





**IFT**

Instituto de Física Teórica  
Universidade Estadual Paulista

---

---

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.006/04

Soluções de N-sólitons para a hierarquia de Schrödinger Não Linear Generalizada

João Belther Junior

Orientador

José Francisco Gomes



230000003457

Julho de 2004

# Agradecimentos

À toda minha família pelo apoio incondicional.

Ao professor José Francisco Gomes pela orientação.

Aos meus amigos, que de forma indireta ou indireta contribuíram para que este trabalho fosse realizado. Em particular meu amigo Mário, que sempre acreditou nesta dissertação.

À Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

As equações GNLS (generalized nonlinear Schrödinger equations) possuem como caso particular as equações CNLS, que funcionam como modelo para a geração de sólitons em fibras ópticas, na ausência de efeitos dissipativos. Nesta dissertação discutimos a construção sistemática desta classe de modelos integráveis, através das álgebras de Lie de dimensão infinita  $\widehat{sl}_n$ , bem como a construção das soluções de N-sólitons. Em particular, discutimos em detalhe o caso associado à  $\widehat{sl}_3$ .

**Palavras Chaves:** soluções solitônicas; curvatura nula; operadores de vértice; hierarquias integráveis.

**Áreas do conhecimento:** modelos integráveis; teoria de campos.

# Abstract

The GNLS equations (generalized nonlinear Schrödinger equations) contain as a particular case the CNLS equations, which can be regarded a model for soliton generation in optical fibers, in the absence of dissipative effects. In this work we discuss a systematic construction for this class of integrable models, by the using of the infinite dimensional Lie algebras  $\widehat{sl}_n$ . We also discuss the construction of N-soliton solutions, in particular the case associated to  $\widehat{sl}_3$ .

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Teoria de Sólitons</b>	<b>8</b>
2.1	Introdução . . . . .	8
2.2	Representação de Lax . . . . .	10
2.3	Representação de Curvatura Nula . . . . .	11
2.4	Aplicações em Fibras Ópticas . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Álgebras de Lie</b>	<b>14</b>
3.1	Conceitos fundamentais . . . . .	14
3.2	Representação de Álgebras de Lie . . . . .	17
3.3	Estrutura Algébrica das Hierarquias Integráveis . . . . .	19
<b>4</b>	<b>As equações GNLS</b>	<b>21</b>
4.1	Equação de Schrödinger Não-Linear (NLS) . . . . .	21
4.2	Equações associadas à $\widehat{sl}_3$ . . . . .	23
4.3	Generalização para $\widehat{sl}_{n+1}$ . . . . .	27
4.4	Estrutura Hamiltoniana . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Soluções de N-Sólitons</b>	<b>30</b>
5.1	Métodos de Solução . . . . .	30
5.1.1	Transformações de Bäcklund . . . . .	30
5.1.2	Método de Dressing . . . . .	32
5.1.3	Método de Hirota . . . . .	35
5.2	Operadores de Vértice . . . . .	38
5.3	Soluções das Equações GNLS . . . . .	40
5.3.1	Soluções de até dois vértices . . . . .	40
5.3.2	Soluções de n-vértices para GNLS . . . . .	43

# Capítulo 1

## Introdução

Este capítulo apresenta uma introdução geral ao tema da obra, abordando os aspectos fundamentais da metodologia utilizada e os objetivos da pesquisa. O texto discute a importância de uma abordagem multidisciplinar para compreender os fenômenos estudados, bem como a relevância dos dados coletados para a construção de um modelo teórico consistente. A metodologia empregada é baseada em técnicas avançadas de análise estatística e modelagem matemática, permitindo a obtenção de resultados precisos e confiáveis. Os resultados obtidos são discutidos em detalhes, destacando as principais descobertas e as implicações teóricas e práticas. A conclusão do capítulo enfatiza a necessidade de continuar a investigar este campo de estudo, visando a obtenção de novos conhecimentos e a aplicação dos resultados em contextos reais.

# Capítulo 1

## Introdução

A propagação de pulsos elétricos em fibras ópticas, quando os efeitos dissipativos não são levados em conta, é descrita pelas equações CNLS (coupled nonlinear Schrödinger) [1, 2, 3]. Elas também surgem em diversas outras áreas, como condensados de Bose-Einstein [4, 5] e propagação de feixes incoerentes em meios fotorefrativos [6]. Estas equações não são integráveis em geral, mas podem ser sob certas escolhas de parâmetros. Na sua forma integrável, essas equações admitem soluções que se comportam como ondas solitárias, que se propagam sem alterar sua forma. Mesmo no caso de colisões de duas, ou mais, ondas solitárias, cada uma delas, após um período de interação, saem da colisão mantendo a forma anterior, apenas com uma mudança de fase. Devido a estas propriedades que são típicas de partícula, essas ondas solitárias são denominadas sólitons. Suas características são muito bem vindas na construção de sistemas de comunicação através de fibras ópticas [7, 8].

Estar numa forma integrável significa que as equações de movimento podem ser representadas na forma de uma equação de Lax ou, de forma equivalente, numa equação de curvatura nula [9, 10]. Estas representações garantem a existência de infinitas quantidades conservadas. Para os casos conhecidos, as equações podem ser escritas através de uma estrutura hamiltoniana, onde estas quantidades conservadas estão em involução segundo o parêntesis de Poisson apropriado, ou seja, são como hamiltonianas gerando cada uma sua evolução temporal.

Os métodos de solução tradicionais dessas equações são o método de Hirota [9, 10], baseado na escolha de uma solução tentativa na forma de um quociente de duas funções, e o método de espalhamento inverso [9, 10, 11], que pode ser visto como uma generalização não-linear das transformadas de Fourier, que utiliza diretamente a representação das equações de movimento na forma de uma equação de Lax ou de

uma equação de curvatura nula. Os dois métodos, Hirota e espalhamento inverso, têm apresentado bons resultados na busca por soluções de modelos integráveis. No caso do primeiro, desde que a partir das soluções de poucos sólitons (poucas ondas solitárias se propagando), seja possível inferir a solução de muitos sólitons, que é determinada através de um processo de indução.

Nesta dissertação tomaremos uma rota que utiliza somente processos algébricos tanto para gerar como para encontrar soluções para as equações de movimento. Construiremos as equações GNLS, que resultam nas equações CNLS sob certas escolhas, através do uso das álgebras de Lie de dimensão infinita  $\widehat{sl}_n$ . O procedimento tomado garante automaticamente que as equações geradas possuem uma representação em termos da equação de Lax e curvatura nula. Este procedimento algébrico também traz um método sistemático de obter soluções, conhecido por método de dressing. A solução explícita para qualquer número de sólitons será obtida numa forma que deixa transparente toda a estrutura integrável das equações.

# Capítulo 2

## Teoria de Sólitos

A teoria de sólitos aparece em diversas áreas da ciência, de biofísica à geometria diferencial. Apesar de nosso foco fundamental nesta dissertação ser as equações que surgem na produção de sólitos em fibras óticas, existe uma linguagem comum à teoria de sólitos que usaremos reiteradamente. O objetivo deste capítulo é introduzir esta linguagem.

### 2.1 Introdução

Em uma dimensão, para uma partícula de massa  $m$ , afetada por um potencial independente do tempo, o problema fundamental da mecânica quântica é: dado este potencial, encontrar os autovalores e autovetores do operador hamiltoniano. Isto consiste em resolver a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, \xi)\right) \Psi(x, \xi) = E(\xi) \Psi(x, \xi), \quad (2.1)$$

onde  $\xi$  é um parâmetro, por exemplo, a frequência  $\omega$  para o potencial do oscilador harmônico

$$V(x, \omega) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad (2.2)$$

que possui os autovalores

$$E_n(\omega) = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + n\right), \quad (2.3)$$

com  $n \geq 0$ . Interessante notar que os níveis de energia dependem dos parâmetros  $\hbar$  e  $\omega$ , mas não da massa da partícula, diferentemente do oscilador clássico. Por que isso ocorre? De outra forma: que tipo de potenciais  $V(x, \xi)$  para a equação (2.1)

conduzem à autovalores discretos independentes de  $\xi$ ?

O autovalor  $E_n$  associado ao estado normalizável  $\Psi_n(x, \xi)$  pode ser escrito na forma

$$E_n = \langle \Psi_n(x, \xi) | H | \Psi_n(x, \xi) \rangle. \quad (2.4)$$

Em teoria de campos as quantidades conservadas são funcionais dos campos, como a carga elétrica  $Q$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho(x, t) dx = 0. \quad (2.5)$$

De forma análoga queremos que

$$\frac{\partial E_n}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \langle \Psi_n | H | \Psi_n \rangle = 0. \quad (2.6)$$

Seguindo a analogia, podemos esperar que o potencial  $V(x, \xi)$  satisfaça alguma equação diferencial nas variáveis  $(x, \xi)$ , de forma que a “lei de conservação” (2.6) seja satisfeita. Este é realmente o caso: existem infinitos potenciais dependentes do parâmetro  $\xi$  que geram um conjunto discreto de autovalores independentes de  $\xi$ . Esses potenciais satisfazem a equação KdV [9, 10], na forma apropriada, originalmente obtida por Korteweg e de Vries como um modelo para ondas de água com amplitude pequena, porém finita. Nesta equação o parâmetro  $\xi$  é o tempo, o que garante que o nome lei de conservação para (2.6) é apropriado.

As soluções de KdV possuem várias peculiaridades: se propagam como ondas solitárias, com uma forma definida, num comportamento tipo partícula; duas ondas solitárias ao colidirem, após um período de deformação, retomam sua forma original, continuando a se propagar apenas com uma diferença de fase. Devido a esse comportamento típico de partículas, essas ondas solitárias receberam o nome *sólitons*, seguindo a tradição de utilizar o pósfixo “on” nas partículas encontradas na natureza.

A equação KdV, apesar de ter sido encontrada no século XIX, só suscitou grande interesse da comunidade científica em 1965, quando Zabusky e Kruskal, ao estudar o problema de Fermi-Pasta-Ulam de recorrência numa rede não-linear, tomando o limite do contínuo, encontraram a equação KdV. Por meio de simulações numéricas puderam identificar as características solitônicas das soluções [12].

Dois anos depois Gardner, Green, Kruskal e Miura, já cientes que as soluções de KdV geram estados discretos na equação de Schrödinger, usaram este fato e o comportamento assintótico das soluções das duas equações, para determinar as soluções de KdV para todo  $x$  e  $t$  [13]. Esse foi o primeiro problema resolvido pelo

que veio a se chamar *método de espalhamento inverso* [9, 10].

## 2.2 Representação de Lax

Peter D. Lax deu um passo fundamental para o entendimento da estrutura subjacente da equação KdV e, indiretamente, para todas as equações integráveis. Em [14] ele mostra que se associarmos à função  $u(x, t)$  um operador auto-adjunto  $L_u$  tal que ao  $u(x, t)$  evoluir de acordo com a equação

$$u_t = K(u), \quad (2.7)$$

os operadores  $L(t)$  permanecem unitariamente equivalentes. Se isto ocorre, os *autovalores* de  $L_u$  constituem um conjunto de integrais de movimento para a equação sob consideração. Isto ficará claro logo mais.

A equivalência unitária dos operadores  $L(t)$  significa que existem operadores unitários  $U(t)$  tais que

$$U(t)^{-1}L(t)U(t) \quad (2.8)$$

é independente de  $t$ . Operadores unitários que dependem de um parâmetro satisfazem uma equação diferencial da forma

$$U_t = MU, \quad (2.9)$$

onde  $M$  é um operador antissimétrico. Derivando (2.8), substituindo (2.9) e multiplicando o resultado por  $U$  à esquerda e  $U^{-1}$  à direita obtemos o que hoje é chamado de *equação de Lax*:

$$L_t = [M, L]. \quad (2.10)$$

Com (2.10) é fácil ver que os autovalores de  $L$  são constantes de movimento, basta lembrar que os autovalores de um operador formam os elementos da diagonal principal na base dos respectivos autovetores. Como o traço de  $L$  é constante de movimento, na base dos autovetores cada elemento da diagonal será uma constante de movimento, no caso, os autovalores de  $L$ .

Para a equação KdV o operador  $L$  é o operador de Schrödinger, como vimos, mas aqui na forma usada por Lax em seu artigo [14]

$$L = \partial_x^2 + \frac{1}{6}u, \quad (2.11)$$

e  $M$  é

$$M = 24\partial_x^3 + 3\partial_x + 3\partial_x u. \quad (2.12)$$

Podem ser escolhidos infinitos operadores antissimétricos tais que (2.10) seja satisfeita para o operador de Schrödinger. Este é um exemplo de *hierarquia integrável*. Este nome se deve ao fato das equações geradas através de (2.10) compartilharem a propriedade de que os autovalores de  $L$  formam suas integrais de movimento. No caso de  $L$  ser o operador de Schrödinger existe uma *estrutura hamiltoniana* comum, ou seja, as quantidades conservadas podem ser encaradas como “hamiltonianas”  $H_i$ , sendo as equações associadas à escolha do operador antissimétrico  $M$  escritas na forma

$$u_t = \partial_x \frac{\delta H_i}{\delta u}, \quad (2.13)$$

onde  $\delta H_i/\delta u$  é a derivada variacional da hamiltoniana  $H_i$ .

Todas essas hamiltonianas estão em involução segundo o parêntesis de Poisson

$$\{H_i, H_j\} = \int \frac{\delta H_i}{\delta u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta H_j}{\delta u} dx, \quad (2.14)$$

o que define um *sistema integrável* de dimensão infinita. Apesar de usarmos o exemplo da equação KdV, a formulação de Lax não se restringe somente a esta. Para outros operadores  $L$  e  $M$  são encontradas várias outras equações (hieraquias) integráveis, como, por exemplo, sine-Gordon, Schrödinger não-linear (NLS) e Liouville.

## 2.3 Representação de Curvatura Nula

Outro passo importante para o entendimento da estrutura compartilhada pelas equações integráveis foi a descoberta que as equações integráveis podiam ser escritas como a relação de compatibilidade para

$$\Psi_x = A\Psi, \quad (2.15)$$

$$\Psi_t = \bar{A}\Psi, \quad (2.16)$$

onde  $\Psi$  é uma função vetorial e  $A, \bar{A}$  são operadores. A relação de compatibilidade é

$$A_t - \bar{A}_x + [A, \bar{A}] = 0, \quad (2.17)$$

conhecida por *representação de curvatura nula*. Com essas duas representações, curvatura nula e par de Lax, temos uma forma sistemática de gerar hierarquias integráveis. O problema fundamental tornou-se encontrar os operadores  $L$  e  $M$  que satisfazem (2.10) ou os operadores  $A$  e  $\bar{A}$  que satisfazem (2.17).

## 2.4 Aplicações em Fibras Ópticas

A lista de áreas de aplicação da teoria de sólitons é bastante extensa, como relatividade geral, dinâmica de proteínas, geometria diferencial, física de partículas e fibras ópticas [9, 10, 11]. Como os resultados dessa dissertação estão ligados às equações CNLS, vamos dar uma breve descrição de sua ligação com a produção de sólitons em fibras ópticas.

Em 1973 Hasegawa e Tappert sugeriram [7] que fibras ópticas podem suportar pulsos solitônicos como resultado de um balanço entre efeitos dispersivos e não-lineares. A sugestão foi confirmada em 1980 [15] e trouxe um grande estímulo à pesquisa, já que seu uso em sistemas de comunicação óptica pode trazer várias vantagens de rendimento [16]. A produção de sólitons em fibras ópticas está associada à equação NLS:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A, \quad (2.18)$$

onde  $A(z, T)$  é a amplitude do pulso,  $\beta_2$  é o parâmetro de dispersão da velocidade de grupo e  $\gamma$  é o parâmetro da não-linearidade responsável pela auto-modulação de fase [16]. A equação (2.18) pode ser reescalada para ficar na forma

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0. \quad (2.19)$$

O conjunto de  $n$  equações acopladas

$$i \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \sum_{j=1}^n |u_j|^2 u_i = 0, \quad (2.20)$$

são uma generalização de (2.18) conhecidas por NLS acopladas (CNLS) e também são importantes na geração de sólitons em fibras ópticas [16, 3].

Em [3] são obtidas soluções de até 4 sólitons para o sistema CNLS, obtidas através do método de Hirota [9, 10]. Nesta dissertação mostraremos que as equações CNLS podem ser obtidas através de procedimentos puramente algébricos. Na verdade va-



# Capítulo 3

## Álgebras de Lie

O par de Lax e a equação de curvatura nula podem ser encarados como formas de gerar equações integráveis, desde que encontremos os operadores adequados. O aparecimento de comutadores nas duas representações é uma indicação de que a melhor forma de satisfazer estas duas representações é através do uso de álgebras de Lie. Neste capítulo introduziremos os conceitos básicos destas álgebras.

### 3.1 Conceitos fundamentais

Uma álgebra de Lie  $L$  é um espaço vetorial munido de uma operação  $[\cdot, \cdot]$  bilinear

$$[x + y, z] = [x, z] + [y, z], \quad (3.1)$$

antissimétrica

$$[x, y] = -[y, x] \quad (3.2)$$

e onde  $\{x, y, z\} \in L$  satisfazem a identidade de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (3.3)$$

A identidade de Jacobi pode ser vista como uma propriedade de derivação da álgebra, isto porque o operador  $Ad_x$ , definido por  $Ad_x y = [x, y]$ , funciona como uma derivada ao reescrevermos a identidade de Jacobi na seguinte forma:

$$Ad_x[y, z] = [Ad_x y, z] + [y, Ad_x z] \quad (\text{regra de Leibniz}). \quad (3.4)$$

Talvez o exemplo mais simples de álgebra de Lie seja o comutador de matrizes. É bastante simples ver que as propriedades listadas acima são satisfeitas. Na verdade, a partir de qualquer álgebra associativa, como o produto de matrizes ou de operadores lineares, pode-se construir uma álgebra de Lie através do comutador. O espaço vetorial de matrizes  $n \times n$  possui como base as matrizes  $E_{ij}$ , definidas como

$$E_{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \quad (3.5)$$

ou seja, todos os elementos fora da linha  $i$  e coluna  $j$  são nulos. As relações de comutação são dadas por

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}. \quad (3.6)$$

Uma outra base para a álgebra das matrizes  $n \times n$  é constituída pelos elementos  $\{E_{ij}, h_k, \mathbf{1}\}$ , tal que  $i \neq j$ ,  $k = 1 \dots n-1$ ,  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade e os  $h_k$  são definidos por

$$h_k = E_{kk} - E_{k+1,k+1}. \quad (3.7)$$

A matriz identidade comuta com qualquer matriz e o comutador entre duas matrizes finitas nunca é igual à  $\mathbf{1}$ , pois o traço do comutador é nulo. Isto implica que podemos retirar a identidade da álgebra e continuarmos com uma álgebra de Lie, ou seja, teremos uma *subálgebra*, que recebe o nome de  $sl_n$ . Interessante notar que esta álgebra é subdividida em um subconjunto  $\mathfrak{h}$  de elementos diagonais ( $h_k$ ), um subconjunto  $N_+$  de elementos acima da diagonal ( $E_{ij}, i > j$ ) e, por fim, um subconjunto de elementos  $N_-$  abaixo da diagonal ( $E_{ij}, i < j$ ), sendo que o comutador entre elementos do mesmo subconjunto permanece nele, ou seja,  $\mathfrak{h}, N_{\pm}$  são subálgebras, o que nos permite fazer a decomposição de  $g = sl_n$  na forma

$$g = N_- \oplus \mathfrak{h} \oplus N_+. \quad (3.8)$$

Os elementos  $e_1 = E_{12}, \dots, e_{n-1} = E_{(n-1)n}$  de  $N_+$  e  $f_1 = E_{21}, \dots, f_{n-1} = E_{n(n-1)}$  de  $N_-$  geram os outros elementos de suas subálgebras ao comutarem entre si e satisfazem

as seguintes relações de comutação:

$$[h_i, e_j] = (2\delta_{ij} - \delta_{i-1,j} - \delta_{i+1,j})e_j, \quad (3.9)$$

$$[h_i, f_j] = -(2\delta_{ij} - \delta_{i-1,j} - \delta_{i+1,j})f_j, \quad (3.10)$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_j, \quad i, j = 1, \dots, n-1. \quad (3.11)$$

A matriz definida por  $k_{ij} = 2\delta_{ij} - \delta_{i-1,j} - \delta_{i+1,j}$  é conhecida por matriz de Cartan. Os elementos dessa matriz podem ser escritos na forma de um produto escalar

$$k_{ij} = \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle. \quad (3.12)$$

Os vetores  $\alpha_i$  formam uma base de um espaço euclidiano e são conhecidos por *raízes simples*. O sistema de raízes positivas de  $sl_n$  é dado por

$$\begin{aligned} & \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}, \alpha_k \\ & \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1}, \alpha_{k-1} + \alpha_k \\ & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} + \alpha_k \\ & \quad \vdots, \dots, \quad \vdots \\ & \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} + \alpha_k \end{aligned}$$

com  $k = n - 1$ . O negativo de uma raiz, também é raiz. O significado deste sistema de raízes é que o comutador de um elemento associado à raiz  $\alpha$  com outro associado à raiz  $\beta$ , gerará um elemento associado à raiz  $\alpha + \beta$ , desde que esta última esteja no sistema de raízes, senão o resultado será nulo. No caso de  $\alpha + \beta = 0$ , o resultado do comutador estará em  $\mathfrak{h}$ . Associando  $e_i = E_{\alpha_i}$  e  $f_i = E_{-\alpha_i}$ , podemos escrever as relações de comutação acima na forma

$$[h_i, E_{\alpha_j}] = \langle \alpha_i | \alpha_j \rangle E_{\alpha_j}, \quad (3.13)$$

$$[h_i, E_{-\alpha_j}] = -\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle E_{-\alpha_j}, \quad (3.14)$$

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_j}] = \delta_{ij}h_j. \quad (3.15)$$

Esta base é conhecida por base de Chevalley. Existe uma outra que será útil na construção de hierarquias integráveis que é a base de Cartan-Weyl, na qual as relações

de comutação são as seguintes

$$[H_i, E_{\pm\alpha_j}] = (\alpha_j)^i E_{\pm\alpha_j}, \quad (3.16)$$

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha \cdot H, \quad i, j = 1, \dots, n-1, \quad (3.17)$$

onde o índice superior denota a componente e o inferior a raiz. Pode-se ver que a transformação entre as duas bases se dá apenas na subálgebra abeliana.

As álgebras  $sl_n$  são um caso particular - uma subálgebra - das álgebras de Lie infinitas simbolizadas por  $\widehat{sl}_n$ , conhecidas como álgebras de Lie afins, que possuem as seguintes relações de comutação, na base de Cartan-Weyl:

$$[H_i^n, H_j^m] = \delta_{ij} n \delta_{n+m,0} \hat{c}, \quad (3.18)$$

$$[H_i^n, E_\alpha^m] = \alpha^i E_\alpha^{m+n}, \quad (3.19)$$

$$[E_\alpha^n, E_{-\alpha}^m] = \alpha \cdot H^{n+m} + m \delta_{m+n,0} \hat{c} \quad (3.20)$$

com  $m, n$  inteiros. O elemento central  $\hat{c}$  comuta com todos os elementos da álgebra. Se escolhermos  $n = m = 0$  as relações de comutação são idênticas às já obtidas para  $sl_n$ .

Pelas relações de comutação definidas acima podemos perceber que os elementos da subálgebra de Cartan  $\{H_i^0, \hat{c}\}$  não distinguem os  $E_\alpha^n$ , para diferentes  $n$ . Para sanar esse problema é introduzido o elemento  $d$ , tal que

$$[d, T^{(n)}] = nT^{(n)}, \quad [d, \hat{c}] = 0, \quad (3.21)$$

onde  $T^{(n)}$  representa elementos como  $H_i^{(n)}$  e  $E_\alpha^{(n)}$ .

## 3.2 Representação de Álgebras de Lie

As álgebras das matrizes  $n \times n$  constituem um exemplo de *representação* de álgebras de Lie. Uma álgebra abstrata pode ser representada de diversas formas. Como exemplo, a álgebra de Lie tridimensional

$$[x, p] = c, \quad [x, c] = [p, c] = 0, \quad (3.22)$$

pode ser representada por

$$[\partial_x, x] = 1, \quad [\partial_x, 1] = [x, 1] = 0, \quad (3.23)$$

ou pelo parêntesis de Poisson da mecânica hamiltoniana entre a posição  $x$  e o momento conjugado  $p$

$$\{x, p\} = \frac{\partial x}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = 1, \quad \{x, 1\} = \{p, 1\} = 0. \quad (3.24)$$

De forma geral, uma representação (linear) de uma álgebra de Lie  $L$  é uma aplicação  $\Phi$  de  $L$  na álgebra de Lie dos operadores lineares que agem sobre um espaço vetorial  $V$ , tal que as relações de comutação sejam preservadas, isto é

$$\Phi([x, y]) = [\Phi(x), \Phi(y)]. \quad (3.25)$$

Com esta definição podemos obter representações sem recorrer à realizações particulares.

Vamos utilizar a álgebra do momento angular como exemplo ilustrativo para conceitos a serem introduzidos. Como é bem conhecido, podemos escrever a álgebra do momento angular na forma:

$$[h, J_{\pm}] = \pm 2J_{\pm}. \quad (3.26)$$

onde  $h = 2J_z$ . Essa é a “álgebra abstrata”  $L$  da definição de representação, idêntica (isomórfica) à  $sl_2$ . O espaço vetorial  $V$  é aqui o espaço de Hilbert.

Para representar a álgebra precisamos saber como seus elementos atuam sobre  $V$ . Uma base para  $V$  é gerada pelos autovetores da subálgebra abeliana maximal de  $L$ , a subálgebra de Cartan, constituída pelos  $H_k$ , com  $k = 1, \dots, n - 1$ , para  $sl_n$ . Em mecânica quântica esta subálgebra é chamada de “conjunto maximal de observáveis”.

Vamos simbolizar a ação dos elementos  $H_k$  sobre seus autovetores como

$$H_k|\lambda\rangle = \lambda_k|\lambda\rangle. \quad (3.27)$$

Os autovalores  $\lambda_i$  são chamados de *pesos* e podem ser vistos como vetores de dimensão  $n - 1$  (dimensão 1 no caso do momento angular). Na base de Chevalley, com  $h_i =$

$\alpha_i \cdot H$ , temos

$$h_i|\lambda\rangle = \alpha_i \cdot \lambda|\lambda\rangle. \quad (3.28)$$

Do exemplo do momento angular, sabemos que  $\alpha_i \cdot \lambda$  é um número inteiro (estamos multiplicando  $J_z$  por dois). Isto pode ser generalizado para  $sl_n$  [18]. Os pesos que obedecem

$$\lambda_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij}, \quad (3.29)$$

são chamados de *pesos fundamentais*, com  $\alpha_j$  sendo raiz simples.

O estado associado ao peso zero, é chamado de *vetor de peso máximo* (highest weight vector). Seu papel é fundamental na teoria de representação de álgebras de Lie, o que é atestado no exemplo do momento angular, já que os autovetores associados aos outros estados podem ser obtidos por sucessivas aplicações do operador  $J_+$  sobre o vetor de peso máximo.

### 3.3 Estrutura Algébrica das Hierarquias Integráveis

Obviamente não é qualquer escolha de operadores que irá satisfazer a equação de curvatura nula ou o par de Lax. Uma forma de encontrar esses operadores é assumir que eles pertencem a uma álgebra de Lie, com os coeficientes de cada operador sendo funções de  $x$  e  $t$ . Uma forma de otimizar este processo é introduzindo uma *gradação* para a álgebra em questão. A gradação é uma forma de decompor numa soma direta de subespaços  $G_l$ , de grau  $l$ , a álgebra de Lie  $L$  tal que

$$[G_l, G_k] = G_{l+k}, \quad [Q, G_l] = lG_l, \quad (3.30)$$

onde  $Q$  é o operador de gradação. A gradação homogênea, por exemplo, é definida pelo operador  $d$ . Essa será a gradação utilizada em toda a dissertação.

Para satisfazer a equação de curvatura nula devemos agora escolher  $A, \bar{A}$ , por exemplo como

$$A = \sum_{i=0}^n D^{(i)}, \quad (3.31)$$

$$\bar{A} = \sum_{j=0}^m T^{(j)}, \quad (3.32)$$

onde  $D^{(i)}$  e  $T^{(j)}$  são elementos da álgebra com grau  $i$  e  $j$ , respectivamente, parametriza-

dos por funções de  $x$  e  $t$ . Como a álgebra é soma direta de  $G_l$ , podemos ir decompondo as equações grau à grau, encontrando relações entre os coeficientes dos elementos da álgebra. Como exemplo, vamos ilustrar este procedimento para as equações de menor ordem da hierarquia de GNLS.

Como primeiro exemplo vamos escolher, para  $\widehat{sl}_2$ ,

$$A = \lambda H^{(1)} + qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \quad (3.33)$$

$$\bar{A} = a_1 E_{\alpha}^{(0)} + a_2 E_{-\alpha}^{(0)} + a_3 h^{(0)}. \quad (3.34)$$

Substituindo na equação de curvatura nula (2.17) temos, para o grau 1, que  $a_1 = a_2 = 0$ . Para o grau zero temos

$$\partial_t q = 2aq, \quad (3.35)$$

$$\partial_t r = -2ar. \quad (3.36)$$

$$(3.37)$$

Como a equação na direção de  $h$  resulta em  $\partial_x a_3 = 0$ , foi feito  $a_3 = a$ , que é uma constante. Como o elemento  $\bar{A}$  é de grau zero, podemos pensar nessas equações como associadas a um tempo  $t_0$ , e continuar o processo obtendo equações para os tempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Para o tempo  $t_1$  é feita a escolha

$$\bar{A} = \lambda H^{(1)} + a_1 E_{\alpha}^{(0)} + a_2 E_{-\alpha}^{(0)} + a_3 h^{(0)}, \quad (3.38)$$

sendo  $A$  o mesmo de antes. O grau 1 implica em  $a_1 = q$  e  $a_2 = -r$ . Para o grau zero teremos novamente  $\partial_x a_3 = 0$  e as equações

$$\partial_t q - \partial_x q - 2aq = 0, \quad (3.39)$$

$$\partial_t r - \partial_x r + 2ar = 0, \quad (3.40)$$

onde, como antes,  $a_3 = a$ . Estas equações não são essencialmente diferentes das obtidas antes: podem ser levadas naquelas através de uma transformação de Galileu. No próximo capítulo obteremos as equações GNLS, associadas ao tempo  $t_2$ .

# Capítulo 4

## As equações GNLS

Neste capítulo construiremos sistemas de equações associados à álgebra  $\widehat{sl}_n$ , sob gradação homogênea. Fazendo algumas correspondências, obtemos o conjunto de equações CNLS. Esta forma de construir as equações de movimento garante automaticamente sua integrabilidade, se mostrará bastante útil na obtenção das soluções de forma explícita e revela uma estrutura subjacente bastante rica.

### 4.1 Equação de Schrödinger Não-Linear (NLS)

Nesta seção mostraremos que a equação NLS pode ser obtida através de uma escolha de  $A, \bar{A}$  contidos em  $\widehat{sl}_2$ . Esta escolha é

$$A = \epsilon_1 + A_0, \quad (4.1)$$

$$\bar{A} = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}, \quad (4.2)$$

onde  $\epsilon_1 = \lambda \cdot H^{(1)}$  e

$$A_0 = qE_{\alpha}^{(0)} + rE_{-\alpha}^{(0)}, \quad (4.3)$$

$$D^{(2)} = a_1E_{-\alpha}^{(2)} + a_2E_{\alpha}^{(2)} + a_3h^{(2)}, \quad (4.4)$$

$$D^{(1)} = b_1E_{-\alpha}^{(1)} + b_2E_{\alpha}^{(1)} + b_3h^{(1)}, \quad (4.5)$$

$$D^{(0)} = c_1E_{-\alpha}^{(0)} + c_2E_{\alpha}^{(0)} + c_3h^{(0)}. \quad (4.6)$$

Uma notação que se mostrará conveniente é escrever  $A_0$  na forma

$$A_0 = q_{\alpha}E_{\alpha}^{(0)} + r_{\alpha}E_{-\alpha}^{(0)}. \quad (4.7)$$

A equação de curvatura nula é

$$\partial_t(\epsilon_1 + A_0) - \partial_x(D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)} - [D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}], \epsilon_1 + A_0) = 0. \quad (4.8)$$

Da equação para o grau 3

$$[a_1 E_{-\alpha}^{(2)} + a_2 E_{\alpha}^{(2)} + a_3 h^{(2)}, \lambda \cdot H^{(1)}] = 0 \quad (4.9)$$

podemos concluir que  $a_1 = a_2 = 0$ , o que implica

$$D^{(2)} = a_3 h^{(2)} \quad (4.10)$$

Da equação de grau 2

$$-\partial_x a_3 h^{(2)} - [a_3 h^{(2)}, q E_{\alpha}^{(0)} + r E_{-\alpha}^{(0)}] - [b_1 E_{-\alpha}^{(1)} + b_2 E_{\alpha}^{(1)} + b_3 h^{(1)}, \lambda \cdot H^{(1)}] = 0 \quad (4.11)$$

concluimos que  $a_3$  é constante e que  $b_1 = 2a_3 r$  e  $b_2 = 2a_3 q$ . Para o grau 1 chegamos ao conjunto de equações

$$-2a\partial_x r + 2b_3 r - c_1 = 0 \quad (4.12)$$

$$-2a\partial_x q - 2b_3 q + c_2 = 0 \quad (4.13)$$

$$-\partial_x b_3 = 0 \quad (4.14)$$

onde  $a = a_3$ . Obviamente  $b_3$  é constante e será chamado de  $b$  na sequência. Finalmente temos o conjunto de equações para o grau 0:

$$\partial_t q - \partial_x c_2 - 2c_3 q = 0, \quad (4.15)$$

$$\partial_t r - \partial_x c_1 + 2c_3 r = 0, \quad (4.16)$$

$$-\partial_x c_3 + c_1 q - c_2 r = 0. \quad (4.17)$$

Com estes resultados podemos concluir que

$$c_1 = -2a\partial_x r + 2br, \quad (4.18)$$

$$c_2 = 2a\partial_x q + 2bq, \quad (4.19)$$

$$c_3 = -2aqr. \quad (4.20)$$

Substituindo os  $c_i$  nas equações de grau zero para a evolução de  $q$  e  $r$  obtemos

$$\partial_t q - 2a\partial_x^2 q - 2b\partial_x q + 4aq^2 r = 0, \quad (4.21)$$

$$\partial_t r + 2a\partial_x^2 r - 2b\partial_x r - 4aqr^2 = 0. \quad (4.22)$$

Fazendo a mudança de escala  $t \rightarrow -t/2a$  e a transformação de Galileu  $x \rightarrow x - bt/a$  obtemos

$$\partial_t q + \partial_x^2 q - 2q^2 r = 0, \quad (4.23)$$

$$\partial_t r - \partial_x^2 r + 2r^2 q = 0. \quad (4.24)$$

Para obter a equação NLS basta fazer  $t \rightarrow it$  e  $q = r^*$ .

## 4.2 Equações associadas à $\widehat{sl}_3$

Faremos agora com bastante detalhe a generalização para a álgebra  $\widehat{sl}_3$ ,  $\epsilon_1 = \lambda_2 \cdot H^{(1)}$  e

$$A_0 = q_1 E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(0)} + q_2 E_{\alpha_2}^{(0)} + r_1 E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(0)} + r_2 E_{-\alpha_2}^{(0)}, \quad (4.25)$$

ou na forma alternativa

$$A_0 = \sum_{\alpha} (q_{\alpha} E_{\alpha}^{(0)} + r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(0)}), \quad (4.26)$$

onde deve-se entender que as raízes  $\alpha$  são aquelas associadas aos elementos da imagem de  $\epsilon_1$ , no caso  $\pm\alpha_2$  e  $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$ .

A equação de curvatura nula é sempre (4.8), mas agora com

$$D^{(2)} = a_1 E_{\alpha_1 + \alpha_2}^{(2)} + a_2 E_{\alpha_2}^{(2)} + a_3 E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(2)} + a_4 E_{-\alpha_2}^{(2)} + a_5 E_{\alpha_1}^{(2)} + a_6 E_{-\alpha_1}^{(2)} + a_7 h_1^{(2)} + a_8 h_2^{(2)}, \quad (4.27)$$

com  $D^{(1)}$  e  $D^{(0)}$  tendo uma forma análoga e coeficientes  $b_i$  e  $c_i$ , respectivamente. Da equação de grau 3  $[D^{(2)}, \lambda_2 \cdot H^{(1)}] = 0$  concluímos que  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ , logo

$$D^{(2)} = a_5 E_{\alpha_1}^{(2)} + a_6 E_{-\alpha_1}^{(2)} + a_7 h_1^{(2)} + a_8 h_2^{(2)}. \quad (4.28)$$

Da equação de grau 2

$$-\partial_x D^{(2)} + [D^{(2)}, A_0] + [D^{(1)}, \epsilon_+] = 0, \quad (4.29)$$

concluimos que

$$a_5q_2 + a_7q_1 + a_8q_1 = b_1, \quad (4.30)$$

$$a_6r_2 + a_7r_1 + a_8r_1 = b_3, \quad (4.31)$$

$$a_6q_1 - a_7q_2 + 2a_8q_2 = b_2, \quad (4.32)$$

$$a_5r_1 - a_7r_2 + 2a_8r_2 = b_4, \quad (4.33)$$

além de  $\partial_x a_5 = \partial_x a_6 = \partial_x a_7 = \partial_x a_8 = 0$ , ou seja,  $a_5, a_6, a_7, a_8$  são constantes. Da equação de grau 1

$$\partial_x D^{(1)} + [D^{(1)}, A_0] + [D^{(0)}, \epsilon_+] = 0 \quad (4.34)$$

chegamos ao conjunto de equações

$$\partial_x b_1 + b_5q_2 + b_7q_1 + b_8q_1 - c_1 = 0, \quad (4.35)$$

$$\partial_x b_2 + b_6q_1 - b_7q_2 + 2b_8q_2 - c_2 = 0, \quad (4.36)$$

$$\partial_x b_3 - b_7r_1 - b_8r_1 - b_6r_2 + c_3 = 0, \quad (4.37)$$

$$\partial_x b_4 - b_5r_1 + b_7r_2 - 2b_8r_2 + c_4 = 0, \quad (4.38)$$

$$\partial_x b_5 - b_4q_1 + b_1r_2 = 0, \quad (4.39)$$

$$\partial_x b_6 - b_3q_2 + b_2q_1 = 0, \quad (4.40)$$

$$\partial_x b_7 + b_1r_1 - b_3q_1 = 0, \quad (4.41)$$

$$\partial_x b_8 + b_1r_1 - b_3q_1 + b_2r_2 - b_4q_2 = 0. \quad (4.42)$$

Finalmente, da equação de grau 0

$$\partial_t - \partial_x D^{(0)} - [D^{(0)}, A_0] = 0, \quad (4.43)$$

chegamos ao seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}
\partial_t q_1 - \partial_x c_1 - c_5 q_2 - c_7 q_1 - c_8 q_1 &= 0, & (4.44) \\
\partial_t q_2 - \partial_x c_2 - c_6 q_1 + c_7 q_2 - 2c_8 q_2 &= 0, \\
\partial_t r_1 - \partial_x c_c + c_6 r_2 + c_7 r_1 + c_8 r_1 &= 0, \\
\partial_t r_2 - \partial_x c_4 + c_5 r_1 - c_7 r_2 + 2c_8 r_2 &= 0, \\
\partial_x c_5 + c_1 r_2 - c_4 q_1 &= 0, \\
\partial_x c_6 + c_2 r_1 - c_3 q_2 &= 0, \\
\partial_x c_7 + c_1 r_1 - c_3 q_1 &= 0, \\
\partial_x c_8 + c_1 r_1 - c_3 q_1 + c_2 r_2 - c_4 q_2 &= 0.
\end{aligned}$$

A partir de 4.30-4.33 podemos obter as seguintes relações

$$b_1 r_2 - b_4 q_1 = a_5 (q_1 r_1 - r_2 q_2) + 2a_7 r_2 q_1 - a_8 r_2 q_1, \quad (4.45)$$

$$b_2 r_1 - b_3 q_2 = a_6 (q_1 r_1 - r_2 q_2) - 2a_7 r_1 q_2 + a_8 r_1 q_2, \quad (4.46)$$

$$b_1 r_1 - b_3 q_1 = a_5 r_1 q_2 - a_6 r_2 q_1, \quad (4.47)$$

$$b_2 r_2 - b_4 q_2 = a_6 r_2 q_1 - a_5 r_1 q_2. \quad (4.48)$$

Inserindo estas relações nas últimas quatro equações de 4.35 obtemos

$$\partial_x b_5 + a_5 (q_1 r_1 - q_2 r_2) + 2a_7 q_1 r_2 - a_8 q_1 r_2 = 0, \quad (4.49)$$

$$\partial_x b_6 + a_6 (q_1 r_1 - q_2 r_2) - 2a_7 q_2 r_1 + a_8 q_2 r_1 = 0, \quad (4.50)$$

$$\partial_x b_7 + a_5 r_1 q_2 - a_6 r_2 q_1 = 0, \quad (4.51)$$

$$\partial_x b_8 = 0. \quad (4.52)$$

Da última equação vemos que  $b_8$  é constante. Queremos uma solução local para os  $b_i$  acima, sendo assim a escolha não-trivial para os  $a_i$ , que são constantes, é  $a_8 = 2a_7 = 2a$  e  $a_5 = a_6 = 0$ . Com esta escolha é claro que  $b_5, b_6, b_7, b_8$  são constantes. Resolvendo 4.45 para os  $b_i$ , com  $i = 1, \dots, 4$ , obtemos  $b_1 = 3a q_1$ ,  $b_2 = 3a q_2$ ,  $b_3 = 3a r_1$

e  $b_4 = 3ar_1$ . Substituindo estes resultados em 4.35 chegamos à

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 3a\partial_x q_1 + b_5 q_2 + b_7 q_1 + b_8 q_1, \\
 c_2 &= 3a\partial_x q_2 + b_6 q_1 - b_7 q_2 + 2b_8 q_1, \\
 c_3 &= -3a\partial_x r_1 + b_7 r_1 + b_8 r_1 + b_6 r_2, \\
 c_4 &= -3a\partial_x r_2 + b_5 r_1 - b_7 r_2 + 2b_8 r_2.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Substituindo estes resultados nas quatro últimas equações de 4.44 encontramos

$$\begin{aligned}
 \partial_x c_5 + 3a\partial_x(q_1 r_2) + b_5(r_2 q_2 - r_1 q_1) + 2b_7 q_1 r_2 - b_8 q_1 r_2 &= 0, \\
 \partial_x c_6 + 3a\partial_x(r_1 q_2) + b_6(r_1 q_1 - r_2 q_2) - 2b_7 r_1 q_2 + b_8 r_1 q_2 &= 0, \\
 \partial_x c_7 + 3a\partial_x(r_1 q_1) + b_5 r_1 q_2 - b_6 r_2 q_1 &= 0, \\
 \partial_x c_8 + 3a\partial_x(r_1 q_1 + r_2 q_2) &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Novamente a escolha não-trivial para obter soluções locais é  $b_5 = b_6 = 0$  e  $b_8 = 2b_7 = 2b$ . Assim

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 3a\partial_x q_1 + 3bq_1, \\
 c_2 &= 3a\partial_x q_2 + 3bq_2, \\
 c_3 &= -3a\partial_x r_1 + 3br_1, \\
 c_4 &= -3a\partial_x r_2 + 3br_2, \\
 c_5 &= -3aq_1 r_2, \\
 c_6 &= -3aq_2 r_1, \\
 c_7 &= -3ar_1 q_1, \\
 c_8 &= -3a(r_1 q_1 + r_2 q_2).
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Substituindo estes resultados nas primeiras quatro equações de 4.44 obtemos finalmente as equações de movimento para os campos físicos

$$\begin{aligned}
 \partial_t q_1 - 3a\partial_x^2 q_1 - 3b\partial_x q_1 + 6ar_2 q_1 q_2 + 6ar_1 q_1^2 &= 0, \\
 \partial_t q_2 - 3a\partial_x^2 q_2 - 3b\partial_x q_2 + 6ar_1 q_1 q_2 + 6ar_2 q_2^2 &= 0, \\
 \partial_t r_1 + 3a\partial_x^2 r_1 - 3b\partial_x r_1 - 6aq_2 r_1 r_2 - 6aq_1 r_1^2 &= 0, \\
 \partial_t r_2 + 3a\partial_x^2 r_2 - 3b\partial_x r_2 - 6aq_1 r_1 r_2 - 6aq_2 r_2^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Usando os mesmos procedimentos mencionados na seção anterior, podemos colocar 4.56 na forma

$$\begin{aligned}
\partial_t q_1 + \partial_x^2 q_1 - 2r_2 q_1 q_2 - 2r_1 q_1^2 &= 0, \\
\partial_t q_2 + \partial_x^2 q_2 - 2r_1 q_1 q_2 - 2r_2 q_2^2 &= 0, \\
\partial_t r_1 - \partial_x^2 r_1 + 2q_2 r_1 r_2 + 2q_1 r_1^2 &= 0, \\
\partial_t r_2 - \partial_x^2 r_2 + 2q_1 r_1 r_2 + 2q_2 r_2^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Pode-se notar que as escolhas para os coeficientes de  $h_i$  em  $D^{(2)}$  e  $D^{(1)}$  são equivalentes à  $a\lambda_2 \cdot H^{(2)}$  e  $b\lambda_2 \cdot H^{(1)}$ .

### 4.3 Generalização para $\widehat{sl}_{n+1}$

Vamos apresentar a forma geral das equações de movimento para para  $\widehat{sl}_n$ . A forma de obter estas equações é semelhante a realizada em [19] para espaços simétricos.

Analisando os resultados obtidos nas duas últimas seções é possível ver que podemos escrever

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= \lambda_n \cdot H^{(2)} + \sum_{\alpha} (q_{\alpha} E_{\alpha}^{(1)} + r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(1)}) + \sum_{\alpha} (\partial_x q_{\alpha} E_{\alpha}^{(0)} - \partial_x r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(0)}) \\
&\quad - \sum_{\alpha+\beta} q_{\alpha} r_{\beta} E_{\alpha+\beta}^{(0)} - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j q_i r_i h_j^{(0)},
\end{aligned} \tag{4.58}$$

com  $n$  igual à 1 e 2 para  $\widehat{sl}_2$  e  $\widehat{sl}_3$ , respectivamente. No termo contendo as raízes  $\alpha$  e  $\beta$  deve-se entender que a soma dessas raízes é outra raiz e diferente de zero. Mostraremos agora que esta forma de  $\bar{A}$ , juntamente com

$$A = \lambda_n \cdot H^{(1)} + \sum_{\alpha} (q_{\alpha} E_{\alpha}^{(0)} + r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(0)}), \tag{4.59}$$

satisfaz a equação de curvatura para  $\widehat{sl}_{n+1}$ , por decomposição grau à grau novamente.

Para o grau 3 temos simplesmente o comutador de  $\epsilon_1$  com  $\epsilon_2$ , o que é obviamente zero. Para o grau dois temos

$$\sum_{\alpha} \left[ \lambda_n \cdot H^{(1)}, q_{\alpha} E_{\alpha}^{(1)} + r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(1)} \right] + \sum_{\alpha} \left[ q_{\alpha} E_{\alpha}^{(0)} + r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(0)}, \lambda_n \cdot H^{(2)} \right] = 0. \tag{4.60}$$

Que é automaticamente satisfeito. Para o grau 1

$$-\sum_{\alpha} (\partial_x q_{\alpha} E_{\alpha}^{(1)} + \partial_x r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(1)}) + \sum_{\alpha} [\lambda_n \cdot H^{(1)}, \partial_x q_{\alpha} E_{\alpha}^{(0)} - \partial_x r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(0)}] = 0, \quad (4.61)$$

que também é satisfeita.

Para o grau zero o número de termos é maior, então vamos calcular um por um. Pra começar o comutador

$$\sum_{\alpha, \alpha'} [q_{\alpha} E_{\alpha}^{(0)} + r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(0)}, \partial_x q_{\alpha'} E_{\alpha'}^{(0)} - \partial_x r_{\alpha'} E_{\alpha'}^{(0)}] \quad (4.62)$$

equivale à

$$\sum_{\alpha, \alpha'} (-q_{\alpha} \partial_x r_{\alpha'} E_{\alpha-\alpha'}^{(0)} - r_{\alpha} q_{\alpha'} E_{-\alpha+\alpha'}^{(0)}) - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \partial_x (q_i r_i) h_j^{(0)},$$

que é igual à derivada em relação à  $x$  dos dois últimos termos de  $\bar{A}$ . Os termos restantes geram as equações de movimento:

$$\partial_t q_i - \partial_x^2 q_i - 2 \sum_{j=1}^n r_j q_j q_i = 0, \quad (4.64)$$

$$\partial_t r_i + \partial_x^2 r_i + 2 \sum_{j=1}^n r_j q_j r_i = 0, \quad (4.65)$$

conhecidas por GNLS.

Se fizermos  $t \rightarrow it$  e identificarmos  $r = q^*$ , teremos as equações CNLS

$$i \partial_t q_i + \partial_x^2 q_i + 2 \sum_{j=1}^n |q_j|^2 q_i = 0. \quad (4.66)$$

## 4.4 Estrutura Hamiltoniana

As equações GNLS deduzidas na seção anterior possuem uma estrutura hamiltoniana natural definida através do parêntesis de Poisson

$$\{q_{\alpha}(x, t), r_{\alpha'}(y, t)\} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta(x - y). \quad (4.67)$$

A densidade hamiltoniana que gera as equações GNLS é

$$H = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} (\partial_x q_{\alpha} \partial_x r_{\alpha} - q_{\alpha}^2 r_{\alpha}^2), \quad (4.68)$$

como pode-se ver pelas equações de Hamilton

$$\partial_t q_{\alpha} = \frac{\delta H}{\delta r_{\alpha}}, \quad (4.69)$$

$$\partial_t r_{\alpha} = -\frac{\delta H}{\delta q_{\alpha}}. \quad (4.70)$$

Esta é uma das infinitas hamiltonianas que compõem a hierarquia. As equações de grau zero, por exemplo, deduzidas no capítulo anterior, estão associadas à hamiltoniana  $H_0 = rq$ . De forma geral esta hamiltoniana pode ser escrita como  $H_0 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} r_{\alpha}$ . No caso da restrição sobre CNLS, ou seja,  $r_{\alpha} = q_{\alpha}^*$ , esta hamiltoniana é simplesmente a soma dos módulos quadrados dos campos. É fácil ver que estas hamiltonianas são realmente conservadas para as equações de movimento associadas à  $t_0$ : as equações para  $q_{\alpha}$  terão soluções proporcionais à  $e^t$  e para  $r_{\alpha}$  proporcionais à  $e^{-t}$ ; como os termos que compõem  $H_0$  são sempre produtos de campos associados à mesma raiz, a hamiltoniana não dependerá do tempo.

As soluções associadas ao tempo  $t_n$ , para algum  $n$ , devem deixar todas as hamiltonianas  $H_i$  conservadas. Dessa forma, podemos dizer que as soluções de uma hierarquia integrável deve satisfazer infinitas condições, além de satisfazer a equação de movimento. Esse conjunto infinito de leis de conservação faz com que os sólitons apresentem um balanceamento entre efeitos dispersivos e não-lineares, produzindo ondas com uma forma constante, apesar dos efeitos dispersivos, e que colidem mantendo sua forma após a colisão.

# Capítulo 5

## Soluções de N-Sólitons

Neste capítulo obteremos a solução de N-sólitons para as equações GNLS, através do método de dressing. As soluções obtidas satisfazem toda uma hierarquia infinita de equações de movimento, via uma transformação simples de parâmetros. A título de comparação apresentaremos outros métodos de solução: método de Hirota e transformações de Bäcklund.

### 5.1 Métodos de Solução

O método de dressing é uma forma de obter soluções “vestindo” uma solução trivial da equação de curvatura nula. As transformações de Backlund [9, 10] compartilham o mesmo princípio, no entanto, não há forma sistemática de encontrá-las. Situação semelhante ao método de Hirota, que tem se mostrado bastante eficiente na obtenção de soluções de equações integráveis, mas que se baseia em escolhas não muito óbvias e, em geral, diferentes para cada problema. Ao contrário destes métodos, o dressing é construído sistematicamente. Vamos mostrar os três métodos na sequência.

#### 5.1.1 Transformações de Bäcklund

As transformações de Bäcklund nasceram no estudo de superfícies de curvatura constante. A equação sine-Gordon, escrita numa forma apropriada,

$$u_{xt} = \text{sen}(u), \quad (5.1)$$

surge no estudo de superfícies de curvatura negativa constante [9]. Ela é invariante sob as (auto) transformações de Bäcklund:

$$\begin{aligned} u'_x &= u_x - 2\beta \operatorname{sen} \left( \frac{u+u'}{2} \right) \equiv B'_1(u, u_x; u'), \\ u'_t &= -u_t + \frac{2}{\beta} \operatorname{sen} \left( \frac{u-u'}{2} \right) \equiv B'_2(u, u_t; u'), \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde  $\beta \in R$  é um parâmetro não-nulo. A invariância decorre da relação de compatibilidade

$$\frac{\partial B'_1}{\partial t} - \frac{\partial B'_2}{\partial x} = 0. \quad (5.3)$$

De forma explícita, substituindo  $B'_1$  e  $B'_2$  na relação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'_1}{\partial t} - \frac{\partial B'_2}{\partial x} &= u_{xt} - 2\beta \cos \left( \frac{u+u'}{2} \right) \frac{u_t + u'_t}{2} + u_{xt} - \frac{2}{\beta} \cos \left( \frac{u-u'}{2} \right) \frac{u_x - u'_x}{2}, \\ &= 2u_{xt} - 2 \cos \left( \frac{u+u'}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{u-u'}{2} \right) + 2 \cos \left( \frac{u-u'}{2} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{u+u'}{2} \right), \\ &= 2u_{xt} - 2 \operatorname{sen}(u) = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se reescrevermos as transformações na forma

$$u_x = u'_x - 2\beta \operatorname{sen} \left( \frac{u+u'}{2} \right) \equiv B_1(u', u'_x; u), \quad (5.4)$$

$$u_t = -u'_t + \frac{2}{\beta} \operatorname{sen} \left( \frac{u-u'}{2} \right) \equiv B_2(u', u'_t; u), \quad (5.5)$$

a relação de compatibilidade produzirá

$$u'_{xt} = \operatorname{sen}(u'). \quad (5.6)$$

Para obter soluções de sine-Gordon através dessas propriedades de invariância, vamos inserir a solução trivial “vácuo”  $u' = 0$  em (5.2), que resulta em

$$u_x = 2\beta \operatorname{sen} \left( \frac{u}{2} \right), \quad u_t = \frac{2}{\beta} \operatorname{sen} \left( \frac{u}{2} \right). \quad (5.7)$$

Integrando essas equações obtemos

$$u = 4 \tan^{-1} (\exp (\beta x + \beta^{-1} t + \alpha)), \quad (5.8)$$

onde  $\alpha$  é uma constante de integração.

O processo pode ser repetido, gerando outra solução a partir desta, e assim por diante. É importante notar o fator  $\beta^{-1}$  que multiplica  $t$  no argumento da exponencial de (5.8). Esse fator está ligado ao fato da equação sine-Gordon estar associada ao tempo  $t_{-1}$  de uma hierarquia integrável, ou seja, possui em  $\bar{A}$  o elemento constante  $\epsilon_- = \lambda \cdot H^{(-1)}$ .

A equação sine-Gordon é uma das equações dos modelos relativísticos denominados *modelos de Toda*. As equações de movimento para estes modelos podem ser escritas na forma de Leznov-Saveliev [20]

$$\partial_x(B^{-1}\partial_t A) + [\epsilon_-, B^{-1}\epsilon_1 B] = 0, \quad \partial_t(\partial_x B B^{-1} - [\epsilon_1, B\epsilon_- B^{-1}]) = 0. \quad (5.9)$$

Os campos da teoria parametrizam os gerados de grau zero, sob alguma gradação, do elemento de grupo  $B$ . As equações GNLS também possuem um membro associado ao tempo  $t_{-1}$ . As soluções que serão obtidas para o tempo  $t_2$ , determinado pelo elemento constante  $\lambda_n \cdot H^{(2)}$  de  $\bar{A}$ , satisfazem as equações associadas ao tempo  $t_{-1}$ , desde que façamos uma correspondência, o que será mostrado ainda neste capítulo.

### 5.1.2 Método de Dressing

A equação de curvatura nula admite como solução trivial

$$\bar{A}_{vac} = \epsilon_N \quad A_{vac} = -\epsilon_1 \quad (5.10)$$

tal que  $[\epsilon_N, \epsilon_+] = 0$ , sendo  $\epsilon_N = \lambda_n \cdot H^{(N)}$  e  $\epsilon_1 = \lambda_n \cdot H^{(1)}$ , para  $\widehat{sl_{n+1}}$ . A equação de curvatura nula é satisfeita automaticamente pelas conexões  $\bar{A} = -\partial_t T T^{-1}$  e  $A = -\partial_x T T^{-1}$ , onde  $T$  pertence a um grupo de Lie. Associando  $T_0$  à solução trivial  $A_{vac}, \bar{A}_{vac}$ , encontra-se

$$T_0 = \exp(-t\epsilon_N) \exp(x\epsilon_+), \quad (5.11)$$

como pode ser verificado facilmente.

Vamos nos limitar por um momento à  $\widehat{sl_3}$ . Neste caso vamos escrever

$$A = -\epsilon_1 - \partial_x B B^{-1}, \quad \bar{A} = \epsilon_2 + \bar{A}_0, \quad (5.12)$$

que difere do que fizemos no capítulo anterior pelo termo contendo  $B$  que está contido num grupo de Lie cujos geradores possuem grau zero.

O método de dressing utiliza a invariância da equação de curvatura nula sob

transformações de gauge para construir soluções não-triviais através da solução de vácuo, ou seja, se baseia na existência dos elementos de grupo  $\Theta_{\pm}$ , tal que

$$\bar{A} = \Theta_{\pm} \bar{A}_{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_t \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (5.13)$$

$$A = \Theta_{\pm} A_{vac} \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_x \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (5.14)$$

ou,

$$\epsilon_2 + \bar{A}_0 = \Theta_{\pm} \epsilon_- \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_t \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1}, \quad (5.15)$$

$$-\epsilon_1 - \partial_x B B^{-1} = -\Theta_{\pm} \epsilon_+ \Theta_{\pm}^{-1} - \partial_x \Theta_{\pm} \Theta_{\pm}^{-1}. \quad (5.16)$$

Essas são as transformações para os elementos da álgebra, para  $T$  as transformações são

$$T = \Theta_{\pm} T_0. \quad (5.17)$$

Na verdade a seguinte transformação também deixa invariante a equação de curvatura nula:

$$T = \Theta_+ T_0 = \Theta_- T_0 g \quad (5.18)$$

onde  $g$  é um elemento de grupo constante arbitrário. Vamos admitir que os  $\Theta_{\pm}$  são elementos de grupo da forma

$$\Theta_- = e^{t(0)} e^{t(-1)} e^{t(-2)} \dots, \quad \Theta_+ = e^{v(0)} e^{v(1)} e^{v(2)} \dots, \quad (5.19)$$

onde  $t(-i), v(i)$  são combinações lineares de geradores de grau  $(-i)$  e  $(i)$  respectivamente, com  $i$  natural. Para  $\Theta_+$  o grau zero da equação (5.16) admite a solução

$$e^{v(0)} = B e^{G(t)}, \quad (5.20)$$

enquanto que para  $\Theta_-$  o grau dois da equação 5.15 admite

$$t(0) = H(x, t), \quad (5.21)$$

onde  $H(x, t)$  é um elemento de grau zero arbitrário que comuta com  $\epsilon_N$ . Fazendo a escolha  $H(x, t) = -G(t)$  podemos escrever

$$\dots e^{-t(-2)} e^{-t(-1)} B e^{v(1)} e^{v(2)} \dots = T_0 g T_0^{-1}. \quad (5.22)$$

Este é o resultado fundamental que transformará o problema de integração das equações de movimento num cálculo de elementos de matriz, como veremos na sequência.

Na representação de peso máximo [17, 21, 22] os elementos de grau positivo aniquilam o vetor de peso máximo  $|\lambda_0\rangle$ :

$$\dots e^{-t(-2)} e^{-t(-1)} B |\lambda_0\rangle = T_0 g T_0^{-1} |\lambda_0\rangle. \quad (5.23)$$

Podemos definir a função  $\tau_0$  tal que

$$\tau_0 = \langle \lambda_0 | T_0 g T_0^{-1} | \lambda_0 \rangle = e^\nu, \quad (5.24)$$

onde  $\nu$  parametriza  $\hat{c}$  em  $B$ .

Para expressarmos as funções  $q_\alpha, r_\alpha$  em termos de elementos de matriz análogos à  $\tau_0$ , precisamos de  $t(-1)$ . Se fizermos  $t(0) = 0$ , o que não altera nada no processo de obtenção de soluções, o grau zero da equação (5.16) implica em

$$A_0 = -[\epsilon_1, t(-1)], \quad (5.25)$$

logo

$$t(-1) = \sum_{\alpha} (-q_{\alpha} E_{\alpha}^{(-1)} + r_{\alpha} E_{-\alpha}^{(-1)} + \dots, \quad (5.26)$$

onde as reticências representam elementos no núcleo (kernel) de  $\epsilon_1$ . Para o caso específico de  $\widehat{sl}_3$

$$t(-1) = -q_1 E_{\alpha_1 + \alpha_2} - q_2 E_{\alpha_2} + r_1 E_{-\alpha_1 - \alpha_2} + r_2 E_{-\alpha_2} + \dots \quad (5.27)$$

Com este resultado podemos expressar os campos  $q_\alpha, r_\alpha$  como quocientes de “funções tau”, que são obtidas por meio da representação da álgebra, ou seja, transformamos o problema de integração de movimento num problema puramente algébrico, que será resolvido completamente ainda neste capítulo.

As funções tau serão definidas da seguinte forma

$$\tau_{\alpha} \equiv \langle \lambda_0 | E_{\alpha}^{(1)} e^{-t(-1)} B | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | E_{\alpha}^{(1)} T_0 g T_0^{-1} | \lambda_0 \rangle. \quad (5.28)$$

Vamos calcular explicitamente para  $\widehat{sl}_3$  os termos  $\langle \lambda_0 | E_\alpha^{(1)} e^{-t(-1)} B | \lambda_0 \rangle$ . Por exemplo,

$$\langle \lambda_0 | E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(1)} e^{-t(-1)} B | \lambda_0 \rangle = \langle \lambda_0 | [E_{-\alpha_1 - \alpha_2}^{(1)}, -t(-1)] | \lambda_0 \rangle e^\nu = q_1 e^\nu = q_1 \tau_0. \quad (5.29)$$

Logo

$$q_1 = \frac{\tau_{-\alpha_1 - \alpha_2}}{\tau_0}. \quad (5.30)$$

De forma análoga

$$q_2 = \frac{\tau_{-\alpha_2}}{\tau_0}, \quad (5.31)$$

$$r_1 = -\frac{\tau_{\alpha_1 + \alpha_2}}{\tau_0}, \quad (5.32)$$

$$r_2 = -\frac{\tau_{\alpha_2}}{\tau_0}. \quad (5.33)$$

Para  $\widehat{sl}_n$  temos a generalização

$$\begin{aligned} q_\alpha &= \frac{\tau_{-\alpha}}{\tau_0}, \\ r_\alpha &= \frac{\tau_\alpha}{\tau_0}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

A utilização de álgebras de Lie permitiu que pudéssemos construir o método de solução simultaneamente para qualquer número de equações, de outra forma, para qualquer  $\widehat{sl}_n$  em geral, seja qual for  $n$ . Os únicos itens não alterados foram  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . Se tivéssemos alterado  $\epsilon_2$  para  $\epsilon_3$  teríamos como resultado equações GNLS de grau superior, como uma derivada de terceira ordem em relação à  $x$  aparecendo nas equações resultantes. Se continuarmos este processo vamos obter equações com derivadas em relação à  $x$  cada vez maiores. As soluções de cada um desses conjuntos de equações não estão desconectadas, na verdade temos aqui uma hierarquia integrável. O elemento  $A$ , que não se altera, faz o papel do operador  $L$  na formulação de Lax (como o operador de Schrödinger para KdV) e o elemento  $\bar{A}$  faz o papel de  $M$ . As soluções da hierarquia estão conectadas por uma transformação simples, o que ficará claro com a introdução dos operadores de vértice na próxima seção. Antes vamos apresentar o método de Hirota.

### 5.1.3 Método de Hirota

A idéia básica do método de Hirota é introduzir uma transformação para as funções de interesse, de forma que as equações resultantes estejam numa forma bilinear,

quadráticas nas variáveis dependentes. As funções transformadas são escritas numa série perturbativa, que trunca no caso de soluções solitônicas. O último passo é provar que a solução sugerida é de fato correta.

Para as equações CNLS, o processo de bilinearização começa com a escolha [3, 24]

$$q_j = \frac{g^{(j)}}{f}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.35)$$

Para o caso  $n = 1$ , substituindo  $q_1 = g^{(1)}/f$  na equação correspondente obtemos

$$\frac{1}{f^2}(iD_t + D_x^2)g^{(1)} \cdot f - \frac{g^{(1)}}{f^3}(D_x^2 f \cdot f - 2g^{(1)}g^{(1)*}) = 0, \quad (5.36)$$

onde

$$D_x^n D_t^m a \cdot b = (\partial_x - \partial_{x'})^n (\partial_t - \partial_{t'})^m a(x, t) b(x', t')|_{x=x', t=t'} \quad (5.37)$$

são as derivadas de Hirota.

O próximo passo é desacoplar a equação acima fazendo

$$(iD_t + D_x^2)g^{(1)} \cdot f = 0, \quad (5.38)$$

$$D_x^2 f \cdot f = 2g^{(1)}g^{(1)*}. \quad (5.39)$$

Na verdade esse desacoplamento pode ser feito para qualquer  $n$ , resultando em

$$(iD_t + D_x^2)g^{(j)} \cdot f = 0, \quad (5.40)$$

$$D_x^2 f \cdot f = 2 \sum_{i=1}^n g^{(i)}g^{(i)*}. \quad (5.41)$$

Para resolver estas equações admite-se que as funções  $g^{(j)}$  e  $f$  possam ser escritas na forma de uma série perturbativa

$$g^{(j)} = \varepsilon g_1^{(j)} + \varepsilon^3 g_3^{(j)} + \dots, \quad (5.42)$$

$$f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4, \quad (5.43)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro de perturbação formal. O processo final é substituir esta série perturbativa nas equações CNLS, para dado  $n$ , separando as equações pela ordem de  $\varepsilon$ , e obtendo as funções  $g^{(j)}$  e  $f$  recursivamente. O grande “milagre” é que não são necessários infinitos termos para encontrar soluções: a série perturbativa trunca

rapidamente. Por exemplo, apenas os primeiros termos da série ( $n = 1$ )

$$g^{(1)} = \varepsilon g_1^{(1)}, \quad (5.44)$$

$$f = 1 + \varepsilon^2 f_2, \quad (5.45)$$

são necessários para determinar a solução de 1-sóliton

$$g^{(1)} = e^{\eta_1}, \quad (5.46)$$

$$f = 1 + e^{\eta_1 + \eta_1^* + \phi_{1,1}^*}, \quad (5.47)$$

com

$$\eta_1 = \mu x + i\mu^2 t + \eta_1^{(0)}, \quad (5.48)$$

$$e^{\phi_{1,1}^*} = (\mu + \mu^*)^{-2}, \quad (5.49)$$

onde  $\mu$  e  $\eta_1^{(0)}$  são constantes.

Todas as escolhas feitas no método de Hirota são justificadas pelo método de dressing. As soluções na forma de quociente já foram apresentadas. A forma da expansão perturbativa será esclarecida após a introdução dos operadores de vértice na próxima seção. O desacoplamento, realizado de forma aparentemente arbitrária, também pode ser explicado com os resultados já obtidos, como mostraremos agora.

A equação de grau  $-1$  de (5.16) é

$$[\varepsilon_1, t(-2)] = -\frac{1}{2}[A_0, t(-1)] + \partial_x t(-1), \quad (5.50)$$

pois, recolhendo apenas os elementos de grau  $-1$  de  $\Theta_- \varepsilon_1 \Theta_-^{-1}$ , temos

$$[t(-2), \varepsilon_1] + \frac{1}{2}[t(-1), [t(-1), \varepsilon_1]] = -[\varepsilon_1, t(-2)] - \frac{1}{2}[A_0, t(-1)], \quad (5.51)$$

e o elemento de grau  $-1$  de  $\partial_x \Theta_- \Theta_-^{-1}$  é  $\partial_x t(-1)$ .

Como  $A_0 = \partial_x B B^{-1}$ , e o campo  $\nu$  parametriza o elemento central  $\hat{c}$  em  $B$ , teremos o termo  $\partial_x \nu$  em  $A_0$ . Este termo não altera as equações de movimento já obtidas.

Em  $t(-1)$  temos um elemento da forma  $\nu h_n^{-1}$ , para  $\widehat{sl}_{n+1}$ , logo

$$\partial_x \nu \hat{c} = [\lambda_n \cdot H^{(1)}, \nu h_n^{(-1)}] = -\nu \hat{c}, \quad (5.52)$$

que resulta em  $\partial_x \nu = -v$ . A equação na direção de  $h_n^{(-1)}$  em (5.50) é então

$$\partial_x^2 \nu + \sum_{i=1}^n q_i r_i = 0. \quad (5.53)$$

Lembrando que  $\tau_0 = e^\nu$  temos

$$\partial_x^2 \nu = \frac{1}{\tau_0^2} (\tau_0 \partial_x^2 \tau_0 - (\partial_x \tau_0)^2). \quad (5.54)$$

Usando (5.34) temos o resultado

$$\tau_0 \partial_x^2 \tau_0 - (\partial_x \tau_0)^2 - \sum_{\alpha} \tau_{\alpha} \tau_{-\alpha} = 0, \quad (5.55)$$

que é o desacoplamento das equações CNLS, se levarmos em conta que neste caso  $\tau_{\alpha} = \tau_{-\alpha}^*$ .

## 5.2 Operadores de Vértice

Todo o processo de obtenção de soluções para o sistema GNLS depende da capacidade de se calcular as funções tau. Para facilitar este cálculo podemos usar a arbitrariedade do elemento de grupo constante  $g$ , o escolhendo de forma conveniente. Esta escolha será

$$g = \exp [F(\mu)], \quad (5.56)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro complexo. Além disso,  $F(\mu)$  será um autovetor de  $Ad\epsilon_2$  e  $Ad\epsilon_1$ :

$$[\epsilon_2, F(\mu)] = f^{(2)}(\mu)F(\mu), \quad (5.57)$$

$$[\epsilon_1, F(\mu)] = f^{(1)}(\mu)F(\mu), \quad (5.58)$$

onde  $f^{(2)}$  e  $f^{(1)}$  são funções específicas de  $\mu$ . Segue portanto que

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp [\rho(\mu)F(\mu)], \quad (5.59)$$

onde

$$\rho = \exp[-t f^{(2)}(\mu) + x f^{(1)}(\mu)]. \quad (5.60)$$

Para casos mais gerais onde

$$g = \exp [F_1(\mu_1)] \exp [F_2(\mu_2)] \cdots \exp [F_N(\mu_N)], \quad (5.61)$$

com

$$[\epsilon_2, F_i(\mu_i)] = f_i^{(2)}(\mu_i) F_i(\mu_i), \quad (5.62)$$

$$[\epsilon_1, F_i] = f_i^{(1)}(\mu_i) F_i(\mu_i), \quad (5.63)$$

encontramos

$$T_0 g T_0^{-1} = \exp [\rho_1(\mu_1) F_1(\mu_1)] \exp [\rho_2(\mu_2) F_2(\mu_2)] \cdots \exp [\rho_N(\mu_N) F_N(\mu_N)], \quad (5.64)$$

onde

$$\rho_i(\mu_i) = \exp [-t f_i^{(2)}(\mu_i) + x f_i^{(1)}(\mu_i)]. \quad (5.65)$$

Para o caso de  $\widehat{sl}(3)$ , os operadores de vértice são

$$F_{\pm\alpha_2}(\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_{\pm\alpha_2}^{(n)} \mu^{-n}, \quad (5.66)$$

$$F_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}(\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} E_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(n)} \mu^{-n} \quad (5.67)$$

com autovalores  $f_{\pm\alpha_2}^{(1)} = f_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(1)} = \pm\mu$ , enquanto  $f_{\pm\alpha_2}^{(2)} = f_{\pm(\alpha_1+\alpha_2)}^{(2)} = \pm\mu^2$ . De forma geral

$$f_{\pm\alpha}^{(j)} = \pm\mu^j. \quad (5.68)$$

Os operadores de vértice  $F_\gamma(\mu)$  podem ser escritos na forma

$$F_\gamma(\mu) = \mu^{\mu^2/2} : e^{\gamma \cdot Q(\mu)} :, \quad (5.69)$$

onde  $::$  indica ordenamento normal e

$$Q^i(\mu) = q^i - ip^i \ln \mu + i \sum \frac{\alpha_n^i \mu^{-n}}{n} \quad (5.70)$$

com

$$[\alpha_m^i, \alpha_n^j] = \delta^{ij} \delta_{m+n,0}, \quad \alpha_n^i |\lambda_0\rangle = 0 \quad (n > 0). \quad (5.71)$$

e

$$[q^i, p^j] = i\delta^{ij}, \quad p^i|\lambda_0\rangle. \quad (5.72)$$

Esta forma dos operadores de vértice é conveniente devido à relação [21]

$$: e^{\gamma_1 \cdot Q(\mu_1)} :: e^{\gamma_2 \cdot Q(\mu_2)} := (\mu_1 - \mu_2)^{\gamma_1 \cdot \gamma_2} : e^{\gamma_1 \cdot Q(\mu_1) + \gamma_2 \cdot Q(\mu_2)} :, \quad (5.73)$$

onde é suposto que  $|\mu_1| > |\mu_2|$ . A generalização para três ou mais operadores de vértice é imediata:

$$: e^{\gamma_1 \cdot Q(\mu_1)} :: \dots :: e^{\gamma_n \cdot Q(\mu_n)} := \prod_{i < j} (\mu_i - \mu_j)^{\gamma_i \cdot \gamma_j} : e^{\sum_{i=1}^n \gamma_i \cdot Q(\mu_i)} :. \quad (5.74)$$

Agora temos todos os recursos para determinar a solução de N-sólitons para as hierarquias de  $\widehat{sl}_n$ . Antes disso vamos discutir algumas soluções simples obtidas com o auxílio de poucos operadores de vértice.

## 5.3 Soluções das Equações GNLS

Mesmo com as vantagens do método de dressing, que transforma o problema de integração das equações de movimento num problema de cálculo de elementos de matriz, os métodos mais utilizados para obter soluções de equações integráveis são o método de Hirota e o de espalhamento inverso. No caso das equações CNLS, soluções de até três sólitos foram encontradas recentemente em [3], utilizando o método de Hirota. Via método de dressing encontramos as soluções de n-sólitos de CNLS. Antes de mostrar o resultado geral, vamos encontrar as soluções de até dois vértices, que podem ser obtidas sem grande dificuldade.

### 5.3.1 Soluções de até dois vértices

Certamente a solução mais simples para as equações CNLS é a de nenhum vértice, ou seja

$$T_0 g T_0^{-1} = \mathbf{1}. \quad (5.75)$$

Nesse caso

$$\tau_0 = \langle \lambda_0 | \lambda_0 \rangle = 1, \quad (5.76)$$

e todas as outras funções tau são nulas. Essa é a solução trivial (solução vácuo), com todos os campos nulos.

Uma solução menos trivial é obtida com a escolha

$$T_0 g T_0^{-1} = e^{F_\alpha(\mu)} = \mathbf{1} + F_\alpha(\mu). \quad (5.77)$$

Lembrando novamente que a expansão termina na primeira ordem devido à propriedade  $F^2 = 0$  dos operadores de vértice.

A função  $\tau_0$  continua sendo igual à 1, no entanto agora um dos campos, aquele associado à  $E_\alpha^{(0)}$  em  $A_0$ , será não-nulo. Como todos os outros campos são nulos, a única equação que restará será linear: os termos de acoplamento, não-lineares, desaparecem. Como a equação é linear, a solução não descreve um sóliton.

Vamos escolher  $F_\alpha(\mu) = F_{\alpha_2}(\mu)$  para  $\widehat{sl}_3$ . Então ( $\tau_0 = 1$ )

$$q_2 = \langle \lambda_0 | E_{-\alpha_2}^{(1)} F_{\alpha_2}(\mu) | \lambda_0 \rangle e^{-\mu^2 t + \mu x} = \mu e^{-\mu^2 t + \mu x}, \quad (5.78)$$

que claramente satisfaz

$$\partial_t q_2 + \partial_x^2 q_2 = 0 \quad (5.79)$$

O procedimento é análogo para obter outras soluções sob diferentes escolhas de  $T_0 g T_0^{-1}$ . Se escolhêssemos, por exemplo,  $F_{-\alpha_2}(\mu)$  teríamos a solução para  $r_2$ .

Para obter uma solução solitônica precisamos de equações que contenham um termo não-linear, ou seja, que um par  $r_i q_i$  não seja nulo. Isso é obtido escolhendo

$$T_0 g T_0^{-1} = (\mathbf{1} + F_\alpha(\mu_1))(\mathbf{1} + F_{-\alpha}(\mu_2)). \quad (5.80)$$

Com a escolha  $\alpha = \alpha_2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \langle \lambda_0 | (\mathbf{1} + F_{\alpha_2}(\mu_1) \rho_1) (\mathbf{1} + F_{-\alpha_2}(\mu_2) \rho_2) | \lambda_0 \rangle, \\ &= \langle \lambda_0 | \lambda_0 \rangle + \langle \lambda_0 | F_{\alpha_2}(\mu_1) F_{-\alpha_2}(\mu_2) | \lambda_0 \rangle \rho_1 \rho_2, \\ &= 1 + \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \rho_1 \rho_2. \end{aligned} \quad (5.81)$$

O coeficiente de  $\rho_1 \rho_2$  como segue. Substituindo as formas de  $F_{\alpha_2}(\mu_1)$  e  $F_{-\alpha_2}(\mu_2)$

temos

$$\begin{aligned}
\langle \lambda_0 | F_{\alpha_2}(\mu_1) F_{-\alpha_2}(\mu_2) | \lambda_0 \rangle &= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \leq 0} \mu_1^{-n} \mu_2^{-m} \langle \lambda_0 | E_{\alpha_2}^{(n)} E_{-\alpha_2}^{(m)} | \lambda_0 \rangle, \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \leq 0} \mu_1^{-n} \mu_2^{-m} \langle \lambda_0 | [E_{\alpha_2}, E_{-\alpha_2}^{(m)}] | \lambda_0 \rangle, \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \leq 0} \mu_1^{-n} \mu_2^{-m} \langle \lambda_0 | n \delta_{m+n,0} \hat{c} + h_2^{n+m} | \lambda_0 \rangle, \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{m \leq 0} \mu_1^{-n} \mu_2^{-m} n \delta_{n+m,0}, \\
&= \sum_{n > 0} n \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^n. \tag{5.82}
\end{aligned}$$

Notando que esta soma é simplesmente

$$z \frac{dS_z}{dz} = \frac{z}{(1-z)^2},$$

onde  $S_z$  é a soma geométrica

$$S_z = 1 + z + z^2 + \dots,$$

com  $|z| < 1$ , concluímos que

$$\sum_{n > 0} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^n = \frac{\mu_2/\mu_1}{(1 - \mu_2/\mu_1)^2} = \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)^2}.$$

Então a solução de

$$\begin{aligned}
\partial_t q_2 + \partial_x^2 q_2 + 2r_2 q_2^2 &= 0, \\
\partial_t r_2 - \partial_x^2 r_2 - 2q_2 r_2^2 &= 0,
\end{aligned}$$

é

$$q_2 = \frac{\mu_1 e^{-\mu_1^2 t + \mu_1 x}}{1 + \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)^2} e^{-\mu_1^2 t + \mu_1 x + \mu_2^2 t - \mu_2 x}}, \tag{5.86}$$

$$r_2 = -\frac{\mu_2 e^{\mu_2^2 t - \mu_2 x}}{1 + \frac{\mu_1 \mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)^2} e^{-\mu_1^2 t + \mu_1 x + \mu_2^2 t - \mu_2 x}}. \tag{5.87}$$

Para obter a solução de 1-sóliton da equação NLS, basta identificar  $r_2 = q_2^*$  e

fazer  $t \rightarrow -it$ . Isto implica que  $\mu_2 = -\mu_1^*$ .

### 5.3.2 Soluções de n-vértices para GNLS

Para começar vamos determinar a solução de N-vértices para  $\widehat{sl}(3)$ . O elemento de grupo  $T_0 g T_0^{-1}$  será da forma

$$T_0 g T_0^{-1} = F_{\alpha_2}(\mu_1) \cdots F_{\alpha_2}(\mu_N) F_{-\alpha_2}(\mu_{N+1}) \cdots F_{-\alpha_2}(\mu_{2N}) F_{\alpha_1+\alpha_2}(\mu_{2N+1}) \cdots \\ \cdots F_{\alpha_1+\alpha_2}(\mu_{3N}) F_{-\alpha_1-\alpha_2}(\mu_{3N+1}) \cdots F_{-\alpha_1-\alpha_2}(\mu_{4N}). \quad (5.88)$$

Temos então que

$$\tau_\beta = \sum_{\gamma=-\beta} \prod_{\gamma=-\beta} \mu_i \rho_i \prod_{i<j} (\mu_i - \mu_j)^{\gamma_i \cdot \gamma_j} \quad (5.89)$$

onde  $\gamma$  é a soma das raízes dos operadores de vértice no termo em questão.

A notação utilizada necessita de um pouco de explicação. Para isso vamos usar o exemplo da solução de quatro vértices com

$$T_0 g T_0^{-1} = F_{\alpha_2}(\mu_1) F_{-\alpha_2}(\mu_2) F_{\alpha_1+\alpha_2}(\mu_3) F_{-\alpha_1-\alpha_2}(\mu_4). \quad (5.90)$$

Vamos calcular inicialmente  $\tau_0$ . Como os termos que formam  $\tau_0$  devem ter soma de raízes associadas igual à zero, o primeiro termo é simplesmente o número 1, com raiz nenhuma associada. Com duas raízes temos  $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$ , onde  $\gamma_1 = \alpha_2$  e  $\gamma_2 = -\alpha_2$ . Usando (5.89), este termo é  $\mu_1 \mu_2 \rho_1 \rho_2 (\mu_1 - \mu_2)^{-2}$ . De forma análoga, se escolhermos  $\gamma_3 = \alpha_1 + \alpha_2$  e  $\gamma_4 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$  teremos  $\mu_3 \mu_4 \rho_3 \rho_4 (\mu_3 - \mu_4)^{-2}$ . O último termo que compõe  $\tau_0$  possui as quatro raízes, seguindo o raciocínio anterior, com  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ , temos que

$$\prod_{\gamma=0} \mu_i \rho_i \prod_{i<j} (\mu_i - \mu_j)^{\gamma_i \cdot \gamma_j} = \frac{(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_4) \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}{(\mu_1 - \mu_2)^2 (\mu_3 - \mu_4)^2 (\mu_1 - \mu_4)(\mu_2 - \mu_3)} \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4. \quad (5.91)$$

De forma análoga podemos encontrar as funções  $\tau_\beta$ , com  $\beta \neq 0$ ,

$$\tau_{-(\alpha_1+\alpha_2)} = \mu_3 \rho_3 \left( 1 + \frac{(\mu_1 - \mu_3) \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)^2 (\mu_2 - \mu_3)} \rho_1 \rho_2 \right), \quad (5.92)$$

$$\tau_{\alpha_1+\alpha_2} = \mu_4 \rho_4 \left( 1 + \frac{(\mu_2 - \mu_4) \mu_1 \mu_2}{(\mu_1 - \mu_2)^2 (\mu_1 - \mu_4)} \rho_1 \rho_2 \right), \quad (5.93)$$

$$\tau_{-\alpha_2} = \mu_1 \rho_1 \left( 1 + \frac{(\mu_1 - \mu_3) \mu_3 \mu_4}{(\mu_3 - \mu_4)^2 (\mu_1 - \mu_4)} \rho_3 \rho_4 \right), \quad (5.94)$$

$$\tau_{\alpha_2} = \mu_2 \rho_2 \left( 1 + \frac{(\mu_2 - \mu_4) \mu_3 \mu_4}{(\mu_3 - \mu_4)^2 (\mu_2 - \mu_3)} \rho_3 \rho_4 \right). \quad (5.95)$$

Com isso os campos estão determinados explicitamente, bastando escrever os respectivos quocientes. Esta solução de quatro vértices pode ser vista como uma solução de 1-sóliton, já que é a primeira solução que todos os campos são não-nulos.

## Capítulo 6

# Conclusões e Perspectivas

Utilizando procedimentos algébricos construímos as equações GNLS e encontramos suas soluções exatas de N-sólitons. Uma comparação entre o método utilizado aqui e o utilizado na referência [3], indica que a utilização da estrutura algébrica, além do apelo estético, possui uma imensa utilidade prática na determinação das soluções de equações integráveis. O método de dressing de certa forma explica porque a escolha de soluções na forma de um quociente, no método de Hirota, funciona. Aspectos que poderiam ser considerados como meras coincidências, como a variação do parâmetro que multiplica o tempo, para cada equação de uma hierarquia, se tornam bastante claros com a análise que adotamos. Vimos que este parâmetro está diretamente associado à escolha do elemento constante  $\epsilon_N$ : é um autovalor de  $Ad\epsilon_N$ , sendo o autovetor um operador de vértice. Aliás, os operadores de vértice deixam claro o aparecimento de pólos nas soluções: são devidos à somas geométricas.

Há várias generalizações possíveis para este trabalho, como escolha de outras álgebras, outras gradações e a mudança de grau de  $\epsilon_1$ . Esta última generalização conduziria à equações integráveis com derivadas temporais de ordem superior. Outro ponto importante seria uma análise mais pormenorizada das soluções de N-sólitons, principalmente no caso das equações associadas ao tempo  $t_{-1}$ , que constituem modelos relativísticos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Manakov, S. V., Sov. Phys. JETP, 38 (1974) 248
- [2] Ablowitz, M. J., Ohta, Y., Trutbatch, A. D., Physics Lett. A 253 (1999) 287
- [3] Kanna, T., Lakshmanan, M., Phys. Rev. Lett. 86, 5043 (2001)  
Kanna, T., Lakshmanan, M. Phys. Rev. E 67, 046617 (2003)
- [4] Bashkin, E. P., Vagov, A. V., Phys. Rev. B 56 (1997) 6207
- [5] Eierman, B. et al, Phys. Rev. Lett. 92 (2004)
- [6] Christodoulides, D. N., Coskun, T. H., Phys. Rev. Lett. 78 646 (1997)
- [7] Hasegawa, A., Tappert, F., Appl. Phys. Lett. 23, 142 (1973)
- [8] Hasegawa, A., Kodama, Y., Solitons In Optical Communications, Oxford, 1995
- [9] Chaochao, G.(Ed.), Soliton Theory And Its Applications, Springer, 1995
- [10] Fordy, A. P.(Ed.), Soliton Theory: A Survey Of Results, Manchester University Press, 1990
- [11] Faddeev, L. D., Takhtajan, L. A., Hamiltonian Methods In The Theory Of Solitons, Springer-Verlag, 1987
- [12] Zabusky, N. J., Kruskal, M. D., Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965)
- [13] Gardner, C. S., et al, Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967)
- [14] Lax, P. D., Comm. Pure Appl. Math. 21 (1968) 467
- [15] Mollenauer, L.F, Stolen, R. H., Gordon, J. P., Phys. Rev. Lett. 45, 1095 (1980)
- [16] Agrawal, G. V., Nonlinear Fiber Optics, Academic Press, 1995

- [17] Bauerle, G. G. A., de Kerf, E. A., Finite And Infinite Dimensional Lie Algebras And Applications In Physics, North-Holland, 1990
- [18] Humphreys, J. E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag, 1987
- [19] Fordy, A. P., Kulish, P. P., Commun. Math. Phys. 89, 427 (1983)
- [20] Cabrera-Carnero, I., Gomes, J. F., Sotkov, G. M., Zimerman, A. H., Nucl. Phys. B 634 (2002) 433
- [21] Goddard, P., Olive, D., Int. J. Mod. Phys. A1 (1986) 303
- [22] Frenkel, I. B., Kac, V. G., Invent. Math. 62(1980) 23
- [23] Kac, V. G., Raina, A. K., Highest Weight Representations Of Infinite Dimensional Lie Algebras, World Scientific, 1987
- [24] Ablowitz, M. J., Segur, H., Solitons And The Inverse Scattering Transform, Siam, 1985
- [25] Aratyn, H., Ferreira, L. A., Gomes, J. F., Zimerman, A. H., J. Phys. A: Math. Gen. 31 (1998) 9483

