

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.005/04

Acústica de fluidos ideais análoga à gravitação

Igor Zolnerkevic



Orientador

Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas

Junho de 2004

Quando os russos querem desejar sorte a alguém eles dizem:

НИ ПУХА НИ ПЕРА !

A tradução literal desta expressão é “nem pena, nem penugem”, ou seja, a expressão nos alerta para termos cautela e bom senso.

Não teria acabado nunca esta dissertação se não me lembrasse de minha avó sempre me dizendo ни пуха ни пера.

спасибо баба

Agradecimentos

What good is discovery if you can't celebrate it with firecrackers?

John A. Wheeler

Aos meus familiares, aos membros da MIRR Corporation and Illuminati Society, aos membros do Estado Paralelo, aos colegas e professores do IFT, IFUSP e IAG, minha profunda gratidão.

What does a young researcher need at the beginning of a career? Perhaps, most of all, a good mentor. (Einstein was an exception to the rule. He did brilliant work in isolation.) And freedom — freedom to experiment with ideas, freedom to try new directions, freedom to make mistakes, freedom to think without distraction.

John A. Wheeler

Agradeço aos funcionários, professores e colegas do IFT. Agradeço ao CNPq o apoio financeiro ao projeto de mestrado. Agradeço à FAPESP o apoio financeiro inicial.

Belief strongly upheld at Princeton that teaching and research are mutual sustaining parts of one and the same activity. Graduate course

gives way to work out and simplify materials to point where they can be taught to freshmen — and freshmen trained in the broader and deeper and better ways of understanding science, as they come along to advanced work, force the professor to still further advances in the subject, to the benefit of all and the gain of society.

John A. Wheeler

Agradeço especialmente a George Matsas, meu guia na terra selvagem dos espaços-tempos curvos, que sempre dedicado, atencioso, cauteloso e disposto a ensinar, me trouxe de volta são e salvo de nossa expedição em busca dos análogos em matéria condensada.

dissertação. [Do lat. *dissertative.*] S.f. 1. Exposição desenvolvida, escrita ou oral, de matéria doutrinária, científica ou artística. 2. Exposição, escrita ou oral, acerca de um ponto das matérias estudadas, que os estudantes apresentam aos professores. 3. Discurso; conferência; preleção.

Dicionário Aurélio

Like science, a piece of expository writing takes a reductionist and reasoned approach to the world. You have a position or argument, you structure your argument in logical steps, you amass facts and evidence to convince your reader of each assertion, and you lead your reader in a

more or less direct route from some starting point to a finish of increased comprehension. We all learn that in expository writing it is excellent form to begin each paragraph with a topic sentence. A topic sentence, in effect, names the idea of the paragraph. Begin by telling your reader what she is going to learn in the paragraph and how to organize her thoughts.

Alan P. Lightman

A Alan, Kip e Roger, meu muito obrigado pelas dicas!

Resumo

Neste trabalho, tratamos de aspectos clássicos de modelos análogos de relatividade geral com o intuito de compreender melhor efeitos de gravitação semi-clássica tais como a radiação Hawking. Em um fluido ideal barotrópico com um fluxo irrotacional inhomogêneo, a equação para as ondas sonoras é idêntica à equação de um campo escalar não massivo em um espaço-tempo curvo (equação de Laplace-Beltrami). A métrica lorentziana efetiva que governa a propagação do som depende algebricamente da densidade, da velocidade do fluxo e da velocidade local do som. O horizonte sônico em um fluxo de fluido supersônico serve como análogo de um buraco negro. Vários exemplos de buracos negros acústicos estacionários são dados e uma expressão geral para a gravidade superficial acústica é derivada. Comentamos a relação entre os análogos acústicos e os condensados de Bose-Einstein. Também demonstramos como formular a aproximação eikonal em termos de geodésicas tipo luz e campos de Killing dos espaços-tempos acústicos. Ademais, apresentamos comentários a respeito da generalização da validade destes resultados para além da hipótese de um fluido sem viscosidade, barotrópico com fluxo irrotacional. Concluímos com alguns comentários adicionais e nossas perspectivas.

Palavras Chaves: relatividade geral; modelos análogos; geometria riemanniana; horizonte acústico; horizonte sônico; buracos negros; buracos mudos

Áreas do conhecimento: relatividade geral; teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos; matéria condensada; hidrodinâmica; acústica

Abstract

In this work, we focus on classical aspects of analogue models of general relativity aiming to gain a deep understanding of semiclassical gravity effects such as Hawking radiation. In an ideal barotropic fluid with a non-homogeneous irrotational flow, the sound wave equation is identical to that for a massless scalar field in a curved space-time geometry (Laplace-Beltrami equation). The effective Lorentzian metric governing the propagation of sound depends algebraically on the density, flow velocity, and local speed of sound. The sonic horizon in a supersonic fluid flow provides an acoustic analog to black holes. Many examples of stationary acoustic black holes are given and a general expression for acoustic surface gravity is derived. We comment about the relation between these acoustic analogue models and Bose-Einstein condensates. We also demonstrate how to rephrase the eikonal approximation in terms of null geodesics and Killing vector fields of the acoustic effective geometry. Moreover, we present comments about the generalization of those results' validity beyond the inviscid, barotropic fluid and irrotational flow hypothesis. Final comments and perspectives are added at the end.

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Modelos análogos à relatividade geral	2
1.2	Um exemplo de modelo análogo: acústica de fluidos	3
1.3	Um breve histórico	4
1.4	As filosofias de trabalho	7
1.5	Panorama da dissertação	8
2	Hidrodinâmica de fluidos ideais	11
2.1	Panorama	11
2.2	O conceito de fluido ideal	12
2.3	Física newtoniana e notação	13
2.4	Descrições euleriana e lagrangiana	14
2.5	Conservação do fluxo de massa	15
2.6	Conservação do fluxo de momento	16
2.7	Considerações termodinâmicas	19
2.8	Equação de Bernoulli	23

2.9	Conservação do fluxo de energia	25
3	Equação para o som e os espaços-tempos acústicos	27
3.1	Panorama	27
3.2	Ondas sonoras em um fluido homogêneo em repouso	28
3.3	Som em fluidos ideais barotrópicos e irrotacionais	30
3.4	A analogia com a relatividade geral	32
3.5	Dois arenas geométricas para o mesmo fenômeno	35
4	Buracos Mudos	38
4.1	Panorama	38
4.2	Propriedades dos espaços-tempos acústicos	39
4.2.1	A métrica é localmente lorentziana	39
4.2.2	A 4-velocidade e a 4-aceleração do fluido	39
4.2.3	Base ortonormal	42
4.2.4	ADM	43
4.2.5	O fator conforme	45
4.2.6	Não há problemas de causalidade	46
4.2.7	Graus de liberdade	47
4.2.8	Espaço-tempo acústico estacionário	47
4.2.9	O papel do referencial inercial “de fundo” do laboratório	48
4.2.10	Ergoregião acústica	49

4.2.11	Horizonte de eventos	50
4.2.12	Espaço-tempo acústico estático	51
4.3	Exemplos de Buracos Mudos	52
4.3.1	Fluxos estacionários quasi-unidimensionais	53
4.3.2	Vórtices, sorvedouros e fontes bidimensionais com simetria axial	54
4.3.3	Espaço-tempo acústico conforme a um buraco negro	59
4.3.4	Buraco Mudo Canônico	63
4.4	Gravidade superficial acústica	64
4.5	As leis da mecânica dos buracos negros	67
5	Espaços-tempos efetivos para perturbações em condensados de Bose-Einstein	69
5.1	Panorama	69
5.2	O modelo análogo à relatividade geral usando condensados de Bose-Einstein	70
5.3	Modelos análogos aos universos de Friedmann-Robertson-Walker planos	72
6	Acústica geométrica	74
6.1	Panorama	74
6.2	Ondas planas monocromáticas	75
6.3	Pacotes de ondas planas	76
6.4	Aproximação eikonal	77

6.5	Raios de som são geodésicas tipo luz do espaço-tempo acústico	80
6.6	Leis de transporte e conservação	81
6.7	A curvatura experimentada pelos raios de som	85
6.8	Algumas aplicações	89
6.8.1	Seção de choque de absorção de um buraco mudo canônico . .	89
6.8.2	Tempo de percurso	91
7	Viscosidade, barotropicidade e vorticidade	93
7.1	Panorama	93
7.2	Viscosidade	93
7.3	Barotropicidade	96
7.4	Vorticidade	97
8	Conclusões	99
8.1	Sumário dos resultados principais	99
8.2	Observações finais	100
8.3	Perpectivas	101
A	Densidade de energia média das ondas sonoras em meios ho-	
	mogêneos em repouso	103
	Bibliografia	106

Capítulo 1

Introdução

1.1 Modelos análogos à relatividade geral

Esta dissertação é sobre modelos análogos à relatividade geral [1]. Em geral, o que se entende por este nome é um sistema de matéria condensada feito de um meio material com propriedades espacialmente inhomogêneas e variáveis no tempo. Neste meio propagam-se ou perturbações ondulatórias em sua estrutura, ou ondas eletromagnéticas. A influência do meio na propagação destas ondas é tal que elas percebem a geometria de um espaço-tempo curvo especial. As componentes da métrica deste espaço-tempo efetivo para as ondas são funções das propriedades do meio material. Estas propriedades podem ser ajustadas para simular espaços-tempos curvos da relatividade geral.

1.2 Um exemplo de modelo análogo: acústica de fluidos

Talvez o exemplo mais simples de um modelo análogo à relatividade geral seja o de um fluxo de fluido convergindo em direção a um sorvedouro (Figura 1.1). Quanto mais próximo um elemento de fluido está do sorvedouro, maior sua velocidade. Se a certa distância do sorvedouro, a projeção da velocidade do fluxo na direção do sorvedouro ultrapassar a velocidade do som com relação ao fluido, haverá uma região em torno do sorvedouro da qual nenhum som gerado no fluido poderá escapar. Esta ação de arraste do som exercida pelo fluxo lembra a ação da gravidade de um buraco negro.

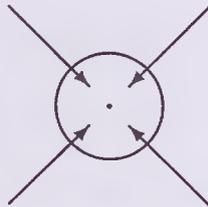


Figura 1.1: Esquema de um buraco negro bidimensional esféricamente simétrico. Um sorvedouro pontual de fluido provoca um fluxo estacionário radial cuja intensidade aumenta em sua direção até alcançar a velocidade do som no círculo. O círculo é um horizonte de eventos para ondas sonoras propagando-se neste fluxo.

Dado este fluxo, ou outro qualquer, podemos determinar, no limite da acústica geométrica, a trajetória dos raios de som. O módulo do deslocamento $|d\vec{x}|$ realizado

num tempo dt por um raio de som em um fluido com fluxo de velocidade \vec{v} e com velocidade do som com relação ao fluido c é tal que

$$|d\vec{x} - \vec{v}dt| = cdt. \quad (1.1)$$

Isto implica que

$$(d\vec{x} - \vec{v}dt) \cdot (d\vec{x} - \vec{v}dt) = c^2 dt^2, \quad (1.2)$$

que pode ser convenientemente escrita como

$$-(c^2 - v^2)dt^2 - 2\vec{v} \cdot d\vec{x}dt + d\vec{x} \cdot d\vec{x} = 0. \quad (1.3)$$

A expressão (1.3) nos encoraja a interpretar os raios de som como trajetórias tipo luz de uma métrica efetiva

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \propto \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -\vec{v} \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots\dots \\ -\vec{v} & \vdots & \mathbb{1} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

1.3 Um breve histórico

Os primeiros modelos análogos a serem estudados foram os baseados na propagação de ondas eletromagnéticas em meios dielétricos. Ao longo do século XX, desde a publicação de um artigo de W. Gordon [2], houve um interesse esporádico no assunto. Veja [3] para um sumário das conclusões desta primeira fase dos estudos dos análogos.

O primeiro a introduzir um espaço-tempo efetivo para ondas sonoras foi V. Moncrief, em 1980, no estudo da estabilidade de discos de acreção em torno de buracos negros, usando como modelo um fluido ideal isentrópico com fluxo irrotacional no espaço-tempo de Schwarzschild [4] (veja também [5]). Independentemente, a situação não-relativística foi analisada por W. G. Unruh, em 1981 [6]. A partir das equações fundamentais dos fluidos ideais governados pela mecânica clássica newtoniana, ele demonstrou que o som propagando-se em um fluido barotrópico com fluxo irrotacional é descrito por um campo escalar obedecendo a equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo curvo efetivo. A métrica deste espaço-tempo é a dada acima por (1.4), multiplicada por um fator conforme (veja a equação (3.28), pág. 35). Ademais, ele quantizou este campo escalar e estudou seu comportamento na vizinhança de um horizonte de eventos acústico, provando que um buraco negro acústico (“buraco mudo”) emite radiação térmica de fônons, pelos mesmos motivos pelos quais esperamos que buracos negros emitam radiação térmica (radiação Hawking).

A motivação de Unruh para delinear esta analogia foi a busca de um modelo simples que nos guiasse em direção à transcendência das hipóteses básicas da atual teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos, também chamada de gravitação semi-clássica, das quais depende a dedução original do efeito Hawking, a saber:

- Os campos quânticos propagam-se no espaço-tempo sem modificar sua geome-

tria.

- O campo gravitacional não é quantizado.
- A equação de onda para o campo quântico é válida em todas as escalas, até mesmo na escala de Planck.

Acontece que, para ondas sonoras com comprimento de onda da ordem do caminho livre médio das moléculas constituintes do fluido, temos que modificar a relação de dispersão para levar em conta os efeitos de dispersão e dissipação consideráveis nesta escala. Além desta escala, a descrição por um fluido ideal perde o sentido, devendo ser substituída pela descrição por muitos átomos em interação. Unruh sugeriu que esta situação poderia ser comparada com a esperada quebra da noção clássica de espaço-tempo na escala de Planck. Ele também observou que os fônons são flutuações quânticas do fluxo do fluido e que perturbam este fluxo de maneira possivelmente comparável à maneira como o gráviton perturba o espaço-tempo em que se propaga.

Uma década se passou até que outros pesquisadores se interessassem pelo vislumbre da gravidade quântica que o análogo sônico poderia oferecer. Foram investigados os efeitos de relações de dispersão não lineares inspiradas em análogos acústicos no efeito Hawking, que acabou mostrando-se insensível às mudanças na teoria para altas frequências (veja [7]). Detalhes desta questão são fornecidos nos ensaios [8], [9], [10] e [11].

No final dos anos 90, iniciou-se uma explosão de interesse por modelos análogos motivada não apenas por questões teóricas, mas também pela esperança de realizar experiências em laboratório para detectar efeitos análogos aos efeitos de relatividade geral clássica e semi-clássica. Os três sistemas físicos mais apreciados, cada um com suas próprias vantagens e desvantagens teóricas e experimentais, são os baseados em flutuações quânticas em hélio líquido [12], ondas eletromagnéticas em meios dielétricos e flutuações quânticas em condensados de Bose-Einstein (analisamos este sistema com mais detalhe a seguir). Uma breve descrição dos dois últimos sistemas pode ser encontrada em [13]. Amplas bibliografias sobre estes e outros modelos análogos, ainda que incompletas e defasadas no tempo devido à abrangência e a rápida expansão do tema, são fornecidas em [1] e [14]. Além dos análogos citados nestas referências, outros têm surgido como os baseados em ondas de superfície em fluidos ideais [15] e gotas de líquidos em substratos metálicos [16]. Esta variedade de análogos é, em geral, a manifestação de uma propriedade da linearização de uma certa classe de equações diferenciais [14].

1.4 As filosofias de trabalho

Os trabalhos que lidam com modelos análogos à relatividade geral podem ser classificados quanto a três propósitos distintos:

1. O propósito mais comum é usar as facilidades teóricas e experimentais do

modelo análogo para compreender melhor a cinemática da relatividade geral clássica e semi-clássica, isto é, a propagação de campos clássicos e quânticos em espaços-tempos curvos fixos.

2. Usar a abordagem de espaço-tempo efetivo para interpretar mais claramente a física da matéria condensada.
3. Em vez de procurar modelos análogos à relatividade geral, procurar modelos *para* a relatividade geral. Isto é, buscar inspiração em sistemas de matéria condensada para entender como seria possível uma teoria mais fundamental reproduzir a dinâmica da relatividade geral (as equações de Einstein) como seu limite clássico. Esta idéia tem um parentesco com a idéia de gravidade induzida de Andrei Sakharov [14]. Modelos análogos para a dinâmica da relatividade geral são mais raros por que, em geral, a dinâmica dos espaços-tempos efetivos não é descrita pelas mesmas leis que a gravidade.

Como boa parte dos trabalhos motivados por 1 acabam por atingir o objetivo de 2 e os trabalhos com o propósito 3 sempre tem algo a dizer aos partidários de 1 e 2, esta divisão não deve ser levada muito a sério.

1.5 Panorama da dissertação

Nesta dissertação, concentramo-nos no modelo análogo à relatividade geral baseado na acústica de fluidos ideais que introduzimos na seção 1.2 e que como vimos na

seção 1.3, foi o primeiro a ser proposto com a motivação de entender melhor a gravitação semi-clássica. Restringimo-nos a uma análise clássica deste modelo, mas sempre procurando apontar os aspectos relevantes para os efeitos semi-clássicos. No capítulo 2, deduzimos a partir da mecânica clássica newtoniana e da termodinâmica toda a hidrodinâmica que precisamos para construir o modelo análogo. No capítulo 3, deduzimos a equação de propagação do som e explicamos a analogia com a relatividade geral. No capítulo 4, sempre tendo em mente os buracos negros, descrevemos as propriedades gerais dos espaços-tempos percebidos pelo som, damos exemplos de espaços-tempos efetivos com horizontes de eventos, interpretamos a gravidade superficial associada a estes horizontes e terminamos com uma observação sobre as condições em que podemos esperar que modelos análogos sigam as leis da mecânica dos buracos negros. Construir em laboratório um modelo análogo baseado em acústica de fluidos ideais é difícil por causa da tendência à formação de frentes de choque em fluxos supersônicos. Mesmo usando configurações que evitem frentes de choque, a detecção de efeitos semi-clássicos parece impossível [17]. Felizmente, como explicamos brevemente no capítulo 5, existe um modelo análogo similar (as mesmas equações no regime adequado) onde o limite entre o clássico e o quântico é relativamente mais fácil de manipular: são os baseados em perturbações em condensados de Bose-Einstein no limite hidrodinâmico [18]. Por isso, quando tratamos dos espaços-tempos efetivos para o som, vale termos em mente que é possível realizá-los através dos condensados de Bose-Einstein. O espírito da dissertação como

Capítulo 2

Hidrodinâmica de fluidos ideais

2.1 Panorama

Baseados principalmente em [19] e [20], fazemos uma revisão da hidrodinâmica necessária para a construção de nosso modelo análogo à relatividade geral. Começamos na seção 2.2 por explicar brevemente a descrição da matéria através da aproximação por um fluido ideal. Na seção 2.3, deixamos claro o contexto da física clássica em que tratamos a seguir os fluidos ideais e definimos nossa notação. Algumas observações na seção 2.3 podem parecer redundantes mas elas são necessárias para evitar confusões adiante quando introduzimos o espaço-tempo efetivo para ondas sonoras. Na seção 2.4, estabelecemos a relação entre duas maneiras de descrever o fluido: a euleriana, relacionada com medidas feitas num referencial inercial e a lagrangeana, relacionada com medidas feitas no referencial próprio de um pedaço do fluido móvel. Nas seções 2.5 e 2.6, a partir da conservação do fluxo de massa e do momento, deduzimos as equações que governam a dinâmica dos fluidos ideais.

Mas ao se mover, a maioria dos fluidos reais, exceto os superfluidos quânticos, desenvolvem resistência a cisalhamento. A medida de sua resistência é a sua *viscosidade*, propriedade relacionada com o transporte de momento e energia através do movimento microscópico aleatório das partículas do fluido. Outra propriedade relacionada com este transporte microscópico de momento e energia é a condutividade térmica do fluido. Desprezando a viscosidade, a condução de calor e reações químicas e nucleares, podemos considerar que o transporte da energia e do momento manifesta-se somente através da pressão hidrostática, da velocidade média de conjunto do fluido, das interações gravitacional e eletromagnética associadas às densidades de massa e de carga elétrica e de alguma força externa ao fluido. Esta é a aproximação por trás da definição de um *fluido ideal*.

2.3 Física newtoniana e notação

Os fluidos que descrevemos a seguir são fluidos ideais com carga elétrica líquida e gravidade própria desprezíveis, dentro do contexto da física newtoniana.

Lembramos que a arena geométrica da física newtoniana é um espaço tridimensional com métrica euclidiana mais um tempo universal. Observadores inerciais em repouso com respeito a um sistema de coordenadas que cobre este espaço euclidiano medem as propriedades do fluido que existe neste espaço. Os resultados das medidas são expressos por campos tensoriais definidos no espaço euclidiano. As leis da física são relações entre estes campos.

fluido, devemos calcular $d\vec{v}(t; \vec{x}(t))/dt$ que, usando a regra de cadeia, é igual a

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (2.1)$$

O operador

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \quad (2.2)$$

aparece com frequência na física dos meios contínuos e é chamado de *derivada convectiva* ou de *derivada material*. Ele faz a tradução entre as descrições lagrangiana (lado esquerdo da equação) e euleriana (lado direito). Notemos que, se há movimento, $\partial/\partial t$ compara uma quantidade no mesmo ponto do espaço para dois elementos de fluidos que passam por ele em instantes sucessivos, enquanto que d/dt segue o movimento e toma a diferença no valor de uma quantidade em instantes sucessivos no mesmo elemento móvel de fluido. A derivada convectiva aplicada a uma quantidade é a taxa de variação no tempo desta quantidade no referencial local de repouso de um elemento de fluido.

2.5 Conservação do fluxo de massa

Consideramos a densidade de massa $\rho(t; \vec{x})$ de fluido (massa de fluido por unidade de volume) e um volume \mathcal{V} fixo no referencial inercial. Com o fluido a mover-se, há um fluxo de massa atravessando cada elemento de superfície $d\vec{\Sigma}$ na fronteira $\partial\mathcal{V}$ de \mathcal{V} . Contanto que não hajam fontes ou sorvedouros de matéria, a taxa de variação no tempo da massa localizada dentro de \mathcal{V} será dada pela taxa de transporte líquido

através de $\partial\mathcal{V}$. A taxa de variação de massa atravessando uma unidade de área é o fluxo de massa, $\rho\vec{v}$. Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho dV = - \int_{\partial\mathcal{V}} \rho\vec{v} \cdot d\vec{\Sigma}. \quad (2.3)$$

Aplicando o teorema de Gauss, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho dV = - \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho\vec{v}) dV, \quad (2.4)$$

que deve ser válida para um volume \mathcal{V} qualquer, implicando a equação diferencial que expressa a conservação de massa, a *equação de continuidade*,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0. \quad (2.5)$$

Na presença de fontes ou sorvedouros de massa, devemos adicionar ao lado direito da equação (2.5) um termo correspondente ao aumento ou diminuição de massa.

Escrever a equação (2.5) em termos da derivada convectiva (2.2) mostra-nos como a densidade varia ao longo da trajetória dos elementos de fluido:

$$\frac{d}{dt} \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v}. \quad (2.6)$$

2.6 Conservação do fluxo de momento

Aplicando o mesmo raciocínio que usamos para o fluxo de massa na seção 2.5, consideramos a densidade de momento ρv_i e um volume fixo \mathcal{V} . A taxa de variação no tempo da quantidade de momento localizada dentro de \mathcal{V} deve ser igual à taxa

de transporte líquido de momento através de $\partial\mathcal{V}$ mais a contribuição de uma fonte ou sorvedouro de momento no interior de \mathcal{V} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho v_i dV = (\text{transporte através de } \partial\mathcal{V}) + (\text{fonte ou sorvedouro}). \quad (2.7)$$

Nesta seção determinamos os dois termos do lado direito da equação (2.7).

Para determinar o fluxo de momento através de qualquer superfície no fluido devemos conhecer um tensor T_{ij} tal que

$$T_{ij} d\Sigma_j = \left(\begin{array}{l} \text{i-ésima componente do momento} \\ \text{que atravessa o elemento de área } d\Sigma_j \\ \text{no seu sentido positivo por unidade de tempo} \end{array} \right). \quad (2.8)$$

Este tensor é chamado de *tensor de stress*. O tensor de *stress* de um fluido ideal nas condições que impusemos nas seções 2.2 e 2.3 é composto pela soma de dois termos que descrevemos abaixo.

Stress cinético O fluxo do fluido contribui para o fluxo de momento. O momento devido ao fluxo do fluido $d\vec{p}$ que atravessa um pequeno elemento de área $d\vec{\Sigma}$ em seu sentido positivo por unidade de tempo é igual a $(\rho\vec{v} \cdot d\vec{\Sigma})\vec{v}$. Portanto, o fluxo do fluido contribui com um termo para o tensor de *stress* chamado de *stress cinético* que é igual a

$$\rho v_i v_j. \quad (2.9)$$

Pressão isotrópica Existem dois tipos de forças que atuam em um elemento de fluido. Um tipo é o das forças aplicadas por agentes externos diretamente ao elemento, como por exemplo a força aplicada por um campo gravitacional externo. O outro tipo é o das forças aplicadas ao elemento pelo resto do meio contínuo ao seu redor. Uma força deste tipo é a associada a *pressão* do fluido que é provocada a nível microscópico pela distribuição isotrópica de velocidades das partículas. Independentemente do estado de movimento do fluido, a pressão $P(t; \vec{x})$ é tal que em qualquer elemento de superfície $d\vec{\Sigma}$ no fluido é exercida uma força $Pd\vec{\Sigma}$. Portanto a pressão do fluido contribui com um termo para o tensor de *stress* igual a

$$P\delta_{ij}. \quad (2.10)$$

No que segue, para conservar a energia do sistema (veja seção 2.9), restringimos as forças externas que consideramos como fontes ou sorvedouros de momento na equação (2.7) àquelas cuja força por unidade de massa \vec{f} é independente do tempo e que possa ser expressa como um gradiente, isto é,

$$\vec{f}(\vec{x}) = -\nabla\Phi. \quad (2.11)$$

Portanto, a taxa de variação no tempo da quantidade de momento localizada dentro de \mathcal{V} é igual a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho v_i dV = - \int_{\partial\mathcal{V}} T_{ij} d\Sigma_j + \int_{\mathcal{V}} \rho f_i dV, \quad (2.12)$$

onde $T_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j$ (notamos que T_{ij} é simétrico). Usando o teorema de Gauss

no primeiro termo do lado direito de (2.12), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho v_i dV = - \int_{\mathcal{V}} \partial_j T_{ij} dV + \int_{\mathcal{V}} \rho f_i dV, \quad (2.13)$$

que deve ser válida para um volume \mathcal{V} qualquer, implicando a equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \partial_j T_{ij} = \rho f_i. \quad (2.14)$$

Usando $T_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j$, a derivada convectiva (2.2) e a equação da continuidade (2.5), é fácil verificar que a equação (2.14) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{f}, \quad (2.15)$$

que pode ser interpretada como a segunda lei de Newton para um elemento de fluido.

A equação (2.15) é a equação de movimento para os fluidos ideais e é conhecida como a *equação de Euler*.

2.7 Considerações termodinâmicas

A equação de Euler (2.15) e a equação de continuidade (2.5) formam um sistema de quatro equações para cinco incógnitas (ρ , P e v_i). De maneira a termos um sistema fechado de equações, precisamos de uma equação a mais que relacione P com ρ . A maneira como a pressão relaciona-se com a densidade resulta da cinética das partículas constituintes do meio, sendo expressa por suas propriedades termodinâmicas.

Para o que segue, é útil introduzir a entalpia $H = E + PV$ de um elemento de fluido e a correspondente entalpia por unidade de massa $h = u + P/\rho$. Inserindo $u = h - P/\rho$ no lado esquerdo da primeira lei (2.17) obtemos a primeira lei na “representação da entalpia”:

$$dh = Tds + \frac{dP}{\rho}. \quad (2.18)$$

O estado termodinâmico de um elemento de fluido é completamente determinado por quaisquer duas variáveis do conjunto ρ, T, s e P . De maneira a calcular todas as características deste estado a partir das duas variáveis, devemos conhecer as *equações de estado* relevantes. As equações de estado resultam da cinética das partículas constituintes do fluido. Por exemplo, a partir de $\rho(t; \vec{x})$ e $s(t; \vec{x})$, determinamos $P(t; \vec{x})$ e $T(t; \vec{x})$ através das equações de estado $P(\rho, s)$ e $T(\rho, s)$ e por fim, $h(t; \vec{x})$ via primeira lei, (2.18). Então, um *fluido simples* ($\sum_I \mu_I dN_I = 0$) genérico é descrito por *sete* variáveis dependentes do espaço e do tempo (ρ, P, v_i, T e s), determinadas por *sete* equações: equação da continuidade (2.5), as três componentes da equação de Euler (2.15) modificada com a adição da força de viscosidade (veja o capítulo 7, seção 7.1), duas equações de estado e a primeira lei da termodinâmica. Comumente, são feitas outras simplificações que descrevemos a seguir.

Fluido ideal Uma idealização freqüentemente acurada é a de que no fluido não há aquecimento resultante de processos dissipativos tais como viscosidade, condutividade térmica ou emissão ou absorção de radiação. Quando esta é uma boa aprox-

imação, a entropia por unidade de massa s de um elemento de fluido é constante, isto é,

$$\frac{ds}{dt} = 0. \quad (2.19)$$

Esta condição mais a ausência de viscosidade e condutividade térmica são suficientes para que haja conservação de energia (veja seção 2.9). Portanto, descrevemos o fluxo de um fluido ideal através de *seis* variáveis (ρ , P , v_i e s), determinadas por *seis* equações: equação de continuidade, equação de Euler, $P(\rho, s)$ e $ds/dt = 0$.

Fluido isentrópico Um caso especial de fluido ideal é o fluido isentrópico. Neste caso, a entropia é constante em toda parte, e não apenas ao longo das trajetórias dos elementos de fluido. Desse modo precisamos apenas de *cinco* variáveis, (ρ , P e v_i), determinadas por *cinco* equações: continuidade, Euler e $P(\rho) = P(\rho, s = \text{constante})$. A partir da primeira lei (2.18), deduzimos que para um fluido isentrópico

$$\nabla h = \frac{1}{\rho} \nabla P. \quad (2.20)$$

O fluido isentrópico é um caso de *fluido barotrópico*, isto é, de um fluido em que a pressão é função apenas da densidade*.

*Outra maneira de obter um fluido simples barotrópico é impor que sua temperatura é constante, isto é, que o fluido é *isotérmico*. Para um fluido simples isotérmico, $ds/dt = -\rho \nabla \cdot \vec{v} ds/d\rho$. Portanto, se desejamos que o fluido isotérmico seja ideal, devemos impor $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ ou $s(\rho, T = \text{cte}) = \text{constante}$.

2.8 Equação de Bernoulli

O rotacional do campo de velocidade do fluido,

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}, \quad (2.21)$$

é conhecido como *vorticidade*.

Podemos reescrever a equação de Euler em termos da vorticidade. Reescrever o termo $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ da equação de Euler (2.15) usando a identidade vetorial

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla v^2 - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (2.22)$$

resulta em

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) + \frac{\nabla P}{\rho} - \vec{v} \times \vec{\omega} = 0. \quad (2.23)$$

Esta é a forma mais geral do que se conhece por *equação de Bernoulli*. Formas mais familiares são as de três casos específicos:

Fluxo estacionário de um fluido ideal Fluxo estacionário é aquele em que $\partial(\text{qualquer quantidade})/\partial t = 0$. Num fluido estacionário, as curvas integrais de \vec{v} coincidem com as trajetórias dos elementos de fluido. A idealidade implica que a entropia é constante seguindo o fluxo, isto é, $ds/dt = (\vec{v} \cdot \nabla) s = 0$. Da primeira lei da termodinâmica, $dh = Tds + dP/\rho$, obtemos

$$(\vec{v} \cdot \nabla) P = \rho (\vec{v} \cdot \nabla) h. \quad (2.24)$$

Agora, definimos a constante de Bernoulli, B , por

$$B \equiv \frac{1}{2}v^2 + h + \Phi. \quad (2.25)$$

O produto escalar de \vec{v} com a equação de Bernoulli (2.23) neste caso é

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi + h \right) = \vec{v} \cdot \nabla (B) = \frac{d}{dt}B = 0. \quad (2.26)$$

Isto nos diz que a constante de Bernoulli é constante no tempo ao longo das linhas de fluxo.

Fluxo irrotacional de um fluido isentrópico Um fluxo para o qual $\vec{\omega} = 0$ é dito ser um *fluxo irrotacional*. Um teorema de análise vetorial diz que para todo campo vetorial irrotacional, \vec{v} , definido numa região simplesmente conexa, isto é, uma região em que qualquer curva contínua fechada pode continuamente ser contraída até tornar-se um ponto sem sair daquela região [†], existe uma função escalar $\psi(t; \vec{x})$ tal que

$$\vec{v} = -\nabla\psi. \quad (2.27)$$

Para um fluido isentrópico, $\nabla P = \rho\nabla h$. Impondo estas condições na equação (2.23) obtemos

$$\nabla \left(-\frac{\partial\psi}{\partial t} + B \right) = 0. \quad (2.28)$$

[†]Por exemplo, o espaço exterior a uma esfera sólida é simplesmente conexo. O plano exterior a um disco sólido não é.

Integrando a equação (2.28) concluímos que a quantidade $\frac{\partial\psi}{\partial t} + B$ é igual a uma função dependente de tempo. Absorvendo a constante de integração dependente do tempo na definição de ψ , podemos escrever

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + h + \Phi = 0, \quad (2.29)$$

que é a forma da equação de Bernoulli que usamos adiante (veja o sistema de equações (3.9), pág. 30).

2.9 Conservação do fluxo de energia

Usando a equação da continuidade (2.5), a equação de Euler (2.15) e a primeira lei da termodinâmica nas formas (2.17) e (2.18), podemos deduzir que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2}v^2 + u + \Phi \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \vec{v} \left(\frac{1}{2}v^2 + h + \Phi \right) \right] = \rho T \frac{ds}{dt} \quad (2.30)$$

(veja [19], seção 12.3.5). O primeiro termo do lado esquerdo da equação (2.30) pode ser interpretado como a derivada parcial no tempo da densidade de energia U do fluido medida no referencial inercial,

$$U = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho u + \rho\Phi. \quad (2.31)$$

O primeiro termo de (2.31) é a densidade de energia cinética, o segundo é a densidade de energia interna e o terceiro é a densidade da energia potencial devida a força externa independente do tempo. O segundo termo do lado esquerdo da equação

Capítulo 3

Equação para o som e os espaços-tempos acústicos

3.1 Panorama

Explicamos neste capítulo como pequenas perturbações em fluidos ideais barotrópicos e irrotacionais podem ser vistas por um estudante de relatividade geral como um campo escalar de Klein-Gordon definido em um espaço-tempo efetivo localmente de Minkowski, mas globalmente curvo segundo as leis da hidrodinâmica. Na seção 3.2, revisamos a definição de som e a dedução da bem conhecida equação de onda para o som em um fluido homogêneo e em repouso. Na seção 3.3, deduzimos a equação de propagação do som para o caso mais geral de um fluido ideal barotrópico com fluxo irrotacional. Na seção 3.4, explicamos a analogia com a relatividade geral, reescrevendo a equação para o som de uma maneira adequada e introduzindo os *espaços-tempos acústicos*. Na seção 3.5, deixamos claro a relação entre as duas arenas geométricas que usamos adiante para descrever o som e nossas

convenções de notação.

3.2 Ondas sonoras em um fluido homogêneo em repouso

Rápidas e minúsculas desigualdades na pressão causam o movimento das moléculas do fluido em que estamos imersos. As moléculas movem-se alterando a densidade. Uma mudança na densidade corresponde a uma mudança proporcional na pressão. Desigualdades na pressão causam o movimento das moléculas e o ciclo recomeça [22]. Assim o som chega aos nossos ouvidos, por meio do equilíbrio entre a inércia do fluido e a força restauradora devida a sua própria compressibilidade.

Perturbações lineares de uma solução para as equações de movimento de um fluido. Isto é o que entendemos e chamamos por todo o texto de *som* ou de *ondas sonoras*.

Linearizamos as equações (2.5) e (2.15) sem forças externas, considerando como quantidades muito pequenas todos os desvios de um estado no qual o fluido tem densidade uniforme ρ_0 e está em repouso. Em condições que o fluido é barotrópico, isto implica que a pressão tem também um valor uniforme P_0 . O resultado é a equação de Euler linearizada,

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P, \quad (3.1)$$

onde desprezamos o termo $\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$, e a equação da continuidade linearizada,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \nabla \cdot \vec{v}, \quad (3.2)$$

onde desprezamos o termo $\vec{v} \cdot \nabla \rho$. Notamos que a equação (3.1) implica que a vorticidade nestas circunstâncias permanece constante, isto é, que $\partial \omega / \partial t = 0$. Portanto, apenas a componente irrotacional do fluido sofre mudanças com o tempo. Por simplicidade, consideremos, então, apenas o fluxo irrotacional. Podemos escrever $\vec{v} = -\nabla \psi$, o que junto com (3.1) implica que

$$P - P_0 = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (3.3)$$

por que os gradientes de ambos os lados de (3.3) são iguais em toda parte e por que ambos os lados se anulam nas regiões sem perturbação desde que ψ seja a solução de $\vec{v} = -\nabla \psi$ que se anula em tais partes. As equações (3.2) e $\vec{v} = -\nabla \psi$ implicam que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \nabla^2 \psi. \quad (3.4)$$

Linearizando a relação $P(\rho)$ em torno de P_0 ,

$$P = P(\rho_0) + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho_0}, \quad (3.5)$$

temos que

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.3) em (3.6) e então aplicando a igualdade encontrada em (3.4), deduzimos a equação para ψ ,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi \quad (3.7)$$

onde a constante c é definida por

$$c^2 = \left(\frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho_0} \quad (3.8)$$

A equação (3.7) é característica de qualquer fenômeno com energia conservada envolvendo a propagação de uma onda através de um meio homogêneo a uma velocidade de onda c independente da forma da onda (que permanece constante) ou da direção de propagação [23].

3.3 Som em fluidos ideais barotrópicos e irrotacionais

Deduzimos aqui a equação de propagação do som para um fluido ideal barotrópico (e portanto, isentrópico), sujeito a uma força externa por unidade de massa $\vec{f}(\vec{x}) = -\nabla\Phi$, com um fluxo irrotacional \vec{v} e uma densidade de massa ρ quaisquer. O fluxo deste fluido é completamente descrito pelas variáveis $\vec{v}(t; \vec{x}) = -\nabla\psi$, $\rho(t; \vec{x})$ e $P(t; \vec{x})$, obedecendo o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 & \text{Equação da continuidade,} \\ -\partial_t \psi + h + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \Phi = 0 & \text{Equação de Bernoulli,} \\ P = P(\rho) & \text{Equação de estado,} \end{array} \right. \quad (3.9)$$

onde

$$h(\rho) = \int_0^\rho \frac{1}{\lambda} \frac{dP(\lambda)}{d\lambda} d\lambda \quad (3.10)$$

no caso isentrópico é a entalpia do fluido (veja a equação (2.20)). De modo a linearizar as equações, inserimos neste sistema

$$\begin{aligned} \psi(t; \vec{x}) &= \psi_0(t; \vec{x}) + \varepsilon \psi_1(t; \vec{x}), \\ P(t; \vec{x}) &= P_0(t; \vec{x}) + \varepsilon P_1(t; \vec{x}), \\ \rho(t; \vec{x}) &= \rho_0(t; \vec{x}) + \varepsilon \rho_1(t; \vec{x}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $\{\vec{v}_0 = -\nabla\psi_0, P_0, \rho_0\}$ é uma solução exata e conhecida para o sistema (3.9) e $\{\vec{v}_1 = -\nabla\psi_1, P_1, \rho_1\}$ é uma perturbação linear, isto é, uma solução para o sistema (3.9) considerando apenas termos de primeira ordem em ε . A equação da continuidade então implica que

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}_1 + \rho_1 \vec{v}_0) = 0. \quad (3.12)$$

Linearizando h como função de P temos que

$$\begin{aligned} h(P) &= h(P_0) + \left(\frac{dh}{dP} \right)_{P=P_0} (P - P_0) + \mathcal{O}(P^2) \\ &= h(P_0) + \frac{1}{\rho_0} (P - P_0) \\ &= h(P_0) + \varepsilon \frac{P_1}{\rho_0}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Usando (3.13), a linearização da equação de Bernoulli implica que

$$P_1 = \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1), \quad (3.14)$$

e portanto, a barotropicidade

$$\rho_0 + \varepsilon \rho_1 = \rho(P) = \rho_0 + \varepsilon \left(\frac{d\rho}{dP} \right)_{P=P_0} (P - P_0) \quad (3.15)$$

implica que

$$\rho_1 = \left(\frac{d\rho}{dP} \right)_{P=P_0} P_1 = \frac{1}{c^2} P_1 = \frac{1}{c^2} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1), \quad (3.16)$$

onde usamos a definição de c . Inserindo a expressão acima para ρ_1 na equação derivada da continuidade (3.12) e multiplicando ambos os lados por -1 , terminamos com uma equação para ψ_1 ,

$$-\partial_t \left[\frac{1}{c^2} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\rho_0}{c^2} (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \vec{v}_0 \right] = 0. \quad (3.17)$$

Note que a equação de onda (3.7) pode ser vista como um caso particular da equação acima quando $\vec{v}_0 = 0$ e $\rho_0 = \text{constante}$. Portanto, dada uma solução exata $\{\vec{v}_0, \rho_0, P_0\}$ do sistema (3.9), resolvemos a equação (3.17) para ψ_1 e com a sua solução obtemos \vec{v}_1 a partir de $\vec{v}_1 = -\nabla \psi_1$, P_1 a partir de (3.14) e ρ_1 a partir de (3.16), descrevendo completamente a propagação do som.

3.4 A analogia com a relatividade geral

Em busca de uma maneira compacta de escrever a equação (3.17), podemos pensar em $\psi_1(t; \vec{x})$ como um campo definido em um espaço euclidiano quadridimensional coberto pelas coordenadas cartesianas $\{t, x, y, z\}$ e na equação (3.17) exprimindo o

resultado de um operador diferencial agindo num vetor $\mathbf{V} = (V_t; \vec{V})$ deste espaço:

$$\frac{\partial}{\partial t} V_t + \nabla \cdot \vec{V} = 0. \quad (3.18)$$

Comparando a equação acima com (3.17), vemos que as componentes de \mathbf{V} são

$$\mathbf{V} = (V_t; \vec{V}) = \frac{\rho_0}{c^2} (-\partial_t \psi_1 - \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1; -(\partial_t \psi_1) \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \vec{v}_0 + c^2 \nabla \psi_1). \quad (3.19)$$

O vetor \mathbf{V} pode ser escrito como o produto de uma matriz coluna de 4 linhas por uma matriz 4×4 :

$$\begin{pmatrix} V_t \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & -(v_0)_x & -(v_0)_y & -(v_0)_z \\ -(v_0)_x & c^2 - (v_0)_x^2 & -(v_0)_x(v_0)_y & -(v_0)_x(v_0)_z \\ -(v_0)_y & -(v_0)_y(v_0)_x & c^2 - (v_0)_y^2 & -(v_0)_y(v_0)_z \\ -(v_0)_z & -(v_0)_z(v_0)_x & -(v_0)_z(v_0)_y & c^2 - (v_0)_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \psi_1 \\ \partial_x \psi_1 \\ \partial_y \psi_1 \\ \partial_z \psi_1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Emprestando da teoria da relatividade geral a sua notação usual para objetos definidos em um espaço quadridimensional (índices gregos correndo de 0 a 3, índices latinos correndo de 1 a 3 e soma implícita através de índices repetidos), escrevemos a equação (3.17) na forma

$$\partial_\mu (f^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1) = 0, \quad (3.21)$$

onde $f^{\mu\nu}$ representa as componentes da matriz 4×4 que aparece em (3.20),

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\rho_0}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -(v_0)_j \\ \dots\dots & . & \dots\dots\dots \\ -(v_0)_i & \vdots & c^2\delta_{ij} - (v_0)_i(v_0)_j \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

A semelhança com a relatividade geral fica evidente quando definimos outra matriz 4×4 , $g^{\mu\nu}$, relacionada com $f^{\mu\nu}$ por

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = f^{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

onde g é o determinante da matriz inversa de $g^{\mu\nu}$ que chamamos de $g_{\mu\nu}$. Em termos de $g^{\mu\nu}$, a equação (3.21), multiplicada por $\frac{1}{\sqrt{-g}}$ em ambos os lados ganha a forma da equação de Laplace-Beltrami,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi_1) = 0. \quad (3.24)$$

A equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo curvo de métrica $g_{\mu\nu}$ ($\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = 0$, onde ∇_μ é a derivada covariante associada a $g_{\mu\nu}$) pode ser escrita exatamente na mesma forma (3.24) (veja equação (3.4.10) em [21], seção 3.4, pág. 49). Isto sugere que podemos ver $\psi_1(t; \vec{x})$ como um campo escalar de Klein-Gordon não massivo definido em um espaço-tempo curvo cuja métrica é $g_{\mu\nu}$. Chamamos este espaço-tempo curvo especial percebido somente pelas ondas sonoras de *espaço-tempo acústico*.

Por definição,

$$(\text{determinante de } f^{\mu\nu}) = \det(\sqrt{-g} g^{\mu\nu}) = (\sqrt{-g})^4 \det(g^{\mu\nu}) = g^2 g^{-1} = g. \quad (3.25)$$

Calculando através da técnica usual o determinante de $f^{\mu\nu}$, concluímos que

$$g = -\frac{\rho_0^4}{c^2}. \quad (3.26)$$

Portanto, a partir da definição (3.23),

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{\rho_0 c} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -(v_0)_j \\ \dots\dots & \cdot & \dots\dots\dots \\ -(v_0)_i & \vdots & c^2 \delta_{ij} - (v_0)_i (v_0)_j \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

e as componentes da métrica em coordenadas cartesianas (matriz inversa de $g^{\mu\nu}$) são

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho_0}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v_0^2) & \vdots & -(v_0)_j \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots\dots \\ -(v_0)_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Como vemos, $g_{\mu\nu}$ é simétrica e seu determinante não é nulo; propriedades que a métrica de uma geometria riemanniana deve ter.

O intervalo associado à métrica (3.28) é

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \frac{\rho_0}{c} [- (c^2 - v_0^2) dt^2 - 2(v_0)_i dt dx^i + \delta_{ij} dx^i dx^j] \\ &= \frac{\rho_0}{c} [-c^2 dt^2 + (d\vec{x} - \vec{v}_0 dt) \cdot (d\vec{x} - \vec{v}_0 dt)]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

3.5 Duas arenas geométricas para o mesmo fenômeno

Como explicamos na seção 3.4, o som propagando-se em um fluido ideal barotrópico e irrotacional no limite não relativístico, isto é, um campo escalar definido no espaço-

tempo newtoniano (espaço euclidiano tridimensional mais um tempo universal) obedecendo uma relação com outros campos lá definidos (ρ_0 , \vec{v}_0 e c) dada pela equação (3.17), pode também ser interpretado como um campo escalar definido em um espaço-tempo relativístico artificial cuja métrica (3.28) é uma função dependente de campos definidos no espaço-tempo newtoniano (ρ_0 , \vec{v}_0 e c). Em outras palavras, podemos usar a equação (3.17) para estabelecer uma nova relação entre os eventos do espaço-tempo newtoniano expressa pela métrica (3.28). Temos então, duas arenas geométricas diferentes para descrever o som, sendo uma mais fundamental no sentido que serve para todos os fenômenos naturais no limite não-relativístico e a outra, construída a partir da mais fundamental, servindo apenas para o som.

Notamos que por construção, os espaços-tempos acústicos “nascem” já cobertos pelo mesmo sistema de coordenadas que cobre o espaço-tempo newtoniano associado a uma família de observadores inerciais. Naturalmente, podemos depois cobrí-los com quaisquer outros sistemas de coordenadas compatíveis.

Assim como na seção 3.4, em toda dissertação, escrevemos os tensores definidos nos espaços-tempos acústicos usando a notação usual da relatividade geral (*abstract index notation*), usando índices gregos e os símbolos usuais para a métrica, a derivada covariante, a conexão métrica, o tensor de Riemann, etc (veja [21]).

O restante da dissertação pode ser resumido como a procura de relações entre as componentes de tensores nos espaços-tempos acústicos e as componentes dos tensores nos espaços euclidianos, de modo a interpretar relações entre tensores

dos espaços-tempos acústicos em termos das leis da física newtoniana para o som (relações entre tensores no espaço euclidiano) e vice-versa. Por exemplo, um fluido no espaço-tempo newtoniano dá origem a um espaço-tempo acústico, sendo que ambos estão cobertos por sistemas de coordenadas que coincidem pelo menos quanto às coordenadas espaciais. Um 4-vetor a^μ deste espaço-tempo acústico pode ser definido fornecendo suas componentes neste sistema de coordenadas. A componente a^0 pode ser igual a uma função b e as componentes a^i podem ser iguais às componentes de um vetor c_i do espaço euclidiano. Isto é indicado por uma expressão como

$$a^\mu = (b; c_i)$$

ou

$$a^\mu = (b; \vec{c}).$$

Capítulo 4

Buracos Mudos

4.1 Panorama

Neste capítulo, na seção 4.2, utilizamos a terminologia e o ferramental desenvolvido para a relatividade geral para enunciar propriedades gerais dos espaços-tempos acústicos. Na seção 4.3, damos alguns exemplos de *buracos mudos*, isto é, de espaços-tempos acústicos com horizontes de eventos, que podem ser encontrados na literatura. Na seção 4.4, mostramos o significado da gravidade superficial associada aos buracos mudos em termos das propriedades do fluido. Na seção 4.5, observamos quais as condições em que podemos esperar que buracos mudos sigam as leis da mecânica dos buracos negros*.

*Em todo o texto a seguir, suprimimos o índice 0 das quantidades \vec{v}_0 , ψ_0 , ρ_0 e P_0 associadas às soluções exatas do sistema (3.9) e o índice 1 das quantidades \vec{v}_1 , ψ_1 , ρ_1 e P_1 associadas ao som, restaurando os índices onde pode haver confusão.

estamos realizando a experiência com o fluido. Nas coordenadas cartesianas as componentes deste 4-vetor são

$$\frac{dx^\mu}{dt}(t) = \left(1, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (1; \vec{V}). \quad (4.2)$$

O “comprimento ao quadrado” deste 4-vetor com relação à métrica acústica é

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} &= g_{00} + 2g_{0i}V^i + g_{ij}V^iV^j \\ &= -\frac{\rho}{c} \left[c^2 - (\vec{v} - \vec{V})^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Portanto, com respeito à métrica acústica, o vetor tangente a uma linha de mundo é *tipo luz* (“tipo som” seria mais apropriado), isto é, $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0$, se o módulo de sua velocidade relativa ao fluido for igual ao da velocidade do som no meio, o vetor é *tipo espaço*, $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} > 0$, se a velocidade relativa ao fluido for maior que a do som e *tipo tempo*, $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} < 0$, se for menor que a velocidade do som. Em particular, os vetores tangentes às linhas de mundo dos elementos de fluido ($\vec{V} = \vec{v}$) são tipo tempo em todos os pontos do espaço-tempo acústico.

A *4-velocidade* de uma partícula é o vetor tangente à sua linha de mundo tipo tempo parametrizada por seu *parâmetro afim*, isto é, o parâmetro τ definido por

$$\tau = \int_0^\lambda d\lambda' \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'}}, \quad (4.4)$$

de modo que

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -1. \quad (4.5)$$

Segundo (4.3), o parâmetro afim para a linha de mundo de um elemento de fluido é

$$\tau = \int_0^t dt' \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt'} \frac{dx^\nu}{dt'}} = \int_0^t dt' \sqrt{\rho c}. \quad (4.6)$$

Portanto, a 4-velocidade de um elemento de fluido é

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{\rho c}} (1; \vec{v}). \quad (4.7)$$

Vemos que de fato, $g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = -1$. Notamos ainda que v^μ é proporcional a $\nabla^\mu t = g^{\mu\nu} \partial_\nu t$:

$$v^\mu = -\sqrt{\rho c} \nabla^\mu t. \quad (4.8)$$

Na teoria da relatividade geral, o parâmetro afim de uma linha de mundo tipo tempo tem o significado de tempo próprio medido por um observador associado a esta linha de mundo. No caso dos espaços-tempos acústicos, o parâmetro afim não possui este significado. O tempo físico universal corresponde à coordenada t das coordenadas cartesianas associadas ao referencial inercial newtoniano em que realizamos a experiência com o fluido.

Calculamos a 4-aceleração, $v^\mu \nabla_\mu v^\nu$, do fluido para descobrir em que condições os elementos de fluido seguem geodésicas do espaço-tempo acústico ($v^\mu \nabla_\mu v^\nu = 0$):

$$\begin{aligned} v^\mu \nabla_\mu v^\nu &= -\sqrt{\rho c} \nabla^\mu t \nabla_\mu (-\sqrt{\rho c} \nabla^\nu t) \\ &= \sqrt{\rho c} \nabla^\mu t [\nabla^\nu t \nabla_\mu (\sqrt{\rho c}) + \sqrt{\rho c} \nabla_\mu \nabla^\nu t] \\ &= \sqrt{\rho c} \nabla^\mu t \nabla^\nu t \nabla_\mu (\sqrt{\rho c}) + \rho c \frac{1}{2} \nabla^\nu (\nabla^\mu t \nabla_\mu t) \end{aligned}$$

4.2.4 ADM

A métrica acústica (3.28) é da forma que aparece no formalismo Arnowitt-Deser-Misner (ADM) de divisão de espaços-tempos globalmente hiperbólicos (espaços-tempos que admitem folheações por hiperfícies tridimensionais tipo espaço) em “espaço + tempo”, útil para atacar problemas de condições iniciais para as equações de Einstein (veja [24], pág.505 ou [21], pág.255).

Seja um espaço-tempo folheado por hiperfícies tridimensionais tipo espaço parametrizadas por uma função t que serve como coordenada temporal. Considere o “sanduíche” de espessura infinitesimal formado por duas destas hiperfícies. A hiperfície inferior é o conjunto de eventos com t constante e a hiperfície superior é o conjunto de eventos com $t + dt$ constante. A geometria quadridimensional no sanduíche é determinada completamente por

1. A métrica da geometria tridimensional da hiperfície inferior

$$g_{ij}(t, x, y, z) dx^i dx^j$$

que nos diz a distância ao quadrado entre pontos daquela hiperfície.

2. A métrica na hiperfície superior $g_{ij}(t + dt, x, y, z) dx^i dx^j$.
3. A fórmula para o comprimento próprio de um “vetor conector” baseado no

vemos que a geometria tridimensional é $g_{ij} = \frac{\rho}{c} \delta_{ij}$, a função lapso é $N = \sqrt{\rho c}$ e a função deslocamento é $N^i = -v_i$. Notamos que isto concorda com o fato do “tempo próprio” de um elemento de fluido ser dado pela expressão (4.6). Portanto a 4-velocidade do fluido faz o papel de vetor conector de hiperfícies tridimensionais. Portanto também, a geometria acústica pode ser vista como aquela experimentada por observadores seguindo elementos de fluidos, com relógios fornecendo um “tempo” dado por (4.6) e imersos em um espaço euclidiano deformado pelo fator conforme ρ/c .

4.2.5 O fator conforme

Se Ω é uma função suave estritamente positiva, então a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$ é dita ser relacionada com $g_{\mu\nu}$ via uma *transformação conforme*. Diz-se que $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é *conforme a $g_{\mu\nu}$* . Pode-se mostrar que métricas conformalmente relacionadas dão origem a espaços-tempos de mesma estrutura causal, ou seja, um vetor que seja tipo tempo, luz ou espaço com respeito a $g_{\mu\nu}$ terá a mesma propriedade com respeito a métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$. A métrica de um espaço-tempo acústico,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -v_j \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots\dots \\ -v_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix}$$

é portanto conforme à métrica

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -v_j \\ \dots\dots\dots & . & \dots\dots \\ -v_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix}.$$

Neste caso $\Omega = \sqrt{\frac{E}{c}}$. Conhecendo as componentes do tensor de Riemann, tensor de Ricci e o escalar curvatura associado a $g_{\mu\nu}$, podemos calcular diretamente as mesmas quantidades para $\tilde{g}_{\mu\nu}$ a partir de fórmulas envolvendo derivadas de Ω (veja [21], pág. 445). As soluções da equação $\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = 0$ (equação de Klein Gordon) são invariantes por transformações conformes somente para espaços-tempos bidimensionais. Portanto no estudo da propagação do som em uma dimensão espacial, podemos resolver a equação de Klein-Gordon usando tanto $g_{\mu\nu}$ como $\tilde{g}_{\mu\nu}$.

4.2.6 Não há problemas de causalidade

A idéia de que a estrutura causal de um espaço-tempo não leva a paradoxos pela ausência de curvas causais fechadas é expressa matematicamente pela propriedade chamada de *estabilidade causal*. Podemos demonstrar que a existência de uma função diferenciável f no espaço-tempo tal que $\nabla^\mu f$ é um campo vetorial tipo tempo dirigido ao passado implica nesta propriedade (veja [21], seção 8.2).

Como esperado, em espaços-tempos acústicos sempre existe esta função que é o tempo físico t do referencial inercial onde a experiência com o fluido se realiza. O

campo $\nabla^\mu t = g^{\mu\nu} \partial_\nu t = -\frac{1}{\rho c} (1; \vec{v})$ é sempre tipo tempo,

$$\nabla_\mu t \nabla^\mu t = -\frac{1}{\rho c} < 0, \quad (4.14)$$

e dirigido ao passado.

4.2.7 Graus de liberdade

Uma métrica geral possui *seis* graus de liberdade por ponto no espaço-tempo: Dez graus de liberdade por ser uma matriz 4×4 simétrica menos quatro graus por fixar as coordenadas do ponto. Sendo a métrica acústica fixada completamente por três escalares, $\psi(t; \vec{x})$, $\rho(t; \vec{x})$ e $c(t; \vec{x})$, a métrica acústica fica com três graus de liberdade por ponto no espaço-tempo. Como existe um vínculo entre $\psi(t; \vec{x})$ e $\rho(t; \vec{x})$ fornecido pela equação da continuidade, concluímos que a métrica acústica possui de fato dois graus de liberdade por ponto no espaço-tempo.

4.2.8 Espaço-tempo acústico estacionário

Espaço-tempo estacionário é aquele que possui um campo vetorial de Killing tipo tempo, isto é, um campo vetorial ξ^μ tipo tempo que obedece a equação

$$(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \xi^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} \partial_\mu \xi^\alpha + g_{\mu\alpha} \partial_\nu \xi^\alpha = 0, \quad (4.15)$$

onde a primeira igualdade vem da definição de derivada de Lie \mathcal{L} de $g_{\mu\nu}$ com respeito ao vetor ξ^μ . Em termos de derivadas covariantes a equação acima é equivalente a

$$\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0. \quad (4.16)$$

equação (4.18)). Portanto, a ergoregião corresponde à região do espaço-tempo onde o fluxo é supersônico. Esta constatação nos permite generalizar o conceito de ergoregião para fluxos não estacionários. Um exemplo de ergoregião é dado na página 54.

4.2.11 Horizonte de eventos

Dentro do horizonte de eventos de um buraco negro, os raios de luz emitidos na superfície de uma esfera envolvendo a singularidade, sejam eles emitidos para dentro ou para fora, dirigem-se sempre para dentro, acabando por atingir a singularidade. Este é um exemplo de *superfície de aprisionamento* (*trapped surface*). A *região de aprisionamento* é a região do espaço-tempo que contém todas as superfícies de aprisionamento. A fronteira da região de aprisionamento é o *horizonte de eventos aparente*. O *horizonte futuro de eventos* do espaço-tempo temporalmente orientável e assintoticamente plano de um buraco negro é a fronteira da região do espaço-tempo da qual as geodésicas tipo luz não podem escapar para o infinito plano. Sabendo, como provamos a seguir no capítulo 6, que os raios de som seguem geodésicas tipo luz do espaço-tempo acústico, a definição razoável para superfície de aprisionamento neste contexto é a de uma superfície fechada onde o fluxo \vec{v} aponta para dentro com a componente normal à superfície sendo maior que a velocidade do som no meio. Definimos o *horizonte de eventos acústico* \mathcal{H} como sendo uma hipersuperfície do espaço-tempo acústico gerado por um fluxo convergente na qual $(v_{\perp}^2 - c^2) = 0$, onde v_{\perp} é

a componente do fluxo apontando para dentro perpendicular às superfícies que são a interseção do horizonte \mathcal{H} com as hiperfícies de t constante Σ_t . Notamos que o horizonte acústico sempre está contido na ergoregião. O espaço-tempo que possui um horizonte acústico é chamado de *buraco sônico* ou de *buraco negro acústico*, ou ainda de *buraco mudo*. Pode ocorrer também a situação contrária de um fluxo divergente, onde temos superfícies de anti-aprisionamento e horizonte passado de eventos (buraco branco), com definições semelhantes mas com o fluxo apontando para fora.

4.2.12 Espaço-tempo acústico estático

Um espaço-tempo estacionário é dito ser *estático* se existem hiperfícies ortogonais ao campo de Killing ξ^μ . Elas existem se e somente se existirem coordenadas tais que $(\partial_t)^\mu = \xi^\mu$, $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$ e $g_{0i} = 0$.

O intervalo acústico genérico de um fluxo estacionário nas coordenadas cartesianas globais é

$$ds^2 = \frac{\rho(\vec{x})}{c(\vec{x})} \left[- (c^2(\vec{x}) - v^2(\vec{x})) dt^2 - 2\vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} dt + d\vec{x} \cdot d\vec{x} \right]. \quad (4.19)$$

Impondo que o vetor $\vec{v}/(c^2 - v^2)$ seja integrável, podemos definir uma nova coordenada temporal por

$$d\tau = dt + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{x}}{c^2 - v^2}. \quad (4.20)$$

O elemento de linha nas novas coordenadas é

$$ds^2 = \frac{\rho(\vec{x})}{c(\vec{x})} \left[- (c^2(\vec{x}) - v^2(\vec{x})) d\tau^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} + \frac{(\vec{v}(\vec{x}) \cdot d\vec{x})^2}{c^2(\vec{x}) - v^2(\vec{x})} \right]. \quad (4.21)$$

A métrica nas novas coordenadas mostra que $(\partial_\tau)^\mu$ é um campo de Killing global tipo tempo e que o espaço-tempo é estático. Para que $\vec{v}/(c^2 - v^2)$ seja integrável, é necessário que ele possa ser escrito como o gradiente de um campo escalar, o que é possível somente se

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{v}}{c^2 - v^2} \right) = 0, \quad (4.22)$$

o que junto com $\nabla \times \vec{v} = 0$ implica que

$$\vec{v} \times \nabla (c^2 - v^2) = 0, \quad (4.23)$$

isto é, o espaço-tempo acústico é estático no sentido dado ao termo em relatividade geral se o fluxo \vec{v} for estacionário e normal às superfícies de $(c^2 - v^2) = \text{constante}$. Notamos que esta condição demonstra que para espaços-tempos acústicos estáticos, a ergoregião coincide com o horizonte de eventos. No caso de c constante, a equação (4.23) nos diz que a velocidade \vec{v} é paralela à aceleração do fluido [Para uma fluxo estacionário e irrotacional, $d\vec{v}/dt = (1/2)\nabla(v^2)$.].

4.3 Exemplos de Buracos Mudos

Mostramos a seguir exemplos de buracos mudos, escolhidos por suas simetrias e por suas semelhanças com os buracos negros da relatividade geral. Deduzimos a forma

de suas métricas, identificamos ergoregiões e horizontes de eventos e fazemos comentários a respeito de suas propriedades e de sua possível realização experimental.

4.3.1 Fluxos estacionários quasi-unidimensionais

Um fluxo estacionário que aponta e varia praticamente em uma única direção, digamos, a direção do eixo z , de modo que $\vec{v} = v(z) \hat{z}$ e $\rho(z)$, pela equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial}{\partial z} (\rho v) = 0, \quad (4.24)$$

possui uma densidade de momento

$$\rho(z) v(z) = k = (\text{constante}). \quad (4.25)$$

O intervalo da métrica acústica então é

$$ds^2 = \frac{k}{c(z)v(z)} \{ - [c^2(z) - v^2(z)] dt^2 - 2v(z) dz dt + dx^2 + dy^2 + dz^2 \}. \quad (4.26)$$

Notamos que a localização do horizonte de eventos depende de como a velocidade do fluido e a velocidade do som variam. O fluxo pode tornar-se supersônico tanto pela velocidade do fluido aumentar como pela velocidade do som diminuir.

Um fluxo estacionário quasi-unidimensional transônico famoso por sua estabilidade é o obtido por meio do *bocal de Laval* (veja [19], seção 16.3, por exemplo). Quando o fluxo passando por um cano é subsônico, diminuir a área seccional do cano aumenta sua velocidade, e vice-versa. Mas quando o fluxo é supersônico, ocorre o oposto: diminuir a área seccional diminui sua velocidade e aumentar a área aumenta

sua velocidade. No bocal de Laval, cujo formato é usado em exaustores de foguetes, o fluido passa por um cano que se estreita até atingir uma área seccional mínima onde um horizonte acústico é formado, para depois se alargar, mantendo um fluxo supersônico. M. Sakagami e A. Ohashi propuseram um experimento usando o bocal de Laval para medir o espectro de potências de uma onda sonora emitida próxima do horizonte que deve ser planckiano, sendo portanto um análogo clássico da radiação Hawking [17]. M. Visser *et al.* consideraram um fluxo de condensado de Bose-Einstein passando por um par de bocais de Laval ligados pelas extremidades largas, formando um par “buraco negro/buraco branco” (veja [25]).

Simulações numéricas com fluxos estritamente unidimensionais e com relações de dispersão das ondas sonoras modificadas para altas frequências foram utilizadas por W. Unruh para entender a influência das frequências transplanckianas na radiação Hawking ([7]; um relato do desenvolvimento posterior desta pesquisa pode ser encontrado em [9]).

4.3.2 Vórtices, sorvedouros e fontes bidimensionais com simetria axial

Consideramos um fluxo estacionário bidimensional com simetria axial. Para descrever este fluido é mais adequado usarmos coordenadas polares $\{t, r, \theta\}$, relacionadas

com as coordenadas cartesianas por:

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\t &= t.\end{aligned}\tag{4.27}$$

A equação de continuidade (2.5) escrita em termos de componentes associadas à base ortonormal $\{\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta\}$ para o espaço euclidiano é

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \partial_t \rho + \frac{1}{r} \partial_r (r \rho v^{\hat{r}}) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\rho v^{\hat{\theta}}) = 0,\tag{4.28}$$

onde $(v^{\hat{r}}, v^{\hat{\theta}})$ são as coordenadas de \vec{v} na base $\{\partial_r, \frac{1}{r}\partial_\theta\}$. Impondo $\rho = \rho(r)$, $v^{\hat{r}} = v^{\hat{r}}(r)$ e $v^{\hat{\theta}} = v^{\hat{\theta}}(r)$, temos de (4.28) que

$$\rho v^{\hat{r}} \propto \frac{1}{r}.\tag{4.29}$$

A circulação do fluido em um círculo C centrado na origem é

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} v^{\hat{\theta}} r d\theta = 2\pi v^{\hat{\theta}} r.\tag{4.30}$$

O teorema de Stokes aplicado à área delimitada por dois círculos C quaisquer, mais a condição de vorticidade nula ($\nabla \times \vec{v} = 0$) implicam que a circulação é independente do raio de C . Portanto

$$v^{\hat{\theta}} \propto \frac{1}{r}.\tag{4.31}$$

Se além disso, impomos que o torque exercido no fluido é nulo, isto é, que o momento angular é conservado,

$$|\vec{r} \times (\rho \vec{v})| = r \rho v^{\hat{\theta}} = (\text{constante}),\tag{4.32}$$

a densidade deve ser constante, o que implica velocidade do som constante, e temos necessariamente que a velocidade deste fluido é da forma

$$\vec{v} = \frac{A}{r} (\partial_r) + \frac{B}{r} \left(\frac{1}{r} \partial_\theta \right), \quad (4.33)$$

onde A e B são constantes. O potencial que resulta nesta velocidade é da forma

$$\psi(r, \theta) = -A \ln \left(\frac{r}{a} \right) - B\theta, \quad (4.34)$$

onde a é uma constante. O potencial está bem definido na região simplesmente conexa que exclui o eixo z e um semiplano partindo deste eixo.

Se A e B são diferentes de zero, temos um vórtice em torno de uma fonte ($A > 0$) ou de um sorvedouro ($A < 0$), e as trajetórias dos elementos de fluido,

$$r = r_0 + \frac{A}{B} (\theta - \theta_0), \quad (4.35)$$

são espirais de Arquimedes. Se $B \neq 0$ e $A = 0$, temos somente um vórtice. Se $B = 0$, temos somente ou uma fonte ($A > 0$), ou um sorvedouro ($A < 0$).

Aplicando a lei de transformação das componentes métricas,

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \quad (4.36)$$

verificamos a partir da métrica acústica em termos de suas componentes na base $\{\partial_t, \partial_x, \partial_y\}$ escrita em (3.28), que em termos de suas componentes na base $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta\}$

ela assume a forma

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -v^r & -r^2 v^\theta \\ -v^r & 1 & 0 \\ -r^2 v^\theta & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

onde $v^2 = (v^r)^2 + (rv^\theta)^2$, sendo que (v^r, v^θ) são as componentes de \vec{v} na base $\{\partial_r, \partial_\theta\}$, relacionadas com $(v^{\hat{r}}, v^{\hat{\theta}})$ por $v^{\hat{r}} = v^r$ e $v^{\hat{\theta}} = rv^\theta$. Portanto, a métrica acústica na base $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta\}$ é

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -\left(c^2 - \frac{A^2+B^2}{r^2}\right) & -\frac{A}{r} & -B \\ -\frac{A}{r} & 1 & 0 \\ -B & 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

e o elemento de linha é

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\rho}{c} \left[-\left(c^2 - \frac{A^2+B^2}{r^2}\right) dt^2 - 2\frac{A}{r} dt dr - 2B dt d\theta + dr^2 + r^2 d\theta^2 \right] \\ &= \frac{\rho}{c} \left[-c^2 dt^2 + \left(dr - \frac{A}{r} dt\right)^2 + \left(rd\theta - \frac{B}{r} dt\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.39)$$

A fronteira da ergoregião, $(v^2 - c^2 = 0)$, é um círculo de raio

$$r_{\text{ergoregião}} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{c}. \quad (4.40)$$

A componente radial da velocidade é igual à velocidade do som em

$$r = \frac{|A|}{c}. \quad (4.41)$$

Portanto, para $A < 0$, $r = |A|/c$ demarca um horizonte de eventos acústico, fornecendo um análogo de um buraco negro (com rotação, se $B \neq 0$). Ganhamos

alguma idéia a respeito da propagação do som neste tipo de espaço-tempo acústico através da figura 4.1.

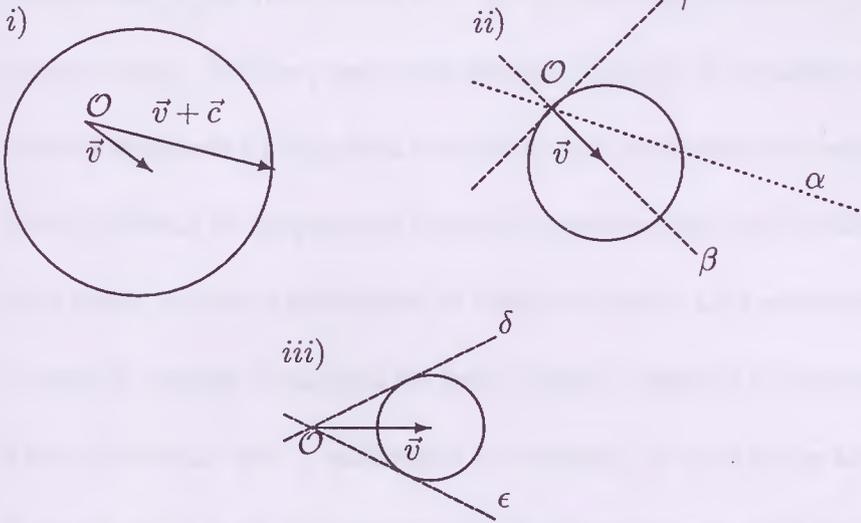


Figura 4.1: Esquema para a propagação do som em um fluxo dado por $\vec{v} = A/r \hat{r} + B/r \hat{\theta}$ com $A < 0$. i) O ponto \mathcal{O} encontra-se em uma região de fluxo \vec{v} subsônico, como medido por um referencial inercial de repouso. O círculo de raio igual à velocidade do som c está centrado na ponta do vetor \vec{v} . Vetores com origem em \mathcal{O} e ponta no círculo indicam todas as possíveis direções e intensidades $|\vec{v} + \vec{c}|$ que um raio de som passando por \mathcal{O} pode ter como visto pelo referencial de repouso. ii) O ponto \mathcal{O} encontra-se na fronteira da ergoregião, onde $|\vec{v}| = c$. Se $A \neq 0$ e $B \neq 0$ (vórtice com sorvedouro), a reta tangente à superfície fronteira da ergoregião no ponto \mathcal{O} pode ser como a reta α e nesse caso, o som pode escapar para fora da ergoregião. Se $A = 0$ e $B \neq 0$ (vórtice), a reta tangente é a reta β , e nesse caso, o som também pode escapar para fora da ergoregião (de fato, não existe nenhum horizonte acústico neste caso), mas dentro da ergoregião precisa girar na mesma direção que \vec{v} . Se $A \neq 0$ e $B = 0$ (sorvedouro), então a reta tangente é a reta γ , e nesse caso, a fronteira da ergoregião coincide com o horizonte de eventos, e o som passando por \mathcal{O} não pode escapar. (iii) O ponto \mathcal{O} encontra-se no interior da ergoregião, onde o fluxo é supersônico. Quanto maior a magnitude do fluxo \vec{v} , mais estreita é a região acessível ao som a partir de \mathcal{O} . O ponto \mathcal{O} pode pertencer à superfície de um horizonte acústico caso uma das retas, δ ou ϵ , sejam tangentes a esta superfície em \mathcal{O} .

S. Basak e P. Majumdar estudaram o fenômeno análogo à superradiância no espaço-tempo de Kerr neste tipo de espaço-tempo acústico (veja [26] e [27]). No espaço-tempo de Kerr, uma onda escalar (solução da equação de Klein-Gordon sem massa) entrando na ergosfera é refletida para fora com uma amplitude que, para um certo intervalo de frequências limitado superiormente pela velocidade angular do buraco negro, excede a amplitude da onda incidente. Esta amplificação é conseguida às custas da energia rotacional do buraco negro, levando a diminuição de sua rotação. Eles mostraram que o coeficiente de reflexão de uma onda sonora plana incidente é maior que 1 para um intervalo de frequências indo de 0 até uma frequência proporcional a Bc^2/A^2 , que é a velocidade angular do fluxo no horizonte acústico. Eles também sugeriram que a realização deste espaço-tempo acústico em um superfluido tal como o HeII líquido teria a peculiaridade da velocidade angular do buraco negro ser quantizada, tendo como consequência a perda da energia rotacional por superradiância em passos discretos, dando ao espectro dos fônons refletidos uma forma característica.

4.3.3 Espaço-tempo acústico conforme a um buraco negro

Para descobrir o quão próximo a métrica de um espaço-tempo acústico pode chegar da métrica de um buraco negro estático da relatividade geral, M. Visser, em [28], usou no lugar das coordenadas de Schwarzschild, nas quais o elemento de linha do

buraco negro escreve-se, em unidades tais que $G = c = 1$, na forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.42)$$

o sistema de coordenadas de Painlevé-Gullstrand. Uma das maneiras de construir este sistema de coordenadas é, a partir das coordenadas de Schwarzschild, usar as geodésicas tipo tempo radiais apontando para dentro ($dr < 0$, $d\theta = d\phi = 0$). A norma $u^\mu u_\mu = -1$ da 4-velocidade dos observadores seguindo estas geodésicas e a contração desta 4-velocidade com o campo de Killing $(\partial_t)^\mu$, cujo valor é uma constante E , fornecem as equações de movimento

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (4.43)$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2, \quad (4.44)$$

onde τ é o tempo próprio destes observadores. Assumindo que estes observadores coincidem no infinito com os observadores estáticos associados às coordenadas de Schwarzschild, isto é, que $dt = d\tau$ para $r \rightarrow \infty$, devemos ter $E = 1$. Portanto, a 4-velocidade deles é

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, -\sqrt{\frac{2M}{r}}, 0, 0\right), \quad (4.45)$$

cujas componentes covariantes u_μ são

$$u_\mu = \left(-1, -\frac{\sqrt{\frac{2M}{r}}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, 0, 0\right). \quad (4.46)$$

Podemos ver u_μ como o gradiente de uma função T :

$$u_\mu = -\partial_\mu T, \quad (4.47)$$

de modo que

$$dT = dt + \frac{\sqrt{\frac{2M}{r}} dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \quad (4.48)$$

Substituindo (4.48) em (4.42), temos

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dT dr + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

que é o elemento de linha nas coordenadas de Painlevé-Gullstrand.

Notamos que o elemento de linha não é singular em $r = 2M$. Além disso, as hiperfícies de T constante são espaços euclidianos de maneira que, na linguagem do formalismo ADM, toda a informação a respeito da curvatura do espaço-tempo está codificada no vetor deslocamento $\sqrt{2M/r} \hat{r}$. Mais informações sobre as coordenadas de Painlevé-Gullstrand podem ser encontradas em [29].

Passando das coordenadas cartesianas para as coordenadas esféricas através de

$$\begin{aligned} x &= r \sin \phi \cos \theta, \\ y &= r \sin \phi \sin \theta, \\ z &= r \cos \phi, \\ t &= t, \end{aligned} \quad (4.49)$$

escrevemos as componentes da métrica de um espaço-tempo acústico genérico na

base $\{\partial_t, \partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & -v^r & -r^2 \sin^2 \theta v^\theta & -r^2 v^\phi \\ -v^r & 1 & 0 & 0 \\ -r^2 \sin^2 \theta v^\theta & 0 & r^2 & 0 \\ -r^2 v^\phi & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (4.50)$$

onde $v^2 = (v^r)^2 + (rv^\theta)^2 + (r \sin \theta v^\phi)^2$ e (v^r, v^θ, v^ϕ) são as componentes de \vec{v} na base $\{\partial_r, \partial_\theta, \partial_\phi\}$. A tentativa natural para simular o elemento de linha de Painlevé-Gullstrand é impor um fluxo estacionário puramente radial da forma

$$v^r = -\sqrt{\frac{2M}{r}}, \quad (4.51)$$

junto com uma velocidade do som constante igual a 1. Porém, a equação da continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r^2 \rho \sqrt{\frac{2M}{r}} \right) = 0, \quad (4.52)$$

implica que

$$\rho \propto r^{-3/2}. \quad (4.53)$$

Portanto, o máximo que conseguimos é uma métrica conforme a um buraco negro:

$$ds^2 \propto r^{-3/2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dt dr + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (4.54)$$

4.3.4 Buraco Mudo Canônico

Chamamos de buraco mudo canônico o espaço-tempo acústico estático e esfericamente simétrico gerado por um fluido de densidade constante e fluxo estacionário esfericamente simétrico puramente radial. Como ρ é constante, a barotropicidade implica que c também é constante. Impondo estas condições na equação da continuidade temos que

$$v^r \propto \frac{1}{r^2}. \quad (4.55)$$

Escrevendo a velocidade do fluido como

$$\vec{v} = -c \frac{r_0^2}{r^2} \hat{r}, \quad (4.56)$$

onde r_0 é um raio fixo qualquer e fazendo $\rho/c = 1$, o elemento de linha é

$$ds^2 = - \left(c^2 - c^2 \frac{r_0^4}{r^4} \right) dt^2 + 2c \frac{r_0^2}{r^2} dr dt + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.57)$$

Usando em vez de t , uma nova coordenada temporal τ definida por

$$d\tau = dt + \frac{\vec{v} \cdot d\vec{x}}{c^2 - v^2} = dt - \frac{r_0^2/r^2}{c(1 - r_0^4/r^4)} dr, \quad (4.58)$$

o elemento de linha fica na forma

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4} \right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_0^4}{r^4}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.59)$$

Notamos que a ergoregião, que é uma ergosfera neste caso, coincide com o horizonte de eventos demarcado por $r = r_0$. Em sua revisão sobre buracos negros acústicos, M. Visser afirma que uma versão não estacionária deste espaço-tempo acústico é realizada no exterior de uma bolha esférica de raio oscilante ([28], seção 8).

4.4 Gravidade superficial acústica

A idéia de um buraco negro possui uma definição precisa para espaços-tempos globalmente hiperbólicos e assintoticamente planos. Fluxos suaves e que tendem a zero no infinito suficientemente rápido dão origem a espaços-tempos acústicos deste tipo. Neste contexto, buraco negro é o conjunto de eventos do espaço-tempo que não pertencem ao passado causal J^- do infinito futuro \mathcal{I}^+ . Pode-se mostrar a partir desta definição que a fronteira do buraco negro, que é o horizonte de eventos \mathcal{H} , é uma hipersfície tipo luz gerada por uma congruência de geodésicas tipo luz inextendíveis apontando para o futuro e sem cóusticas, isto é, as geodésicas nunca convergem até se encontrarem em um ponto. O campo vetorial χ^μ associado a estas geodésicas satisfaz $\chi_\mu \chi^\mu = 0$ no horizonte. Uma peculiaridade das hipersfícies tipo luz é que os vetores perpendiculares a elas também são paralelos a elas. Portanto, como $\nabla^\mu (\chi_\nu \chi^\nu)$ é normal ao horizonte, ele é proporcional a χ^μ . Isto permite definir no horizonte uma função κ através da expressão

$$\nabla^\mu (\chi_\nu \chi^\nu)|_{\mathcal{H}} = -2\kappa \chi^\mu|_{\mathcal{H}}. \quad (4.60)$$

No caso de χ^μ ser um campo de Killing deste espaço-tempo, κ é uma constante para cada órbita de χ^μ e pode ser calculada por

$$\kappa = \left(a \sqrt{-\chi_\mu \chi^\mu} \right)_{\text{limite no horizonte}}, \quad (4.61)$$

onde $a = \sqrt{(\chi^\nu \nabla_\nu \chi^\mu)(\chi^\nu \nabla_\nu \chi_\mu)} / (\chi^\nu \chi_\nu)$ é a aceleração dos observadores seguindo χ^μ . Como no espaço-tempo de Schwarzschild χ^μ é o campo de Killing $(\partial_t)^\mu$, a interpretação física neste caso é que κ é o limite no horizonte da aceleração associada à força exercida por alguém no infinito plano, transmitida, por exemplo, através de uma corda ideal, para manter uma massa teste unitária seguindo uma órbita de χ^μ (veja [21], seção 12.5). Esta é a origem do nome dado à função κ , chamada de *gravidade superficial*.

Para determinar uma expressão para a gravidade superficial de buracos mudos, precisamos encontrar um campo gerador para o horizonte de eventos acústico. Para isto, na superfície $\Sigma_t \cap \mathcal{H}$, decompomos o fluxo do fluido em uma componente paralela e outra perpendicular,

$$\vec{v}|_{\mathcal{H}} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel. \quad (4.62)$$

Um campo vetorial L^μ cujo valor no horizonte é

$$L^\mu|_{\mathcal{H}} = (1; \vec{v}_\parallel), \quad (4.63)$$

é sempre tipo luz no horizonte como vemos a partir de

$$L_\mu L^\mu|_{\mathcal{H}} = g_{\mu\nu} L^\mu L^\nu|_{\mathcal{H}} = -\frac{\rho}{c} (c^2 - v_\perp^2), \quad (4.64)$$

e portanto é um gerador para esta hiperfície. Substituindo $L^\mu|_{\mathcal{H}}$ na equação (4.60)

obtemos

$$-\frac{1}{\rho c} \vec{v} \cdot \nabla \left[\frac{\rho}{c} (v_\perp^2 - c^2) \right] = -2\kappa, \quad (4.65)$$

Buraco mudo	Gerador do horizonte	Campo de Killing?	κ
Vórtice sorvedouro bidimensional.	$(\partial_t)^\mu + \frac{Bc^2}{A^2}(\partial_\theta)^\mu$	sim	$\frac{c^2}{ A }$
Fluxo estacionário radial esfericamente simétrico com c constante.	$(\partial_t)^\mu$	sim	$\frac{\partial v^r}{\partial r}$

Tabela 4.1: Gravidade superficial de exemplos de buracos mudos discutidos anteriormente. Nos dois casos os geradores são campos de Killing e κ é constante em todo o horizonte.

4.5 As leis da mecânica dos buracos negros

Podemos ter a esperança de criar buracos mudos em laboratório que obedecem aquelas leis da mecânica dos buracos negros (ou apenas certos aspectos delas) que podem ser demonstradas de maneira puramente geométrica, isto é, que exijam para valerem condições sobre a geometria do espaço-tempo que não dependem explicitamente da geometrodinâmica ditada pelas equações de Einstein. Por exemplo, B. Carter provou sem o uso de qualquer geometrodinâmica que, impondo estaticidade, o horizonte de um buraco negro deve ser gerado pelo campo de Killing $(\partial_t)^\mu$ e que impondo estacionariedade, axisimetria e a propriedade de ortogonalidade dos planos $t - \phi$ † existe um campo de Killing $(\partial_t)^\mu + \Omega(\partial_\phi)^\mu$ que gera o horizonte. De maneira semelhante, B. Carter também provou que para qualquer buraco negro que seja estático ou estacionário, axisimétrico e com a propriedade de ortogonalidade

†Um buraco negro estacionário e axisimétrico possui a propriedade de ortogonalidade dos planos $t - \phi$ se a família de planos gerados pelos campos de Killing $(\partial_t)^\mu$ e $(\partial_\phi)^\mu$ admitem uma família de planos ortogonais.

dos planos $t - \phi$ a gravidade superficial κ deve ser constante sobre todo horizonte (0-ésima lei da mecânica dos buracos negros, veja [11]).

Um programa de pesquisa interessante seria tomar um fluxo convergente genérico que pudesse dar origem a um buraco mudo e impor progressivamente planura assintótica, estacionariedade e em seguida a axisimetria, que em relatividade geral é imposta naturalmente aos buracos negros estacionários pelas equações de Einstein. Então poderíamos verificar como essas restrições na geometria do espaço-tempo são traduzidas em restrições sobre o fluxo e se estas condições podem ser satisfeitas pelas equações da hidrodinâmica por meio de condições de contorno e forças externas adequadas. Além disso, poderíamos estudar a evolução das quantidades conservadas associadas às isometrias do espaço-tempo (“massa” e “momento angular” do buraco mudo) e descobrir como elas se relacionam com a evolução de κ e da área do horizonte de modo a comparar com as três leis restantes dos buracos negros. Algo nesse sentido, foi feito por S. Basak para o caso particular do vórtice com sorvedouro bidimensional. Ele encontrou uma expressão para a massa do buraco mudo em termos de sua gravidade superficial, seu perímetro, sua velocidade angular, seu momento angular e da velocidade do som análoga à expressão para o buraco negro de Kerr (veja [30]).

Capítulo 5

Espaços-tempos efetivos para perturbações em condensados de Bose-Einstein

5.1 Panorama

Neste breve capítulo, mostramos na seção 5.2 como os condensados de Bose-Einstein podem comportar-se como fluidos ideais barotrópicos e irrotacionais, de modo que tudo o que discutimos sobre espaços-tempos acústicos e buracos mudos vale para estes sistemas físicos. Além disso, usando um fenômeno próprio dos condensados, mostramos na seção 5.3 um modelo análogo aos espaços-tempos de Friedmann-Robertson-Walker.

5.2 O modelo análogo à relatividade geral usando condensados de Bose-Einstein

Um condensado de Bose-Einstein é o estado fundamental de um sistema quântico (segunda quantização) de N átomos bosônicos interagindo presos por um potencial externo $V(\vec{x})$. À temperatura zero, quando o número de átomos é grande e as interações atômicas são suficientemente pequenas, quase todos os átomos estão no mesmo estado quântico fundamental de modo que, usando uma abordagem de campo médio, podemos descrever o sistema por uma distribuição clássica $\psi(t; \vec{x})$, chamada de *função de onda do condensado*, definida como o valor esperado do operador de campo bosônico, mesmo se o sistema é levemente perturbado. (Para uma revisão da teoria e dos experimentos com condensados de Bose-Einstein, veja [31].) A evolução de $\psi(t; \vec{x})$ é dada pela equação de Gross-Pitaevskii,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \vec{x}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) + \lambda |\psi(t, \vec{x})|^2 \right) \psi(t, \vec{x}), \quad (5.1)$$

onde m é a massa dos átomos individuais e λ é um fator relacionado com a intensidade da interação entre os átomos ($\lambda = 4\pi a \hbar^2 / m$, onde a é o comprimento de espalhamento entre dois bósons constituintes do condensado). Usando a representação de Madelung,

$$\psi = \sqrt{\rho} e^{-i\frac{\phi}{\hbar}}, \quad (5.2)$$

para a função de onda na equação (5.1) e separando a parte imaginária da parte real obtemos duas equações:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{m} \right) + \frac{1}{2} \nabla \left(-\frac{\phi}{m} \right) \cdot \nabla \left(-\frac{\phi}{m} \right) + V + \frac{\lambda\rho}{m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla^2 \sqrt{\rho} = 0 \quad (5.3)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot \left[\rho \left(-\frac{\nabla\phi}{m} \right) \right] = 0. \quad (5.4)$$

Dentro do regime de validade chamado de limite hidrodinâmico ou de aproximação de Thomas-Fermi, ou ainda de aproximação quasi-clássica, é consistente desprezarmos o termo $(\hbar^2/2m)(\nabla^2\sqrt{\rho})/\sqrt{\rho}$. Definindo $\vec{v} \equiv -\nabla\phi/m$ e $h \equiv \lambda\rho/m$, verificamos que dentro do limite hidrodinâmico, a equação (5.4) equivale à equação de continuidade (2.5) e a equação (5.3) equivale à equação de Bernoulli (2.29) de um fluido ideal barotrópico e irrotacional de densidade ρ , fluxo \vec{v} e entalpia $h = \lambda\rho/m$ sujeito a um potencial externo V . De $dh = dP/\rho$ e $c^2 = dP/d\rho$, podemos dizer que o análogo da velocidade do som neste caso é

$$c = \sqrt{\frac{\lambda\rho}{m}}. \quad (5.5)$$

Seguindo os mesmos passos das sessões 3.3 e 3.4, concluímos que as perturbações lineares na fase ϕ do condensado obedecem a equação de Klein-Gordon não massivo de um espaço-tempo efetivo de métrica

$$g_{\mu\nu} = \frac{\rho}{cm} \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -v_j \\ \dots\dots\dots & \cdot & \dots\dots \\ -v_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

As principais vantagens dos condensados de Bose-Einstein como modelos análogos à relatividade geral são o crescente desenvolvimento da tecnologia de manipulação destes sistemas (buracos mudos feitos de condensados já podem ser construídos em princípio) e o fato da situação nos condensados (*background* clássico mais flutuações quânticas) ser análoga à situação na teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos [18]*. Em ambos as situações, as flutuações quânticas obedecem as mesmas relações de comutação; isto nem sempre ocorre para outros modelos análogos [33]. Para uma análise mais genérica permitindo a simulação de uma classe maior de métricas, veja [34].

5.3 Modelos análogos aos universos de Friedmann-Robertson-Walker planos

Podemos criar modelos análogos aos universos de Friedmann-Robertson-Walker planos para estudar efeitos análogos à criação de partículas devida à inflação cosmológica (veja [35] e [36]). Um fenômeno chamado de ressonância Feshbach permite a variação controlada do comprimento de espalhamento a do condensado e consequentemente, pela equação (5.5), da velocidade do som no condensado. Consideramos um fluido associado a um condensado em repouso, com densidade constante e velocidade do som variável no tempo $c(t)$. Definindo a constante $c_0 \equiv \rho/m$, o

*Uma referência a este respeito em alemão muito detalhada por sinal é a dissertação [32].

intervalo do espaço-tempo acústico é

$$ds^2 = \frac{c_0}{c(t)} [-c^2(t)dt^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x}]. \quad (5.7)$$

Introduzindo uma nova coordenada temporal por

$$d\tau = \sqrt{\frac{c(t)}{c_0}} dt, \quad (5.8)$$

podemos escrever o intervalo na forma

$$ds^2 = (c_0 d\tau)^2 + \frac{c_0}{c(t)} d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (5.9)$$

Portanto, τ faz o papel de tempo próprio dos observadores comóveis com o fluido cosmológico e $\sqrt{c_0/c(t)}$ faz o papel do fator de escala.

Capítulo 6

Acústica geométrica

6.1 Panorama

Neste capítulo vamos mostrar como usar os espaços-tempos acústicos para estudar a trajetória dos raios de som e como a amplitude, a frequência e o comprimento das ondas sonoras variam ao longo deles. Nas seções 6.2, 6.3 e 6.4 revisamos de uma maneira genérica os conceitos de ondas planas, pacotes de onda e as leis da acústica geométrica dentro do contexto da física newtoniana. Nas seções 6.5 e 6.6 aplicamos estas leis ao nosso modelo análogo para derivar a relação de dispersão, a equação de geodésica tipo luz para os raios de som, a equação de evolução para a amplitude e a lei de conservação do número de fônons. Na seção 6.7, calculamos a curvatura do espaço-tempo acústico. Na seção 6.8, ilustramos com exemplos simples a utilização do formalismo desenvolvido.

6.2 Ondas planas monocromáticas

Uma onda plana monocromática representa alguma quantidade física oscilatória ψ cuja amplitude e direção de propagação são as mesmas em todo espaço e pode ser escrita na forma

$$\psi = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}, \quad (6.1)$$

onde A é uma amplitude complexa, \vec{k} é o *vetor de onda* ($|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda) e ω é a *freqüência angular da onda* ($\omega = 2\pi f$, onde f é a freqüência da onda). A quantidade na exponencial, $\phi = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$, é a *fase da onda*. É fácil mostrar a partir de $d\phi = -\omega dt + \vec{k}\cdot d\vec{x}$, que o vetor \vec{k} é normal às superfícies de ϕ constante no espaço. A partir disto mostra-se facilmente que as superfícies de ϕ constante movem-se com a chamada *velocidade de fase*

$$\vec{V}_f = \frac{\omega}{k}\hat{k}. \quad (6.2)$$

A freqüência ω é determinada pelo vetor de onda \vec{k} de uma maneira que depende da natureza física da onda e que é representada pela relação funcional

$$\omega = \Omega(\vec{k}), \quad (6.3)$$

chamada de *relação de dispersão*. Por exemplo, para ondas planas que são soluções da equação (3.7) a relação de dispersão é $\Omega(\vec{k}) = kc$.

6.3 Pacotes de ondas planas

Ao contrário das ondas planas, as ondas no mundo real tem sua amplitude localizada em uma região do espaço e do tempo. Podemos modelar isto através de um *pacote de onda* que é construído por meio de uma superposição de ondas planas:

$$\psi(t; \vec{x}) = \int A(\vec{k}) e^{i\alpha(\vec{k})} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} dk_x dk_y dk_z, \quad (6.4)$$

onde A é o módulo e α é a fase da amplitude complexa $A = Ae^{i\alpha}$. Tomamos $A(\vec{k})$ tal que seu valor é altamente concentrado em torno de um vetor de onda específico \vec{k}_0 . Na integral (6.4), as contribuições para \vec{k} 's adjacentes tendem a cancelar umas as outras se a fase oscila muito rapidamente com \vec{k} . Portanto, o valor de $\psi(t; \vec{x})$ está concentrado na região do espaço e do tempo onde a fase varia pouco com a variação de \vec{k} . O centro desta região está onde

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \left(\alpha + \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t \right)_{\vec{k}=\vec{k}_0} = 0. \quad (6.5)$$

Usando a relação de dispersão (6.3) em (6.5), obtemos a equação para a localização do centro do pacote,

$$x_j - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial k_j} \right)_{\vec{k}=\vec{k}_0} t = - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial k_j} \right)_{\vec{k}=\vec{k}_0} = \text{constante}, \quad (6.6)$$

que nos conta que o pacote de onda move-se com a chamada *velocidade de grupo*

$$(V_g)_j = \left. \frac{\partial \Omega}{\partial k_j} \right|_{\vec{k}=\vec{k}_0}. \quad (6.7)$$

Deve ser óbvio, fisicamente, que a energia associada ao pacote também propaga-se com a velocidade de grupo.

6.4 Aproximação eikonal

Existem situações onde uma onda arbitrária propagando-se em um meio inhomogêneo pode ser considerada como uma onda plana em um meio homogêneo em qualquer região pequena do espaço e para tempos curtos. Para isto acontecer é necessário que a amplitude e a direção da propagação variem pouco ao longo de tempos e distâncias da ordem do período e do comprimento da onda. Nestas condições, podemos introduzir o conceito de *raios*, isto é, linhas tais que os vetores tangentes a elas em qualquer ponto apontam na mesma direção que a direção de propagação, de modo que podemos ignorar aspectos da natureza ondulatória do fenômeno. O estudo das leis de propagação nestes casos é o escopo da aproximação eikonal, também chamada, dependendo do contexto, de ótica ou acústica geométrica (veja [37] e [19]). Podemos dizer que a aproximação eikonal corresponde ao limite de $\lambda \rightarrow 0$, como fica claro nas deduções abaixo.

Um campo escalar complexo $\psi(t; \vec{x})$ sempre pode ser escrito na forma

$$\psi(t; \vec{x}) = A(t; \vec{x}) e^{i\phi(t; \vec{x})}. \quad (6.8)$$

Aqui A é uma amplitude complexa e ϕ é uma fase, chamada de eikonal. Aqui, $\psi(t; \vec{x})$ representa uma quantidade física ondulatória qualquer que propaga-se em um meio inhomogêneo no espaço e no tempo. De acordo com o fato que desejamos ser satisfeito, a saber, que em qualquer região pequena do espaço e durante intervalos curtos de tempo a onda pode ser considerada como plana, definimos em cada ponto

do espaço e do tempo o vetor de onda \vec{k} e a frequência angular ω por

$$\vec{k}(t; \vec{x}) \equiv \nabla\phi, \quad \omega(t; \vec{x}) \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial t}. \quad (6.9)$$

Como discutimos no parágrafo acima, para que a aproximação eikonal seja acurada, assumimos que a escala de comprimento \mathcal{L} e a escala de tempo \mathcal{T} para variações substanciais nas propriedades do meio sejam muito grandes comparadas com o comprimento de onda e o período da onda, isto é,

$$\mathcal{L} \gg \frac{1}{k}, \quad \mathcal{T} \gg \frac{1}{\omega}. \quad (6.10)$$

Numa região do espaço e do tempo da ordem de \mathcal{L} e \mathcal{T} , expandimos A e ϕ em séries de Taylor em torno de um ponto arbitrário $(t_0; \vec{x}_0)$:

$$A(t; \vec{x}) = A(t_0; \vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla A(t_0; \vec{x}_0) + (t - t_0) \partial_t A(t_0; \vec{x}_0) + \dots \quad (6.11)$$

$$\phi(t; \vec{x}) = \phi(t_0; \vec{x}_0) + (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{k}(t_0; \vec{x}_0) + (t - t_0) \partial_t \phi(t_0; \vec{x}_0) + \dots \quad (6.12)$$

Por uma questão prática, agrupamos todas as correções para uma fase de onda plana, $\phi \simeq \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$, junto com os termos da expansão de $A(t; \vec{x})$, de modo que assim escrevemos ψ em termos de uma *expansão em duas escalas*:

$$\psi = (A + \varepsilon B + \varepsilon^2 C + \dots) e^{i\phi/\varepsilon}. \quad (6.13)$$

Aqui a potência do fator ε é um indicador da ordem do termo que ele multiplica com relação às escalas de espaço e de tempo do problema, isto é, com relação a $1/k\mathcal{L} \ll 1$ e a $1/\omega\mathcal{T} \ll 1$. Substituímos a expansão em duas escalas (6.13) na equação de onda

do sistema físico em questão. Coletando os termos de ordem superior em ε obtemos a relação de dispersão,

$$\omega = \Omega(\vec{k}; \vec{x}, t), \quad (6.14)$$

e a equação de movimento para A . Como explicamos na seção 6.3, o centro de um pacote de onda move-se com a *velocidade de grupo*

$$(V_g)_i = \frac{\partial \Omega}{\partial k_i}. \quad (6.15)$$

Portanto, o vetor tangente à trajetória $\vec{x}(t)$ do raio associado ao pacote obedece

$$\frac{d}{dt} x_i(t) = \frac{\partial \Omega}{\partial k_i}. \quad (6.16)$$

Vemos a partir das definições (6.9) e (6.14) que a equação para o eikonal é

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Omega(\nabla \phi; \vec{x}, t) = 0. \quad (6.17)$$

Tomando o gradiente de (6.17) obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = 0, \quad (6.18)$$

que com as definições anteriores pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (V_g)_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) k_i = - \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}. \quad (6.19)$$

Tomando a derivada temporal de (6.17) obtemos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial k_l} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0, \quad (6.20)$$

que com as definições anteriores pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (V_g)_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \omega = \frac{\partial \Omega}{\partial t}. \quad (6.21)$$

As equações (6.16), (6.19) e (6.21) são as equações fundamentais da acústica geométrica; elas determinam a trajetória dos raios e como \vec{k} e ω variam ao longo deles.

6.5 Raios de som são geodésicas tipo luz do espaço-tempo acústico

Substituindo a expansão em duas escalas (6.13) na equação de onda para o som em um fluido ideal barotrópico e irrotacional escrita em termos da derivada covariante no espaço-tempo acústico, $\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = 0$, os termos de ordem superior (ε^{-2}) fornecem a equação do eikonal,

$$\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi = 0, \quad (6.22)$$

afirmando que o 4-vetor $\nabla^\mu \phi$, que chamamos adiante de k^μ , é tipo luz. Derivando covariantemente a equação do eikonal (6.22), encontramos a equação

$$0 = \nabla_\nu (\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi) = 2 (\nabla^\mu \phi) (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) = 2 k^\mu \nabla_\mu k_\nu, \quad (6.23)$$

verificando que as curvas integrais de k^μ são geodésicas tipo luz. (Em termos das quantidades no espaço-tempo newtoniano, esta equação é equivalente a (6.19) e (6.21).)

Escrevendo a equação (6.22) em termos das quantidades no espaço-tempo newtoniano e usando as definições (6.9), obtemos

$$\omega^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{k})\omega + \left((\vec{v} \cdot \vec{k})^2 - c^2 k^2 \right) = 0, \quad (6.24)$$

o que implica na relação de dispersão

$$\Omega(\vec{k}; \vec{x}, t) = \vec{v} \cdot \vec{k} + ck. \quad (6.25)$$

A relação de dispersão (6.25) pode ser escrita na forma

$$\omega_r = \omega - \vec{v} \cdot \vec{k} = -(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla)\phi = -\frac{d}{dt}\phi \quad (6.26)$$

e interpretada como a relação entre $\omega_r \equiv ck$, isto é, a freqüência angular ω_r das oscilações medidas em um referencial localmente em repouso com o fluxo do fluido e $\omega = \Omega$, isto é, a freqüência das oscilações medidas no referencial onde o fluxo do fluido é \vec{v} . A velocidade de grupo, eq.(6.15), é portanto

$$\vec{V}_g = \vec{v} + c\hat{k}, \quad (6.27)$$

o que é um resultado intuitivo: Os raios de som vistos pelos observadores inerciais viajam com uma velocidade que é a soma vetorial da velocidade do fluxo do fluido com a velocidade do som com relação aos observadores comóveis com o fluxo.

6.6 Leis de transporte e conservação

Os termos seguintes da expansão (ordem ε^{-1}) fornecem a equação para a amplitude,

$$k^\mu \nabla_\mu A = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu k^\mu) A. \quad (6.28)$$

Esta equação para a amplitude em termos de ω , \vec{k} , \vec{V}_g , \vec{v} e c é

$$\left(\partial_t + \vec{V}_g \cdot \nabla\right) A = \frac{1}{2kc} \left[-(\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \omega + \vec{v} \cdot (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \vec{k} - c^2 \nabla \cdot \vec{k} \right] A. \quad (6.29)$$

A equação (6.28) implica que, no limite da acústica geométrica, o valor de A em qualquer ponto do espaço-tempo \mathcal{P} é influenciado apenas por A em pontos anteriores ao longo do raio de som que passa por \mathcal{P} . Neste sentido, diz-se que a amplitude propaga-se ao longo dos raios.

Definindo

$$f \equiv \frac{A}{|A|}, \quad (6.30)$$

provamos usando (6.28) que

$$k^\mu \nabla_\mu f = 0, \quad (6.31)$$

isto é, que a fase da amplitude complexa é conservada ao longo dos raios.

Definindo

$$j^\mu \equiv |A|^2 k^\mu, \quad (6.32)$$

provamos usando (6.28) que

$$\nabla_\mu j^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} j^\mu) = 0. \quad (6.33)$$

Para interpretar a quantidade conservada associada a j^μ , escrevemos as componentes do vetor k^μ :

$$k_\mu = (-\omega; \vec{k}), \quad k^\mu = \frac{k}{\rho} (1; \vec{V}_g). \quad (6.34)$$

Comparando $\sqrt{-g}j^\mu$ com a média da densidade de energia da onda sonora no referencial localmente em repouso com o fluxo,

$$\mathcal{E}_r = \frac{1}{2}|A|^2 k^2 \rho, \quad (6.35)$$

(esta expressão é deduzida no apêndice A) concluímos que a equação (6.33) equivale à lei de conservação da quantidade cuja densidade é \mathcal{E}_r/ω_r , isto é,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathcal{E}_r}{\omega_r} \right) + \nabla \cdot \left(\frac{\mathcal{E}_r}{\omega_r} \vec{V}_g \right) = 0. \quad (6.36)$$

Na mecânica de ondas em fluidos, a quantidade conservada cuja densidade é \mathcal{E}_r/ω_r é conhecida como ação da onda (*wave action*). A partir desta lei podemos deduzir diversos aspectos da propagação do som em fluidos. Por exemplo, em uma situação estacionária, onde portanto ω deve ser constante, se a onda propaga-se de uma região onde o fluido está parado até uma região onde há corrente em sentido contrário à sua propagação, a relação de dispersão (6.26) implica que ω_r deve aumentar. Portanto, para conservar a ação da onda, a energia da onda também deve aumentar*.

Na linguagem da mecânica quântica, dizemos que a equação (6.36) afirma que no limite da acústica geométrica o número das partículas associadas às ondas, os fônons, é conservado (a densidade do número de partículas é $\mathcal{E}_r/\hbar\omega_r$). Portanto, variações no fluxo do fluido causam criação de fônons somente se estiverem fora do

*Esta análise também é válida para ondas superficiais de gravidade e explica, por exemplo, as monstruosas ondas que destroem navios na costa da África do Sul. Formadas em distantes tempestades na Antártida, elas propagam-se contra a corrente das Agulhas ganhando energia.

limite da acústica geométrica[†]. Esta lei dá apoio à explicação heurística sugerida por Unruh em [7] para a insensibilidade da radiação Hawking à física das altas frequências que ele encontrou em seus cálculos numéricos (veja a discussão na seção 1.3). Para os modos transplanckianos, as perturbações no vácuo causadas pela criação do buraco negro ocorrem numa escala relativamente grande, de modo que para eles, tudo se passa no limite da “acústica geométrica”, isto é, no regime WKB, o que permite que eles se ajustem adiabaticamente às mudanças. Assim, os modos transplanckianos que estavam em estado de vácuo antes do colapso gravitacional permanecem em estado de vácuo, sem interferir na criação de partículas associadas aos demais modos de frequência menor que estão dentro do regime de validade da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos e que dão origem ao espectro de corpo negro medido pelos observadores no infinito.

A lei de conservação de uma ação da onda derivada a partir da equação de evolução da amplitude, possui uma generalidade que vai muito além da acústica, valendo para diversos fenômenos ondulatórios em fluidos e podendo ser usada até onde correções devidas a efeitos não lineares são importantes. Onde quer que não exista tendência para efeitos não lineares agirem cumulativamente, como por exemplo, em meios dispersivos, tal análise linear tem uma boa chance de produzir resultados razoáveis (veja [23], seções 4.5 e 4.6 e a parte 2 do epílogo; veja também [38], [39] e

[†]Entre os fenômenos ondulatórios que a aproximação eikonal não dá conta esta a amplificação paramétrica das ondas por variações temporais rápidas do meio que está relacionada na mecânica quântica com a criação de partículas [19]

[40]). Podemos especular que talvez, seja o caso da gravidade na escala de Planck, onde os efeitos da não linearidade da relatividade geral poderiam ser impedidos de agirem cumulativamente pelo efeito dispersor de uma possível quebra da simetria de Lorentz. (Para uma idéia de como efeitos dispersivos estão relacionados com a quebra da simetria de Lorentz, veja a seção 7.2 do capítulo 7.)

6.7 A curvatura experimentada pelos raios de som

Aqui calculamos a curvatura do espaço-tempo acústico que afeta as trajetórias dos raios de som provocada pelas variações do fluxo do fluido. Já que a equação do eikonal (6.22) é conformalmente invariante, ignoramos o fator ρ/c em (3.28) e trabalhamos com a métrica efetiva

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(c^2 - v^2) & \vdots & -v_j \\ \dots\dots\dots & . & \dots\dots \\ -v_i & \vdots & \delta_{ij} \end{pmatrix} \tag{6.37}$$

cuja inversa é

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \begin{pmatrix} -1 & \vdots & -v_j \\ \dots\dots & . & \dots\dots\dots \\ -v_i & \vdots & c^2\delta_{ij} - v_i v_j \end{pmatrix}. \tag{6.38}$$

Assumimos, para simplificar os cálculos e para nos concentrarmos somente no efeito das inomogeneidades no fluxo \vec{v} , que a velocidade do som é constante, convencio-

nando ser igual a um. Começamos por calcular os coeficientes de conexão

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\lambda} = \frac{g^{\nu\lambda}}{2} (\partial_{\mu}g_{\alpha\nu} + \partial_{\alpha}g_{\mu\nu} - \partial_{\nu}g_{\mu\alpha}). \quad (6.39)$$

O cálculo direto destes coeficientes fornece o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= \frac{1}{2}D_{ij}, \\ \Gamma_{00}^0 &= v_i v_j D_{ij}, \\ \Gamma_{0i}^0 &= -v_j D_{ij}, \\ \Gamma_{jk}^i &= v_i D_{jk}, \\ \Gamma_{00}^i &= -\partial_t v_i - v_k \partial_i v_k + v_i v_l v_k D_{lk}, \\ \Gamma_{0j}^i &= -v_i v_k D_{jk} + \Omega_{ij}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) \quad (6.41)$$

e

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i v_j - \partial_j v_i), \quad (6.42)$$

são a *taxa de deformação* e a *taxa de rotação* do fluxo respectivamente[‡]. Tendo os coeficientes de conexão, calculamos as componentes do tensor de Riemann R_{0i0j} , R_{0ijk} e R_{ijkl} . As demais componentes podem ser obtidas a partir destas através das propriedades de simetria do tensor de Riemann, $R_{[\alpha\beta]\gamma\delta} = 0$, $R_{\alpha\beta[\gamma\delta]} = 0$ e $R_{\alpha\beta\gamma\delta} =$

[‡]Mantemos os termos proporcionais a Ω_{jk} apesar de nossa hipótese inicial de vorticidade nula, isto é, $(\nabla \times \vec{v})_i = \varepsilon_{ijk} \Omega_{jk} = 0$, porque a descrição por espaço-tempo acústico vale também para fluxos com vorticidade no limite da acústica geométrica como explicamos no capítulo 7.

$R_{\gamma\delta\alpha\beta}$. Calculamos as componentes na base ortonormal $\{(e_0)^\mu, (e_x)^\mu, (e_y)^\mu, (e_z)^\mu\}$ cujas componentes na base coordenada cartesiana são

$$(e_0)^0 = 1 \quad (e_0)^i = v_i,$$

e

$$(e_j)^0 = 0 \quad (e_j)^i = \delta_{ij}.$$

As componentes do tensor de Riemann na base ortonormal são

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = (e_\rho)^\lambda \nabla_\lambda (\omega_{\sigma\mu\nu}) - (e_\sigma)^\lambda \nabla_\lambda (\omega_{\rho\mu\nu}) - \eta^{\alpha\beta} [(\omega_{\rho\beta\mu})(\omega_{\sigma\alpha\nu}) - (\omega_{\sigma\beta\mu})(\omega_{\rho\alpha\nu}) + (\omega_{\rho\beta\sigma})(\omega_{\alpha\mu\nu}) - (\omega_{\sigma\beta\rho})(\omega_{\alpha\mu\nu})], \quad (6.43)$$

onde os escalares $(\omega_{\lambda\mu\nu})$ são *os coeficientes de rotação de Ricci* definidos por

$$(\omega_{\lambda\mu\nu}) = (e_\lambda)^\alpha (e_\mu)^\beta \nabla_\alpha (e_\nu)_\beta \quad (6.44)$$

(veja [21], seção 3.4b). Os coeficientes que calculamos são

$$\begin{aligned} (\omega_{ijk}) &= 0, \\ (\omega_{0ij}) &= \Omega_{ij}, \\ (\omega_{0i0}) &= 0, \\ (\omega_{ij0}) &= D_{ij}. \end{aligned} \quad (6.45)$$

Os demais coeficientes são obtidos desta a partir da antisimetria $(\omega_{\lambda\mu\nu}) = -(\omega_{\lambda\nu\mu})$.

Portanto, as componentes do tensor de Riemann desejadas são

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= D_{ik}D_{jl} - D_{il}D_{jk}, \\ R_{0ijk} &= -\partial_i\Omega_{jk}, \\ R_{0i0j} &= -\frac{dD_{ij}}{dt} - D_{ik}D_{kj} + D_{ik}\Omega_{kj} - \Omega_{ik}D_{kj}. \end{aligned} \quad (6.46)$$

As componentes do *tensor de Ricci*,

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}, \quad (6.47)$$

na base ortonormal são

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^k_{00k} = -\frac{d}{dt}(\nabla \cdot \vec{v}) - \sum_{i,j} (D_{ij})^2, \\ R_{i0} &= R_{0i} = -R^j_{0ji} = \partial_j\Omega_{ji} = -\frac{1}{2}\nabla \times (\nabla \times v_i), \\ R_{ij} &= \frac{d}{dt}D_{ij} - (D_{ik}\Omega_{kj} + \Omega_{ik}D_{kj}) + (\nabla \cdot \vec{v})D_{ij}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

O escalar curvatura é igual a

$$R = R^{\mu}_{\mu} = -R_{00} + R_{kk} = 2\frac{d}{dt}(\nabla \cdot \vec{v}) + (\nabla \cdot \vec{v})^2 + \sum_{i,j} (D_{ij})^2. \quad (6.49)$$

6.8 Algumas aplicações

6.8.1 Seção de choque de absorção de um buraco mudo canônico

A equação de movimento para um fônon propagando-se no espaço-tempo acústico dado por (4.59) com $c = 1$ e restrito ao plano equatorial ($\theta = \pi/2$)[§] é

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = - \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (6.50)$$

Os campos de Killing deste espaço-tempo estático e esfericamente simétrico são $(\partial_\tau)^\mu$ e $(\partial_\phi)^\mu$. Usando o fato de que projeções de campos de Killing sobre geodésicas são constantes, obtemos as equações

$$g_{\mu\nu} (\partial_\tau)^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = - \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) \left(\frac{d\tau}{d\lambda}\right) = K_1, \quad (6.51)$$

$$g_{\mu\nu} (\partial_\phi)^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = K_2, \quad (6.52)$$

onde K_1 e K_2 são constantes. Segundo (6.51), no infinito espacial, $-d\tau/d\lambda = K_1$. Escolhemos uma escala adequada para λ de modo que $K_1 = -1$ e que, portanto, $d\lambda = d\tau = dt$ em $r \rightarrow \infty$. Com λ escolhido desta maneira, vemos pelo limite de (6.52) no infinito espacial que K_2 corresponde ao momento angular por unidade de

[§]Por causa da simetria de reflexão de paridade $\theta \rightarrow \pi - \theta$ da métrica, se a posição inicial e o vetor tangente de uma geodésica estão no plano equatorial, então a geodésica inteira deve permanecer neste plano

massa L do fônon. Assim (6.51) e (6.52) tornam-se

$$\frac{d\tau}{d\lambda} = \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right)^{-1} \quad (6.53)$$

e

$$r^2 \frac{d\phi}{d\lambda} = L. \quad (6.54)$$

Substituindo (6.53) e (6.54) em (6.50) obtemos

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right) = \frac{1}{2}. \quad (6.55)$$

Portanto, o movimento radial do fônon parametrizado por λ é o mesmo que o de uma partícula clássica de massa unitária com energia total $1/2$ movendo-se em um potencial $V(r)$,

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{r_0^4}{r^4}\right). \quad (6.56)$$

Notamos as seguintes propriedades deste potencial:

- $\lim_{r \rightarrow 0} V = -\infty$.
- $\lim_{r \rightarrow \infty} V = 0$.
- $V(r_0) = 0$.
- Seu único máximo é $r = 3^{1/4} r_0$.

Um fônon vindo do infinito com parâmetro de impacto b possui momento angular por unidade de massa

$$L = b(v)_{r \rightarrow \infty} \simeq b \left(\frac{dr}{dt}\right)_{r \rightarrow \infty}. \quad (6.57)$$

Segundo a equação (6.55), em $r \rightarrow \infty$, $|dr/dt| = 1$. Portanto,

$$L = b. \quad (6.58)$$

A energia mínima para vencer a barreira de potencial é

$$\frac{1}{2} = V(r = 3^{1/4}r_0). \quad (6.59)$$

A partir destes dois resultados acima, obtemos o parâmetro de impacto crítico b_c abaixo do qual os fônons vindos do infinito são tragados pelo buraco:

$$b_c^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} r_0^2 \right). \quad (6.60)$$

Portanto a seção de choque do buraco mudo canônico é

$$\sigma = \pi b_c^2 = \frac{\pi 3\sqrt{3}}{2} r_0^2. \quad (6.61)$$

Comparamos com a seção de choque de absorção para fótons de um buraco negro com raio de Schwarzschild r_0 ([21], seção 6.3):

$$\sigma_{\text{buraco negro}} = \frac{27\pi r_0^2}{4} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \sigma_{\text{buraco mudo}}. \quad (6.62)$$

Cálculos semelhantes, porém mais sofisticados, aparecem na literatura, por exemplo, em análises da deflexão de fônons provocada por vórtices bidimensionais (veja [41] e [30]) e em uma análise da deflexão em um espaço-tempo acústico genérico [42].

6.8.2 Tempo de percurso

Deduzimos a seguir a expressão que fornece o tempo (o tempo físico) que um fônon demora para atravessar um caminho entre dois pontos do espaço euclidiano. Ini-

cialmente, parametrizamos a trajetória do fônon no espaço-tempo acústico x^μ pelo comprimento (segundo a métrica euclidiana) do caminho percorrido:

$$x^\mu(s) = (t(s); \vec{x}(s)), \quad (6.63)$$

onde s é tal que

$$\left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| = 1. \quad (6.64)$$

A natureza tipo luz com respeito à métrica (6.37) da trajetória do fônon,

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = -(c^2 - v^2) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - 2\vec{v} \cdot \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \right) \left(\frac{dt}{ds} \right) + \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \right) \cdot \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \right) = 0, \quad (6.65)$$

notando que $(d\vec{x}/ds) \cdot (d\vec{x}/ds) = 1$, leva a uma equação algébrica para dt/ds cuja solução é

$$\frac{dt}{ds} = \frac{-\vec{v} \cdot d\vec{x}/ds \mp \sqrt{c^2 - v^2 + (\vec{v} \cdot d\vec{x}/ds)^2}}{c^2 - v^2} \quad (6.66)$$

Escolhendo a solução positiva, concluimos que o tempo para atravessar o caminho é

$$T = \int \frac{dt}{ds} ds = \int \frac{1}{c^2 - v^2} \left[\sqrt{(c^2 - v^2) ds^2 + (\vec{v} \cdot d\vec{x})^2} - \vec{v} \cdot d\vec{x} \right]. \quad (6.67)$$

Esta expressão é o princípio do cálculo dos atrasos e avanços provocados por um vórtice bidimensional feitos em [30] e a analogia com viagens superluminais (*warp drive*) feita em [43].

Capítulo 7

Viscosidade, barotropicidade e vorticidade

7.1 Panorama

Neste capítulo, mostramos como a equação de onda (3.17) é modificada pela introdução da viscosidade (seção 7.2), a violação da condição barotrópica (seção 7.3) e a vorticidade não nula do fluxo (seção 7.4). Verificamos como estas modificações restringem a descrição da propagação do som por espaços-tempos acústicos a determinados regimes de validade.

7.2 Viscosidade

Como informamos na seção 2.2, fluidos reais em movimento oferecem resistência a cisalhamento. Para a maioria dos fluidos, determinamos experimentalmente que essa resistência é proporcional ao gradiente do fluxo do fluido. Levando em conta

que descrevemos fluidos isotrópicos e que o tensor de *stress* deve ser simétrico*, a contribuição da viscosidade ao tensor de *stress* deve ser da forma

$$T_{ij} = -\zeta(\nabla \cdot \vec{v})\delta_{ij} - 2\eta \left[\frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \vec{v})\delta_{ij} \right] \quad (7.1)$$

onde ζ é o *coeficiente de viscosidade volumétrica* e η é o *coeficiente de viscosidade de cisalhamento* (veja [19], seção 12.4.2). Aqui vamos desprezar ζ e considerar a *viscosidade cinemática* definida por $\nu = \eta/\rho$ como constante. Acrescentando (7.1) ao tensor de *stress* de um fluido ideal na equação (2.14) e fazendo as aproximações descritas acima, obtemos uma equação de Euler (2.15) modificada, que é a famosa equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \vec{f} + \nu \left(\nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \right). \quad (7.2)$$

Repetindo o procedimento descrito na seção 2.8 obtemos uma equação de Bernoulli (2.29) modificada:

$$-\partial_t \psi + h + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \Phi + \frac{4}{3} \nu \nabla^2 \psi = 0. \quad (7.3)$$

Repetindo o procedimento descrito na seção 3.3 chegamos à equação de onda

$$-\partial_t \left[\frac{1}{c^2} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\rho_0}{c^2} (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \vec{v}_0 \right] = -\frac{4}{3} \frac{c\nu}{\rho_0} (\partial_t + \vec{v}_0 \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla^2 \psi_1}{c^2} \right), \quad (7.4)$$

*Podemos mostrar por argumentos elementares de torque que se T_{ij} não for igual a T_{ji} , então em um pequeno cubo de fluido com lado L e momento de inércia proporcional a L^5 , haverá um torque líquido $(T_{xy} - T_{yx})L^3$ que induz uma aceleração angular proporcional a L^{-2} . Esta aceleração angular torna-se infinitamente grande no limite $L \rightarrow 0$, o que é absurdo (veja [24], pág 141).

que difere da equação (3.17) pelo aparecimento de um termo à direita. Usando a linguagem dos espaços-tempos acústicos podemos escrever (7.4) na forma

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \psi_1 = -\frac{4}{3} \frac{\nu c^2}{\sqrt{\rho_0 c}} V^\mu \nabla_\mu \left(\frac{\nabla^2 \psi_1}{c^2} \right), \quad (7.5)$$

onde V^μ é a 4-velocidade do fluido (4.7). O aparecimento de $\nabla^2 \psi_1$ no lado direito da equação, que não pode ser posto em uma forma covariante, prova que a viscosidade quebra a invariância de Lorentz acústica. Para descobrir o alcance dos efeitos da viscosidade, usamos a aproximação eikonal introduzindo a expansão (6.13) na equação (7.5). Obtemos da equação do eikonal

$$\left(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k} \right)^2 - c^2 k^2 + \frac{4}{3} \nu i \left(\omega - \vec{v} \cdot \vec{k} \right) k^2 = 0, \quad (7.6)$$

o que implica na relação de dispersão

$$\omega = \vec{v} \cdot \vec{k} \pm \sqrt{c^2 k^2 - \left(\frac{2\nu k^2}{3} \right)^2} - i\nu \frac{2}{3} k^2. \quad (7.7)$$

O segundo termo à direita mostra que a viscosidade introduz um efeito de dispersão (diferentes velocidades de grupo para diferentes comprimentos de onda) e o terceiro termo à direita mostra um efeito de dissipação (decaimento exponencial da amplitude com o tempo). Vemos que os dois efeitos são dependentes do comprimento de onda. Para comprimentos de onda suficientemente grandes, eles são desprezíveis.

Para ter uma idéia da escala de comprimento relevante para estes efeitos, precisamos saber a ordem de magnitude da viscosidade cinemática ν cuja dimensão é de [comprimento] \times [velocidade]. Na seção 2.2, afirmamos que a origem microscópica

da viscosidade é o movimento aleatório das partículas do fluido. O *caminho livre médio* l é a distância que as partículas de massa m do fluido atravessam antes de colidir. Se há um gradiente de velocidade $\partial_i v_j$ do fluxo, temos que em média uma partícula transporta uma quantidade de momento da ordem de $\sim ml\partial_i v_j$. Se há n partículas por unidade de volume viajando com velocidade da ordem de c (o som é uma perturbação na pressão do fluido que propaga-se pelo movimento das partículas constituintes do fluido), então o momento atravessando uma unidade de área por unidade de tempo é $\sim nmcl\partial_i v_j$. Portanto, comparando com (7.1), concluímos que $\nu = \eta/\rho \sim cl$.

7.3 Barotropicidade

Tomar o rotacional da equação de Bernoulli (2.23) resulta em uma lei de evolução temporal para a vorticidade $\vec{\omega}$:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) - \frac{\nabla P \times \nabla \rho}{\rho^2}. \quad (7.8)$$

Podemos ver desta lei que mesmo se a vorticidade for nula inicialmente, se as superfícies de pressão constante não coincidirem com as superfícies de densidade constante, o segundo termo à direita não se anula e ocorre geração de vorticidade. Fisicamente, o que acontece é que quando os contornos de densidade e pressão constante não coincidem, a força resultante em um elemento de fluido não passa através de seu centro de massa, e portanto exerce um torque no elemento, introduzindo algum

movimento rotacional (veja [19], subseção 13.2.5). Portanto a violação da condição barotrópica implica que a pressão do fluido atua como fonte de vorticidade.

7.4 Vorticidade

Como deduzido em [44], para um fluido ideal com fluxo qualquer, não necessariamente barotrópico ou irrotacional, existe uma equação diferencial parcial para um potencial descrevendo as perturbações no fluxo que é correta apenas em primeira ordem da razão entre a escala de distância da onda sonora e a escala de distância das inhomogeneidades do fluido e a razão entre a escala de tempo da onda sonora e a escala de tempo das inhomogeneidades do fluido. Esta equação é idêntica a (3.17) (as equações (21) e (23) de [44] correspondem às nossas equações (3.14) e (3.17) em termos da derivada convectiva). Já para fluidos ideais barotrópicos com vorticidade existe um sistema de equações exato que descreve o som [45]. Nesse caso, a perturbação linear \vec{v}_1 no fluxo pode ser escrita na forma

$$\vec{v}_1 = \nabla\psi_1 + \vec{\xi}_1, \quad (7.9)$$

onde $\vec{\xi}_1 = \vec{x}_1 \times \vec{\omega}_0$ é o produto vetorial entre o deslocamento de um elemento de fluido provocado pela perturbação linear e a vorticidade do fluxo de fundo. As variáveis ψ_1 e $\vec{\xi}_1$ obedecem o sistema de equações

$$-\partial_t \left[\frac{1}{c^2} \rho_0 (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \right] + \nabla \cdot \left[\rho_0 \nabla \psi_1 - \frac{\rho_0}{c^2} (\partial_t \psi_1 + \vec{v}_0 \cdot \nabla \psi_1) \vec{v}_0 \right] = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}_1) \quad (7.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_0 \cdot \nabla\right) \vec{\xi}_1 = \nabla\psi_1 \times \vec{\omega}_0 - (\vec{\xi}_1 \cdot \nabla) \vec{v}_0. \quad (7.11)$$

Notamos que a primeira equação acima é igual a (3.17) mais um termo à direita. A magnitude de $\vec{\xi}_1$ é da ordem de $x_1\omega_0$, enquanto que a magnitude de $\nabla\psi_1$ é da ordem de $x_1\Omega$, onde Ω é a frequência da onda. Portanto, no caso em que $\omega_0/\Omega \ll 1$, podemos descrever o som aproximadamente por ψ_1 obedecendo a equação (3.17). Concluimos então, que para fluidos ideais não barotrópicos e com vorticidade, a descrição por espaços-tempos acústicos vale aproximadamente nas escalas adequadas.

Capítulo 8

Conclusões

8.1 Sumário dos resultados principais

O som em fluidos ideais pode ser descrito por um escalar obedecendo a equação de Klein-Gordon definida em um espaço-tempo acústico curvo globalmente hiperbólico. Este resultado é exato para fluidos ideais barotrópicos e irrotacionais e vale aproximadamente para os demais fluidos ideais para escalas de tempo e distância adequadas. A métrica é multiplicada por um fator global ρ/c e depende da 4-velocidade dos elementos de fluido. Logo, a dinâmica da métrica é governada pela equação da continuidade e a equação de Euler. Não é possível simular exatamente a métrica de um buraco negro mas é possível conceber fluxos que gerem métricas estacionárias, axisimétricas, com ergosferas e horizontes de eventos, o que é o suficiente para que ocorram fenômenos análogos aos que ocorrem em buracos negros tais como a 0-ésima lei e a radiação Hawking, por exemplo. No limite da acústica geométrica, os raios de som seguem geodésicas tipo luz da métrica efetiva cuja curvatura depende dos

gradientes do fluxo e o número de fônons é conservado. Nossas conclusões valem também para perturbações lineares na fase de condensados de Bose-Einstein no limite da equação de Gross-Pitaevskii quando é possível tratar o condensado como um fluido ideal barotrópico e irrotacional.

8.2 Observações finais

Queremos salientar dois tópicos importantes sobre nosso modelo análogo que não discutimos nesta dissertação.

Não abordamos aqui a dinâmica que gera os espaços-tempos acústicos, isto é, em nenhum momento tentamos resolver a equação de Euler (2.15) para um dado potencial externo $\Phi(\vec{x})$. Naturalmente que dado qualquer um dos fluxos discutidos nesta dissertação, podemos encontrar a expressão para um potencial externo que permita que a equação de Euler seja satisfeita, mas a questão da estabilidade destas soluções supersônicas e o possível aparecimento de frentes de choque deve ser respondida para que a construção destes modelos em laboratório seja viável. Algo nesse sentido foi apresentado em [46].

O fato de termos para ondas sonoras duas métricas a nosso dispor, nos leva a duas noções distintas de conservação de energia-momento: A simetria de translação espaço-temporal da lagrangiana que descreve o fluido implica, pelo teorema de Noether, a conservação do tensor de energia-momento total do fluido. Se a lagrangiana que descreve o campo das ondas sonoras *no espaço-tempo acústico* possui

esta simetria, então haverá a conservação do chamado tensor de pseudo-energia e pseudo-momento, que na verdade sumariza diversas leis de conservação conhecidas para ondas em fluidos [47].

8.3 Perspectivas

O estudo dos análogos em matéria condensada serve como um exercício de separação entre as propriedades intrínsecas de qualquer geometria lorentziana e as propriedades ditadas pelas equações que governam a dinâmica da geometria. Talvez no futuro, experiências com sistemas de matéria condensada possam sugerir conjecturas sobre a independência de certas leis da relatividade geral com relação à forma das equações de Einstein e as condições sobre o conteúdo de energia do espaço-tempo.

Finalmente, enfatizamos que o limite hidrodinâmico da equação de Gross-Pitaevskii é uma teoria efetiva para baixas frequências para a física atômica assim como acreditamos que a teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos é uma teoria efetiva para baixas frequências para a gravidade quântica. Os efeitos de *redshift* provocados pelos horizontes de eventos tanto em buracos negros e universos inflacionários como em seus modelos análogos, funcionam como microscópios que podem revelar em um caso, aspectos da bem conhecida mecânica quântica dos átomos e em outro, aspectos da mal conhecida gravidade quântica. As experiências com matéria condensada podem nos ajudar a entender melhor as potencialidades deste microscópio [18]. Para que haja um intercâmbio de idéias entre os dois cam-

pos de pesquisa, é necessário um dicionário que traduza o limite hidrodinâmico da matéria condensada e suas flutuações quânticas na linguagem geométrica da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos.

Apêndice A

Densidade da energia média dos ônions em reatores em meios homogêneos em equilíbrio

Resumo: Este trabalho apresenta uma análise detalhada da densidade de energia média dos ôníons em reatores em meios homogêneos em equilíbrio. O estudo é baseado em métodos avançados de teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos.

Este trabalho apresenta uma análise detalhada da densidade de energia média dos ôníons em reatores em meios homogêneos em equilíbrio. O estudo é baseado em métodos avançados de teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos. A abordagem utilizada aqui permite uma compreensão mais profunda das interações entre os campos e a geometria do espaço-tempo, especialmente em contextos onde a gravidade desempenha um papel significativo. Os resultados obtidos são essenciais para a compreensão dos fenômenos físicos em ambientes extremos, como aqueles encontrados em reatores nucleares avançados e em sistemas astrofísicos.

Apêndice A

Densidade de energia média das ondas sonoras em meios homogêneos em repouso

Desprezando a ação de qualquer força externa, a densidade de energia de um fluido ideal é

$$U = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho u, \quad (\text{A.1})$$

onde u é a energia interna. Na presença de uma perturbação linear, podemos dividir esta densidade em duas partes: a densidade de energia da configuração de equilíbrio do fluido e a densidade de energia da onda sonora. Se o fluido antes da passagem da onda sonora encontra-se em repouso, o termo cinético é atribuído somente à onda.

Para encontrar a parte da energia interna que corresponde à onda sonora, fazemos a expansão de Taylor da densidade de energia interna como função da densidade em

torno da posição de equilíbrio:

$$u\rho = [u\rho] + \left[\left(\frac{\partial(u\rho)}{\partial\rho} \right)_s \right] \delta\rho + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2(u\rho)}{\partial\rho^2} \right)_s \right] \delta\rho^2. \quad (\text{A.2})$$

Os três coeficientes entre chaves estão avaliados na densidade de equilíbrio a entropia constante. O primeiro termo descreve a densidade de energia do fluxo de fundo do fluido. O segundo termo tem média zero sobre um ciclo de oscilação da onda. O terceiro termo pode ser simplificado usando a primeira lei da termodinâmica [equações (2.17) e (2.18)]. Da equação (2.18), temos que

$$\left(\frac{\partial h}{\partial\rho} \right)_s = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho} \right)_s \frac{1}{\rho} = \frac{c^2}{\rho}. \quad (\text{A.3})$$

Usando com isto a definição de entalpia, $h = u + P/\rho$, temos que

$$\left(\frac{\partial(u\rho)}{\partial\rho} \right)_s = \left(\frac{\partial(h\rho - P)}{\partial\rho} \right)_s = h + \rho \left(\frac{\partial h}{\partial\rho} \right)_s - \left(\frac{\partial P}{\partial\rho} \right)_s = h + c^2 - c^2 = h. \quad (\text{A.4})$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial^2(u\rho)}{\partial\rho^2} \right)_s = \left(\frac{\partial h}{\partial\rho} \right)_s = \frac{c^2}{\rho}. \quad (\text{A.5})$$

Concluimos que a densidade média de energia da onda sonora é

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho\overline{v^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho}\overline{\delta\rho^2}. \quad (\text{A.6})$$

Usando a forma de uma onda plana, isto é, $\psi = A \cos(\vec{x} \cdot \vec{k} - \omega t)$ e substituindo-a na equação (3.3) obtemos

$$\delta P = c\rho v, \quad (\text{A.7})$$

onde δP é entendido como $P - P_0$. A partir da expressão (A.7) e usando a definição da velocidade do som, podemos provar que $\delta\rho/\rho = v/c$. Portanto, a densidade de energia da onda sonora escreve-se na forma

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho \left[\overline{v^2} + c^2 \frac{\overline{\delta\rho^2}}{\rho^2} \right] = \rho \overline{v^2} = \rho \overline{(\nabla\psi)^2} = \rho \frac{1}{2} A^2 k^2 = \rho \frac{1}{2} A^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (\text{A.8})$$

Bibliografia

- [1] *Workshop on "Analog Models of General Relativity"*,
[<http://www.cbpf.br/~bscg/analog>]. Página na internet do evento
ocorrido no CBPF, Rio de Janeiro, do dia 16 ao 20 de outubro de 2000.
- [2] W. Gordon, *Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie*, Ann. Phys.
Leipzig, **72**, (1923), 421.
- [3] F. de Felice, *On the gravitational field acting as an optical medium*, Gen. Rel.
Grav., **2**,(1971), 347.
- [4] V. Moncrief, *Stability of a stationary, spherical accretion onto a Schwarzschild
black hole*, Ap. J., **235**, (1980), 1038.
- [5] N. Bilic, *Relativistic acoustic geometry*, Class. Quant. Grav., **16**, (1999), 3953,
[gr-qc/9908002].
- [6] W.G. Unruh, *Experimental black hole evaporation?*, Phys. Rev. Lett., **46**,
(1981), 1351.

- [7] W.G. Unruh, *Dumb Holes and the effects of high frequencies on black hole evaporation*, Phys. Rev. D, **51**, (1995), 2827, [gr-qc/9409008].
- [8] H. C. Rosu, *Hawking-like effects and Unruh-like effects: Towards experiments?*, Grav. Cosmol., **7**, (2001), 1; Int. J. Mod. Phys. D, **3**, (1994), 545, [gr-qc/9406012]*.
- [9] T. Jacobson, *Trans-planckian redshifts and the substance of the space-time river*, Progress of Theoretical Physics Supplement, **136**, (1999), 1.
- [10] R. Parentani, *What did we learn from studying acoustic black holes?*, Int. J. Mod. Phys. A, **17** (2002), 2721, [gr-qc/0204079].
- [11] R.M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, (2001), artigo disponível em [<http://www.livingreviews.org/Articles/Volume4/2001-6wald>].
- [12] Veja os artigos de G. E. Volovik e de seus colaboradores e o livro a ser publicado de G. E. Volovik, *The universe in a helium droplet*, (Clarendon, Oxford, 2003), também disponível na página do autor, [<http://boojum.hut.fi/personnel/THEORY/volovik.html>], onde aprendemos que não só a gravidade, mas toda a física de partículas encontra analogias interessantes no hélio líquido.

*código do artigo disponível em [<http://br.arxiv.org>]

- [13] V. A. De Lorenci, R. Klippert, *Non gravitational black holes*, a ser publicado no Brazilian Journal of Physics.
- [14] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Analogue gravity from field theory normal modes?*, *Class. Quant. Grav.*, **18**, (2001), 3595, [gr-qc/0104001].
- [15] W. G. Unruh, R. Schutzhold, *Gravity wave analogs of black holes*, [gr-qc/0205099].
- [16] I. Smolyaninov, *Nonlinear optics of surface plasmons toy black holes*, [cond-mat/0309590].
- [17] M. Sakagami, A. Ohashi, *Hawking radiation in the laboratory*, *Prog. Theor. Phys.*, **107**, (2002), 1267, [gr-qc/0108072].
- [18] L. J. Garay, J. R. Anglin, J. I. Cirac, P. Zoller, *Sonic black holes in dilute Bose-Einstein condensates*, *Phys. Rev. A*, **63**, (2001), 023611, [gr-qc/0005131].
- [19] R. D. Blandford, K. S. Thorne, *Applications of classical physics*. Livro em processo de revisão final para publicação, desenvolvido a partir de curso homônimo oferecido no California Institute of Technology em 2000-2001 e em 2002-2003. Disponível em [<http://www.pma.caltech.edu/Courses/ph136/ph136.html>].
- [20] A. J. Chorin, J. E. Marsden, *A mathematical introduction to fluid mechanics*, (Springer, New York, 1993).

- [21] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago, Chicago, 1984).
- [22] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, (Addison-Wesley, Reading, 1963).
- [23] M. J. Lighthill, *Waves in fluids*, (Cambridge University, Cambridge, 1978).
- [24] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [25] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Towards the observation of Hawking radiation in Bose-Einstein condensates*, Int. J. Mod. Phys. A, **18**, (2003), 3735, [gr-qc/0110036].
- [26] S. Basak, P. Majumdar, *'Superresonance' from a rotating acoustic black hole*, Class. Quant. Grav., **20**, (2003), 3907, [gr-qc/0203059].
- [27] S. Basak, P. Majumdar, *Reflection coefficient for superresonant scattering*, Class. Quant. Grav., **20**, (2003), 2929, [gr-qc/0303012].
- [28] M. Visser, *Acoustic black holes: horizons, ergospheres and Hawking radiation*, Class. Quant. Grav., **15**, (1998), 1767, [gr-qc/9712010].
- [29] K. Martel, E. Poisson, *Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes*, Am. J. Phys., **69**, (2001), 476, [gr-qc/0001069].
- [30] S. Basak, *Sound wave in vortex with sink*, [gr-qc/0310105].

- [31] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys., **71**, (1999), 463.
- [32] S. E. Ch. Weinfurtner, *Simulation von gravitationsobjekten in Bose-Einstein-kondensat*, diplomarbeit, Max Planck Institut für Quantenoptik, Technische Universität München, Fakultät für Physik, [gr-qc/0404022].
- [33] W. G. Unruh, R. Schutzhold, *On slow light as a black hole analogue*, Phys. Rev. D, **68**, (2003), 024008, [gr-qc/0303028].
- [34] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Analogue gravity from Bose-Einstein condensates*, Class. Quant. Grav., **18**, (2001), 1137, [gr-qc/0011026].
- [35] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Analogue models for FRW cosmologies*, Int. J. Mod. Phys. D, **12**, (2003), 1641, [gr-qc/0305061].
- [36] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Probing semiclassical analogue gravity in Bose-Einstein condensates with widely tunable interactions*, Phys. Rev. A, **68**, (2003), 053613, [cond-mat/0307491].
- [37] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, London, 1959).
- [38] F. P. Bretherton, C. J. R. Garret, *Wavetrains in inhomogeneous moving media*, Proc. Roy. Soc. A, **302**, (1968), 529.

- [39] W. D. Hayes, *Conservation of action and modal wave action*, Proc. Roy. Soc. A, **320**, (1970), 187.
- [40] W. D. Hayes, *Group Velocity and nonlinear dissipative wave propagation*, Proc. Roy. Soc. A, **332**, (1973), 199.
- [41] U. R. Fischer, M. Visser, *Riemannian geometry of irrotational vortex acoustics*, Phys. Rev. Lett., **88**, (2002), 110201, [cond-mat/0110211].
- [42] U. R. Fischer, M. Visser, *On the space-time curvature experienced by quasiparticle excitations in the Painlevé-Gullstrand effective geometry*, Annals Phys., **304**, (2003), 22, [cond-mat/0205139].
- [43] U. R. Fischer, M. Visser, *Warped space-time for phonons moving in a perfect non-relativistic fluid*, Europhys. Lett., **62**, (2003),1, [gr-qc/0211029].
- [44] A. D. Pierce, *Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow*, J. Acoust. Soc. Am., **87**, (1990), 2292.
- [45] S. E. P. Bergliaffa, K. Hibberd, M. Stone, M. Visser, *Wave equation for sound in fluids with vorticity*, Physica D: Nonlinear Phenomena, **191**, (2004), 121, [cond-mat/0106255].
- [46] C. Barceló, S. Liberati, M. Visser, *Unexpectedly large surface gravities for acoustic horizons?*, Class. Quant. Grav., **17**, (2000), 2903, [gr-qc/0003105].

- [47] M. Stone, *Phonons and Forces: Momentum versus pseudomomentum in moving fluids*, in: M. Novello, M. Visser, G. E. Volovik (Eds), *Artificial Black Holes* (World Scientific, Singapore, 2002), [cond-mat/0012316].

