maior número de esferas brancas do que pretas, aprova: a aprovação por totalidade de esferas brancas terá a nota de - plena. A totalidade, ou o maior número de esferas pretas do que brancas, reprova.

§ 2º Quando a aprovação for plena, repetir-se-á o escrutínio; e neste caso será conferida a nota de aprovado com distinção ao aluno que obtiver totalidade de esferas brancas.

§ 3º A reprovação em qualquer das matérias obriga o aluno a estudar novamente o ano, exceto se tiver sido aprovado com distinção em todas as outras.

§ 4º Neste caso merecerá o aluno a nota de - esperado, e poderá no ano seguinte, antes da abertura das aulas, fazer novo exame da matéria em que for reprovado.

§ 5º O aluno do 7º ano que for reprovado em alguma ou algumas matérias, e aprovado em outras, e quiser repetir o ano, poderá deixar de frequentar as aulas das matérias em que tiver sido aprovado.

§ 6º O aluno nas condições do § antecedente, que não quiser repetir o ano, e pretender matricular-se em alguma das faculdades superiores do Império, não será obrigado a fazer novamente exame das matérias em que foi aprovado. (BRASIL, 1857)

Importante ressaltar a presença dos exames durante o período do império no Brasil e notar que as questões disciplinares, percebidas tanto na pedagogia dos Jesuítas quanto nas pedagogias de Comenius e de Herbart, possuem bastante força nas escolas brasileiras primárias e secundárias. Há ainda, presente nos decretos acima citados, alguma preocupação com as trapaças que poderiam acontecer durante a aplicação dos exames. Outro aspecto a ser salientado é que os castigos disciplinares sugeridos durante o Império Brasileiro primam por situações vexatórias para o aluno, ou por situações onde o educando tivesse que realizar tarefas escolares em maior quantidade, porém, sem nenhum objetivo pedagógico, limitando-se apenas ao objetivo de regulação de sua disciplina.

O período do Império Brasileiro terminou com a Proclamação da República, em 1889 e, no ano seguinte, o Generalíssimo Manoel Deodoro da Fonseca, Chefe do Governo Provisório da então República dos Estados Unidos do Brasil<sup>9</sup>, assinou o Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890, aprovando um novo regulamento para a Instrução Primária e Secundária do Distrito Federal<sup>10</sup>. Além de descrever como deveriam ser a organização e o funcionamento das escolas, o Decreto nº 981 institui a data dos exames e o modo como devem ser realizados.

Os exames aconteciam logo após o período letivo, iniciado no dia 1 de março e encerrado no dia 30 de novembro de cada ano. No mês de fevereiro havia uma segunda época de provas, dedicada apenas aos alunos que por motivo de moléstias comprovadas não pudessem participar dos exames realizados no final do ano.

---

<sup>9</sup> O país passou a se chamar República Federativa do Brasil a partir da Constituição de 1967.

<sup>10</sup> As Instruções Primária e Secundária do Distrito Federal ocorreriam nos chamados Gymnasios Nacionais.

Segundo o Artigo 33 desse decreto, quando os exames fossem para matérias que seriam continuadas no ano seguinte, chamados *exames de suficiência*, seriam aplicadas apenas provas orais e quando os exames ocorressem para matérias concluídas, chamados *exames finais*, seriam aplicadas provas orais e escritas. Havia também um exame chamado *exame de madureza*, aplicado para os concluintes do curso integral, “destinado a verificar se o aluno tem a cultura intelectual necessária” (BRASIL, 1890).

Os exames de suficiência eram aplicados por uma comissão composta pelos *lentes* (professores titulares) do ano, presidida por um lente designado pelo reitor. Os exames finais deveriam ser aplicados por dois lentes da matéria avaliada e presidida pelo próprio reitor, pelo vice-reitor ou por um professor designado pelo reitor para esse fim; caso houvesse apenas um lente da matéria no Gymnasio, o reitor deveria nomear um lente de outra cadeira, “que tenha idoneidade para o encargo” (BRASIL, 1890).

Dois anos depois, Floriano Peixoto, então Vice-Presidente do país, aprovou um novo decreto, assinado pelo Ministro de Estado Fernando Lobo. O Decreto nº 1194, de 28 de dezembro de 1892 apresenta, entre outras providências, o Plano de Estudos do Gymnasio Nacional ao longo de sete anos de escolarização. Listamos abaixo o Programa de Estudos de Matemática:

1º Ano: Aritmética (estudo completo);

2º Ano: Álgebra elementar (estudo completo) e revisão de aritmética;

3º Ano: Geometria e trigonometria; geometria preliminar e trigonometria retilínea; geometria especial (estudo perfunctório das secções cônicas, da conchóide, da cissóide, da limaçon de Pascal e da espiral de Arquimedes); Revisão de aritmética e álgebra;

4º Ano: Geometria geral, cálculo e geometria descritiva: geometria geral, seu complemento algébrico; noções de cálculo diferencial e integral, limitado ao conhecimento das teorias indispensáveis ao estudo da mecânica geral

propriamente dita; noções de geometria descritiva, e trabalhos gráficos correspondentes;

5º Ano: Noções de astronomia, precedida da trigonometria esférica; noções sucintas de geometria e mecânica celestes;

6º Ano: Revisão de cálculo numérico, mecânica e astronomia;

7º Ano: Revisão de cálculo e geometria, mecânica e astronomia.

Quanto aos exames, o Decreto nº 1194 não traz grandes alterações em relação à última reforma. Porém, indica a utilização de médias entre provas e exames, uma novidade se considerarmos que toda a legislação anterior se omitisse quanto a isso e se referisse apenas aos exames realizados após o término do período letivo.

Segundo o Artigo 20 deste decreto, “O resultado do exame será ajuizado pela comparação das provas exibidas e das médias ou contas do ano”. Além disso, há uma preocupação explícita com a possibilidade de ocorrência de trapaçadas (colas), pelos alunos. O §1º do Artigo 21 ressalta que:

O examinando que for surpreendido servindo-se, no ato do exame, de apontamentos particulares ou de quaisquer livros não permitidos pela comissão, perderá o direito de prestar exame, só podendo ser a este admitido no fim do ano letivo seguinte.  
(BRASIL, 1892)

Outra novidade relevante apresentada pelo Decreto nº 1194, de 28 de dezembro de 1892, relacionada à avaliação, é a instauração de exames de admissão para os Gymnasios. Segundo o Artigo 117, uma mesa julgadora formada por três lentes do primeiro ano e presidida pelo mais antigo aplicaria um exame aos candidatos à admissão no primeiro ano do Gymnasio. Nesse exame seriam julgadas as proficiências em leitura, ditado, noções de gramática da língua portuguesa, aritmética prática até regra de três, morfologia geométrica e noções de geografia geral.

Todo esse processo avaliativo é questionado, tanto quanto a sua validade, ainda no final do século XIX, por Campagne (1873), ao propor que a

aprovação nos exames havia se tornado mais importante que a própria educação. E embora reconheça que casos de parcialidade e fraude fossem raros e fáceis de serem percebidos, ainda assim poderíamos encontrar advogados soezes, bacharéis que não conhecem ortografia, engenheiros incapazes de engendrar coisa alguma, médicos charlatães e cirurgiões sem habilidade. Para Campagne (1873, p. 540) “é raro que o examinador possa, em uma hora, apreciar o mérito do examinado”, por inaptidão ou deslealdade ao ofício.

No limiar do século XIX, um novo regulamento foi decretado pelo Presidente Prudente de Moraes, assinado pelo Ministro de Estado da Justiça e Negócios Interiores, Amaro Cavalcanti. O Decreto nº 2857, de 30 de março de 1898 aprovou o último regulamento para o Gymnasio Nacional e Ensino Secundário nos Estados. Uma das principais mudanças trazida por esse decreto refere-se à atribuição de notas, relacionando valores de 0 a 7 à conceitos, e orientando a correção dos exames.

Art. 80: As provas escritas, examinadas e criticadas pelos professores, que motivarão as suas notas, indicando ao mesmo tempo os erros à margem de cada trabalho, serão depois também qualificadas pelo júri com as notas 7 (ótima) 6 a 4 (boa), 3 a 1 (sofrível) e 0 (insuficiente); e terão a declaração de nula, se o candidato houver escrito sobre assumpto diferente do que lhe tiver sido dado.

Parágrafo único. A nota nula, na prova escrita, adiará o exame do candidato para quando terminar o das turmas designadas; e um segundo insucesso, para a seguinte sessão anual. (BRASIL, 1898)

Além disso, mais uma vez, esse decreto, em seu Artigo 82, exprime a preocupação com possíveis trapaças, reeditando, minuciosamente, o §1º do Artigo 21 do Decreto 1194. Por outro lado, as anotações dos professores, realizadas durante o ano letivo ganham força:

Art. 83. O júri poderá dispensar do exame oral qualquer candidato, uma vez que, pela prova escrita e pelas atestações da sua caderneta e documentos escolares, entenda ter base segura para juízo definitivo sobre o mesmo; assim como regulará o tempo da referida prova oral, segundo a necessidade que haja de completar ou retificar o juízo formado pela prova escrita,

exigindo-a sobre a totalidade das matérias, ou sobre parte delas, respeitado o limite máximo de uma hora e 10 minutos para cada aluno (BRASIL, 1898).

Tal possibilidade gerava, naturalmente, a necessidade de registros regulares dos professores acerca das realizações e das dificuldades encontradas por seus alunos durante todo o período letivo. As avaliações realizadas em boa parte do século XX mostrariam uma estabilidade teórica alcançada pelas práticas educacionais brasileiras do século XIX, conforme veremos mais adiante.

A primeira Constituição Federal Brasileira da Era Republicana, de 1891, não apresenta diretrizes sobre a Educação no Brasil, limitando-se apenas a imputar ao Congresso Nacional, em seus artigos 34 e 35, a obrigação de legislar sobre o Ensino Superior e a criação de Instituições de Ensino Superior e Secundário (BRASIL, 1891). Além disso, o parágrafo 6º do Artigo 72 estabelece que o ensino ministrado em estabelecimentos públicos seria de caráter laico. Portanto, até a promulgação da Constituição de 1934, a Educação Nacional foi gerida através de Decretos e, durante as três primeiras décadas do século XX, pouca coisa mudou na legislação a respeito dos exames.

O Decreto nº 3914, de 23 de janeiro de 1901, é complementar ao Decreto nº 2857, de 1898, detalhando como seria a realização dos exames, porém, sem acrescentar nenhuma novidade quanto à natureza dos exames, que continuava a ser a busca da quantificação do conhecimento adquirido durante os estudos. O artigo 22 desse Decreto define que:

Art. 22. A prova escrita de matemática e astronomia versará sobre o desenvolvimento metódico e prático de quatro questões, inclusive avaliação de áreas e de volumes, questões sorteadas dentre doze formuladas, no ato de começar a prova, pelo especialista da comissão de ciências, e aceitas pela maioria dos seus membros. (BRASIL, 1901)

Ou seja, o aluno precisava provar sua capacidade de utilização dos métodos trabalhados em sala de aula e sua fluência na execução das tarefas, que incluíam a avaliação de áreas e volumes. É interessante perceber que a

primeira vez que a palavra avaliação aparece, no contexto legal da Educação Nacional, não se refere à construção de juízos de valores sobre o aluno, mas sobre a capacidade do aluno de avaliar uma situação apresentada.

De modo geral, a avaliação realizada no início do século XX, em todo o mundo, estava restrita aos exames, aos atos de se provar a capacidade de realizar determinadas atividades, por escrito ou verbalmente e eram extremamente ligados aos conceitos de regulação das disciplinas.

No Brasil, no artigo “O valor dos exames” de Romão Puiggari, Puiggari (1903) questiona a utilidade dos exames anuais, a quem ele define como uma comédia que precisava ser enterrada. A promoção para as séries subsequentes, nessa época, dependia da aprovação em exames orais realizados por um grupo de professores, dentre os quais o professor da disciplina. Segundo Puiggari, Tolstói os repele absolutamente enquanto Afonso Karr e Luiz Ferriani os definem como a arte de se enganar os examinadores. Puiggari (1903, p. 200) ressalta ainda que, para Ferriani, “não é um tribunal convocado o que pode julgar a capacidade do aluno, mas sim o professor que instruiu o aluno durante todo o ano”. A crítica era que apenas o professor da disciplina avaliada se comprometia com a examinação do aluno, enquanto os demais acompanhavam a avaliação desse professor (PUIGARI, 1903).

Por sua vez, Pironel e Onuchic (2003), no artigo “A Avaliação sob o Ponto de Vista Legal”, publicado na Revista de Educação Matemática, Ano 8, nº 8, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, subsede de São Paulo (SBEM-SP) procuraram apresentar um percurso histórico da avaliação no século XX essencialmente através de um viés legal. Pela importância desse artigo para a nossa pesquisa atual decidimos reproduzi-lo aqui na íntegra. É notável que, por coincidência de autores pesquisados, algumas citações possam ter aparecido ao longo desta tese, porém achamos importante trazê-lo à luz. As únicas alterações realizadas foram a atualização ortográfica da língua portuguesa e a adequação às normas da ABNT.

## A AVALIAÇÃO SOB O PONTO DE VISTA LEGAL

### **Introdução**

Uma constante facilmente observada no sistema escolar diz respeito à prática pedagógica adotada pelos professores que trabalham efetivamente na sala de aula. Raras são as oportunidades em que esses profissionais conhecem determinadas metodologias de ensino-aprendizagem e, quando as conhecem, por muitas vezes e por diversas razões elas não são aplicadas.

Uma das justificativas dadas por muitos docentes para a não aplicação de “novas metodologias” de ensino-aprendizagem na sala de aula é mostrada por um discurso comum nas salas de professores e nos HTPC's (Horário de Trabalho Pedagógico Conjunto) criados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo. Dizem os professores que “a teoria é ‘linda’, mas ‘eles’ (os teóricos da educação) não conhecem a realidade da sala de aula”. Armados com tal justificativa, esses professores desprezam novas tendências educacionais e garantem que suas metodologias tradicionais de trabalho são as mais apropriadas para conter a disciplina e manter a ordem das salas superlotadas em que lecionam.

Essa postura pedagógica tradicional, geralmente adotada por professores do Ensino Médio, evidentemente abrange o modo como seus alunos são avaliados na sala de aula de matemática que, sob a visão tradicional vigente, se traduz em realizar provas mensais ou bimensais que possam, objetivamente, quantificar o conhecimento adquirido por seus alunos durante o mês ou bimestre e classificá-los segundo os parâmetros nem sempre previamente estabelecidos por esses professores.

Por outro lado, há uma evolução natural no processo educativo brasileiro e no Processo avaliativo, teoricamente garantido pela nova Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional (LDB), Lei 9394/96, pela resolução CEB n.º 15/98 do Conselho Nacional de Educação (CNE) e pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a partir dos quais a Secretaria Estadual de

Educação do Estado de São Paulo pautou a reformulação do Ensino Básico Fundamental e Médio das Escolas.

A avaliação é hoje, sem dúvida, um elemento essencial ao processo educativo. Sua importância foi aumentando gradativamente ao longo do século passado ao incorporar novos conceitos. Apesar de esses conceitos estarem ligados intrinsecamente ao processo de ensino-aprendizagem, a avaliação ainda exerce, muitas vezes, um papel de seleção e de classificação. Mas o papel da avaliação, na sala de aula, deve ser considerado como um instrumento capaz de auxiliar e de apoiar a aprendizagem do educando de tal modo que ele possa, através de um trabalho bem feito de avaliação, aprender mais tornando-se um cidadão crítico-reflexivo, criativo e participativo na sociedade em que vive.

Entendemos que um cidadão seja crítico quando ele possui habilidade para julgar se determinadas situações ou condições são favoráveis ou desfavoráveis, boas ou más, de modo que nada seja aceito de imediato sem uma reflexão prévia. Entendemos, ainda, que a sociedade atual necessita que seus integrantes sejam participativos e criativos. Ou seja, é fundamental que o cidadão saiba criar para construir, modificar ou aperfeiçoar sua comunidade e para isso é necessário que ele seja parte ativa no seio desta comunidade.

É intenção deste artigo localizar o momento histórico pelo qual passa a educação nacional em nível médio, e localizar e apresentar questões legais que apontam para a transformação do processo educativo visto através da avaliação.

## **A Evolução do Conceito Avaliação ao Longo do Século XX**

Encontramos num artigo de Kilpatrick chamado “A História da Pesquisa em Educação Matemática” (*A History of Research in Mathematics Education*):

Em 1845 um Comitê de Escolas de Boston, EUA, orgulhoso do que suas escolas estavam realizando e sob pressão do Secretário de Estado de Educação em Massachusetts, para mostrar que as escolas estavam cumprindo bem o trabalho esperado pelo Estado em vista de generosos recursos financeiros recebidos, incumbiu-se de fazer uma pesquisa abrangente nas escolas. Em vista do grande número de

estudantes a serem examinados decidiram usar uma bateria de testes escritos. Sabe-se que os examinadores e o Secretário ficaram desapontados com os baixos níveis de desempenho. (KILPATRICK, 1992, p.14)

Esta pesquisa é uma das primeiras formas de avaliação em massa. Kilpatrick reforça que, depois disso, outros caminhos foram tentados até que por volta do ano de 1890 decidiram estabelecer padrões para testes, acreditando na possibilidade de estes testes serem capazes de melhorar o trabalho desenvolvido.

Por outro lado, em 1886, foi lançado em Portugal o *Diccionario Universal de Educação e Ensino*, escrito originalmente na França por E. M. Campagne e “*trasladado a portuguez e ampliado nos varios assumptos relativos a Portugal por Camillo Castello Branco*”. O objetivo do *Diccionario*, que era composto por 3 volumes sobre assuntos relacionados à Educação e ao Ensino, era o de apresentar, de modo simplificado, “o mais essencial da sabedoria humana e toda a ciência cotidianamente aplicável, especialmente ao ensino”.

Nele encontramos uma interessante colocação sobre a dificuldade em se “apreciar” os exames, carregada de um sentido crítico que buscava, a seu modo, uma visão do desenvolvimento do aluno mais do que simplesmente a detecção de seus erros:

É preciso ainda que o exame seja calculado em relação à média dos espíritos bem constituídos; que haja uma justa proporção entre as provas escritas e orais; que se avaliem umas e outras não *more judaico*, segundo uma regra rígida e mecânica, mas com equidade, isto é, com inteligência, pesando mais do que contando os erros, e considerando com atenção os variados elementos que entram numa apreciação sempre delicada e difícil. (CAMPAGNE, 1886, p.986)

Apesar do *Diccionario* ser uma publicação portuguesa acreditamos que ela tenha servido de inspiração a professores brasileiros no fim do século XIX e início do século XX, considerando inclusive que o carimbo de doação do livro, para a Biblioteca da E.E. Otoniel Mota de Ribeirão Preto, data de 1916.

A mais antiga publicação brasileira relacionada ao Ensino que conseguimos encontrar foi o exemplar número 3, ano II, de uma revista chamada *Revista de Ensino da Associação Beneficente do Professorado Publico de São*

*Paulo*, de agosto de 1903. Um de seus artigos, intitulado *O valor dos exames* e escrito por Romão Puiggari questiona o sistema de promoção feito através de exames e diz ser necessário continuar a tocar no assunto “até ficar de vez enterrada a comédia anual dos exames” (PUIGGARI, 1903, p. 200).

Pudemos encontrar, na Revista Educação, vol. V, ns. 2-3, de 1928, do bimestre novembro-dezembro, artigos que procuram, de modo geral, focalizar a educação da época, distingui-la da instrução e definir o papel do professor, leigo ou letrado. Nessa revista Silva (1928) demonstra ainda uma preocupação com a aprendizagem e com o relacionamento entre professor e aluno, afirmando que a escola deveria ser um lugar de aprendizado não só para os estudantes como também para os professores, acrescentando que “aqueles aprendem a educar-se enquanto que estes observam e orientam”.

No ano de 1947, a Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos, vol. X, nº 28, do bimestre maio-junho, através do artigo *Espírito, Tendências e Problemas da Educação Latino Americana*, escrito por Júlio Larrea do Instituto Superior de Pedagogia, de Quito - Equador, destacava a importância da autocrítica para a construção da educação na América Latina.

Larrea (1947) nos relata que a América Latina compreende que tenha perdido muita tinta e muito papel em reformas escolares pobres. Segundo ele, cada dirigente encaminha a educação ao compasso de inovações exibicionistas. E ressalta a importância da construção de um plano educacional porque ele impõe um compromisso de durabilidade, ao invés dos programas que têm sido escritos às vésperas das eleições.

A importância dos exames e das provas na escola estava intimamente ligada à verificação e ao controle dos conteúdos ensinados, já que a educação estava muito mais relacionada à transmissão dos saberes humanos através do ensino do que com a aprendizagem do aluno, ainda que possamos perceber em alguns autores a necessidade de pensar a aprendizagem como parte integrada ao ensino. Essa ideia desenvolveu-se e transformou o processo de ensino numa prática vinculada à aprendizagem do educando passando, então, mais adiante a ser chamado de processo de ensino-aprendizagem. Porém, antes mesmo

desta ideia ganhar força, os exames ganhavam cada vez mais críticos, inconformados muito mais com o modo como estes eram aplicados do que com suas implicações pedagógicas.

Mário Pires, Diretor do Ginásio Estadual de Salto, São Paulo, demonstrava, já no ano de 1959, no texto *Exames Orais, essa Calamidade*, publicado na revista *Atualidades Pedagógicas*, sua preocupação com os rumos que a educação tomava à época. Pires (1959) lembra que o seu artigo não é o primeiro protesto individual ou coletivo dos educadores, contra a mentira das provas que, pelo sistema em vigor, à época, eram o martírio dos diretores, da secretaria da escola, de professores e de alunos. As provas às quais Pires se refere são as provas orais, comuns à época, e seu principal argumento é que não havia tempo hábil para a realização dos tais exames orais. Porém, ele já identifica fatores que acabaram em anos seguintes por se tornar, verdadeiramente, um martírio para os alunos. Ele também faz menção às provas escritas, ele afirma que “outra farsa, nesses exames, é quanto à prova escrita que deverá ter três membros, exigindo que os três julguem e deem nota! E todos nós sabemos que quem se desobriga é apenas o professor da matéria...” E conclui que com o fim das provas orais o ano letivo poderia ter um aumento dos cento e sessenta e cinco dias previstos por uma portaria, podendo chegar a cento e oitenta dias.

Foi na década de sessenta que a Educação Brasileira começou a ganhar contornos mais parecidos com aqueles que hoje a delineiam. O foco da educação passou efetivamente do ensino para o ensino-aprendizagem e a avaliação ganhou uma nova dimensão no contexto.

Mas o início da década foi um tanto quanto tímido com relação à Avaliação, a Lei 4.024, de dezembro de 1961, que trata das Diretrizes e Bases da Educação Nacional, reserva para a Avaliação o Artigo 39:

A apuração do rendimento escolar ficará a cargo dos estabelecimentos de ensino, aos quais caberá expedir certificados de conclusão de séries e ciclos e diplomas de conclusão de cursos.

§ 1º Na avaliação do aproveitamento do aluno preponderarão os resultados alcançados, durante o ano letivo, nas atividades escolares, asseguradas ao professor, nos exames e provas, liberdade de formulação de questões e autoridade de julgamento.

§ 2º Os exames serão prestados perante comissão examinadora, formada de professores do próprio estabelecimento, e, se este for particular, sob fiscalização da autoridade competente. (BRASIL, 1961)

Podemos considerar como grande avanço a autonomia do professor com relação à escolha, execução e autoridade para o julgamento dos resultados observados. O que possibilitou que novos avanços pudessem ocorrer nos anos seguintes com relação à avaliação da aprendizagem.

A Revista de Pedagogia, Edição Especial, publicada no ano de 1965, tem como tema central o *Simpósio sobre o Ensino Ginásial Renovado* e apresenta uma Didática renovada e com preocupações diferenciadas com relação à Didática até então praticada. Nela, o artigo *O Trabalho Dirigido*, de Amélia Domingues de Castro, faz uma comparação entre os esquemas que compõem as Didáticas Tradicional e Moderna. Ou seja, a sociedade, que enxergava o aluno apenas como mais uma etapa para atingir seus objetivos, passa a compreender que o educando com aspirações e desejos próprios é parte integrante dessa mesma sociedade. Deste modo o aluno é colocado como partícipe do processo educacional que se amplia e se transforma num processo que vise não só o ensino como também a aprendizagem.

Castro (1965) ainda nos revela outras diferenças entre as didáticas tradicional e moderna. Segundo ela, na Didática Tradicional o trabalho em aula era competência do professor, enquanto o aluno devia apenas ouvir e anotar, e o trabalho de estudo competia ao aluno que procurava memorizar o material trabalhado pelo professor durante a aula. Em contrapartida, a Didática atual reconhece o trabalho do educando em classe e o direcionamento que o professor confere aos estudos, dentro ou fora da sala de aula, criando assim um “novo” termo, as atividades dirigidas. Explica ainda que as atividades dirigidas são aquelas que o aluno exerce e que buscam a aquisição, assimilação, fixação, integração e desenvolvimento do aprendizado. Uma consequência imediata

deste novo enfoque educacional passa a ser a necessidade da criação de um processo avaliativo que acompanhe o rendimento e o desenvolvimento do estudante com relação a seu aprendizado, contrariamente aos métodos até então utilizados que tinham como principal objetivo saber se o ensino havia sido bem ministrado ou não, normalmente no final do período letivo.

Ainda em 1965, houve uma *Mesa Redonda sôbre Avaliação da Aprendizagem*, presidida pela Professora Julieta Ribeiro Leite, que tinha o propósito de apresentar diferentes experiências com avaliação da aprendizagem vividas por cursos ginasiais, colegiais e normais da época. Um dos relatores da Mesa Redonda, Samuel Franco, nos coloca que:

as notas constituem uma espécie de linguagem convencional que favorece um certo tipo de diálogo entre mestre e os seus alunos. Recebendo deles um trabalho qualquer, o professor corrige-o e devolve-o acompanhado de uma apreciação sob a forma de nota. Esta apreciação é fácil de entender, tem uma linguagem clara e funciona frequentemente como um estímulo para o aluno melhorar seu rendimento. (FRANCO, 1965, p. 231)

Ressaltando a importância de se privilegiar a formação do educando ao invés de enfatizar sua erudição, diz Franco (1965) que:

a tendência, hoje em dia, é de se acreditar que vamos à escola para “aprender a aprender” e que saber estudar, observar, refletir, raciocinar, expressar-se bem é mais importante do que decorar um ponto de gramática, uma teoria matemática ou mesmo um poema. (...) Queremos que os nossos alunos não somente saibam resolver um problema de Matemática, recordar fatos históricos, declinar dados geográficos, como também adquiram o espírito de pesquisa, observação e criação. (FRANCO, 1965, p. 235)

Outro relator da Mesa Redonda, a Madre Maria Júlia conta a experiência do Ginásio Nossa Senhora do Morumbi. Ela acredita que:

O critério que nos leva à avaliação da aprendizagem procura abranger algo mais do que o simples resultado de uma prova ou da “média” em determinada disciplina. Muito mais revelador é o trabalho diário, contínuo e progressivo, pelo qual a aluna vai, segundo seu ritmo, dominando as noções a serem adquiridas. (JULIA, 1965, p. 246)

No artigo *A Avaliação da Aprendizagem no Curso Ginásial Renovado*, Julieta Ribeiro Leite (1965) traz considerações importantes sobre a visão da

Avaliação na década de sessenta, dizendo que a escola secundária tradicional tinha como objetivo apenas transmitir conhecimento, ou seja, conteúdo. Logo, seria natural que a avaliação estivesse presa apenas à verificação da aprendizagem, em função da matéria ensinada, ou seja, à verificação do desenvolvimento intelectual. De outro modo, a escola secundária moderna de sua época, tem em sua ação didática uma atenção centrada no educando e não na instrução que se deva adquirir. Assim a avaliação precisa considerar o educando como um todo, enfatizando as mudanças provocadas nele pela aprendizagem. Leite (1965) diz que:

A avaliação passa de fim a meio. Meio de diagnosticar para curar, meio de acompanhar os progressos individuais. Deixa de ser um procedimento 'a posteriore', para tornar-se um elemento do sistema didático, elemento este que deve estar presente em todos os momentos do trabalho escolar, e através do qual o professor capta e registra todos os "progressos e as dificuldades de cada educando, em relação às balizas básicas traçadas como objetivos gerais e específicos da educação. (LEITE, 1965, p. 86)

Diz também que o professor precisa e tem a oportunidade de avaliar a todo instante a eficiência de sua ação pedagógica e o rendimento de seus alunos. Porém, ele deve utilizar instrumentos de avaliação que lhe possibilite um registro sistemático que permita o acompanhamento dos progressos individuais.

Dez anos depois da publicação da primeira Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional, o então Presidente da República Emílio G. Médici sanciona a Lei 5.692, de 11 de agosto de 1971, chamada de Lei de Diretrizes e Bases para o Ensino de 1.º e 2.º graus.

Em seu artigo 1.º, a Lei 5.692/71 nos chama a atenção de que "o ensino de 1.º e 2.º graus tem por objetivo geral proporcionar ao educando a formação necessária ao desenvolvimento de suas potencialidades como elemento de autorrealização, qualificação para o trabalho e preparo para o exercício consciente da cidadania". É evidente que, para um melhor entendimento dos objetivos acima propostos, seria necessário estudar o termo "exercício consciente da cidadania". Do ponto de vista pedagógico, parece que esta visão legal da educação sintetiza algumas correntes educacionais da década de

sessenta. Sobre avaliação, surge uma variável até então aparentemente descartada: a assiduidade. A LDB de 1971, a respeito da avaliação, nos diz:

Art. 14.º - A verificação do rendimento escolar ficará, na forma regimental, a cargo dos estabelecimentos, compreendendo a avaliação do aproveitamento e a apuração da assiduidade.

§ 1º Na avaliação do aproveitamento, a ser expressa em notas ou menções, preponderarão os aspectos qualitativos sobre os quantitativos e os resultados obtidos durante o período letivo sobre os da prova final, caso ela seja exigida.

§ 2.º O aluno de aproveitamento insuficiente poderá obter aprovação mediante estudos de recuperação proporcionados obrigatoriamente pelo estabelecimento.

§ 3.º Ter-se-á como aprovado quanto à assiduidade:

- a) O aluno de frequência igual ou superior a 75% na respectiva disciplina, área de estudo ou atividade;
- b) O aluno de frequência inferior a 75% que tenha tido aproveitamento superior a 80% da escala de notas ou menções adotadas pelo estabelecimento;
- c) O aluno que não se encontre na hipótese da alínea anterior, mas com frequência igual ou superior ao mínimo estabelecido em cada sistema de ensino pelo respectivo Conselho de Educação, e que demonstre melhoria de aproveitamento após estudos a título de recuperação.

§ 4.º Verificadas as necessárias condições, os sistemas de ensino poderão admitir a adoção de critérios que permitam avanços progressivos dos alunos pela conjugação dos elementos de idade e aproveitamento. (BRASIL, 1971)

Podemos verificar que, em termos gerais, os conceitos de avaliação das décadas de sessenta e setenta pouco se alteraram. Afinal, ambos apontavam para um processo educacional que não privilegiava apenas o ensino e a transmissão de conhecimento, mas muito mais que isso. O processo educacional passou a ser centrado no aprendizado do educando, constituindo um processo maior chamado processo de ensino-aprendizagem. Porém, em meados dos anos setenta, graças à crescente utilização de trabalhos em grupo na sala de aula, com o advento da chamada “Escola Nova” que tinha como um de seus princípios o desenvolvimento social do educando, novos meios de avaliação começaram a surgir e ganhar força. Segundo Lima (1976, p. 123):

“Frequentemente, na avaliação do trabalho o professor demonstra a pouca firmeza de seus princípios pois que avalia apenas o rendimento intelectual, a aquisição de conhecimentos”, o que seria objetivo da escola tradicional.

Ainda segundo Lima (1976):

O termo avaliação assusta, por vezes, os indivíduos pouco habituados a ela, sendo essa uma primeira dificuldade a contornar. Sua necessidade, todavia, pode ser clarificada pois que a avaliação, por favorecer o desenvolvimento de uma crítica construtiva, é um elemento de valia para o progresso de toda e qualquer atividade humana. Na verdade, o indivíduo que fugir a autoavaliar-se estará estacionário, não criará condições mínimas ao próprio desenvolvimento, pois não se tendo detido, através de um processo reflexivo, na análise de seus atos, não estabelecerá as condições necessárias para um replanejamento mais eficaz”. LIMA (1976, p. 123)

Colotto (1976) nos diz que:

Infelizmente o termo avaliação traz algumas conotações negativas: é frequente a relação que se faz da avaliação com a mensuração de uma certa quantidade de informações ou conteúdos, como se a mera repetição fosse a meta da ação pedagógica. Por outro lado, é comum a relação que se faz da avaliação com “exames”, “promoção”, “vestibular”, “sucesso”, etc., daí decorrendo a maneira inadequada de encarar as notas como as “únicas” metas da atividade educativa. Nunca é demais repetir que o que se pretende, através da avaliação é uma mera etapa no processo educativo e jamais um fim por si mesmo e que, por ela, se verifica em que medida e com qual valor os objetivos foram alcançados. COLOTTO (1976, p.141)

A grande transformação da visão sobre avaliação na década de setenta é que a verificação do ensino passou a ser também uma verificação da aprendizagem do educando, uma vez que ensino e aprendizagem passaram a caminhar juntos. A utilização da avaliação em sala de aula, nas décadas de setenta e oitenta, parece não ter sido a mais adequada. Os padrões de rigidez e a excessiva autonomia na aprovação dos alunos, delegada aos professores, prejudicaram, muitas vezes, o próprio processo avaliativo, prejudicando também muitos alunos que não passavam pelo “crivo do conhecimento” de alguns professores. Ainda que a LDB privilegiasse os aspectos qualitativos na avaliação do educando, a maioria dos professores continuava a seguir seus padrões de

avaliação quantitativos e com critérios de julgamento e atribuição de notas ou menções pouco claros.

A década de noventa trouxe mudanças, ainda que estas viessem ocorrendo vagarosamente. A avaliação passou a ser compreendida como uma parte importante no processo de ensino-aprendizagem.

Demo (1997, p. 31) nos diz que “Até que enfim. a LDB consagra o princípio da avaliação como parte central da ‘organização da educação nacional’ (Art. 8º, §5)”. Na verdade, essa preocupação crescente com o processo avaliativo na educação é produto da evolução do pensar educacional no Brasil e no mundo. As reformas pretendidas na primeira metade do século XX referiam-se ao processo de ensino. Nas três ou quatro últimas décadas, passou-se a falar em ensino-aprendizagem da educação como um todo. Hoje, com certeza, a avaliação já está sendo agregada ao processo de ensino-aprendizagem como uma forte aliada para uma melhor construção do conhecimento de nossos alunos. A avaliação, na sala de aula constitui-se então parte integrante do próprio processo de ensino-aprendizagem, que passa a ser visto como um processo ainda mais amplo chamado ensino- aprendizagem-avaliação.

### **Os PCN e a Avaliação**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN’s, uma parte importante no processo da construção de um ensino eficiente para nossos educandos, juntamente com a Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional - LDB (9394/96) - procuram focalizar o processo de transformação do ensino mostrando caminhos e apresentando propostas diretivas de encaminhamento do processo de ensino-aprendizagem no Brasil, além de fornecer elementos para a implementação das Diretrizes para o Ensino Médio.

Para os PCN-EM o pensamento crítico-reflexivo e a habilidade para o trabalho solidário (ou trabalho em grupo) tornam-se cada vez mais virtudes necessárias ao desenvolvimento e à sobrevivência do ser humano. Os PCN - EM (1999) nos dizem que:

À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. (PCN – EM, 1999, p. 251)

Por sua vez a Matemática assume o sentido desta “sociedade globalizada” ao incorporar aspectos formativos imprescindíveis para o desenvolvimento das capacidades exigidas pela sociedade atualmente constituída.

Segundo os PCN - EM (1999):

Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais. (PCN – EM, 1999, p. 251)

Isso demonstra que a Matemática pretende atingir objetivos bem claros à luz do desenvolvimento humano do educando e de sua ampla aplicabilidade mesmo num mundo em constante mudança.

Para alcançar as finalidades da Matemática, no Ensino Médio, o professor deverá lançar mão dos mais variados instrumentos de ensino e aprendizagem. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas é, inclusive, sugerida não apenas como uma metodologia, mas como uma finalidade em si. Outra estratégia sugerida é a do ensino-aprendizagem através da avaliação. É evidente que se a avaliação for um instrumento que leve o aluno a desenvolver suas habilidades crítica e reflexiva, ela poderá suportar e auxiliar o aprendizado do educando, como nos sugerem os PCN-EM (1999):

A própria avaliação deve ser também tratada como estratégia de ensino, de promoção do aprendizado das Ciências e da Matemática. A avaliação pode assumir um caráter eminentemente formativo, favorecedor do progresso pessoal e

da autonomia do aluno, integrada ao processo ensino-aprendizagem, para permitir ao aluno consciência de seu próprio caminhar em relação ao conhecimento e permitir ao professor controlar e melhorar a sua prática pedagógica. Uma vez que os conteúdos de aprendizagem abrangem os domínios dos conceitos, das capacidades e das atitudes, é objeto da avaliação o progresso do aluno em todos estes domínios. De comum acordo com o ensino desenvolvido, a avaliação deve dar informação sobre o conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos; a capacidade para aplicar conhecimentos na resolução de problemas do cotidiano; a capacidade para utilizar as linguagens das Ciências, da Matemática e suas Tecnologias para comunicar ideias; e as habilidades de pensamento como analisar, generalizar, inferir. PCN-EM (1999, p. 268)

A avaliação poderá, muito além do que propõe esse parágrafo dos PCN, ser um instrumento válido de aprendizagem do educando, auxiliando o processo de construção da compreensão de conceitos matemáticos, de processos e técnicas operatórias e na utilização destes conceitos, processos e técnicas em situações cotidianas. O processo de construção por parte dos alunos é muito importante quando se busca a formação de seres pensantes e ativos na sociedade, como concluem os PCN “o que também se pretende é educar para a iniciativa, pois a cidadania que se quer construir implica participação e não se realiza na passividade”.

Os PCN - EM (1999) não abominam a utilização das provas como instrumento de avaliação, mas advertem:

É imprópria a avaliação que só se realiza numa prova isolada, pois deve ser um processo contínuo que sirva à permanente orientação da prática docente. Como parte do processo de aprendizado, precisa incluir registros e comentários da produção coletiva e individual do conhecimento e, por isso mesmo, não deve ser um procedimento aplicado nos alunos, mas um processo que conte com a participação deles. É pobre a avaliação que se constitua em cobrança da repetição do que foi ensinado, pois deveria apresentar situações em que os alunos utilizem e vejam que realmente podem utilizar os conhecimentos, valores e habilidades que desenvolveram. PCN-EM (1999, p. 265)

Utilizar apenas este tipo de avaliação, reconhecidamente classificatório e que privilegia a memorização de exercícios feitos à exaustão em sala de aula é completamente contrário a um projeto de avaliação que realce e incentive o raciocínio, a redação e o desenvolvimento crítico do aluno e que o transforme

em parceiro do professor na realização das atividades, tendo ambos o mesmo fim que é o de tornar a aula mais agradável e favorecer um aprendizado da matemática com maior compreensão e significado.

### **A LDB/96 e a Resolução CNE/98**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam que a reforma do Ensino Médio por eles proposta pauta-se em bases legais muito fortes e uma de suas fontes é a LDB, Lei de Diretrizes e Bases - Lei 9394/96 - que discrimina o “novo ensino médio”, reconfigurando-o como parte integrante da Educação Básica.

Os Parâmetros Curriculares também ressaltam a importância de um Ensino Médio que objetive a formação de cidadãos que possam integralizar-se na sociedade agindo de modo construtivo, além de desenvolver características de criticidade, ética e desenvolvimento intelectual que os tornem capazes de construir seu próprio aprendizado também fora da escola, de modo que acompanhe o desenvolvimento tecnológico e político de seu tempo na sociedade na qual está inserido.

De acordo com os PCN - EM (1999):

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional explicita que o Ensino Médio é a “etapa final da educação básica” (Art.36), o que concorre para a construção de sua identidade. O Ensino Médio passa a ter a característica da terminalidade, o que significa assegurar a todos os cidadãos a oportunidade de consolidar e aprofundar os conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental; aprimorar o educando como pessoa humana; possibilitar o prosseguimento de estudos; garantir a preparação básica para o trabalho e a cidadania; dotar o educando dos instrumentos que permitam “continuar aprendendo”, tendo em vista o desenvolvimento da compreensão dos “fundamentos científicos e tecnológicos dos processos produtivos” (Art.35, incisos I a IV ). PCN-EM (1999, p. 21-22)

Gostaríamos também de destacar que o currículo escolar do Ensino Médio, segundo o Artigo 36, deverá observar algumas diretrizes:

Adotará metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes (inciso II);

Os conteúdos, as metodologias e as formas de avaliação serão organizados de tal forma que ao final do ensino médio o educando demonstre:

I - domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna;

II - conhecimento das formas contemporâneas de linguagem;

III - domínio dos conhecimentos de Filosofia e de Sociologia necessários ao exercício da cidadania.” (§ 1º, incisos de I a V). (BRASIL, 1996)

Poderíamos concluir esse artigo da LDB salientando a importância da Avaliação no Currículo Escolar e, por conseguinte, no próprio processo de ensino-aprendizagem, funcionando de forma coordenada com os conteúdos e metodologias. A própria Avaliação pode, muitas vezes, ser um instrumento direto na aprendizagem do estudante. Ou seja, o professor poderá servir-se dos instrumentos de avaliação para auxiliá-lo cotidianamente durante suas aulas com o propósito de melhor ensinar seus alunos.

O Conselho Nacional de Educação (CNE) nos lembra da necessidade de observarmos as experiências prévias dos estudantes. Nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio temos o seguinte:

O jovem não inicia a aprendizagem escolar partindo do zero, mas com uma bagagem formada por conceitos já adquiridos espontaneamente, em geral mais carregados de afetos e valores por resultarem de experiências pessoais. Ao longo do desenvolvimento, aprende-se a abstrair e generalizar conhecimentos aprendidos espontaneamente, mas é bem mais difícil formalizá-los ou explicá-los em palavras porque, diferentemente da experiência escolar, não são conscientes nem deliberados. (BRASIL, 1998)

Outro aspecto importante a salientar refere-se, entre outras coisas, à conotação estética, política e ética da avaliação. Não é necessário acrescentar muita coisa ao que está escrito nestes artigos que pretendem apresentar diretrizes para os currículos do Ensino Médio. Porém, um questionamento é inevitável, os valores e princípios aqui apresentados têm sentido se forem seguidos como valores e princípios. Será que o são? Vejamos o que nos fala o Conselho Nacional de Educação - CNE/98 (Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio- CEB nº15/98 - CNE), em seus artigos segundo e terceiro:

Art. 2º. A organização curricular de cada escola será orientada pelos valores apresentados na Lei 9.394, a saber:

I - os fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática;

II - os que fortaleçam os vínculos de família, os laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca.

Art. 3º. Para observância dos valores mencionados no artigo anterior, a prática administrativa e pedagógica dos sistemas de ensino e de suas escolas, as formas de convivência no ambiente escolar, os mecanismos de formulação e implementação de política educacional, os critérios de alocação de recursos, a organização do currículo e das situações de ensino aprendizagem e os procedimentos de avaliação deverão ser coerentes com princípios estéticos, políticos e éticos, abrangendo:

I - a Estética da Sensibilidade, que deverá substituir a da repetição e padronização, estimulando a criatividade, o espírito inventivo, a curiosidade pelo inusitado, e a afetividade, bem como facilitar a constituição de identidades capazes de suportar a inquietação, conviver com o incerto e o imprevisível, acolher e conviver com a diversidade, valorizar a qualidade, a delicadeza, a sutileza, as formas lúdicas e alegóricas de conhecer o mundo e fazer do lazer, da sexualidade e da imaginação um exercício de liberdade responsável.

II- a Política da Igualdade, tendo como ponto de partida o reconhecimento dos direitos humanos e dos deveres e direitos da cidadania, visando à constituição de identidades que busquem e pratiquem a igualdade no acesso aos bens sociais e culturais, o respeito ao bem comum, o protagonismo e a responsabilidade no âmbito público e privado, o combate a todas as formas discriminatórias e o respeito aos princípios do Estado de Direito na forma do sistema federativo e do regime democrático e republicano.

III - a Ética da Identidade, buscando superar dicotomias entre o mundo da moral e o mundo da matéria, o público e o privado, para constituir identidades sensíveis e igualitárias no testemunho de valores de seu tempo, praticando um humanismo contemporâneo, pelo reconhecimento, respeito e acolhimento da identidade do outro e pela incorporação da solidariedade, da responsabilidade e da reciprocidade como orientadoras de seus atos na vida profissional, social, civil e pessoal. (BRASIL, 1998)

Ao buscar uma nova estética no ensino, para substituir o ensino tradicional realizado através da repetição, abre-se o leque de possibilidades metodológicas que poderiam ser utilizadas pelo professor. Algumas delas, na sala de aula de matemática, incluem a utilização de jogos, problemas e novas tecnologias, como por exemplo a utilização de softwares.

A metodologia que entendemos ser aquela que mais se identifica com a proposta do CNE, tanto com relação à estética como na política da igualdade e na ética da identidade, acima citados, é a Metodologia de Ensino-Aprendizagem via Resolução de Problemas, que privilegia o trabalho em grupos e a construção do conhecimento matemático pelo próprio aluno. Segundo Onuchic (1999):

A atividade matemática escolar não se resume a olhar para coisas prontas e definitivas, mas para a construção e a apropriação, pelo aluno, de um conhecimento do qual se servirá para compreender e transformar a realidade. (ONUCHIC, 1999, p. 215)

### **O Conselho Estadual de Educação (CEE) e a Avaliação**

Uma das preocupações do Conselho Estadual de Educação em definir a importância da avaliação no meio escolar e o papel que ela deve, ou deveria, exercer no processo educativo relaciona-se com os pedidos de reconsideração dos resultados de avaliações finais de alunos reprovados ao término do período letivo. A avaliação vem, há muito tempo, obedecendo a um cunho eminentemente classificatório, que além de estabelecer, ao final do ano, quem foi “aprovado” ou “reprovado”, ainda contribui para ressaltar as possíveis diferenças existentes entre os alunos pertencentes a determinada classe, série ou escola, privilegiando, sobremaneira, a quantidade de conteúdos que o aluno consegue repetir em determinadas situações em detrimento da qualidade do conteúdo aprendido. Isso fere a Estética da Sensibilidade, a Política da Igualdade e a Ética da Identidade preconizados pela Resolução CEB nº15/98 do CNE pois, segundo o Conselho Estadual de Educação, Indicação n.º 12/96:

É necessário que o foco da avaliação não se situe apenas no aluno, individualmente, e sim na classe e na Escola, ou seja, no processo interpessoal de ensino-aprendizagem como um todo, levando em conta não só as necessidades dos alunos, suas realidades e competências, mas também o desempenho do professor, os conteúdos selecionados, os métodos, os procedimentos e os materiais utilizados. (SÃO PAULO, 1996)

Com isso o caráter da avaliação passa a ser bem diferente daquele tradicionalmente entendido, com uma função formativa bastante forte, fazendo com que o professor assuma o seu papel de redirecionar a prática educativa sempre que isso for necessário a fim de sanar eventuais falhas no processo de

ensino-aprendizagem do educando. Seu papel deixa de ser um processo estático de correção de exercícios de repetição realizados em testes de conteúdo mensais ou bimensais e de trabalhos realizados pelos alunos através da resolução desses mesmos tipos de exercícios para se tornar um processo ativo e dinâmico de diagnóstico contínuo que visa a fornecer informações úteis para que o profissional da educação, não só o professor, possa repensar e reformular as estratégias, os procedimentos e os métodos utilizados por eles na construção do processo educativo.

Segundo a Indicação n.º 12/96 do CEE:

A avaliação deve ser entendida pelo professor como o processo de acompanhamento e compreensão dos avanços, limites e dificuldades dos alunos para atingir os objetivos do curso, do componente curricular ou da atividade de que participam e, também, como indicador da necessidade de estimular a progressão da aprendizagem. (SÃO PAULO, 1996)

Acontece que o professor não é o único responsável pelo processo avaliativo, há uma equipe que constrói a escola. Essa equipe é formada pela Direção da Escola, a Coordenação Pedagógica e o Corpo Docente.

Segundo a Indicação do Conselho Estadual de Educação, CEE n.º 12/96 a Direção deve apoiar a ação pedagógica da Escola, além de assegurar que o aluno seja analisado ao longo de todo o processo de ensino-aprendizagem e possibilitar que pais e alunos conheçam os critérios avaliativos e as condições em que a avaliação se dá.

À Coordenação Pedagógica, por sua vez, cabe o papel de garantir a realização dos seguintes procedimentos: 1) Registro contínuo e instrumental dos procedimentos avaliativos e da assiduidade dos alunos, de modo que, haja registros ininterruptos durante todo o ano letivo; 2) Revitalização dos Conselhos de Série, Classe e de outros Colegiados similares, a fim de que as reuniões pedagógicas possam ter máximo aproveitamento.

É importante salientar, neste parágrafo, a importância da intervenção da Direção da Escola e da Coordenação Pedagógica junto aos professores para

que se possa identificar as causas das distorções do processo de ensino-aprendizagem e propor alternativas viáveis para corrigi-las.

A decisão sobre os resultados finais do aluno, ao término do período letivo, deverá ser norteada pela análise do desenvolvimento global do aluno no conjunto dos componentes do currículo, o que não significa determinar uma média global do seu desenvolvimento, mas uma análise cuidadosa do desempenho do aluno no transcorrer do período. Ainda segundo a Indicação n.º 12/96 do CEE:

As reuniões pedagógicas periódicas representam momento privilegiado para que a equipe escolar, a partir dos registros das dificuldades de ensino/aprendizagem, estabeleça formas diferenciadas de recuperação e reforço para os alunos. Independentemente da recuperação paralela e da recuperação final, a recuperação contínua, ligada ao fazer diário do professor, pressupõe habilidade em trabalhar as dificuldades na aprendizagem. A recuperação paralela é realizada fora do horário da classe e deve privilegiar métodos e estratégias diferentes dos costumeiramente utilizados. A recuperação final representa um último esforço para sanar as dificuldades de aprendizagem. (SÃO PAULO, 1996)

Isso demonstra que a questão da avaliação não está resolvida e que é necessário refletir sobre o processo educativo e sobre as propostas pedagógicas que estão sendo levadas para a sala de aula.

Aliás, essa tarefa poderia ser facilitada pela Supervisão Escolar, cuja atribuição sugere, entre outras coisas:

promover a troca de informações e experiências entre equipes escolares, sobre estratégias para implementar o trabalho pedagógico coletivo, novas metodologias e práticas avaliativas, atuação eficiente dos órgãos colegiados e de formas diferenciadas de atuar sobre as dificuldades dos alunos e professores no decorrer do ano letivo, evitando-se, com tais medidas, reprovações inadequadas". (SÃO PAULO, 1996)

### **A necessidade de mudança**

Nossas leis vêm evoluindo ao longo dos tempos e têm tido uma preocupação crescente com a ideia de avaliação contínua e integrada ao processo de ensino-aprendizagem. Por outro lado, percebemos que o discurso institucionalizado não transforma a prática dos professores na sala de aula, nem

em Matemática, nem em outras áreas do conhecimento. A Indicação do Conselho Estadual de Educação - CEE n.º 12/96 nos apresenta sutilmente a ideia de que a responsabilidade pela implantação e execução de diversos instrumentos avaliativos e a transformação do pensamento docente acerca dos objetivos da avaliação e da prática avaliativa não é apenas dos próprios professores. Muito mais que os professores, deveriam estar envolvidos, no processo avaliativo, a Coordenação Pedagógica, a Direção da Escola e a Supervisão de Ensino. Ou seja, a Avaliação, o Projeto Pedagógico e a execução destes devem, ou pelo menos deveria, ser uma obrigação conjunta de toda a equipe escolar.

Uma mudança simples e significativa nos é proposta por Pironel (2002). Diz ele que:

O mais eficiente instrumento de avaliação, à disposição dos professores de matemática e de outras áreas também, é a observação da participação do aluno em todas as atividades e os momentos de conversas informais que o professor pode manter com ele. Apesar da simplicidade da ideia, este instrumento de avaliação não é nada fácil de ser aplicado. PIRONEL (2002, p. 185)

Porém, apesar do desejo de mudança, mudar não é tão simples. O Conselho Estadual de Educação, através da Indicação n.º 09/2000 nos diz que:

As mudanças suscitadas pela LDB e sua regulamentação orientam-nos para um caminho de significativa transição. Remetem-nos, também, à reflexão de que toda mudança é atitudinal primeiramente, e só ocorrerá após a compreensão, a avaliação significativa da necessidade de mudar e a disposição sincera de fazê-lo.

Em outras palavras, é necessário que mais do que levar as novas concepções do processo de ensino-aprendizagem-avaliação aos professores, que esses mesmos professores compreendam as mudanças propostas pelas leis e pelas novas tendências educacionais a fim de que possam comprometer-se com elas e efetivá-las na sala de aula.

### 3.2.1. A Nova-Escola

Inspirada pelos ideais marxistas surgiria, ainda no século XIX, o movimento da Escola Nova<sup>11</sup>, que dominaria o cenário educacional da primeira metade do século XX. Seus principais expoentes, segundo o pedagogo e historiador da Educação Mario Alighiero Manacorda (1992), são Jean-Ovide Décroly, com sua teoria dos interesses e das necessidades infantis, segundo a qual o aluno precisa passar por três etapas fundamentais de desenvolvimento, a observação, a associação e a expressão, e Maria Montessori que, a partir de estudos de psicologia, utilizando observação científica sobre o comportamento infantil, deduziu critérios para o uso de material educativo.

Montessori acreditava na necessidade do trabalho manual integrado ao trabalho intelectual. Segundo ela (apud MANACORDA, 1992, p. 307), “Homens que têm mãos e não têm cabeça, e homens que têm cabeça e não têm mãos igualmente não têm lugar na comunidade moderna”. Tal afirmação suscita, embora em um outro contexto, uma frase de Marx que teria dito, em 1869, que é preciso trabalhar com as mãos e com o cérebro (MANACORDA, 1992).

Além de Décroly, Dewey também trabalha com a perspectiva de uma teoria dos interesses do aluno. Luckesi (1992) salienta que, na Escola Nova, a avaliação da aprendizagem:

[...] é posta sempre na perspectiva de auxiliar o educando a crescer. O educador deve utilizá-la como um instrumento de trabalho que auxilia a orientação do educando para o seu desenvolvimento. No caso, o educando formará o seu caráter não pelo medo, mas pelo prazer (Montessori) ou pelo interesse (Dewey) da ação que realiza. (LUCKESI, 1992, p. 249)

O interesse do aluno pela atividade desenvolvida pode ocorrer pela percepção de afinidades com situações que ele vivencia fora da escola. Dewey fornece uma orientação sobre como lidar com essas situações. Se já existe um

---

<sup>11</sup> A Escola Nova foi um movimento, e também uma tendência, de renovação do ensino e da escola tradicional surgido no final do século XIX e consolidado na primeira metade do século XX.

percurso de atividade (por um dom nato ou por realizações pregressas) operante na experiência do aluno com respeito àquilo que deve ser aprendido, o uso da habilidade a ser adquirida, é um meio ou um fim? Neste caso, o professor não pode cometer, segundo Dewey, o erro de ignorar as atividades em que o aluno está engajado e nem supor que sejam triviais ou tão irrelevantes que não possuam significados educacionais. Quando a atividade é bem direcionada e o interesse do aluno é considerado, o novo assunto passa a ser interessante por si mesmo (DEWEY, 1913).

Segundo Luckesi (1992), a avaliação era, ou deveria ser, dinâmica e articulada, construtiva de um disciplinamento interno, que não fosse autoritária. A Escola Nova entende a necessidade de o aluno se tornar um sujeito autônomo, livre e criativo. Luckesi (1992) ressalta, inclusive, que Dewey criticava insistentemente a conduta pedagógica praticada pela escola tradicional, que valorizava mais os resultados externos da aprendizagem que os processos de formação das capacidades, fato manifesto principalmente pela utilização de provas e exames.

Dubreucq (2010) lembra que Décroly pensava a avaliação de um modo distinto da avaliação concebida pela escola tradicional. Para ele, a avaliação contínua deveria tomar lugar dos exames e relatórios regulares deveriam substituir os boletins, comentando o esforço e o progresso de cada um sem menção à nota, à média ou à classificação. Ao invés disso, um comentário detalhado das atividades do educando deveria levá-lo a conhecer suas potencialidades e suas deficiências com a finalidade de que os alunos pudessem ter orientação sobre aptidões, seus desejos e suas escolhas.

No mesmo sentido, Montessori aboliu as formas tradicionais de avaliação, realizadas através de provas e exames, por entender que sua pedagogia estava destinada a criar condições para que as crianças pudessem se desenvolver, livres e independentes, a partir de seu crescimento interior e a aprovação ou reprovação não representava nenhum cuidado especial para com esses alunos (LUCKESI, 1992).

No Brasil, o advento da Escola Nova se dá a partir das décadas de 1920 e 1930. Segundo Carvalho (2003), houve, nessas décadas, profundas inquietações educacionais e reformas substanciais no ensino brasileiro e salienta que:

Aumentavam as tensões entre uma estrutura voltada para a formação humanista desinteressada das elites e as necessidades de uma sociedade em processo de industrialização e urbanização. (CARVALHO, 2003, p. 90)

Durante esse período, que marca a Primeira República, Carvalho (2003) relata que três correntes pedagógicas se enfrentaram: A pedagogia tradicional, a escola nova e a pedagogia libertária, até que, em 1932, é publicado o “Manifesto dos Pioneiros” para divulgar os princípios da Escola Nova e pressionar a renovação da educação brasileira.

Carvalho (2003) também relata a importância do matemático Euclides Roxo na construção de um movimento reformador do ensino de Matemática no Brasil, apoiado pelo regime de governo centralizador e autoritário que se estabeleceu entre os anos de 1930 e 1945. Esse movimento reformador foi institucionalizado pela Reforma Francisco Campos, através do decreto nº 19.890 de 18 de abril de 1931 e pelo decreto nº 21.241 de 04 de abril de 1932 que dispuseram sobre a organização do ensino secundário no Brasil e sobre a consolidação dessa organização. No âmbito da avaliação a Reforma Francisco Campos instituiu a periodicidade bimestral das provas de aferição do conhecimento, sem eliminar a obrigatoriedade da realização de exames finais, também feitos através de provas escritas.

Dez anos depois, em 1942, o decreto nº 4244, de 9 de abril, conhecido como Reforma Gustavo Capanema, instituiu a Lei Orgânica do Ensino Secundário, separando o ensino secundário em dois ciclos, além de tratar de outras providências. O primeiro ciclo chamado de Curso Ginásial e o segundo ciclo dividido em dois cursos: o Curso Clássico e o Curso Científico. De acordo com a reforma proposta por Capanema (BRASIL, 1942), os alunos deveriam ser submetidos a três tipos de exames: exame de admissão, exames de suficiência e exames de licença. A Lei Capanema prevê ainda que a avaliação dos

resultados em exercícios e em exames fossem expressas por notas, graduadas de zero a dez.

Os exames de suficiência seriam obtidos através da média ponderada entre as notas obtidas em realização de exercícios, provas parciais (uma em junho e outra em outubro) e a nota obtida na prova final, com pesos respectivamente iguais a dois, dois, quatro e dois. Estariam aprovados os alunos que obtivessem média global de todas as disciplinas igual a cinco e média final, em cada disciplina, de pelo menos quatro.

### **3.2.2. Na Segunda Metade do Século XX**

Durante as décadas seguintes, as críticas à cultura dos exames se avolumavam e, embora tantas outras portas se abrissem, a grande maioria das escolas continuava perpetuando as práticas avaliativas que se concentravam na aplicação de provas mensais.

Egon G. Guba e Yvonna S. Lincoln se notabilizaram por suas publicações sobre métodos de pesquisa e, em sua obra *Fourth Generation Evaluation*, propõem uma discussão que vai além do viés metodológico da pesquisa. Para identificar uma quarta geração da avaliação, Guba e Lincoln (1989) miram a evolução da avaliação na educação, com vistas a construir uma lógica de avaliação aplicada tanto a questões educacionais quanto a questões sociais, culturais, humanas, políticas e científicas. Assim, olhando para a sala de aula, Guba e Lincoln (1989) distinguem quatro gerações de avaliação que apesar de sua multiplicidade de perspectivas, abordagens, significados ou conceitualizações puderam ser identificadas ao longo dos últimos cem anos.

A primeira dessas gerações é chamada de geração da medida. Segundo essa concepção de avaliação, classificar, selecionar e certificar são funções da avaliação por excelência; os conhecimentos são o único objeto de avaliação; os alunos não participam no processo de avaliação (Guba e Lincoln, 1989); a avaliação é, em geral, descontextualizada; privilegia-se a quantificação de resultados em busca da objetividade, procurando garantir a neutralidade do

professor (avaliador); a avaliação é referida a uma norma ou padrão (por exemplo, a média) e, por isso, os resultados de cada aluno são comparados com os de outros grupos de alunos (FERNANDES, 2009). Podemos perceber claramente essa geração de avaliação na Escola Tradicional embora, conforme indicamos, tenha havido na Escola Tradicional um turbilhão de possibilidades distintas de avaliação, representadas principalmente pelas provas e exames.

A segunda geração procurou sanar algumas limitações apresentadas pela primeira e é chamada de geração da descrição, pois a principal meta dos avaliadores deveria descrever padrões de pontos fortes e de pontos fracos, vistos à luz de objetivos educacionais previamente definidos. Ou seja, a avaliação não é mais sinônimo de medida e tem a preocupação de descrever até que ponto os objetivos educacionais foram atingidos pelo aluno (FERNANDES, 2009). Essa geração dominou as décadas de 30 e 40 do século passado, e deu lugar a uma nova geração de avaliação a partir do final dos anos 60. Podemos observar que esta geração de avaliação, que se preocupa com aspectos menos relacionados com a disciplina do aluno e mais com o alcance dos objetivos propostos, encontra eco e ocorre exatamente no período em que a Escola Nova está localizada.

A terceira geração é denominada por Guba e Lincoln (1989) como a geração da formulação de juízo de valor. Nessa geração, a avaliação se torna mais sofisticada do ponto de vista teórico. Segundo Fernandes (2009), Michael Scriven distinguiu avaliação somativa da avaliação formativa, em 1967, sendo a primeira mais ligada à prestação de contas, classificação e seleção e a segunda mais ligada ao desenvolvimento, à melhoria das aprendizagens e à regulação dos processos de ensino e aprendizagem.

A quarta geração de avaliação é proposta, por Guba e Lincoln (1989), como uma ruptura aos modelos de avaliação anteriores, buscando dar respostas às limitações que eram impostas pelos modelos de avaliação das três gerações anteriores, mas admitem que ainda há uma série de limitações e dificuldades e que futuramente deverá dar vasão a uma nova geração de avaliação. Estamos falando da geração da ruptura, denominada avaliação receptiva ou avaliação

responsiva, que foi assim chamada por propor que, numa avaliação, todos os envolvidos no processo devem ser ouvidos.

Já do ponto de vista metodológico, considerando a matemática como foco de nossa análise, podemos identificar ao menos quatro movimentos de reforma do ensino de matemática no século XX, conforme mostrado por Onuchic (1999). O primeiro desses movimentos dava conta do Ensino de matemática realizado por repetição:

No início do século XX o ensino de matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media-se o conhecimento do aluno, recebido através de repetição, com a aplicação de testes em que, se ele repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que sabia. É bem verdade que alguns desses alunos chegavam a compreender o que faziam. Conseguiam “pensar” sobre o que trabalhavam e isso os fazia especiais. A maioria, contudo, se esquecia do que havia memorizado em pouco tempo (ONUICHIC, 1999, p. 201).

O segundo movimento considerava a necessidade da compreensão do aluno sobre a matemática estudada:

[...] os alunos deviam aprender matemática com compreensão. Essa reforma descartava a anterior. As tabuadas e seus treinos eram condenados. O aluno devia “entender” o que fazia. Mas, o professor falava, o aluno escutava e repetia, não participava da construção de seu conhecimento. O professor não havia sido preparado para seguir e trabalhar as ideias novas que queriam implementar. O trabalho se resumia a um treinamento de técnicas operatórias que seriam utilizadas na resolução de problemas padrão ou para aprender algum conteúdo novo (ONUICHIC, 1999, p. 201).

Durante as décadas de 1960 e 1970 surgiu o terceiro movimento de reforma do ensino de matemática por nós considerado no século XX, o movimento da Matemática Moderna:

Esta reforma também deixava de lado as reformas anteriores. Apresentava uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha

preocupações excessivas com abstrações matemáticas e apresentava uma linguagem matemática universal, concisa e precisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado (ONUChIC, 1999, p. 202).

Nessa reforma o professor fala, porém muitas vezes não seguro daquilo que dizia. O aluno não percebia a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática dos problemas e, principalmente, com a matemática usada fora da escola. Embora procurasse usá-las em exercícios de aplicação, repetindo o que havia sido feito em classe e dizendo o nome daqueles novos símbolos matemáticos que lhes eram apresentados, com frequência não conseguia lhes dar significado. Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas (ONUChIC, 1999, p. 203).

E, por fim, a quarta reforma que considerou a importância da Resolução de Problemas. Segundo Onuchic (1999), a Resolução de Problemas ganhou espaço a partir do final dos anos 70 e ganhou força a partir da publicação do documento *An agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*.

Concomitante às reformas metodológicas ocorridas no século XX, a avaliação também sofria alterações em suas concepções, nos instrumentos de coleta de evidências e nos objetivos pelos quais era aplicada na sala de aula. Os exames orais foram substituídos substancialmente por exames escritos, as provas, e praticamente nada mais aconteceu. As provas arraigaram-se no seio do sistema educacional tornando-se, principalmente nas décadas de 1970 e 1980, o elemento central de um processo de avaliação a serviço da exclusão, embora vestisse uma máscara para indicar, aos elementos envolvidos no sistema educacional, que fosse pretensamente um instrumento a serviço da promoção da aprendizagem (PIRONEL; ONUChIC, 2016).

A prova tornou-se tão importante para o processo de avaliação que passou a ser confundida com o próprio processo, fomentando a crença, entre a maioria dos professores, de que era um sinônimo de avaliação (PIRONEL, 2002). Muitos professores utilizavam a prova como único instrumento de avaliação, aplicando-a mensalmente, para compor a média (ou conceito)

bimestral. É lícito ressaltar que, nos anos de 1970, as notas foram substituídas por conceitos no sistema educacional público e, mesmo assim, os professores continuaram operando matematicamente esses conceitos, criando subconceitos e relacionando-os a valores numéricos de zero a dez (a antiga escala de notas) que, após operar com tais valores, eram reconvertidos para os conceitos literais, conforme tabela a seguir:

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Conceitos	E-	E	D-	D	D+	C-	C	C <sup>+</sup> ou B <sup>-</sup>	B	B <sup>+</sup> ou A <sup>-</sup>	A

Os conceitos originais eram os seguintes:

A– Excelente

B– Bom

C– Satisfatório

D– Sofrível

E – Péssimo

Utilizando essas tabelas o professor podia operar matematicamente e obter uma média aritmética. Se após o processo de conversão a nota fosse sete, por exemplo, o professor reconvertia ao conceito C<sup>+</sup> ou B<sup>-</sup> e atribuía o conceito bimestral C ou B, segundo critérios subjetivos e questionáveis. Muitas vezes, o comportamento disciplinar do estudante e a realização ou não realização de tarefas, tanto na sala de aula quanto em casa, influenciavam a atribuição do conceito bimestral (PIRONEL; ONUCHIC, 2016).

A partir de meados da década de 80, outros instrumentos de coleta de dados foram difundidos e começaram a ser aplicados. A avaliação começou a incorporar novos conceitos. Luckesi, a partir do seu livro *Avaliação da aprendizagem escolar* (1991), tornou-se uma grande referência aos professores e chamava a atenção para o uso da avaliação como instrumento de poder e

regulação da disciplina na sala de aula e denunciava o “terrorismo homeopático” que os professores faziam com seus alunos, graças às provas.

A comunidade científica começou a perceber que a avaliação precisava extrapolar seu caráter somativo, servindo a propósitos diagnóstico e formativo. Mas, foi na década de 90 e no início do século XXI que as mudanças tomaram corpo e a houve a urgência em fazer da avaliação parte integrante do processo de ensino-aprendizagem da Matemática. E, mais uma vez, a publicação *An Agenda for Action*, do National Council of Teachers of Mathematics – NCTM, foi um marco a partir do qual mudanças começaram a acontecer efetivamente, tanto nos Estados Unidos, berço do NCTM, como em outras partes do mundo.

### 3.3. Avaliação Vista pelo NCTM: Relações com a Resolução de Problemas

Caminante, son tus huellas  
el camino y nada más;  
caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.

Al andar se hace camino y al volver la  
vista atrás se ve la senda que nunca  
se ha de volver a pisar.

Fragmento de “Caminante” de Antonio Machado

O *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM é a maior organização de educação matemática do mundo, contando atualmente com mais de 60 mil membros e mais de 230 entidades filiadas nos Estados Unidos e no Canadá. Segundo informações do seu sítio eletrônico, a missão do NCTM é a de ser a voz pública da educação matemática, apoiando professores para garantir a aprendizagem matemática equitativa da mais alta qualidade para cada aluno através de visão, liderança, desenvolvimento profissional e pesquisa.<sup>12</sup>

Em 1980, o NCTM, preocupado com os resultados gerados pelo Movimento da Matemática Moderna na sala de aula, lançou o documento *An*

---

<sup>12</sup> Segundo o sítio eletrônico NCTM: [www.nctm.org/About](http://www.nctm.org/About)

*Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's.*

Segundo o NCTM (1980, p. i-ii), essas recomendações não representam o fim dos esforços de uma comunidade acadêmica preocupada com a educação matemática, mas um início. Elas representam uma agenda para uma década de ações. Nesse documento recomenda-se que:

1. Resolução de Problemas seja o foco da matemática escolar nos anos 80;
2. o conceito de habilidades básicas em matemática deve abranger mais do que a facilidade computacional;
3. os programas de matemática devem aproveitar ao máximo o potencial das calculadoras e computadores em todos os níveis de ensino;
4. padrões rigorosos, tanto de eficácia como de eficiência, devem ser aplicados ao ensino de matemática;
5. o sucesso dos programas de matemática e da aprendizagem dos alunos sejam avaliados por uma gama mais ampla de medidas do que os testes convencionais;
6. deve-se exigir mais estudo dos alunos e ter um currículo mais flexível, de modo que se possa acomodar melhor as necessidades diversas da população estudantil;
7. mais estudo de matemática precisa ser requerido para todos os estudantes e um currículo flexível com uma maior gama de opções deveria ser planejado para acomodar as diversas necessidades da comunidade estudantil;
8. os professores de matemática devem exigir de si mesmos e de seus colegas um alto nível de profissionalismo;
9. o apoio público para o ensino de matemática deve ser elevado a um nível compatível com a importância da compreensão matemática para indivíduos e para a sociedade. (NCTM, 1980, p.1, Tradução minha)

Temos especial interesse em duas dessas recomendações, a primeira delas, que recomenda a Resolução de Problemas como foco para a matemática escolar nos anos 80, por entender que tal esforço recoloca a Resolução de Problemas como objeto profícuo de pesquisa e gera diversas possibilidades de sua utilização como instrumento metodológico de ensino; e a quinta recomendação, que fala sobre avaliação e suscita, de maneira mais acalorada, discussões sobre a natureza da avaliação, reacendendo antigas discussões, fomentando novas possibilidades e, acima de tudo, instigando mudanças atitudinais e não apenas discursivas, na prática avaliativa de sala de aula e para além dela.

O documento ‘Uma Agenda para a Ação’ assume a crítica à avaliação que é efetivamente realizada nas salas de aulas de matemática. Segundo o NCTM (1980), a avaliação não é limitada pelos testes. Ela inclui coleta de dados e sua interpretação e os testes são apenas um entre muitos outros meios possíveis de se coletar dados para a avaliação. Mais do que isso, a “Agenda” critica as provas quando apenas se realiza uma avaliação da resolução de problemas.

De tais preocupações surgiram algumas recomendações sobre como deveria acontecer a avaliação nos anos 80, segundo o NCTM (1980):

1. A avaliação da aprendizagem matemática deve incluir uma ampla gama das metas do programa, incluindo habilidades, a solução de problemas e o processo de resolução de problemas;
2. Os pais devem ser regular e adequadamente informados e devem estar envolvidos no processo de avaliação;
3. Os professores devem se tornar conhecedores, e proficientes no uso, de uma ampla variedade de técnicas de avaliação;
4. A avaliação dos programas de matemática deve estar baseada em suas metas, usando estratégias de avaliação que sejam consistentes com essas metas;
5. A avaliação de materiais para o ensino de matemática deve ser um aspecto essencial do planejamento do programa;
6. Os professores de matemática devem ser submetidos a uma avaliação contínua como componente necessário para melhorar os programas de matemática;
7. Agências financiadoras devem apoiar pesquisa e avaliação dos efeitos da ênfase em resolução de problemas na matemática curricular. NCTM (1980, p. 14-16, Tradução minha)

Kilpatrick (2014) relata que a *National Commission on Excellence in Education* (Comissão Nacional sobre Excelência em Educação) escreveu, em abril de 1983, um relatório chamado *A Nation at Risk* (Uma Nação em Risco) com a preocupação de levantar questões problemáticas para a qualidade da educação estadunidense. Esse documento continha afirmações apocalípticas e advertências aterradoras para a comunidade científica americana. Dizia o documento que “se um poder estrangeiro inimigo tentasse impor à América o desempenho educacional medíocre que existe hoje, poderíamos entender isso como um ato de guerra” (KILPATRICK, 2014, p. 331, Tradução minha).

Para responder ao relatório *Uma Nação em Risco*, ressalta Kilpatrick, o NCTM utilizou a *Agenda* como uma “arma útil na batalha para atualizar o currículo” (MCLEOD, 2003, apud KILPATRICK 2014, p. 331, Tradução minha), mas era preciso mais especificidade devido à brevidade do documento que contém apenas 30 páginas.

A partir dessa demanda, em 1989, o NCTM lança então o documento *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (Padrões de Currículo e de Avaliação para a Matemática Escolar). O NCTM (1989) define, então, currículo como um plano operacional para o ensino, que detalha a matemática que os estudantes precisam saber, o modo como eles alcançarão os objetivos curriculares, o que os professores deverão fazer para ajudar os alunos a desenvolver o conhecimento matemático e o contexto no qual a aprendizagem e o ensino ocorrerão. E indica que a avaliação do desempenho dos estudantes deve estar bem articulada com a avaliação de programas curriculares, enfatizando a coleta de informações, com as quais os professores podem preparar suas próximas aulas.

Esse documento representa, segundo Kanbir (2016), um modelo para a reforma da matemática escolar nos Estados Unidos, tendo influenciado, tanto quanto a ‘Agenda’, na elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998). Os Padrões de Currículo e de Avaliação (NCTM, 1989) foram organizados em cinco capítulos.

Os três primeiros capítulos apresentam os padrões de currículo compreendidos, à época, como essenciais para que o aluno aprenda o valor da matemática, torne-se confiante da própria capacidade, torne-se um solucionador de problemas matemáticos, aprenda a se comunicar matematicamente e aprenda a raciocinar matematicamente (NCTM, 1989).

Resumindo, a intenção desses objetivos é que os alunos se tornem matematicamente alfabetizados. Este termo denota a habilidade de um indivíduo para explorar, conjecturar e raciocinar logicamente, bem como usar efetivamente uma variedade de métodos matemáticos para resolver problemas. Ao se tornar

alfabetizado, seu poder matemático deve se desenvolver. (NCTM, 1989, p. 5-6, Tradução minha)

O quarto capítulo, apresenta, à margem dos padrões de currículo, os padrões de avaliação. Embora pareça uma questão prática de organização, a segregação das questões relativas à avaliação reproduz a prática cotidiana de sala de aula, vigente à época, em que os momentos de aula e os momentos de avaliação eram bem definidos e delimitados.

São quatorze padrões de avaliação. Os três primeiros padrões dão foco à avaliação de maneira genérica, outros sete padrões de avaliação são dedicados à avaliação dos estudantes e os últimos quatro padrões se dedicam a programas de avaliação institucionais.

A seguir apresentamos os padrões de avaliação para o NCTM (1989), salientando a força histórica que eles apresentam por se tratar do primeiro esforço no sentido de se dar forma aos processos de avaliação e iniciar uma nova geração de avaliação, flexível e ciente de sua incompletude, fato que permitiu ressignificações e, conseqüentemente, o desenvolvimento dos seus conceitos:

1. Padrão de alinhamento: Os métodos e as tarefas para a avaliação da aprendizagem dos estudantes devem estar alinhados com o currículo;
2. Padrão das múltiplas fontes de informação: Decisões sobre a aprendizagem dos estudantes devem ser feitas com base na convergência de informações obtida por uma variedade de fontes;
3. Padrão dos métodos e usos apropriados da avaliação: Os métodos e instrumentos avaliativos devem ser selecionados com base no tipo de informação procurado, enfim a quem a informação se destina e no nível de desenvolvimento e maturidade do aluno;
4. Padrão do poder matemático: A avaliação do conhecimento matemático dos estudantes deve produzir informações sobre: suas

habilidades para aplicar seus conhecimentos para resolver problemas dentro da matemática e em outras disciplinas; suas habilidades para raciocinar e analisar; seu conhecimento e compreensão de conceitos e procedimentos; sua aptidão para a matemática; sua compreensão da natureza da matemática e integração desses aspectos do conhecimento matemático;

5. Padrão da resolução de problemas: A avaliação da habilidade dos estudantes para usar matemática na resolução de problemas deve provar se eles podem formular problemas, aplicar uma variedade de estratégias para resolver problemas, resolver problemas, verificar e interpretar resultados e generalizar soluções;

6. Padrão da comunicação: A avaliação da habilidade dos estudantes para comunicar a matemática deve fornecer evidências de que eles podem expressar ideias matemáticas falando, escrevendo, demonstrando e descrevendo-as visualmente; compreender, interpretar, e avaliar ideias matemáticas que se apresentarem por escrito, por via oral, ou de forma visual; usar vocabulário matemático, notação, e estrutura para representar ideias, descrever relações e situações-modelo;

7. Padrão do raciocínio: A avaliação da habilidade de raciocínio matemático dos estudantes deve fornecer evidências sobre o uso do raciocínio indutivo, para reconhecer padrões e conjecturas; o uso de raciocínio para desenvolver argumentos plausíveis para afirmações matemáticas; sobre o uso de raciocínio proporcional e espacial para resolver problemas; sobre o uso de raciocínio dedutivo para verificar conclusões; julgar a validade de argumentos e construir argumentos válidos; analisar situações para determinar propriedades e estruturas comuns e apreciar a natureza axiomática da matemática;

8. Padrão dos conceitos matemáticos: A avaliação do conhecimento e da compreensão de conceitos matemáticos dos estudantes deve fornecer evidências de que eles podem indicar, verbalizar e definir

conceitos; identificar e generalizar exemplos e contraexemplos; usar modelos, diagramas, e símbolos para representar conceitos; traduzir de um modo de representação para outro; reconhecer os vários significados e interpretações de conceitos; identificar propriedades de um conceito dado e as condições que determinam um conceito particular, comparar e contrastar conceitos. Ou seja, a avaliação deve mostrar evidências da extensão da integração do conhecimento dos estudantes sobre diversos conceitos;

9. Padrão dos procedimentos matemáticos: A avaliação do conhecimento de procedimentos dos estudantes deve mostrar se eles reconhecem quando um procedimento é adequado; se conseguem expressar as razões das etapas de um procedimento, se executam um procedimento com segurança e eficiência; se verificam os resultados dos procedimentos empiricamente ou analiticamente; se reconhecem procedimentos corretos e incorretos; se geram novos procedimentos ou ampliam ou modificam procedimentos conhecidos; e se apreciam a natureza e o papel dos procedimentos na matemática;

10. Padrão de disposição matemática: A avaliação da disposição matemática do estudante deve procurar informações sobre sua confiança no uso da matemática para resolver problemas, comunicar ideias e para raciocinar; sobre sua flexibilidade na exploração de ideias matemáticas e na tentativa de usar métodos alternativos para resolver problemas; sobre sua perseverança em tarefas matemáticas, interesse, curiosidade e criatividade no fazer matemático; sobre a inclinação em monitorar e refletir sobre seu próprio pensamento e desempenho; sobre o valor que dá a aplicações matemáticas que surgem em situações de outras disciplinas e em experiências cotidianas; e sobre o apreço do papel da matemática na nossa cultura e o seu valor como ferramenta e como linguagem;

11. Padrão de indicadores para programas de avaliação: Os indicadores de um programa de avaliação devem incluir informações

sobre resultados dos estudantes, um programa de expectativa e apoio, equidade para todos os alunos e revisões e mudanças curriculares;

12. Padrão de recursos curriculares e instrucionais: A avaliação de um programa matemático que seja consistente com os padrões curriculares precisa ter um exame dos recursos curriculares e instrucionais com foco nas metas, objetivo e nos conteúdos matemáticos; precisa de abordagens e atividades pedagógicas, articulação entre as séries, métodos e instrumentos de avaliação e a disponibilidade de ferramentas e material de apoio;

13. Padrão de instrução: A instrução, numa avaliação de um programa curricular de matemática precisa dar especial atenção ao conteúdo matemático e ao seu tratamento, dar ênfase relativa aos vários temas e processos, bem como às relações entre eles, dar atenção às oportunidades de aprendizagem, aos recursos de ensino e ao ambiente de sala de aula, aos métodos e instrumentos de avaliação e à articulação do ensino através das séries;

14. Padrão do tempo de avaliação: Um programa de avaliação deve ser planejado e conduzido por indivíduos com experiência e treinamento em educação matemática e em programas de avaliação e que saibam tomar decisões sobre o programa de matemática, além de serem, eles próprios, usuários das informações da avaliação.

O quinto capítulo do documento Padrões de Currículo e Avaliação, procura desvendar quais seriam as medidas seguintes a serem tomadas a partir desse documento. O primeiro passo a ser dado, segundo o NCTM (1989), é iniciar a mudança, salientando que esse documento é apenas o passo inicial de um projeto de processo de mudança. De fato, a História recente, construída a partir desse e sobre esse referencial, mostrou, e continua mostrando, que a mudança é sempre necessária e que o ideal não é um referencial atingível, mas, ao contrário, assemelha-se a um ponto de fuga, que embora concretamente inalcançável, nos permite traçar perspectivas.

### 3.3.1. Padrões Profissionais: Avaliação para Professores

Considerando o caráter dinâmico da mudança e a conseqüente necessidade de dar marcha ao processo de mudança, o NCTM lançou em março de 1991 o documento *Professional Standards for Teaching Mathematics* (Padrões Profissionais para Ensinar Matemática). Segundo o NCTM (1991), esse documento é um importante passo para explicitar aos professores o que é preciso saber para alcançar as novas metas instrucionais e como o ensino deve ser avaliado com o propósito de ser melhor.

Os padrões profissionais para o ensino de matemática, de acordo com o NCTM (1991), baseiam-se nas premissas de que:

- Os professores são figuras-chave nas mudanças dos modos como a matemática é ensinada e aprendida nas escolas;
- Essas mudanças exigem que os professores tenham apoio constante e recursos adequados. (NCTM, 1991, p. 2, Tradução minha)

Então, que lugar o professor deveria ocupar na transformação do ensino de matemática no final do século XX? O NCTM, ao elaborar os Padrões Profissionais, mostrou a necessidade do engajamento dos professores nas propostas de ensino apresentadas pelos Padrões de Currículo e de Avaliação, evidenciando o desejo de um trabalho colaborativo entre os Grupos de Trabalho da *Commission on Teaching Standards for School Mathematics of the National Council of Teachers of Mathematics* (Comissão de Padrões de Ensino para a Matemática Escolar do Conselho Nacional de Professores de Matemática) e os professores de matemática em geral.

O tipo de ensino previsto nesse documento é substancialmente diferente do que muitos professores experimentaram quando eram alunos nas aulas de matemática. Agora, como professores, precisam de tempo para aprender a aprender, aprender a ensinar e aprender a avaliar e desenvolver esse tipo de prática, sendo que o desenvolvimento profissional deve ser contínuo. Além disso, é importante que o professor disponha de bom material de ensino e bons

instrumentos de avaliação e que tenha liberdade para usá-los com flexibilidade, pois também eles são essenciais ao processo de mudança (NCTM, 1991).

Na visão dos Padrões Profissionais (NCTM, 1991) é esperado que os professores sejam questionadores e estimulem seus alunos a fazer perguntas, de modo que possam ajudar os estudantes a trabalhar juntos para dar sentido à matemática, desenvolver autoconfiança matemática, aprender a raciocinar matematicamente, aprender a conjecturar, inventar e resolver problemas e a conectar assuntos de matemática, ideias matemáticas e suas aplicações.

Os Padrões Profissionais estão divididos em cinco grupos: a) Padrões para o Ensino de Matemática; b) Padrões para a Avaliação do Ensino de Matemática; c) Padrões para o Desenvolvimento de Professores de Matemática; d) Padrões para o Apoio e o Desenvolvimento de Professores de Matemática e do Ensino; e) Os Próximos Passos.

Mirando o foco de nossa pesquisa, descreveremos os padrões para a avaliação do ensino de matemática, lembrando que a preocupação do NCTM, nesse documento, foi com a orientação profissional dos professores de matemática, à luz dos Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar.

Os Padrões Profissionais apresentam oito padrões para a avaliação do ensino de matemática, que foram categorizados em dois grupos. Esses padrões podem ser aplicados a quaisquer outras áreas do conhecimento humano. O primeiro grupo, que contém os três primeiros padrões, trata de padrões relacionados ao “Processo de Avaliação” e o segundo grupo é formado por cinco padrões relacionados ao “Foco da Avaliação”. Lembrando que, nesse documento, o NCTM está preocupado com o engajamento do professor no processo de avaliação. Isso significa que, mais que a avaliação do aluno, há uma preocupação com a avaliação do processo de ensino usado pelo professor, principalmente com a utilização dos processos de avaliação de sala de aula (do aluno) para a avaliação do trabalho docente e a conseqüente melhoria do mesmo.

Segundo o NCTM (1991), esses padrões profissionais de avaliação do ensino de matemática foram embasados em quatro hipóteses:

1. O objetivo de avaliar o ensino de matemática é melhorar o ensino de matemática e promover o desenvolvimento profissional. O professor é a chave para a educação matemática de alta qualidade para os alunos. É ele quem toma decisões sobre currículo e métodos de ensino para otimizar a aprendizagem do aluno. O desenvolvimento profissional amplia e expande as habilidades dos professores para tomar boas decisões, dando-lhes acesso a uma compreensão mais profunda da matemática, um maior conhecimento sobre a aprendizagem dos alunos de matemática, um maior repertório de estratégias de ensino e a capacidade de fazer coincidir seu repertório às necessidades de todos os alunos. A avaliação ajuda a identificar as necessidades do professor para que experiências de desenvolvimento profissional adequadas possam ser fornecidas.
2. Todos os professores podem melhorar o modo como ensinam matemática. Estes padrões são destinados a todos os professores. Sejam iniciantes ou experientes, todos os professores podem encontrar algum aspecto de seu ensino que possa ser melhorado, considerando um ou mais destes padrões. Embora os professores experientes possam estar mais abertos à autoanálise, os professores principiantes, ou em dificuldades, também podem refletir sobre os padrões para chegar a algumas conclusões sobre como suas aulas podem ser melhoradas.
3. O que os professores aprendem com o processo de avaliação está relacionado ao modo como a avaliação é conduzida. A principal ênfase dos padrões é a melhoria através da autoanálise, trabalhando num ambiente colegiado, com o apoio de colegas, supervisores e administradores. As avaliações podem ser realizadas de muitas formas e diversas fontes de informação podem ser utilizadas. Quando relatórios avaliativos são produzidos, para o arquivo pessoal de um professor, é especialmente importante o espírito de sensibilidade, o respeito mútuo e a preocupação com o crescimento profissional, como propósitos primários da avaliação.
4. Como o ensino é complexo, a avaliação do ensino é complexa. Processos de avaliação simplistas não ajudarão os professores a perceber a visão de ensino de matemática descrita nesses padrões. O ensino é uma função de muitas atividades, incluindo ouvir, informar, estimular, desafiar e motivar. Estas e outras atividades devem ser feitas de modo a serem responsivas aos alunos para que tirem proveito de seu conhecimento e aumente a disposição para fazer matemática. Uma questão particularmente sensível relacionada com a

competência de avaliar o ensino é saber se são e como devem ser consideradas as informações sobre a compreensão e a disposição dos alunos em relação à matemática. Parece razoável que o progresso dos alunos seja uma fonte de informação sobre o ensino. Entretanto, a aprendizagem do aluno e a disposição para fazer matemática não podem ser apenas fontes de informação. Presume-se então que qualquer processo de avaliação que pretenda ajudar os professores a alcançar a visão de ensino de matemática sugerida deva considerar numerosos fatores e circunstâncias e ter uma perspectiva longitudinal e cíclica. NCTM (1991, p. 72-73, Tradução minha)

O primeiro padrão profissional de avaliação do ensino de matemática é o Padrão do Ciclo de Avaliação. Segundo o NCTM (1991), a avaliação deve ser um processo cíclico que envolva a coleta periódica de informações sobre o ensino de matemática praticado pelo professor e a análise dessa informação, o desenvolvimento profissional baseado nessa análise e a melhora do processo de ensino a partir do desenvolvimento profissional.

O segundo padrão considera o Professor como Participante na Avaliação. Para o NCTM (1991), a avaliação do ensino de matemática deve promover oportunidades contínuas aos professores de matemática para avaliar seu próprio desempenho, debater com seus colegas sobre como têm trabalhado em sala de aula e conferir com seus supervisores a respeito de sua prática de ensino.

O professor precisa ainda, conforme orienta o Padrão das Fontes de Informação (NCTM 1991), buscar informações de avaliação a partir de uma variedade de fontes que considerem os objetivos e as expectativas dos professores para a aprendizagem dos alunos; o plano dos professores para atingir esses objetivos; os portfólios dos professores, constando plano de atividades, tarefas e meios de avaliação da compreensão da matemática pelos alunos; análise do professor sobre episódios de ensino na sala de aula; e evidências sobre a compreensão matemática dos alunos e disposição que apresentam para desenvolver matemática.

Os Padrões Profissionais orientam ainda, através de outros cinco padrões, com relação a que tipos de informação os professores precisam manter o foco durante o processo de avaliação.

O quarto padrão, chamado Padrão dos Conceitos, Procedimentos e Conexões Matemáticas nos revela, de acordo com o NCTM (1991), que a avaliação realizada em sala de aula precisa fornecer ao professor informações sobre o seu próprio conhecimento matemático, através da demonstração de sólido conhecimento de conceitos e procedimentos; se ele, professor, consegue representar a matemática como uma rede de conceitos e procedimentos interconectados; se consegue realizar conexões entre a matemática e outras disciplinas ou com a vida cotidiana; e se tem engajado seus estudantes no discurso matemático, ampliando suas compreensões de conceitos, procedimentos e conexões matemáticas.

No quinto padrão, denominado Padrão da Matemática como Resolução de Problemas, Raciocínio e Comunicação, o NCTM (1991) afirma que, quando a avaliação do ensino de matemática envolve a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação, ela precisa mostrar evidências se o professor modela e enfatiza aspectos importantes da resolução de problemas; se consegue resolver problemas utilizando diversas estratégias e procedimentos; se consegue verificar resultados e generalizar soluções; precisa mostrar se o professor consegue demonstrar aos alunos o valor do papel do raciocínio matemático; deve fornecer evidências sobre a utilização das diversas expressões da comunicação matemática, seja por via oral, visual ou gráfica; deve envolver os alunos nas atividades propostas e engajá-los em discursos matemáticos que ampliem sua compreensão sobre resolução de problemas, raciocínio e comunicação de ideias matemáticas.

Além disso, segundo o NCTM (1991), o sexto padrão, Padrão da Promoção da Disposição Matemática, a avaliação do ensino deve mostrar se o professor promove a disposição para a matemática entre os seus alunos, ao promover ações que despertem a curiosidade, persistência, flexibilidade, criatividade e confiança.

O sétimo padrão, *Avaliando a Compreensão Matemática dos Estudantes*, requer, de acordo com o NCTM (1991) que a avaliação dos meios, pelos quais o professor avalia a compreensão matemática dos seus alunos, deve fornecer evidências de que: o professor usa uma variedade de métodos de avaliação para construir um julgamento sobre a compreensão matemática dos estudantes; compara os métodos de avaliação com o nível de desenvolvimento, a maturidade matemática e a cultura pregressa do aluno; alinha os métodos de avaliação com o assunto é ensinado e o como foi abordado; compartilha informações da avaliação individual de seus alunos com os pais e com a equipe escolar; e baseia a instrução nas informações obtidas pela avaliação da compreensão dos estudantes e na disposição dos alunos em trabalhar matematicamente.

E por fim, o oitavo padrão, defendido pelo NCTM (1991), é o Padrão do Ambiente de Aprendizagem. Fala que a necessidade de a avaliação da habilidade do professor, em promover um ambiente de aprendizagem que promova o desenvolvimento do poder matemático do aluno, deve fornecer evidências de que o professor: cria um ambiente que favoreça tanto a individualidade quanto a colaboração do aluno com outros colegas; respeita os alunos e suas ideias e encoraja a curiosidade e a espontaneidade; encoraja os alunos a descrever e validar suas próprias conclusões; seleciona tarefas para que os alunos possam construir novo conhecimento matemático e ampliar seu conhecimento prévio; faz uso apropriado dos recursos disponíveis; respeita e responde aos estudantes sobre diversos interesses; e afirma e encoraja a participação plena e o estudo contínuo de matemática por todos os alunos.

### **3.3.2. Os Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar no NCTM**

O documento *Uma Agenda para a Ação* retomou, oficialmente, a discussão sobre a utilização da Resolução de Problemas no Ensino de Matemática nas escolas estadunidenses e influenciou a retomada das pesquisas sobre o tema no meio acadêmico do mundo todo. Trouxe ainda à

centralidade, temas que figuravam na periferia das discussões sobre educação. Assim, embora tivessem sido recorrentes durante o século XX, temas como currículo e avaliação tornaram-se protagonistas dos documentos do NCTM que emergiram nos últimos doze anos do século passado.

Dando continuidade ao projeto de mudança da educação matemática nos Estados Unidos, o NCTM lançou, em 1995, o documento *Assessment Standards for School Mathematics* (Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar).

Os Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar foram produzidos pelo NCTM, porque acreditavam que novas estratégias e novas práticas de avaliação precisavam ser desenvolvidas, permitindo que professores e/ou outros pudessem avaliar o desempenho dos alunos de modo a refletir a visão de reforma que o NCTM vinha propondo para matemática escolar. Nessa visão, a Matemática que se esperava que os alunos soubessem e que fossem capazes de usar, a maneira como eles aprendiam e seu progresso cognitivo deviam ser avaliados. Para isso, seria essencial afastar-se da abordagem classificatória da avaliação e adotar uma abordagem que fosse filosoficamente consistente com a visão do NCTM sobre a matemática escolar e o ensino em sala de aula (NCTM, 1995).

O documento Padrões de Avaliação traz duas definições distintas de avaliação, bastante bem delimitadas e que apresentam funções distintas no processo educacional como um todo. Embora as diferenças entre as duas “definições” de avaliação pudessem ser percebidas em outros contextos que aparecem, nesse documento elas são, pela primeira vez, claramente diferenciadas.

Segundo o NCTM (1995), a avaliação (assessment) é definida nesse documento como o processo de reunir evidências sobre o conhecimento, sua capacidade de uso e disposição de um aluno em relação à matemática, construindo inferências a partir das evidências para uma variedade de propósitos. Por outro lado, ressalta o NCTM (1995), a avaliação (evaluation) é compreendida, nesse documento, como o processo de determinar o valor, ou de

atribuir valor a algo, com base em exame e julgamento cuidadosos. Mas, na Língua Portuguesa, as duas definições são traduzidas como avaliação e o contexto em que esses termos aparecerão designará, naturalmente, a qual delas estamos nos referindo.

O documento 'Padrões de Avaliação' apresenta seis padrões com critérios que deveriam ser utilizados para julgar as práticas de avaliação. Além disso, procura demonstrar o uso dos padrões de avaliação quando aplicados a quatro propósitos distintos: Monitorar o progresso dos estudantes; tomar decisões instrucionais; avaliar o desempenho dos estudantes; e avaliar programas.

O primeiro é o Padrão Matemático, considerando que a avaliação deve refletir a matemática que os alunos precisam conhecer e serem capazes de fazer. De acordo com o NCTM (1995), as perguntas a seguir podem guiar o professor na construção de uma avaliação que responda a esse padrão:

- Que matemática está refletida na avaliação?
- Que esforços são feitos para assegurar que a matemática seja significativa e correta?
- Como a avaliação engaja os estudantes em atividades matemáticas realistas e que valham a pena?
- Como a avaliação traz à tona que uso da matemática é importante conhecer e ser capaz de fazer?
- Como a avaliação se ajusta a uma estrutura de matemática a ser avaliada?
- Que inferências sobre o conhecimento matemático dos alunos, compreensão, processos de pensamento e aptidões matemáticas, podem ser feitas a partir da avaliação? NCTM (1995, p. 12, Tradução minha)

O Padrão de Aprendizagem, por sua vez, afirma que a avaliação deve garantir a aprendizagem matemática. Segundo o NCTM (1995), como a avaliação é uma parte integrante do ensino de matemática, ela deve contribuir significativamente para a aprendizagem de todos os estudantes.

Para determinar o quanto uma avaliação garante a aprendizagem, o NCTM (1995) sugere que os professores reflitam sobre questões como as seguintes:

- Como a avaliação contribui para a aprendizagem de matemática de cada aluno?
- Como a avaliação se relaciona ao ensino?
- Como a avaliação permite aos alunos demonstrar que eles sabem e o que podem fazer em situações novas?
- Como a avaliação engaja os alunos em um trabalho relevante e intencional sobre atividades matemáticas importantes?
- Como a avaliação constrói a compreensão, o interesse e a experiência em cada aluno?
- Como a avaliação envolve os alunos na seleção de atividades, na aplicação de critérios de desempenho e no uso de resultados?
- Como a avaliação fornece oportunidades para que os alunos avaliem, reflitam e melhorem seu próprio trabalho, isto é, se tornem aprendizes independentes? NCTM (1995, p. 14, Tradução minha)

O terceiro padrão de avaliação proposto pelo NCTM é O Padrão da Equidade, segundo o qual a avaliação deve promover a equidade. Isso não significa dar condições iguais a todos os estudantes, mas dar igualdade de condições ao considerar as diferenças. Ou seja, alunos com diferenças substanciais necessitam tratamento diferenciado, sensível às diferentes experiências e aos diferentes modos de pensar e de comunicar o resultado de seu trabalho.

O NCTM (1995) sugere, então, que as seguintes questões sejam utilizadas para a reflexão do professor sobre o quanto a avaliação tem promovido a equidade entre seus alunos:

- Que oportunidades tem cada aluno em aprender a matemática que está sendo avaliada?
- Como a avaliação proporciona atividades alternativas ou tipos de resposta que convidem cada aluno a engajar-se na matemática que está sendo avaliada?
- Como o projeto da avaliação capacita todos os alunos a exibir o que sabem e o que podem fazer?
- Como as condições, sob as quais a avaliação é praticada, capacitam todos os alunos exibir o que sabem e o que podem fazer?
- Como a avaliação ajuda os alunos a demonstrar o seu melhor trabalho?

- Como reconhecer o papel dos antecedentes e das experiências pregressas dos estudantes ao julgar suas respostas durante o processo avaliativo?
- Como pontuar respostas imprevistas, mas razoáveis?
- Como têm os efeitos das inclinações sido minimizados ao longo da avaliação?
- As diferenças no desempenho podem ser atribuídas a quê? (NCTM, 1995, p. 16, Tradução minha)

O quarto padrão, o Padrão de Abertura, clama que a avaliação deva ser um processo aberto. Ao considerar a abertura do processo de avaliação é preciso que se considere três orientações: Primeira, as informações sobre a avaliação precisam estar disponibilizadas a aqueles que possam ser afetados por ela; segunda, um processo de avaliação aberto deve honrar o envolvimento profissional. Os professores devem ter liberdade para preparar as atividades avaliativas e ser partícipes do processo de avaliação. Devem poder decidir o que precisa ser avaliado e como avaliar seus alunos, descrever critérios de julgamento, objetivos e prováveis consequências de sua avaliação; terceira, a própria avaliação como um processo deve estar aberta a exame e modificação.

O NCTM (1995) sugere que, para determinar quão aberta uma avaliação é, o professor pode refletir utilizando-se de questões tais como:

- Como os alunos se familiarizam com o processo de avaliação e com os objetivos, critérios de desempenho e consequências da avaliação?
- Como os professores e os alunos estão envolvidos na escolha das tarefas, no estabelecimento de critérios e na interpretação dos resultados?
- Como o público está envolvido no processo de avaliação?
- Qual acesso as pessoas afetadas pela avaliação têm das tarefas, das metas de pontuação, dos critérios de desempenho, e amostras de trabalhos dos alunos que receberam nota e foram discutidos?
- Como o processo de avaliação em si está aberto à meta-avaliação e à modificação? NCTM (1995, p. 18, Tradução minha)

O Padrão da Inferência, quinto padrão de avaliação do documento, salienta que a avaliação deve promover inferências válidas sobre a

aprendizagem matemática. O NCTM (1995), propõe as seguintes questões aos professores para dirigir a reflexão sobre a prática avaliativa concernente ao que rege o padrão da inferência:

- Que evidências sobre a aprendizagem a avaliação fornece?
- Como o julgamento profissional é usado para fazer inferências sobre a aprendizagem?
- Quão sensível é o avaliador frente às demandas da avaliação e às respostas inesperadas?
- Como o viés é minimizado ao fazer inferências sobre a aprendizagem?
- Que esforços são feitos para garantir que a pontuação (nota) seja consistente em estudantes, avaliadores e atividades?
- Que fontes múltiplas de evidência são utilizadas para se fazer inferências e de que modo as evidências são utilizadas?
- Qual é o valor da evidência para cada uso? NCTM (1995, p. 20, Tradução minha)

O último dos padrões do documento Padrões de Avaliação, proposto pelo NCTM é denominado Padrão da Coerência, segundo o qual, a avaliação deve ser um processo coerente.

Para determinar o quanto um processo de avaliação é coerente, o NCTM (1995) indica que o professor deve refletir sobre questões tais como:

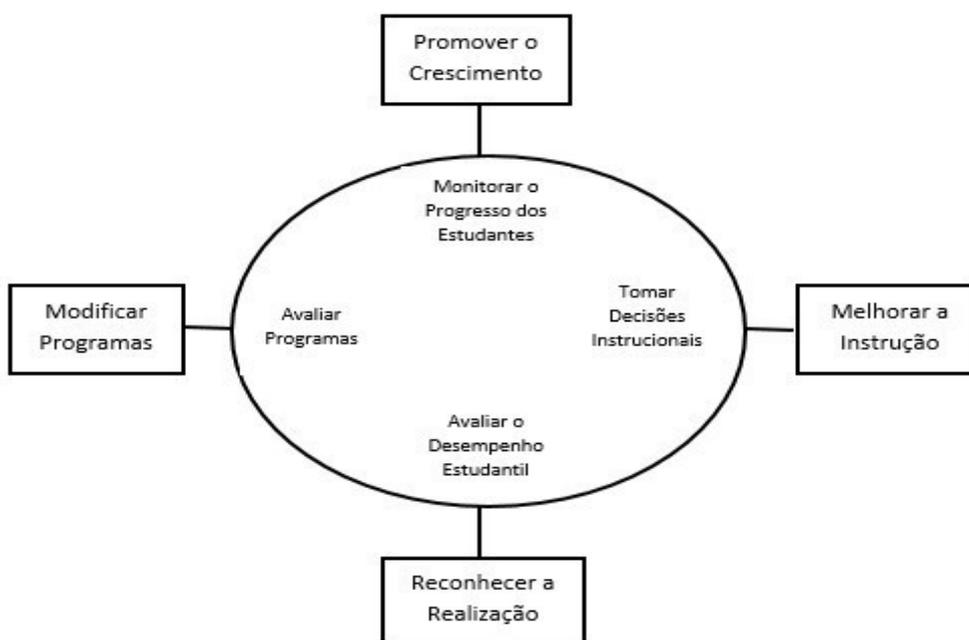
- Como o julgamento profissional é usado para garantir que as várias partes do processo de avaliação formem um todo coerente?
- Como os alunos veem a conexão entre ensino e avaliação?
- Como a avaliação relaciona seu propósito com o seu uso?
- Como a avaliação relaciona o currículo e as práticas de ensino?
- Como a prática avaliativa pode informar os professores sobre os efeitos de suas decisões curriculares e determinar suas práticas de ensino? NCTM (1995, p. 22, Tradução minha)

Na prática, os Padrões de Avaliação, para o NCTM (1995), podem ser aplicados em ações de avaliação que estejam alinhadas a diferentes propósitos de avaliação e buscam, pelo uso, atingir os objetivos correspondentes. Assim,

ao monitorar o progresso dos estudantes, espera-se promover o crescimento potencial do aluno; ao tomar decisões instrucionais, o professor espera melhorar o ensino e, conseqüentemente, otimizar o processo de aprendizagem; quando o propósito é o de se avaliar o desempenho dos estudantes, quer-se, na verdade, reconhecer a realização estudantil; e o propósito da avaliação de programas tem a ver com a modificação regulada dos programas, de modo a incrementar os processos educacionais.

A figura 4 ilustra a relação entre os propósitos de avaliação e os resultados esperados em cada um dos seus diferentes vieses. Nessa figura veem-se os quatro propósitos (na elipse) e as ações (nos retângulos) que resultam de dados de avaliação em conjunção com cada propósito:

Figura 4: Os quatro propósitos da avaliação e os seus resultados



Fonte: NCTM (1995, p. 25)

Esse documento apresenta então, para cada um dos propósitos de avaliação, exemplos práticos de situações reais, vivenciadas no contexto exigido por cada um deles, procurando mostrar como os Padrões de Avaliação podem ser utilizados para criticar e melhorar a avaliação da aprendizagem de matemática.

A trilogia Padrões para a Matemática Escolar, que foi publicada nos anos 1989, 1991 e 1995, teve como embrião a publicação Uma Agenda para a Ação, de 1980, constituindo-se como material fundamental e inspirador para o documento *Principles and Standards for Mathematics School*, publicado no ano 2000 e que, devido à sua importância e influência na Educação Matemática mundial, merece nossa análise, embora focada na avaliação, em compreender a avaliação praticada no século XXI e as ideias que compõem esta pesquisa.

### **3.4. A pesquisa sobre Avaliação no Brasil atual**

Um dos principais congressos brasileiros sobre avaliação atualmente é o Congresso Nacional de Avaliação Educacional (CONAVE). O CONAVE tem entre seus principais objetivos: Fomentar a discussão sobre a avaliação educacional, incluindo os seus pressupostos teóricos e metodológicos e as articulações existentes entre a avaliação educacional e o currículo da Educação Básica; Promover a publicização e a análise dos resultados das avaliações em larga escala e institucionais; e o estímulo do uso dos resultados de avaliações tanto pelos professores quanto pelas unidades gestoras da educação (unidades escolares, secretarias de educação, por exemplo).

Pirola, Dias e Sander (2017) analisaram as publicações dos anais dos quatro primeiros encontros do CONAVE. Segundo eles, “o evento tem se dedicado a discutir a avaliação em suas diferentes vertentes e complexidades que envolvem as avaliações em larga escala e as avaliações da aprendizagem” (PIROLA; DIAS; SANDER, p. 2).

Na avaliação desses autores as quatro primeiras edições do CONAVE trouxeram um total de 326 trabalhos, que foram apresentados e publicados na área da avaliação. Desse total, 55 (17%) eram da área da Matemática, sendo que apenas 10 versavam sobre a área da avaliação em aprendizagem em Matemática no contexto da Educação Básica (PIROLA; DIAS; SANDER, 2017). Embora esse trabalho tenha sido focado apenas entre os trabalhos inscritos na área de Matemática, desprezando a possibilidade de que outros trabalhos relacionados ao ensino de matemática possam ter sido inscritos em outros eixos

do congresso, como no eixo sobre Avaliação no Ensino Superior, por exemplo, ele mostra a pouca procura, pelos pesquisadores, de temas relacionados à sala de aula de Matemática.

Por outro lado, analisando os anais do V CONAVE, ocorrido no ano de 2018 podemos observar que 19 trabalhos científicos foram apresentados no eixo *Avaliação em Ensino Fundamental e Médio: Matemática*, além de outros três trabalhos relatando experiências de sala de aula. Nenhum desses 22 trabalhos tratou diretamente do tema *Avaliação para a Aprendizagem*, embora um deles tenha tido como tema a importância do *feedback* na avaliação em sala de aula. Além desse trabalho, outros dois se relacionaram com a avaliação formativa e dois outros, somente, vincularam avaliação à aprendizagem (V CONAVE, 2018). Isso evidencia a necessidade de expansão das pesquisas sobre o tema Avaliação **para a** Aprendizagem, especialmente na área de Matemática.

E, assim, depois de ouvir diversos pesquisadores falando sobre Avaliação, como poderemos observar as crenças, as atitudes e as emoções de nossos alunos ao enfrentar a resolução de problemas com a finalidade de construir conhecimento matemático novo usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

#### 4. SOBRE A APRENDIZAGEM

O exercício de retroagir no tempo e vislumbrar o feito quando foi feito, dentro de uma determinada conjuntura social, econômica e cultural, tentando dar sentido às coisas que fazemos hoje, muitas vezes maquinalmente, é importante para uma construção consciente de novos saberes e para articulação entre diferentes conceitos, aparentemente distintos, que possuem particularidades comuns.

O Fenômeno de Interesse desta pesquisa tem como personagem principal a Avaliação para a Aprendizagem e, embora o foco do trabalho esteja centrado no ato de avaliar, a aprendizagem dos estudantes ocupa lugar destacado, por ser o principal objetivo das ações avaliativas e de todas as outras ações educacionais contemporâneas.

Assim, torna-se indispensável realizar um estudo que procure compreender, o mais significativamente possível, como os alunos aprendem.

Iniciaremos nosso estudo apoiados, principalmente, no trabalho *Como as Pessoas Aprendem: Cérebro, Mente, Experiência e Escola* (How People Learn: brain, mind, experience, and school), de 2000, organizado por John D. Bransford, Ann L. Brown e Rodney R. Cocking e traduzido por Carlos David Szlak, em 2007, que realiza um estudo geral sobre a aprendizagem e depois apresenta análises comportamentais de alunos procurando prever rumos de aprendizagem, essenciais quando pensamos tanto no processo de ensino quanto no processo de aprendizagem. Depois, nos debruçaremos no trabalho *How Students Learn: History, Mathematics and Sciences in Classroom* organizado por M. Suzane Donovan e John D. Bransford, que se concentra em analisar e exemplificar os três princípios de aprendizagem propostos por Bransford, Brown e Cocking e em publicações do pensador russo Lev Semenovitch Vigotski.

#### 4.1. O que é a Aprendizagem?

Após uma média de dez ciclos lunares protegido no ventre materno, o ser humano é entregue à luz e descobre, a partir de então, a existência de um novo mundo. Através dos seus cinco sentidos: visão, audição, olfato, tato e paladar, ele capta informações sobre o mundo físico e as apreende, transformando-as em conhecimento. Como a criança nasce num ambiente onde os meios de comunicação estão estabelecidos e preexiste uma cultura que regulamenta as relações entre ele, o outro e o ambiente em que convivem, a aprendizagem é uma necessidade que a acompanha desde os seus primeiros dias.

Segundo D'Ambrósio (1986), precisamos considerar inicialmente o comportamento individual, que contém o processo de aprendizagem, expresso principalmente pela aquisição da linguagem. Depois, há um comportamento social que se desenvolve e evolui no processo educacional. Com a evolução, o comportamento social se complexifica e gera o comportamento cultural.

D'Ambrósio (1986) enxerga o processo de aprendizagem como algo que cria um contexto para a interação de um programa genético com o ambiente, que conceitua o desenvolvimento ou a evolução intelectual. A conceituação da criança sobre a realidade vai sendo alterada lentamente e, depois de reagir apenas a reflexos começa a incorporar o sensual aos seus processos de decisão e às suas ações consequentes e, pouco a pouco, passa de um comportamento individual para um comportamento social.

A criança abandona seu universo egocêntrico ao substituir as ações resultantes da percepção de situações e de objetos desse universo, para agir mediante reflexão sobre a mesma ação considerada, combinando mecanismos elaborados como o complexo sensual-emocional e o de memória. Essa ação, realizada através da reflexão mudará a realidade pela adição, a essa realidade, de fatos – artefatos – e “mentefatos” (D'Ambrósio, 1986). Ou seja, ela produz objetos, coisas e ideias e valores. Há, pois, uma nova ação que provoca uma nova reflexão, um novo comportamento, uma nova interação com informação memorizada que leva a uma nova ação. É um movimento cíclico que eleva o indivíduo à posição de criador.

A partir dessas considerações, D'Ambrósio (1986) define que:

[...] aprendizagem é uma relação dialética reflexão-ação, cujo resultado é um permanente modificar da realidade. É nesse ciclo realidade-reflexão-ação-realidade que reside o busílis de desvendar comportamento individual, comportamento social e comportamento cultural. (D'AMBRÓSIO, 1986, p. 49)

#### **4.2. Como os alunos aprendem?**

Tendo encontrado uma definição interessante sobre aprendizagem e considerando o expansionismo científico das últimas décadas, especialmente a partir do final do último século, buscaremos dar sentido ao modo como as pessoas aprendem, para compreender como a aprendizagem acontece na sala de aula de matemática e o modo como isso pode influenciar os processos de ensino e de avaliação.

Bransford, Brown e Cocking (2007) destacam três importantes descobertas sobre os aprendizes e a aprendizagem e sobre os professores e o ensino, que eles definem como princípios de aprendizagem, que apresentam implicações importantes para o modo como ensinamos.

O primeiro princípio, segundo Bransford, Brown e Cocking (2007), revela que os alunos chegam à sala de aula com ideias preconcebidas sobre o funcionamento do mundo. Caso o seu entendimento de mundo seja descartado, há a possibilidade de que não consigam compreender os novos conceitos e informações ensinados ou, ainda, que aprendam apenas para a realização de uma prova, voltando a suas ideias anteriores fora da sala de aula.

Seria como se o estudante pudesse entender a necessidade de memorizar os conceitos ou as informações ensinadas apenas para a realização das provas. Nesse caso, não teria necessariamente havido aprendizagem, mas memorização e, segundo Minsky (1989), podemos ter memórias de longo prazo, que persistem por dias, anos ou até mesmo pela vida toda, e memórias de curto prazo, que duram apenas alguns minutos ou segundos. Além disso, uma determinada experiência pode ser transferida, de modo seletivo e inconsciente, para determinados estados de memória de longo prazo, talvez por

terem sido “classificadas como úteis, perigosas, insólitas, ou significantes em outros aspectos” (MINSKY, 1989, p. 153).

Além disso, a compreensão que o indivíduo traz de um objeto, de um conceito ou de uma situação pode ser correta servindo de apoio para um novo conhecimento ou pode ser uma concepção e, neste caso, os rumos precisam ser corrigidos o quanto antes. Segundo Bransford, Brown e Cocking (2007, p.35), para que a “compreensão científica substitua a compreensão ingênua, os alunos precisam revelar esta última e ter a oportunidade de perceber até que ponto ela é deficiente”.

Bransford, Brown e Cocking (2007) dizem que o segundo princípio de aprendizagem está ancorado na descoberta de que, para desenvolver uma competência numa área de investigação, os estudantes precisam possuir um alicerce profundo para o conhecimento factual, entender os fatos e as ideias que compõem o contexto da estrutura contextual e organizar o conhecimento para facilitar a recuperação e a aplicação.

Segundo eles, tal descoberta está ancorada em pesquisas que comparam o desempenho de principiantes e de especialistas e, também, de pesquisas sobre aprendizagem e transferência. Tais pesquisas revelam que a capacidade de planejar uma tarefa, perceber padrões, criar bons argumentos e explicações razoáveis, além de conseguir fazer analogias entre problemas distintos está muito mais ligada ao conhecimento factual do que se acreditava.

Bransford, Brown e Cocking (2007) ressaltam que a compreensão profunda do assunto transforma a informação factual em conhecimento utilizável. Essa visão está consonante com as concepções educacionais propostas pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas e pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Para Allevato e Onuchic (2014), a proposição de problemas geradores possibilitam:

[...] analisar se foram compreendidos os elementos essenciais do conteúdo matemático introduzido naquela aula e consolidar

as aprendizagens construídas nas etapas anteriores, bem como aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo ou tópico matemático, gerando um círculo que se configura pela construção de novos conhecimentos e pela resolução de novos problemas, e assim por diante. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2014, p. 46)

Reforçamos que, Allevato e Onuchic (2014) percebem que a compreensão de Matemática, pelos alunos, está intimamente ligada à concepção de relacionar, ou seja, compreender é relacionar. Bransford, Brown e Cocking (2007) complementam essa ideia ao relatar que há uma descoberta, na literatura do aprendizado e da transferência, que nos diz que a organização da informação numa estrutura conceitual permite que o estudante aplique o conceito aprendido em novas situações, o que eles denominam de transferência, e que aprenda informações afins com maior facilidade.

O terceiro princípio de aprendizagem descrito por Bransford, Brown e Cocking (2007) considera que uma abordagem instrucional “metacognitiva” pode auxiliar o estudante a aprender a assumir o controle de sua própria aprendizagem, a partir da definição dos objetivos de aprendizagem e de um progresso monitorado que vise alcançar tais objetivos.

Uma pesquisa mostrou que, quando especialistas verbalizam seu pensamento enquanto trabalham, eles monitoram sua própria compreensão com cuidado, tomam nota quando sua compreensão exige informações adicionais, se a nova informação era compatível com o que já sabiam e quais analogias poderiam ser inferidas para progredir no seu entendimento. Como a metacognição muitas vezes se revela através de uma voz interior, podemos afirmar que os indivíduos podem desenvolver o diálogo interior sem depender de ninguém (Bransford, Brown e Cocking, 2007).

Tais princípios nos conduzem a três grandes consequências, tanto para a tarefa do ensino quanto para a preparação do professor:

1. Os professores devem extrair a compreensão preexistente trazida pelos alunos e trabalhar com elas.

Isso exige que:

- O modelo da criança como recipiente vazio a ser preenchido com conhecimento fornecido pelo professor deve ser substituído. Em vez disso, o professor deve inquirir ativamente o pensamento dos estudantes criando, na sala de aula, tarefas e condições em que o pensamento do aluno possa se revelar. As concepções iniciais dos estudantes fornecem então a base sobre a qual se constrói a compreensão mais formal do assunto.
- Os papéis da avaliação devem ser expandidos para além do conceito tradicional da realização de provas. O emprego frequente da avaliação formativa ajuda a tornar o pensamento dos estudantes visíveis para eles mesmos, para seus colegas e para o professor. Isso proporciona feedback, que pode orientar a modificação e o refinamento do raciocínio. Dado o objetivo da aprendizagem com compreensão, as avaliações devem revelar o entendimento em vez de meramente mostrar a capacidade de repetir fatos ou desempenhar habilidades isoladas.
- As escolas de educação devem dar oportunidades aos professores iniciantes de aprender a: (a) identificar ideias preconcebidas previsíveis dos estudantes que possam representar um obstáculo ao domínio de um assunto específico; (b) extrair ideias preconcebidas não previsíveis; e (c) trabalhar com ideias preconcebidas, de modo que as crianças possam elaborá-las, contestá-las e, quando adequado, substituí-las.

2. Os professores devem ensinar algum assunto em profundidade, fornecendo muitos exemplos em que o mesmo conceito está em ação e proporcionando uma base sólida de conhecimento factual.

Isso exige que:

- Em certa área temática, a cobertura superficial de todos os tópicos deve ser substituída por uma cobertura detalhada de uma quantidade menor de tópicos, permitindo que os principais conceitos dessa disciplina sejam entendidos. Naturalmente, o objetivo da cobertura não precisa ser abandonado por completo. No entanto, deve haver uma quantidade suficiente de casos de estudo aprofundado, permitindo que os alunos compreendam os conceitos que definem domínios específicos de certa disciplina. Além disso, o estudo aprofundado em certo domínio, muitas vezes requer que as ideias sejam trabalhadas em mais do que um único ano escolar, antes que os estudantes possam fazer a transição das ideias informais para as formais. Isso vai exigir a coordenação ativa do currículo através das séries escolares.
- Os próprios professores devem trazer para o ensino sua experiência do estudo aprofundado de sua área temática. Para poder desenvolver ferramentas pedagógicas eficientes, o

professor deve estar familiarizado com o progresso da inquirição e os termos do discurso na sua disciplina, além de entender a relação entre as informações e os conceitos que ajudam a organizar essas informações na disciplina. É igualmente importante, porém, que o professor compreenda como evolui e se desenvolve o raciocínio dos alunos sobre esses conceitos. Isto será essencial para desenvolver a competência no ensino, mas não a competência na disciplina. Portanto, pode exigir cursos ou extensões curriculares idealizados especificamente para professores.

- A avaliação para propósitos de responsabilização pelos resultados (por exemplo, os exames estaduais) deve testar a compreensão profunda e não o conhecimento superficial. Frequentemente, as ferramentas de avaliação são o critério pelo qual os professores são responsabilizados. Um professor se vê em maus lençóis se é solicitado a ensinar visando uma compreensão conceitual profunda, mas, ao fazer isso, produz estudantes com desempenho mais deficiente nos testes padronizados. A menos que as novas ferramentas de avaliação estejam alinhadas com as novas abordagens de ensino, é improvável que estas conquistem apoio entre as escolas e seus conselhos de pais. Esse objetivo é tão importante quanto difícil de ser alcançado. O formato dos testes padronizados pode estimular a mensuração do conhecimento factual em vez da compreensão conceitual, mas também facilita a classificação objetiva. A mensuração da profundidade da compreensão pode impor desafios para a objetividade. É necessário muito trabalho para minimizar o desequilíbrio entre a avaliação profunda e a avaliação objetiva.

3. O ensino de habilidades metacognitivas deve ser integrado no currículo de diversas áreas temáticas.

Como a metacognição muitas vezes assume a forma de um diálogo interior, muitos estudantes podem não ter consciência da sua importância, a não ser que os processos sejam explicitamente enfatizados pelos professores. [...]

- A integração da instrução metacognitiva com a aprendizagem baseada na disciplina pode acentuar o progresso dos alunos e desenvolver neles a capacidade de aprender sozinhos. Deve ser incorporada aos currículos em todas as disciplinas e faixas etárias.

- O desenvolvimento de estratégias metacognitivas sólidas e a aprendizagem para o ensino dessas estratégias no ambiente de sala de aula devem ser características habituais do currículo das escolas de educação. (BRANSFORD; BROWN; COCKING, 2007, p. 36-37)

Bransford, Brown e Cocking (2007) postulam quatro atributos que acreditam ser necessários para o sucesso dos ambientes de aprendizagem: Tanto as escolas quanto as salas de aula devem estar centradas no aluno; É preciso promover um ambiente de sala de aula centrado no conhecimento e, para isso, é preciso atentar ao que é ensinado (informações, assuntos), por que se ensina (compreensão) e como a competência ou habilidade é revelada; A sala de aula deve estar centrada na avaliação e as avaliações formativas auxiliam, tanto professores quanto alunos, no monitoramento do progresso do estudante, além de permitir ao professor compreender as ideias preconcebidas dos estudantes e acompanhar de perto o seu progresso para guiá-los do caminho informal para o formal ao planejar a instrução de acordo com isso e; A aprendizagem é influenciada fundamentalmente pelo contexto em que acontece. É preciso, portanto, que exista uma abordagem centrada na comunidade.

Os princípios-chave da aprendizagem que acabamos de destacar foram organizados numa estrutura propícia para uma reflexão sobre o ensino, a aprendizagem e a concepção de ambientes de sala de aula. Donovan e Bransford (2005) consideram que os quatro atributos citados acima descrevem características de *design* que podem ser usadas como lentes para avaliar a eficácia dos ambientes de ensino e aprendizagem. Essas lentes não são, em si mesmas, resultados de pesquisa; em vez disso são implicações extraídas da base de pesquisa:

- A lente centrada no aluno incentiva a atenção às concepções e inicia a instrução a partir daquilo que os alunos pensam e sabem.
- A lente centrada no conhecimento enfoca quais conteúdos devem ser ensinados, porque são ensinados e a qual área pertencem.
- A lente centrada na avaliação enfatiza a necessidade de criar oportunidades frequentes para tornar o pensamento e a aprendizagem dos alunos visíveis como um guia, tanto para o professor quanto para o aluno, na aprendizagem e no ensino.
- A lente centrada na comunidade incentiva uma cultura de questionamento, respeito e assunção de riscos. (DONOVAN; BRANSFORD, 2005, p.13, Tradução minha)

A Figura 5 ilustra a relação entre as perspectivas de ambientes de aprendizagem propostos por Donovan e Bransford (2005, p. 13, Tradução minha).

Figura 5: Perspectivas sobre ambientes de aprendizagem.



Fonte: Donovan e Bransford (2005, p. 13)

Fuson, Katchman e Bransford (2005) ressaltam que o equilíbrio entre essas quatro características é fundamental para a eficácia do ensino e da aprendizagem. Deve haver conexões contínuas entre a aprendizagem centrada no conhecimento do aluno e a formalização do conhecimento matemático, que é o objetivo do ensino de um determinado conteúdo. Acontece que o ensino tradicional prioriza as redes de conhecimento formal em detrimento de se construir conhecimento novo sobre o conhecimento prévio do aluno. Daí, muitos alunos entendem que o seu conhecimento rotineiro não é útil para a resolução de problemas. Por outro lado, dar uma ênfase excessiva à aprendizagem centrada no conhecimento prévio do aluno, ignorando a formalização de novos conhecimentos, resulta em atenção insuficiente às conexões com outras redes de conhecimento, desvalorização da importância crucial da orientação do

professor durante os métodos de aprendizagem e da necessidade de consolidação do conhecimento construído.

### **4.3. A Zona do Desenvolvimento Proximal**

Esses princípios citados anteriormente dialogam com a abordagem de Zona do Desenvolvimento Proximal – ZDP de Lev Semenovitch Vigotski (1896 – 1934), destacada no livro *A Formação Social da Mente: O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*, organizado postumamente em 1984. Os quatro primeiros artigos deste livro foram elaborados a partir de uma tradução preliminar da obra *O instrumento e o símbolo no desenvolvimento das crianças*, escrito em 1930 e até então inédito, e os capítulos 6 e 8 foram extraídos da obra *O desenvolvimento mental das crianças e o processo de aprendizado*, que era uma coletânea de ensaios publicados postumamente, em 1935.

Para Vigotski (2007), o grande momento do desenvolvimento intelectual do ser humano, aquele momento em que as formas puramente humanas de inteligência prática e abstrata surgem, ocorre quando a fala e a atividade prática convergem, apesar de serem, até então, duas linhas de desenvolvimento completamente distintas. Para ele, a criança começa a controlar o ambiente em que vive através da fala e isso acontece mesmo antes de ela controlar o próprio comportamento. Ao usar a fala para controlar o ambiente cria novas relações com o ambiente e uma nova organização do próprio comportamento.

Além disso, Vigotski (2007) relata ter observado, em laboratório, que a fala tem papel importante na realização de quaisquer atividades. Segundo esse autor, a fala e a ação são constituintes de uma mesma função psicológica complexa que dirige a solução de um problema e, quanto mais complexa é a ação e menos direta a solução de uma situação, maior a importância da fala na condução da resolução do problema. A importância da fala é tamanha que, de acordo com Vigotski (2007), se a fala for proibida durante o transcorrer da atividade, a criança pequena não é capaz de chegar a uma solução. Conclui, a partir daí, que as crianças utilizam a fala, tanto quanto as mãos e os olhos, para resolver suas atividades práticas.

Durante o processo de resolução de um problema, conforme relatado por Vigotski (2007), a criança é capaz de incluir estímulos que estejam fora do seu campo visual imediato. Com o uso da fala a criança torna possível utilizar instrumentos diferentes daqueles disponíveis, que são desenvolvidos para a solução da questão e para o planejamento de ações futuras. É pela fala que a criança planeja a resolução de um problema e executa a solução elaborada através de uma atividade visível.

Ao tentar resolver um problema, a criança busca realizar diversas ações inteligentes e inter-relacionadas que possam levá-la à solução adequada até que, subitamente, interrompe sua atividade e pede auxílio ao experimentador (VIGOTSKI, 2007) que, no caso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, é o professor. Vigotski (2007) considera que o apelo verbal da criança a outra pessoa constitui uma maneira de ela preencher as lacunas apresentadas em sua atividade.

O professor, por outro lado, precisa estar consciente da importância do seu papel mediador e deve estar preparado para responder aos apelos dos seus estudantes de modo claro, porém conciso, tomando cuidado para não responder nada além do necessário. É preciso cuidar para não cometer o equívoco de fornecer dados que pressuponham a resposta ao problema e que, pelo contrário, levem o aluno, ou o grupo de alunos, a pensar em possibilidades reais de caminhos para a resolução do problema.

Além disso, segundo Vigotski (2007), quaisquer situações com que as crianças possam se defrontar na escola possuem uma história prévia. Exemplificando, muito antes de iniciarem seus estudos em aritmética, as crianças tiveram algumas experiências com o mundo das quantidades, tendo que lidar com situações que envolvessem adições, subtrações, multiplicações, divisões e determinações de tamanho, dentre outras. Ou seja, a criança possui uma aritmética pré-escolar.

Tais conhecimentos prévios serão de fundamental importância para a construção, pelo aluno, dos novos conceitos matemáticos. O processo da

formação do conceito, aliás, é dividido, segundo Vigotski (2003), em três fases principais. Duas dessas fases são marcadas pela predominância da imagem sincrética e do complexo, respectivamente e a terceira fase, a exemplo da segunda, pode ser subdividida em outros estágios.

Segundo Vigotski (2003), durante o primeiro estágio:

A criança pequena dá seu primeiro passo para a formação de conceitos quando agrupa objetos numa *agregação desorganizada*, ou “amontoado”, para solucionar problemas que nós, normalmente, resolveríamos com a formação de um novo conceito. O amontoado, constituído por objetos desiguais, agrupados sem qualquer fundamento, revela uma extensão difusa e não-direcionada do significado do signo (palavra artificial) a objetos naturalmente não relacionados entre si e ocasionalmente relacionados na percepção da criança.

Neste estágio, o significado das palavras denota, para a criança, nada mais que um *conglomerado vago e sincrético de objetos isolados* que, de uma forma ou de outra, aglutinaram-se numa imagem em sua mente. Devido a sua origem sincrética, essa imagem é extremamente instável. (VIGOTSKI, 2003, p. 74)

Sobre a segunda fase da formação do conceito, Vigotski (2003) revela ser o estágio mais importante da trajetória para a formação de conceitos, abrangendo uma variedade de um tipo de pensamento que ele chama de *pensamento por complexos*. Para Vigotski (2003):

Em um complexo, os objetos isolados associam-se na mente da criança não apenas devido às impressões subjetivas da criança, mas também devido às *relações que de fato existem entre esses objetos*. Trata-se de uma nova aquisição, uma passagem para um nível muito mais elevado. (VIGOTSKI, 2003, p. 76)

Nesta fase, o pensamento passa a ser coerente e objetivo, que configura o pensamento por complexo, mesmo sem refletir as relações objetivas da forma como acontece com o pensamento conceitual. Num complexo, as ligações entre os vários componentes são concretas e factuais e não abstratas e lógicas.

De acordo com Vigotski (2003):

Uma vez que um complexo não é formado no plano do pensamento lógico abstrato, as ligações que o criam, assim como as que ele ajuda a criar, carecem de uma unidade lógica; podem ser de muitos tipos diferentes. *Qualquer conexão*

*factualmente presente* pode levar à inclusão de um determinado elemento em um complexo. É esta a diferença principal entre um complexo e um conceito. Enquanto um conceito agrupa os objetos de acordo com um atributo, as ligações que unem os elementos de um complexo ao todo, e entre si, podem ser tão diversas quanto os contatos e as relações que de fato existem entre os elementos. (VIGOTSKI, 2003, p. 77)

Durante sua investigação, Vigotski (2003) observou e relatou a existência de cinco tipos básicos de complexos.

Segundo esse autor, o primeiro tipo de complexo é chamado de *complexo associativo*. Nesse complexo, a criança cria ligações entre o núcleo inicial e outro objeto através de uma associação entre características comuns a ambos.

O pensamento por complexo do segundo tipo consiste na combinação de objetos ou de impressões concretas que a criança tem sobre esses objetos. Nesse caso, os objetos se agrupam como que em *coleções* e, com base em alguma característica que os fazem diferentes, tornam-se complementares. Difere da associação do primeiro tipo por ser uma associação por contraste e não por semelhança.

Depois da aquisição do complexo coleção, Vigotski (2003) sugere o *complexo em cadeia* – “uma junção dinâmica e consecutiva de elos isolados numa única corrente, com a transmissão de significado de um elo para outro” (p. 79). Vigotski considera que o complexo em cadeia seja uma contraposição ao complexo associativo. Enquanto o *complexo associativo* possui elementos interligados por um elemento, denominado “núcleo do complexo”, o complexo em cadeia, que se revela como a mais pura forma do pensamento por complexo, não possui núcleo, há apenas relações entre elementos isolados.

O quarto tipo de pensamento por complexo é o que Vigotski chama de *complexo difuso*. Esse complexo deriva diretamente do complexo em cadeia, quando o tipo e a natureza dos vínculos entre seus elos mudam quase que imperceptivelmente. Daí, uma semelhança, mesmo que bastante remota é suficiente para estabelecer uma conexão entre dois elos. Como nem sempre os atributos são considerados semelhantes por causa de uma semelhança real,

mas por uma vaga impressão de que há algo comum entre eles, chega-se a uma nova configuração de pensamento por complexo, o complexo difuso.

Vigotski (2003) ainda complementa o quadro do *pensamento por complexos* estabelecendo uma ponte entre os complexos e o estágio final e mais elevado do desenvolvimento da formação de conceitos:

Chamamos esse tipo de complexo de *pseudoconceito*, porque a generalização formada na mente da criança, embora fenotipicamente semelhante ao conceito dos adultos, é psicologicamente muito diferente do conceito propriamente dito; em sua essência, é ainda um complexo. Na situação experimental, a criança produz um pseudoconceito cada vez que se vê às voltas com uma amostra de objetos que poderiam muito bem ter sido agrupados com base em um conceito abstrato. (VIGOTSKI, 2003, p. 82-83)

A terceira fase da formação do conceito também é, de acordo com o proposto por Vigotski (2003), subdividida em vários estágios.

Segundo Vigotski (2003, p. 95), “as novas formações não aparecem, necessariamente, só depois que o pensamento por complexos completou todo o curso do seu desenvolvimento”. Essas formações podem ser observadas antes mesmo da criança começar a pensar por pseudoconceitos. Segundo esse autor, a verdadeira formação do conceito exige as capacidades de unir e separar. Em outras palavras, a síntese deve combinar-se com a análise. Porém, o pensamento por complexos é incapaz de realizar essas duas operações, tornando necessário o desenvolvimento dessa terceira fase.

Utilizando-se da análise de Vigotski (2003) em que o primeiro estágio em direção à abstração acontece quando a criança agrupa objetos a partir de características semelhantes: objetos redondos e pequenos ou vermelhos e achatados, por exemplo. Frequentemente, a abstração se inicia com uma impressão vaga e genérica da semelhança que os objetos possuem.

No segundo estágio do desenvolvimento da abstração, a criança passa a realizar o agrupamento de objetos através de uma característica única e não mais através de um conjunto de características semelhantes. Assim, ela consegue agrupar objetos apenas redondos ou achatados. Nessa etapa, embora

não haja a formação do conceito propriamente dito, temos um precursor do conceito verdadeiro, a quem Vigotski (2003) denomina “*conceitos potenciais*”.

Vigotski (2003) ainda afirma que:

Somente o domínio da abstração, combinado com o pensamento por complexos em sua fase mais avançada, permite à criança progredir até a formação dos conceitos verdadeiros. Um conceito só aparece quando os traços abstraídos são sintetizados novamente, e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento. (VIGOTSKI, 2003, p. 98)

Vigotski (2007, p.95) destaca que “um fato empiricamente estabelecido e bem conhecido é que o aprendizado deve ser combinado de alguma maneira com o nível de desenvolvimento da criança”. Porém, ele ressalta que, só recentemente (lembrando que esse ensaio foi escrito na década de 1930), se tem atentado para o fato de que não basta reconhecer níveis de desenvolvimento se o objetivo é entender a relação entre os níveis de desenvolvimento e a capacidade de aprendizado. Por isso, ele considera a necessidade de se determinar, ao menos, dois níveis de desenvolvimento: o nível de desenvolvimento real e o nível de desenvolvimento potencial. A diferença entre os níveis de desenvolvimento real e potencial determina o que Vigotski (2007) define como Zona de Desenvolvimento Proximal – ZDP, que é:

[...] a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VIGOTSKI, 2007, p. 97)

O que diferencia efetivamente o Nível de Desenvolvimento Real e a Zona de Desenvolvimento Proximal é que o primeiro caracteriza o desenvolvimento mental retrospectivamente enquanto o segundo caracteriza o desenvolvimento mental prospectivamente. Isso significa dizer que a ZDP define funções que estão em processo de maturação, funções que amadurecerão. Não são propriamente os “frutos”, mas poderiam ser consideradas como as “flores” ou como os “brotos” do desenvolvimento (VIGOTSKI, 2007).

Por outro lado, corroborando a ideia colaborativa da ZDP, Vigotski (2007, p. 100) afirma que “o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daqueles que a cercam”. Vigotski (2007) mostra, ainda, que as interações entre a criança e as pessoas que com ela convivem desenvolve a fala interior e o pensamento reflexivo e propiciam o seu desenvolvimento voluntário.

Vigotski (2007) defende ainda que o aprendizado desperta processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar apenas quando há interação com outras pessoas e em quando em colaboração com seus companheiros. Ou seja, o aprendizado cria a Zona de Desenvolvimento Proximal. O aprendizado, por esse viés, não é desenvolvimento, mas, se organizado adequadamente, produz desenvolvimento mental e movimenta processos de desenvolvimento que não aconteceriam por outros caminhos. O conceito de ZDP parte da hipótese de que o processo de desenvolvimento mental e o processo de aprendizagem não são coincidentes. O processo de desenvolvimento é mais lento do que o processo de aprendizagem e, do desenvolvimento de ambos, resulta a Zona de Desenvolvimento Proximal.

A teoria do desenvolvimento potencial proposta por Vigotskii (2001) origina, segundo ele, “uma fórmula que contradiz exatamente a orientação tradicional: o único bom ensino é o que se adianta ao desenvolvimento”. (VIGOTSKII, 2001, p. 114)

Essa teoria pressupõe a necessidade da intervenção docente durante as etapas de ensino, desde seu ingresso na escola:

Quando as crianças ingressam na escola, o professor as confronta com as zonas de desenvolvimento proximal por meio das tarefas da atividade escolar, a fim de guiar seus progressos em direção ao estágio da aprendizagem formal. Essas tarefas ajudam as crianças a adquirir motivos e métodos para o domínio do mundo adulto, na medida da mediação do professor (HEDEGAARD, 1996, p. 342).

Moll (1996), por sua vez, ressalta que a teoria da Zona do Desenvolvimento Proximal pressupõe a necessidade de se estabelecer um nível

de dificuldade, aceito como nível proximal, onde o aluno é desafiado, mas que não pode ser demasiadamente difícil; precisa apoiar uma performance assistida, onde o professor guia o estudante em sua atividade prática, com uma percepção clara dos objetivos da aula ou dos resultados que precisam ser alcançados; e avaliar a independência do desempenho, pois o resultado mais lógico de uma ZDP é o desempenho independente do estudante.

Corroborando com essa visão sobre a aprendizagem estudantil, ao se contrapor ao ensino tradicional e apresentar uma possibilidade de trabalho colaborativo, a partir da proposição de um problema gerador de conhecimento matemático, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se apresenta como uma nova abordagem, significativa e atual para o trabalho em sala de aula (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Embora as evidências obtidas em nossa pesquisa não tenham sido analisadas à luz das ideias de Vigotski, é importante apresentá-las aqui pois elas fundamentam teoricamente a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

#### **4.4. Princípios e Padrões para a Matemática Escolar**

O NCTM lançou, no crepúsculo do século passado, vislumbrando a Educação Matemática do século XXI, o documento *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar). Nesse documento, o NCTM se permite sonhar com aquilo que, talvez, possa ser um ideal de educação, e faz mais do que isso, divide o sonho conosco e trabalha com a finalidade de tornar o sonho, ou parte dele, realizável:

Imagine uma sala de aula, uma escola ou um distrito escolar onde todos os alunos tenham acesso a uma educação matemática de alta qualidade e envolvente. Há expectativas ambiciosas para todos, com acomodação para qualquer um que necessite. Professores experientes têm recursos adequados para apoiar seu trabalho e estão continuamente crescendo como profissionais. O currículo é matematicamente rico, oferecendo aos alunos oportunidades de aprender conceitos e procedimentos matemáticos importantes com compreensão. A tecnologia é uma componente essencial do ambiente. Os alunos

envolvem-se com confiança em tarefas matemáticas complexas escolhidas cuidadosamente pelos professores. Eles se baseiam no conhecimento de uma ampla variedade de tópicos matemáticos, às vezes abordando o mesmo problema de diferentes perspectivas matemáticas ou representando a matemática de maneiras diferentes até encontrar métodos que lhes permitam fazer progresso. Os professores ajudam os alunos a fazer, refinar e explorar conjecturas com base em evidências e usar uma variedade de técnicas de raciocínio e prova para confirmar ou refutar essas conjecturas. Os alunos são resolvedores de problemas, flexíveis e engenhosos. Sozinhos, ou em grupo, e com acesso à tecnologia, eles trabalham de forma produtiva e reflexiva, com a orientação qualificada de seus professores. Oralmente e por escrito, os alunos comunicam suas ideias e resultados de forma eficaz. Valorizam a matemática e participam ativamente em sua aprendizagem (NCTM, 2000, p.3, Tradução minha)

Para realizar o sonho de uma educação matemática que acompanhe de perto esse ideal, o NCTM vislumbra um mundo em mudança, com necessidades matemáticas evidentes para a vida, para o trabalho, para a comunidade científica ou técnica e como parte do patrimônio cultural.

Os Princípios e Padrões estão divididos em oito capítulos que nos apresentam seis princípios para a matemática escolar: Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação e Tecnologia, além de dez padrões, cinco padrões de conteúdo: Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida e Análise de Dados e Probabilidade; e cinco padrões de procedimento: Resolução de problemas, Raciocínio e Prova, Comunicação, Conexões e Representação.

O primeiro capítulo dá um panorama da matemática escolar para o século XXI, enquanto o segundo capítulo apresenta os seis princípios para a matemática escolar. Os padrões, tanto de conteúdo como de procedimento, são apresentados de modo genérico no terceiro capítulo e, depois, direcionado a cada etapa da escolaridade em matemática, através dos capítulos quatro, cinco, seis e sete. O oitavo capítulo procura mostrar como a matemática poderia ser trabalhada para atingir os objetivos vislumbrados inicialmente, pelo ideário do NCTM.

Por ora, manteremos nosso foco nos Princípios para a Matemática Escolar, entretanto, voltaremos a esse texto, em momento oportuno para tratar

de um padrão específico de procedimento, também objeto de nossa pesquisa, o padrão Resolução de Problemas.

#### **4.4.1. Os Princípios para a Matemática Escolar**

No documento Princípios e Padrões, segundo o NCTM (2000), os Princípios descrevem características particulares da matemática escolar que ensejam um processo educacional de alta qualidade. Por outro lado, os Padrões descrevem os conteúdos e os processos matemáticos que os alunos devem aprender. Juntos, os Princípios e Padrões são constituintes de uma visão destinada a orientar os educadores enquanto eles se esforçam para melhorar continuamente o ensino e a aprendizagem de matemática na sala de aula, nas escolas e nos sistemas educacionais como um todo.

Os temas abordados pelos Princípios para a matemática escolar, de acordo com o NCTM (2000) dizem que:

1. Equidade: A excelência em Educação Matemática requer equidade – altas expectativas e forte apoio a todos os estudantes;
2. Currículo: Um currículo é mais do que uma coleção de atividades; ele precisa ser coerente e focar tópicos matemáticos importantes e bem articulados através dos anos;
3. Ensino: Um ensino de matemática efetivo requer compreensão sobre o que os alunos sabem e o que precisam para aprender e, então, os desafia e os apoia para aprender bem;
4. Aprendizagem: Os estudantes precisam aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos através de experiências e de conhecimentos anteriores;
5. Avaliação: A avaliação deve apoiar o aprendizado de conteúdos matemáticos importantes e fornecer informações úteis tanto para professores quanto para alunos;
6. Tecnologia: A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; ela influencia a matemática que é ensinada e aprimora a aprendizagem do estudante. NCTM (2000, p. 11, Tradução minha)

Garantir a equidade não significa dizer que todo aluno deverá receber a mesma instrução, em vez disso, revela o NCTM (2000), deve-se realizar

adaptações razoáveis e apropriadas, de acordo com a necessidade, para promover o acesso e a realização matemática a todos os estudantes. A equidade está entremeada aos outros princípios. Para garantir a equidade, o currículo precisa ser coerente e desafiador, desenvolvido por professores de matemática competentes e bem apoiados, tanto metodológica quanto matematicamente. A escola precisa garantir a aprendizagem dos alunos. Para isso, a avaliação precisa ter caráter formativo e informativo, integrando o processo de ensino-aprendizagem e, relatando dados e informando conteúdos que necessitam de atenção mais dedicada e imediata. A tecnologia engloba esse processo ao ser apresentada como mais um instrumento de apoio ao processo educativo, desde que esteja acessível equitativamente a todos os estudantes.

Os currículos de matemática, por sua vez, precisam abordar conteúdos que mereçam o tempo a eles dispensado e a atenção dos estudantes. Segundo o NCTM, (2000), os tópicos de matemática podem ser considerados importantes por diferentes razões, como sua utilidade no desenvolvimento de outras ideias matemáticas, na ligação de diferentes áreas da matemática ou no aprofundamento da apreciação dos alunos na matemática como disciplina e como criação humana. Ideias também podem merecer foco curricular, porque elas são úteis para representar e resolver problemas dentro ou fora da matemática.

Price (1997 apud NCTM, 2000) acrescenta que ideias fundamentais como valor posicional, equivalência, proporcionalidade, função e taxa de variação devem ter um lugar proeminente no currículo de matemática, porque permitem aos alunos compreender outras ideias matemáticas e conectar ideias em diferentes áreas da matemática. O currículo deve enfatizar os processos matemáticos e as habilidades que apoiam a alfabetização quantitativa dos alunos. O cidadão crítico deve ser capaz de julgar alegações, encontrar erros e examinar evidências.

Pironel (2002, p. 40), em sua pesquisa de mestrado, afirmou que “o tripé da Educação Matemática são os princípios do Ensino, da Aprendizagem e da

Avaliação, responsáveis pela construção do conhecimento matemático do aluno”.

De fato, esses princípios são nucleares no processo educativo, muito embora sejam permeados e influenciados pelos demais princípios.

O uso de tecnologia na matemática escolar, especialmente as tecnologias eletrônicas como calculadoras e computadores são, para o NCTM (2000), ferramentas essenciais para ensinar, aprender e fazer matemática. Quando ferramentas tecnológicas são disponibilizadas, os alunos podem concentrar seus esforços na tomada de decisões, reflexão, raciocínio e resolução de problemas.

Para o documento Princípios e Padrões, o professor precisa conhecer e compreender a matemática, precisa enxergar o estudante como aprendiz e utilizar estratégias pedagógicas para atingir os objetivos propostos. Mais do que isso, o NCTM (2000) revela a intimidade entre os princípios de ensino, de aprendizagem e de avaliação:

Os professores precisam de vários tipos de conhecimento matemático – conhecimento sobre todo o domínio matemático; conhecimento profundo e flexível sobre os objetivos do currículo e sobre as ideias importantes que são centrais para o seu nível de escolaridade; conhecimento sobre os desafios que os alunos provavelmente encontrarão para aprender essas ideias; conhecimento sobre como as ideias podem ser representadas, para ensiná-las efetivamente; e conhecimento sobre como a compreensão dos alunos pode ser avaliada. Este conhecimento ajuda os professores a fazer julgamentos curriculares, a responder as perguntas dos alunos, e olhar para frente, para onde os conceitos estão sendo conduzidos e planejar adequadamente. O conhecimento pedagógico, muito do qual adquirido e moldado pela prática de ensino, ajuda os professores a entender como os alunos aprendem matemática; é facilitado pela variedade de técnicas e materiais de ensino; e organiza e gerencia a sala de aula. (NCTM, 2000, p. 17, Tradução minha)

O NCTM (2000), utilizando-se de autores tais como Schifter (1999) e Ma (1999) chamam atenção dos professores para que compreendam as grandes ideias da matemática e sejam capazes de representá-las como uma aventura coerente e conectada. Para que isso ocorra, é indispensável considerar a

necessidade de que a aprendizagem da matemática aconteça com compreensão.

A compreensão dos estudantes sobre as ideias matemáticas pode ser construída durante sua vida escolar, se eles se empenharem ativamente em tarefas e experiências destinadas a aprofundar e conectar seus conhecimentos. A aprendizagem com compreensão pode ser melhorada, através de interações na sala de aula, quando os alunos propõem ideias matemáticas e levantam conjecturas, aprendem a avaliar seu próprio pensamento e o de outros, e desenvolvem habilidades de raciocínio matemático (NCTM, 2000).

Lampert (1986 apud NCTM, 2000) complementa essa concepção ao considerar o discurso em sala de aula e a interação social como úteis para a promoção do reconhecimento de conexões entre ideias e para a reorganização do conhecimento. Segundo Lampert (1989 apud NCTM, 2000), quando os alunos falam sobre suas estratégias informais, os professores podem, ao ouvi-los, ajudar na tomada de consciência e a construir sobre seu conhecimento informal implícito. Além disso, “a fluência processual e a compreensão conceitual podem ser desenvolvidas através da resolução de problemas, raciocínio e argumentação” (NCTM, 2000, p. 21, Tradução minha).

O documento Princípios e Padrões para a Matemática Escolar deixa bastante claro que os processos de ensino e de aprendizagem, embora distintos, ocorrem de modo simultâneo e tal qual deve acontecer com a avaliação. O NCTM (2000) indica a necessidade de se integrar a avaliação a esses dois processos:

Quando a avaliação é parte integrante do ensino de matemática, ela contribui significativamente para a aprendizagem de matemática de todos os alunos. Quando a avaliação é discutida em conexão com os padrões, o foco ocasionalmente está no uso de testes para aferir o desempenho dos estudantes, mas há outros fins importantes da avaliação. A avaliação deve ser mais do que um mero teste ao final do ensino para ver o desempenho dos alunos sob condições especiais; em vez disso, deve ser uma parte integrante do ensino, que informa e orienta os professores ao tomar decisões educacionais. (NCTM, 2000, p.22, Tradução minha)

De acordo com esse documento, a Avaliação deve melhorar a aprendizagem dos estudantes. Mais do que isso, as atividades de avaliação podem promover aprendizagem. Isso pode ocorrer, por exemplo, quando utilizamos técnicas tais como observações, conversas e entrevistas com os alunos ou através de diários interativos. Os alunos tendem a aprender através do processo de articular suas ideias e responder as perguntas do professor (NCTM, 2000).

Além disso, o NCTM defende que a avaliação deve ser parte de um processo contínuo da rotina de sala de aula e não uma atividade que denote a noção de interrupção do processo educacional.

Tais concepções apoiaram a pesquisa de mestrado de Pironel (2002), iniciada no final do século passado e relatada na dissertação *A Avaliação Integrada ao Processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática na Sala de Aula*, no ano de 2002. Mais do que isso, *Os Princípios e Padrões para a Matemática Escolar* encerraram um ciclo de documentos do NCTM que influenciaram fortemente a Educação Matemática, conforme dito anteriormente, e mais especificamente fortaleceu um movimento de transformação de conceitos acerca da avaliação, criando novas e promissoras possibilidades.

Posteriormente, as Academias Nacionais de Ciências, Engenharia e Medicina dos Estados Unidos (*National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine*) publicaram o livro *How People Learn II: Learners, Contexts and Cultures*, em dezembro de 2018. Segundo essa publicação, pesquisadores do mundo todo continuaram a investigar a natureza da aprendizagem e novas descobertas foram feitas sobre processos neurológicos, individuais e culturais relacionados com a aprendizagem e com as tecnologias educacionais. Essas descobertas ampliaram a compreensão acerca dos mecanismos de aprendizagem e sobre como o cérebro se adapta ao longo da vida. Além disso, descobertas importantes sobre como fatores socioculturais e ambientais influenciam na aprendizagem foram realizadas. Do mesmo modo, os avanços tecnológicos oferecem novas possibilidades para promover a aprendizagem e criar novos e interessantes desafios de aprendizagem (*National Academies of*

*Sciences, Engineering, and Medicine*, 2018). O segundo volume do livro *How People Learn* considera o processo de avaliação como fundamental para garantir que a aprendizagem aconteça. A avaliação pode direcionar o processo de aprendizagem e a motivação em uma direção positiva, fornecendo feedback que identifique possíveis melhorias e marque o progresso. E ressalta que a avaliação é mais eficaz quando consegue refletir a compreensão de como as pessoas aprendem (*NATIONAL ACADEMIES OF SCIENCES, ENGINEERING, AND MEDICINE*, 2018). Além disso:

quando fundamentada em modelos de aprendizagem bem definidos, as informações de avaliação podem ser usadas para identificar e, subsequentemente, estreitar a lacuna entre os níveis atual e desejado de aprendizado e desempenho dos alunos. Isso é feito fornecendo aos professores informações diagnósticas sobre as incompreensões dos alunos e, assim, orientando as decisões dos professores sobre como ajustar a instrução e as decisões dos alunos sobre como revisar seu trabalho e ajustar seus processos de aprendizagem. (*NATIONAL ACADEMIES OF SCIENCES, ENGINEERING, AND MEDICINE*, 2018, p. 154, Tradução minha)

## 5. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Não é possível contar uma História da Humanidade que não esteja permeada por episódios relacionados à História da Matemática. Isso porque o desenvolvimento tecnológico, com evidentes implicações ao desenvolvimento cultural, aconteceu graças ao desenvolvimento da Matemática ao longo dos tempos.

Mas em que consiste a Matemática? Halmos (1980) diz que a matemática certamente não existiria, pelo menos do modo como a conhecemos, sem ingredientes tais como os axiomas, os teoremas, as provas, os conceitos, as definições, as teorias, as fórmulas e os métodos. Segundo ele, todos esses elementos são imprescindíveis à matemática, porém, nenhum deles pode ser considerado como o coração da matemática. A principal razão para a existência do matemático é a resolução de problemas e, portanto, a Matemática realmente consiste na descoberta ou na proposição de problemas e na busca de soluções para eles.

A importância da Resolução de Problemas para a Matemática alcança uma magnitude tal, que é possível contar uma história do desenvolvimento matemático ao longo da história da humanidade construída através da resolução de problemas, como demonstra a obra *An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving*, escrita por Steven G. Krantz em 2006.

A obra de Krantz (2006) reconstitui episódios da História da Matemática a partir dos problemas que motivaram o seu desenvolvimento. A ideia primordial é mostrar para o aluno a gênese de algumas ideias matemáticas. Embora não seja possível pormenorizar muitas das soluções propostas pelos matemáticos, ao longo da história – como por exemplo a solução de Andrew Wiles para a demonstração do Último Teorema de Fermat – Krantz se propõe a mostrar ao menos um pouco do fluxo do pensamento que gerou o problema e que levou à sua solução (KRANTZ, 2006).

Para Krantz (2006):

A História da Matemática é emocionante e gratificante, e é uma fatia significativa do bolo intelectual. Uma boa educação consiste em aprender diferentes métodos de discurso e, certamente, a matemática é um dos mais bem desenvolvidos e importantes modos de discurso existentes. (KRANTZ, 2006, p. iv, Tradução minha)

A obra *An Episodic History of Mathematics* narra, num viés cronológico, eventos matemáticos a partir da matemática da Grécia Antiga, onde ganham destaque realizações matemáticas de Pitágoras, de Euclides e Arquimedes, perpassa dois milênios de história, dividida em vinte capítulos, encerrando-se com um capítulo sobre os problemas de criptografia enfrentados por Alan Turing.

Neste capítulo, apresentaremos a Resolução de Problemas, tentando enfocar, essencialmente, suas implicações para o ensino.

### **5.1. Qual é o problema?**

Minha vida escolar teve início no ano de 1979 e vivi os primeiros anos dentro do ensino tradicional vigente. A partir da 5ª série, com a introdução de estudos sobre Teoria dos Conjuntos, minhas aulas passaram a ter um viés da Matemática Moderna. Embora não houvesse muitas conexões com o mundo real, e nem mesmo com outras disciplinas, não tive grandes problemas para suplantar os conceitos esperados.

Meus professores de matemática utilizavam problemas em suas aulas esporadicamente ao final dos tópicos trabalhados e, normalmente, podíamos inferir quais os conceitos ou as fórmulas que deviam ser utilizados para sua resolução.

Numa visão contemporânea, poderíamos considerar uma experiência desse tipo como uma atividade de Resolução de Problemas?

Freudenthal (1978, p. 203) nos alerta que, “quando o problema é proposto, é bom que as crianças experimentem a dificuldade por completo, que trabalhem duro para obter a solução”. E fala da importância que tem a observação durante o processo da resolução de um problema, salientando que os estudantes “não procedem de forma não sistematizada” (p. 203), pelo contrário, Freudenthal observou um certo sistema na resolução dos problemas que perseguem sempre uma determinada lógica adotada pelo aluno.

Mas, o que seria um problema? Marshall (1989) caracteriza a resolução de problemas como a resposta de um indivíduo a uma nova experiência ou situação que exija alguma ação desse indivíduo. No cotidiano do mundo real, as pessoas adquirem conhecimentos ou habilidades relevantes para operar dentro de um determinado contexto. A habilidade de organizar o conhecimento e coordená-lo dentro de uma nova situação desconhecida é denominada, por Marshall, "capacidade de resolver problemas".

Para tentar compreender melhor a noção daquilo que entendemos por problema, consideraremos a seguinte situação: Você está trancado dentro de um quarto de um apartamento localizado no décimo andar de um edifício. O quarto possui uma única porta de acesso aos demais cômodos e uma janela com vistas para a rua. Isto é um problema?

Ora, se você não quiser e não precisar sair, o problema não existe. Se você quiser sair, ou sentir necessidade de deixar o quarto, mas tiver em seu poder a chave que abre a porta, não há problema algum. A situação descrita só será um problema para você diante do interesse em deixar o quarto, por vontade própria ou por necessidade, e da falta da chave para abrir a porta. É a partir do despertar da vontade de alterar o estado apresentado que o indivíduo se mobiliza para tentar resolver um problema.

O professor, imbuído do desejo de utilizar a resolução de problemas com um viés metodológico, precisa traçar estratégias para que a atividade levada para a sala de aula seja, de fato, uma situação problemática para o aluno.

Mason (2016) define que algo, ou alguma situação, é um problema apenas quando alguém experimenta um estado de problematidade, assume a tarefa de dar sentido à situação e se envolve numa atividade que faça sentido para ele. Essa definição converge com o conceito de problema que considera como problema “tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em resolver” (ONUChIC, 1999, p.215; ONUChIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Ou seja, um aluno só se sentirá mobilizado para a resolução de um problema se ele acreditar que a atividade proposta, seja ela uma situação-problema ou um problema da vida real, é um problema para ele. É preciso ainda que a solução não lhe seja conhecida e nem mesmo que ele saiba quais são os procedimentos necessários para a sua resolução.

## **5.2. A Resolução de Problemas como Alternativa à Matemática Moderna**

O ensino de matemática nas décadas de 1960-1970 foi influenciado pelo movimento da Matemática Moderna tanto no Brasil quanto em outros países do mundo. A Matemática Moderna, segundo Onuchic (1999, p. 202), “apresentava uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a Teoria dos Conjuntos”. Apesar de apresentar uma linguagem matemática universal, concisa e precisa, esse movimento realçava muitas propriedades matemáticas e se preocupava em excesso com abstrações matemáticas e, combinada com o fato de possuir uma terminologia complexa e de acentuar o ensino de símbolos, acabava por comprometer o aprendizado. Até mesmo o professor, em muitas oportunidades, não parecia seguro com o que dizia e, com preocupações excessivas com a formalização, distanciava-se das questões práticas (ONUChIC, 1999).

Essa corrente pedagógica recebeu, em meados da década de 70 do século XX, uma grande diversidade de críticas, sendo que algumas delas consideravam como indicadores do fracasso da reforma da Matemática

Moderna, a queda da pontuação média dos estudantes em testes padronizados e queixavam-se que o currículo instigava hábitos mentais equivocados, o que culminou, nos Estados Unidos, com um movimento de Volta às Bases (PHILLIPS, 2015).

Phillips (2015) ressalta ainda que:

Os críticos da década de 1970 não se opuseram apenas à abordagem pedagógica ou matemática do novo currículo, como alguns matemáticos e professores na década de 1960, mas desafiaram a própria concepção de que um cidadão inteligente deva entender a estrutura do conhecimento matemático. (PHILLIPS, 2015, p. 122)

Mais do que isso, a queda da Matemática Moderna teria sido, tal qual a sua ascensão, completamente política e os seus críticos estariam explicitamente alinhados ao renascimento do conservadorismo político no Estados Unidos (PHILLIPS, 2015). Além disso, os críticos da Matemática Moderna defendiam que os cidadãos deveriam receber treinamento de habilidades mecânicas e de técnicas de memorização, ao invés de uma compreensão conceitual ou estrutural da natureza do conhecimento matemático (PHILLIPS, 2015).

Phillips (2015) relata que os adeptos desse movimento defendiam o ensino de Matemática baseados na disciplina e na tradição, embora com uma orientação para a preparação dos alunos frente aos desafios do mundo moderno.

Porém, no final dos anos 70, o NCTM, inconformado com o rumo que a Matemática escolar estava tomando, priorizando exercícios e memorização (KANBIR, 2016), organizou o documento *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics on the 1980's* (Uma Agenda para a Ação: Recomendações para a Matemática Escolar nos anos 80), lançado em abril de 1980.

A primeira das recomendações do NCTM, descrita na Agenda para a Ação, diz que “a resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar

nos anos 1980” (NCTM, 1980, p. 1, Tradução minha). E recomenda que sejam realizadas as seguintes ações relativas a essa recomendação:

1. O currículo de matemática deve estar organizado em torno da Resolução de Problemas (NCTM, 1980, p. 2, Tradução minha);
2. A definição e a linguagem da resolução de problemas em matemática devem ser expandidas para incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que incluam todo o potencial de aplicação matemática (NCTM, 1980, p. 3, Tradução minha);
3. Os professores de matemática devem criar ambientes de sala de aula onde a Resolução de Problemas possa florescer (NCTM, 1980, p. 4, Tradução minha);
4. Materiais pedagógicos apropriados para se ensinar a resolver problemas devem ser desenvolvidos em todas as séries (NCTM, 1980, p. 4, Tradução minha);
5. Os programas de matemática da década de 80 devem envolver os estudantes na resolução de problemas apresentando aplicações para todas as séries (NCTM, 1980, p. 4, Tradução minha);
6. Pesquisas e agências de financiamento devem dar prioridade na década de 1980 para investigações sobre a natureza da Resolução de Problemas e formas eficazes de desenvolver solucionadores de problemas (NCTM, 1980, p. 5, Tradução minha).

A partir dessas ações, pesquisas começaram a ser desenvolvidas e a década de 80 apresentou uma infinidade de possibilidades sobre a utilização da Resolução de Problemas na sala de aula. As ideias do matemático George Polya (1887 – 1985) foram resgatadas e serviram de ponto de partida para essas discussões.

O livro *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* foi escrito originalmente em 1944 e lançado no Brasil em 1977 com o curioso título *A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Método Matemático*.

Nessa obra, Polya (1995) confronta o ensino tradicional vigente à sua época ao descrever a importância que pode ser atribuída ao uso de resolução de problemas na sala de aula, ao apontar a grande oportunidade que os problemas oferecem ao professor de Matemática:

Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo (POLYA, 1995, p. v).

O principal objetivo de Polya nessa obra e, também, sua esperança, era a de que *How to Solve It* fosse um instrumento útil aos professores que desejassem desenvolver em seus alunos a capacidade de resolver problemas e a estudantes que quisessem, eles próprios, desenvolver essa capacidade (POLYA, 1995).

Graças à influência de *Uma Agenda para a Ação*, a década de 80 teve uma produção acadêmica e literária bastante profícua, contribuindo fortemente para o debate sobre a utilização da Resolução de Problemas como instrumento metodológico de ensino na sala de aula de Matemática.

Felmer, Pehkonen e Kilpatrick (2016), na Introdução do livro *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives* (Proposição e Resolução de Problemas Matemáticos: Avanços e Novas Perspectivas), relatam que atualmente há uma vasta literatura sobre Resolução de Problemas, que inclui estudos de pesquisa, investigações, descrições e análises. Porém, as publicações mais influentes, na década de 80, que continuam a influenciar as pesquisas e o uso de Resolução de Problemas no ensino de matemática são o livro *Thinking Mathematically* (1985), de Mason, Burton e Stacey; o artigo *Problem formulating: Where do Good Problems come from?* (1987), de Kilpatrick, que se encontra no livro *Cognitive Science and Mathematics Education*, editado por Schoenfeld; e o livro *Mathematical Problem Solving* (1985), escrito por Schoenfeld e conhecido como o “livro negro”<sup>13</sup> da Resolução de Problemas.

---

<sup>13</sup> O livro de Schoenfeld era conhecido como “livro negro” por causa de sua capa preta.

Mason, Burton e Stacey (2010) afirmaram, em 1985, que:

A experiência em trabalhar com estudantes de todas as idades nos convenceu de que o pensamento matemático pode ser melhorado se:

- abordar conscientemente as questões;
- refletir sobre essa experiência;
- relacionar sentimentos com a ação;
- estudar o processo de resolução de problemas; e
- perceber como o que você aprende é compatível com sua própria experiência.

Consequentemente, ao encorajá-lo a resolver as questões, mostramos como refletir sobre essa experiência, chamando sua atenção para características importantes do processo de pensar matematicamente. (MASON; BURTON; STACEY, 2010, p. vii, Tradução minha)

Para estudar o processo de resolução de problemas, Mason, Burton e Stacey (2010) propuseram que o trabalho de realização da tarefa problemática fosse dividido em três fases: A fase de entrada, a fase de ataque e a fase de revisão.

A fase de entrada é uma fase de especializar, onde deve-se procurar compreender o problema e as ações que se pretende utilizar para “atacá-lo”. É proposto então, que três perguntas norteadoras sejam feitas: O que eu sei?; O que eu quero?; O que eu posso introduzir? (MASON; BURTON; STACEY, 2010).

Na fase de ataque, você colocará em prática as ações consideradas na fase de entrada para que se resolva o problema. Essa fase é uma fase de generalizar, mas também de especializar. Acontece que essa fase é abandonada quando se chega a uma solução ou à desistência de se resolver utilizando as ações projetadas para o processo de resolução do problema (MASON; BURTON; STACEY, 2010).

Se você desistir da empreitada, precisa retornar às questões norteadoras da fase de entrada, para apurar a especialização do problema e retomar as ações de ataque. Por outro lado, se você chegar a uma solução, avança à fase de revisão.

Na fase de revisão, deve-se realizar as verificações de plausibilidade e conferir se a solução encontrada responde à questão levantada pelo problema. Mason, Burton e Stacey (2010) sugerem que sejam realizadas três ações nessa fase:

1. VERIFICAR a resolução;
2. REFLETIR sobre as ideias-chave e os momentos-chave;
3. EXPANDIR o problema para contextos mais amplos.

Schoenfeld (1985) também sugere o uso de heurísticas para a Resolução de Problemas, especialmente quando os problemas tiverem um processo de resolução mais complexo (o problema P traz em si, uma série de problemas  $P_n$  mais simples). Neste caso, a heurística utilizada também deve ser mais sofisticada:

1. Pense em usar as estratégias apropriadas em primeiro lugar, o que não é de maneira trivial;
2. Conheça formas específicas para as estratégias apropriadas para esse problema P;
3. Crie um conjunto de problemas  $P_n$  relacionados, mais simples e apropriados;
4. Avalie cada problema menor, listados no Ponto 3, visando:
  - a) a probabilidade de obter a solução;
  - b) a probabilidade de poder usar essa solução para encontrar uma solução para o Problema P;
5. Tome decisões baseadas nas possibilidades verificadas no Ponto 4;
6. Resolva os problemas mais fáceis e relacione-os com as decisões tomadas no Ponto 5;
7. Explorando a solução (talvez o método, talvez o resultado) para obter uma solução para o Problema P. (SCHOENFELD, 1985, p 90-91, Tradução minha).

Porém, é no artigo de Schroeder e Lester, *Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving*, publicado no livro do ano de 1989 do NCTM que encontramos eco para as ideias trabalhadas pelo Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP que sustentam a presente pesquisa.

Segundo Schroeder e Lester (1989), há três abordagens possíveis para Resolução de Problemas: Ensinar Matemática sobre Resolução de Problemas; Ensinar para resolver problemas matemáticos; e Ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Ou seja, pode-se teorizar sobre resolução de problemas; pode-se usar o ensino de matemática para ensinar a resolver problemas; e, finalmente, pode-se ensinar matemática através da resolução de problemas, isto é, ao longo do processo de resolução do problema. Nesta última abordagem, encontra-se a gênese da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

### **5.3. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**

“A conexão entre resolver problemas e aprofundar a compreensão é simbiótica” (LAMBIDIN, 2003, p. 3). Essa simbiose indica que a compreensão matemática pode nos levar até à resolução de um problema, puramente matemático ou do mundo real, e a recíproca é verdadeira, ou seja, a resolução de um problema pode nos levar à construção da compreensão matemática. Mais do que isso, temos diante de nós a possibilidade de que, através da proposição de um problema, é possível levar um aluno à construção de matemática nova para ele; ou a aprofundar seus conhecimentos matemáticos sobre conteúdos anteriormente vivenciados, seja na escola como fora dela.

O NCTM (2014) nos mostra indícios de que a eficácia do ensino de matemática está relacionada à utilização da Resolução de Problemas na sala de aula, ao argumentar que:

O ensino eficaz de matemática envolve os alunos na resolução e na discussão de tarefas que promovam raciocínio matemático e resolução de problemas e que permitam múltiplos pontos de partida e várias estratégias de resolução (NCTM, 2014, p.17, Tradução minha).

O ensino eficaz da matemática envolve os alunos ao fazer conexões entre as representações matemáticas tanto para aprofundar a compreensão dos conceitos e procedimentos

matemáticos quanto como ferramentas para a resolução de problemas (NCTM, 2014, p. 24, Tradução minha).

O ensino efetivo da matemática desenvolve a fluência com os procedimentos em uma base de compreensão conceitual para que os alunos, com o tempo, se tornem habilidosos ao usar procedimentos com flexibilidade na medida em que resolvem problemas contextualizados e matemáticos (NCTM, 2014, p. 42, Tradução minha).

Além disso, o NCTM (2014) ressalta qual seria o papel tanto dos professores quanto dos alunos ao implementar práticas que promovam raciocínio e resolução de problemas, conforme mostra a Figura 06 abaixo:

Figura 6: O papel de professores e alunos em tarefas que promovam raciocínio e resolução de problemas

Implementar tarefas que promovam raciocínio e resolução de problemas Ações do professor e do aluno	
O que os professores fazem?	O que os alunos fazem?
<p>Motivar o aprendizado dos alunos sobre a matemática através de oportunidades para explorar e resolver problemas que desenvolvam e ampliem sua compreensão matemática atual.</p> <p>Selecionar tarefas que forneçam múltiplos pontos de partida através do uso de várias ferramentas e representações.</p> <p>Propor tarefas regularmente, que exijam um alto nível de demanda cognitiva.</p> <p>Apoiar os alunos na exploração de tarefas sem assumir o pensamento dos alunos.</p> <p>Incentivar os alunos a usar abordagens e estratégias variadas para entender e resolver problemas.</p>	<p>Perseverar na exploração e no raciocínio através de tarefas.</p> <p>Responsabilizar-se pela compreensão das tarefas, recorrendo e fazendo conexões com seu entendimento progresso e com suas ideias.</p> <p>Usar ferramentas e representações, conforme necessário, para apoiar seus pensamentos e a resolução de problemas.</p> <p>Aceitar e esperar que seus colegas de classe usem uma variedade de abordagens de solução e que eles discutam e justifiquem suas estratégias um para o outro.</p>

Fonte: NCTM (2014, p. 24)

Segundo Lambdin (2003),

Um problema é, por definição, uma situação que causa desequilíbrio e perplexidade. Um princípio primordial do ensino através da resolução de problemas é que os indivíduos confrontados com problemas genuínos sejam forçados a um estado de necessidade de conectar o que eles conhecem com o

problema proposto. Portanto, aprender através da resolução de problemas desenvolve a compreensão. As redes mentais de ideias dos alunos crescem mais complexas e mais robustas quando os alunos resolvem problemas que os obrigam a pensar profundamente e a se conectar, estender e elaborar sobre seus conhecimentos prévios (LAMBDA, 2003, p.7, Tradução minha).

Tais considerações são importantes para compreender a ideia da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Essa metodologia interpreta a necessidade de ir além da concepção de Polya (1995), que ofereceu um processo heurístico para auxiliar professores, alunos e pessoas interessadas a resolver problemas.

Tal metodologia não se propõe a ensinar os alunos a resolver problemas e nem a utilizar os problemas como aplicação direta de um determinado conteúdo matemático trabalhado na sala de aula. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas considera a possibilidade de que, a partir de um problema gerador, o aluno possa construir novos conhecimentos matemáticos. A formalização acontece no final do processo de resolução de problemas e não no início, como sugerem outras concepções pedagógicas que utilizam resolução de problemas matemáticos:

Na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas o problema é ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos. (ONUChIC; ALLEVATO, 2011, p. 81)

Ensinar a partir de um problema exige que se faça a cada dia um planejamento ou uma seleção de atividades, levando em conta a compreensão dos estudantes e a necessidade de atender ao conteúdo programático (ONUChIC; ALLEVATO, 2009).

Embora se possa trabalhar metodologia de diversas maneiras, desde que seus propósitos de iniciar o processo de ensino com a proposição de um problema gerador para, através de sua resolução, chegar-se à aprendizagem de determinado conteúdo matemático, Onuchic e Allevato (2011) propuseram o

seguinte roteiro para o desenvolvimento de uma aula baseada no Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas:

1. Preparação do problema - Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
2. Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
3. Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
  - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
  - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
4. Resolução do problema - A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como coconstrutores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
5. Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
  - O professor incentiva os alunos a utilizar seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6. Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
7. Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
8. Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
9. Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 83-85)

Allevalo e Onuchic (2014) apresentaram uma nova etapa para o roteiro: A proposição e resolução de novos problemas. Elas argumentam que novos problemas, relacionados ao tema do problema gerador, permitem analisar a compreensão do conteúdo matemático trabalhado durante a aula e consolidam aprendizagens construídas em etapas anteriores, além de aprofundar e ampliar as concepções do próprio tópico matemático trabalhado, criando um novo ciclo de resolução de problemas que pode levar à aquisição de novos conhecimentos matemáticos e, por consequência, à proposição de novos problemas.

Mais importante ainda é que essa metodologia integra deliberadamente uma concepção mais atual de avaliação, que é, conforme salienta Onuchic (2013, p. 101), “construída em meio à resolução do problema, integrando-se ao ensino com vistas a acompanhar o crescimento dos alunos, aumentando sua aprendizagem e reorientando as práticas em salas de aula quando for necessário”.

#### 5.4. Avaliação e Resolução de Problemas

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas exige um comprometimento do professor com algumas questões que são fundamentais para o sucesso dos estudantes e, conseqüentemente, da metodologia em si. É preciso disposição do professor para trabalhar em grupos e engajamento dos alunos para resolver os problemas propostos. É necessário que haja uma composição harmônica entre professores e alunos para que, da interação entre eles, as ações de avaliação possam fluir com naturalidade e as intervenções auxiliem o estudante na construção de conhecimento matemático novo. É necessário que o professor entenda que tipos de compreensão precisam vasculhar para buscar evidências sobre como o processo de aprendizagem está ocorrendo a fim de transformar concepções errôneas ou construções equivocadas em conhecimento sólido.

Para avaliar a compreensão dos estudantes durante o processo de ensino, os professores devem coletar dados, através de observação e de discursos dos alunos, que devem ser interpretados para desenvolver uma descrição acurada de seu raciocínio. Então, usando seu conhecimento sobre o pensamento de cada estudante, os professores podem selecionar tarefas de ensino adequadas (CHAMBERS, 1993).

Mesmo tendo a percepção de que possam existir outras variáveis na resolução de um problema, após mais de uma década utilizando essa metodologia em sala de aula, entendemos a necessidade de se considerar ao menos as seguintes variáveis no desenvolvimento de uma tarefa baseada na resolução de problemas:

- A compreensão do problema: O professor precisa buscar evidências sobre a compreensão do estudante com relação ao problema ou à situação problemática. A má compreensão do enunciado pode levar, fatalmente, a uma construção errada de um conceito e aumentar a dificuldade do trabalho docente.
- A separação de variáveis úteis e a escolha de ferramentas adequadas: Para resolver um problema, o aluno precisa destacar, dentre

as variáveis apresentadas, aquelas que serão úteis para a resolução do problema. Quando o aluno ataca o problema, quando ele confecciona um plano para resolver o problema, precisa escolher quais ferramentas matemáticas poderão ser utilizadas para a resolução do problema. É preciso definir quais serão os caminhos que serão percorridos e os algoritmos que poderão ser utilizados para a resolução do problema.

- A operacionalização: Não basta conhecer as variáveis que poderão ser utilizadas e saber resolver os algoritmos necessários para alcançar os objetivos do problema. É preciso saber onde eles serão utilizados e saber usá-los com correção e eficácia. O professor precisa estar atento à operacionalização do problema e saber quando o aluno está realizando uma boa resolução, isso porque é ela quem define, efetivamente, se o resolvidor do problema chegará ou não a uma solução plausível.
- A razoabilidade das respostas: Quando o estudante encontra uma resposta ou, ao final de cada etapa da resolução do problema, precisa avaliar se a resposta é plausível, se há razoabilidade nela, o professor tem que estar atento para os diálogos que ocorrem nos grupos de trabalho e perceber se as argumentações utilizadas demonstram estar alinhadas às possíveis respostas que seriam dadas ao problema.
- O significado dos conceitos envolvidos: Durante as fases de plenária e de formalização, o professor precisa acompanhar, acuradamente, o processo de ensino, com vistas à aprendizagem, para coletar evidências sobre o quanto daquele conteúdo pôde ser apreendido pelo estudante, sem riscos de construção de concepções errôneas.

Para obter informações relevantes sobre esses elementos, é preciso que os professores fiquem atentos ao movimento da aula e se utilizem de questionamentos e conversas informais pretendendo que o aluno exponha suas descobertas matemáticas, convicções, dúvidas e dificuldades. De acordo com Chambers (1993):

Os professores podem aprender a orquestrar o discurso para obter informações que revelem o pensamento do estudante. As

questões devem se concentrar nas estratégias de solução dos alunos em vez de sua resposta. Questões tais como:

“Como você resolveu este problema?”

“Será que alguém utilizou a mesma estratégia?”

“Será que alguém utilizou uma estratégia diferente?”

“Alguém poderia pensar em outra estratégia?”

“Tom, o que você pensa sobre a estratégia da Ellen?”

são projetadas para revelar como os estudantes pensaram o problema. Evidências do pensamento estudantil também podem vir de seus trabalhos escritos e de quaisquer manipulações que acompanhem suas resoluções. Quando a evidência é inadequada, o professor pode fazer perguntas de sondagem. (CHAMBERS, 1993, p. 20-21, Tradução minha)

Van de Walle (2009) argumenta que se o professor tiver um plano sistemático para coletar as informações enquanto observa e escuta os alunos, ao menos duas coisas importantes acontecem: reúne-se mais informação que poderia não ter sido percebida e que se tornou relevante; e dados da observação coletados de modo sistemático podem ser acrescentados a outros dados e usados para planejar aulas, fornecer retroinformação (*feedback*) aos alunos, administrar reuniões com pais e determinar graus de avaliação.

Quando se dispõe a utilizar a observação como instrumento de avaliação, e este é um instrumento imprescindível quando pensamos em uma aula baseada na Resolução de Problemas, é importante observar as seguintes considerações apresentadas por Fennell, Kobett e Wray (2015):

- Concentre-se em observar a compreensão dos conteúdos e o envolvimento dos alunos com práticas matemáticas particulares, ao invés de se distrair com outros comportamentos dos alunos.
- Lembre-se da intenção da observação. A observação deve estar intencionalmente conectada ao planejamento e à implementação da aula atual.
- Documente, documente, documente. Mantenha um registro contínuo e a análise do que é observado informará imediatamente as decisões mais urgentes – durante a implementação da aula, ou aconselhará sobre o planejamento de curto e de longo prazo.
- Antecipe o que pode ser observado. Conectando observações ao processo de planejamento, os professores

podem monitorar o ensino, antecipar ou imaginar o que pode acontecer em uma aula e se adaptar de acordo (FENNELL; KOBETT; WRAY, 2015, p.54, Tradução minha).

Pironel e Onuchic (2016) relatam uma experiência pedagógica em que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é utilizada, concentrando as análises nas ações de avaliação. No início da aula, o professor se mantém como observador da atividade, concentrando sua atenção em cada um dos grupos formados, até escolher um deles, ao qual destinará atenção mais detida, a fim de coletar as primeiras informações sobre o andamento da atividade, e organizar seu pensamento para iniciar uma inquirição aos elementos do grupo escolhido.

Essa metodologia trabalha com a formação de grupos e ressaltando a importância dessa prática, “pois possibilita que os alunos que apresentam mais dificuldades possam dirimir suas dúvidas com aqueles colegas que absorveram, com maior rapidez e facilidade, um determinado conceito” (PIRONEL; ONUCHIC, 2016, p. 10).

Quando o professor foca sua atenção num único grupo, ele se aproxima dele e, através de questionamentos, tenta obter informações e realiza, imediatamente, as intervenções que julgar necessárias. Achamos relevante reproduzir parte de um diálogo acontecido durante uma aula desenvolvida com essa metodologia, que aparece no artigo de Pironel e Onuchic (2016):

Professor: O que vocês fizeram?

Aluno 1: Desenhamos um paralelepípedo e traçamos a diagonal. Percebendo que a diagonal desenhada era de uma das faces e não do paralelepípedo, o professor questionou, apontando a diagonal desenhada:

Professor: Essa é a diagonal do paralelepípedo?

Aluno 1: Sim!

Aluno 2: Talvez não seja.

Professor: Por que você acha que pode não ser?

Aluno 2: Porque se estivesse correto, não precisaria dizer que é um paralelepípedo. Ela seria a diagonal de um retângulo.

Professor: O que vocês acham disso que o Aluno 2 disse?

Os elementos do grupo expressaram feições de concordância e o Aluno 3 respondeu:

Aluno 3: O que ele disse faz sentido.

Professor: Vocês discutiram essas questões?

Aluno 1: Eu propus que esse desenho pudesse representar a questão, mas agora parece que eu estava enganado.

Professor: Aluno 4, você poderia me explicar como seria a “representação correta” do problema?

Aluno 4: Acho que a diagonal “corta” o prisma. É isso?

Aluno 1: Mas se “cortar” o prisma, como resolvo? Eu sei que preciso usar o teorema de Pitágoras.

Professor: É? Lembrem-se que vocês formam um grupo, discutam essas questões, depois voltamos a conversar. (PIRONEL; ONUCHIC, 2016, p.10-11)

Ainda, segundo Pironel e Onuchic (2016):

O professor precisa chamar à discussão aqueles alunos que não se manifestarem espontaneamente; as possíveis dicas devem aparecer sob a forma de questões, incentivando os estudantes a pensar; a integração dos elementos do grupo e a interação entre eles é fundamental para o desenvolvimento de quaisquer problemas. Por isso o professor precisa colocar-se numa posição de neutralidade, evitando, tanto quanto possível, apresentar respostas prontas às questões dos estudantes.

É preciso lembrar que a atividade deve ser realizada pelo grupo e não pelo professor, que deve utilizar os instrumentos de avaliação disponíveis (nesse caso apresentamos a observação com intervenção imediata) para fomentar a construção do conhecimento por parte do grupo de alunos. (PIRONEL; ONUCHIC, 2016, p. 11)

A avaliação, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas não se encerra na fase de resolução do problema, vai além disso. Van de Walle (2009) alerta que, para utilizar a observação efetivamente como um meio de coleta de dados de avaliação, o professor deve considerar a seguinte máxima: “Não tente observar todos os alunos em um único período da aula” (VAN DE WALLE, 2009, p. 106).

Segundo essa metodologia, depois da leitura e retirada de dúvidas, a aula deve ser acompanhada, intrinsecamente, por um processo avaliativo sendo que as fases (4) resolução do problema, (5) observar e incentivar, (7) plenária e (8) busca do consenso são aquelas que mais favorecem esse processo, por permitir

maior interatividade tanto entre professor e aluno quanto entre os alunos e seus pares.

Mas, será que essa metodologia, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, pode ser considerada como um instrumento válido de Avaliação para a Aprendizagem? Ou será que pelo fato de integrar três processos distintos, Ensino, Aprendizagem e Avaliação, a avaliação ficaria prejudicada?

### **5.5. A procura de uma Avaliação para a Aprendizagem de Matemática**

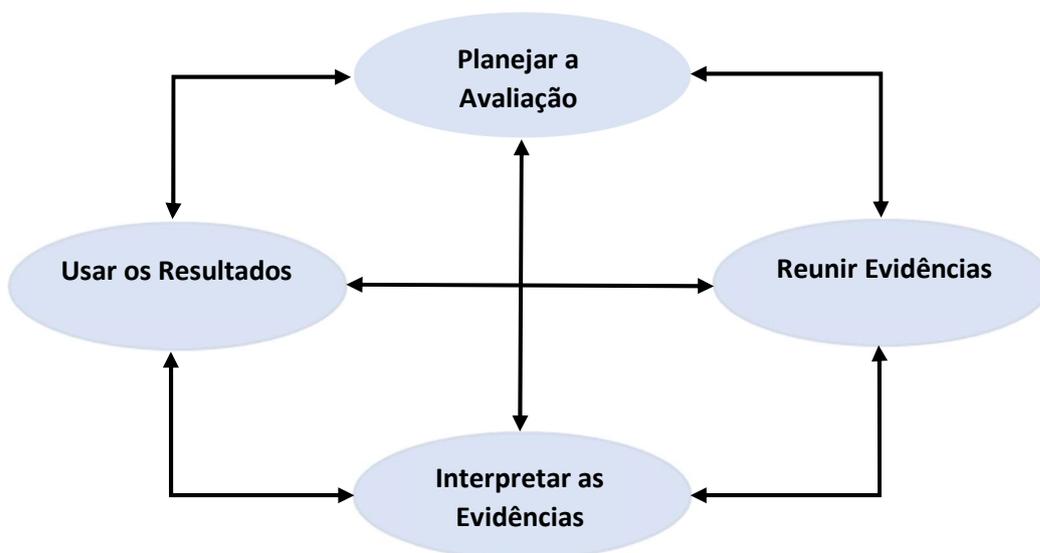
Independente do propósito de avaliação considerado, poderíamos assumir algumas posições bastante sólidas com relação a ela. Pironel (2002) defendeu que a avaliação na sala de aula de matemática pode contribuir para a formação de um sujeito crítico, reflexivo e criativo ao participar, de modo significativo, dessa formação. Em sua pesquisa, Pironel realiza um estudo com diversos instrumentos de avaliação numa escola da Rede Pública de Ensino da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, tentando compreender a viabilidade de cada instrumento para a Educação Básica e os reflexos da utilização de cada um deles no desenvolvimento do aluno. Para Pironel (2002):

[...] o processo de ensino-aprendizagem deve ter um acompanhamento, intrínseco a ele, que procure compreender o desenvolvimento do aluno nos seus aspectos cognitivo, emocional, crítico e social, o qual chamaremos avaliação, para que o professor possa também avaliar seu trabalho e traçar, quando necessário, novas diretrizes no planejamento de suas aulas, sempre objetivando o pleno desenvolvimento do educando. (PIRONEL, 2002, p. 46-47)

Esta visão da avaliação contempla as ideias contemporâneas de Avaliação para a Aprendizagem que, embora tenham sua gênese em idos dos anos 80, consolidaram-se a partir das publicações dos *Standards*, essencialmente dos Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar – *Assessment Standards for School Mathematics* (NCTM, 1995). Para esse documento, a avaliação pode ser pensada como um processo com quatro fases

inter-relacionadas, que destacam os principais pontos em que as decisões críticas precisam ser tomadas. A Figura 7 mostra a relação entre as fases de uma avaliação: Planejar a Avaliação; Reunir Evidências; Interpretar as Evidências; e Usar os Resultados. O documento reforça que a divisão dessas fases é arbitrária e fazem o processo parecer mais ordenado do que é na verdade. Contudo, na prática, as fases são interativas e as distinções entre elas nem sempre são nítidas. Aliás, segundo o NCTM, a avaliação não procede de uma maneira clara e linear.

Figura 7: As Quatro Fases da Avaliação



Fonte: NCTM, 1995, p. 4, Tradução minha

Segundo Pironel (2002):

Considerando que a avaliação é um processo de pesquisa contínuo, não há como estabelecer uma ordem explícita na realização das fases que a compõe, ou seja, o processo avaliativo não é linear e nem é necessariamente sequencial. Porém, o Planejamento de Atividades pode ser considerado o ponto de partida para a realização de uma avaliação consciente e libertadora, que influa intimamente no processo de ensino-aprendizagem tornando-se inclusive parte dele, ou seja, passamos a pensar num processo maior chamado Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação em Educação Matemática. (PIRONEL, 2002, p. 152)

O NCTM (1995) enfatiza que cada fase do processo de avaliação pode ser caracterizada pelas decisões e ações que ocorrem durante elas.

Bryant e Driscoll (1998) identificam a Avaliação como um processo de pesquisa contínuo e sugerem que se utilize as seguintes questões norteadoras, para direcionar a prática avaliativa:

#### Planejar a Avaliação e Coletar Evidências

- Qual é o propósito da avaliação? É uma tarefa de diagnóstico (antes), formativa (durante) ou de domínio (final)?
- Como o objetivo deve afetar a atividade? (Por exemplo, "Diga-me tudo o que você sabe sobre ..." pode ser apropriado para uma tarefa "diagnóstica"; observações ou atribuições de escrita improvisadas podem ser apropriadas para avaliação contínua; um problema ou projeto pode ser mais apropriado para uma tarefa final.)
- Qual é o conteúdo matemático? Como o conteúdo se relaciona com temas importantes e ideias unificadoras, como a ideia de raciocínio proporcional?
- Que estratégias de raciocínio e habilidades de pensamento você espera que a tarefa exija? Por exemplo, você espera ver os alunos aplicarem um procedimento específico ou a tarefa provoca uma série de estratégias de resolução de problemas?
- Quais são as exigências de comunicação incorporadas na tarefa (por exemplo, os argumentos devem ser claros e convincentes, o uso da terminologia matemática apropriada, deve haver demonstração com materiais manipulativos, é preciso usar expressões simbólicas)?
- Se esta é, particularmente, uma tarefa diagnóstica (antes), quais são algumas possíveis concepções errôneas que os alunos podem trazer para a tarefa?
- Se esta é, particularmente, uma tarefa contínua (durante), é suficientemente eficiente para lhe dar uma visão rápida, mas profunda, sobre a compreensão dos alunos?
- Se esta é, particularmente, uma tarefa de domínio (depois), quais são seus critérios de classificação?
- Quais seriam duas ou três respostas possíveis?

#### Interpretar as evidências

- O que seus alunos produziram na tarefa? O que você aprendeu sobre o contexto de seu aluno?

- Você fez a pergunta certa (deu o direcionamento correto)? Se não, a tarefa deveria ser alterada? Você deveria devolver a atividade revisada?
- A avaliação mostrou o que você esperava sobre o conteúdo, o pensamento e as estratégias, e a comunicação dos alunos?
- Se era uma tarefa diagnóstica, você notou alguma concepção errônea?
- Se era uma tarefa contínua, quais construções errôneas ou informações incompletas você pôde observar? Qual foi a variedade de abordagens realizadas pelos alunos?
- Se você usou uma tarefa sobre o domínio de um conteúdo, quanto do conteúdo é dominado pelos seus alunos? Num panorama geral da classe, onde (ou seja, em quais objetivos) a sala precisa de maior domínio?

#### Usar os resultados

- Se você notar que concepções errôneas ou má compreensão persistem, que estratégias de ensino poderiam ser aplicadas de maneira mais produtiva?
- Se uma avaliação contínua revela que construções errôneas prevalecem – estudantes que mesmo recebendo ‘pistas’ seguem em direções inapropriadas – que intervenções são úteis?
- Se uma avaliação contínua indica falta de informações ou falta de habilidades, que estratégias podem ser mais produtivas (por exemplo, como tornar públicas as respostas de alunos que demonstram habilidades específicas e fazer com que todos as discutam)?
- Num retrato do domínio que você desenhou da classe a partir da sua análise do trabalho dos alunos, até que ponto eles estão de acordo com os seus padrões? No geral, a diferença está dentro da faixa de tolerância que esperava? Se não, o que você precisa para reforçar a aprendizagem?  
(BRYANT e DRISCOLL, 1998, p. 7, Tradução minha)

A preocupação de ambientar a Avaliação numa estrutura de pesquisa constante fez aflorar, na alvorada do século XXI, o desejo de se construir uma avaliação que mirasse mais a aprendizagem do aluno que a sua classificação para fins de ascensão para séries seguintes ou de seleção.

Portugal, à mesma época e também influenciado pelo NCTM, inclui a avaliação das aprendizagens como parte integrante do processo de ensino-

aprendizagem. Segundo Santos (2005), os novos programas de ensino secundário destacam:

[...] o papel importante da interação, a pertinência de encarar as atividades de aprendizagem como tarefas de avaliação. A vantagem de serem propostas tarefas de extensão e de estilo variável, a realizar individualmente e em grupo, em particular testes em duas fases. Preconiza-se que a avaliação deve recair não apenas no produto final, mas igualmente no processo de aprendizagem e permitir “*que o estudante seja um elemento ativo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem*”. (SANTOS, 2005, p. 173)

Nesse processo, de integração da avaliação à aprendizagem e, por consequência, ao ensino, a observação surge como alternativa incontestada aos instrumentos consagrados de coleta de dados para a avaliação.

Pironel (2002) entende a importância da observação como instrumento para a avaliação e defende que:

O mais eficiente instrumento de avaliação, à disposição dos professores de matemática e de outras áreas também, é a observação da participação do aluno em todas as atividades e os momentos de conversas informais que o professor pode manter com ele. Apesar da simplicidade da ideia, este instrumento de avaliação não é nada fácil de ser aplicado.

A observação e as conversas com o aluno exigem que o professor conheça seus alunos, de modo que saiba como, quando e o que questionar, ou inferir, ou sugerir. O professor precisa compreender que o aluno é seu companheiro, colaborador no processo de construção do conhecimento e que buscam juntos atingir os mesmos objetivos, apesar de desempenharem papéis diferentes enquanto trabalham por esses objetivos.

As inferências, dicas ou questões colocadas podem levar o educando a refletir criticamente sobre o seu desempenho. Refletir, também, sobre como tomar decisões na busca de soluções para problemas propostos; medir sua própria aprendizagem e assumir a compreensão de novos conceitos e conteúdos matemáticos; e definir operações sobre determinados objetos matemáticos, estabelecendo propriedades sobre eles. (PIRONEL, 2002, p. 185)

Santos (2005), por outro lado, relata que estudos realizados por diversos pesquisadores mostraram que professores não depositam confiança no

processo de observação como instrumento de avaliação. Uma possível razão para explicar o porquê dessa rejeição seria o fato de as observações serem realizadas “sem registros e de forma pouco sistemática” (p. 175).

Embora traga essa concepção, Santos (2005) relata estudo realizado por Varandas (2000) em que fica evidenciada uma outra função atribuída à observação, a de regular o próprio ensino.

Além disso, Pironel e Onuchic (2016) dizem que a observação, utilizada para a avaliação pode ser de dois tipos:

O primeiro deles é a observação registrada, onde o professor pode manter um registro das observações realizadas em sala de aula para direcionar sua prática pedagógica, de modo que se possam potencializar as ações que resultam em sucesso da aprendizagem do educando e evitar ou remodelar as práticas que possivelmente tenham causado dificuldades no ensino e na aprendizagem do estudante na sala de aula.

O segundo tipo de avaliação através da observação refere-se à observação com intervenção imediata. Nesse caso, a intervenção ocorre tão logo sejam detectadas as falhas no processo de aprendizagem e essa intervenção pode acontecer na forma de questionamentos, dicas e até por meio da resolução de um problema periférico, distinto do problema gerador trabalhado. (PIRONEL; ONUCHIC, 2016, p. 6)

Santos (2002) complementa essa visão ao argumentar que:

O questionamento por parte do professor pode ocorrer oralmente na sala de aula, enquanto os alunos realizam as tarefas propostas e, por escrito, tomando por base produções realizadas. Estas poderão ser ou não resultantes de instrumentos formais de avaliação. Em vez de registrar juízos de valor, que pouco ou nada contribuem para a aprendizagem (por exemplo, “confuso”, “excelente”, “vago”, “não responde ao pedido”), o professor poderá aproveitar mais uma ocasião para construir contextos favoráveis ao desenvolvimento de uma postura autorreflexiva nos seus alunos (por exemplo, “o que te levou a escolher esta estratégia?”, “porque é que a solução a que chegaste não responde ao problema inicialmente colocado?”). (SANTOS, 2002, p. 82)

Corroborando essa visão, Van de Walle (2009) afirma que:

Se você coletar informações dos alunos enquanto eles completam uma atividade, enquanto ela está sendo discutida, enquanto os resultados são justificados – em suma, enquanto os estudantes estão fazendo matemática – você obterá informação que fornecerá insights sobre a natureza da compreensão dos estudantes sobre aquela ideia. (VAN DE WALLE, 2009, p. 102)

Sobre isso, Dorr-Bremme e Herman (1986 apud WILIAM, 2007) salientam que:

Quando os professores são questionados sobre como eles avaliam seus alunos, eles provavelmente citarão testes, questionários, portfólios, projetos e outros métodos mais ou menos formais. Quando, em vez disso, os professores são perguntados sobre como eles sabem se seus alunos aprenderam algo, as respostas geralmente são muito diferentes. (DORR-BREMME e HERMAN, 1986, apud WILIAM, 2007, p. 1053, Tradução minha)

Segundo Wiliam (2007), esses autores relatam saber o que seus alunos aprenderam através das perguntas feitas na sala de aula, das atividades em grupo, das discussões, confecção de cartazes, mapas conceituais e até mesmo pelas expressões nos rostos de seus alunos. Wiliam (2007) explica ainda que a origem da palavra avaliação (na língua inglesa, *assessment*) deriva do vocábulo latino *assidere* que, literalmente, significa "*sentar-se ao lado*" e, por essa razão, está muito mais perto desse sentido mais informal de se avaliar. Santos (1995) chamava a atenção para o fato de que a avaliação deve acontecer em diversos momentos, em situações formais ou informais num processo de ensino-aprendizagem-avaliação, quando a integração da avaliação instrução sujeita-se a alterações de percurso sempre que necessário.

Em meio a essas considerações, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas parece descrever um cenário que favoreça a integração do processo de avaliação aos processos de ensino e de aprendizagem, colaborando para que a observação, mesmo quando desacompanhada de registro, incite a intervenção do professor no processo de construção do conhecimento de matemática pelo aluno.

### 5.5.1. A Avaliação no Documento Princípios para Ações, do NCTM

O documento *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar) foi um marco na comunidade acadêmica estadunidense e influenciou pesquisas e ações educacionais desde sua publicação no ano 2000. Mais de uma década depois, o NCTM sentiu necessidade de se criar um novo documento, que indicasse novas possibilidades e pudesse aproximar os processos educacionais da garantia de sucesso aos estudantes, os *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All* (Princípios para Ações: Garantindo o Sucesso Matemático para Todos):

Ao longo dos últimos vinte e cinco anos, aprendemos que os padrões por si só, independentemente de suas origens, de sua autoria ou do processo pelo qual eles são desenvolvidos, não alcançavam o objetivo de altos níveis de compreensão matemática para todos os alunos. Era preciso mais do que os padrões. Por essa razão, o NCTM desenvolveu os Princípios para Ações: Garantindo o Sucesso Matemático para Todos, o seguinte em sua linha de publicações de referência orientando a educação matemática para o futuro. O documento Princípios para Ações descreve condições, estruturas e políticas que devem existir para que todos os alunos possam aprender. Aborda elementos essenciais do processo de ensino-aprendizagem: acesso e equidade; currículo; ferramentas e tecnologia; avaliação; e profissionalismo. Finalmente, sugere ações específicas que os professores e as partes interessadas precisam tomar para alcançar o objetivo compartilhado de garantir sucesso matemático para todos. (NCTM, 2014, p. vii, Tradução minha)

Para garantir o sucesso matemático de todos os alunos, o NCTM (2014, p. 7) considera a proposta do *National Research Council* (NRC), que entende o desenvolvimento de cinco elementos entrelaçados como essenciais para a aquisição de proficiência matemática: Compreensão conceitual; Fluência processual; Competência estratégica; Raciocínio adaptativo; e Disposição produtiva. Segundo o NRC (2001, apud NCTM, 2014):

A compreensão conceitual (isto é, a compreensão e a conexão de conceitos, operações e relações) estabelece o fundamento que é necessário para desenvolver a fluência processual (isto é, o uso significativo e flexível dos

procedimentos para resolver problemas). A competência estratégica (ou seja, a capacidade de formular, representar e resolver problemas matemáticos) e o raciocínio adaptativo (ou seja, a capacidade de pensar logicamente e justificar o pensamento) refletem a necessidade de os alunos desenvolverem formas matemáticas de pensar como base para a solução de problemas matemáticos que possam encontrar na vida real, bem como na matemática e outras disciplinas. (NRC, 2001, apud NCTM, 2014, p. 7, Tradução minha)

A partir dessa ideia, uma gama de ações deve ser considerada, uma delas versando sobre a necessidade de se desenvolver uma prática de ensino eficaz, usando questões significativas para avaliar e promover processos de raciocínio que deem sentido às ideias importantes da matemática e às suas relações (NCTM, 2014).

A Figura 8 dá uma estrutura às questões, que podem ser utilizadas durante o processo de Ensino de Matemática e que compõem um meio importante para a coleta de dados necessária à avaliação dos estudantes, enquanto acontece o processo de Aprendizagem de Matemática dos mesmos.

Figura 8: Uma estrutura para os tipos de questões usadas no Ensino de Matemática

Tipos de questões		Descrição	Exemplos
1	Coleta de Informações	Os estudantes relembram fatos, definições ou procedimentos	Quando você escreve uma equação, o que o sinal de igual diz? Qual é a fórmula para encontrar a área de um retângulo? O que o intervalo interquartil indica para um conjunto de dados?
2	Sondando o pensamento	Os alunos explicam, elaboram ou esclarecem seus pensamentos, incluindo a articulação entre as etapas dos métodos de solução ou a conclusão de uma tarefa.	Como você desenhou essa reta real, que decisões tomou para que a pudesse representar? Você pode mostrar e explicar mais sobre como usou uma tabela para encontrar a resposta à tarefa dos Planos de Smartphones? Ainda não está claro como descobriu que 20 era o fator de escala. Então você pode explicar de outra maneira?

3	Tornando a matemática visível	Os alunos discutem estruturas matemáticas e fazem conexões entre ideias matemáticas e suas relações.	O que a sua equação tem a ver com a situação do concerto da banda? Como é que essa matriz se relaciona com a multiplicação e a divisão? De que forma a distribuição normal pode ser aplicada a esta situação?
4	Incentivando a reflexão e a justificação	Os alunos revelam uma profunda compreensão de seu raciocínio e ações, incluindo a construção de um argumento para validar o seu trabalho.	Como você pode provar que 51 é a solução? Como você sabe que a soma de dois números ímpares será sempre par? Por que o Plano A na tarefa Planos de Smartphones começa mais barato, mas se torna mais caro a longo prazo?

Fonte: NCTM (2014, p. 36-37 – Tradução minha)

O documento Princípios para Ações reforça que, para que seja implantado consistentemente um processo de ensino-aprendizagem de matemática, é preciso que os programas educacionais privilegiem o compromisso com o acesso e a equidade; um currículo poderoso; ferramentas e tecnologias apropriadas; uma avaliação significativa e alinhada ao processo de ensino-aprendizagem; e uma cultura do profissionalismo (NCTM, 2014).

Se observarmos o movimento das publicações do NCTM desde a divulgação de Uma Agenda para a Ação, de 1980, até a publicação de Princípios para Ações, em 2014, poderemos perceber, além da transformação da compreensão dos significados do Processo de Avaliação, a crescente valorização desse processo no seio da matemática escolar. Vista inicialmente como uma atividade realizada ao final do processo de ensino para a verificação da aprendizagem, a avaliação hoje é considerada um elemento essencial ao processo de ensino-aprendizagem, devendo participar intrinsecamente desse processo para, junto a outros elementos, garantir o sucesso dos estudantes de matemática.

Um excelente programa de matemática garante que a avaliação é parte integrante do ensino, fornece evidência sobre sua proficiência em práticas e conteúdos matemáticos importantes, inclui uma variedade de estratégias e fontes de dados, e fornece retroinformação para os alunos para as decisões instrucionais e

para a melhoria do programa (NCTM, 2014, p. 89, Tradução minha).

Ao integrar-se com o Processo de Ensino-Aprendizagem, a Avaliação passa a ter um caráter muito mais formativo e atua como um agente para a aprendizagem. De acordo com o argumento de Wiliam (2011, apud NCTM, 2014),

Uma avaliação funciona formativamente, na medida em que a evidência sobre o desempenho do aluno é induzida, interpretada e usada por professores, alunos ou seus pares para tomar decisões sobre os próximos passos do ensino, que provavelmente serão decisões melhores do que as que teriam sido tomadas na ausência dessa evidência. (WILIAM, 2011, apud NCTM, 2014, p. 89, Tradução minha)

Porém, existem obstáculos que precisam ser suplantados e suplantá-los é um dos grandes desafios para a comunidade escolar. Um desses obstáculos, segundo o NCTM (2014) é que, embora se deva fornecer forte apoio à aprendizagem, ela própria é, muitas vezes, um obstáculo aos estudantes. A razão para que isso aconteça é que a avaliação, tradicionalmente, tende a focar a avaliação do desempenho dos alunos (por exemplo, a atribuição de notas) e, mais recentemente, tem sido objeto de classificação de escolas e parâmetro para avaliar o desempenho de professores.

Uma consequência do foco da avaliação na prestação de contas foi a sua desnecessária politização. Em nome da prestação de contas, o rico potencial para usar os processos de avaliação com o fim de fortalecer a aprendizagem dos alunos e melhorar o ensino foi diminuído (NCTM, 2014, p. 90, Tradução minha)

Além disso, alguns professores veem a avaliação como análoga à classificação e acabam ignorando o valor da coleta de dados sobre o pensamento e a compreensão do aluno. Mesmo diante da crença de que testes e provas possam ser úteis para esclarecer sobre o progresso do aluno, existem muitas outras formas de se obter informações úteis sobre sua compreensão. Conceber a avaliação como algo limitado ao ato de testar ou de provar o aprendizado do educando e não como um processo que pode sempre evoluir tem sido, por décadas, um obstáculo para o uso eficaz dos processos de avaliação (NCTM, 2014).

Para que a avaliação possa auxiliar significativamente no processo de ensino-aprendizagem, é preciso segundo Stiggins (2007, apud NCTM, 2014), centrar o processo de avaliação no aluno.

Um objetivo importante da avaliação deve ser o de fazer com que os alunos sejam autoavaliadores efetivos, ensinando-os a reconhecer pontos fortes e pontos fracos do desempenho passado e a usá-los para melhorar seu trabalho futuro. [...] As avaliações pelos pares podem permitir que os alunos comparem criticamente o seu trabalho com o de colegas de classe. Eventualmente, os alunos devem ser capazes de reconhecer um trabalho de alta qualidade quando o produzem. Quando os alunos assumem responsabilidade de avaliação dessa maneira, professores e alunos trabalham como parceiros no processo de aprendizagem, com professores e outros alunos opinando sobre como melhorar. (STIGGINS, 2007, apud NCTM, 2014, p. 95, Tradução minha)

Mesmo após tanto tempo discutindo os processos de avaliação e lutando para que eles incorporem, também na prática, conceitos que extrapolem a visão tradicional que percebe apenas os aspectos somativos da avaliação, o NCTM (2014) ainda luta para que essa mudança aconteça, de fato, nas salas de aula e ressalta que:

Mudar o foco primário e a função da avaliação, da prestação de contas para a prática de ensino efetiva, é um componente essencial para garantir o sucesso matemático para todos os alunos. Os professores de sala de aula e os líderes das comunidades escolares devem começar imediatamente a implementar práticas de avaliação mais efetivas para reposicionar a avaliação como um processo formativo. (NCTM, 2014, p. 98, Tradução minha)

Nesse cenário, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode ser um caminho bastante seguro para se alcançar tal meta por, pretensamente, oferecer a possibilidade de integração da avaliação ao processo de ensino-aprendizagem de matemática, promovendo a aprendizagem.

### 5.5.2. Avaliação para a Aprendizagem: Dez Princípios

Quando iniciamos nossa pesquisa, pretendíamos encontrar Princípios para a Avaliação na sala de aula. O percurso da pesquisa nos fez abandonar a ideia. Mas, quando esse ainda era o nosso fenômeno de interesse, pude participar do *13th International Congress on Mathematical Education (ICME-13)*, que aconteceu em Hamburgo, na Alemanha, no ano de 2016.

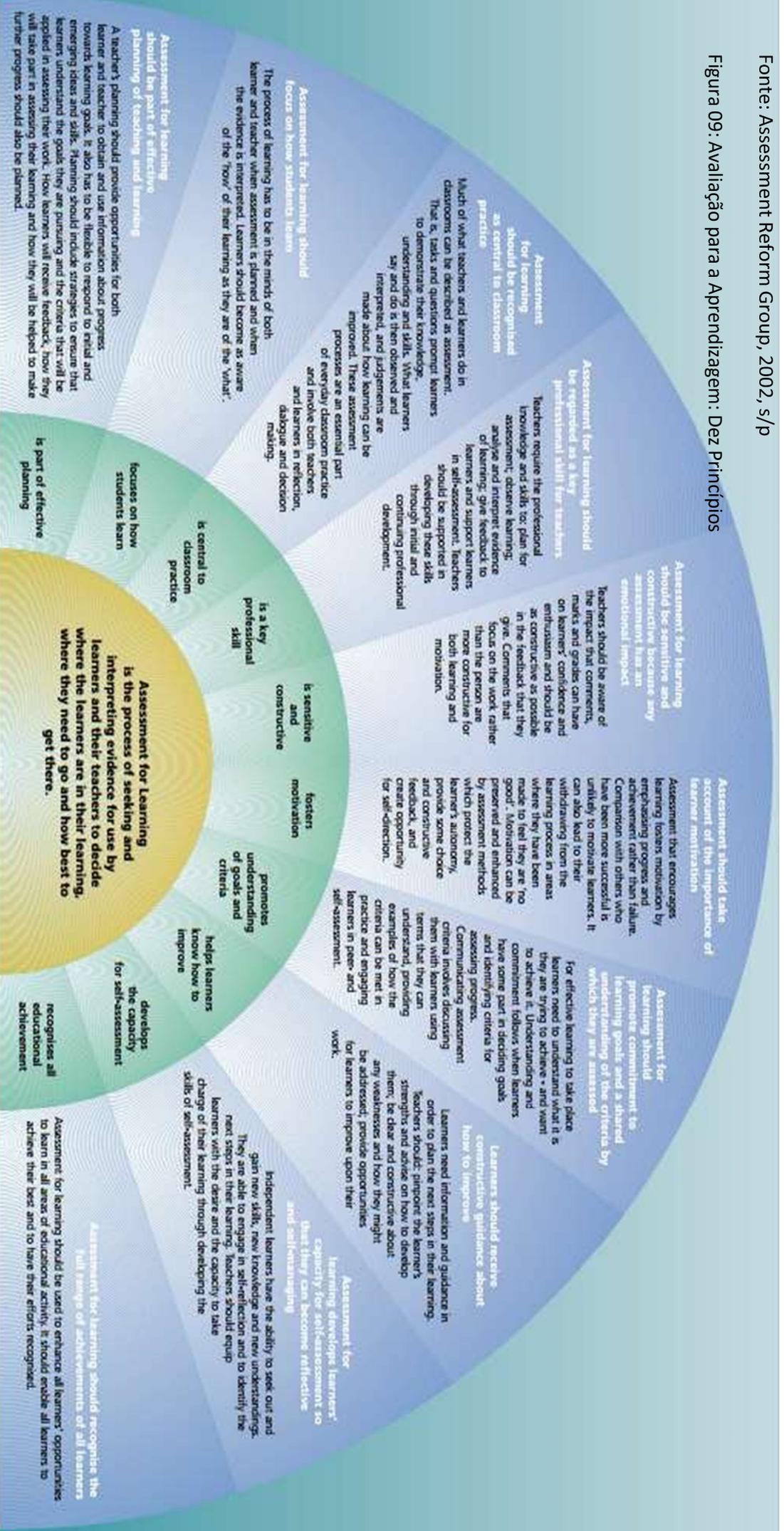
Nesse congresso tive contato com um material que citava um documento do *Assessment Reform Group (ARG)* chamado *Assessment for Learning: Ten Principles - Research-based principles to guide classroom practice (Avaliação para a Aprendizagem: Dez Princípios – Princípios baseados em pesquisa para guiar a prática de sala de aula)*, publicado no ano de 2002.

O ARG foi um grupo voluntário de pesquisadores criado em 1989 e dissolvido em 2010. Segundo a *Nuffield Foundation (2017)*, organização que financia pesquisas, análises e programas estudantis que promovem oportunidades educacionais e bem-estar social em todo o Reino Unido:

O objetivo do ARG era o de garantir que a política e a prática de avaliação em todos os níveis atendessem às evidências relevantes encontradas nas pesquisas. Na busca deste objetivo, os principais alvos da atividade do Grupo eram os decisores políticos do governo e suas agências. Também trabalhou em estreita colaboração com professores, organizações de professores e autoridades educacionais locais para avançar na compreensão dos papéis, propósitos e impactos da avaliação. (Nuffield Foundation, 2017, s/p, Tradução minha)

Conciliando as ideias apresentadas pelo documento *Avaliação para a Aprendizagem* e as concepções defendidas pelo NCTM, principalmente aquelas apresentadas no documento *Padrões de Avaliação*, nossa pesquisa tomou outro rumo. Por essa razão, apresentaremos a seguir esse documento, em sua inteireza.

Figura 09: Avaliação para a Aprendizagem: Dez Princípios



Research-based principles of assessment for learning to guide classroom practice

# Assessment for Learning



## Segundo o Assessment Reform Group - ARG (2002):

A Avaliação para a aprendizagem é o processo de busca e interpretação de evidências para uso, pelos estudantes e por seus professores, para decidir onde os estudantes estão em sua aprendizagem, onde eles precisam chegar e como podem melhorar.

... é uma parte de um planejamento efetivo

A Avaliação para a aprendizagem deve ser parte de um planejamento de ensino e aprendizagem. Um planejamento de ensino deve promover oportunidades, tanto para estudantes quanto para professores, de obter e usar informações sobre o progresso rumo às metas de aprendizagem. Também tem que ser flexível para responder às ideias e às habilidades iniciais e emergentes. O planejamento deve incluir estratégias para garantir que estudantes compreendam as metas que devem ser alcançadas e os critérios que deverão ser aplicados na avaliação do seu trabalho. Como os aprendizes receberão a retroalimentação, como eles participarão da avaliação da sua aprendizagem e como eles serão ajudados a progredir também devem ser planejados.

... focaliza como os estudantes aprendem

A Avaliação para a aprendizagem deve focar sobre como os estudantes aprendem. O processo de aprendizagem tem que estar na mente, tanto de aprendizes quanto de professores, quando a avaliação é planejada e quando a evidência é interpretada. Os estudantes devem estar conscientes do “como” de sua aprendizagem, tanto quanto do “o quê”.

... é uma prática central na sala de aula

A Avaliação para a aprendizagem deve ser reconhecida como uma prática central na sala de aula. Muito do que professores e alunos fazem na sala de aula pode ser descrito como avaliação. Isto é, tarefas e questões incitam os alunos a demonstrar seus conhecimentos, compreensão e habilidades. O que os alunos dizem e fazem é, então, observado e interpretado, e julgamentos são feitos sobre como pode melhorar. Esses processos de avaliação são uma parte essencial da prática cotidiana escolar e envolve tanto professores quanto estudantes em reflexão, diálogo e tomadas de decisão.

... é uma habilidade profissional chave

A Avaliação para a aprendizagem deve ser considerada como uma habilidade-chave para professores. Os professores necessitam de conhecimento e habilidade profissionais para: planejar a avaliação; observar a aprendizagem; analisar e interpretar evidências de aprendizagem; dar feedback para estudantes e apoiá-los em autoavaliação. Os professores devem

ser apoiados para desenvolver essas habilidades através do desenvolvimento profissional inicial e continuado.

... é sensível e construtiva

A Avaliação para a aprendizagem deve ser sensível e construtiva porque qualquer avaliação tem um impacto emocional. Os professores devem estar conscientes do impacto que os comentários, notas e questionamentos podem ter na confiança e no entusiasmo dos alunos e devem ser o mais construtivo possível no feedback que dão. Comentários que se concentram no trabalho em vez da pessoa são mais construtivos tanto para a aprendizagem quanto para a motivação.

... incentiva motivações

A avaliação deve levar em conta a importância da motivação do aluno. A avaliação que incentiva a aprendizagem promove a motivação, enfatizando o progresso e a realização, em vez de fracasso. Comparações com outros que obtiveram maior sucesso muito provavelmente não motivará seus estudantes. Isso também pode levar seus alunos ao fracasso, no processo de aprendizagem de áreas onde eles sentem que não são 'bons'. A motivação pode ser preservada e garantida por métodos de avaliação que protejam a autonomia dos estudantes, promovam alguma escolha e feedback construtivo, e criem oportunidades de autodireção.

... promove a compreensão de metas e critérios

A avaliação para a aprendizagem deve promover o compromisso com os objetivos de aprendizagem e um entendimento compartilhado dos critérios pelos quais eles são avaliados. Para que o aprendizado efetivo ocorra, os alunos precisam entender o que eles estão tentando alcançar - e querem alcançá-lo. Entendimento e compromisso se segue quando os alunos têm alguma parte na decisão de metas e critérios de identificação para avaliar o progresso. A comunicação de critérios de avaliação envolve discussão com os alunos usando termos que eles podem entender, fornecendo exemplos de como os critérios podem ser atendidos na prática e envolver os alunos em pares e na autoavaliação.

... ajuda os estudantes a saber como melhorar

Os alunos devem receber orientação construtiva sobre como melhorar. Os alunos precisam de informações e orientação para planejar os próximos passos em sua aprendizagem. Os professores devem: identificar as forças do aluno e aconselhar sobre como desenvolvê-las; ser claro e construtivo sobre quaisquer pontos fracos e como eles podem ser abordados; oportunidades para que os alunos melhorem o seu trabalho.

... desenvolve a capacidade para a autoavaliação

A avaliação para a aprendizagem desenvolve a capacidade de autoavaliação dos alunos de modo que eles possam se tornar reflexivos e autogestores. Os alunos independentes têm a capacidade de procurar e adquirir novas habilidades, novos conhecimentos e novas compreensões. Eles são capazes de se engajar na autorreflexão e identificar os próximos passos em sua aprendizagem. Os professores devem dotar os alunos com o desejo e a capacidade de assumir o controle de sua aprendizagem através do desenvolvimento das habilidades de autoavaliação.

... reconhece todas as realizações educacionais

A avaliação para a aprendizagem deve reconhecer toda a gama de realizações de todos os alunos. A avaliação para a aprendizagem deve ser utilizada para melhorar as oportunidades de aprendizagem de todos os alunos em todas as áreas da atividade educativa. Deve permitir que todos os alunos consigam o seu melhor e que os seus esforços sejam reconhecidos. (ARG, 2002, s/p, Tradução minha)

Esse documento respondeu a parte de minhas inquietações e despertou outras tantas. Foi a partir dele que pude perceber que a avaliação que eu idealizava estava identificada com a proposta de uma avaliação para a aprendizagem e que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possuía um potencial incrível para servir a esse propósito. Além disso, pude perceber que a avaliação para a aprendizagem apareceu durante todo o percurso desse trabalho.

A questão que emergia, então, era compreender como a avaliação para a aprendizagem poderia ocorrer durante a aplicação dessa metodologia, quais as suas potencialidades e as dificuldades que poderiam ser encontradas durante uma aula de Matemática. Ressaltamos que, embora nossa preocupação fosse com a utilização da Avaliação da Aprendizagem numa aula de Matemática, ela pode ser utilizada em quaisquer áreas do conhecimento humano precisando, para isso, que sejam realizadas algumas adaptações durante a sua aplicação.

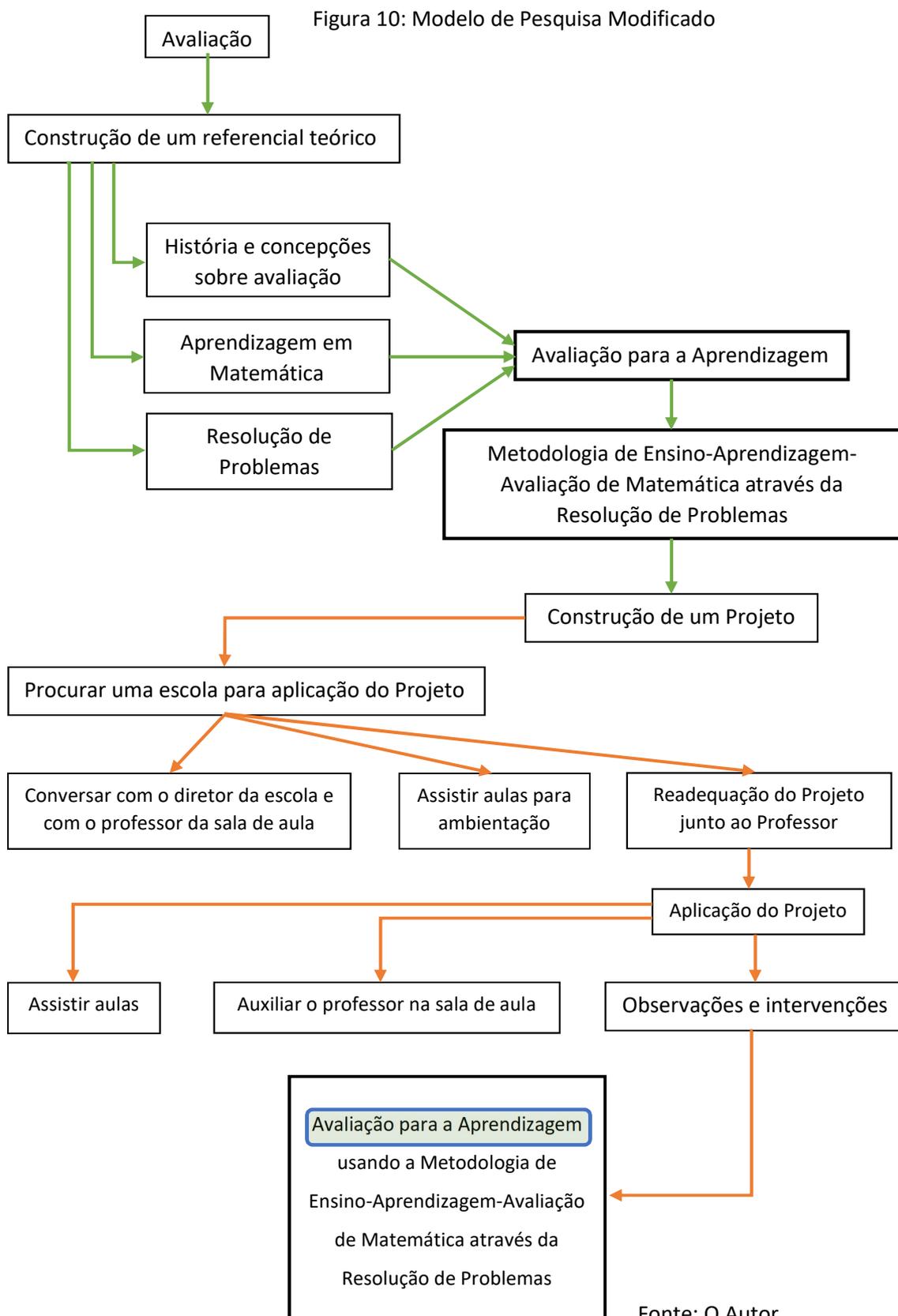
## 6. O MODELO MODIFICADO E A PERGUNTA DA PESQUISA

Ao construir uma base teórica para a pesquisa, ouvindo o que outros pesquisadores disseram sobre as variáveis-chave que definimos como essenciais, vislumbramos a pesquisa por um viés inicialmente não imaginado. Nossos outros autores nos indicaram, silenciosamente, novos caminhos para a pesquisa ao nos permitir outros olhares sobre o nosso fenômeno de interesse.

Quando relacionamos esse fenômeno a ideias de outros, pudemos perceber o potencial que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possui no processo educacional. Além de ser um veículo de aprendizagem bastante convincente, privilegiando a construção do conhecimento pelo aluno e flertando, sempre que necessário, com outras abordagens pedagógicas, consideramos a hipótese de que essa metodologia pudesse se apresentar como um instrumento de avaliação eficaz, tanto nas abordagens tradicionais de avaliação quanto numa abordagem formativa, servindo ao propósito de otimizar o desenvolvimento do aluno, em seus aspectos cognitivo e criativo, melhorando seu aprendizado, ampliando suas capacidades de aprender, refletir, criticar e participar ativamente dos processos de mudança da realidade social em que está inserido. Essa percepção, de que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas dá oportunidade à integração entre os processos de ensino, de aprendizagem e de avaliação, teve um papel crucial na delimitação do problema de nossa pesquisa. Afinal, de que maneira a avaliação para a aprendizagem acontece durante as aulas de Matemática que utilizem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Nossa pesquisa procura responder essa questão. Para tanto, serão consideradas as fases de avaliação sugeridas pelo NCTM (1995): planejar a avaliação, reunir evidências, interpretar evidências e usar os resultados, e os Princípios para a Avaliação para a Aprendizagem, propostos pelo ARG (2002), utilizando, como proposta metodológica para o trabalho pedagógico, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da

Resolução de Problemas. Esse movimento fez com que nosso Modelo Preliminar sofresse alterações que nos impulsionaram a construir um Modelo de Pesquisa Modificado.



Pironel (2002) relata que para se chegar à Pergunta ou à Conjectura de Pesquisa é preciso que se repita o processo de formulação-reflexão-reformulação tanto quanto preciso, até que os objetivos da pesquisa estejam claros para o pesquisador. Assim, após a realização desse processo, denso e cauteloso, chegamos à nossa pergunta de pesquisa:

**De que maneira a avaliação para a aprendizagem acontece durante aulas de Matemática que utilizem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?**

## 7. ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Após delimitar o problema de nossa pesquisa precisamos elaborar um plano de ação que esteja consonante com o Modelo Modificado e que contemple importantes questões invocadas por ele. Segundo Onuchic e Noguti (2014):

A seleção de uma estratégia geral e as decisões sobre que métodos utilizar, para resolver o problema proposto pela Pergunta de pesquisa ou a defender a Conjectura levantada, são ações providas diretamente das questões selecionadas a partir da visão de mundo na qual elas estão inseridas e do modelo criado a fim de explicar o Fenômeno de Interesse considerado. Essas atitudes correspondem a responder à seguinte pergunta: O que devo fazer? As estratégias nos mostram os modos como podemos explorar os recursos que dispomos para alcançar nossos objetivos, enquanto os procedimentos nos indicam os caminhos que devemos percorrer para aplicar adequadamente as estratégias. Ou seja, o procedimento é o modo como procedemos ou executamos uma determinada ação ou, nesse caso, uma estratégia. (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.63)

Para Onuchic e Noguti (2014),

[...] além da Estratégia Geral e do Procedimento Geral, se necessário devemos criar estratégias auxiliares específicas ( $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$ ) de modo que, a partir delas, também criemos procedimentos auxiliares relacionados ( $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ). A diferença entre as Estratégias e Procedimentos encontra-se basicamente em “pensar” o que fazer (estratégias) e colocar tais “pensamentos” em ação (procedimentos). (ONUCHIC; NOGUTI, 2014, p.63)

Aqui, compreendemos estratégia como o meio de se aplicar com eficácia os recursos que dispomos com a finalidade de se atingir um objetivo e o procedimento como o modo de agir ou de fazer para atingir esse objetivo. Para cada estratégia, relacionamos um procedimento correspondente.

### 7.1. Estratégias e Procedimentos da nossa Pesquisa

Assumimos a definição de Avaliação para a Aprendizagem (AFL)<sup>14</sup> preconizada pelo *Assessment Reform Group* (2002), segundo a qual:

---

<sup>14</sup> Assessment for Learning

A Avaliação para a Aprendizagem é o processo de busca e interpretação de evidências, para uso pelos estudantes e por seus professores, para decidir onde os estudantes estão em sua aprendizagem, onde precisam chegar e como podem melhorar. (ARG, 2002, s/p, Tradução minha)

Além disso, adotamos, como Metodologia Pedagógica, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, cuja concepção indica que o “problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos” (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014, p. 44).

Com o olhar voltado para o nosso Fenômeno de Interesse e focalizando centralmente o nosso Modelo Modificado de Pesquisa, com vistas a responder à pergunta de nossa pesquisa, definimos nossa Estratégia Geral e algumas Estratégias Auxiliares.

#### **Estratégia Geral – EG:**

EG: Acompanhar o desenvolvimento do trabalho docente de uma professora portuguesa (o motivo dessa escolha será esclarecido mais adiante) e aplicar um Projeto Pedagógico utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, visando a uma avaliação dirigida pelos princípios de Avaliação para a Aprendizagem sugeridos pelo *Assessment Reform Group*.

#### **Estratégias Auxiliares – EA:**

EA1: Reunir-se com a professora Tânia (que será apresentada mais adiante);

EA2: Assistir algumas aulas para interagir com o trabalho da professora e com os alunos;

EA3: Elaborar um Projeto conjunto (entre pesquisador e professora), que utilizará a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, reforçando aspectos de Avaliação para Aprendizagem segundo o *Assessment Reform Group* (ARG);

EA4: Preparar uma série de problemas geradores para serem trabalhados durante as aulas;

EA5: Assistir as aulas de Matemática da Professora Tânia no sétimo ano;

EA6: Aplicar o Projeto e coletar evidências sobre a aplicação;

EA7: Selecionar, analisar e interpretar as evidências obtidas, visando à pergunta levantada;

EA8: Tecer considerações finais acerca do trabalho desenvolvido.

Para cada uma das estratégias consideradas, tanto da Estratégia Geral quanto das Estratégias Auxiliares, criaremos Procedimentos Geral e Auxiliares correspondentes:

### **Procedimento Geral – PG**

PG: Observar e registrar as atividades docentes da professora Tânia na sala de aula e executar o Projeto criado por nós a ser desenvolvido durante as aulas de Matemática, no sétimo ano do Ensino Básico, do Colégio Pedro Arrupe na cidade de Lisboa, durante o terceiro período do ano letivo 2017/2018.

### **Procedimentos Auxiliares – PA**

PA1: Gravar a reunião com a professora Tânia, buscando entender como ocorre o trabalho realizado por ela em sala de aula; esclarecer aspectos importantes de nossa pesquisa, expondo-lhe detalhes da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, bem como nossos propósitos durante a aplicação da pesquisa e coleta de dados;

PA2: Assistir as aulas da professora Tânia no 7º ano da escola escolhida, anotando aspectos relevantes da prática docente da professora, e da interlocução entre ela e seus alunos;

PA3: Elaborar o Projeto de Aplicação da pesquisa, apoiado pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de

Problemas, com um total de cinco temas matemáticos, indicados pela professora, salientando aspectos avaliativos a serem trabalhados em consonância com a Avaliação para a Aprendizagem sugerida pelo ARG.

PA4: Elaboração de cinco problemas geradores que serão desenvolvidos durante aulas de matemática no 7º ano<sup>15</sup>. Esses problemas serão construídos considerando as orientações sugeridas pelo ARG à Avaliação para a Aprendizagem;

PA5: Durante as aulas da professora, gravar as aulas em áudio e anotar aspectos relevantes de sua prática docente, ressaltando aspectos a respeito da avaliação para a aprendizagem utilizados por ela;

PA6: Coletar evidências na aplicação desse projeto. As atividades dos alunos serão recolhidas e as apresentações dos grupos reproduzidas na lousa serão registradas em arquivo para análise futura;

PA7: De posse das evidências coletadas, analisá-las e interpretá-las à luz da pergunta da pesquisa;

PA8: A partir da produção das considerações finais relativas ao trabalho feito, chegar a conclusões sobre a validade da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como instrumento de Avaliação para a Aprendizagem de Matemática.

## **7.2. Procedimentos em Ação**

Após ter definido uma Estratégia Geral e um Procedimento Geral correspondente, além de relacionar Estratégias Auxiliares e os respectivos Procedimentos Auxiliares, é preciso atacar o problema de pesquisa, ou seja, devemos colocar os procedimentos em ação.

---

<sup>15</sup> Alunos de 12 a 13 anos.

Nossa pesquisa sofreu, desde o início, diversos reveses, mas assim é uma pesquisa. Pode-se traçar um roteiro ideal, um percurso linear e objetivo, mas os ventos da descoberta nos levam por outros caminhos que não são, necessariamente, os inicialmente idealizados. Foi o que aconteceu com a nossa pesquisa.

Logo após o Exame Geral de Qualificação embarcamos rumo a Portugal a fim de realizar um estágio de doutoramento (Doutorado Intercalar) no Curso de Pós-Graduação em Didática da Matemática do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Antes de partir, numa reunião com minha orientadora, ficou decidido que o projeto de aplicação de nossa pesquisa deveria ser construído e implementado durante o período em que eu estivesse em Lisboa. O maior motivo para essa decisão foi que, inicialmente, tínhamos a intenção de aplicar nossa pesquisa aos elementos do Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP – mas quando eu voltasse de Portugal alguns dos sujeitos de nossa pesquisa já teriam se formado e não estariam mais frequentando o Grupo.

Assim, uma nova mudança iria ocorrer. Com a ajuda da Professora Doutora Leonor Santos, que me assistiu durante o período em que estive em Portugal, buscaríamos um professor que nos recebesse e um local para a aplicação de um novo projeto, que estava sendo escrito em linhas gerais, pois a descrição das atividades dependeriam, essencialmente, das características da turma na qual o trabalho seria desenvolvido.

Buscaremos descrever como esse processo se desenvolveu, desde o início até a sua execução, omitindo os verdadeiros nomes dos sujeitos envolvidos e que serão substituídos por nomes fictícios.

O ano letivo das escolas do distrito português de Lisboa é subdividido em três períodos: o primeiro período tem início em setembro e se encerra em meados de dezembro, quando há um breve recesso para as festividades de fim de ano (Natal e Confraternização Universal); o segundo período se inicia nos primeiros dias do mês de janeiro e se encerra com um breve recesso para as festividades da Semana Santa e da Páscoa; o terceiro período tem início na

primeira terça-feira após a Páscoa e termina no final de junho. As aulas acontecem sempre em período integral (matutino e vespertino).

A ideia inicial era a de se trabalhar em sala de aula logo no início de janeiro de 2018, após o recesso de fim de ano. Para isso, entramos em contato com um professor de uma escola pública portuguesa da cidade de Lisboa apresentado pela professora Leonor. Marcamos uma reunião com o professor Martim, que nos recebeu com disposição e alegria a fim de auxiliar em nossa pesquisa. Segundo ele, uma de suas turmas – um oitavo ano – possuía características interessantes para o tipo de trabalho que buscávamos desenvolver. Era uma turma relativamente pequena, com cerca de 16 alunos, que estava habituada a trabalhar colaborativamente e com alguma afinidade com resolução de problemas.

O professor Martim nos deu referências sobre a programação anual da série e nos pediu que enviássemos à Direção de sua escola, por intermédio dele, as requisições e pedidos de autorização para a realização da pesquisa nessa escola. Marcamos uma segunda reunião para definir os detalhes para a execução da pesquisa, definir as atividades que seriam trabalhadas e o período necessário para sua realização.

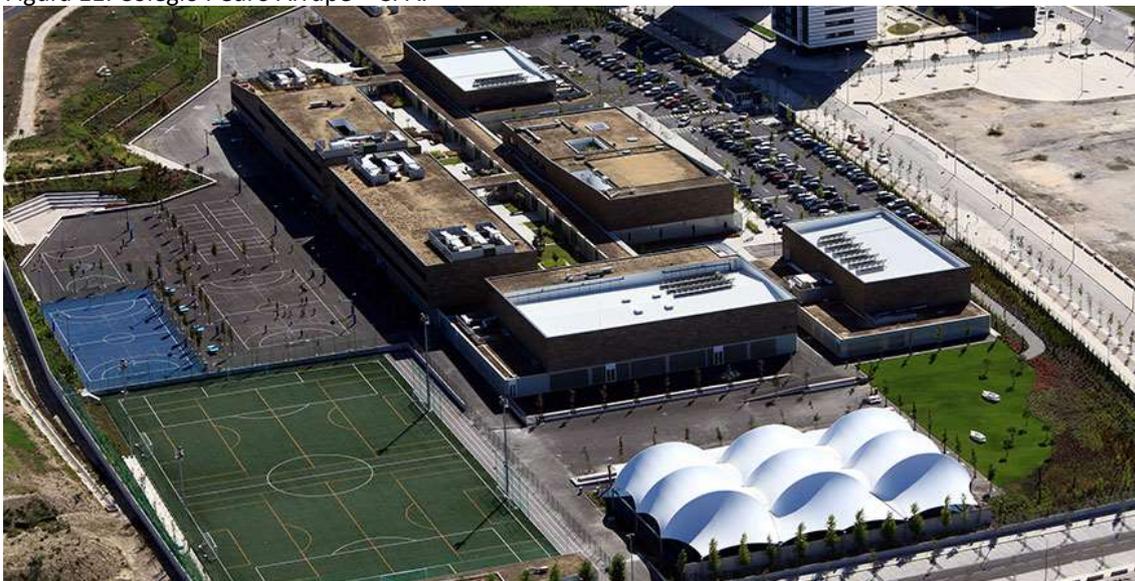
Nessa segunda reunião, o professor Martim nos informou que a Direção da Escola solicitara que fizéssemos um pedido formal de autorização para a aplicação de pesquisa em ambiente educacional à Direção-Geral de Educação (DGE) do Ministério de Educação e Ciência (MEC) de Portugal. Solicitamos pois a referida autorização e, após um certo tempo, recebemos a resposta parcial de que para termos o pedido aceito deveríamos encaminhar à Comissão Nacional de Proteção de Dados (CNPd) um pedido de registro de atividades, para garantir o anonimato das respostas e para resguardar o acesso a dados sensíveis dos sujeitos envolvidos na pesquisa.

Após a juntada de toda a documentação exigida pelo CNPD e o recolhimento de taxa de €150,00, entramos com o pedido de autorização para a utilização das respostas dos alunos. Como o prazo de entrega da autorização fora adiado algumas vezes, sem previsão de data para a finalização do processo

de autorização para o desenvolvimento de pesquisa, na escola do professor Martim, começamos a pensar numa nova possibilidade para a aplicação da pesquisa.

Foi então que a professora Leonor começou a buscar, através de seus contatos com alunos, ex-alunos e colegas de profissão, uma outra possibilidade para a execução do projeto. Logo surgiu o nome do professor Nunes, um dos diretores do Colégio Pedro Arrupe, um colégio privado de Lisboa, que nos autorizou a procurar a professora Tânia, ex-aluna da professora Leonor, para tratar da possibilidade de aplicação do projeto em suas aulas.

Figura 11: Colégio Pedro Arrupe – CPA.



Fonte: <https://www.colegiopedroarrupe.pt/o-colegio/espacos-educativos/11>(Acesso em 12.8.2019)

O Colégio Pedro Arrupe (CPA) traz, em sua página eletrônica, como missão e visão do Colégio, a seguinte descrição:

O Colégio Pedro Arrupe quer ajudar a fazer desabrochar a personalidade única de cada aluno, segundo um ideal de formação integral e um harmonioso desenvolvimento físico, intelectual, afetivo, moral e espiritual. Deseja formar homens e mulheres que se distingam pela preparação intelectual e o saber, mas ainda mais pelo ser, um ser feito de conhecimento e aceitação pessoal, reconhecimento dos dons próprios, e responsabilização por os fazer render ao serviço dos outros em compromissos de construção dum mundo mais justo. Procura ajudar cada aluno e cada aluna a assumir progressivamente a responsabilidade primeira pela sua própria formação e esforça-

se por inculir hábitos que estimulem a criatividade e a adaptabilidade e permitam a aprendizagem ao longo da vida. Valoriza especialmente o papel da família na educação de cada criança e jovem.<sup>16</sup>

Marcamos uma reunião com a professora Tânia, que é mestre em Educação pelo Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, e conversamos com ela para definirmos detalhes sobre a aplicação da pesquisa.

Durante a reunião, a professora Tânia nos informou que possuía alguma familiaridade com o uso de resolução de problemas na sala de aula e que, embora trabalhasse de um modo sutilmente diferente do que propúnhamos, poderia adequar sua metodologia à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Tânia nos informou ainda que havia uma turma do sétimo ano em que ela acreditava que poderia ser a mais adequada para a realização do trabalho, por três motivos: a quantidade de alunos era bastante conveniente para a realização das atividades de pesquisa – 27 (vinte e sete) alunos; a turma era bastante heterogênea – possuía desde alunos com rendimento bastante acima da maioria dos alunos até alunos com dificuldades cognitivas severas<sup>17</sup>; e a turma era bastante disciplinada.

Nesse primeiro contato ficou definido que a professora Tânia conduziria as aulas e que o professor-pesquisador assistiria a todas as aulas do terceiro período do ano letivo 2017/2018, que se iniciava logo após o feriado da Páscoa e se estendia até a segunda metade do mês de junho, e que o professor-pesquisador poderia intervir quando julgasse necessário e daria assistência à professora Tânia quando ela solicitasse, especialmente durante a realização de exercícios para a fixação de conteúdos em sala de aula. Também ficou definido, por sugestão da professora Tânia, que o professor-pesquisador não assistiria às aplicações de provas aos alunos – o que ocorreria em três oportunidades distintas durante esse período.

---

<sup>16</sup> <https://www.colegiopedroarrupe.pt/o-colegio/missao-e-visao/3> (Acesso em 12.8.2019).

<sup>17</sup> A idade mental de um dos alunos não era equivalente à sua idade cronológica. Esse aluno recebia tratamento diferenciado, com acompanhamento de apoio pedagógico (durante algumas aulas e fora da sala de aula) e suas avaliações possuíam um grau de dificuldade menor que a dos demais alunos.

A Escola escolhida possui uma estrutura pedagógica diferenciada quando comparada a outras escolas, tanto portuguesas quanto brasileiras, além da localização privilegiada (próxima à Ponte Vasco da Gama), o CPA:

conta com inúmeros espaços naturais que privilegiam o contacto e fomentam o respeito pelo meio ambiente, favorecendo as interações sociais, a efetiva educação ambiental e as aprendizagens em contexto.

Dos espaços verdes, podemos destacar duas zonas de prado e 3 anfiteatros ao ar livre. Os espaços exteriores destinados ao Pré-escolar e ao 1º e 2º CEB<sup>18</sup> contam ainda com um pequeno pomar e uma horta pedagógica.

Existem campos desportivos para a prática de desportos coletivos, pista de atletismo, campos de ténis e um campo de relvado sintético, com dimensões oficiais, para a prática do futebol ou do rãguebi, com balneários.

[...] A Sala de aula é o coração da escola. No Colégio Pedro Arrupe dedicámos especial atenção à conceção destes espaços, luminosos e amplos – de 50 m<sup>2</sup> (Pré-escolar) a 60m<sup>2</sup> (do 1º Ciclo ao secundário) – equipados com os meios tecnológicos necessários a uma aprendizagem rigorosa e inovadora.

Completam a oferta escolar um Refeitório, duas Bibliotecas concebidas para potenciar o gosto pela leitura e o desenvolvimento de atividades lúdico pedagógicas, Laboratórios para as Ciências Experimentais e a Informática, Salas de Artes, Ginásio, apoiado por salas para didática e para atividades gímnicas e de musculação, e Piscina.

Mas a escola é também por definição um espaço de encontro. A Capela proporciona uma experiência concreta de encontro consigo próprio, com Deus e com os outros; o Auditório, com 500 lugares, foi concebido para conferências, celebrações religiosas ou espetáculos de teatro, música e dança.<sup>19</sup>

A professora Tânia mostrou para o professor-pesquisador a previsão de aulas para o terceiro período e sugeriu alguns temas em que as atividades poderiam ser realizadas. O professor-pesquisador se propôs a assistir algumas aulas antes do início do período de observação e intervenção para que, quando as atividades fossem iniciadas, ele não fosse mais um elemento estranho ao grupo de alunos e contou com a concordância da professora Tânia. Por isso, antes do início do recesso de Páscoa, pude ser apresentado ao grupo de alunos

---

<sup>18</sup> Ciclo de Educação Básica

<sup>19</sup> <https://www.colegiopedroarupe.pt/o-colegio/espacos-educativos/11> (Acesso em 12.8.2019).

do 7º ano e assisti as aulas por três dias letivos consecutivos. No período de recesso elaboramos alguns problemas que, durante o trimestre, foram apresentados à professora Tânia e, após sua aceitação (às vezes com sugestões de mudança), tornaram-se problemas geradores de aprendizagem para o 7º ano.

Dos 27 (vinte e sete) alunos da turma, 24 (vinte e quatro) aceitaram participar da pesquisa e obtiveram permissão por escrito dos pais para a gravação de áudio com suas vozes. Foi usado um gravador para a captação do áudio geral da sala em todas as aulas e mais cinco gravadores espalhados por cinco grupos de alunos durante a realização das tarefas propostas.

Tivemos o cuidado de formar um grupo com os três alunos que não obtiveram autorização de seus responsáveis para a participação na pesquisa e que, embora tenham participado normalmente das atividades propostas, não pudemos coletar, nem considerar suas respostas e nem as intervenções realizadas em seus grupos durante as atividades.

Ainda nesta seção pretendemos descrever como era a dinâmica das aulas da professora Tânia e o modo como foi pensado cada um dos cinco problemas trabalhados em nossa pesquisa.

### **NOSSA PRIMEIRA AULA COM A PROFESSORA TÂNIA**

Antes que houvesse o recesso da Páscoa, assistimos algumas aulas da professora Tânia na turma em que as atividades de pesquisa seriam desenvolvidas. Como nossa ideia era a de trabalhar alguns tópicos de Matemática utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, achamos conveniente, conforme dito anteriormente, estar familiarizados com a turma e com o tipo de trabalho que a professora Tânia desenvolvia em sala de aula. Descrevemos, por esse motivo, os principais aspectos dessa aula.

Era a aula de Matemática de número 87 e ocorreu no dia 12 de março de 2018. O assunto da aula foi Expressões Algébricas.

Impossível não notar o aparato tecnológico fornecido pelo Colégio Pedro Arrupe (CPA). À frente, um quadro negro interativo, conectado a um computador de mesa equipado com o programa “*The ActivClassroom by Promethean*”. Dentre outras facilidades, esse programa permite o salvar as telas utilizadas durante as aulas em arquivo de texto.

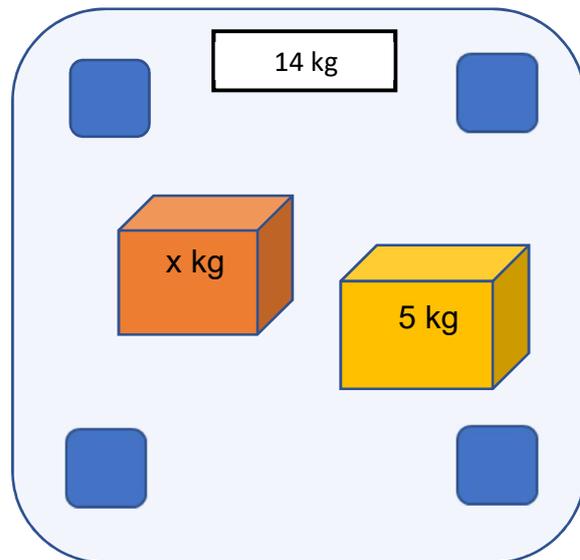
Inicialmente a professora disponibilizou aos alunos os objetivos propostos, para aquele conjunto de aulas, desenvolvidos a partir daquela aula:

- Identificar uma Expressão Algébrica;
- Identificar uma equação;
- Identificar termos (com e sem incógnitas);
- Identificar membros de uma equação;
- Distinguir equações lineares e não-lineares;
- Identificar as soluções de uma equação;
- Identificar equações equivalentes.

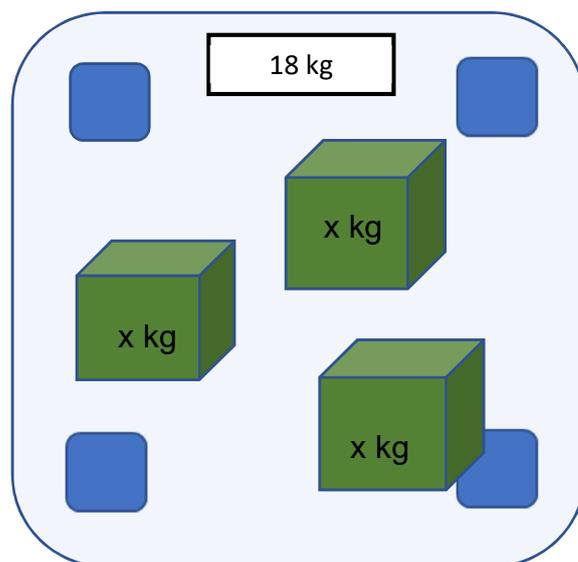
Ponto de partida: A aula se desenvolveu a partir de situações-problema.

1. Descubra o número racional que torna as afirmações verdadeiras:
  - a)  $? + 5 = 8$
  - b)  $-4 \div ? = 1$
  - c)  $? \times 7 = 1$
  - d)  $? + 6 = 0$
2. Escreve a igualdade que cada figura sugere e descubra o valor de  $x$  em cada caso:

a)



b)



Obs.: Originalmente, os desenhos acima eram fotografias de balanças de banheiro. Os retângulos superiores representam o valor que aparece no visor da balança.

3. Qual o valor que não se conhece nas igualdades abaixo?

a)  $7x = 0$

b)  $x^2 = 25$

c)  $\frac{2}{5}y = 2$

d)  $2x = x - 3$

e)  $x^2 = -1$

f)  $5x = 3$

4. a) Qual a área de um retângulo que tem 26,3 cm de base e 10 cm de altura?
- b) A igualdade  $54 = 9 \cdot h$  permite determinar a altura de um retângulo que tem 9 cm de base e  $54 \text{ cm}^2$  de área. Determinar o valor de  $h$ .

A professora Tânia promoveu um diálogo coletivo com os alunos. A todo instante buscava a participação de vários alunos, confrontando-os, inquirindo-os e permitindo uma participação efetiva de grande parte dos alunos na resolução das situações propostas.

Embora a aula tenha sido motivada por situações problemáticas, sua dinâmica não pressupunha uma atividade de Resolução de Problemas como a pretendida por nós. Os problemas eram resolvidos por uma parceria entre a professora e o aluno, quando esse último era desafiado a mostrar suas estratégias de resolução, enquanto a professora registrava, no quadro, as respostas verbais dos alunos.

Uma a uma, todas as atividades propostas foram executadas durante esses diálogos e, ao final delas, a professora pôde definir Expressões Algébricas, relacionando constantes e variáveis, e apresentar alguns exemplos, além de definir e exemplificar Equações Lineares, realçando a distinção entre membros e termos de uma equação.

Durante a aula pôde-se perceber, claramente, alguns momentos de avaliação, com a professora tentando compreender os processos de resolução da atividade por parte dos alunos, intervindo imediatamente. Como no caso da questão 2, item b:

Professora: *Aluno 1, qual o valor de cada peso sobre a balança?*

Aluno 1: *Hum... os pesos são iguais?*

Professora: *O que sugere o problema?*

Aluno 1: *Não percebi*<sup>20</sup>...

Professora: *Parece-te que sejam diferentes?*

Aluno 1: *Não sei, os valores são desconhecidos.*

Professora: *Alguém pode auxiliar o Aluno 1?*

*Vários alunos levantaram a mão e a professora apontou para um aluno e disse:*

Professora: *Aluno 2, os pesos são diferentes?*

Aluno 2: *Não, os volumes possuem o mesmo peso.*

Professora: *Como sabes? O Aluno 1 lembrou que são valores desconhecidos.*

Aluno 2: *Todos os volumes estão marcados com  $x$  kg, se fossem pesos diferentes, estavam a marcar letras diferentes para cada peso.*

Professora: *O que achas, Aluno 1, disso que falou o Aluno 2.*

Aluno 1: *Concordo com ele!*

Professora: *Diga, pois, qual é o valor de cada peso.*

Aluno 1: *São 3 pesos iguais. Devo dividir por 3?*

Professora: *Pois...*

Aluno 1: *O valor de  $x$  é 6.*

A professora volta-se para a sala e questiona: *Concordam com ele?*

Podemos notar, por esse exemplo, que a professora utiliza bem a situação proposta para avaliar numa perspectiva formativa bastante próxima àquela que buscamos, lembrando que essa foi a primeira aula e procurávamos perceber intersecções entre a atividade docente realizada pela professora e a atividade

---

<sup>20</sup> O aluno disse “não percebi” com o sentido de “não entendi”.

que esperávamos que fosse desenvolvida numa aula que utilize a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

## **A AVALIAÇÃO DIALÓGICA DA PROFESSORA TÂNIA**

Ainda durante a fase de ambientação, pudemos presenciar uma aula onde a professora Tânia se propunha a desenvolver algumas atividades tipicamente avaliativas. Inicialmente, ela disponibilizou no quadro os objetivos para aquela aula:

- Identificar equações equivalentes;
- Correção de testes;
- Autoavaliação.

A aula 88 procurava dar um fechamento às aulas 86 e 87, ao passo que também encerrava o segundo período letivo do ano 2017/2018.

A partir de uma abordagem dialógica, a professora convida seus alunos ao diálogo, questionando sobre aspectos discutidos nas aulas anteriores. Essa é uma prática que se repetiu durante todo o terceiro período letivo, quando participamos das aulas da professora Tânia.

Além da presença dos aspectos formativos inerentes a uma avaliação dialógica, a professora fazia anotações sobre a qualidade das respostas dos alunos com a finalidade de pontuar somativamente a atividade.

Essa conversa aparentemente informal, entre a professora e os alunos, servia, além do objetivo avaliativo, aos propósitos de revisão dos conteúdos matemáticos e de inserção de pequenos conceitos àqueles anteriormente trabalhados.

A participação da sala de aula, nesse tipo de abordagem, é imprescindível e pudemos perceber que a turma correspondeu às expectativas. Por outro lado,

a professora Tânia permanecia atenta e chamava, nominalmente, aqueles alunos que não se manifestavam espontaneamente a participar da discussão.

Observemos essa sequência dialógica:

Professora: *Aluno A, quando uma equação é linear?*

Aluno A: *É quando possui uma única solução.*

A professora vai ao quadro, escreve:  $1 = \frac{2}{x}$  e pergunta:

Professora: *Esta é uma equação linear?*

Aluno A: *Não!*

Professora: *Pois! Mas ela possui apenas uma solução. Aluno A, lembra da função linear...* (a função linear, em Portugal, é definida por  $f(x) = ax + b$ , com  $a \neq 0$ ; se  $b = 0$ , a função  $f(x) = ax$  é chamada função afim; e se  $a = 0$ , a função  $f(x) = b$ , é chamada função constante)

Aluno A (parecendo não estar convicto): *O expoente é... um?*

Professora: *Não sei, tu que estás a dizer. Alguém ajuda?*

Aluno B: *A função linear é a função  $ax + b$ , se  $a$  é igual a zero, a função é constante e linear...*

Professora: *Percebeu Aluno A? Agora responde, quando uma equação é linear?*

Aluno A: *Quando ela tem a forma de uma função linear.*

E assim, através desses questionamentos e da resolução oral de equações simples, a professora propôs a seguinte atividade:

“Indica a solução de cada uma das equações:  $x + 3 = 7$  e  $2x = 8$ ”.

Professora: *Qual a solução da primeira equação?*

Sala: *Quatro!*

Professora: *E qual a solução da segunda equação?*

Sala: *Quatro!*

Professora: *Elas são iguais Aluno C?*

Aluno C: *Não, mas têm a mesma solução.*

Professora: *Pois. O mesmo valor soluciona as duas equações. Existe um nome para quando dois elementos possuem o mesmo valor. No caso das equações, chamamos “equações equivalentes”.*

A professora então colocou na tela a formalização do conceito:

*“Equações Equivalentes são equações que possuem a mesma solução”.*

Depois disso, a professora Tânia indicou aos alunos quais exercícios deveriam ser resolvidos como “atividade autônoma”.

Terminada essa etapa da aula, a professora Tânia devolveu aos alunos os testes, que foram realizados na aula do dia 9 de março de 2018 (uma aula antes do início de nossas atividades de pesquisa), já corrigidos para que os alunos realizassem uma “autoavaliação em pares”. Para essa atividade, a professora dividiu a turma em dois grandes grupos e indicou os pares nomeadamente, de modo que o aluno com melhor desempenho fosse o parceiro do aluno com o desempenho mais sofrível e assim, sucessivamente com toda a classe.

Dáí, propôs que cada aluno tivesse “dois minutos para reflexão sobre os testes”, antes de se reunirem para que o colega com melhor desempenho pudesse auxiliar naquilo que ela chamou de “autogestão” da correção. Nesse momento, os alunos com melhor desempenho auxiliavam os alunos com maiores dificuldades a fazer uma correção dos erros cometidos. O fruto desse trabalho deveria ser a devolução dos testes (prova) corrigidos e que seriam anexados ao portfólio de atividades do período.

### 7.2.1. O Projeto Criado

Este Projeto foi desenvolvido durante um período letivo de um trimestre. Duas importantes etapas foram desenvolvidas durante o terceiro período de aulas de Matemática de um sétimo ano, de responsabilidade docente da Professora Tânia.

A primeira etapa, consistiu no acompanhamento diário da rotina de sala de aula, com observação constante do pesquisador e anotação permanente das práticas docentes adotadas (tanto de ensino quanto de avaliação). Foi utilizado um gravador de áudio ambiente para auxiliar o pesquisador no processo de análise das atividades matemáticas trabalhadas em sala de aula.

A segunda etapa consistiu na aplicação, pela Professora Tânia, da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Cinco problemas foram elaborados para a utilização em sala de aula, como problemas geradores em situações de aprendizagem. A utilização dos problemas enunciados a seguir implica a colaboração intensa do pesquisador no desenvolvimento da aula, conforme acordo firmado pela Professora Tânia e o Pesquisador antes da elaboração deste projeto.

#### **O primeiro problema:**

Resolva o seguinte problema

Um livro custa € 1,00 mais a metade do seu preço. Qual é o preço do livro?

#### **O segundo problema:**

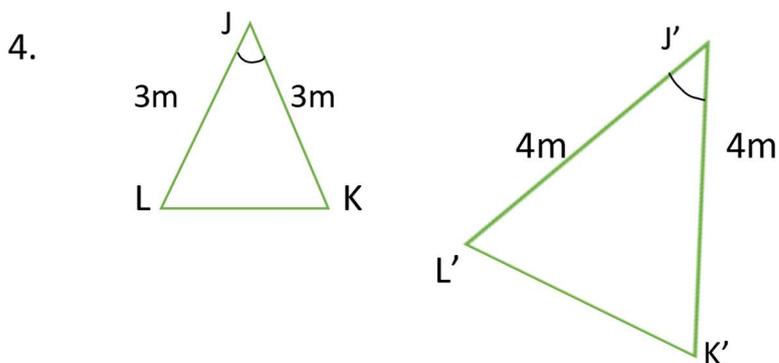
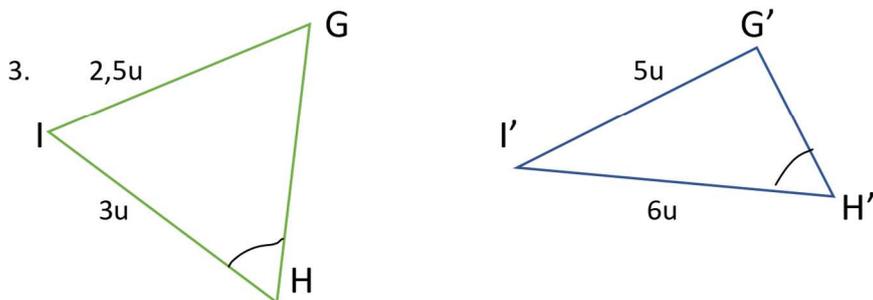
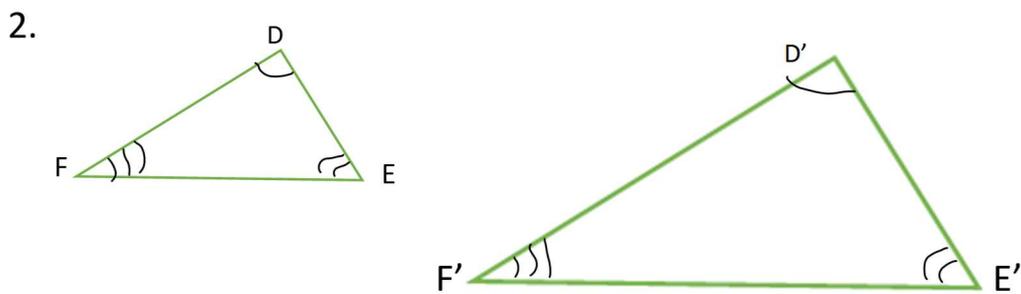
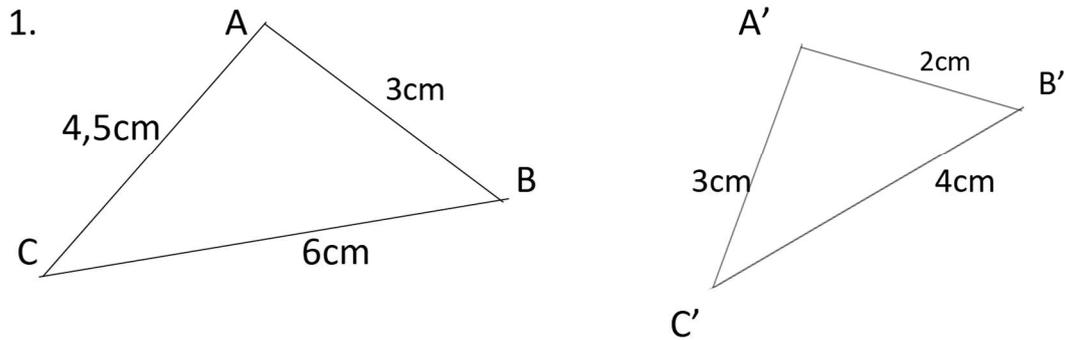
Resolva o seguinte problema: A idade do professor

A idade do jogador Cristiano Ronaldo é a metade da idade do professor Márcio, mais 10 anos. Sabendo que o jogador tem 33 anos, qual é a idade do professor?

### O terceiro problema:

#### Problema dos triângulos semelhantes

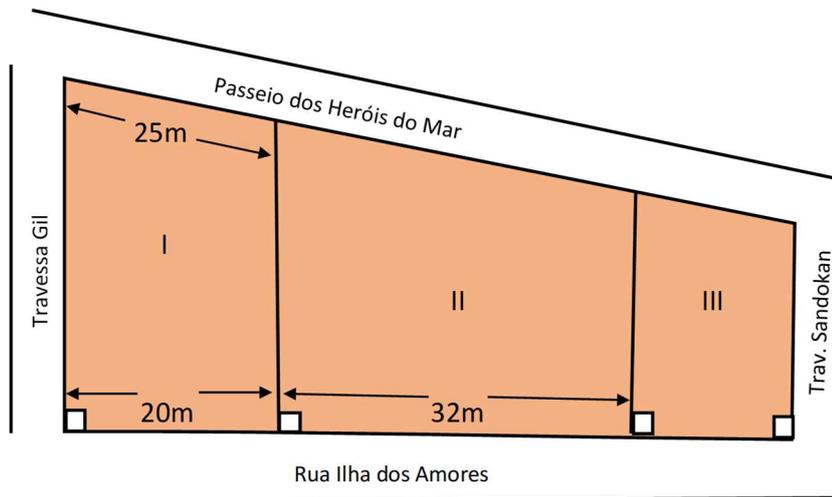
Observem os triângulos abaixo. Quais são semelhantes? Expliquem o raciocínio que utilizaram.



### O quarto problema:

Problema “O Muro do Terreno”

O desenho abaixo mostra 3 terrenos, identificados como I, II e III.

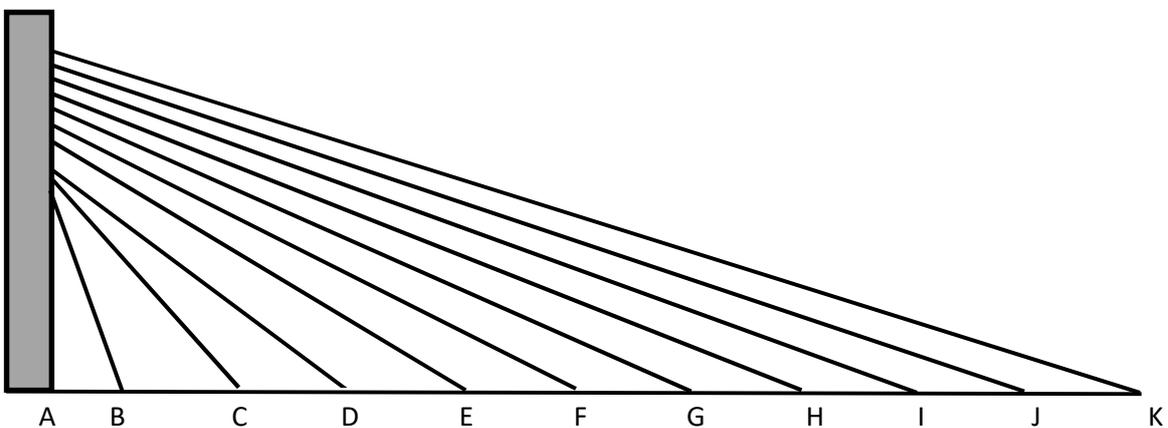


Qual é o comprimento do muro que o proprietário do terreno II deverá construir para fechar o acesso do terreno com o Passeio dos Heróis do Mar?

### O quinto problema:

Problema “A Ponte Vasco da Gama”

O desenho abaixo é inspirado na Ponte Vasco da Gama. Ele representa um dos pilares da ponte, embora possua um número menor de ligações entre a “grande viga” e a ponte. Sabemos que a distância entre os pontos A e B é igual a 2m, a partir de então a distância entre 2 pontos consecutivos mede sempre 3m.



Nessas condições, queremos saber:

1. Qual a distância entre os pontos A e K?
2. A Ponte Vasco da Gama possui 24 ligações entre o pilar e a ponte. Qual seria a distância entre a base do pilar e a 24ª ligação?
3. Encontre a expressão algébrica da função que representa a distância de um ponto qualquer da ponte até a base A do pilar.
4. Qual é o domínio desta função? E o contradomínio?
5. Esboce no verso da folha o gráfico desta função.

Cada problema considerado deveria levar o aluno à construção de conhecimento matemático novo. Para tanto tivemos o cuidado de observar se eles iriam contemplar oportunidades de ensino, de aprendizagem e de avaliação. Como procuramos oportunidades de utilização da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas como instrumento de avaliação para a aprendizagem, segundo o ARG, tomamos como linha condutora na elaboração dos problemas as dez orientações propostas pelo documento “*Ten Principles for Assessment for Learning*” (ARG, 2002).

Outra preocupação foi a de, sempre que possível, contextualizar a situação problemática de modo que o aluno pudesse estar tanto mais comprometido quanto possível com a questão.

A observação realizada durante a aplicação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e durante as discussões em grupos buscarão perceber e identificar:

1. Estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução de problemas;
2. Dificuldades evidenciadas através de questões que colocam ao professor;
3. Erros realizados pelos alunos na resolução dos problemas;
4. Concepções errôneas de tópicos da matemática necessários à execução da atividade proposta;

5. Explicações apresentadas pelos alunos;
6. A compreensão matemática dos alunos acerca do conteúdo trabalhado;
7. Constatar a avaliação feita pelo aluno e pelo professor levando o aluno a aumentar seu conhecimento matemático.

A partir dessa observação, a intervenção do professor deverá favorecer e, pretensamente, promover a aprendizagem de matemática pelo aluno.

#### 7.2.1.1. O primeiro problema

Na verdade, o primeiro problema trabalhado foi proposto pela própria professora Tânia, que o enunciou verbalmente para o pesquisador. A partir daí, procuramos observar se o problema possuía as características necessárias para a nossa pesquisa.

Figura 12: Problema 1.

Resolva o seguinte problema

Um livro custa € 1,00 mais a metade do seu preço. Qual é o preço do livro?

Fonte: O Autor

O objetivo da aula seria *definir os Princípios de Equivalência para a resolução de equações*. Partindo do problema sobre o preço do livro, pretendia-se que o aluno construísse, a partir das ideias de equivalência de equações, a resolução de equações polinomiais do primeiro grau. Como o problema parecera adequado, concordamos com sua utilização na nossa pesquisa.

A aula 98 aconteceu no dia 13 de abril de 2018 e se iniciou com a professora Tânia resolvendo algumas pendências da aula anterior. Como a aula 97 fora sobre Expressões Algébricas, algumas dúvidas sobre a atividade autônoma dos alunos foram trabalhadas. Na última delas, a professora Tânia

pediu que um aluno fosse ao quadro e desenvolvesse a expressão que segue com o respectivo desenvolvimento:

$$\frac{2}{3}q - 3 - \left(\frac{f}{2} - 3\right) - 2(q + f) = \frac{2}{3}q - \cancel{3} - \frac{f}{2} + \cancel{3} - 2q - 2f = -\frac{4}{3}q - \frac{5f}{2}$$

Após ter escrito isso, o aluno foi inquirido:

Professora: *Como chegaste a este resultado?*

Jonas: *Eu fiz a distributiva...*

Professora: *E depois? Conta como chegamos ao resultado final.*

Jonas: *Depois... eliminei os opostos e operei dois terços de q menos dois q e a metade negativa de f menos 2 f.*

Professora: *Como chegaste aos denominadores?*

Jonas: *No primeiro caso, dois é como seis terços e no outro caso, dois é como quatro metades.*

Professora (voltando-se para a turma): *Perceberam o que fez o Jonas?*

Após essa etapa, a professora Tânia anunciou aos alunos que seria realizada uma atividade de resolução de problemas. Sem fornecer maiores detalhes, disse aos alunos que se reunissem em grupos de quatro pessoas. Isso possibilitou que fossem formados seis grupos com quatro alunos, mais um grupo com três alunos. Esses últimos, porém, foram distribuídos entre outros grupos de modo que tivemos três grupos com quatro alunos e três grupos com cinco alunos.

Por causa da restrição dos três alunos que optaram por não participar da pesquisa (não necessariamente por vontade própria, uma vez que seus pais não autorizaram a gravação de suas vozes em áudio), distribuímos os gravadores por quatro dos seis grupos, considerando que dois dos grupos formados

possuíam alunos que não participariam da pesquisa, embora tivessem realizado as atividades e participado das aulas normalmente.

A professora Tânia disse que entregaria uma folha para cada aluno contendo uma atividade matemática e que os alunos deveriam discuti-la no grupo e resolvê-la. Explicou que deveriam trabalhar colaborativamente e que os alunos teriam oito minutos para a conclusão da atividade.

Durante a primeira parte do trabalho, o professor pesquisador e a professora Tânia assumiram uma postura de observadores. O propósito era o de verificar possíveis dificuldades na resolução do problema. Antes mesmo que pudéssemos escolher um grupo para iniciar o trabalho de intervenção (questionamento – *feedback* – questionamento) alguns alunos começaram a clamar pela presença dos professores.

Esse processo é um dos momentos importantes de avaliação para a aprendizagem. Durante a intervenção, o professor precisa inquirir os elementos do grupo com a dupla finalidade de descobrir quais são suas dificuldades, seus possíveis erros ou concepções errôneas e/ou as possibilidades de encaminhamento da questão.

Rogério: *Professor, posso fazer uma regra de três?*

Professor Pesquisador: *Existe proporcionalidade?*

Rogério: *Desculpe, não percebi!*

Professor Pesquisador: *Alguém pode ajudar o Rogério?*

Como ninguém se manifestou, o professor continuou a perguntar.

Professor Pesquisador: *Para fazer uma regra de três, você precisa ter valores proporcionais, não é?*

Rogério: *Sim. Não dá para fazer assim.*

Betina: *Mas podemos usar uma função...*

Professor Pesquisador: *Como?*

Betina (escrevendo na folha): *y é igual a um mais a metade de x, então...*

Daf escreveu:

$$y = 1 + \frac{x}{2}$$

Professor Pesquisador: *Mas o que isso quer dizer?*

Betina: *Que o valor do livro depende de x?*

Professor Pesquisador: *Mas o que x está a representar?*

Carla: *O valor do livro.*

Betina: *Não! O valor do livro é representado por y.*

Carla: *Mas o problema está a dizer que o livro custa um euro mais a metade do valor do livro, que é x por dois.*

Professor Pesquisador: *É possível que ambos estejam corretos?*

... silêncio.

Professor Pesquisador: *Discutam o problema! Não se esqueçam que estão buscando um único valor!*

Esse diálogo evidencia como o processo de avaliação pode acontecer na forma de um processo de ensino, ao mesmo tempo em que o professor procura compreender as dificuldades dos alunos. O professor busca fornecer informações para que os alunos consigam encontrar um caminho tanto para a resolução do problema quanto para a construção de conhecimento novo ou para a correção de curso em tópicos que possam ter sido concebidos erroneamente.

Numa outra situação, a professora Tânia se aproxima do grupo, logo depois de ouvir um aluno dizendo:

Diego: *Não faz sentido nenhum! Aqui está a dizer que custa um euro...*

Então o aluno questiona:

Diego: *O livro custa um euro. Então qual é o seu preço? É um?*

Estevão: *Não! Ele custa um euro mais metade do seu preço...*

Professora: *Quem disse que é um euro o preço do livro?*

Diego: *Está aqui escrito.*

Professora: *Não! O livro custa um euro mais metade do seu preço. Certo?*

Diego: *Mas aqui está dizendo que custa um!*

Professora: *Na verdade, eu preciso desse preço. Então eu não sei o preço.*

Carlos: *Só se está em desconto!*

Diego: *Não tem desconto, o livro custa 1 euro.*

Roger: *O seu preço não custa um euro, a professora acabou de dizer.*

Professora: *Perceberam que tem “um mais” além do um euro?*

Após sair, a discussão no grupo continua:

Roger: *Se dissesse que um euro é, tipo, um quarto do preço do livro. Se dissesse isso, com a fração já dava para resolver. Fazia isso vezes quatro, dividia... mas não diz, não diz nada disso.*

Diego: *Eu acho que pode ser um euro e cinquenta centimos.*

Estevão: *Se calhar, são três euros.*

Carlos: *Tem um valor desconhecido!*

Roger: *Ah, já sei! Pode ser um euro mais  $x$  sobre dois. E isto vai ser igual a  $x$ . E vamos fazer essa conta, vai dar.*

Algum tempo depois, o Professor-Pesquisador achegou-se ao grupo e perguntou:

Professor-Pesquisador: *O que vocês fizeram aqui? Alguém pode me dizer?*

Estevão: *Não sei explicar.*

Carlos: *O que fizemos faz sentido?*

Professor-Pesquisador: *Deixe-me ver... você fez um euro mais metade de x é igual a x. Sim, isso faz sentido. Agora vejam, se você tem que essa primeira parte é igual à última, com um valor desconhecido, o que vocês têm?*

Carlos: *Hein... Não percebi o que está a perguntar.*

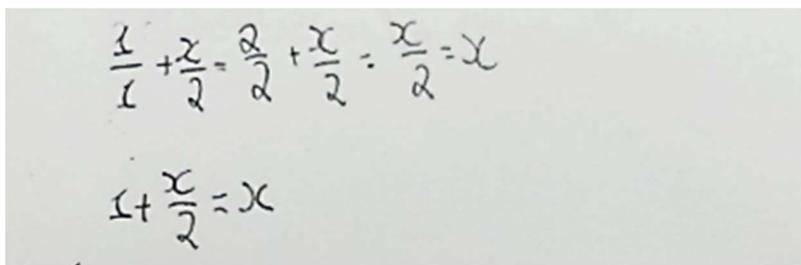
Professor-Pesquisador: *Isso (aponta para a equação), essa expressão, como se chama?*

Roger: *É uma equação.*

Professor-Pesquisador: *E como é que você pode encontrar o valor de x?*

Roger: *Ainda não vimos nada aqui.*

Figura 13: Parte 1 da resolução do problema pelo Grupo 2



$$\frac{1}{1} + \frac{x}{2} = \frac{2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = x$$

$$1 + \frac{x}{2} = x$$

Fonte: Dados da pesquisa

Depois que o professor saiu de perto do grupo, os alunos continuaram a debater sobre a resolução do problema:

Roger: *Nós podemos substituir valores e ver se vai dar uma igualdade. Nós podemos, por exemplo, quatro... quatro sobre dois...*

Carlos: *Não vai dar. Quatro dividido por dois é dois, mais um, não dá.*

Diego: *Professor!*

O professor pesquisador se aproxima, observa o trabalho dos alunos e diz:

Professor-Pesquisador: *Você está a dizer que isto (aponta para a expressão  $1 + \frac{4}{2}$ ) é igual ao valor do livro? Onde aparece, nesta expressão, o preço do livro?*

Estevão: *É o quatro!*

Professor-Pesquisador: *Ora, se o preço do livro é quatro, essa igualdade é verdadeira?*

Carlos: *Não é! Porque 3 não é igual a quatro.*

Roger: *x é dois! Só pode, x sobre dois é um, mais um, igual a dois.*

Figura 14: Segunda parte da resolução do problema pelo Grupo 2

$1 + \frac{4}{2} = 1 + 2 = 3$   
 $1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2$

} tentativa

O preço do livro é 2€

Fonte: Dados da pesquisa

Diego: *Mas eu não percebo por que esse é o custo.*

Professor-Pesquisador: *Você não percebe por que é esse o valor de x? O dois?*

Diego: *Mas o valor de x é dois?*

Professor-Pesquisador: *Segundo sua colega, sim! Agora veja, voltem ao enunciado do problema, considerem as informações dadas. O que diz lá?*

Estevão: *Que o preço do livro é a metade do seu preço mais um.*

Professor-Pesquisador: *E qual é o preço do livro?*

Diego: *É dois.*

Professor-Pesquisador: *E um euro mais metade do preço?*

Carlos: *Metade de dois é um, mais um euro, somam dois euros.*

Diego: *Ah! Percebi.*

Professor-Pesquisador: *Meninos, só mais uma coisa. Não se esqueçam que quando temos um problema dado numa linguagem corrente, vocês precisam dar uma resposta na linguagem corrente. OK?*

O tempo disponibilizado para essa aula não foi suficiente para todas as atividades previstas (isso ocorreu, em parte, pelo fato de a professora Tânia ter utilizado a etapa inicial da aula para tratar de assuntos relacionados à aula anterior). A aula 98 se encerrou com o término do tempo (que precisou ser estendido) dado para a realização da tarefa. As produções dos alunos foram recolhidas para evitar que se alterasse o trabalho realizado em sala de aula, e redistribuídas na aula seguinte.

A aula 99, ocorrida no dia 16 de abril de 2018, foi iniciada com a professora Tânia orientando os alunos quanto à confecção do dossiê avaliativo. Esse dossiê é um portfólio onde os alunos incluem todas as atividades avaliativas realizadas durante o período letivo. Esse portfólio deve trazer, além das provas, tanto diagnósticas quanto somativas (as realizadas para obtenção de notas), as correções realizadas através do processo de “auto-gestão” da correção das provas, atividades autônomas (que são as tarefas realizadas sem auxílio do professor) e as TPC (tarefas para casa). Há atividades autônomas que devem ser realizadas na sala de aula e outras que podem ser feitas em casa. Também são consideradas “atividades autônomas” quaisquer problemas e exercícios realizados além do que fora solicitado.

Em algumas aulas dessa escola, durante a realização de atividades autônomas, um outro professor de matemática entra, discretamente, na sala para auxiliar o trabalho dos alunos com maiores dificuldades.

Depois das orientações dadas pela professora Tânia, os alunos receberam de volta as produções realizadas na aula anterior, sobre a atividade de Resolução de Problemas trabalhada. Em ato contínuo, os grupos escreveram suas respostas no quadro.

Recordamos que cada elemento do grupo recebeu uma folha, porém a resposta final poderia ser dada em apenas uma das folhas. As respostas abaixo mostram a resposta final apresentada por cada um dos grupos.

Figura 15: Resolução do problema pelo grupo 1

$$1\text{€} + \frac{1}{2}\text{€} = 1\text{€} + 50\text{ cent.} = 1.50\text{€} \quad \times$$

$$\text{Preço do livro} = x = \frac{1x}{2} + 1 = x$$

$$1 = \frac{1x}{2} = 2 \times 1 = 2\text{€}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 16: Resolução do problema pelo Grupo 2

$$\frac{1}{1} + \frac{x}{2} = \frac{2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = x$$

$$1 + \frac{x}{2} = x$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \frac{4}{2} = 1 + 2 = 3 \\ 1 + \frac{2}{2} = 1 + 1 = 2 \end{array} \right\} \text{tentativa}$$

O preço do livro é 2€

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 17: Resolução do problema pelo Grupo 3

$$1 + \frac{1}{2} = 1,5 \text{ e } 0,75$$

$$1,5 + 0,75 = 2,25 \text{ €}$$

a soma de 1€ com o seu metade é igual a 1,5€  
 1,5 dividido por dois é igual a 0,75€ mas 1,5€ = 2,25€

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 18: Resolução do problema pelo Grupo 4

preço do livro?

Um euamais a sua metade dá um euro e meio, um euro e meio e mais a sua metade dá o preço total do livro: dois euros e vinte cinco.

$$1,00 + 0,50 = 1,50$$

$$1,50 : 2 = 0,75$$

$$1,50 + 0,75 = \underline{\underline{2,25 \text{ €}}}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Então, a professora Tânia disse:

Professora: *Agora vamos rapidamente ouvir os grupos. Nós vamos dar a palavra, mas não vamos confirmar se está certo ou não. Quem vai falar pode ter razão ou não.*

A partir de então, cada grupo defendeu sua resolução, contando como fora o processo de resolução do problema e o modo como chegaram à resposta.

Essa é uma etapa importante para a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa etapa da Metodologia, o processo de avaliação pode ser evidenciado, questionamentos podem ser feitos e tanto a resposta dos alunos quanto o feedback do professor são elementos importantíssimos para a apreensão de matemática nova e para o fortalecimento da matemática trabalhada anteriormente.

A resolução do problema realizada pelo Grupo 1 foi a escolhida pela sala como a “melhor resolução”. Por esse motivo, dedicaremos as linhas finais desse tópico para mostrar a discussão sobre essa resolução e sobre a formalização do conteúdo *Princípios de Equivalência*.

Quando escreveram sua resolução no quadro, o Grupo 1 omitiu a parte que aparece em sua resolução com um X, feito pelos próprios alunos, indicando que aquela parte estaria errada.

Professora: *Marina, conta para a sala como fizeste.*

Marina: *Primeiro pensamos sem realizar conta mesmo, mas depois realizamos a conta.*

Professora: *Erraram no início? Tentativas erradas? Passaram por isso?*

Marina: *Sim, sim, várias.*

Professora: *Então, qual foi a primeira ideia?*

Marina: *A primeira ideia nossa ao ler o enunciado... pensamos que era um e meio, porque era um euro mais meio. Depois pensamos melhor e vimos que a pergunta tinha um “rastapé”.*

Professora: *Vocês dizem isso, eu não sei o que é.*

Professor-Pesquisador: *“Rastapé” é uma pegadinha, uma armadilha?*

Marina: *Sim... e depois nós pensamos... se um livro custa um euro mais a metade do seu preço. Então isso é  $x$ . E nós verificamos que a metade do preço é o “um euro”, então o preço equivale a 2 euros.*

Professora: *Então, a conclusão que  $x$  é igual a 2 euros? Verificaram a validade da resposta?*

Marina: *Verificamos. Fizemos um mais dois dividido por dois, que é igual a dois.*

Após a apresentação das resoluções pelos grupos, a professora Tânia tomou a palavra e disse:

Professora: *Vamos tomar a resolução do grupo da Marina. Eles propuseram que a resposta para o problema era a resposta para a equação (e escreveu no quadro):*

$$1 + \frac{x}{2} = x$$

Professora: *O objetivo, na resolução de uma equação, é, mantendo uma relação de equações equivalentes, encontrar o valor de  $x$ . Pensem comigo, o que podemos tirar de ambos os membros da equação e ainda assim manter a igualdade? Ana? Betina? ...*

Rinaldo: *Podemos tirar “ $x$  sobre dois” dos dois membros.*

Professora: *Muito bem, por que tirar “ $x$  sobre dois”?*

Gabriel: *Se fizer isso, chega-se no que a Marina mostrou. (apontando à resolução do grupo 1 que indicava:  $1 = \frac{x}{2}$ ).*

A professora escreveu:  $1 + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x - \frac{x}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{x}{2}$  e perguntou:

Professora: *Pois... e agora? Como chegamos a uma equação equivalente a esta em que apareça a incógnita isolada em um termo?*

Mario:  *$x$  igual a dois é uma equação equivalente a essa, não é?*

Professora: *Sim, mas que operações podes realizar para chegar a ela?*

Mario: *Multiplica por dois.*

Então a professora Tânia escreve:  $1 \cdot 2 = \frac{x}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow x = 2$ .

E propôs a formalização:

Princípio da adição: Se  $a = b$ , então  $a + c = b + c$  e  $a - c = b - c$ .

Princípio da multiplicação: Se  $a = b$ , então  $a \cdot c = b \cdot c$ , com  $c \neq 0$ .

Antes de encerrar, ela questiona:

Professora: *Jonas, explica por que o  $c$  é diferente de zero.*

Jonas: *Multiplicar por zero vai tornar a expressão toda igual a zero.*

### **Discussão sobre a aula:**

A proposta inicial era desenvolver o tema em uma aula apenas mas a dinâmica de aula da Professora Tânia nos forçou a trabalhar o tema em duas aulas consecutivas. Ressaltamos que se a atividade tivesse sido proposta logo no início da aula, uma única aula seria suficiente para a aplicação.

O tempo de resolução de problemas pode ser bastante volátil. Embora possamos estimar o tempo necessário para a realização de uma tarefa, a aula pode nos indicar outras possibilidades. Nessa aula, a professora havia previsto que 8 minutos seria o suficiente para a resolução do problema pelos alunos. Porém, o tempo precisou ser estendido.

Pudemos perceber que alguns fatores influenciam no andamento da aula, como a compreensão do enunciado do problema, por exemplo. Alguns grupos não conseguiram compreender desde o início (e outros não conseguiram compreender) o enunciado do problema. É possível notar que eles confundiram o enunciado “um euro mais metade do seu preço” com “um euro mais metade” e que a metade dessa soma deveria ser adicionada ao valor de um euro.

Uma outra consideração importante é sobre a dificuldade de intervenção durante a aula. O professor precisa estar bastante preparado para a quantidade de situações distintas que podem surgir durante sua interação com os grupos. É preciso cuidar para que as dicas ou sugestões não indiquem a solução aos alunos. Observamos também que houve uma certa dificuldade em percorrer

todos os grupos, isso porque o tempo disponível para a realização da tarefa foi pequeno e assim é que é, por causa da responsabilidade que o professor tem em cumprir todo o programa curricular.

Nessa aula, em particular, um dos grupos não quis fazer a apresentação de sua resposta no quadro, por observar, durante a plenária, que sua resposta estava errada. Tal fato nos levou a incluir nos procedimentos da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas uma nova etapa: a eleição de um membro para relatar as ações do grupo durante a resolução do problema na discussão plenária.

#### 7.2.1.2. O Segundo Problema

O segundo problema havia sido escrito considerando a ideia de se trabalhar com os “Princípios de Equivalência”. Quando a Professora Tânia sugeriu a utilização do problema do preço do livro, esse problema seria descartado, mas ela insistiu que fosse utilizado para iniciar o tema “Equalização de Problemas”.

Figura 19: Problema 2.

Resolva o seguinte problema: A idade do professor

A idade do jogador Cristiano Ronaldo é a metade da idade do professor Márcio, mais 10 anos. Sabendo que o jogador tem 33 anos, qual é a idade do professor?

Fonte: O Autor

Assim como a aula 98 começou com uma síntese da aula 97, a aula 106, ocorrida em 30 de abril de 2018, foi iniciada com uma síntese da aula 105. Essa prática se repetiu durante todo o período em que observamos as aulas do sétimo ano. Nesse espaço, a professora Tânia promovia alguns diálogos onde questionava verbalmente aspectos da aula anterior. Esse momento nos pareceu bastante rico do ponto de vista da obtenção de informações para a avaliação.

Ao inquirir individualmente seus alunos, a professora vai construindo uma imagem cada vez mais precisa sobre suas identidades, sobre o modo como desenvolvem seus raciocínios e sobre como lidam com seus erros e acertos.

A segunda atividade de nosso projeto de aplicação se iniciou como outro qualquer, mas com um elemento a mais: a eleição de um elemento do grupo, por seus pares, para relatar a atividade ao final do processo. Esperávamos, com isso, diminuir ou eliminar a possibilidade de um grupo se recusar a descrever a resolução do problema durante a fase de plenária. Assim, dividimos os grupos, novamente, dando liberdade para que os alunos escolhessem seus parceiros. Dessa vez, permitimos que os grupos tivessem de dois a quatro elementos, criando assim uma gama de possibilidades mais diversa que na primeira atividade.

Os grupos foram formados de modo que dois grupos continham dois elementos, quatro grupos possuíam três elementos e mais dois grupos foram formados com quatro elementos. Além disso, dois grupos não puderam ter suas vozes gravadas por possuírem em sua formação um ou dois alunos que não estavam participando da pesquisa e um grupo não pôde ser gravado por falta de equipamento. Como possuíamos apenas cinco gravadores, eles foram distribuídos por cada um dos grupos restantes, mas não pudemos ter um gravador específico para capturar o áudio ambiente.

Com os grupos formados, uma folha com o problema foi distribuída para cada aluno, que foram novamente orientados sobre como proceder para a resolução do problema. A professora Tânia estimou um tempo de 6 minutos para a execução da tarefa.

Porém, diferentemente da primeira atividade, durante a leitura conjunta do problema, a professora Tânia tomou a palavra e sugeriu:

*Professora: Vejam, talvez esse problema pudesse ser resolvido através de uma equação, ou não.*

Esse comentário é contrário à orientação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

por fornecer algum indício de como encontrar a chave para o problema. É evidente que a preocupação da professora residia no fato de que ela estava a trabalhar o tema “equalização de equações” e pode ter sentido algum tipo de insegurança ou ansiedade com o resultado da aula, o que é compreensível e aceitável numa situação adversa à sua prática cotidiana.

Na prática, a dica da professora Tânia não facilitou a resolução do problema pelos alunos. Enquanto observávamos os alunos, notamos que há, também em Portugal, uma dificuldade de se compreender o enunciado dos problemas. Esse é um dos grandes obstáculos para a implementação de uma metodologia pedagógica que utilize a resolução de problemas – falo especificamente de problemas contextualizados. Mostra também a necessidade da leitura do problema pelo professor, conjuntamente com a turma, para diminuir riscos de que a má leitura e a não compreensão do enunciado influenciem a resolução do problema pelos alunos e, conseqüentemente, possam atrapalhar a construção do conhecimento matemático pelo aluno.

Este trecho da discussão realizada pelo grupo 1 ilustra a situação:

*Carina: A idade do jogador Cristiano Ronaldo é a metade da idade do Professor Márcio, mais dez anos. Sabendo que o jogador tem 33 anos, qual é a idade do professor?*

*Rinaldo: Qual é a idade do Ronaldo?*

*Andreia: A idade do Cristiano Ronaldo é a metade da do professor mais dez anos.*

*Carina: Sabemos que o Cristiano Ronaldo tem 33 anos.*

*Andreia: Sim, ele tem 33 anos... A idade do Cristiano Ronaldo é a metade da idade do professor mais 10 anos. Então é a metade, este é 33 mais 33 mais 10.*

*Edna: Então é 76.*

*Rinaldo: Olha a idade do jogador Cristiano é a metade da idade do professor Márcio. A idade do professor Márcio é...*

Carina: 76 anos.

Rinaldo: *Essa é fácil! Não sei se é rasteira ou não*

Carina: *Então... 33 é a idade do jogador, a idade do professor Márcio é  $33 + 33$ , que é a metade. A idade do Cristiano Ronaldo é... Espera...*

Depois de algum tempo, o Professor-Pesquisador se aproxima do grupo e questiona:

Professor-Pesquisador: *O que fizeram aí, podem me dizer?*

Andreia: *Fizemos 33 mais 33, que é a soma da idade do CR a outra metade mais dez.*

Figura 20: Primeira resolução do Problema 2 pelo Grupo 1.

The image shows two lines of handwritten mathematical work. The first line contains the equation  $33 + 33 = 66$ . The second line contains the equation  $66 + 10 = 76$ . Both equations are crossed out with diagonal lines.

Fonte: Dados da pesquisa

Professor-Pesquisador: *Vocês acham que eu tenho 76 anos? Uau! (risos)*

Andreia e Carina: *Não!*

Professor-Pesquisador: *Mas, não é isso que estão dizendo?*

Carina: *É o problema que está a dizer.*

Professor-Pesquisador: *Confirmam com o enunciado. Se a minha idade fosse 76 anos, a idade dele seria metade disso mais 10. Qual valor deve dar isso?*

Carina: *Metade disso mais 10 não dá 33.*

Professor-Pesquisador: *Percebeu isso, Aluno D? A idade dele é metade da minha mais dez.*

Estevão: *Então é 23. 23 mais dez é 33. A metade da sua idade é 23.*

Andreia: *A resposta é 46!*

Professor-Pesquisador: *Coloquem isso no papel!*

Mesmo tendo indicado a resposta corretamente, pudemos observar a dificuldade do grupo para matematizar sua resposta.

Rinaldo: *33 igual 23 mais dez e tudo isso vezes dois é 66. Opa, então não é isso. Eu sei a resposta só não sei explicar.*

Andreia: *Tu tinhas explicado...*

Rinaldo: *Olha, este aqui é a metade da idade do professor...*

Andreia: *Espera, primeiro vamos escrever a informação que temos. A idade do CR é metade de 33 mais 10. Não! É metade do professor mais 10.*

Professora: *Já acabou o tempo!*

Carina: *Nós já acabamos, mas não sabemos explicar a resposta.*

Professora: *Então escreva por palavras.*

Andreia: *É 46, né?*

Carina: *A metade da idade do CR mais dez, é metade da...*

Rinaldo: *não, se a idade do CR é 33 e se a metade da idade do professor é a idade do CR com o mais dez... Isso é igual a metade... Portanto tem que tirar. Tem que ser 23 mais dez, a idade do CR. E 23 mais 23 dá 46.*

Figura 21: Resolução final do Problema 2 pelo Grupo 1.

anos, qual é a idade do professor?  
 A idade do professor Márcio é 46, porque  
 Se a idade do CR é 33, o que é metade da idade  
 do prof Márcio mais 10, ou seja a metade da idade do  
 prof Márcio é 23, então a sua idade é 46.

Num outro grupo, formado por alunos com melhor desempenho que a maioria dos alunos, a resolução foi bastante rápida. Antes mesmo de se iniciarem as intervenções dos professores, um aluno chamou o Professor-Pesquisador e disse:

Mario: *O Professor tem 46 anos?*

Professor-Pesquisador: *Não sei! Já resolveram o problema?*

Gabriel: *Não, ainda não.*

Mario: *Já sim. Eu já sei a resposta.*

Gabriel: *Primeiro temos que discutir o problema.*

Mario: *É 46 a resposta.*

Gabriel: *OK! Pode ser 46, mas vamos analisar.*

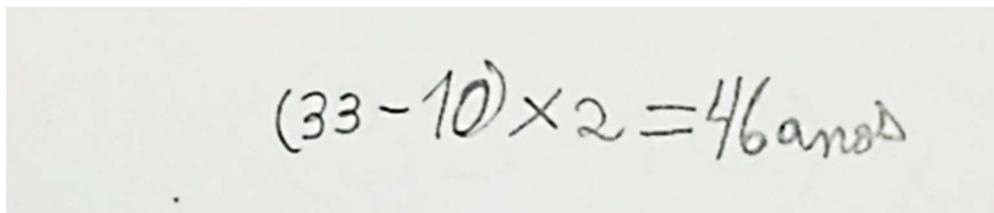
Mario: *Deixe-me apresentar a minha resposta...*

Rogério: *Deixa-nos pensar um pouco, se você já resolveu.*

Um breve silêncio é percebido no grupo e a discussão se reinicia:

Rogério: *Eu vou escrever aqui no papel. Mario, a expressão algébrica que eu fiz foi “33 menos dez, dentro dos parênteses, vezes 2”. Está certo?*

Figura 22: Resolução aritmética do Problema 2 pelo Grupo 2.


$$(33 - 10) \times 2 = 46 \text{ anos}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Mario: *Eu pensei que seria uma coisa difícil...*

Gabriel: *Eu também, igual ao último.*

Professor-Pesquisador: *Como vocês fizeram?*

Rogério: *Então... 33 é a idade do CR. Daí, tiramos dez e depois fizemos o dobro. Está certo?*

Professor-Pesquisador: *Se não estiver errado, está correto. (risos) O que vocês acham?*

Gabriel: *Que está certo.*

Professor-Pesquisador: *Fizeram uma retrospectiva do problema?*

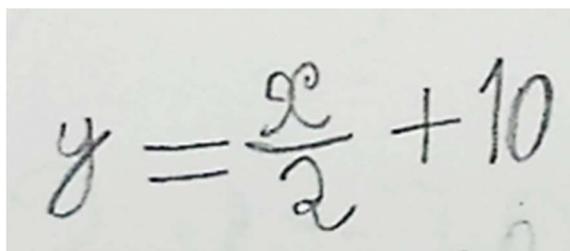
Mario: *Sim, e deu.*

Professor-Pesquisador: *Já que vocês acabaram rapidinho, conseguem fazer a partir de uma equação? Posso lançar esse desafio para vocês?*

Rogério: *Sim, eu até me arrisquei a fazer...*

Mario: *Não, não! Literalmente, é copiar isto com letras ao invés de números. Então, considerando que a idade do Ronaldo é y menos dez, vezes dois é igual a x. Já está, é muito fácil! (risos). “Dois y menos 20 é igual a x, que comparado é y igual a x sobre dois mais dez”.*

Figura 23: Primeira equalização da resposta do Problema 2 pelo Grupo 2.



$$y = \frac{x}{2} + 10$$

Fonte: Dados da pesquisa

Gabriel: *Mas o valor de y nós conhecemos, é a idade do Ronaldo.*

Rogério: *Então a equação é 33 igual a x por dois mais dez.*

Figura 24: Resolução algébrica do Problema 2 pelo Grupo 2.

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{x}{2} + 10 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 33 &= \frac{x}{2} + 10 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 33 - 10 &= \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 23 &= \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 23 \times 2 &= x \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 46 &= x
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

A discussão plenária, mais uma vez, precisou ser realizada na próxima aula.

A aula 107 aconteceu no dia 2 de maio de 2018. Antes de retomar as atividades da aula 106, a Professora Tânia colocou no quadro os objetivos para aquela aula:

- Resolver equações;
- Classificar equações;
- Resolver equações com denominadores e parênteses;
- Formalização;
- Problemas envolvendo equações.

Depois, iniciou um processo de verificação de atividades autônomas realizadas pelos alunos e retornou ao tema “Equalização de problemas”. Pediu

que cada grupo colocasse diferentes resoluções no quadro. Um elemento de cada grupo escreveu sua resolução no quadro, totalizando três resoluções distintas.

As seguintes figuras mostram cada uma das soluções colocadas no quadro (essas imagens foram obtidas pelo arquivo gerado pelo programa de gerenciamento do quadro eletrônico, o *ActivClassroom*):

Figura 25: Resolução do Problema 2 pelo grupo 2.

$$(33-10) \times 2 = 23 \times 2 = 46$$

$$x = 46$$

$$y = \frac{x}{2} + 10 \Rightarrow$$

$$B = \frac{x}{2} + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 23 = \frac{x}{2} \Rightarrow 46 = x$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 26: Resolução do Problema 2 pelo Grupo 3.

$$33 \times 2 + 10 = 76$$

$$\frac{x}{2} + 10 = 33 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{2} + 10 = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 20 = 66 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -20 + 66 = 46 \text{ anos}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 27: Resolução do Problema 2 pelo Grupo 4.

$$33 + 10 = 43 \times 2 =$$

$$= 8 \quad (:$$


---


$$33 \times 2 = 66 - 10 = 56$$

$$33 \times 2 = 66 + 10 = 76$$

Fonte: Dados da pesquisa

O Grupo 1 não quis colocar sua resposta no quadro, argumentando que havia uma resposta igual à deles, mesmo argumento utilizado pelos Grupos 5 e 6. Na verdade, a resposta dada pelo Grupo 1 foi diferente de todos os outros grupos. Esse tipo de atitude nos evidencia uma certa insegurança com relação à validade de sua resposta. É possível observar (vide a Figura 20) que embora a resposta do grupo não tenha sido expressa por meio de uma equação, ela é válida e responde corretamente à pergunta realizada no problema.

Com a resposta no quadro, cada grupo defendeu sua solução explicando, passo a passo, o processo de resolução adotado. Consensualmente, a solução do Grupo 2 foi eleita a mais adequada para o problema, além de concluírem que a resposta dada pelo Grupo 4 estava incorreta.

Professora: *Por que a resposta do Grupo 2 é a mais fixe<sup>21</sup>?*

Talita: *Porque é mais fácil resolver por meio de uma equação.*

<sup>21</sup> Gíria portuguesa que significa legal, bacana.

Professora: *Sim. Sempre que pudermos equalizar um problema, devemos fazê-lo. Isso significa, escrever o problema através de uma expressão algébrica que contém os dados do problema nela.*

Professora: *Podemos reescrever essa resolução para que possamos melhor visualizar o que foi feito?*

Em ato contínuo, a Professora Tânia colocou uma ilustração com o problema e a sua resolução, passo a passo, contando com a colaboração da sala para transcrever a resposta dada pelo Grupo 2.

Figura 28: Resolução do Problema 2 pela Professora Tânia.

**A idade do jogador Cristiano Ronaldo é a metade da idade do professor Márcio, mais 10 anos. Sabendo que o jogador tem 33 anos, qual é a idade do professor?**

Seja  $x$  anos a idade do professor.

Equação

$$33 = \frac{x}{2} + 10 \Leftrightarrow 33 - 10 = \frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 23 = \frac{x}{2} \xrightarrow{(\times 2)} 46 = x \quad R: \text{A idade do professor é } 46 \text{ anos}$$

Fonte: Dados da pesquisa

A Juliana levanta a mão e questiona:

Juliana: *Eu poderia ter feito “menos  $x$  sobre dois igual a menos 33 mais dez”?*

Professora: *Estaria correto, mas não é o melhor para si. Não é prudente operar com os valores negativos, embora esteja correto.*

Então, a Professora Tânia propôs dois outros problemas como um reinvestimento do conteúdo trabalhado.

- 1) A diferença entre o comprimento de um retângulo e a sua largura é 20 cm. Quais as suas dimensões, sabendo que o perímetro é 120 cm?

Figura 29: Resolução do Problema

1.º método	2.º método
<div style="text-align: center; border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;">P = 120</div> $x$ → (20) $x+20$ → 40 Equação $2x + 2(x+20) = 120$ $2x + 2x + 40 = 120$ $4x + 40 = 120$ $4x = 120 - 40$ <hr/> $4x = 80$ $x = \frac{80}{4} = 20$ $\Rightarrow x+20 = 20+20 = 40$	<div style="text-align: center; border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px 10px;">P = 120</div> $x-20$ → (20) $x$ → (40) Equação $2x + 2(x-20) = 120$ $2x + 2x - 40 = 120$ $4x - 40 = 120$ $4x = 120 + 40$ <hr/> $4x = 160$ $x = \frac{160}{4} = 40$ <div style="color: red; font-weight: bold; margin-top: 10px;">R: As dimensões são: 20cm e 40cm</div>
<div style="text-align: right; padding-right: 10px;"><math>x-20 =</math></div> <div style="text-align: right; padding-right: 10px;"><math>= 40 - 20 =</math></div> <div style="text-align: right; padding-right: 10px;"><math>= 20</math></div>	<div style="text-align: right; padding-right: 10px;"><math>x-20 =</math></div> <div style="text-align: right; padding-right: 10px;"><math>= 40 - 20 =</math></div> <div style="text-align: right; padding-right: 10px;"><math>= 20</math></div>

Aqui, a resolução do problema foi realizada pela professora, numa ação dialogada com a turma. A professora vai tecendo observações acerca do problema e questiona seus alunos, individualmente, a respeito dos passos e das decisões tomadas. Quando um aluno não consegue responder às suas perguntas, ela pede que outro aluno o auxilie, respondendo à questão.

Professora: *Marco, percebeu que o valor de x se refere ao menor lado no primeiro método e se refere ao lado maior no segundo método?*

Marco: *Não percebi, professora. Nos dois casos o que procuramos é o valor de x.*

Professora: *Gabriel podes ajudar a sua colega?*

Gabriel: *O que eu percebi é que temos dois valores desconhecidos, se eu os chamar de x e x mais 20, o lado que mede x é menor. Mas posso chamar o lado maior de x, nesse caso, o menor é 20 cm menor. Nos dois casos, há um lado maior e outro menor, o que muda é como o chamamos.*

- 2) A Margarida tem 16 anos e a sua irmã Teresa tem 6 anos. Daqui a quantos anos terá a Margarida o dobro da idade da sua irmã?

Figura 30: Resolução do Problema

Seja  $x$  anos que terão de passar.

	Marg.	Teresa
Presente	16	6
Futuro	$16+x$	$6+x$

Equação  $16+x = 2 \times (6+x) (\Rightarrow)$   
 $(\Rightarrow) 16+x = 12+2x (\Rightarrow)$   
 $(\Rightarrow) 16-12 = 2x-x (\Rightarrow) 4 = x$

$16 - 6 = 10$   
 $10 - 6 = 4$

R: Terão de passar 4 anos.

### Discussão sobre a aula:

Algumas considerações a respeito dessa aula são importantes. Inicialmente observamos a dificuldade para trabalhar com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas quando o tempo é reduzido. Apesar da atividade ser bastante simples, pelo fato de não se tratar de um assunto completamente inédito aos alunos, sentimos necessidade de um tempo maior para realizar as intervenções que nos parecessem importantes.

A avaliação, mesmo na perspectiva de uma avaliação para a aprendizagem, que acontece simultaneamente com as atividades de sala de aula também ficaram prejudicadas.

A partir dessa aula, tivemos acesso aos registros das atividades realizadas no quadro eletrônico. Isso tornou a experiência de pesquisa bastante mais rica. Pudemos simplesmente copiar a resolução dos alunos no quadro e assim dedicamos maior atenção às gravações e a pequenos detalhes, registrados em caderno de pesquisa, que complementaram a obtenção de evidências. Em alguns momentos, as anotações corroboraram os áudios e

noutros complementaram informações ou ajudaram na compreensão do que fora dito.

No que tange à Metodologia Pedagógica em si, uma observação inocente da professora certamente alterou o desenvolvimento do trabalho (no sentido do que esperávamos que acontecesse na aula), mas não atrapalhou na pesquisa em si. A maioria dos grupos principiaram suas estratégias por um viés aritmético e a solução escolhida como a mais relevante só surgiu após alguma intervenção.

A contagem regressiva colocada no quadro é, em certa medida, um fator desestruturante na medida em que pode gerar ansiedade nos alunos pelo término da resolução do problema.

Ao final das contas, nessas duas aulas, a avaliação para a aprendizagem foi bastante tímida, pelos fatores expostos. Não que não tenha acontecido. A avaliação para a aprendizagem ocorre a todo instante, a cada feedback dado, em todo questionamento realizado. Não se trata apenas do registro escrito ou do diálogo que se desenvolve, envolve a percepção do olhar, da fisionomia, da tonalidade da voz ao dar uma resposta, o silêncio diante de uma pergunta, a reação diante de uma dica, etc. No caso da avaliação, a pressa, a necessidade de se encerrar logo um determinado conteúdo, pode restringir o potencial de aprendizagem que dela pode verter.

### **7.2.1.3. O Terceiro Problema**

O terceiro tema a ser trabalhado tinha como objetivo Determinar os Casos de Semelhança de Triângulos. Essa atividade foi iniciada na Aula 117, ocorrida no dia 21 de maio de 2018. Antes disso, porém, na Aula 113, a Professora Tânia expôs, no quadro, os objetivos para aquele conjunto de aulas:

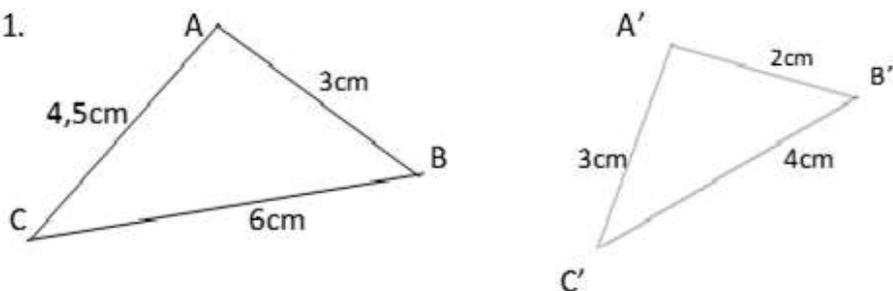
- Identificar figuras semelhantes;
- Identificar figuras congruentes ou isométricas;
- Saber determinar a razão de semelhança entre duas figuras;
- Saber Identificar figuras congruentes, ampliadas e reduzidas.

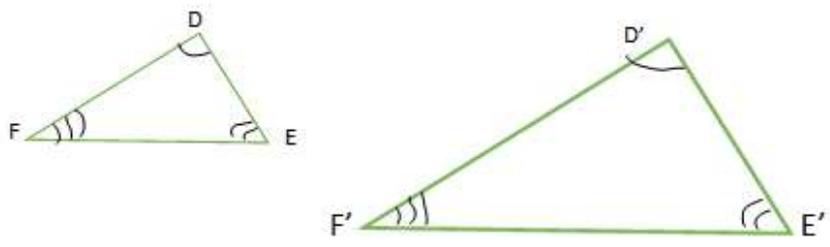
Por compreender que um problema, para ser problema, não precisa estar necessariamente contextualizado, nos propusemos a trabalhar com algum caso eminentemente matemático. Propusemos, portanto, o problema:

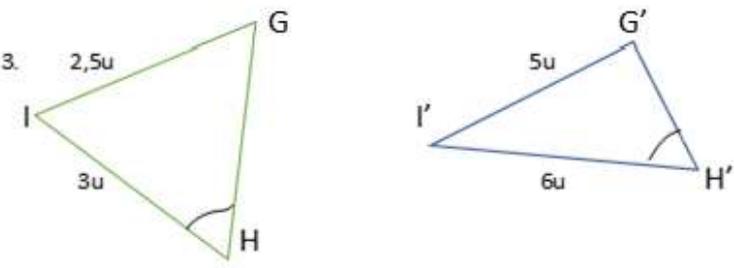
Figura 31: Problema 3.

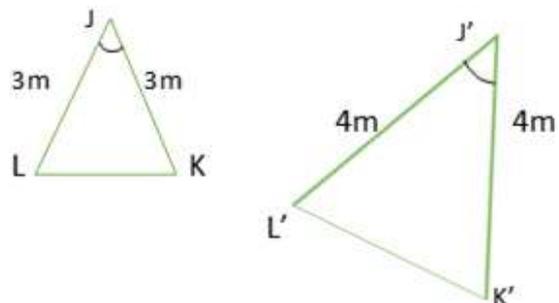
**Problema dos triângulos semelhantes**

Observem os triângulos abaixo. Quais são semelhantes? Expliquem o raciocínio que utilizaram.

1. 

2. 

3. 

4. 

Por causa das diferenças nas indicações dos ângulos, a professora comunicou que ângulos com um número de marcações iguais, num mesmo item, embora em triângulos distintos, indicava que aqueles ângulos eram congruentes.

Antes disso, a sala foi dividida em grupos. Dessa vez, a Professora Tânia trouxe para a aula a formação dos grupos. A ideia dela foi a de diminuir o número de grupos para dinamizar a discussão plenária. Gravamos o áudio de 4 grupos com 5 alunos e mais um grupo com 4 alunos.

A professora distribuiu a atividade e os trabalhos se iniciaram. O Grupo 1 foi o primeiro a sofrer intervenções do Professor-Pesquisador:

Melissa: *Este com este tem um lado igual.*

Ricarda: *Esses dois com os ângulos todos iguais são semelhantes e este outro não é!*

Carina: *Mas eles não são iguais.*

Ricarda: *Não precisam ser iguais...*

Melissa: *No primeiro não são, porque nenhum dos critérios se verifica.*

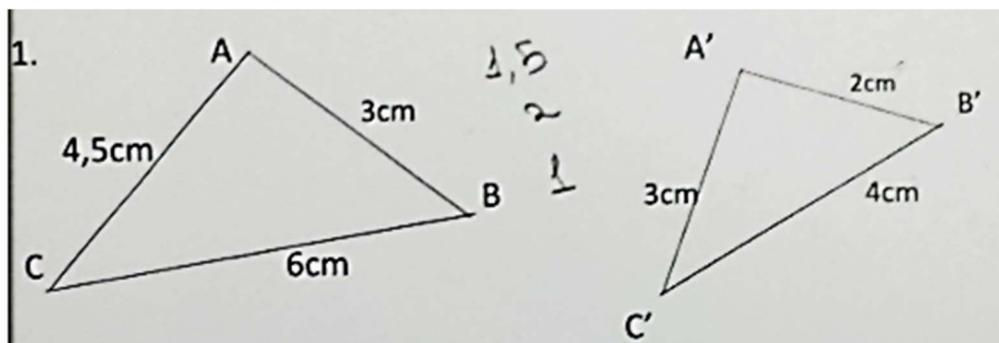
Ricarda: *Mas não são esses.*

Melissa: *Então, quais é que são?*

Ricarda: *Tem que fazer a razão para justificar.*

Melissa: *Quatro e meio para três é menos um e meio, seis para quatro é menos dois e três para dois é menos um.*

Figura 32: Primeira solução do item 1 pelo Grupo 3.



Fonte: Dados da pesquisa

Professor-Pesquisador: *O que fizeste?*

Melissa: *Estava a fazer as razões para saber se são proporcionais.*

Professor-Pesquisador: *O que significa dizer que são proporcionais?*

Melissa: *É que... as razões são iguais.*

Professor-Pesquisador: *E o que é razão?*

Melissa: *É a diferença entre os valores.*

Professor-Pesquisador: *Carina, você concorda com a Melissa?*

Carina: *Eu ainda não percebi o que é razão, professor.*

Ricarda: *Professor, eu percebo que razão é a divisão do lado de um polígono pelo lado correspondente do outro...*

Professor-Pesquisador: *Na verdade, a razão pode ser expressa por “a sobre b”, que lemos “a está para b”. Mas ela é um tipo de relação comparativa, a multiplicativa, realizada em elementos de mesma grandeza. Perceberam?*

Carina: *Acho que sim...*

Professor-Pesquisador: *E o que é mesmo uma proporção?*

Ricarda: *Uma igualdade de razões.*

Após sair de perto, o Grupo 1 continuou a discussão:

Ricarda: *Não são diretamente proporcionais.*

Melissa: *O dois e o quatro são iguais.*

Ricarda: *Professora temos uma dúvida. São esses os critérios?*

Professora: *Mas quem disse que são esses?*

Ricarda: *Os critérios de igualdade são esses?*

Professora: *Mas aqui não são igualdades, não quero triângulos iguais, mas semelhantes. Os ângulos precisam ser congruentes... com medidas iguais...*

Melissa: *Estes ângulos não são iguais, estão marcados diferente.*

Ricarda: *Mas só estão marcados para falar que esses ângulos são iguais. Não importa que estejam parecendo diferentes.*

Esse trecho evidencia o modo como se pode interferir na construção do conhecimento do aluno sem fornecer elementos que possam desvendar a solução do problema. O Professor-Pesquisador procura intervir, tanto quanto possível, através de questionamentos e incentiva os alunos a contribuir com discussões do grupo. Quando os alunos respondem às perguntas com argumentos aparentemente sólidos, o professor busca reorganizar o raciocínio dos alunos, devolvendo-lhes as informações por eles prestadas e as complementa com uma nova questão, que fora feita para buscar evidências sobre a validade da intervenção realizada, pretendendo perceber se a intervenção ocorrera de maneira eficaz.

Por sua vez, os elementos do Grupo 2, aparentemente mais seguros sobre os conceitos envolvidos na questão, discutiam:

Jonas: *Então vamos começar a ver a razão de tudo, ok?*

Juliana: *Mas vamos fazer em conjunto.*

Jonas: *Cada um faz resolvendo um par de triângulos, que é para ser mais rápido.*

Juliana: *E se a pessoa tem dificuldade? Vamos fazer todos juntos!*

Emílio: *Verdade!*

Juliana: *Eu escrevo e vocês vão dizendo. Pode ser?*

Emílio: *Pode ser...*

Jonas: *Quatro e meio dividido por três...*

Emílio: *Não! Não é assim!*

Jonas: *É assim sim! É igual a nove sextos, que é igual a três sobre dois.*

Figura 33: Resolução do item 1 pelo Grupo 2.

$$\frac{4,5}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Fonte: Dados da pesquisa

Fez-se um breve silêncio e eles continuaram:

Jonas: *No número dois, são semelhantes porque os ângulos correspondentes são todos congruentes.*

Diego: *Jonas, não são não! Este aqui tem umas curvas diferentes das outras.*

Jonas: *Não é como estão as curvas, mas o número de curvas. Olha, tem uma curva no ângulo D e uma curva no arco D'. Então eles têm a mesma medida. Veja!*

Juliana: *Só temos mais dois minutos, temos que resolver o quatro. Jonas, me ajuda!*

Jonas: *O dois e o quatro, até agora, são os únicos que temos certeza que são semelhantes.*

Juliana: *Isso é mentira, no item 1 são semelhantes.*

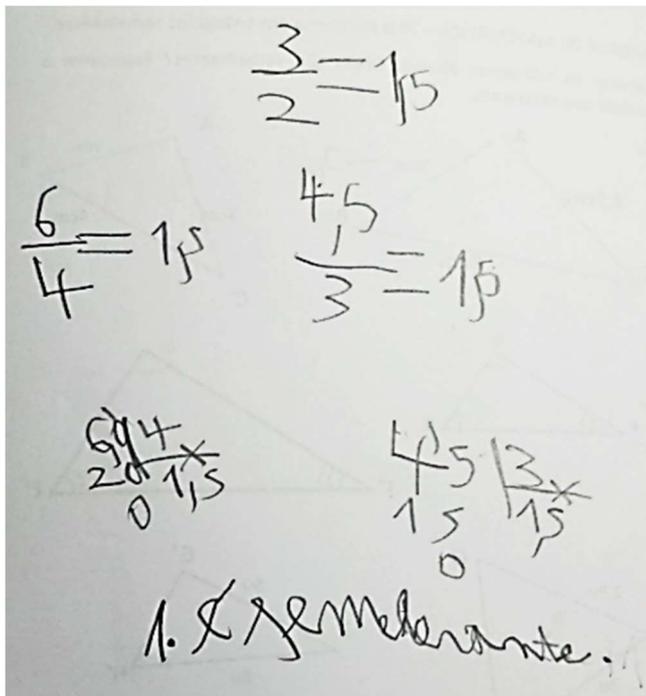
Jonas: *Ainda não sabemos. Continuando... Agora vamos confirmar se no item 1 são semelhantes. Querias fazer o 1?*

Emílio: *Sim, eu quero.*

Jonas: *Esse outro já fizemos, só confirma que o um é semelhante.*

Emílio: *Três dividido por dois, deu resultado um e meio. Também fizemos seis sobre quatro e também deu resultado um e meio. Também fiz quatro e meio dividido por três e deu um e meio de novo. Ou seja, todas as razões dão um e meio.*

Figura 34: Segunda resolução do item 1 pelo Grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa

Jonas: São semelhantes porque os lados correspondentes estão na mesma razão.

Juliana: Temos que confirmar o quatro, temos que descobrir os triângulos do quatro são...

Diego: O quatro é!

Emílio: São semelhantes.

Diego: Sim, mas temos que explicar por que... Jonas, ajuda!

Juliana: Os ângulos são iguais...

Diego: Mas temos que explicar por uma conta...

Jonas, mostrando na figura diz: Três quartos é igual a três quartos...

Terminado o tempo, a Professora Tânia tomou a palavra:

Professora: Vamos concluir. O primeiro grupo que vai falar é o da Melissa. Nós, até agora, trabalhamos com polígonos, certo? Figuras semelhantes, no caso dos polígonos... tínhamos dito que dois polígonos são semelhantes quando

*temos os lados proporcionais. Como, nesse caso, são triângulos, portanto sempre temos apenas três lados. Depois falamos que os lados devem ser diretamente proporcionais e os ângulos devem ser iguais. Agora receberam uma tarefa e tinham que concluir se os triângulos exibidos são semelhantes ou não. Então qual é a conclusão do primeiro item, Melissa? Podes falar!*

*Melissa: Não são semelhantes porque a razão dos valores dos lados é diferente.*

*Professora: É diferente? Conte como fizeram!*

*Melissa: O AC menos A'C' é diferente do AB menos o A'B'.*

*Professora: Mas tinha que ser igual?*

*Melissa: Os lados não...*

*Professora: E depois?*

*Melissa: A diferença de quatro e meio e três não é a mesma que a diferença entre três e dois.*

*Professora: Alguém quer dizer mais alguma coisa? Juliana?*

*Juliana: Não professora.*

*Professora: Então a resposta do grupo é que não são semelhantes!*

*Professor-Pesquisador: Deixem-me fazer uma observação. Eu gostaria que vocês não alterassem a resposta nas folhas de vocês depois dessa discussão. Deixem como está mesmo que não pareça estar bem. Certo?*

Disse isso porque percebi que alguns alunos estavam apagando suas respostas conforme o grupo apresentava sua resposta e queríamos saber como é que a atividade fora realizada a priori. Além disso, as respostas apresentadas não estavam necessariamente corretas.

*Professora: Alguém não concorda com a decisão desse grupo? Jonas?*

Jonas: *Nós chegamos à conclusão de que o primeiro par de triângulos são semelhantes porque começamos a fazer razão de semelhança e o resultado é sempre um e meio.*

Professora: *Ou seja, dividiram um pelo outro e depois os outros dois correspondentes?*

Jonas: *Sim, achamos a razão para todos lados do triângulo. Seis dividido por quatro, três dividido por dois, quatro e meio dividido por três, sempre é igual a um e meio.*

Professora: *E chegaram a que conclusão?*

Emílio: *Como eles têm a mesma razão de semelhança quer dizer que os triângulos são semelhantes.*

Professora: *Então daquelas condições, verificaram a razão entre os lados. É isso? E como sabes que os ângulos são iguais?*

Jonas: *Porque os lados correspondem.*

Professora: *Os lados correspondem o quê?*

Jonas: *Os lados correspondem, é isso....*

Professora: *Estás sendo pouco explícito, vai Rogério.*

Rogério: *Os lados que formam os ângulos dessas figuras são proporcionais.*

Professora: *Então os ângulos vão se manter.*

Jonas: *Professora, como o lado AB é semelhante...*

Professora: *Não é semelhante, é diretamente proporcional.*

Jonas: *Sim. O lado AB é diretamente proporcional ao lado A'B' e assim funciona para todos os lados. Quer dizer então que os lados do triângulo são diretamente proporcionais e os triângulos são semelhantes.*

Ao contrário das aulas anteriores, a apresentação dessa atividade foi inteiramente verbal. Os alunos defenderam suas opiniões e, depois, a turma elegeu a melhor solução, que a Professora Tânia colocou no quadro:

Figura 35: Resolução do item 1, eleita pela turma como a mais adequada.

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2} = \frac{\text{Sim}}{1,5} \\ \frac{4,5}{3} = \frac{3}{2} = 1,5 \\ \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Professora: *Assim, chegamos à conclusão que esses dois triângulos são semelhantes, porque sabemos que quando dois polígonos são semelhantes temos que ter o mesmo número de lados, temos que ter os lados proporcionais e os ângulos iguais. Chegamos à conclusão que esses dois triângulos têm os lados proporcionais, mas não sabemos se os ângulos são iguais, mas depois chegamos a analisar e percebemos que são iguais. Uma das condições mínimas para que dois triângulos sejam semelhantes é qual? Juliana?*

Juliana: *Ter os lados correspondentes proporcionais.*

Professora: *Se esses lados são diretamente proporcionais, também chegamos à conclusão de que os ângulos são iguais. Pelo que nós temos aqui são os lados dos triângulos proporcionais e os ângulos iguais. Este critério de semelhança vai se chamar LLL, sendo que, critério de semelhança é a condição mínima para que os triângulos sejam semelhantes.*

Essa última frase encerrou a aula 117. A discussão dos três outros itens teve que ser adiada para a aula seguinte.

A aula 118 aconteceu no dia 23 de maio de 2019 e foi iniciada com a exposição dos objetivos traçados para as aulas 117 e 118 pois, na aula anterior, ela havia omitido os objetivos da aula para não atrapalhar o desenvolvimento da atividade.

Objetivos:

- Determinar os casos de semelhança de triângulos;
- Resolver problemas e exercícios.

Depois, deu início às atividades da aula dando continuidade às discussões plenárias iniciadas no final da última aula.

Professora: *Resumindo o que conversamos na aula passada: Dois triângulos são semelhantes quando, de um para o outro, os lados correspondentes são diretamente proporcionais.*

Então a professora começa a questionar sobre o segundo item, que trazia a indicação de três ângulos congruentes.

Professora: *Agora, aqui disseram que sim, o que aconteceu aqui? Deixa-me ver qual grupo não falou, Gabriel, por que são semelhantes?*

Gabriel: *Por que os ângulos e os lados são equivalentes...*

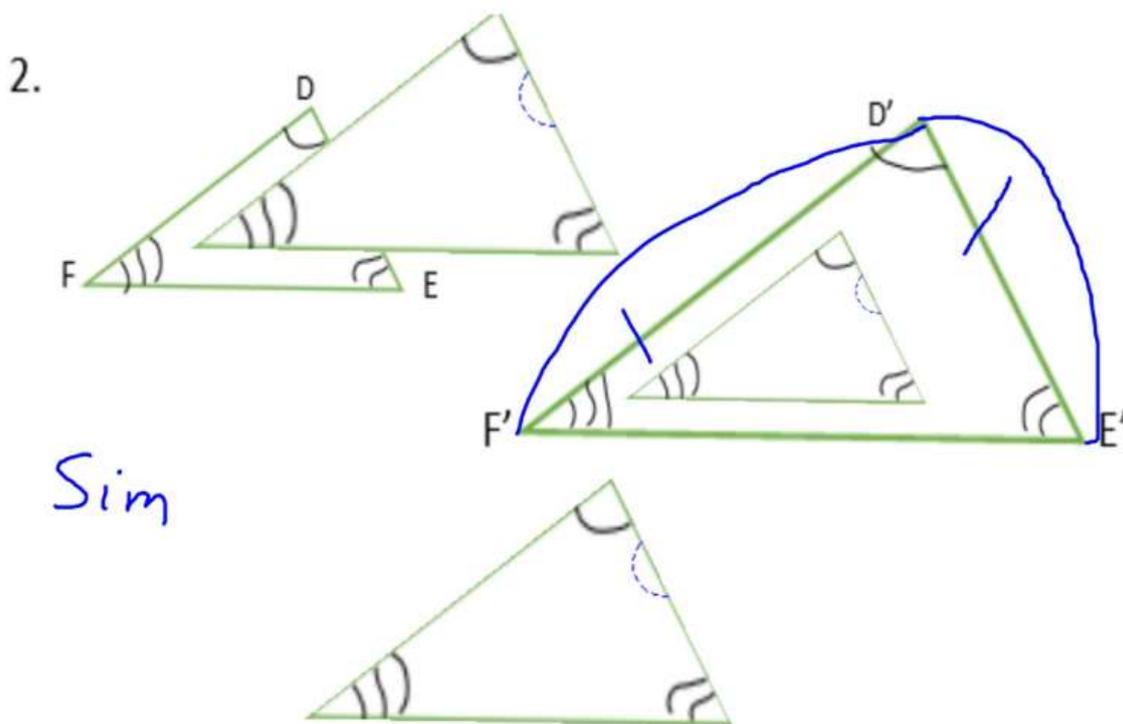
Professora: *(lados) equivalentes ou diretamente proporcionais?*

Gabriel: *Desculpe, (os lados) são diretamente proporcionais.*

Professora: *Então vamos verificar se é verdade, os ângulos de um para o outro são iguais. Vocês afirmaram que os triângulos são semelhantes, mas eu preciso verificar se os lados são proporcionais. O Gabriel disse que sim. Nós também sabemos que, no triângulo, lados congruentes opõem-se a ângulos congruentes e ângulos iguais opõem-se a lados iguais, mas aqui não é igualdade. Os lados são diretamente proporcionais ou não. Então, o quê que eu vou fazer? Vou por este triângulo aqui e vou tentar com que este lado seja metade deste.*

A professora mostra a Figura 36, movimentando o triângulo menor sobre o triângulo maior.

Figura 36: Resolução do item 2 pela Professora Tânia



Fonte: Dados da pesquisa

Professora: *O que acontece com o ângulo? Mantém-se igual! Estou a aumentar o triângulo, mas o ângulo mantém-se igual. Logo, consigo concluir que se os ângulos são iguais, os lados são diretamente proporcionais. Será que a condição mínima é ter três ângulos iguais?*

Rogério: *Preciso de apenas dois ângulos iguais.*

Professora: *Tu disseste que bastam dois? O quê que vocês acham disto? Rogério, é isso que disse? Se dois ângulos de um são iguais a dois ângulos de outro, então...*

Rogério: *Certamente têm que ser...*

Professora: *Certamente têm que ser? Por quê? Por que Mario?*

Mario: *Se dois ângulos são iguais o outro também tem que ser.*

Professora: *Foi isso o que o Rogério nos disse. Mas se dois ângulos são iguais a esses outros dois, vamos deduzir que o terceiro também é igual? Por quê?*

Mario: *Porque a soma das amplitudes é 180 graus.*

Professora: *A soma das amplitudes dos ângulos de qualquer triângulo é 180 graus, e depois?*

Mario: *Subtraindo a soma desses dois de 180 vai dar o valor de cima – apontando para o terceiro ângulo.*

Professora: *Certamente vai dar a mesma coisa. Vamos imaginar que aqui seja 30 e aqui 40,  $180 - (30 + 40)$ , dá o mesmo valor nos dois triângulos. Então, o que se conclui? Qual é a condição mínima para que os triângulos sejam semelhantes neste caso que estamos a analisar? Marina?*

Marina: *É suficiente termos dois ângulos iguais...*

Professora: *Vamos dizer que este é o critério AA. Na congruência o que que havia? Dúvidas?*

Margarida: *Descobrir os lados também é uma forma rápida de se fazer. Não é?*

Professora: *Sim, pode ser feito porque esta é uma condição mínima! Seguindo, aqui (no item 3) disseram que não. Por que disseram que não? Vamos lá quem ainda não foi.*

Margarida: *Porque só tem um ângulo igual.*

Professora: *Sobre os outros não se sabe. Não é? Aqui pode estar mais aberto ou mais fechado, e depois?*

Margarida: *Podemos fazer a razão, cinco sobre dois vírgula cinco.*

Professora: *Espera. Deixa-me escrever! Cinco sobre dois e meio dá quanto? Dá dois, e depois?*

Margarida: *E depois podemos escrever três vezes dois.*

Professora: *Ah... para ver se dá seis. Vá bem! Então, três vezes dois dá seis, os lados que estão aqui são diretamente proporcionais. Um ângulo do outro igual, os lados diretamente proporcionais e depois? Mas tu disseste que não são semelhantes.*

Figura 37: Anotação da professora no quadro.

$$\frac{5}{2,5} = 2 ;$$

$$3 \times 2 = 6$$

Fonte: Dados da pesquisa

Margarida: *Que, pelo desenho, os ângulos não são iguais.*

Professora: *Imagina que os ângulos sejam iguais...*

Margarida: *Daí são semelhantes.*

Professor-Pesquisador: *Posso fazer uma pergunta?*

Professora: *Pode, claro.*

Professor-Pesquisador: *Nem sempre o desenho representa exatamente a realidade. A pergunta é: do jeito que está aqui, nós podemos dizer que não são ou ficamos na dúvida? Os dados são insuficientes ou já dá para a gente dizer que eles não são (semelhantes)? Fala Rogério!*

Rogério: *Não temos dados suficientes, por causa dos lados proporcionais, não temos os três, só temos informação de dois. E dos ângulos só temos informação de um e precisamos de dois.*

Professor-Pesquisador: *Isso! Percebem? Vejam que esses dois lados são proporcionais, o ângulo que nós temos aqui também é correspondente, um ao outro. Só que não temos informações sobre esse lado aqui e nem sobre os ângulos. Ou seja, não podemos concluir se eles são ou não são semelhantes. Pela figura, nós dizemos que eles não são (semelhantes). Mas, pelos dados, não*

*temos informações para chegar à conclusão e precisamos nos basear em dados e não na nossa percepção ocular. Eles poderiam ser muito próximos um do outro e mesmo assim não serem semelhantes.*

*Professora: O quarto item. Disseram que sim, então vamos ver... Emílio, o que tu vê igual de um para o outro? Ou proporcional... ou coisas assim? Fala Emílio!*

*Emílio: O ângulo é igual!*

*Professora: O ângulo J é igual ao ângulo J'. Algo mais?*

*Emílio: As medidas aumentaram um centímetro.*

*Professora: Aumentaram um metro, neste caso. Então aumentaram tanto quanto...*

*Emílio: Já é proporcional...*

*Professora: Ah, a Carina está a dizer que este ângulo é igual a este e aqui também. Sim, isso é uma boa coisa, já temos uma das conclusões feitas. Estamos em um bom caminho. O Emílio disse que a diferença entre os lados é a mesma, então acaba por haver uma proporção direta por causa disso. Rinaldo o que tem a dizer?*

*Rinaldo: Quero dizer que não há informação suficiente.*

*Professora: Por quê? Já concluímos que os ângulos são iguais, porque temos um ângulo igual, um ângulo igual, então esses dois são iguais, por serem triângulos isósceles, Carina disse, "temos dois lados iguais e os ângulos que se opõem aos lados iguais são também iguais". Vamos ver se os lados são proporcionais, vamos procurar se temos condições disso para afirmar.*

*Professor-Pesquisador: Rinaldo, deixa-me chamar a atenção. Note que, no item 3, tínhamos o lado, o outro lado e o ângulo embaixo. Nesse caso, o ângulo conhecido está entre os dois lados. Percebe? Há uma diferença do terceiro.*

Professora: *Porque essa abertura está fixa eu não posso abrir, nem mais nem menos, e os lados são esses. Dois lados são diretamente proporcionais e o outro? O que acontece ao outro? O quê que vocês acham? O terceiro lado vai aumentar ou vai diminuir com a mesma proporção, porque ele se opõe a um mesmo ângulo e decorre daquilo que já analisamos sobre os ângulos. Por isso temos dados suficientes para afirmar que eles são semelhantes.*

Nesse momento, a professora precisou se ausentar da sala e solicitou que o Professor-Pesquisador concluísse o trabalho de formalização.

Professor-Pesquisador: *Como eu havia falado para o Ricardo, temos o caso, ou critério de semelhança, LAL (lado-ângulo-lado). Esse ângulo aqui é conhecido. Naquele caso poderíamos mexer, pegar a medida e alterar, porque o ângulo conhecido estava embaixo. Aqui não podemos, aqui o ângulo já está determinado. O que nos faz pensar que temos uma situação onde os triângulos serão semelhantes. Portanto, podemos concluir o seguinte: existem três casos de semelhança. O primeiro deles é o caso lado, lado, lado – LLL, que significa que se os lados são proporcionais, temos triângulos semelhantes; o segundo é o caso ângulo-ângulo – AA, se nós temos dois ângulos congruentes significa, nos triângulos, que o terceiro também será congruente. Logo, tendo dois ângulos respectivamente congruentes, os triângulos serão semelhantes; e o terceiro é o caso lado, ângulo, lado - LAL, vejam que o ângulo congruente está entre dois lados proporcionais, assim, o terceiro lado também será proporcional e os triângulos serão semelhantes. Agora, um caso, por exemplo, LLA não nos permite concluir pela semelhança ou não. O objetivo dessa nossa atividade era o de chegar a esses três critérios de semelhança. Isso nos permite, em um problema, identificar que os triângulos sejam semelhantes para poder trabalhar com proporções, por exemplo.*

### **Discussão sobre a aula:**

Nem sempre a dinâmica de uma aula usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

precisa, ou até mesmo pode, seguir o roteiro idealizado para sua execução. Mesmo porque sua própria gênese nos remete à flexibilização das práticas.

A estrutura geral dessa aula foi a mesma que vínhamos propondo, mas houve diferenças importantes desde a proposição do problema gerador até a sua formalização.

Mais do que adotar uma situação problemática calcada na execução de uma tarefa essencialmente matemática (no sentido de não ser um problema contextualizado), o problema trazia, em si, quatro situações distintas sobre um mesmo tema: Semelhança de triângulos. Além disso, precisei dar um fechamento à aula, porque a Professora Tânia precisou se ausentar e, embora tivesse imaginado inúmeras possibilidades de encaminhamento para a atividade e para a formalização do conteúdo especificamente, acabei surpreendido pela necessidade de assumir o comando da aula de maneira tão abrupta.

Mas o que mais interessa se encontra no percurso entre a preparação do problema e o encerramento da aula. Mais uma vez senti que um apressamento inadequado da atividade pode ter interferido na produtividade da turma, mesmo que tenhamos obtido resultados deveras promissores. A impressão final da aula foi a de que os alunos conseguiram apreender, com eficácia, os conceitos de casos de semelhança trabalhados.

A avaliação pôde ser notada em praticamente todos os momentos da aula. Desde a observação atenta da resolução do problema, até a formalização do conteúdo, perpassando interações (aluno-aluno, aluno-professor), intervenções e feedbacks. Mais do que isso, pôde-se sentir uma avaliação para a aprendizagem mirando o desenvolvimento do aluno e agindo como uma facilitadora da construção do seu conhecimento.

Precisamos ressaltar que a decisão da professora de solicitar a reportagem oral das respostas, a partir do item 2 do problema, foi uma decisão bastante pertinente e provocou bons momentos de avaliação e aprendizagem, que talvez não tivessem sido tão enriquecedores se as respostas tivessem sido apenas expostas no quadro. Naquele momento, as respostas no quadro

poderiam ter inibido a expressão oral de alguns alunos que, sem a visualização de uma resposta correta, sentiram a necessidade de se fazer ouvir.

Porém, atento para o fato de que decisões desse tipo não são tomadas na serenidade de uma escrivinha quando se planeja uma aula, mas durante um turbilhão de situações diversas que convergem a um determinado momento. Nesse caso, a decisão nos pareceu adequada.

Por outro lado, durante a aula poderíamos ter explorado mais o termo “critério de semelhança”. Sabe-se por definição, que dois triângulos são semelhantes quando possuem os três lados correspondentes respectivamente proporcionais e os três ângulos correspondentes congruentes. Ou seja, são seis condições necessárias para provar a semelhança entre dois triângulos, por definição. Um critério é uma forma abreviada de provar que sejam observadas todas as seis condições da definição, sem que se verifiquem as seis condições.

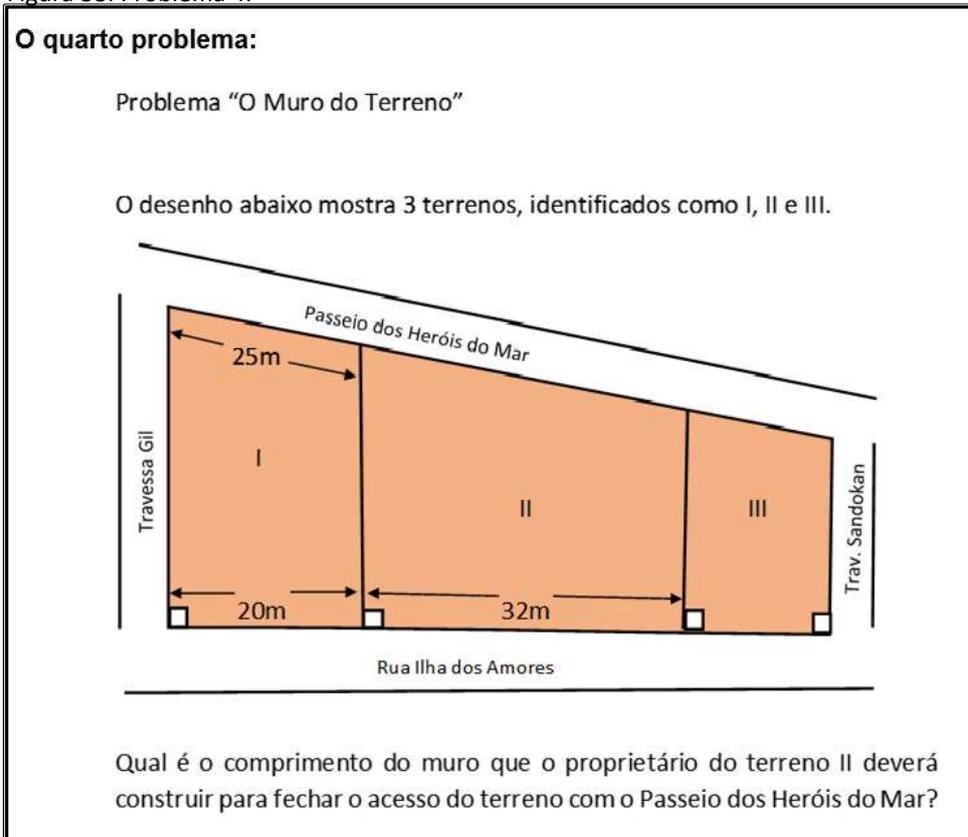
Em cada um dos critérios reduzimos de seis possibilidades para: três, no critério lado-lado-lado, LLL; duas possibilidades no caso ângulo-ângulo, AA; e três possibilidades no caso lado-ângulo-lado, LAL.

#### **7.2.1.4. O Quarto Problema**

O primeiro desafio para a quarta atividade era o de encontrar um problema que pudesse ser gerador do conteúdo Teorema de Tales. Dessa vez, queríamos trabalhar com uma situação que parecesse real para os alunos, contrapondo-se diametralmente ao terceiro problema.

Num certo dia, durante o percurso entre minha residência e o Colégio Pedro Arrupe, comecei a observar a paisagem urbana pelas ruas de Lisboa. De repente, deparei-me com uma quadra que era, aparentemente, trapezoidal. Sem preocupar-me com as medidas reais, inspirado por essa quadra, que é bastante próxima ao colégio, propus o seguinte problema.

Figura 38: Problema 4.



Fonte: O Autor

A aula 122 aconteceu no dia 30 de maio de 2018. No início da aula a professora colocou no quadro os seguintes objetivos:

- Aplicar os critérios de semelhança de triângulos na resolução de problemas;
- Resolver problemas aplicando o Teorema de Tales.

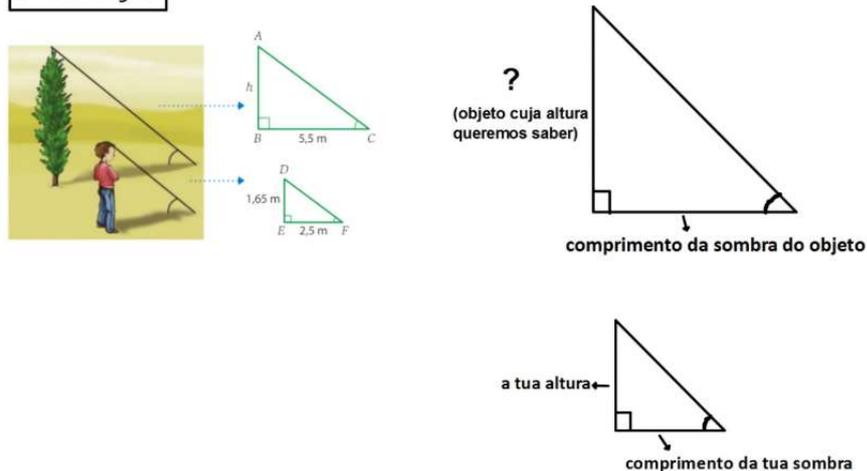
A Professora Tânia se referiu à aula anterior. Nessa aula, a de número 121, os alunos realizaram uma atividade ao ar livre com o objetivo de encontrar a altura de determinados sólidos utilizando-se dos critérios de semelhança de triângulos.

Nessa atividade, os alunos deveriam, num primeiro momento, descobrir a altura de postes, de árvores e do prédio do Colégio, utilizando a sombra desses objetos e a sombra de um dos alunos do grupo, com altura conhecida. Num segundo momento, a atividade seria realizada com auxílio de um prato com

água, que seria colocado estrategicamente entre o objeto e um dos alunos do grupo, de modo que fosse possível visualizar o topo do objeto no centro do prato.

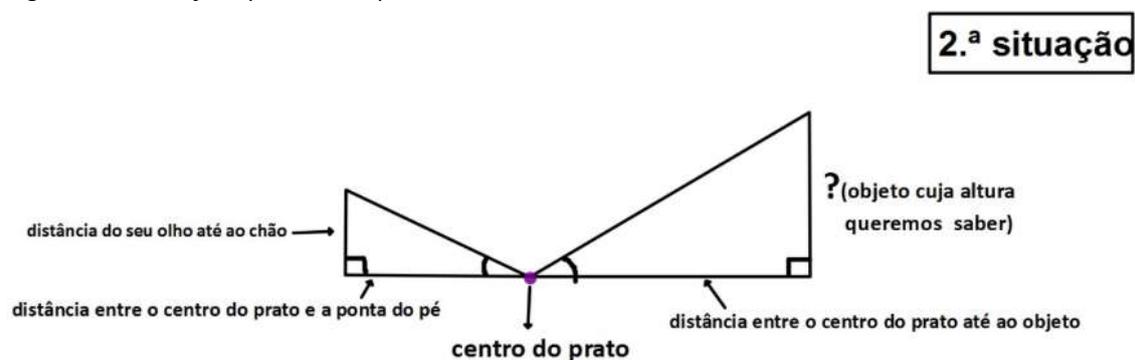
Figura 39: Ilustração apresentada pela Professora Tânia.

### 1ª situação



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 40: Ilustração apresentada pela Professora Tânia.



Fonte: Dados da pesquisa

Embora não tenha sido objeto dessa pesquisa, é importante ilustrar essa atividade porque a professora se refere a ela antes da proposição do problema “O muro do terreno” e se trata de um conteúdo importante para a resolução desse problema. A professora questiona então:

Professora: O que nós aprendemos com as atividades da aula passada?

Melissa: Aprendemos que podemos medir coisas altas sem ter que subir nelas...

Professora: Muito bem, mais alguém?

Talita: Notamos que o ecrã do telemóvel<sup>22</sup> mostra um reflexo melhor que o copo com água.

Gabriel: Mas isso não é relevante. O importante é que podemos encontrar a altura das coisas usando a semelhança de triângulos.

Após esse breve diálogo, a professora observa a proximidade entre os valores encontrados pelos diversos grupos e anuncia:

Professora: Vamos fazer uma atividade pela qual chegaremos ao Teorema de Tales.

A professora trouxe, mais uma vez, uma relação dos elementos que comporiam cada um dos grupos. Foram formados três grupos com cinco alunos, dois grupos com 4 alunos e um sexto grupo, formado pelos três alunos que não participavam da pesquisa. Distribuímos os gravadores pelos cinco grupos e solicitamos que elessem um elemento do grupo para relatar a resolução ao final da aula. Depois entregamos a atividade e a professora orientou, mais uma vez, como a aula deveria se desenvolver.

Após essa etapa, os professores puseram-se na posição de observadores. Embora não pareça, por não haver intervenção e, conseqüentemente, *feedback*, essa etapa foi importante por permitir uma primeira avaliação dos grupos e determinar qual grupo deveria receber atenção destacada inicialmente. Grupos que demonstraram maior fluência matemática puderam ser preteridos num primeiro momento para que o professor dedicasse um tempo maior a grupos com maiores dificuldades.

Juliana: *Qual muro, este ou este?*

Carina: *Professora qual é o muro?*

Juliana: *Ah... é este!*

Betina: *Qual que é o muro?*

Juliana: *É este! Eu também não sabia...*

---

<sup>22</sup> A tela do celular

Consegue-se ouvir um aluno dizendo, ao fundo:

Aluno ao fundo: *Resolve-se fazendo uma regra de três simples...*

Betina: *Vamos fazer a regra de três simples.*

Juliana: *Ouviste a Rita falando para a professora... (risos)*

Carina: *O muro é este todo?*

Juliana: *Não! No terreno dois deverá ser construído... para fechar o acesso do terreno com o passeio.*

Esse trecho mostra que, além da interação entre os elementos do grupo houve interferência de outros alunos que puderam trazer à luz ideias não exploradas pelo grupo. Embora possa parecer, num primeiro momento, que a dica dada pela Cássia pudesse resolver o problema para o grupo, na verdade não é isso que acontece na prática, conforme pode-se ver na continuação da resolução do problema.

Carina: *Temos que fazer a proporção.*

Betina: *Pois...*

Juliana: *Sim, 20 está para 25 assim como 32 está para x.*

Betina: *Temos duas maneiras, regra de três simples e a que estás a fazer.*

Carina: *Estamos a fazer regra de três... regra de três simples... proporcionalidade...*

Juliana: *Dá 40 o resultado final.*

Carina: *32 vezes 25...*

Juliana: *É 40!*

Carina: *Não, não é isso!*

Juliana: *Eu fiz aqui. Olha, dá 40!*

Carina: *32 vezes 25 é igual a 800 e a dividir por 20 é igual a 40.*

Betina: *Como é que nós temos certeza que é 40?*

Carina: *Porque eu sou muito boa.*

Juliana: *É uma proporção!*

Betina: *Aqui dá 51,2!*

Carina: *Fizeste tudo de cabeça... certo?*

Betina: *E a razão?*

Juliana: *Eu não estive nessa aula, não sei como é que faz pela razão (de semelhança).*

Carina: *Espera-me fazer pela razão...*

Betina: *Por que temos que achar a razão se as figuras não são semelhantes?*

Carina: *Pois são semelhantes! E temos que mostrar isso para provar que nós somos bons.*

Carina: *Fizemos de duas maneiras, professora.*

Professora: *E pelas duas formas deu o mesmo?*

Carina: *Sim!*

Betina: *Sim, mas depois... ah... nada...*

Professora: *Mas depois o quê?*

Carina: *Nada! A Beatriz achou que poderia fazer pela razão mas depois lembrou-se que as figuras não são semelhantes...*

Professora: *Olha, tentaram fazer pela razão?*

Carina: *Já tentamos!*

Professora: *E não dá?*

Carina: *Não, dá 40,2!*

Betina: *40?*

Juliana: Não, dá 51,2.

Betina: Não foi assim... Estava aqui a pensar... e se fizéssemos pela razão, então eu fiz este dividido por este, e depois fiz...

Professora: Vá bem! Continua...

Juliana: Mas já não vai dar...

Professora: E quanto é que dá?

Betina: 51,2.

A Professora olha a resolução do exercício.

Professora: Não é 32 é 25! Talvez esteja aí o erro de vocês. 1,6 é a razão que tu tinhas?

Carina: Então vamos lá! 25 vezes 1,6 dá 40. Então a Beatriz descobriu outra forma. Pela razão também dá.

Betina: Eu vou mostrar aqui a razão.

Figura 41: Resolução do problema "O muro do terreno" pelo Grupo 1.

Handwritten mathematical work showing three methods to solve a problem:

Method 1 (top left):

$$\begin{array}{l} 20 \text{ --- } 25 \\ 32 \text{ --- } x \end{array}$$

$$x = \frac{32 \times 25}{20} = \frac{800}{20} = 40 //$$

Method 2 (top right):

$$\frac{20}{25} = \frac{x}{32}$$

$$x = \frac{32 \times 25}{20} = 40 //$$

Method 3 (bottom):

$$\frac{32}{20} = 1,6 =$$

$$= 1,6 \times 25 = 40 //$$

Infelizmente, não há registro escrito da resolução errônea do Grupo 1. Mas, podemos perceber algo bastante interessante na resolução apresentada por eles. Embora apresentem três resoluções distintas, os diálogos indicam que o grupo resolveu o problema sem ter a compreensão exata da situação.

Inicialmente, acreditavam na possibilidade de se resolver o problema através de uma “regra de três simples” por terem ouvido a dica de um aluno de outro grupo. Depois observaram que pode haver uma proporção, mas não parecem relacionar a proporção à regra de três. E, por último, pensam na possibilidade de se utilizar uma razão de semelhança, mais por perceber que o problema poderia ser resolvido através de uma proporção do que por notarem a existência de alguma proporcionalidade. Mais do que isso, os alunos acreditavam não existir semelhança entre as figuras, sem perceber que as trapézios poderiam ser reduzidos a dois triângulos semelhantes.

Houve, nesse momento, uma possibilidade notável de intervenção, no sentido de se avaliar e desenvolver os conceitos de proporcionalidade e, mais especificamente, de semelhança. Quando Carolina negou haver semelhança nas figuras (mesmo tendo afirmado, em um diálogo anterior, que eram semelhantes), a professora poderia ter questionado os alunos sobre os conceitos envolvidos no problema e indicado possibilidades de encaminhamento, através da percepção da existência, na figura, de dois triângulos retângulos com um vértice e um ângulo comuns.

O Grupo 2, por sua vez, utilizou um outro raciocínio para construir sua resposta.

Rinaldo: *Essas linhas são todas paralelas... os ângulos vão ser todos iguais... são ângulos consecutivos e, então, os ângulos das figuras vão ser todos iguais.*

Talita: *Vem cá, vê a minha conclusão! Fica 20 está para 32 como 25 está para x.*

Rinaldo: *Não! 20 para 25 e 32 para x.*

Talita: *Ah! É a mesma coisa. Não acha que é a mesma coisa?*

Clara: *Por que vocês não dizem logo as soluções às pessoas?*

Talita: *Não estamos a dizer...*

Clara: *Estão sim!*

Marina: *20 para 25 e 32 para x?*

Talita: *Estamos a resolver juntos. E se tu ouves, é porque queres...*

Clara: *Eu ouço porque vocês falam alto.*

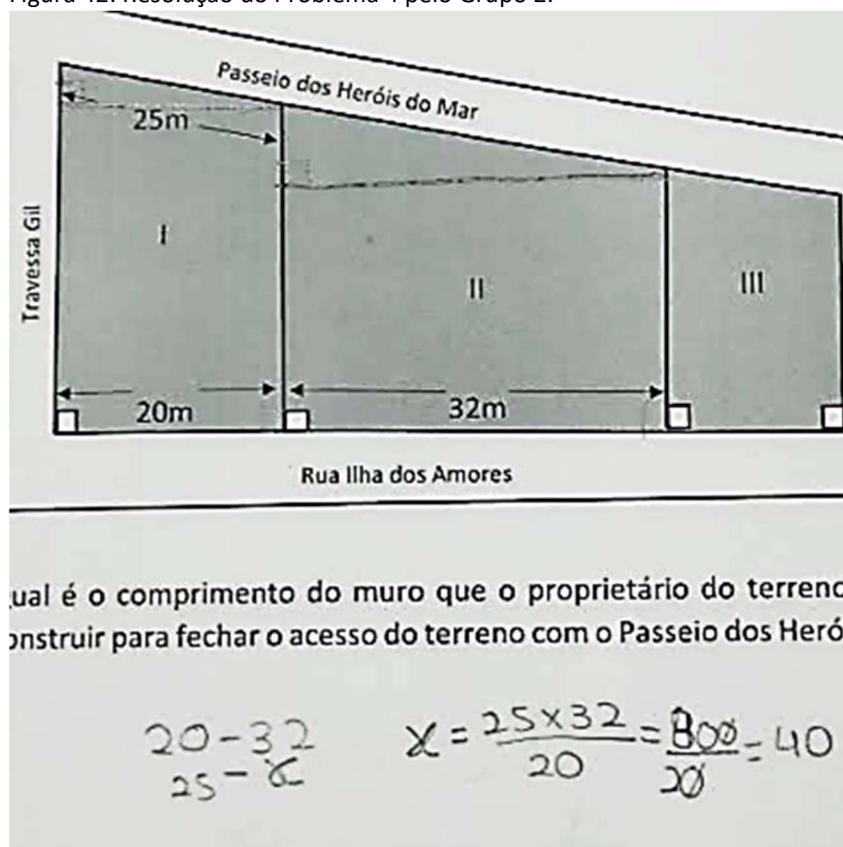
Rinaldo: *Agora vamos fazer cálculos mentais.*

Clara: *Agora tu vais calar!*

Rinaldo: *Então 32 vezes 25 é 800, a dividir por 20 é 40.*

Talita: *Dá 40?*

Figura 42: Resolução do Problema 4 pelo Grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa

Rinaldo: *Isso! Agora temos que explicar por que fizemos isso.*

Talita: *Porque os ângulos são todos diretamente proporcionais.*

Rinaldo: *Os ângulos são iguais, não são diretamente proporcionais.*

Talita: *Sim, pronto! São iguais. Logo, os lados são todos diretamente proporcionais...*

Então o Professor-Pesquisador chegou-se ao grupo e questiona como o problema fora resolvido.

Talita: *Nós fizemos pela regra de três simples, porque percebemos que os ângulos são todos iguais. Logo, os lados são todos diretamente proporcionais.*

Professor-Pesquisador: *Mas são triângulos?*

Rinaldo: *Não, são quadriláteros...*

Professor-Pesquisador: *E o critério é válido para os quadriláteros?*

Rinaldo: *São quadriláteros... Como este ângulo reto e este ângulo reto, todos os ângulos são retos aqui embaixo. Quer dizer (mostrando a figura) que este lado é paralelo a este e este é paralelo a este e este é paralelo a este. Uma linha paralela que atravessa aqui... os ângulos são consecutivos então são todos iguais. Quer dizer que este ângulo é igual a este ângulo tal como este ângulo é igual a este ângulo. Se são assim, é porque os lados são diretamente proporcionais. Então, se os ângulos são todos iguais quer dizer que eles são semelhantes.*

Professor-Pesquisador: *Está confuso. Essa regra de semelhança vale para quadriláteros?*

Rinaldo: *Sim, os ângulos são todos iguais...*

Professor-Pesquisador: *Mas dizer que os ângulos são iguais indica que os trapézios sejam semelhantes? Você tem certeza?*

Rinaldo: *Não!*

Clara: *Não!*

Marina: *Não sei...*

Rinaldo: *Não sabe, cala-te!*

Clara: *Podemos dividir em triângulos?*

Professor-Pesquisador: *Posso dar uma sugestão? Dividir em triângulos? Vejam! O que aconteceria se eu passasse retas, como esta que está embaixo, paralelas a ela, e for subindo... Em algum momento, uma delas vai formar triângulos com as mesmas medidas daqui de baixo?*

Talita: *Sim!*

Professor-Pesquisador: *Pensem no que eu falei. Pensem... não sei se todos estavam a ouvir. Se calhar, a resposta de vocês pode estar correta, porém, a justificativa que deram não é satisfatória. Perceberam? Certo, Rinaldo?*

Rinaldo: *Sim!*

Professor-Pesquisador: *Porque esses dois quadriláteros não são semelhantes.*

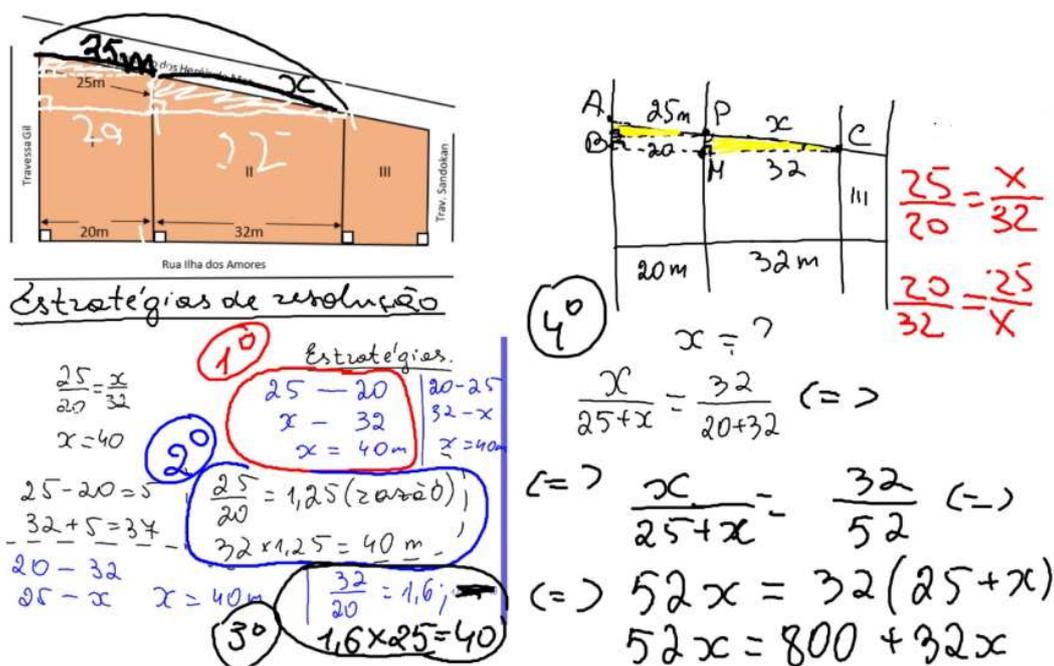
Rinaldo: *Pelo que percebi, nossa resposta está correta. Quando for explicar no quadro, mostro que fizemos esses triângulos para mostrar que temos triângulos semelhantes aqui.*

Houve, nesse grupo, uma certa animosidade entre os seus componentes. Observamos esse tipo de comportamento em outras oportunidades, justamente quando os grupos foram pré-definidos pela professora. Isso nos levou a pensar que, numa aula amparada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, bem como em quaisquer outras atividades realizadas em grupos, o ideal seria deixar os alunos se agruparem segundo suas afinidades. Por outro lado, acreditamos que essa decisão deveria ser tomada segundo a percepção do professor com relação às possibilidades da turma, o que só pode ser definido no transcorrer do tempo, conforme o professor vá conhecendo melhor seus alunos.

Depois dessa etapa, de intervenção direta dos professores durante a resolução do problema, a professora selecionou as diferentes soluções realizadas pelos grupos e as colocou no quadro. As três primeiras soluções,

apresentadas na figura abaixo, mostram resoluções encontradas pelos grupos. A quarta solução foi feita por um aluno durante a discussão plenária, conforme veremos a seguir.

Figura 43: Diferentes resoluções do Problema 4.



Fonte: Dados da pesquisa

Professora: *Primeira coisa que vi é a seguinte: o grupo da Vânia começou por fazer a diferença entre 25 e 20 e conseguiram perceber que a diferença é 5 e depois... o que fizeram? Acrescentaram aquela diferença para descobrir o termo desconhecido. Chegaram à conclusão que não está bem. Por quê?*

Vânia: *Nós fizemos 25 menos 20 igual a cinco e depois somamos 32 mais cinco. Deu 37! Mas, a professora lembrou que nas proporções não podemos usar a diferença. Aí lembramos que podemos usar sim, mas temos que incluir as diferenças em outras proporções. É meio confuso, mas se faço a diferença de um lado, tinha de fazer do outro lado também.*

Professora: *Então... E a seguir, conseguiram calcular de outros modos e achar outro valor?*

Vânia: *Sim. Nós fizemos 25 sobre 20 para achar a razão, que é 1,25. Depois fizemos 32 vezes 1,25, que deu 40 centímetros.*

Professora: São metros e não centímetros.

Professora: Quem ainda fez pela razão? É uma das estratégias... o grupo do Rogério, da Juliana. Quem fez pela razão? Bom! Então três grupos fizeram pela razão. Temos também os grupos que fizeram por regra de três simples. Vamos ouvir a regra de três simples, Nilton.

Nilton: Fizemos 25 está para 20 como  $x$  está para 32...

Professora: Vejam lá se a organização é a mesma. A que conclusão chegaram?

Nilton: Concluímos que é de 40 metros, o muro.

Professora: Quem fez outra regra de três simples, Joana?

Juliana: 20 está para 25 assim como 32 está para  $x$ .

Professora: Qual é a diferença entre uma e outra? Perceberam? Mudam de lugar, mas ainda vale a proporção. Quem fez de outra forma?

Rogério: Utilizamos a razão, mas encontramos outro valor.

Professora: Pois bem, diga...

Rogério: O resultado final foi o mesmo, mas a razão era 1,6. Daí multiplicamos por 25 e não por 32...

Professora: Ah... já percebi! 32 para 20, então a razão entre esses dois é 1,6. E depois?

Rogério: Multiplicamos por 25.

Professora: Isso mesmo! Muito bem!

Juliana: Professora, nós fizemos de três formas...

E, assim, a professora foi colhendo os resultados distintos oralmente, enquanto os anotava no quadro.

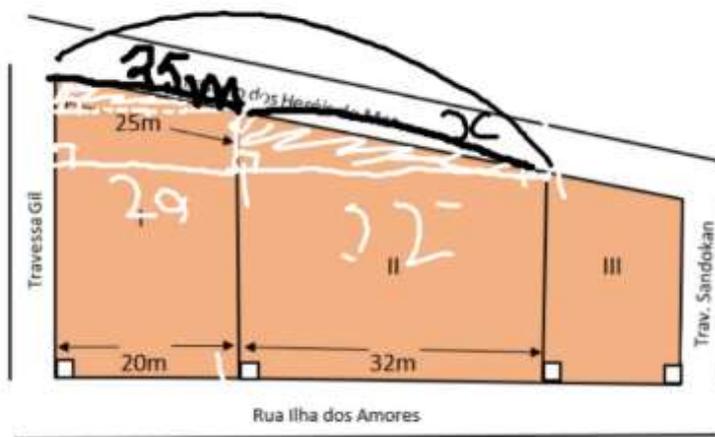
Conforme as discussões aconteciam, Gabriel pediu a palavra.

Gabriel: *Professora, enquanto se discutia, quando o Rinaldo propôs reduzir a figura a triângulos, me veio à mente um outro modo de resolver o problema. Aí, depois da nossa conversa, começou a fazer sentido para mim.*

Professora: *Venha aqui! Explica como pensaste.*

Então o Gabriel foi até o quadro e esboçou na figura o seu raciocínio.

Figura 44: Explicação da resolução do Gabriel.



Fonte: Dados da pesquisa

Gabriel: *Em vez de reduzir a dois triângulos pequenos, pensei em traçar um grande segmento aqui (apontando). Isso vai me dar dois triângulos, um maior e outro menor, dentro do primeiro. Eles serão semelhantes! Esse lado com 32m sobre 52m, que é a medida do lado do triângulo maior e x, que queremos, sobre x mais 25m, que é o lado do maior.*

Professora: *Muito bem, Gabriel. Deixa que eu escreva aqui o que disseste.*

*Vejam!*

Figura 45: A resolução do Gabriel, pela professora. Fonte: Dados da pesquisa.

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{4} \quad x = ? \\
 & \frac{x}{25+x} = \frac{32}{20+32} \quad (\Rightarrow) \\
 & (\Rightarrow) \frac{x}{25+x} = \frac{32}{52} \quad (-) \\
 & (\Rightarrow) 52x = 32(25+x) \\
 & \quad 52x = 800 + 32x
 \end{aligned}$$

Resolvendo essa equação chegaram à solução do problema.

Mas, como surgira esse raciocínio do Gabriel? Pareceu-nos que a intervenção da professora, durante sua avaliação, enquanto fornecia *feedback* ao aluno e o questionava (numa clara ação do que queremos chamar de avaliação para a aprendizagem), fora a principal responsável pelo desencadeamento de seu raciocínio.

Professora: *Vou mostrar o que é que se passa aqui. Este é um trapézio e este é outro trapézio. Esses dois trapézios são semelhantes? Não.*

Gabriel: *Mas são retângulos e triângulos.*

Professora: *Esses trapézios não são semelhantes! Por que que isso acontece?*

Gabriel: *Porque dá para formar um triângulo e um retângulo.*

Professora: *Explica teu pensamento.*

Gabriel: *Não consigo explicar.*

Professora: *Não consegue explicar por quê?*

Gabriel: *Acho que consigo, acabaria por ser 32m porque se formaria um retângulo.*

Professora: *Isso mesmo. E esse?*

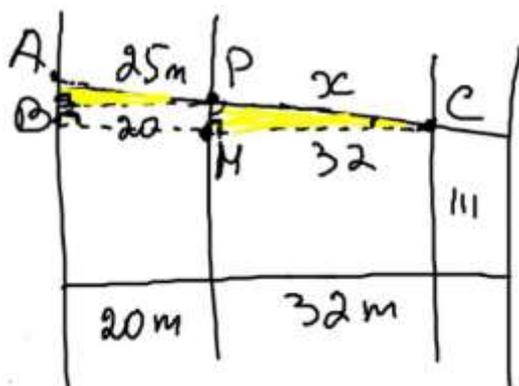
Gabriel: *Esse é 20m e acabariam por serem semelhantes porque esses ângulos são iguais.*

Professora: *Quais são os triângulos semelhantes aqui?*

Gabriel: *Esse pequenino e esse grande. (Mostrando os triângulos)*

A professora pinta, então, os triângulos indicados por Gabriel de amarelo.

Figura 46: Desenho da professora.



Fonte: Dados da pesquisa

Professora: Mas e os quadriláteros? Por que não são semelhantes?

Gabriel: Os lados não são diretamente proporcionais.

Professora: Este 20 da base do trapézio também está aqui no triângulo e esse 32 também está aqui. Então temos dois triângulos e eles são semelhantes. E por que são? Esse ângulo é igual a este... então já temos um ângulo. E esse ângulo aqui pequenino é igual a esse, que são ângulos de lados paralelos. Pelo critério AA, eles são semelhantes. Quem fez pela razão, pôde fazer usando a razão entre os lados 25m e 20m. Qual é a razão entre esses dois? É 1,25! E, se eu quero calcular meu valor desconhecido, o que é que eu vou fazer? Vou multiplicar pela razão, porque trata-se de uma ampliação, nesse caso. Este triângulo é 'mais pequeno' que esse. A razão entre os lados desse triângulo é qual? 1,25. O triângulo é semelhante a este? Qual a razão entre os lados desse outro triângulo? 1,25! Isso quer dizer que um lado é maior que o outro uma vez e um quarto. Também posso dividir 32 por 20. (A razão) entre esses dois triângulos é 1,6. Que vezes 25, dá 40. Em qual dos processos aparece a razão de semelhança entre os triângulos? Vejam que são coisas diferentes. Calcula sobre objetos diferentes, 32 (dividido) por 20, o que deu? 1,6! É a razão de semelhança deste para este. (Apontando).

Essa aula se encerrou com a professora colocando no quadro a resolução do problema sugerida pelo Gabriel e anunciando que, na aula seguinte, seria formalizado o conteúdo, com o Teorema de Tales.

A aula 123 aconteceu no dia 1º de junho de 2018. Ao iniciar a aula, a professora indicou a enunciação do Teorema de Tales como um dos objetivos. Depois, iniciou a discussão perguntando se alguém conhecia esse teorema.

Uma discussão se iniciou quando Mario levantou a mão e respondeu:

Mario: *É quando os lados são proporcionais...*

Professora: *Lados proporcionais? Sim..., mas em que situação?*

Mario: *Quando temos triângulos semelhantes?*

Professora: *Vamos olhar para o problema do muro... Vocês notaram que existem vários modos de se resolver o problema, sempre utilizando proporcionalidade direta? Alguém falou sobre os ângulos dos trapézios serem sempre iguais, na parte de baixo. São todos retos! O que isso significa? Vá lá, Carina!*

Carina: *Quer dizer que os lados são paralelos...*

Professora: *Sim, eles são paralelos! Não são triângulos e a proporcionalidade vale. Sempre! Vale porque os segmentos são paralelos. E o que diz o Teorema de Tales? Diz que um conjunto de retas paralelas cortado por duas retas transversais determina, nessas condições, segmentos proporcionais.*

Mario: *Mas professora, o problema não tem retas...*

Professora: *Mario, se prolongarmos todos os segmentos da figura... o que teremos?*

Mario: *Um conjunto de retas?*

Professora: *De retas apenas?*

Mario: *Retas paralelas...*

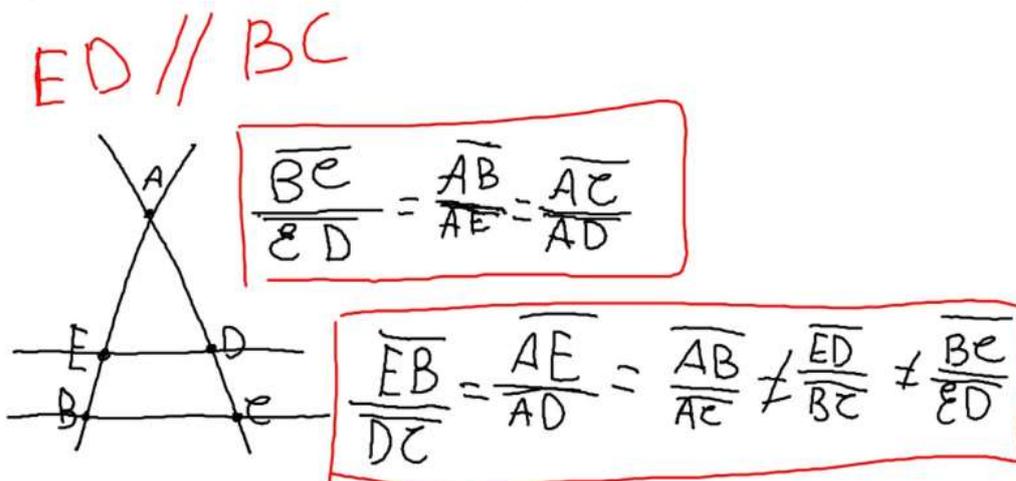
Professora: *O que mais Mario? Além das paralelas?*

Mario: *Duas retas que cortam essas paralelas.*

Professora: *As chamamos retas transversais. Vou desenhar aqui no quadro como ficaria. Um conjunto de retas paralelas cortado por duas retas*

*transversais<sup>23</sup>, como no problema, todos os segmentos formados serão proporcionais. É o que Tales diz!*

Figura 47: Representação do Teorema de Tales pela professora.



Fonte: Dados da pesquisa

### Discussão sobre a aula:

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem mostrado inúmeras possibilidades. É evidente que, quando preparamos a atividade a ser trabalhada na sala de aula, procuramos pensar nas possibilidades de encaminhamento, em erros que ocasionalmente pudessem ocorrer e em concepções errôneas que podem interferir negativamente na execução da tarefa proposta.

Nessa atividade, especificamente, a primeira resposta imaginada por mim não apareceu num primeiro momento e havíamos pensado em dar continuidade à formalização do Teorema de Tales mesmo sem essa resolução que surgiu no final da discussão plenária.

Outra questão nos chamou à atenção, a maioria dos grupos imaginou e utilizou, como estratégia de resolução do problema, a igualdade de razões para resolver o problema, mas não parecia compreender que o problema, embora envolvesse mesmo proporcionalidade, não apresentava quadriláteros

<sup>23</sup> Transversal é a reta que corta obliquamente outra reta.

semelhantes. Esse fato deveria, no nosso entendimento, gerar uma desconfiança sobre a possibilidade de se utilizar uma regra de três por exemplo. A observação realizada, durante a resolução do problema e os diálogos desenvolvidos com os alunos, em cada um dos grupos, tinha como objetivo fornecer *feedback* sobre as resoluções e interceder de modo a facilitar a construção do conhecimento matemático pelo aluno. Conseqüentemente, a aprendizagem, de fundamental importância, nos deixou evidente a importância da avaliação para a aprendizagem durante a resolução do problema.

Além disso, a plenária, quando as diferentes resoluções para o problema foram discutidas, se mostrou bastante eficaz com relação a esse tipo de avaliação. Mais do que corrigir erros e encaminhar a formalização do conteúdo trabalhado, a discussão geral possibilitou aos alunos pudessem descobrir outros caminhos de resolução, diferentes daqueles já apresentados.

Esperávamos ter que oferecer mais alguma possibilidade de resolução para o problema, mas Gabriel conseguiu, durante essa fase, desenvolver uma estratégia de resolução diferente de todas as demais. Isso foi possível porque ele conseguiu entender que não existe, necessariamente, uma maneira única para se resolver um problema. Sua resposta demonstrou, naquele momento, que ele compreendia efetivamente a questão e que o conteúdo aprendido anteriormente fora eficaz.

O tempo continuou sendo uma dificuldade para a execução mais adequada da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. As intervenções precisaram ser realizadas da maneira mais breve possível para que não faltasse tempo para atender todos os grupos ou para situações que pudessem demandar um tempo maior. Por isso, o professor precisa desenvolver o maior número de possibilidades, de modo a não ser surpreendido pelo inesperado.

Às vezes, a avaliação pode se confundir com processos de ensino e de aprendizagem, o que acreditamos ser natural, uma vez que esses processos estão integrados e o *feedback* é um elemento fundamental para a construção do conhecimento matemático pelo aluno.

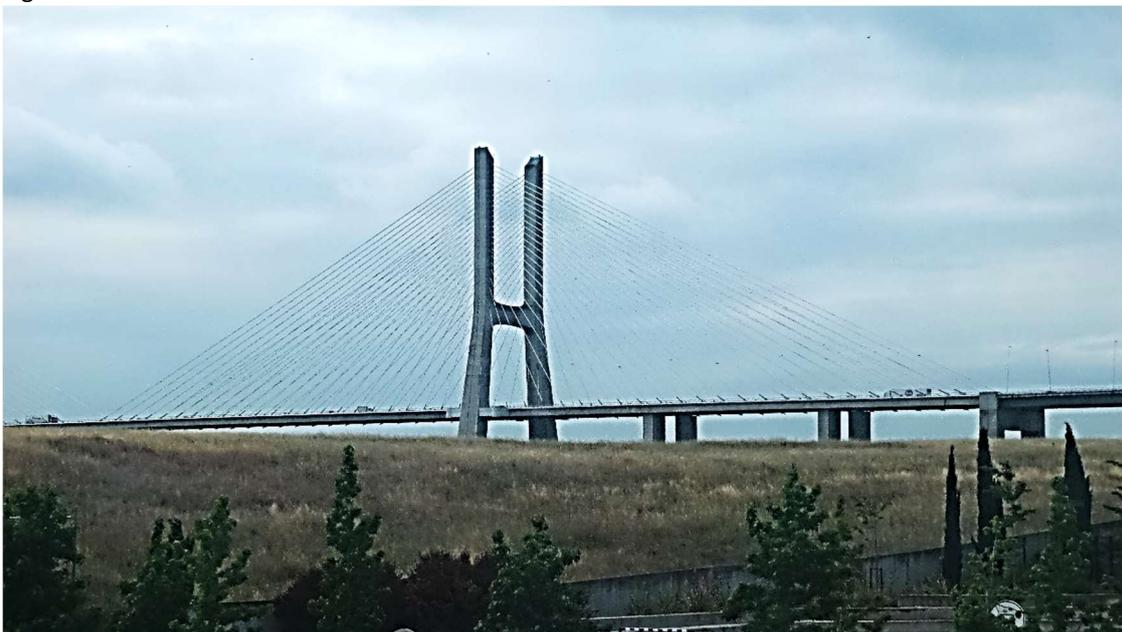
Diferente de outras aulas, não houve a escolha de uma resposta ideal, a diversidade de respostas válidas é que permitiu a formalização do conceito.

#### 7.2.1.5. O Quinto Problema

A Professora Tânia sugeriu que o quinto problema deveria ser gerador dos temas Sequências e Sucessões. Esse talvez tenha sido o problema com maior interação entre o Professor-Pesquisador e a Professora.

Pela janela da sala de aula, eu podia vislumbrar a imagem da Ponte Vasco da Gama, que liga os Distritos de Lisboa e Setúbal. A Ponte Vasco da Gama é uma das maiores pontes da Europa, com 12,3km de comprimento e foi inaugurada no dia 29 de março de 1998, em comemoração aos 500 anos da chegada de Vasco da Gama à Índia, ocorrida em maio de 1498.

Figura 48: Ponte Vasco da Gama – foto tirada de dentro do CPA.



Fonte: O Autor

Figura 49: Ponte Vasco da Gama – vista aérea.



Fonte: O Autor

Elaboramos o problema, inspirado pela Ponte Vasco da Gama, e o enviamos para a Professora Tânia. Ela nos respondeu dizendo que poderíamos incluir dois novos itens ao problema. Numa comunicação, por *e-mail*, ela disse: “Márcio, pensei em alterar algo e acrescentar, para ir ao encontro das definições de sequência e sucessão e suas representações gráficas. O que acha?”

Sugeri a inclusão das seguintes questões ao problema:

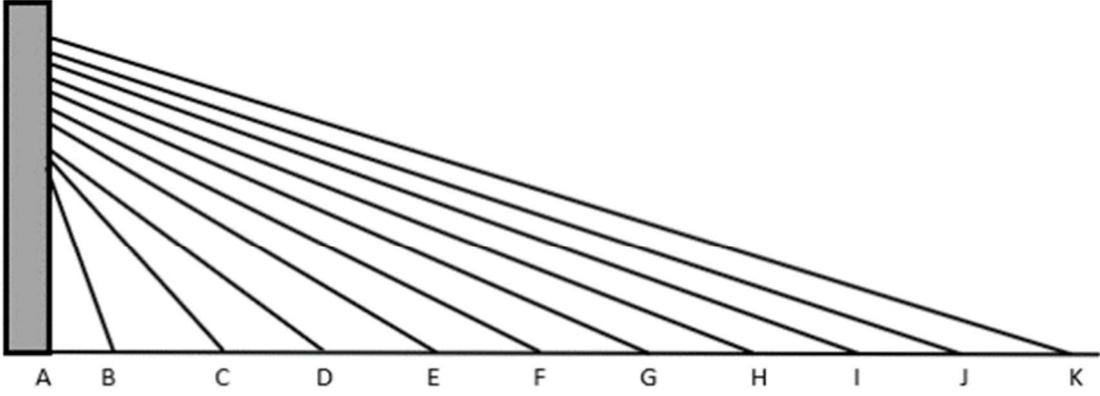
4. Qual é o domínio desta função? E o contradomínio?
5. Esboça no verso da folha o gráfico desta função.

Concordei com suas sugestões e encaminhei-lhe a versão final do enunciado do problema.

Figura 50: Problema 5.

**Problema “A Ponte Vasco da Gama”**

O desenho abaixo é inspirado na Ponte Vasco da Gama. Ele representa um dos pilares da ponte, embora possua um número menor de ligações entre a “grande viga” e a ponte. Sabemos que a distância entre os pontos A e B é igual a 2m, a partir de então a distância entre 2 pontos consecutivos mede sempre 3m.



Nessas condições, queremos saber:

1. Qual a distância entre os pontos A e K?
2. A Ponte Vasco da Gama possui 24 ligações entre o pilar e a ponte. Qual seria a distância entre a base do pilar e a 24ª ligação?
3. Encontre a expressão algébrica da função que represente a distância de um ponto qualquer da ponte até a base A do pilar.
4. Qual é o domínio desta função? E o contradomínio?
5. Esboce no verso da folha o gráfico desta função.

Fonte: O Autor

Essa atividade foi realizada na aula 128, ocorrida no dia 11 de junho de 2018. A Professora Tânia anunciou a formação de seis grupos, três com quatro alunos e três com cinco alunos cada. Um dos grupos de cinco elementos não pôde ser gravado pois contava com os três alunos que não estávamos autorizados a gravar.

Como essa atividade era mais trabalhosa, por causa da quantidade de questões envolvidas, o tempo determinado para sua execução foi de doze

minutos. Porém, como em outras atividades, esse prazo foi insuficiente para a resolução do problema, foi ampliado para vinte minutos.

Distribuímos uma folha com o problema enunciado para cada aluno e, apesar dos procedimentos de preparação para que a resolução do problema fosse a mesma de outras situações, demos orientações necessárias para a execução do trabalho realizando, inclusive, uma leitura conjunta com a classe. Depois nos posicionamos, mais uma vez, como observadores e avaliadores, para iniciar as intervenções necessárias, fornecendo feedback e interagindo com os grupos a fim de proporcionar uma melhora na aprendizagem dos conteúdos trabalhados e um fortalecimento do conteúdo prévio do aluno.

Nem sempre avaliamos ser preciso fornecer feedback e intervir na resolução. Às vezes, o próprio grupo consegue resolver o problema e construir conhecimento matemático novo sem a necessidade de intervenção do professor. Conforme o tempo passa, o professor, que opta pela avaliação dialogada com o objetivo de fomentar a aprendizagem do aluno, consegue perceber quais são os alunos que mais necessitam de auxílio. A Professora Tânia tem essa capacidade bem desenvolvida e sempre busca que os grupos sejam constituídos tanto por alunos com maiores dificuldades para aprender quanto por alunos que conseguem apreender rapidamente novos conteúdos matemáticos. Ela busca, dessa maneira, fazer com que os alunos considerados melhores auxiliem na aprendizagem dos alunos com maiores dificuldades.

Abaixo, acompanhamos a resolução de um dos grupos, que chamaremos de Grupo 1. Esse trecho mostra que a discussão gira em torno de três alunos, enquanto dois deles parecem apenas acompanhar e apoiar os trabalhos. Acho que essa situação poderia ter sido mais bem explorada, buscando uma integração maior entre os componentes do grupo.

Nelson: *Já está pronto?*

Gabriel: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 29. *Então... Qual é a distância entre A e K?*

Rogério: *Mas tem que fazer contas.*

Gabriel: *É 29! 29 ou 27 não sei mais. Eu já contei, dá 29.*

Gabriel repete a contagem e conclui.

Gabriel: *É mesmo 29.*

Professor-Pesquisador: *Como estão indo?*

Mario: *Já temos a resposta... Já temos o um aqui.*

Rogério: *Mas não é para medir somente.*

Gabriel: *9 vezes três, 27, mais dois é 29.*

Figura 51: Resolução do item 1 do Problema pelo Grupo 1.

**Nessas condições, queremos saber:**

**1. Qual a distância entre os pontos A e K?**

$$29 \quad (3 \times 9) + 2 = 29$$

Fonte: Dados da pesquisa

O Professor-Pesquisador percebe que a resolução do problema parece encaminhada e se distancia do grupo, que continua a discutir.

Rogério: *A Ponte Vasco da Gama possui 24 ligações entre o pilar e a ponte. Qual seria a distância entre a base do pilar e a 24ª ligação?*

Mario: *Aqui no primeiro dá 29 metros. Não é?*

Rogério: *É!*

Gabriel: *No segundo, é 23 vezes três mais dois...*

Mario: *São 24 ligações vezes três...*

Gabriel e Rogério: *23.*

Rogério: *É 23 vezes três mais dois.*

Gabriel: *23 vezes três mais dois, é isso mesmo.*

Nelson: *Explica!*

Rogério: *Por exemplo, aqui tem um, dois, três, ... até o kapa<sup>24</sup> são dez, menos um é nove. Aí soma o dois, que é a primeira medida...*

Gabriel: *Rogério... e essa calculadora? 23 vezes três?*

Rogério: *69! O resultado é 71.*

Figura 52: Resolução do item 2, pelo Grupo 1.

A photograph of a piece of paper with a handwritten mathematical expression in black ink. The expression is written as "2. 23 x 3 + 2 = 71". The numbers are somewhat blurry and the handwriting is casual.

Fonte: Dados da pesquisa

Gabriel: *Isso está muito fácil. Encontre, agora, a expressão algébrica da função que represente representa a distância de um ponto qualquer da ponte até a base A do pilar.*

Rogério: *x menos um... vezes três... mais dois. Essa é a expressão geradora, não é? Eu acho que é  $(x - 1) \cdot 3 + 2$ .*

Gabriel: *Você acha que é essa?*

Rogério: *Por exemplo, 24 menos um é 23... vezes três dá 69... mais dois dá 71.*

Gabriel: *Deixe-me ver! É a mesma coisa que está ali. Vamos ver o que é melhor.*

Mario: *n menos um... vezes três... mais dois.*

Os alunos começaram a verificar suas operações.

Gabriel: *Entre parênteses... zero menos um, vezes três, mais dois.*

Nilton: *Vê a do Gabriel... a do Gabriel está certa e provada.*

Nelson: *Mas é que com o zero é complicado.*

Mario: *A do Gabriel é bem mais simples. Como é mesmo Gabriel?*

---

<sup>24</sup> A letra K.

Gabriel: *Qual é a tua?*

Mario:  *$3n - 1$ .*

Gabriel: *Está mais simples.*

Nelson: *E o domínio? Qual é o domínio dessa função?*

Gabriel: *O domínio era o primeiro elemento e o contradomínio é o segundo.*

Rogério: *Não! O domínio é dois, três, três, três, ...*

Gabriel: *Não, não é!*

Mario: *É só dois e três.*

Rogério: *Se o domínio é só dois e três, não podemos escrever o mesmo número muitas vezes.*

Nilton: *Olha o domínio é três e o contradomínio é dois. O que vocês acham que é o domínio?*

Gabriel: *Não! O domínio é 1, 2, 3, ... 10.*

Mario: *E qual é o contradomínio?*

Gabriel: *É cada ligação, de dois ou três.*

Mario: *O domínio é 71 e o contradomínio é dez?*

Nilton: *Não é 24?*

Mario: *Mas porque seria 24?*

Nilton: *Porque tem 24 ligações.*

Gabriel: *Acho que o domínio é cada ligação e o contradomínio são as distâncias até o pilar...*

Figura 53: Resposta ao item 4, pelo Grupo 1.

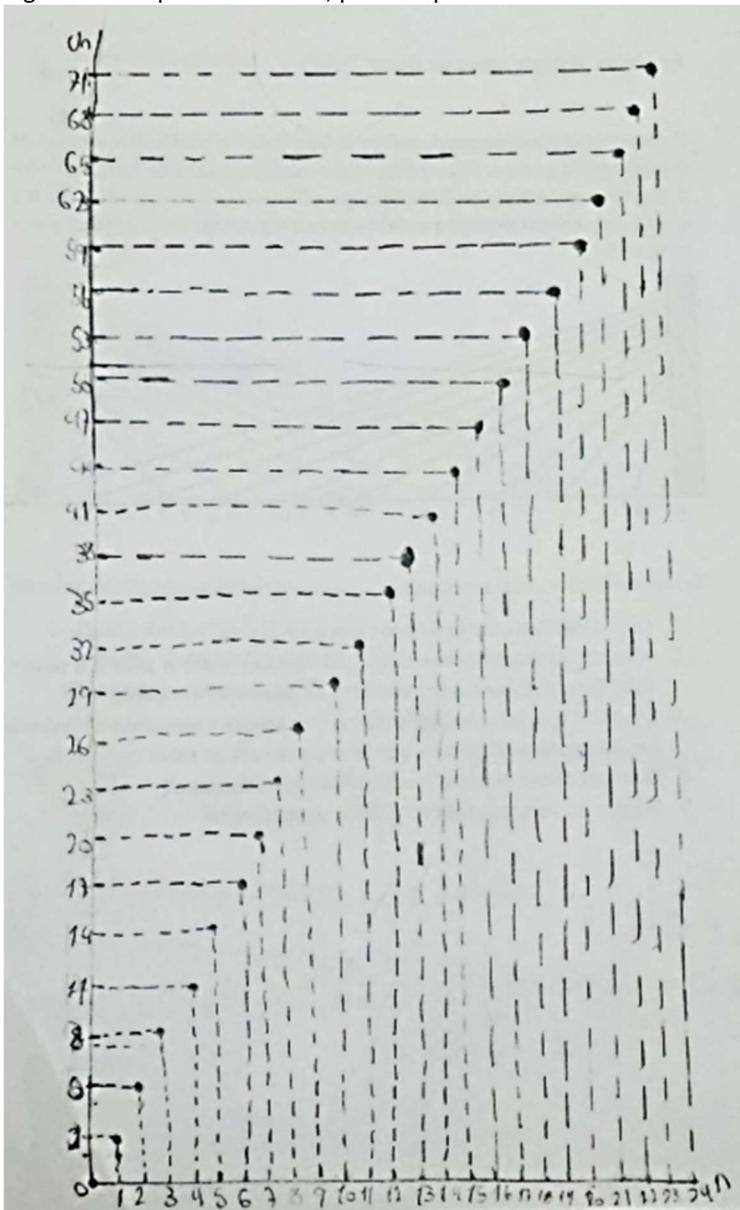
$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$CD = \{2, 5, 8, \dots\}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Depois desse bate-papo, os elementos do grupo elaboraram a seguinte representação gráfica:

Figura 54: Resposta ao item 5, pelo Grupo 1.



Fonte: Dados da pesquisa

Enquanto o Grupo 1 mostrou bastante autonomia, o trecho a seguir mostra a necessidade de intervenção do professor naquilo que os outros grupos apresentaram. Mais ainda, a necessidade de validação das respostas e de feedback durante praticamente todo o processo de resolução do problema. No caso do Grupo 2, antes mesmo de um professor iniciar o processo de intervenção, o Professor-Pesquisador é chamado à discussão.

Rinaldo: *Professor Márcio. Isto é o pilar, certo?*

Professor-Pesquisador: *Sim!*

Norma: *Encontrei todos os números já.*

Rinaldo: *Fica quieta...*

Professor-Pesquisador: *Na verdade, se olharem pela janela verão que na ponte há um pilar e barras a ligar o pilar e a ponte. Agora, a distância que se fala no problema é a distância entre os pontos. Ou seja, nesse plano aqui... essas outras distâncias, verticais, não importam.*

Rinaldo: *Então 24 multiplica três, depois somamos dois.*

Professor-Pesquisador: *Tem certeza? Se multiplicamos os 24, por que somamos dois?*

Rinaldo: *O primeiro é dois e o resto é que mede três.*

Professor-Pesquisador: *Sim. Isso é algo que acontece na ponte, embora não se saibam se são essas mesmas medidas... o primeiro intervalo é menor que os demais...*

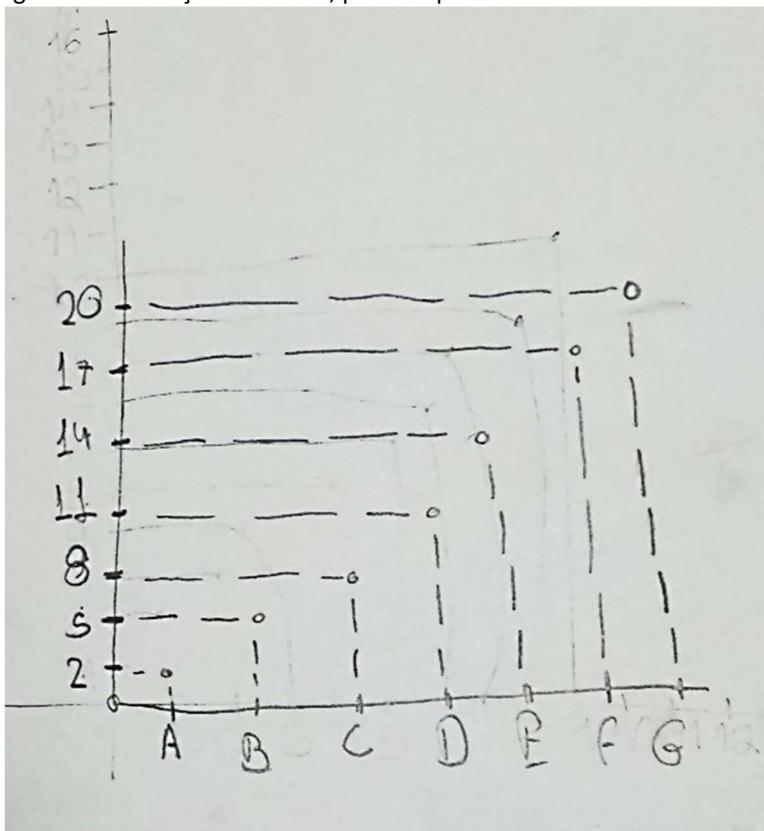
Rinaldo: *Dá 71 metros.*

Após esse diálogo o professor se afasta para atender a outro grupo, assim que possível, ele retorna:

Professor-Pesquisador: *Hei Jonas, está saindo aí? Vocês já fizeram o gráfico de função? Não fizeram?*

O Professor-Pesquisador olha para a representação gráfica do Grupo 2 (Figura 55) e questiona: *O gráfico da função possui um eixo numérico e outro representado por letras?*

Figura 55: Resolução do item 5, pelo Grupo 2.



Fonte: Dados da pesquisa

Rinaldo: *Está mal feito.*

Professor-Pesquisador: *Estou perguntando... não estou falando que é assim. As funções não seriam representadas num plano com dois eixos numéricos? Aqui estão as distâncias... e aqui, o que poderia ser colocado no lugar dessas letras?*

Rinaldo: *Não...*

Professor-Pesquisador: *Estou perguntando! Vejam: vocês fizeram uma função, não foi? Cadê a função?*

O professor olha a função na folha de resolução do grupo.

Professor-Pesquisador: *A função é  $3x + 2$ ? E o que é o  $x$ ?*

Rinaldo: *É o número de ligações.*

Professor-Pesquisador: *O número de ligações? Então, quer dizer que se houver uma única ligação... vai dar 5? O que acha?*

Rinaldo: *Não percebi.*

Professor-Pesquisador: *Só uma ligação... A distância até ela é 5 metros?*

Rinaldo: *Não.*

Professor-Pesquisador: *Essa função... acha que está correta?*

Rinaldo: *Não!*

Professor-Pesquisador: *Então como seria Rinaldo?*

Rinaldo: *x vezes três... não...*

Professor-Pesquisador: *x vezes três... continue!*

Rinaldo: *x vezes três mais dois, menos três.*

Professor-Pesquisador: *Ok! E quanto é isso? Dá para simplificar? Colocar na forma canônica<sup>25</sup>?*

Rinaldo: *Dá...  $3x - 1$ !*

Professor-Pesquisador: *Achou uma função diferente da que estava, não? Bem, mas para ser uma função falta algo, não falta?*

Rinaldo: *Sim...*

Professor-Pesquisador: *Isso tudo aqui é uma distância..., mas o valor de x não é distância... Percebe?*

Rinaldo: *Sim.*

Professor-Pesquisador: *Entendeu Marina?*

Marina: *Sim! Essa função vai ser igual a y.*

---

<sup>25</sup> A forma mais simples de se escrever uma expressão. Esse termo é utilizado com naturalidade pelos alunos portugueses.

Professor-Pesquisador: A y? O que isso diz sobre os eixos?

Marina: Diz que tem um eixo x e um eixo y, com valores. Quando o x for um... o y é dois. Quando o x for dois... o y é cinco.

Jonas: Sim... É isso mesmo!

Professor-Pesquisador: Percebeu Melissa?

Melissa: Não!

Rinaldo: Estás a brincar?

Melissa: Não.

Norma: Quando x é um, y é dois. Quando x é dois, y é cinco. Se substituir os valores de x, encontramos os respetivos valores de y.

Na etapa seguinte, a Professora Tânia solicitou que cada grupo colocasse sua resposta no quadro e a comentasse. Infelizmente, as respostas erradas não foram registradas<sup>26</sup>, mas temos os registros dos comentários e das soluções escolhidas pelos alunos como sendo as mais satisfatórias.

Figura 56: Respostas escolhidas pelos alunos para os itens de 1 a 4.

3)  ~~$y = 3x - 1$~~   $(x-1) \times 3 + 2 = 3x - 3 + 2 = 3x - 1$   
 $y = 3x - 1$

4)  $D = \{1, 2, 3, \dots, 24\}$   
 $D' = \{2, 5, 8, \dots, 71\}$

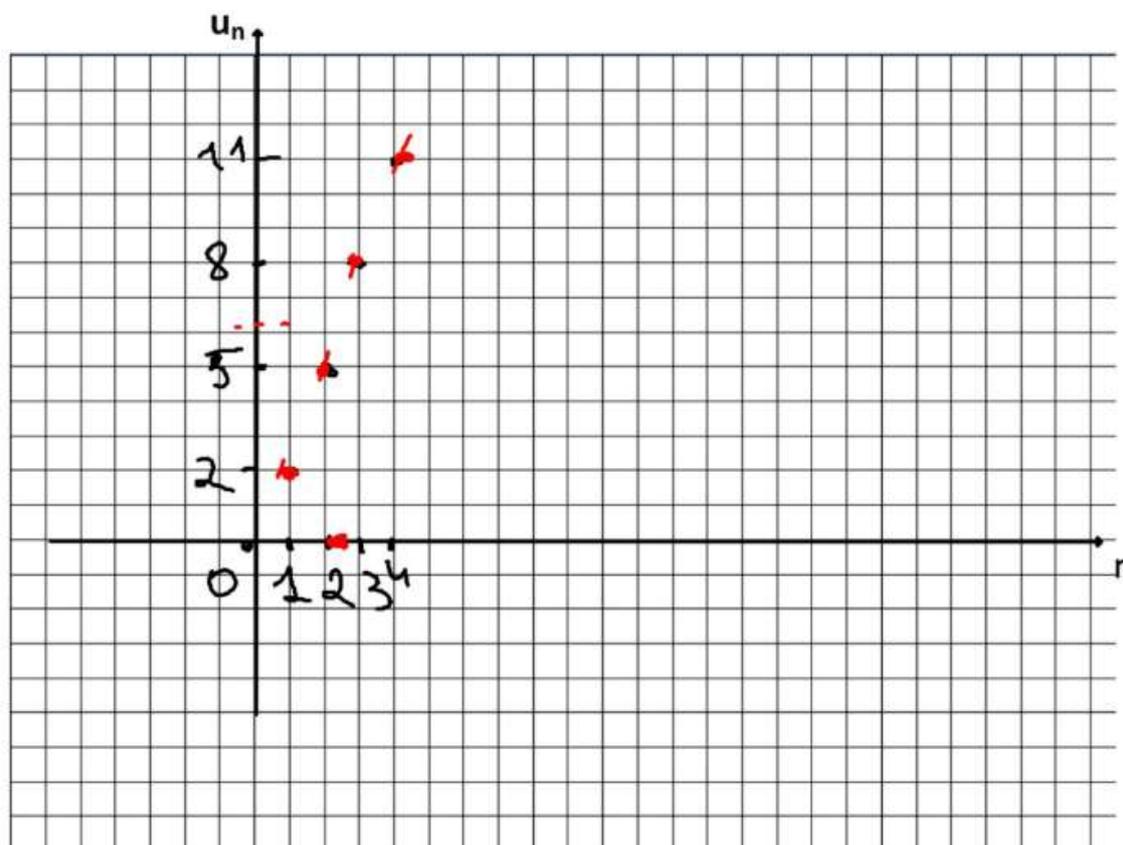
1)  $2 + 3 + 3 + \dots + 3 = 29$   
 $9 \times 3 + 2 = 29$

2)  $23 \times 3 + 2 = 71$  |  $2 + 3 \times (24 - 1) =$   
 $24 \times 3 - 1 = 71$

Fonte: Dados da pesquisa

<sup>26</sup> Os alunos corrigiram a questão antes que recolhêssemos sua produção.

Figura 57: Resposta ao item 5 escolhida na Plenária.



Fonte: Dados da pesquisa

Antes de compilar essas respostas, a professora foi ao quadro e pediu que cada grupo comentasse sua resolução.

Diego: *Somamos 2 mais três, mais três, mais três, ... até chegar ao ponto kapa!*

Professora: *Fizeram assim... Escreveram todos os números, né? E deu quanto?*

Diego: *Deu 29 metros.*

Professora: *E o grupo do Rogério?*

Rogério: *Multiplicamos 9 por três e somamos dois.*

Professora: *Por quê?*

Rogério: *Porque são 9 espaços iguais a três... e como o primeiro mede dois, somamos.*

Os demais grupos alegaram ter realizado a tarefa usando uma dessas duas estratégias, de modo que não tiveram suas soluções expostas no quadro.

Professora: *Todos concordam com o que fizemos aqui? Há uma estratégia mais extensa e outra que é mais sintética. Ponto 2, o que vocês fizeram?*

Norma: *23 vezes três mais dois.*

Professora: *Assim? E escreveu no quadro  $23 \cdot 3 + 2$ . E deu quanto?*

Norma: *71.*

Professora: *71?*

Norma: *71 metros.*

Professora: *Explica por que é isso, por que quer 23 e não 24?*

Norma: *Porque o primeiro mede dois metros.*

Professora: *Mas não estou a perguntar do dois ou três metros, estou a perguntar por que não é 24, mas 23... Jonas?*

Jonas: *São 24 ligações, mas só 23 têm a mesma medida.*

Professora: *Ou seja, são 23 que tem três metros, a vigésima quarta tem, nesse caso, dois metros. Há algum outro grupo que fez de outra forma?*

Margarida: *Nós fizemos 24 vezes três menos um.*

Professora: *Então Margarida, explica lá... como é que fizeram.*

Margarida: *Eram 24 pilares vezes três metros e depois menos um metro do primeiro trecho.*

Professora: *Então... Aqui é como se fosse tudo de três metros e depois tiraram uma unidade porque o primeiro espaço mede dois metros. Livia, querem compartilhar algo conosco?*

Livia: *Sim, mas temos certeza que erramos.*

Professora: *Vá lá! Qual foi a estratégia?*

Lívia: *Dois mais três vezes 24 menos um.*

Professora: *Mas, 24 menos um... deixaram sem parênteses, é isso?*

Lívia: *Com parênteses.*

Professora: *Mas isso não está errado... pensas. Então vamos ver, acham que isso é errado? A Lívia acha e vocês não?*

Embora ela tenha escrito a expressão correta, a operacionalização não foi adequada, o que resultou numa resposta errada.

Figura 58: Resolução do item 2, pelo grupo da Lívia

The image shows a handwritten mathematical expression on a light-colored background. The expression is written in black ink and reads:  $2+3 \times (24-1) = 2+3 + 23 = 5 \times 23 = 115$ . The student has incorrectly interpreted the order of operations, adding 2 and 3 before multiplying by 23.

Fonte: Dados da pesquisa

Se por um lado compreendemos a necessidade de agilizar os processos de discussão ao realizar uma exploração oral, como a realizada nesse instante, podemos perder boas oportunidades de avaliação para a aprendizagem. Nesse caso, deixamos de evidenciar que alguns alunos não haviam compreendido a importância de se obedecer a uma ordem de resolução de operações numa expressão.

Diego: *Sim, sim... deu o resultado correto.* (o Diego era do mesmo grupo da Lívia)

Professora: *Pois... Imaginem... 24 menos um é 23. 23 vezes três é 69, mais dois é 71. Deu o mesmo resultado.*

E continuou falando, agora se referindo ao item 3 do problema:

Professora: *Qual é a expressão algébrica que representa a função?*

Talita:  $x = (x - 1) \cdot 3 + 2$ .

A professora coloca a expressão no quadro e diz:

Professora: *Aqui é x?* (aponta para o primeiro x)

Talita: *Sim!*

Professora: *Pode ser x? x aqui e aqui? (mostrando no quadro)*

Talita: *Tem que ser y!*

Professora: *Corrigindo então...  $y = (x - 1) \cdot 3 + 2$ . (...) Melissa, como fizeram?*

Melissa:  $y = 3x - 1$ .

Professora: *Qual expressão algébrica está correta?*

Gabriel: *As duas estão.*

Professora: *Por quê?*

Gabriel: *São expressões equivalentes.*

Mario: *A da Melissa está na forma canônica!*

Professora: *Vamos ver se essas duas expressões são equivalentes. Se desembaraçarmos os parênteses aqui (olhando para  $y = (x - 1) \cdot 3 + 2$ ), mentalmente, fica  $3x - 3 + 2$ . Quanto dá?  $3x - 1$ . É a mesma expressão, só que aqui está na forma canônica.*

Quanto ao quarto item, houve consenso, com relação aos valores do domínio e do contradomínio, apesar de a maioria dos grupos ter indicado os conjuntos como sendo infinitos, embora houvesse uma quantidade limitada de elementos, segundo a situação apresentada.

Professora: *Vamos ver qual é o domínio. Então vocês lembram que o domínio é, numa função, o conjunto de partida e o conjunto de chegada é o contradomínio? Qual é o domínio Cássia?*

Cássia: *É 1,2,3...*

Professora: *Ou seja, o domínio é o número de ligações. E o contradomínio?*

Cássia: *É 2,5,8 ...*

Professora: *E de onde vem o dois? De onde vem o cinco?*

Cássia: *Da expressão algébrica,  $y = 3x - 1$ .*

Depois disso, a própria professora esboçou o que seria a representação gráfica da função, conforme mostra a Figura 57. E continuou o diálogo com a turma.

Professora: *O que fizemos aqui foi trabalhar com sequências. Temos aqui uma grandeza de ordem e termos relacionados a ela... O que temos no domínio? Ordem ou termos?*

Sala: *Ordem.*

Professora: *E no contradomínio?*

Sala: *Termos.*

Professora: *Pois bem, vejam que o gráfico apresenta pontos, pois os valores são discretos, pontuais... À primeira distância está relacionado o termo 2... à segunda distância, o termo 5... e assim vai até chegarmos à 24ª distância, que está relacionada ao termo 71.*

Em ato contínuo, a professora colocou no quadro a formalização dos conceitos trabalhados e, conforme discorria sobre os temas, acrescentava as informações necessárias para a compreensão do aluno sobre cada tema.

Figura 59: Sobre sequências

**Sequência de N elementos é uma função de domínio:**

$\{1, 2, 3, 4, \dots, N\}$

sendo N um número natural.

**Exemplo**

ordem (n)	termo ( $U_n$ )
1º	2
2º	5
3º	8
4º	11
...	...
24º	71

$U_n$  ou  $u(n)$

Termo geral:

$3n - 1$  ou

$3(n-1) + 2$

Numa sequência o domínio é finito.

Figura 60: Sobre sucessões

Uma sucessão é uma função de domínio  $\mathbb{N}$ .

$$D = \{1, 2, 3, \dots\}$$

**Exemplo**

A sucessão dos números ímpares

ordem (n)	termo ( $U_n$ )
1º	1
2º	3
3º	5
4º	7
...	...

Termo geral:

$$2n - 1$$

Numa sucessão o **domínio é infinito**.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 61: Finalização.

**O gráfico de uma sequência ou sucessão é um conjunto de pontos isolados**

Fonte: Dados da pesquisa

### Discussão sobre a aula:

É inegável a existência de uma ampla gama de possibilidades de trabalho quando utilizamos a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A oportunidade de se realizar uma avaliação constante, oferecida por essa Metodologia, nos permite reconhecer cada vez mais e melhor os alunos e facilita a leitura dos seus modos de pensar, além de permitir a construção de uma imagem sobre a maneira como o aluno reage a determinadas situações para modificar práticas, formular argumentos, dicas e questionamentos que possuam a dupla função de fornecer *feedback* e de promover a aprendizagem.

A atividade sobre a Ponte Vasco da Gama ocorreu no final do terceiro período do ano letivo 2017/2018. Nessa época, o Professor-Pesquisador estava

bem mais integrado ao cotidiano do 7º ano e sua presença proporcionou muito mais oportunidades de aprendizagem que em outras situações. Esse fato nos indicou a importância da relação entre professor e aluno tanto para a aprendizagem quanto para a avaliação para a aprendizagem do aluno. Percebemos que os alunos estiveram mais à vontade para solicitar minha intervenção e muito mais solícitos para responder aos questionamentos feitos por mim.

Ainda assim, é preciso salientar algumas oportunidades que poderiam ter sido mais bem aproveitadas no transcorrer da aula.

O Grupo 1, apresentou uma atitude bastante autônoma, principalmente se compararmos aos outros grupos. Porém, como a discussão ficou concentrada em três alunos, poderíamos intervir e trazer os alunos mais calados à discussão, procurando observar como estaria ocorrendo a compreensão dos trabalhos realizados pelo grupo e como teria sido a contribuição deles à resolução do problema apresentado. Caso essa contribuição tenha sido nula ou significativamente pequena, deveríamos ter buscado meios de confrontá-los para compreender seus pontos de vista e o modo como poderiam ter colaborado.

Uma outra observação importante ocorreu durante a intervenção do Professor-Pesquisador ao Grupo 2. Ao questionar Melissa sobre seu entendimento a respeito da resolução da questão, que versava sobre a obtenção da expressão algébrica que denotava uma função para representar a distância entre um ponto qualquer da ponte e a base do pilar, o Professor-Pesquisador obteve uma negativa como resposta. Curiosamente, o Professor-Pesquisador não insistiu na pergunta, não argumentou e não deu dica. Nesse momento, ele prefere deixar que o próprio grupo explique a questão à aluna. Em outras aulas, situações como essa aconteceram e o Professor-Pesquisador precisou chamar outro aluno à discussão, mas, nessa aula, diante do silêncio do professor, um aluno do grupo se prontificou a lhe explicar. Esse é um dos bons motivos para que o trabalho seja realizado em grupos.

Uma outra observação importante é que a Professora Tânia optou por escrever, ela própria, as respostas dos alunos no quadro. Eles discursavam

sobre suas resoluções e ela registrava as informações no quadro. Isso vinha funcionando bem em outras aulas, mas, nessa última aula, evidenciou um pequeno problema nesse tipo de estratégia. Para encontrar a distância entre a base do pilar e a 24ª ligação entre o pilar e a ponte, um grupo utilizou a lei de formação  $y = 2 + 3(x - 1)$ , substituindo  $x$  por 24. Quando a professora questionou a utilização dos parênteses, Lívia disse que haviam utilizado os parênteses, mas não teve oportunidade de mostrar que o desenvolvimento seguinte fora equivocado. Seu grupo operou a soma antes da multiplicação, gerando um resultado errôneo.

É evidente que perceberam o erro, pois obtiveram um resultado diferente do esperado, mas fica o questionamento: eles conseguiram entender que o erro estava na sequência de operações que deveriam ter sido realizadas? Se os alunos tivessem colocado sua resposta no quadro, a resolução poderia ter sido confrontada e a professora poderia ter feito referência a uma de suas aulas anteriores, quando elencou a ordem em que as operações, numa expressão algébrica, devem ser resolvidas.

## 8. RELATANDO RESULTADOS DE PESQUISA

Não há pesquisa que se encerre em si mesma. As possíveis verdades estabelecidas estão em constante desenvolvimento e o fruto do processo de investigação deve estar sustentado pelas ideias trabalhadas ao longo dele e pelas evidências coletadas e analisadas. O principal objetivo é o de responder às inquietações que desencadearam o processo de investigação e que é o cerne desta pesquisa.

Vamos lembrar que, ao iniciar nossa pesquisa, questionamos: De que maneira a avaliação para a aprendizagem deveria (ou poderia) acontecer durante aulas de Matemática que utilizem a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Neste capítulo pretendemos apresentar algumas conclusões sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e, depois, sobre a Avaliação para a Aprendizagem, tudo sob a luz de nossas evidências e sempre vislumbrando o referencial teórico que construímos, antes de responder nossa pergunta de pesquisa.

### 8.1. Sobre a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

Nossa pesquisa nos deixou evidente algumas situações a respeito da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Assim como o livro *How People Learn II: Learners, Contexts, and Cultures*, publicado em dezembro de 2018, pudemos perceber a necessidade de tangenciar, na sala de aula de matemática, os componentes constituintes da proficiência em matemática. Esses componentes podem ser: 1. **a compreensão conceitual**, que se refere à compreensão, pelo aluno, de conceitos, operações e relações matemáticos; 2. **a fluência processual**, que permite que o aluno

execute apropriadamente procedimentos de natureza matemática com flexibilidade, precisão e eficiência; 3. **a competência estratégica**, que é o conjunto de capacidades que possibilitam, ao aluno, formular, representar e resolver problemas matemáticos; 4. **o raciocínio adaptativo**, que é a capacidade de pensar logicamente e de refletir, além de explicar e justificar argumentos matemáticos e; 5. **a disposição produtiva**, que se refere a uma inclinação habitual do estudante para ver a matemática como uma disciplina sensível, útil e valiosa a ser aprendida, somada com uma crença no valor do trabalho diligente e na sua própria eficiência como executor matemático (NATIONAL ACADEMIES OF SCIENCES, ENGINEERING, AND MEDICINE, 2018).

Por outro lado, pode-se perceber, cotidianamente, uma preocupação excessiva com a fluência processual, enquanto os outros componentes, imprescindíveis à proficiência em matemática e, conseqüentemente, indispensáveis à obtenção de sucesso pelos alunos, ficam relegados a segundo plano. Nossa pesquisa evidenciou que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas possui um forte apelo a todos esses componentes.

Nessa Metodologia, a compreensão conceitual é desenvolvida durante todo o processo de resolução do problema e durante a formalização do conteúdo. Além disso, após a instituição dos conceitos matemáticos trabalhados, a proposição de novos problemas enriquece o trabalho. Além disso, para atacar o problema, conforme concepção de Mason, Burton e Stacey (2010), é necessário existir uma competência estratégica, que é ampliada enquanto os estudantes elaboram um plano de ação, revisitam estratégias de resolução de problemas correlatos, raciocinam sobre possíveis estratégias vencedoras utilizadas em outras situações e executam as etapas previstas em suas estratégias para a resolução do problema.

Por integrar o processo de avaliação aos processo de ensino e de aprendizagem, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas permite que o professor, ao

intervir durante a resolução do problema, possa desafiar o aluno a desenvolver a capacidade argumentativa ao lhe permitir declarar assertivamente a respeito dos conteúdos trabalhados no problema, bem como sobre as estratégias de resolução e apreensão do novo conteúdo matemático trabalhado, além de suscitar discussões sobre a matemática, previamente concebida, que fora necessária para a execução das estratégias de resolução utilizadas.

Ainda consegue demonstrar a força que possui a Matemática, especialmente quando os problemas geradores estão relacionados com situações problemáticas da vivência cotidiana do aluno. Esse tipo de situação, mais do que permitir um vislumbre da disposição produtiva do aluno em matemática, permite que se desenvolva a sensibilidade dos educandos à disciplina Matemática, relacionando utilidade e praticidade ao prazer de aprender e à sensação de empoderamento ao descobrir a chave que desvenda um problema.

Por contemplar a realização de trabalhos colaborativos, essa Metodologia pode desenvolver o espírito de equipe e de solidariedade e despertar, em alguns alunos, o senso de liderança. Quando os elementos dos grupos se encontram em estágios diferenciados de aprendizagem e autonomia, o trabalho em grupo mostrou-se como uma boa oportunidade de democratização do ensino. Os próprios alunos podem orientar e instruir seus colegas ao construir uma solução ideal e, em bate-papos bilaterais, fortalecer ideias promissoras para que se transformem em boas estratégias de resolução do problema.

Nem tudo, porém, é satisfatório e positivo. Nossa pesquisa evidenciou que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas pode enfrentar determinadas dificuldades. Uma dessas dificuldades se encontra no fato de que há um programa a ser cumprido e o tempo precisa ser controlado por dois motivos: primeiro, o tempo tem que ser suficiente para que os grupos resolvam o problema gerador; segundo, o tempo não pode ser tal que comprometa o desenvolvimento do programa matemático previsto para aquele período letivo. Van de Walle (2009) sugere que deve-se trabalhar com as grandes ideias, isso significa que, para lograr vantagem na

utilização dessa metodologia, talvez fosse adequado fazer uma revisão dos tópicos matemáticos que farão parte do currículo escolar.

A Professora Tânia falou sobre os pontos positivos e negativos percebidos por ela durante a aplicação do nosso Projeto.

*Professora Tânia: É positivo (reconhecer) que os alunos, através de uma tarefa que foi feita com um propósito... uma tarefa bem diferente... conseguissem chegar a um conceito que se pretenda trabalhar em aula. Isso é positivo! Positivo é... que ainda há... a discussão em grupo, a partilha de ideias, a partilha de erros, o feedback que o professor dá ao grupo... Nessa interação não há coisas negativas... são todas positivas porque o objetivo é aprender e, assim, eles estão a aprender e estamos a fazer com que o aluno aprenda. Agora negativos... o tempo... o tempo tem que ser... tem-se que gerir o tempo bem. Não é tão rico quando não se faz tudo em uma aula... tem que se fazer tudo em uma aula porque se deixarmos para a próxima... Pronto, não resulta... Para a próxima aula temos que deixar só o reforço daquilo que fizemos, mas, as conclusões na outra aula... é um tipo de lacuna... há uma distância e já não é assim tão benéfico.*

Não precisamos de muito esforço para perceber a preocupação da Professora Tânia em agilizar os processos envolvidos em cada atividade proposta. Desde a preocupação em cronometrar o tempo, supostamente necessário para a resolução do problema, até a realização de algumas alterações nos procedimentos próprios da Metodologia. Não significa que, ao alterar passos e procedimentos sugeridos pelo GTERP para uma aula de matemática, trabalhada a partir da proposição de um problema gerador de aprendizagem, a Metodologia tenha sido descaracterizada. Muito pelo contrário, isso reafirma a gênese do trabalho proposto pelo GTERP que, ao longo dos anos, tem defendido a versatilidade da metodologia, podendo sofrer influências de outras metodologias e ter seu roteiro, proposto por Onuchic (1999) e depois por Onuchic e Allevato (2011 e 2014), alterado segundo as necessidades da aula, do professor, da turma, etc.

Todas essas possíveis alterações advêm de um processo constante de autoavaliação pelo professor, de avaliação dos processos de ensino-

aprendizagem e de meta-avaliação. Ou seja, mais uma vez a avaliação se apresenta como o cerne do processo educativo por direcionar práticas e alavancar mudanças nas características das metodologias utilizadas pelo professor. Ressaltamos que as avaliações aqui citadas podem gerar alterações na prática docente independentemente das metodologias que o professor possa ter elegido como ideal para a construção do conhecimento matemático pelo educando.

## **8.2. Sobre a Avaliação para a Aprendizagem**

A Avaliação para a Aprendizagem é um processo de pesquisa contínuo, onde as evidências encontradas são utilizadas, tanto por professores quanto por alunos, para localizá-los em relação à aprendizagem dos estudantes, e decidir onde precisam chegar e como é possível melhorar (ARG, 2002).

Nosso trabalho acompanhou a professora Tânia durante todo o terceiro período escolar do ano letivo 2017/2018, que ocorreu entre os dias 12 de março e 15 de junho de 2018. Além dessas datas, pude assistir as aulas dos dias 5 e 8 de março com a finalidade de conhecer a turma e tornar natural minha presença. Desde a primeira aula, percebemos o comprometimento da professora Tânia com a avaliação. Não apenas a avaliação com propósito somativo, mas fundamentalmente com uma avaliação calcada no compromisso com a aprendizagem dos alunos.

Essa sua relação com a Avaliação esteve presente durante todo o trimestre letivo. A Professora Tânia procurava sempre trazer os alunos à discussão, principalmente aqueles cujas dificuldades estavam mais aparentes. Eis uma característica da Avaliação para a Aprendizagem: fomentar a construção do conhecimento pelos alunos.

Por estar aberta a novas possibilidades como, por exemplo, vivenciar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, essa professora responde ao primeiro princípio da Avaliação para a Aprendizagem, sugerindo que a Avaliação seja parte de um

planejamento efetivo. E, por isso, precisa garantir que a avaliação seja desenhada desde o início, numa relação biunívoca entre o docente e o estudante, para que o segundo alcance o sucesso em matemática enquanto o primeiro desempenha seu papel como condutor da construção do conhecimento pelo aluno.

Nossa pesquisa mostrou que a Avaliação para a Aprendizagem pode acontecer discreta e sutilmente ou mesmo deliberadamente durante o transcorrer da aula de Matemática e afeta significativamente o desempenho dos alunos.

### **8.3. Sobre a Avaliação para a Aprendizagem numa abordagem baseada na Resolução de Problemas**

Nossa pesquisa mostrou que, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a avaliação está focada mais no processo de aprendizagem do que, propriamente, nos resultados do desempenho do aluno e na reprodução de conceitos, propriedades e algoritmos.

A avaliação pode direcionar o processo de aprendizagem e a motivação de modo positivo e fornece feedback para identificar possíveis melhorias e marcar o progresso. É mais eficaz quando, através dela, conseguimos refletir sobre o modo como as pessoas aprendem. Na Educação Básica, as avaliações precisam estar direcionadas para um público bastante variado e os alunos precisam saber se estão aprendendo o conteúdo trabalhado e se estão adquirindo as habilidades pretendidas. Por outro lado, os professores têm que saber se a abordagem pedagógica está contribuindo para o progresso do aluno e é preciso comunicar aos pais se o que seus filhos estão aprendendo é realmente relevante (NATIONAL ACADEMIES OF SCIENCES, ENGINEERING, AND MEDICINE, 2018). É nesse cenário que as avaliações acontecem e, diante de tantas variáveis, a Avaliação para a Aprendizagem precisa ser complementada por avaliações que considerem outros propósitos, como a Avaliação Somativa que tem o objetivo primeiro de sintetizar o desenvolvimento

do aluno para apresentar uma nota, que supostamente reflita o nível de competência do avaliado, para justificar o trabalho docente e o desempenho do estudante para os pais e para a sociedade.

Nossa pesquisa evidenciou o papel da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas enquanto Avaliação para a Aprendizagem. Mas como acontece essa Avaliação?

A seguir procuramos retratar o modo como a Avaliação para a Aprendizagem acontece, ou pode acontecer, na sala de aula de Matemática, quando trabalhamos com Resolução de Problemas, na perspectiva do GTERP. Seguindo as orientações do ARG (2002), pudemos identificar durante a aplicação dessa metodologia que ela:

### **1. Pode ser identificada como parte de um planejamento efetivo.**

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas não é uma aventura fortuita, ela exige planejamento e cuidados com a execução. É preciso, cautelarmente, buscar caminhos possíveis para a resolução do problema para que o professor não seja pego desprevenido diante de uma resolução diferente das resoluções triviais. É preciso que o professor seja flexível e esteja atento às possibilidades que se revelam durante a aula. Houve momentos em que deixamos passar boas oportunidades de interação entre o professor e os alunos, que poderiam ter desencadeado processos bastante mais ricos de apreensão da informação e da consequente construção do conhecimento matemático pelo estudante. O feedback tem que acontecer constantemente para que os alunos tenham condições de prosseguir o trabalho, a partir da intervenção do professor, com segurança e criatividade.

## **2. Focaliza como os alunos aprendem.**

O processo de aprendizagem acontece por um esforço conjunto de dois outros processos, o processo de ensino e o processo de aprendizagem. Assim, não conseguimos pensar, dentro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, nesses processos separadamente. Quando utilizamos a palavra composta Ensino-Aprendizagem-Avaliação pensamos num único processo. Não nos parece adequado pensar num processo de ensino que não resulte na aprendizagem do aluno e a avaliação precisa ocorrer constantemente, dando oportunidade para o professor reconsiderar sua prática e o aluno confrontar suas crenças, suas estratégias e suas concepções, para refutá-las ou confirmá-las.

## **3. É uma prática central na sala de aula.**

Nossa pesquisa mostrou, de maneira muito clara, que a avaliação ocupa um papel de destaque durante a aula. A Avaliação para a Aprendizagem ocorre desde a preparação do problema gerador, quando o professor precisa avaliar a própria atividade que será proposta, questionando se o problema atenderá aos propósitos imaginados para aquela aula... depois continua na sala de aula, durante a execução da atividade e volta a ocorrer após a aula, quando o professor precisa avaliar sua prática, num exercício de autoavaliação.

Mais do que isso, o professor precisa realizar uma meta-avaliação, a avaliação da avaliação, que poderá ser realizada pela autoavaliação ou em pares com seus colegas e, até mesmo, com a participação dos alunos. Fato é que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação permite esse tipo de atividade.

## **4. Precisa ser uma atividade profissional-chave.**

É algo do tipo “aprenda fazendo”. Nossa pesquisa mostrou que a experiência é fundamental para o sucesso da Metodologia na aprendizagem do aluno e isso é alcançado através da experimentação de novas práticas e atitudes

e pelo desenvolvimento delas. Ficou evidente que, conforme as atividades trabalhadas em grupos aconteciam, os alunos conseguiam alcançar melhores resultados. Eles adquiriam maior fluência na resolução de problemas com o transcorrer do tempo e, ao final do período, trabalhavam mais colaborativamente, com menos vergonha de expor suas ideias, ainda que pudessem estar erradas e ampliaram suas condições de obter sucesso maior.

O professor, por sua vez, pode burilar sua prática pela própria prática. Quando o professor resolve trabalhar com problemas geradores, ele passa a transformar sua própria vivência em oportunidades de construção de problemas geradores. A partir daí, a avaliação, que é atividade chave na Metodologia de Ensino-aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, passa a ser um elemento fundamental e indispensável à prática profissional. O professor precisa desenvolver a habilidade de observação, a capacidade de questionamento, a habilidade de analisar e interpretar as evidências num curto espaço de tempo para fornecer feedback aos alunos e apoiá-los no gerenciamento de sua própria aprendizagem, através de autoavaliação e no desenvolvimento de práticas socializadas de resolução de problemas, onde os alunos apoiam-se uns aos outros para dinamizar o processo de apreensão de um novo conteúdo matemático, conforme nos disse Norma, em depoimento espontâneo:

*Norma: Eu acho que (trabalhar em grupos) foi muito bom. Pudemos todos expor a nossa opinião, que foram muito diferentes e fomos, todos, aprendendo uns com os outros e percebemos<sup>27</sup>, mais ou menos, como é que o outro pensava... isso foi muito importante para a resolução do problema e para entender o conteúdo.*

## **5. É uma atividade sensível e construtiva.**

Nossa pesquisa evidenciou que é possível realizar uma avaliação que não esteja ligada ao aluno em si mas nas situações que se desenham. Qualquer avaliação gera impactos emocionais e, por isso, é preciso que o professor realize

---

<sup>27</sup> No sentido de entender.

questionamentos e forneça indicações e caminhos sem interferir na confiança do estudante, procurando aumentar seu entusiasmo. Sobre as aulas, Norma disse que *“o professor às vezes intervinha e mostrávamos (a partir da intervenção) novos métodos de trabalho”*.

O estudante tem o direito de se sentir desafiado e o professor pode, através de feedback e de intervenção, ajudá-lo a demonstrar força e a alcançar seus objetivos.

## **6. Pode incentivar motivações**

O *feedback* realizado pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problema é sempre no sentido de incentivar o aluno a resolver o problema, num esforço conjunto, com todos os elementos de cada um dos grupos, a fim de resultar a construção de um determinado conceito matemático. Ficou evidente que essa metodologia não procura destacar fracassos, mas realçar a força que o estudante possui e que toda ideia pode ser importante na resolução de um problema. Em alguns momentos pudemos notar que uma ideia, aparentemente desprezível, foi o embrião de uma resolução destacada. A intervenção do professor também tem o sentido de criar oportunidades de encaminhamento e não há comparação entre as respostas. Rinaldo, comenta que *“eu achei essas observações muito importantes porque nos deixava refletir como foi nossa participação. E, também, às vezes, a observação no final da aula... íamos para casa, pelo menos eu, nós íamos a pensar no problema e a pensar que, se calhar, havia outras maneiras de resolvê-lo”*.

## **7. Promove a compreensão de metas e critérios**

As atividades realizadas podem servir a propósitos de avaliação somativa, embora não seja o seu objetivo. O objetivo da avaliação, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é o de conduzir à aprendizagem e é necessário que o aluno saiba disso. Ainda que o estudante não saiba qual seria o conteúdo formalizado ao final da atividade, ele precisaria compreender que quaisquer avaliações,

realizadas durante a resolução do problema e na plenária, têm o objetivo de auxiliar na promoção da construção do seu conhecimento. Caso o professor pretenda utilizar alguma das evidências coletadas para outros fins (como diagnóstico ou para obtenção de notas) é preciso comunicar essa intenção aos estudantes, detalhando os critérios pelos quais o aluno seria avaliado.

Além disso, essa Metodologia pode servir a propósitos de autoavaliação e de avaliação em pares, uma vez que o trabalho realizado pelo aluno é acompanhado, muito proximamente, pelos outros elementos do grupo.

## **8. Ajuda os estudantes a saber como melhorar**

Mais do que auxiliar na resolução do problema, o feedback do professor tem como objetivo orientar os alunos sobre como melhorar. Nossa pesquisa evidenciou que, ao interagir com o professor, os alunos conseguem desenvolver novas possibilidades de resolução e acabam por construir matemática além daquela que se está a propor. Em depoimento espontâneo, a Professora Tânia afirma:

*Professora Tânia: Os diálogos (entre professor e alunos) são ricos... é bom ouvir a opinião mesmo de quem falha... é bom ouvir uma estratégia ou outra, mais bem elaboradas... também é bom ouvir sobre estratégias iguais, porque os grupos e os alunos se motivam... e pronto! "Olha nós também fizemos assim" ... "então estamos em um bom caminho" ... "que giro<sup>28</sup>, nós também conseguimos". E também existiam resoluções, acho que na última tarefa, que eles acharam que estavam erradas, mas no final estavam corretas. É bom ver esse feedback, entre aluno e professor, entre os elementos do grupo e o professor, a acontecer porque vemos que os alunos estão a aprender.*

Isso indica, tal como evidenciado durante as aulas, que a atividade de intervenção do professor durante o desenvolvimento da atividade baseada na Resolução de Problemas consegue identificar pontos fortes dos alunos e de suas

---

<sup>28</sup> Gíria portuguesa que significa legal, interessante, bonito.

ideias e os aconselha sobre possibilidades de desenvolvimento, os auxiliando a melhorar o desempenho e a atingir os objetivos esperados.

## **9. Desenvolve a capacidade de autoavaliação**

Um dos objetivos do trabalho em grupo é que, com o tempo, os alunos possam se tornar autogestores de sua aprendizagem. A professora Tânia revela como ela sentiu as atividades realizadas em grupo.

*Professora Tânia: Eles gostaram de trabalhar em grupos. Nessas aulas em grupos, a interação é maior do que quando estamos a ensinar pelo processo de ensino direto. Há interação com professor... há interação dentro do grupo, entre os alunos... há interação entre os alunos fracos e os alunos fortes... É dinâmico! A aula é outra, é mais enérgica e mais animada.*

A capacidade de reflexão é posta à prova quando o professor indaga os alunos e contrapõe suas ideias. Noutro momento, os próprios alunos desenvolvem habilidade de lidar com a diferença e com a independência. Trabalhando em grupos, os alunos se apoiam entre si, conforme citado pela Professora Tânia, e o professor passa a ser cada vez menos requisitado. A observação continua acontecendo a serviço da avaliação, mas as intervenções forçadas, aquelas em que os alunos requisitam explicitamente a presença do professor foram diminuindo. Segundo Betina, *“no grupo acertamos sempre as respostas, mesmo sem ajuda dos professores”*.

Durante a plenária, a capacidade de autoavaliação dos alunos é testada. Não da maneira explícita, mas pela confrontação entre o seu modo de pensar e os modos como seus colegas desenvolvem suas estratégias.

Além disso, é possível incentivar o desenvolvimento da habilidade de autoavaliação por outros caminhos. A Professora Tânia propôs aos alunos a confecção de um “Dossiê de atividades” onde uma das atividades que compõem o dossiê é uma autoavaliação.

## **10. Reconhece todas as realizações educacionais**

Toda a avaliação realizada durante uma aula baseada na Metodologia de Ensino-aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é utilizada para aumentar as oportunidades de aprendizagem de todos os alunos. Para isso, ela reconhece os esforços dos estudantes e procura utilizar as evidências de avaliação para impulsionar novas aprendizagens. Essa é a gênese dessa metodologia e, por ter a avaliação integrada a ela, essa é a gênese de toda avaliação praticada durante a aula que a utiliza.

### **CONSIDERAÇÕES FINAIS: para onde vamos?**

A Avaliação para a Aprendizagem deve, em última instância, compreender quem é o aluno avaliado. Para saber quem ele é, é preciso compreender o que ele pensa e é mais fácil saber o que pensa a partir daquilo que ele diz sobre o que realizou. Hierarquicamente, há um movimento cíclico que parte de sua produção escrita (o fazer) na resolução de um problema, que ele precisa discutir (o falar) para que o professor possa entender como ele pensa (o pensar), que é um substrato daquilo que ele é (o ser).

O professor precisa sempre buscar descobrir quem é o aluno com quem deverá trabalhar e esse aluno está em constante transformação, de modo que esse movimento FAZER – FALAR – PENSAR – SER seja um movimento contínuo e não necessariamente linear. É importante acompanhar as mudanças e o desenvolvimento de seu aluno para orientar sua prática e o modo como pode conduzi-lo ao sucesso.

Muito além da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, a Avaliação para a Aprendizagem deveria estar presente na sala de aula de Matemática em quaisquer situações que permitam ao aluno construir conhecimento matemático novo.

As atividades propostas pelos professores na sala de aula deveriam ser capazes de fomentar a motivação do aluno e permitir mais do que uma possibilidade de resolução. É imprescindível que o educando perceba a multiplicidade de estratégias possíveis para que chegue à resolução de um problema ou para a execução de quaisquer outras atividades. Lembrando que a atividade matemática está intimamente ligada à resolução de problemas ou à execução de atividades, não necessariamente problemáticas, ligadas aos mais diversos ramos científicos.

O professor precisa auxiliar o aluno na execução ou na exploração de tarefas e isso só pode ser viável, com reflexos positivos à aprendizagem do aluno, através da atividade avaliativa. Entendemos, portanto, que podemos considerar uma Aprendizagem pela Avaliação, muito mais que uma Avaliação

para a Aprendizagem, embora as duas coisas devam acontecer integradamente, uma vez que a Avaliação para a Aprendizagem traz, em seus pressupostos teóricos, a ideia de construção do conhecimento pelo aluno.

Além da Avaliação realizada durante a aula de Matemática, instrumentos complementares de coleta de dados para a Avaliação podem, e talvez devam, ser utilizados. A Professora Tânia desenvolveu um instrumento avaliativo que acreditamos, pelos resultados de nossa pesquisa, possa ser considerado: o Dossiê de Aprendizagem.

*Professora Tânia: O dossiê de aprendizagem foi uma coisa que eu elaborei com eles. É porque nós, às vezes, dizemos no final do período... no final do ano letivo: Tu Aluno Diogo não conseguiste porque tinhas que trabalhar isso, tinhas que trabalhar mais ..., mas os alunos estão perdidos... eles não sabem o que trabalhar. Nós dizemos, se não trabalhares o dominar, os números nas operações, a álgebra, terás dificuldade... tens que trabalhar essas dificuldades. Portanto o dossiê de aprendizagem foi feito para orientar o aluno que tinha dificuldades no estudo. Ou seja, caso o aluno tenha alguma dificuldade em determinada matéria, num conteúdo, num domínio... eu indico uma tarefa orientada naquele tema, naquele conteúdo... ele tem que fazer a tarefa, entregar a tarefa feita ou pôr no dossiê e assinalar onde surgiram dúvidas. Eu recolho dossiês regularmente. Durante o período, eu posso recolher duas ou três vezes e dou um feedback escrito. Depois os alunos voltam a devolver esses trabalhos. É como se fosse um trabalho por correspondência, porque em aula não conseguimos fazer tudo.*

Os resultados da avaliação realizada na sala de aula de Matemática devem ser utilizados pelo professor, independente da teoria que o sustenta, como promotores de aprendizagem. O processo educativo faz sentido se resultar na aprendizagem de conteúdo novo para o aluno. Embora uma avaliação somativa possa ter como primeiro objetivo informar sobre o desempenho dos alunos a seus pais e a eles próprios, o professor pode utilizar os dados obtidos para direcionar sua prática pedagógica, por exemplo. Mas, uma avaliação

idealizada com o fim de aprendizagem poderá garantir melhores resultados por não coletar dados apenas ao final de um período, ciclo ou ano letivo.

Isso significa dizer que a Avaliação para a Aprendizagem fornece oportunidades diárias, às vezes instantâneas, de redirecionamento de práticas por explicitar ao professor dados evidenciados sobre a compreensão dos seus alunos, possibilitando o identificar progresso do aluno em tempo real, ou próximo disso. Para que isso aconteça é salutar que o professor tenha a capacidade de interpretar o pensamento dos estudantes para avaliar a compreensão matemática, o raciocínio e os métodos por eles utilizados, conforme preconizado pelo NCTM (2014).

Para além disso, é preciso que o professor tenha condições de tomar decisões adequadas no momento adequado, argumentando sobre as atividades desenvolvidas e questionando o trabalho realizado pelo aluno de modo a fortalecer o processo de raciocínio e a criatividade do aluno. É preciso que a prática avaliativa promova a aprendizagem do educando e desenvolva seu senso de autogestão do processo de construção do conhecimento e de autoavaliação.

Se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas não encontrar espaço para ser aplicada cotidianamente, é conveniente criar condições para que ela seja utilizada, tanto quanto possível, na sala de aula por representar uma relevante oportunidade de incremento do sucesso dos alunos em Matemática. Mas isso é tema para outra pesquisa.

Ademais, não podemos considerar que esta pesquisa tenha trazido uma resposta definitiva à nossa pergunta. Há muito por fazer também com relação a ela. Vislumbramos aqui uma gama de possibilidades de novas pesquisas sobre o tema. A Avaliação para a Aprendizagem é um tema ainda incipiente no Brasil e não encontramos pesquisas particularizadas sobre o tema, que podem versar desde aspectos relacionados a uma determinada série ou com metodologias pedagógicas específicas. Que este trabalho seja fonte de inspiração!

## REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In. ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí: Paco, 2014. p. 35-52

Assessment Reform Group. ARG. **Assessment for Learning: 10 Principles**. 2002. Disponível em: <https://www.aaia.org.uk/blog/2010/06/16/assessment-reform-group/>. Acesso em: 31/05/2017.

BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. L.; COCKING, R. R. **Como as Pessoas Aprendem: Cérebro, Mente, Experiência e Escola**. Trad. do inglês por SZIAK, C. D. São Paulo – SP: Senac, 2007.

BRASIL. Decreto nº 630, de 17 de setembro de 1851. Autoriza o Governo para reformar o ensino primário e secundário do Município da Corte. In **Coleção de Leis do Império Brasileiro**. Rio de Janeiro, 1851.

BRASIL. Decreto nº 1331–A, de 17 de fevereiro de 1854. Approva o Regulamento para a reforma do ensino primario e secundario do Municipio da Côrte. In **Coleção de Leis do Império Brasileiro**. Rio de Janeiro, 1854.

BRASIL. Decreto nº 2.006, de 24 de Outubro de 1857. Approva o Regulamento para os collegios publicos de instrucção secundaria do Municipio da Côrte. In **Coleção de Leis do Império Brasileiro**. Rio de Janeiro, 1857.

BRASIL. Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890. Approva o Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal. In. **Coleção de Leis do Brasil**. Vol. I. Rio de Janeiro, 1890.

BRASIL. Decreto nº 1194, de 28 de dezembro de 1892. Approva o regulamento para o Gymnasio Nacional. In. **Coleção de Leis do Brasil**. Vol. I. Rio de Janeiro, 1892.

BRASIL. O Decreto nº 2857, de 30 de março de 1898. Approva o regulamento para o Gymnasio Nacional e ensino secundario nos Estados. In. **Coleção de Leis do Brasil**. Vol. I. Rio de Janeiro, 1898.

BRASIL. Constituição de 1891. Constituição da República dos Estados Unidos do Brasil, decretada e promulgada pelo Congresso Nacional Constituinte, em 24/02/1891. **Diário do Congresso Nacional**. Rio de Janeiro, 1891.

BRASIL. Decreto nº 3914, de 23 de janeiro de 1901. Approva o regulamento para o Gymnasio Nacional. In. **Diário Oficial da União**. Seção 1. 06/02/1901. Rio de Janeiro, 1901.

BRASIL. Decreto nº 19.890 de 18 de abril de 1931. Dispõe sobre a organização do ensino secundário. **Diário Oficial**. 01/05/1931. Rio de Janeiro, 1931.

BRASIL. Decreto nº 21.241 de 04 de abril de 1932. Consolida as disposições sobre a organização do ensino secundário e dá outras providências. **Diário Oficial**. 09/04/1932. Rio de Janeiro, 1932.

BRASIL. Decreto-Lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942. Lei orgânica do ensino secundário. **Diário Oficial da União** - Seção 1 - 24/4/1942. Rio de Janeiro, 1942

BRASIL. Ministério da Educação. Lei 4.024 de dezembro de 1961: Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional. **Diário Oficial da União** – DOU. Brasília, 1961.

BRASIL. Ministério da Educação. Lei 5.692 de agosto de 1971: Lei de Diretrizes e Bases para o Ensino de 1º e 2º graus. **Diário Oficial da União** – DOU. Brasília, 1971

BRASIL. Ministério da Educação. Lei 9.394 de dezembro de 1996 – Lei de Diretrizes e Bases para a Educação Nacional. **Diário Oficial da União** – DOU. Brasília, 1996,

BRASIL. Conselho Nacional de Educação - CNE, Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: - **CEB n.º 15/08** – Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnologia. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Brasília: MEC/SEMT, 1999.

BRYANT, D.; DRISCOLL, M. **Explorer classroom assessment in mathematics**: a guide for professional development. Reston: NCTM, 1998.

CAMPAGNE, E. M. **Diccionario Universal de Educação e Ensino**. Volume 1. Tradução de Camillo Castello Branco. Porto: Livraria Internacional, 1873.

CARVALHO, J. B. P. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In. VALENTE, W. R. (org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. 1ª Edição. São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático – Coleção SBEM. Vol. 1, 2003.

CASTRO, A.D. O trabalho dirigido. In: **Revista de Pedagogia**, Edição Especial ano XI, v. XT - São Paulo, 1965. p. 55-67

CHAMBERS, D. Integrating Assessment and Instruction. In. WEBB, N. L.; COXFORD, A. F. (Editores). **Assessment in the Mathematics Classroom**. Reston: NCTM, 1993. p. 17-25

COLOTTO, C.A. A avaliação na escola média. In: Setor de Metodologia Geral do Ensino da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (Ed.) - **Didática da escola média**: teoria e prática. São Paulo: Edibell, 1976. p. 141-160.

COMENIUS. J. A. **Didática Magna**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

Congresso Nacional de Avaliação em Educação (5, Bauru, 2018). **Anais do 5º Congresso Nacional de Avaliação em Educação**. Bauru, 3-5 de dez. de 2018. Bauru: UNESP/FC/Departamento de Educação, 2018.

DAMASIO, A. **O Erro de Descartes**: Emoção, Razão e o Cérebro Humano. São Paulo: Cia das Letras, 1996.

D'AMBROSIO, U. **Da Realidade à Ação**: Reflexões sobre Educação (e) Matemática. 2ª Edição. Campinas: Summus, 1986.

DEMO, P. **A Nova LDB**: ranços e avanços. Campinas: Papirus, 1997.

DEWEY, J. **Interest and Effort in Education**. Cambridge: The Riverside Press, 1913.

DONAVAN, M. S.; BRANSFORD, J. D. Introduction. In Donavan, M. S.; Bransford, J. D. (editores). **How Students Learn**: History, Mathematics and Sciences in the Classroom. Washington – DC: The National Academies Press, 2005. p. 1 – 30

DUBREUCQ, F. **Jean-Ovide Decroly**. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Massangana, 2010.

EBY, F.; ARROWOOD, C. F. **The Development of Modern Education**: In Theory, Organization, and Practice. New York, Prentice-Hall, Inc. 1934

FELMER, P.; PEHKONEN, ; KILPATRICK, J. Introduction. In. FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. (Editores). **Posing and Solving Mathematical Problem**: Advance and New Perspectives. Suíça: Springer, 2016. p. v-vii

FENNELL, F.; KOBETT, B.; WRAY, J. A. Classroom-Based Formative Assessment: Guiding Teaching and Learning. In. SUURTAMAN, C.; McDUFFIE, A. R. (Editores) **Assessment to Enhance Teaching and Learning**. Annual Perspectives in Mathematics Education: 2015. Reston: NCTM, 2015. p. 51-62

FERNANDES, D. **Avaliar para Aprender: Fundamentos, práticas e políticas.** São Paulo: UNESP, 2009.

FERREIRA, N. C. **Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática.** Tese de Doutorado. Doutorado em Educação Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2017. 281p

FRANCO, S.. Mesa redonda sobre avaliação da aprendizagem. In: **Revista de Educação.** Edição Especial ano XI, v. XI - São Paulo, 1965. p. 231-245

FREUDENTHAL, H. **Weeding and Sowing:** Preface to a Science of Mathematical Education. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1978.

FUSON, K. C.; KALCHMAN, M.; BRANSFORD, J. D. Mathematical Understanding: An Introduction. In Donavan, M. S.; Bransford, J. D. (editores). **How Students Learn: History, Mathematics and Sciences in the Classroom.** Washington – DC: The National Academies Press, 2005. p. 217-256

GUBA, E. G.; LINCOLN, Y. S. **Fourth Generation Evaluation.** Newbury Park, CA: Sage, 1989.

GUNTER, T. Classroom Assessment. In: BRIGHT, G.; W.; JOYNER, J. M. (Ed.) - **Classroom assessment in mathematics: views from a National Science Foundation Working Conference.** Lanhan: University Press of America, 1998. p. 167-169

HALMOS, P. R. The hearts of Mathematics. In. **The American Mathematical Monthly** Vol. 87, No. 7 (Aug. - Sep., 1980). Utah: 1980 p. 519-524

HEDEGAARD, M. A zona de desenvolvimento proximal como base para a instrução. In. MOLL, L. C. **Vygotsky e a educação: Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica.** Tradução de Tessler, F. A. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 341-362

HERBART, J. F. **Letters and Lectures in Education.** Trad. do alemão por Felkin, H. M.; Felkin, E. Syracuse – New York: C. W. Bardeen, 1898.

HOUAISS, A.; VILLAR, M de S. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

JÚLIA, M.M.. Mesa redonda sobre avaliação da aprendizagem. In: **Revista de Educação.** Edição Especial ano XI, v. XI - São Paulo, 1965. p. 246-251

KANBIR, S. Major Curriculum Reforms and Controversies in the United States. In. **International Journal of Educational Studies in Mathematics.** v. 3 (1),

2016. p. 1-8 <https://www.researchgate.net/publication/304139768> Acesso em: 09.05.2017.

KILPATRICK, J.. A history of research in mathematics education. In: GROWS, D. (Ed.) - **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 1992.

KILPATRICK, J. Mathematics Education in the United States and Canada. In: Karp A., Schubring G. (eds) **Handbook on the History of Mathematics Education**. New York: Springer, 2014

KRANTZ, S. G. **An Episodic History of Mathematics: Mathematical Culture through Problem Solving**. Washington: Mathematical Association of America, 2010.

LAMBIDIN, D. V. Benefits of Teaching through Problem Solving. In LESTER JR, F. K.; CHARLES, R. I. (Editores) **Teaching Mathematics through Problem Solving: Prekindergarten – Grades 6**. Reston: NCTM, 2003.

LARREA, J. Espírito, tendências e problemas da educação latino americana. In: **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**. v. X, n. 28. Rio de Janeiro, 1947. p. 410-425.

LEITE, J. R. Avaliação da aprendizagem no curso ginásial renovado. In: **Revista de Educação**. Edição Especial ano X, v. XI - São Paulo, 1965. p. 83-99

LIMA, G. C. N. A educação para a sociabilidade. In: Setor de Metodologia Geral do Ensino da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo (Ed.). **Didática da escola média: teoria e prática**. São Paulo: Edibell, 1976. p. 108-140

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 1991.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da Aprendizagem Escolar: Sendas Percorridas**. Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo, 1992.

MANACORDA, M. A. **História da Educação: da Antiguidade aos nossos dias**. Tradução de Monaco, G. Io. 3ª Edição. São Paulo: Cortez – Autores Associados, 1992.

MARSHALL, S. P. Assessing Problem Solving: A Short-Term Remedy and a Long-Term Solution. In. CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Editores). **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: Lawrence Erlbaum Associates, NCTM, 1989. p. 159-177

MASON, J. When Is a Problem...? “When” Is Actually the Problem! In. FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. **Posing and Solving**

**Mathematical Problems:** Advances and New Perspectives. Suíça: Springer, 2016. p. 263-286

MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, **Thinking Mathematically**. 2ª Ed. Harlow: Pearson, 2010.

MINSKY, M. **A Sociedade da Mente**. Tradução de Carvalho, W. R. de. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

MOLL, L. C. Introdução. In. MOLL, L. C. **Vygotsky e a educação:** Implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica. Tradução de Tesseler, F. A. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p. 3-27

National Academies of Sciences, Engineering, and Medicine. **How People Learn II: Learners, Contexts, and Cultures**. Washington: The National Academies Press, 2018.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **An Agenda for Action:** Recommendations for School Mathematics of the 1980's. Reston: NCTM, 1980.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Professional Standards for Teaching Mathematics**. Reston: NCTM, 1991.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Assessment Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 1995.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: NCTM, 2000.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **Principles to Action:** Ensuring Mathematical Success for All. Reston: NCTM, 2014.

National Council of Teachers of Mathematics. NCTM. **A practical handbook for grades 9 - 12**. Reston: NCTM, 1999.

NEUBAUER, R. Quem tem medo da progressão continuada? Ou melhor, a que interessa o sistema de reprovação e exclusão social? In: Acesso: **Revista de Educação e Informática**. São Paulo, 2000. n. 14. p. 11-18

Nuffield Foundation. **The Assessment Reform** Group. Londres: 2017  
<http://www.nuffieldfoundation.org/assessment-reform-group> Acesso em: 18/06/2017

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-218

ONUCHIC, L. de la R.; Allevato, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectiva. **Bolema**, v. 25, n. 41 Rio Claro: 2011. p. 73-98

ONUCHIC, L. de la R; NOGUTI, F. C. H. A Pesquisa Científica e a Pesquisa Pedagógica. In ONUCHIC, L. de la R; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (Orgs.) **Resolução de Problemas: Teoria e Prática**. São Paulo: Paco, 2014. p. 53-68.

PHILLIPS, C. J. **The New Math: A political history**. Chicago: The University of Chicago Press, 2015.

PIRES, M. Exames orais, essa calamidade. **Revista Atualidades Pedagógicas**, ano 10, n. 48. São Paulo, 1959.

PIROLA, N. A.; DIAS, M. S.; SANDER, G.P. Contribuições das Pesquisas em Avaliação para a Aprendizagem da Matemática Escolar. In **Libro Actas**. VIII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática, Madri: VIII CIBEM, 2017.

PIRONEL, M. **A avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem da matemática na sala de aula**. Dissertação de mestrado. Mestrado em Educação Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista – UNESP, 2002. 193p

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. R. A Avaliação sob o ponto de vista legal. In. **Revista de Educação Matemática**, Ano 8, nº 8. SBEM-SP, 2003. p. 59-68

PIRONEL, M.; ONUCHIC, L. R. Avaliação para a Aprendizagem: Uma proposta a partir de Transformações do Conceito de Avaliação na Sala de Aula no Século XXI. In. IV CONAVE – Congresso Nacional de Avaliação Educacional, Bauru, 2016. **Anais**. Bauru: UNESP, 24 a 26 de outubro de 2016. p. 1-13 <http://www2.fc.unesp.br/sgcd/#!/paginas/conave/conave-2015/anais/comunicacoes-cientificas/> Acesso em: 05.06.2017.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2ª Reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PUIGARI, R. O valor dos exames. In: **Revista de Ensino da Associação Beneficente do Professorado Público de São Paulo**, ano 2, n. 3. São Paulo, 1903.

ROMBERG, T. A. Perspectives on Scholarship and Research Methods. In Grouws, D. A. (ed). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1992. p. 49-64

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Trad. ONUCHIC, L. de la R.; BOERO, M. L. In. **BOLEMA**. Ano 20, nº 27, maio/2007. Rio Claro – SP: 2007. p. 93-140.

SANTOS, A. R. **Metodologia Científica**: a construção do conhecimento. 7ª Edição. Rio de Janeiro: Lamparina, 2007.

SANTOS, L. Auto-avaliação regulada. Porquê, o quê e como? In ABRANTES, P.; ARAÚJO, F. (Coord.). **Avaliação das Aprendizagens**: Das concepções às práticas. Reorganização Curricular do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação - Departamento da Educação Básica, 2002. p. 77-84

SANTOS, L. A avaliação das aprendizagens em Matemática: Um olhar sobre o seu percurso. In SANTOS, L.; CANAVARRO, A. P.; BROCARD, J. (org.). **Educação Matemática**: Caminhos e encruzilhadas. Encontro Internacional em Homenagem à Paulo Abrantes. Lisboa: Associação dos Professores de Matemática – APM, 2005. p. 169-187

SANTOS, V. M. P. (Coord. e Org.) **Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática**: Métodos Alternativos. Instituto de Matemática – UFRJ. Projeto Fundação – SPEC/PADC/CAPE. Rio de Janeiro: 1995.

SÃO PAULO - SP. Conselho Estadual de Educação. **Indicação nº 12/96**. São Paulo, 1996.

SÃO PAULO - SP. Conselho Estadual de Educação. **Indicação nº 09/2000**. São Paulo, 2000.

SÃO PAULO - SP. Conselho Estadual de Educação. **Indicação nº 22/97**. São Paulo, 1997.

SÃO PAULO - SP. Secretaria Estadual de Educação. **Normas Regimentais Básicas para as Escolas Estaduais** – São Paulo, 1998.

SCHOENFELD, A. H. Method. In Lester Jr, F. K. (editor). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**: a project of the national council of teachers of mathematics. Charlotte: National Council of Teachers of Mathematics. IAP, 2007. p. 69-110

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Orlando: Academic Press, 1985.

SCHROEDER, T. L.; LESTER JR, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31 - 42.

SILVA, L.G.. A influência da escola na vida do cidadão. In: **Revista Educação**. São Paulo, 1928. v. 5 n. 2-3. p. 186-195

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: Formação de Professores e Aplicação em Sala de Aula. 6ª Edição. Porto Alegre: ARTMED, 2009.

VIGOTSKII, L. S. Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na idade escolar. In VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. **Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem**. Tradução de Villalobos, M. P. 7ª Edição. São Paulo – SP: Ícone, 2001. p. 103-118

VIGOTSKI, L. S.; **Pensamento e Linguagem**. Tradução de CAMARGO, J. L. 1ª Edição, 4ª tiragem. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

VIGOTSKI, L. S. **A formação social da mente**: O desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 7ª Edição. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

WILIAN, D. Keeping Learning on Track: Classroom Assessment and the Regulation of Learning. In. LESTER JR, F. K. (Editor). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**: a project of the National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte – NC: Information Age Publishing, NCTM, 2007 p. 1053-1098