



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Otimização Global em Redução de
Modelos Utilizando a Norma $\mathcal{H}_\infty$

Henrique Ferrari Marchesi

Ilha Solteira - SP

1210001292



1292



Otimização Global em Redução de Modelos Utilizando a Norma $\mathcal{H}_\infty$

HENRIQUE FERRARI MARCHESI[†]

Orientador:

PROF. DR. EDVALDO ASSUNÇÃO

Co-orientador:

PROF. DR. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista - UNESP, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

UNESP - Ilha Solteira - Agosto de 2002

[†]Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP.

Otimização Global em Redução de Modelos Utilizando a Norma H_{∞}

Henrique Ferrari Marchesi

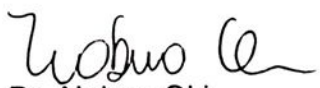
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA -
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA - UNESP - COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA (ME).

A.A. Carvalho
Prof. Dr. Aparecido Augusto de Carvalho
Coordenador

COMISSÃO EXAMINADORA:


Prof. Dr. Edvaldo Assunção – orientador


Prof. Dr. Pedro Luis Dias Peres


Prof. Dr. Nobuo Oki

1210001292



Proc. 071/2002 - NRD 053/02

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCN. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHECAGEM	DATA DE TOMBO
<i>19.09.02</i>	<i>30.09.02</i>
REGISTRO POR	TOMBO
<i>Ailza</i>	<i>Te. 1292</i>
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
<i>Ilhas Antes R\$10.00</i>	<i>M3168</i>

Ilha Solteira, agosto de 2002

syz - 184468
syz - 54692

BCpIS - FEIS - UNESP

Aos meus pais
Luiz e Terezinha,
aos meus irmãos
Neto e Raquel,
e à minha namorada
Carolina
dedico este trabalho.



*"Instrui-te e transmite a teus filhos a instrução, que
é dote que não se gasta, direito que não se perde,
liberdade que não se limita."*

Coelho Neto



Agradecimentos

Ao Prof. Edvaldo, meu orientador, pelos valiosos conhecimentos transmitidos e pela maneira especial de conduzir a orientação durante este trabalho. Agradecimentos especiais ao Prof. Marcelo, cuja ajuda foi imprescindível na obtenção da bolsa de estudos e em grande parte dos resultados deste trabalho.

Aos meus pais, irmãos, amigos e namorada cujo apoio emocional foi forte lastro nas tempestades do dia-a-dia.

A todos os meus amigos e colegas de faculdade que ajudaram a criar tão saudável ambiente de trabalho.

À FAPESP, pelo suporte financeiro.



Resumo

Este trabalho aborda a redução global de modelos contínuos e discretos estáveis, de realização mínima, tendo como critério de redução a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro entre os modelos original e reduzido. Expõe-se primeiramente o método de obtenção da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução descrito em forma de desigualdades matriciais bilineares (BMIs - do inglês *Bilinear Matrix Inequalities*). Ainda, é mostrado o algoritmo *branch and bound* como um método de solução para estas BMIs, com garantia de convergência ao ótimo global em tempo finito, para uma dada precisão. São propostos posteriormente dois métodos que, aliados ao *branch and bound*, diminuem o custo computacional para a solução do problema de otimização global em redução de modelos usando a norma $\mathcal{H}_\infty$. O primeiro método consiste no uso dos valores singulares de Hankel como um critério de parada do algoritmo e o segundo na realização do modelo reduzido na forma canônica controlável ou observável. Exemplos ilustram a eficiência destes métodos.

Abstract

This work addresses the global reduction of stable, with minimum realization, continuous and discrete-time models, using $\mathcal{H}_\infty$ -norm of the error between original and reduced models as a rule for reduction. First, it is shown a method to obtain the $\mathcal{H}_\infty$ -norm of the reduction error described in terms of bilinear matrix inequalities (BMIs). After, it is shown the *branch and bound* algorithm as a solution method for these BMIs, with assured convergence to the global optimum in a finite time, given a precision. Two methods are also proposed to reduce the computational cost of the *branch and bound* algorithm used for the $\mathcal{H}_\infty$ global optimization. The first method use the Hankel singular values of the original model as a rule to stop the algorithm, and the second use the control or observer canonical forms as a realization of the reduced models. The efficiency of these methods are illustrated by the examples.



Notação e Definições

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais
- $\mathbb{R}^n$ é o espaço euclidiano real
- $\mathbb{R}^{m \times n}$ é o espaço real das matrizes reais
- $\sigma_{\max}(M)$ denota o valor singular máximo da matriz M
- $\sigma_i(M)$ denota o i -ésimo valor singular da Matriz M
- I é a matriz identidade de dimensão apropriada
- 0 é a matriz nula de dimensão apropriada
- T é a matriz definida na página 35
- M' denota a matriz transposta de M
- $M > 0$ ($M \geq 0$) é definida (semidefinida) positiva
- $M < 0$ ($M \leq 0$) é definida (semidefinida) negativa
- $Tr(M)$ representa o traço da matriz M
- $\sup$ denota o supremo
- SISO do inglês *Single Input Single Output* (sistema monovariável, uma entrada e uma saída)
- MIMO do inglês *Multiple Input Multiple Output* (sistema multivariável, múltiplas entradas e múltiplas saídas)
- LMIs do inglês *Linear Matrix Inequalities* (desigualdades matriciais lineares)
- BMIs do inglês *Bilinear Matrix Inequalities* (desigualdades matriciais bilineares)



Sumário

1	Introdução	2
2	A Norma $\mathcal{H}_\infty$	5
2.1	Equacionamento da Norma $\mathcal{H}_\infty$	5
2.2	Formulação da Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Contínuos	6
2.3	Formulação da Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Discretos	8
3	O Algoritmo <i>Branch and Bound</i>	11
3.1	Introdução às BMIs	11
3.2	O Algoritmo <i>Branch and Bound</i>	12
3.3	Procedimentos para o Cálculo do Ótimo Global Usando <i>Branch and Bound</i>	14
3.3.1	O Limitante Superior	17
3.3.2	O Limitante Inferior	17
3.3.3	CrITÉRIOS de Poda	20
3.3.4	Exemplo Comentado	21
3.4	Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Contínuos	27
3.4.1	Limitante Superior	27
3.4.2	Limitante Inferior	27
3.5	Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Discretos	28
3.5.1	O Limitante Superior	28
3.5.2	O Limitante Inferior	29
3.6	Construção do Hiper-Retângulo Inicial $\mathcal{Q}$	30
3.7	Análise da Convergência	31
4	Novos Métodos para Melhorar o Tempo de Convergência	32
4.1	Introdução	32
4.2	O Uso dos Valores Singulares de Hankel como Critério de Parada	33
4.3	Usando Formas Canônicas - Caso Contínuo no Tempo	34
4.3.1	Reduzindo o Sistema Usando o Método Primal $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Controlável	34



4.3.2	Reduzindo o Sistema Usando o Método Dual $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Observável	36
4.4	Usando Formas Canônicas - Caso Discreto no Tempo	38
4.4.1	Reduzindo o Sistema Usando o Método Primal $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Controlável	38
4.4.2	Reduzindo o Sistema Usando o Método Dual $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Observável	39
5	Exemplos Numéricos	40
5.1	Exemplo 1. Uso dos Valores Singulares de Hankel	40
5.2	Exemplo 2: Utilizando a Forma Canônica Controlável	41
5.3	Exemplo 3: Redução em Modelos Discretos	46
6	Conclusões e Perspectivas	49
	Bibliografia	51
A	Complemento de Schur	54
A.1	Dedução do Complemento de Schur	54
B	Aspectos Práticos para a Construção de um Programa	56
B.1	Introdução	56
B.2	O Operador Linear $\mathcal{M}$	57
B.2.1	Utilização do Operador $\mathcal{M}$	57
B.2.2	A Utilização do Operador $\mathcal{M}$ em LMIs	59



Lista de Figuras

2.1	Diagrama de blocos do erro de redução para sistemas próprios.	7
3.1	Interpretação gráfica do algoritmo <i>branch and bound</i>	13
3.2	Hiper-retângulo englobando inteiramente a região factível do problema. É mostrada uma região em duas dimensões, mas pode ser dada em qualquer dimensão e, então, o hiper-retângulo terá também a mesma dimensão.	14
3.3	Região factível do problema (3.2).	16
3.4	Corte ao meio na variável y	16
3.5	Linha de corte e subregiões.	19
3.6	Limites das variáveis após execução da segunda iteração. O hiper-retângulo dos limites das variáveis correspondente a cada subregião está hachurado horizontalmente, e na subregião 1 os limites em x estão sobrepostos.	23
3.7	Limites das variáveis após execução da terceira iteração.	24
3.8	Limites das variáveis após execução da quarta iteração.	25
3.9	Evolução dos limitantes.	26
3.10	Evolução dos limitantes superior e inferior para uma precisão de 0,01.	26
5.1	Evolução dos limitantes inferior e superior (raiz quadrada) para a redução $\mathcal{H}_\infty$ do modelo do Exemplo 1. O valor de σ_2 é representado pela linha tracejada.	41
5.2	Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para uma redução a um modelo reduzido com realização genérica. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.	42
5.3	Evolução da norma $\hat{\mathcal{H}}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para uma redução a um modelo reduzido na forma canônica controlável. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.	43
5.4	Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para uma redução a um modelo reduzido na forma canônica controlável de ordem 2. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.	44



- 5.5 Gráfico e curvas de nível da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução do modelo de ordem 3 para o modelo de ordem 2 em questão em função das variáveis $A_r(1, 1)$ e $A_r(1, 2)$ 45
- 5.6 Resposta em frequência para os três modelos. Linha contínua representa o sistema original (ordem 3), linha tracejada o modelo de ordem 1 e o representado por traço-ponto o de ordem 2. 45
- 5.7 Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para o modelo reduzido discreto. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel. . . . 46
- 5.8 Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para o modelo reduzido discreto na forma canônica controlável. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel. 47

Capítulo 1

Introdução

O problema de otimização global em redução de modelos usando a norma $\mathcal{H}_\infty$ como critério de redução é abordado neste trabalho.

A obtenção de equações lineares que representem a dinâmica de um sistema real é parte essencial na elaboração de controladores. Muitas vezes esse modelo matemático torna-se excessivamente grande, dependendo da fidelidade do modelo e de sua complexidade. Na literatura encontramos muitos métodos de modelagem e identificação de sistemas. Alguns métodos proporcionam modelos de alta ordem, vide por exemplo [Gar97], [Agu00] e [SS99]. Neste caso a redução de modelos é útil para obter descrições matemáticas de menor ordem sem perda significativa de precisão. A redução desses modelos tem recebido especial atenção nas últimas três décadas, já que um modelo reduzido que represente bem uma planta de alta ordem é muito interessante no ponto de vista do projeto de controladores. Modelos de baixa ordem são mais fáceis de se analisar e podem ser implementados como controladores digitais em problemas práticos, vide por exemplo [JK98]. Muitos outros exemplos práticos de modelos de sistemas lineares podem ser encontrados em [Che93], [Car00] e [Che99].

Muitos métodos de redução de modelos aparecem na literatura. Os que mais causaram impacto foram o método da realização balanceada [Moo81] e o método da norma Hankel [Glo84], que basicamente eliminam os estados menos significativos (associados aos menores valores singulares da chamada realização balanceada) para obter o modelo reduzido. Em geral, esses métodos não consideram a norma do erro entre o modelo reduzido e o original como critério de redução.

Mais recentemente, estão sendo usados para redução de modelos métodos de otimização baseados em desigualdades matriciais lineares - LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*) acopladas, usando as normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ como critério de desempenho. Como é bem conhecido, LMIs podem ser resolvidas por algoritmos de características polinomiais de convergência, altamente eficientes. Contudo, as formulações propostas são não-lineares e, em geral, são expressas na forma de BMIs, sendo resolvidas por algoritmos que não possuem convergência



assegurada [AP99a].

O algoritmo *branch and bound* tem sido utilizado para otimização global de alguns problemas de controle. Apesar de demandar um elevado esforço computacional, o algoritmo *branch and bound* obtém a solução global em tempo finito. A idéia principal do algoritmo consiste em subdividir o espaço paramétrico enquanto os limitantes superior e inferior para o ótimo global são calculados, usando uma heurística para a divisão.

A eficiência em se utilizar o algoritmo *branch and bound* neste tipo de problema pode ser observada em [Ass00], [AP99b] e [AP01], onde utiliza-se a norma $\mathcal{H}_2$ como função objetivo para a redução. Neste trabalho, é implementado um algoritmo *branch and bound* para resolver o problema de redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos lineares contínuos e discretos no tempo. Utilizando representação em espaço de estados, a minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro entre o modelo original e o reduzido pode ser formulada como um problema de otimização na forma de BMIs. Para impor um limite para as variáveis matriciais utiliza-se uma relaxação retangular da região factível (não convexa). São mostradas condições que asseguram a convergência do algoritmo para o ótimo global em tempo finito.

No Capítulo 2 é feita uma apresentação do problema, iniciando com a descrição do problema propriamente dito, em forma de BMIs. Estas BMIs consistem em restrições de um problema de otimização cujo objetivo é a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro entre os modelos original e reduzido.

No Capítulo 3 é apresentado o algoritmo *branch and bound* como solução para o problema das BMIs. Para isso são utilizados limitantes inferiores e superiores encontrados através de otimizações descritas através de LMIs. O processo de busca do algoritmo forma regiões convexas para cada iteração do *branch and bound* que refinam sucessivamente o valor do ótimo global até uma precisão pré-estabelecida. É demonstrada a garantia de convergência do algoritmo em tempo finito para tal precisão.

No Capítulo 4 são mostrados dois métodos que auxiliam a redução do tempo de convergência do algoritmo *branch and bound*. O primeiro deles consiste em um critério de parada em que o limitante superior alcança um valor singular de Hankel do modelo original em específico antes que o limitante inferior chegue suficientemente próximo ao ótimo global. Como o limitante superior não pode ser menor que este valor singular, então ele representa o ótimo global ao "tocá-lo". O segundo método mostra que é possível reduzir o número de iterações do *branch and bound* forçando-se o modelo reduzido a uma forma canônica controlável ou observável, já que estas duas formas reduzem o número de variáveis e também de matrizes bilineares nas BMIs.

Finalizando, o Capítulo 5 expõe exemplos numéricos que ilustram a redução global de modelos usando a norma $\mathcal{H}_\infty$. São feitas comparações fundamentadas no número de iterações



de cada método apresentado, apresentando comentários das diferenças.



Capítulo 2

A Norma $\mathcal{H}_\infty$

2.1 Equacionamento da Norma $\mathcal{H}_\infty$

Um sinal $y(t)$ pode ser considerado pequeno se ele possuir pequenas magnitudes para todo $t > 0$, ou ainda, se o seu valor máximo absoluto é pequeno [BB91]. A norma $\mathcal{L}_\infty$, também chamada norma de pico, quantifica o quão pequeno é o valor máximo absoluto de um sinal no domínio do tempo e pode ser definida como:

$$\|y\|_\infty \triangleq \sup_{t \geq 0} |y(t)|$$

Para o caso de um vetor de sinais com l componentes, a norma $\mathcal{L}_\infty$ é definida por:

$$\|y\|_\infty \triangleq \max_{1 \leq i \leq l} \|y_i(t)\|_\infty = \sup_{t > 0} \max_{1 \leq i \leq l} |y_i(t)|.$$

Este conceito pode ser aplicado a sistemas dinâmicos lineares. Um sistema dinâmico é “pequeno” caso sua função de transferência $H(s)$ possua pequenas magnitudes em todas as frequências. A norma $\mathcal{H}_\infty$ quantifica esta medida e para sistemas SISO é definida por:

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega > 0} |H(j\omega)|.$$

Para sistemas MIMO, a norma $\mathcal{H}_\infty$ é definida por:

$$\|H\|_\infty \triangleq \sup_{\omega > 0} \sigma_{\max}(H(j\omega)).$$

Mais do que medir o valor máximo absoluto de um sistema dinâmico na frequência, a norma $\mathcal{H}_\infty$ pode ser usada como medida de desempenho na redução de sistemas dinâmicos [Ass00].



2.2 Formulação da Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Contínuos

Considere o sistema dinâmico próprio $H(s)$ estável, representado na forma de espaço de estados (A, B, C, D) :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ supostamente conhecidas. A matriz de transferência do sistema é dada por $H(s) = C(s\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$.

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema (A, B, C, D) relaciona-se com a existência de uma matriz P definida positiva através do chamado *Bounded Real Lemma* (veja por exemplo [BGFB94]):

$$\|H\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \exists P = P' > 0 :$$

$$\begin{bmatrix} A'P + PA + \gamma^{-2}C'C & PB + \gamma^{-2}C'D \\ B'P + \gamma^{-2}D'C & \gamma^{-2}D'D - \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (2.1)$$

Usando o complemento de Schur e definindo $\mu \triangleq \gamma^2$, a equação (2.1) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} -A'P - PA & -PB & C' \\ -B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & D & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0$$

No Apêndice A é formalizado o complemento de Schur. Com isso, o cálculo da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema pode ser realizado através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -A'P - PA & -PB & C' \\ -B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & D & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \\ & P > 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

ou, na forma dual:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -AQ - QA' & -QC' & B \\ -CQ & \mathbf{I} & D \\ B' & D' & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \\ & Q > 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

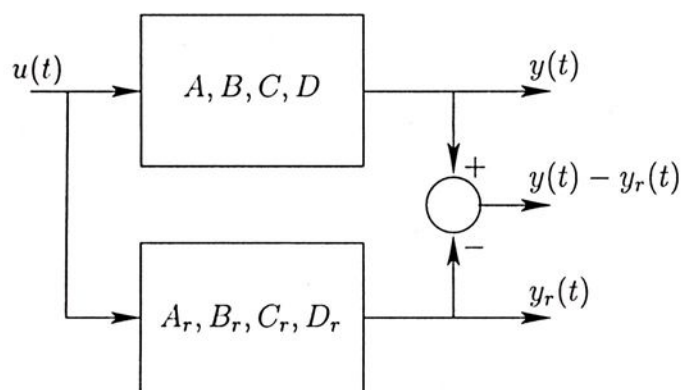


Figura 2.1: Diagrama de blocos do erro de redução para sistemas próprios.

O problema de redução $\mathcal{H}_\infty$ ótima de modelos contínuos pode ser formulado como: encontre um sistema estável com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r, D_r)

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r u(t)$$

$$y_r(t) = C_r x_r(t) + D_r u(t)$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$, tal que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do modelo do erro de redução seja minimizada. A realização do erro é dada por:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (2.4)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do modelo do erro de redução pode ser formulada utilizando-se (2.2) e (2.4):

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -\tilde{A}'P - P\tilde{A} & -P\tilde{B} & \tilde{C}' \\ -\tilde{B}'P & \mathbf{I} & \tilde{D}' \\ \tilde{C} & \tilde{D} & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \\ & P > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Substituindo-se (2.4) em (2.5) e particionando-se a matriz P na forma

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

com $P_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P_{22} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $P_{12} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, tem-se

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - P_{12}A_r & -P_{11}B - P_{12}B_r & C' \\ -A_r'P_{12}' - P_{12}'A & -A_r'P_{22} - P_{22}A_r & -P_{12}'B - P_{22}B_r & -C_r' \\ -B'P_{11} - B_r'P_{12}' & -B'P_{12} - B_r'P_{22} & I & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.7)$$

Para uma ordem r fixa para o modelo reduzido, as variáveis do problema são A_r , B_r , C_r , D_r , μ e P , produzindo os termos bilineares $P_{12}A_r$, $P_{22}A_r$, $P_{12}B_r$ e $P_{22}B_r$. O problema de redução ótima de modelos está descrito na forma de BMIs. Nos capítulos posteriores é descrito um algoritmo de otimização global para este problema.

Note que a redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos também pode ser aplicada em sistemas estritamente próprios, ou seja, quando $D = 0$.

A formulação do problema na forma dual é dada por:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -AQ_{11} - Q_{11}A' & -AQ_{12} - Q_{12}A_r' & -Q_{11}C' + Q_{12}C_r' & B \\ -A_rQ_{12}' - Q_{12}'A' & -A_rQ_{22} - Q_{22}A_r' & -Q_{12}'C' + Q_{22}C_r' & B_r \\ -CQ_{11} + C_rQ_{12}' & -CQ_{12} + C_rQ_{22} & I & D - D_r \\ B' & B_r' & D' - D_r' & \mu I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.8)$$

2.3 Formulação da Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Discretos

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema discreto próprio $H(z)$, estável, representado na forma de espaço de estados (A, B, C, D) ,

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k) + D(k)$$

sendo $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ supostamente conhecidas, pode ser obtida através do seguinte problema de minimização, descrito na forma de LMIs [PTP97]:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} P & 0 & C' & A'P \\ 0 & I & D' & B'P \\ C & D & \mu I & 0 \\ PA & PB & 0 & P \end{bmatrix} \geq 0$$

$$P > 0 \quad (2.9)$$

A matriz de transferência do sistema discreto é dada por $H(z) = C(z\mathbf{I} - A)^{-1}B + D$. O problema ótimo de redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos discretos pode ser formulado como: encontre um sistema estável com ordem $r < n$, com representação em espaço de estados (A_r, B_r, C_r, D_r)

$$\begin{aligned}x_r(k+1) &= A_r x_r(k) + B_r u(k) \\ y_r(k) &= C_r x_r(k) + D_r u(k)\end{aligned}$$

sendo $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{r \times m}$, $C_r \in \mathbb{R}^{p \times r}$ e $D_r \in \mathbb{R}^{p \times m}$, tal que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do modelo do erro de redução seja minimizada. A realização do erro é dada por:

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A & \mathbf{0} & B \\ \mathbf{0} & A_r & B_r \\ \hline C & -C_r & D - D_r \end{array} \right] \quad (2.10)$$

Particionando-se P como em (2.6) e substituindo-se (2.10) em (2.9), tem-se

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a} \quad & \left[\begin{array}{cccccc} P_{11} & P_{12} & \mathbf{0} & C' & A'P_{11} & \dots \\ P'_{12} & P_{22} & \mathbf{0} & -C'_r & A'_r P'_{12} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & D' - D'_r & B'P_{11} + B'_r P'_{12} & \dots \\ C & -C_r & D - D_r & \mu \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots \\ P_{11}A & P_{12}A_r & P_{11}B + P_{12}B_r & \mathbf{0} & P_{11} & \dots \\ P'_{12}A & P'_{12}A_r & P'_{12}B + P'_{12}B_r & \mathbf{0} & P'_{12} & \dots \\ & & & \dots & AP_{12} & \\ & & & & A'_r P_{22} & \\ & & & & B'P_{12} + B'_r P_{22} & \\ & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & P_{12} & \\ & & & & P_{22} & \end{array} \right] \geq \mathbf{0} \\ & \left[\begin{array}{cc} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{array} \right] > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.11)$$

O problema está descrito na forma de BMIs; no capítulo posterior será descrito um algoritmo para a solução deste problema. A formulação do problema na forma dual é dada por:

$\gamma^2 = \min \mu$

$s.a$

$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & B & A Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & 0 & B_r & A_r Q'_{12} & \cdots \\ 0 & 0 & I & D - D_r & C Q_{11} - C_r Q'_{12} & \cdots \\ B' & B'_r & D' - D'_r & \mu I & 0 & \cdots \\ Q_{11} A' & Q_{12} A'_r & Q_{11} C' - Q_{12} C'_r & 0 & Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12} A' & Q_{22} A'_r & Q'_{12} C' - Q_{22} C'_r & 0 & Q'_{12} & \cdots \\ \cdots & A Q_{12} & \cdots & A_r Q_{22} & \cdots & \cdots \\ \cdots & C Q_{12} - C_r Q_{22} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & Q_{12} & \cdots & Q_{22} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

≥ 0

$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0$

(2.12)

Capítulo 3

O Algoritmo *Branch and Bound*

3.1 Introdução às BMIs

As LMIs são conjuntos de restrições convexas que, por possuírem funções objetivo também convexas, são eficientemente resolvidas computacionalmente (veja [VB00] para maiores detalhes). Desigualdades lineares, desigualdades lineares convexas, desigualdades de norma de matrizes e várias restrições da teoria de controle como desigualdades de Riccati e Lyapunov podem ser todas escritas em forma de LMIs. As LMIs são de grande valor para a solução de problemas em controle mas não são aplicáveis a todos eles. A maioria dos problemas em controle que não podem ser escritos em forma de LMIs podem ser representados por BMIs. A BMI foi introduzida por Safonov e seu grupo em 1994 [SGL94] e sua solução é computacionalmente muito mais complexa que a LMI. Apesar dos esforços para a produção de bons programas computacionais para a solução de problemas deste tipo, ainda não existem grandes aplicativos no mercado para a solução de BMIs com relativa complexidade. As BMIs são úteis na solução de problemas de análise de sistemas, de programação não-linear dentre outros e têm a seguinte forma geral:

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j H_{ij} > 0 \quad (3.1)$$

sendo que G_j e H_{ij} são matrizes simétricas de mesma dimensão que F_i , $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Uma BMI é uma LMI em x para um y fixo e uma LMI em y para um x fixo, e então é convexo em x e convexo em y separadamente. Os termos bilineares fazem o conjunto não ser simultaneamente convexo em x e y (veja [VB00] para maiores detalhes).



3.2 O Algoritmo *Branch and Bound*

Os algoritmos *Branch and Bound* têm sido extensivamente estudados na literatura de otimização não-linear e foram usados primeiramente no estudo do mínimo grau de estabilidade de sistemas dependentes de parâmetros [BBB91]. O nome *Branch and Bound* deriva do próprio procedimento: primeiro divide-se uma região em subregiões (“branch”) para então definir-se os limitantes da função objetivo em relação aos outros parâmetros dentro dessas subregiões (“bound”). Neste trabalho é abordado o algoritmo *Branch and Bound* cujos limitantes são encontrados pela restrição de um parâmetro a um ponto (limitante superior) e pela relaxação da conexão bilinear (limitante inferior).

O algoritmo *Branch and Bound* é ilustrado na Figura 3.1. Primeiro, são determinadas uma função relaxação inicial L_1 e uma função restrição inicial U_1 restringindo a função objetivo não convexa F , como ilustrado na Figura 3.1(a). Essas funções devem ser determinadas de forma a garantir que o mínimo global da função restrição seja maior que o mínimo global da região não convexa e que o mínimo global da função relaxação seja menor que o mínimo global da região não convexa. O domínio factível é então dividido em duas subregiões, à direita e à esquerda do ponto de divisão (SP) e novos limites inferiores (L_2, L_3) e limites superiores (U_2, U_3) são calculados. O ponto SP é o ponto médio do maior lado do hiper-retângulo. Se o valor mínimo do limite inferior for maior que o valor mínimo de qualquer limitante superior, essa região deve ser descartada pois o ótimo global não pertence a essa região. A Figura 3.1(b) ilustra este procedimento. Neste caso, o valor mínimo do limitante inferior L_3 , indicado por L , é maior que o valor mínimo do limitante superior U_2 , indicado por U . A Figura 3.1(c) ilustra a região descartada. Após, a região factível é dividida (Figura 3.1(d)) e o procedimento é repetido até que a diferença entre os limites superior e inferior seja menor que ϵ .

O algoritmo *branch and bound* proposto neste trabalho envolve a construção de uma árvore de busca com problemas de otimização descritos na forma de LMIs em cada nó (essas LMIs serão descritas na Seção 3.4). Apesar das LMIs serem eficientemente resolvidas, a manipulação do hiper-retângulo inicial $\mathcal{Q}$ requer uma heurística com a qual espera-se reduzir o número total de operações para resolver o problema, quando comparado com a divisão exaustiva do hiper-retângulo. A seguir, é apresentado o algoritmo *branch and bound*, sendo que os limitantes superior e inferior para o problema de redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos contínuos serão apresentados na Seção 3.4.

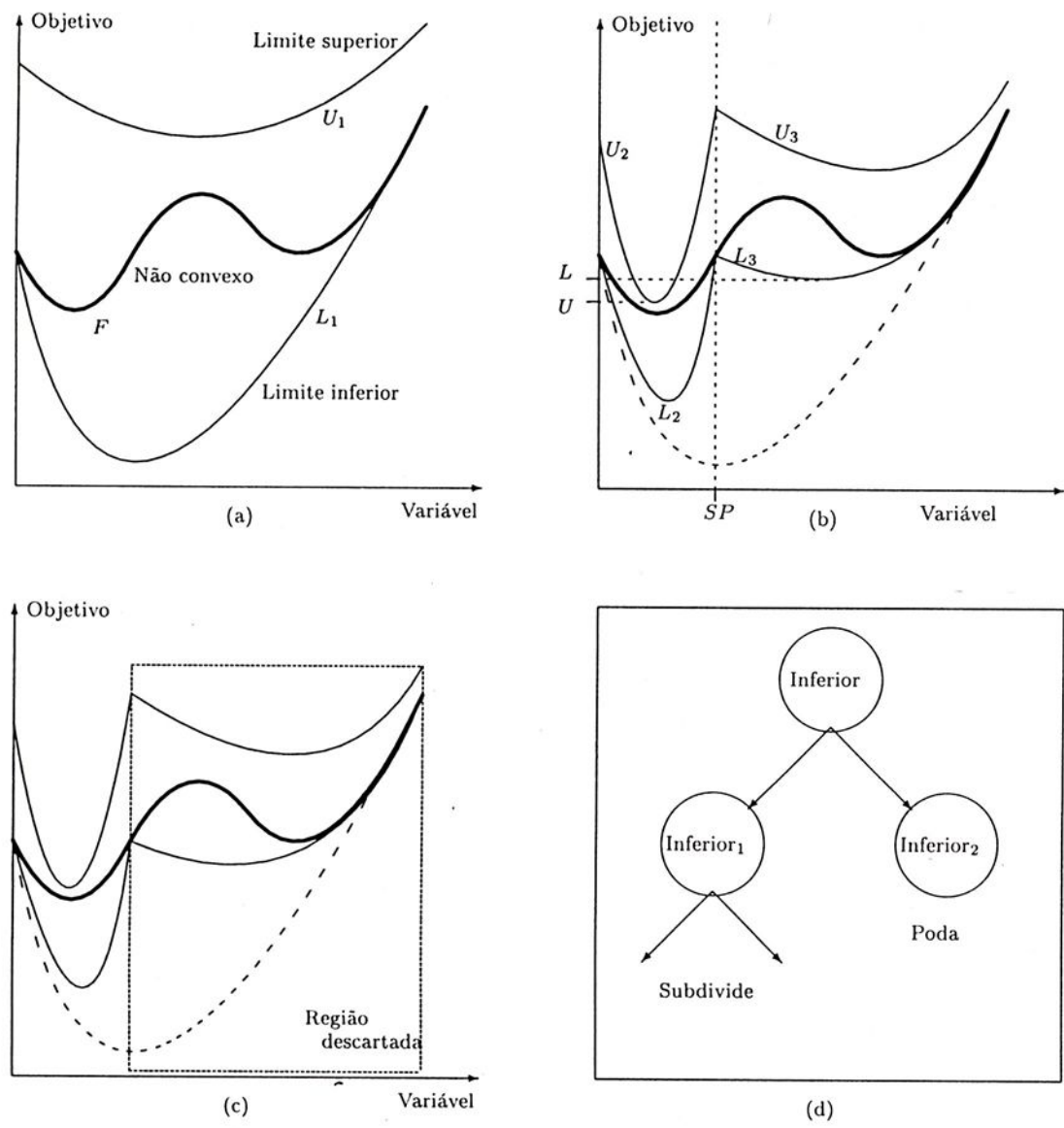


Figura 3.1: Interpretação gráfica do algoritmo *branch and bound*.

3.3 Procedimentos para o Cálculo do Ótimo Global Usando *Branch and Bound*

O algoritmo *Branch and Bound* começa por considerar uma região inicial cujos limitantes iniciais formam um hiper-retângulo¹ Q dentro do qual a região factível do problema está inserida (veja Figura 3.2). Esta região inicial é então dividida em subregiões menores e, considerando que o diâmetro (tratado aqui como a soma dos comprimentos dos lados do hiper-retângulo, não importando sua dimensão) dessas subregiões vai a zero, os limitantes superior e inferior são aproximados entre si, limitando uma região muito pequena dentro da qual está o ótimo global. O algoritmo é mostrado a seguir:

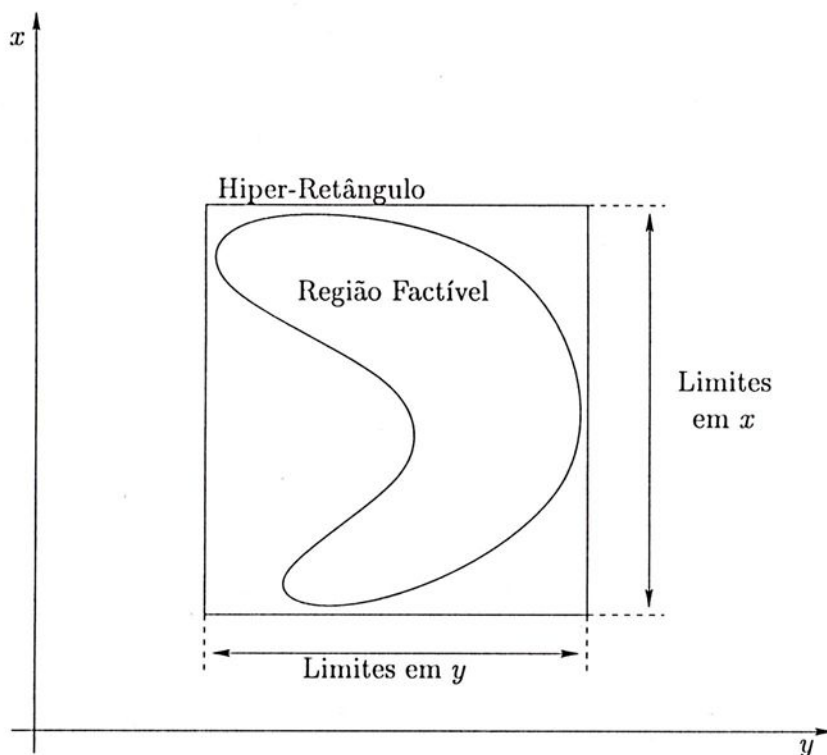


Figura 3.2: Hiper-retângulo englobando inteiramente a região factível do problema. É mostrada uma região em duas dimensões, mas pode ser dada em qualquer dimensão e, então, o hiper-retângulo terá também a mesma dimensão.

Algoritmo *Branch and Bound*

1. **Inicialização:** Selecione $k = 1$ e defina os limites das variáveis que formam o hiper-retângulo original Q ;

¹O hiper-retângulo representa uma região limitada e fechada formada fixando-se cada variável em dois pontos distintos e variando-se as outras. O procedimento feito com todas as variáveis uma a uma forma um hiper-retângulo, que se caracteriza por uma reta na visão unidimensional, um retângulo na bidimensional, um paralelepípedo na tridimensional e assim por diante.

2. **Corte e Limitantes:** Ache a subregião de menor limitante inferior e faça:

- (a) Faça o corte ao meio desta subregião e ache o limitante superior das duas novas subregiões;
- (b) Ache os limitantes inferiores de cada nova subregião;
- (c) Substitua a subregião cortada ao meio pelas duas novas subregiões;

3. **Limitantes Globais:**

- (a) Encontre o melhor limitante superior ($\bar{v}(k)$) escolhendo o menor dentre todos;
- (b) Encontre também o melhor limitante inferior ($\underline{v}(k)$) escolhendo o menor entre todos;

4. **Critério de Parada:** se a diferença $\bar{v}(k) - \underline{v}(k)$ for menor que uma tolerância pré-estabelecida, então PARE! A solução está entre os limitantes. Caso contrário, prossiga:

5. **Critério de Poda:**

- (a) Se o limitante inferior de uma subregião for infactível, elimine a subregião;
- (b) Se o limitante inferior de uma subregião for maior que ($\bar{v}(k)$), elimine a subregião;

6. $k=k+1$

7. Vá para 2

Considere, para exemplificação do método, o problema (3.2):

$$\begin{array}{ll} \min & x + y \\ \text{s.a.} & 1 \leq xy \leq 4 \\ & 0 \leq x \leq 6 \\ & 0 \leq y \leq 4 \end{array} \quad (3.2)$$

Este é um típico problema de minimização com restrições bilineares xy . Sua região factível é mostrada pela Figura 3.3.

Fica claro pela Figura 3.3 que não se trata de uma região convexa. Se assim fosse, bastaria uma minimização local para se obter o ótimo global. Primeiramente então, seguindo o algoritmo, escolhe-se uma variável que será cortada em duas. Neste exemplo, a variável y é escolhida e cortada ao meio, como mostra a Figura 3.4.

Agora a região inicial foi dividida ao meio em duas novas subregiões: a primeira tem como restrições superior e inferior $y = 2$ e $y = 0$, respectivamente, e a segunda, $y = 2$ e $y = 4$. O corte de uma das variáveis é sempre o primeiro passo do algoritmo e deverá ser executado sobre uma das variáveis que compõem o termo bilinear. Uma vez escolhida a variável que será

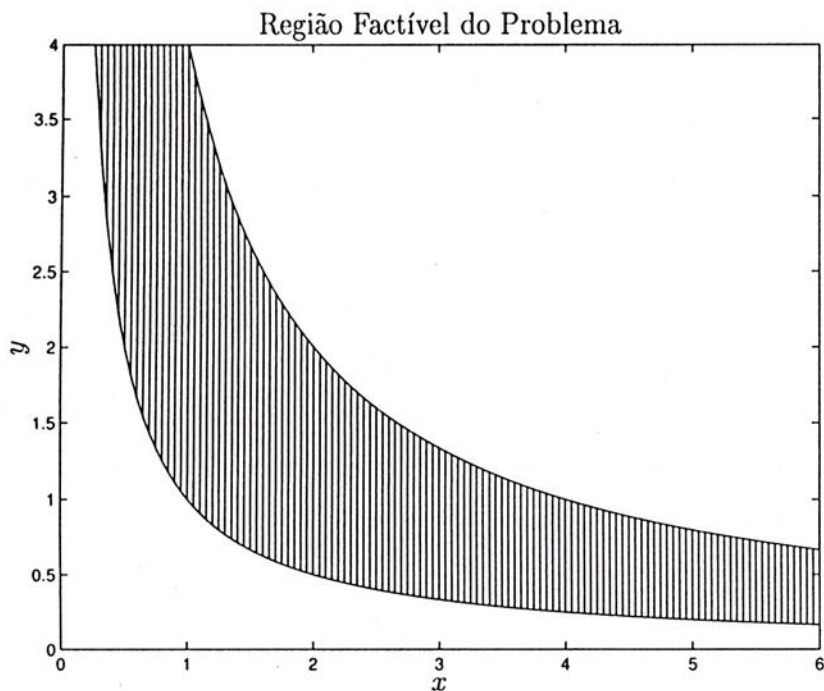


Figura 3.3: Região factível do problema (3.2).

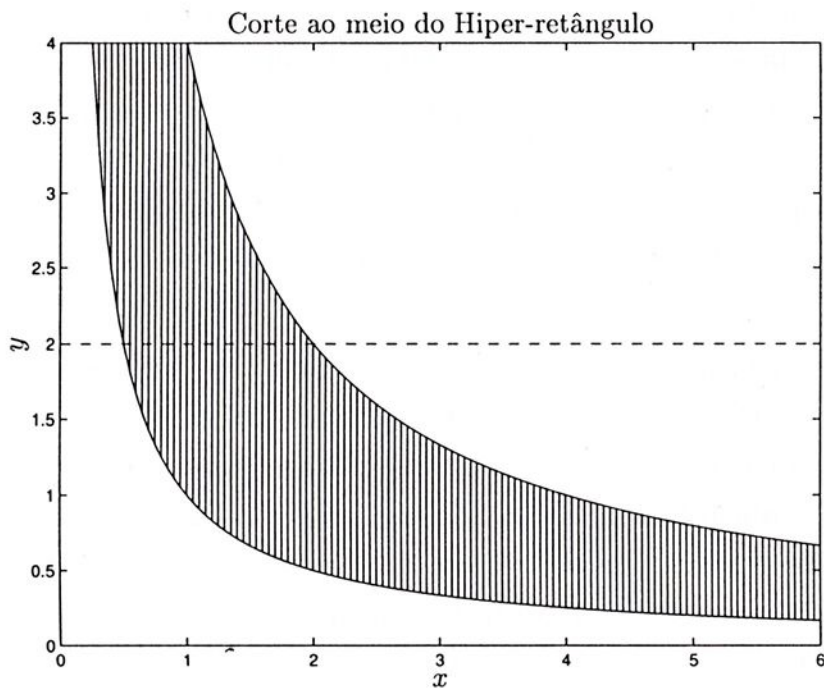


Figura 3.4: Corte ao meio na variável y .

cortada, então os cortes posteriores feitos ao longo do processo iterativo deverão recair sempre sobre a mesma variável do termo bilinear. Se houver mais de uma bilinearidade e, então, mais de uma variável a ser cortada no processo, então será escolhida para o corte sempre a variável com a maior diferença entre sua restrição superior e inferior (maior lado do hiper-retângulo). As variáveis livres do sistema não são cortadas. O segundo passo consiste no cálculo dos

limitantes superior e inferior de cada nova subregião formada pelo corte de uma das variáveis. O cálculo desses limitantes merece especial atenção e é descrito nas Seções 3.3.1 e 3.3.2.

3.3.1 O Limitante Superior

A idéia principal de se criar um limitante superior é definir um limite acima do qual o ótimo global de uma subregião não se encontra. O ótimo global dessa subregião está sempre abaixo ou, no máximo, sobre o limitante superior em um problema de minimização não convexo. Isso pode ser feito de uma forma relativamente simples: restringe-se uma variável a um ponto e resolve-se o novo problema de minimização com uma variável a menos. Considere o problema (3.2) restringindo-se a variável y a um valor $\hat{y}$ factível ($0 \leq \hat{y} \leq 4$). O novo problema será:

$$\begin{array}{ll} \min & x + \hat{y} \\ \text{s.a.} & 1 \leq x\hat{y} \leq 4 \\ & 0 \leq x \leq 6 \end{array} \quad (3.3)$$

O problema (3.3) é convexo e se apresenta na forma de uma LMI com matrizes $x, y \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$. Como referido na Seção 3.1, uma BMI é uma LMI em x para um y fixo e uma LMI em y para um x fixo, e então é convexa em x e y alternadamente. Tirando-se um grau de liberdade do sistema pela restrição de uma variável a um ponto, garante-se que o ótimo do problema (3.3), calculado facilmente através de uma otimização convexa representada por uma LMI, é sempre maior ou igual que o ótimo global do problema original (3.2), seja qual for a subregião em que se está inserido. O limitante superior se traduz neste caso a um valor de x encontrado no problema (3.3) somado ao valor de $\hat{y}$.

Concentrando-se novamente ao problema (3.2) em questão, o algoritmo *Branch and Bound* tratado aqui utiliza o ponto de corte como restrição da variável. No caso da Figura 3.4, o ponto de corte é $y = 2$ e, portanto, os limitantes superiores das duas novas subregiões serão calculado utilizando-se $\hat{y} = 2$. *A priori*, qualquer ponto factível dentro de uma subregião pode ser usado para o cálculo do limitante superior para a subregião em questão, a diferença porém é que, se a escolha recair sobre o ponto de corte, o limitante superior poderá valer para as duas novas subregiões simultaneamente, já que esse ponto é comum para ambas. Assim, faz-se apenas um cálculo para as duas novas subregiões, o que diminui o custo computacional.

3.3.2 O Limitante Inferior

Assim como foi definido um limitante superior acima do qual o ótimo global não se encontra, há a necessidade de se estabelecer um limitante inferior. O limitante inferior define um valor comprovadamente menor ou igual ao valor mínimo da função objetivo aplicada a qualquer valor factível dentro de uma subregião. Fornecidas as definições dos limitantes superior e



inferior pode-se afirmar, sem sombra de dúvidas, que o ótimo global encontra-se na região situada entre o menor limitante inferior e o menor limitante superior, dentre todas as sub-regiões. Assim percebe-se que, quanto maior for o número de iterações, mais o valor mínimo dos limitantes se aproximará e então a convergência ficará mais refinada.

O limitante inferior é a parte mais interessante no segundo passo do algoritmo *Branch and Bound*, pois nele se concentra toda a atenção em relação ao ótimo global e a factibilidade das subregiões. Com relação ao ótimo global, o valor mínimo dos limitantes inferiores converge para ele à medida que são feitas as iterações. Neste caso, o limitante superior serve apenas para que o número de iterações não se torne demasiado grande, confirmando uma boa proximidade do limitante inferior em relação à resposta global. Com relação à factibilidade, pode-se dizer que se o limitante inferior de uma subregião é infactível, então essa subregião não contém nenhum ponto da região factível original e, portanto, essa subregião é também infactível. O limitante superior não pode ser usado como critério de factibilidade, pois o corte poderá ser feito sobre uma parte que não contenha nenhum ponto factível do problema original. Para ilustrar este fato considere, por exemplo, a região factível do problema (3.2) com uma nova função objetivo $(y - x)$ que leve a um ponto de ótimo global $(x, y) = (6; 0,16667)$. Suponha também que, após um certo número de iterações a subregião que contenha o ótimo global esteja entre $y = 0$ e $y = 0,25$. Se o corte for feito em $\hat{y} = 0,125$ (veja Figura 3.5), chega-se à conclusão que o limitante superior é infactível, o que não implica que as duas novas subregiões sejam infactíveis. Se por esta razão for desprezado as duas novas subregiões por infactibilidade do limitante superior, o procedimento estará colocando fora de sua área de busca o ótimo global. Assim, ao ocorrer uma situação em que o limitante superior é infactível, tomam-se os valores relativos ao hiper-retângulo recentemente cortado e procede-se com o cálculo dos limitantes inferiores das subregiões adjacentes ao corte em questão. Deste modo, somente a subregião B na Figura 3.5 será desprezada, pois será infactível ao limitante inferior. O cálculo do limitante inferior, baseado na relaxação das conexões bilineares, fornece subsídios suficientes para que uma determinada subregião seja declarada infactível. Mais abrangente que o limitante superior, o cálculo do limitante inferior não se limita apenas a um ponto sobre uma variável, mas a um intervalo inteiro sobre ela. Através do método de relaxação a parte mais complexa de uma BMI, a conexão bilinear xy , é substituída por uma nova variável w . A BMI que até então encontrava-se na forma da equação (3.1), tornar-se-á uma LMI representada pela equação (3.4) abaixo:

$$F(x, y, x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} H_{ij} > 0 \quad (3.4)$$

Em termos práticos, ao se incluir ao problema um grau de liberdade pela inclusão de uma variável, permite-se ao novo problema a busca de um ponto mínimo sempre menor ou

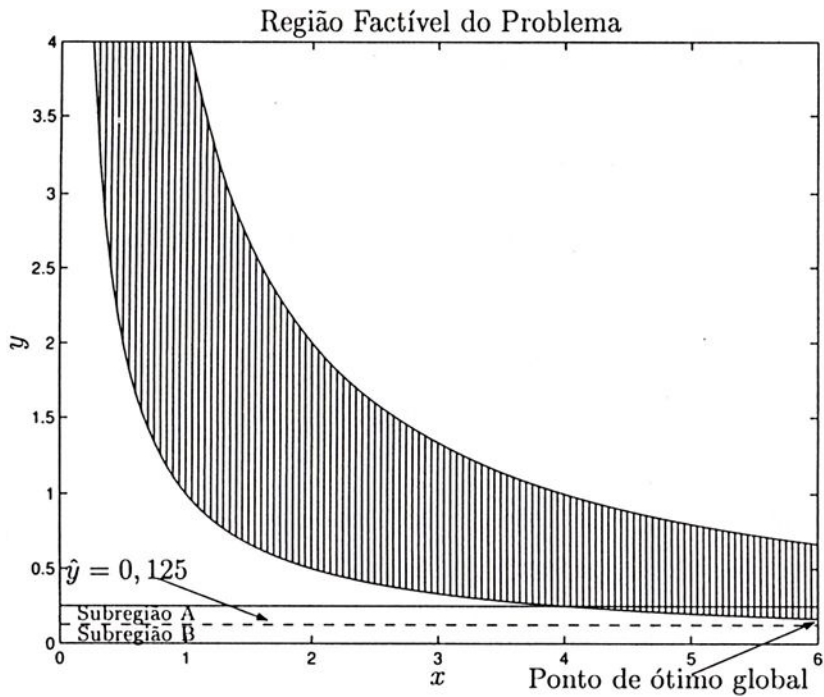


Figura 3.5: Linha de corte e subregiões.

igual ao mínimo do problema original dentro de um determinado intervalo. Na verdade, o valor de w será igual ao produto xy quando o menor limitante inferior tocar o ótimo global, e então o ótimo encontrado pela LMI (3.4) confunde-se com o ótimo da BMI (3.1). Alguns autores utilizam esse parâmetro como um critério de parada do método. Se $|w_{ij} - x_i y_j|$ é suficientemente pequeno, então (x_i, y_j) são pontos suficientemente próximos do ótimo global (veja [Ber97] para maiores detalhes). O algoritmo do presente trabalho tem como critério de parada a diferença entre os mínimos valores dos limitantes superiores e inferiores por se apresentar como algo mais usual na prática. Para uma ilustração de como é feito o método da relaxação das conexões bilineares, considere o conjunto de inequações (3.5) abaixo:

$$\begin{aligned} I_i^x &\leq x_i \leq S_i^x \\ I_j^y &\leq y_j \leq S_j^y \end{aligned} \tag{3.5}$$

sendo que I_i^x e I_j^y correspondem aos limites inferiores das restrições de x e y , respectivamente e S_i^x e S_j^y correspondem aos limites superiores das restrições das variáveis x e y , respectivamente. O conjunto de inequações (3.5) pode ser desmembrado segundo o conjunto de inequações (3.6) abaixo:

$$\begin{aligned} x_i - I_i^x &\geq 0 \\ S_i^x - x_i &\geq 0 \\ y_j - I_j^y &\geq 0 \\ S_j^y - y_j &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Combinando-se cada termo de variáveis distintas do conjunto (3.6) dois a dois:

$$\begin{aligned}
(x_i - I_i^x)(y_j - I_j^y) &\geq 0 \\
(x_i - I_i^x)(S_j^y - y_j) &\geq 0 \\
(S_i^x - x_i)(y_j - I_j^y) &\geq 0 \\
(S_i^x - x_i)(S_j^y - y_j) &\geq 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Fazendo $x_i y_j = w_{ij}$ no conjunto (3.7) e isolando-se w_{ij} tem-se:

$$\begin{aligned}
w_{ij} &\geq I_j^y x_i + I_i^x y_j - I_i^x I_j^y \\
w_{ij} &\leq S_j^y x_i + I_i^x y_j - I_i^x S_j^y \\
w_{ij} &\leq I_j^y x_i + S_i^x y_j - S_i^x I_j^y \\
w_{ij} &\geq S_j^y x_i + S_i^x y_j - S_i^x S_j^y
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Desta maneira, as conexões bilineares são representadas por w que tem seus limites definidos pelo conjunto de inequações (3.8) além das restrições bilineares em que se substituem os termos xy por w . Assim, para o problema (3.2), considerando-se o hiper-retângulo inicial, o limitante inferior é calculado por:

$$\begin{aligned}
\min \quad & x + y \\
\text{s.a.} \quad & 1 \leq w \leq 4 \\
& 0 \leq x \leq 6 \\
& 0 \leq y \leq 4 \\
& w \geq 0 \\
& w \leq 4x \\
& w \leq 6y \\
& w \geq 4x + 6y - 24
\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3.3 Critérios de Poda

Critérios de poda são condições impostas ao programa principal para que as subregiões infactíveis ou com soluções improváveis sejam eliminadas do critério de busca. Apesar de não representarem uma parte essencial do método, suas inclusões dentro do programa computacional implicam economia de memória e menor tempo de processamento. A poda por infactibilidade foi abordada na Seção 3.3.2, quando as regiões que não tinham limitante inferior factível eram descartadas. As podas por soluções improváveis foram abordadas na Seção 3.2 e ilustradas na Figura 3.1. Ao contrário da poda por infactibilidade, a poda por soluções improváveis não precisa necessariamente estar incluída no método *branch and bound*. Quando uma determinada subregião tem seu limitante inferior maior que o limitante superior de qualquer outra subregião, ela jamais será escolhida novamente para corte, visto que haverá sempre subregiões com menor limitante inferior. Porém, como o método *branch and bound* aumenta o número de subregiões a cada nova iteração, a economia de memória em um processo computacional pode ser imprescindível. Assim, qualquer subregião podada pode gerar uma lacuna na memória para abrigar informações de outra subregião válida.

3.3.4 Exemplo Comentado

O exemplo que segue é o mesmo que foi apresentado pelo problema (3.2) e é repetido abaixo:

$$\begin{array}{ll} \min & x + y \\ \text{s.a.} & 1 \leq xy \leq 4 \\ & 0 \leq x \leq 6 \\ & 0 \leq y \leq 4 \end{array}$$

Sua área factível é dada pela Figura 3.3 e o problema consiste em encontrar o mínimo global do sistema com uma diferença máxima entre os menores valores dos limitantes superiores e inferiores de 0,5.

Primeira Iteração

Na primeira iteração definem-se os valores iniciais para as variáveis. Representa-se aqui $\underline{x}_{ij}$ e $\underline{y}_{ij}$ como os limites inferiores de x e y sendo que i é a iteração e j a subregião, $\bar{x}_{ij}$ e $\bar{y}_{ij}$ representam os limites superiores, I_{ij} o limitante inferior e S_{ij} o limitante superior. Na primeira iteração tem-se apenas uma subregião (a original) e os valores das variáveis serão:

Subregião 1

$$\begin{array}{l} \bar{x}_{11} = 6 \\ \underline{x}_{11} = 0 \\ \bar{y}_{11} = 4 \\ \underline{y}_{11} = 0 \\ I_{11} = 0 \\ S_{11} = 10 \end{array}$$

O limitante I_{11} para o hiper-retângulo inicial é calculado considerando-se o menor valor da função objetivo quando aplicado todas as combinações dos valores extremos de x e y . Da mesma forma, S_{11} é o maior valor dentre todas as combinações dos extremos de x e y aplicados à função objetivo. Neste exemplo, é explícito os valores extremos de x e y , o que não ocorre sempre. Quando isso não acontece, é necessário o uso do método descrito na Seção 3.6.

Como $\min(S_{1j}) - \min(I_{1j}) = 10 > 0,5$, continuam-se as iterações.

Segunda Iteração

Na segunda iteração, faz-se o corte ao meio na variável y . As restrições $\bar{y}_{ij}$ e $\underline{y}_{ij}$ são encontrados diretamente quando procede-se cada corte. Os valores de S_{2j} e $\bar{x}_{2j}$ são obtidos do resultado do problema de otimização 3.3, com $\hat{y} = 2$ (ponto de corte). Da mesma maneira, I_{2j} e $\underline{x}_{2j}$ são obtidos do resultado do problema de otimização 3.2 relaxado, considerando-se as restrições $\bar{y}_{2j}$ e $\underline{y}_{2j}$ de cada subregião. Essas restrições fornecem um hiper-retângulo

dentro do qual os valores de (x, y) referentes ao mínimo local de cada subregião é encontrado. Assim, definida a subregião que contém o ótimo global, os valores (x, y) referentes a este ótimo encontram-se dentro do hiper-retângulo formado pela restrição das variáveis desta subregião, que deve ser a de menor limitante inferior. Assim tem-se $\bar{x}_{21} = \bar{x}_{22} = 0,5$ e $S_{21} = S_{22} = 2,5$. Procede-se então com os limitantes inferiores das duas subregiões:

Subregião 1

$$\begin{aligned}\bar{x}_{21} &= 0,5 \\ \underline{x}_{21} &= 0,5 \\ \bar{y}_{21} &= 2 \\ \underline{y}_{21} &= 0 \\ I_{21} &= 0,6667 \\ S_{21} &= 2,5\end{aligned}$$

Subregião 2

$$\begin{aligned}\bar{x}_{22} &= 0,5 \\ \underline{x}_{22} &= 0,25 \\ \bar{y}_{22} &= 4 \\ \underline{y}_{22} &= 2 \\ I_{22} &= 2,3333 \\ S_{22} &= 2,5\end{aligned}$$

Como $\min(S_{2j}) - \min(I_{2j}) = 1,8333 > 0,5$, continuam-se as iterações. Não há podas. Os limites das variáveis após a segunda iteração são mostrados na Figura 3.6. Note que na subregião 1, $\bar{x}_{21} = \underline{x}_{21}$, o que não significa que o algoritmo tenha atingido seu ótimo, pois os limitantes estão ainda muito distantes.

Terceira Iteração

Na terceira iteração, faz-se o corte ao meio do hiper-retângulo da subregião que possui o menor limitante inferior. No caso, como a subregião 1 possui menor limitante inferior, o corte é feito em $\hat{y} = 1$. Acha-se então os limitantes superiores para as duas novas subregiões. Assim tem-se $\bar{x}_{31} = \bar{x}_{32} = 1$ e $S_{31} = S_{32} = 2$. Procede-se então com os limitantes inferiores das duas novas subregiões e mantém-se o da subregião que não foi cortada:

Subregião 1

$$\begin{aligned}\bar{x}_{31} &= 1 \\ \underline{x}_{31} &= 1 \\ \bar{y}_{31} &= 1 \\ \underline{y}_{31} &= 0 \\ I_{31} &= 1,1667 \\ S_{31} &= 2\end{aligned}$$

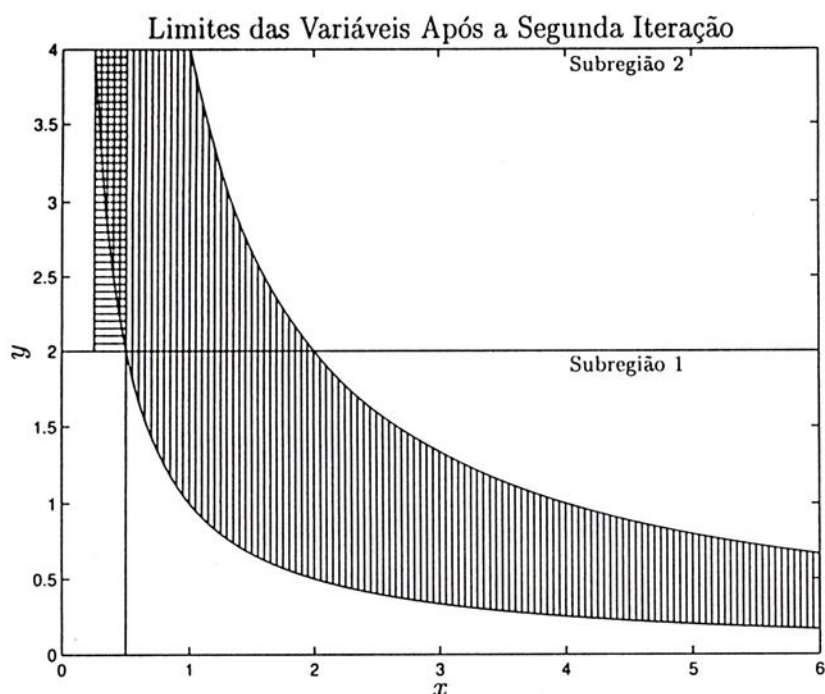


Figura 3.6: Limites das variáveis após execução da segunda iteração. O hiper-retângulo dos limites das variáveis correspondente a cada subregião está hachurado horizontalmente, e na subregião 1 os limites em x estão sobrepostos.

Subregião 2

$$\begin{aligned}\bar{x}_{32} &= 1 \\ \underline{x}_{32} &= 0,5 \\ \bar{y}_{32} &= 2 \\ \underline{y}_{32} &= 1 \\ I_{32} &= 1,5833 \\ S_{32} &= 2\end{aligned}$$

Subregião 3

$$\begin{aligned}\bar{x}_{33} &= 0,5 \\ \underline{x}_{33} &= 0,25 \\ \bar{y}_{33} &= 4 \\ \underline{y}_{33} &= 2 \\ I_{33} &= 2,3333 \\ S_{33} &= 2,5\end{aligned}$$

Como $\min(S_{3j}) - \min(I_{3j}) = 0,8333 > 0,5$, continuam-se as iterações. Pode-se notar nesta iteração que o limitante inferior da Subregião 3 ($I_{33} = 2,3333$) é maior que o limitante superior das Subregiões 1 e 2 ($S_{31} = S_{32} = 2$). Assim procede-se com a poda da Subregião 3. Cabe salientar que bastaria o limitante inferior da Subregião 3 ser maior que qualquer um dos limitantes superiores de qualquer subregião para que se fizesse a poda. Os limites das variáveis são mostrados na Figura 3.7.

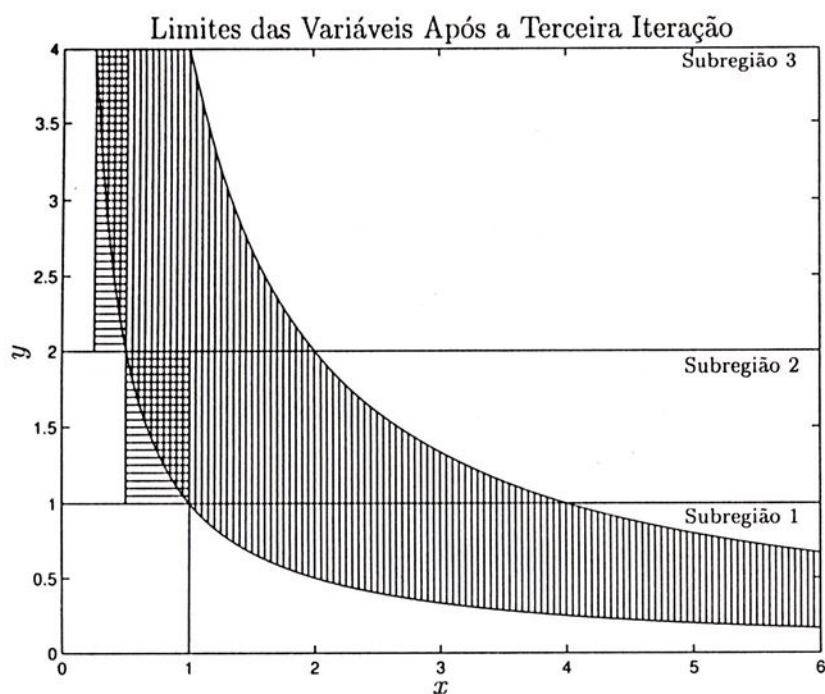


Figura 3.7: Limites das variáveis após execução da terceira iteração.

Quarta Iteração

Na quarta iteração, como na terceira, faz-se o corte ao meio do hiper-retângulo da sub-região que possua o menor limitante inferior. No caso, como a subregião 1 novamente possui menor limitante inferior, o corte é feito em $\hat{y} = 0,5$. Acha-se então os limitantes superiores para as duas novas subregiões. Assim tem-se $\bar{x}_{41} = \bar{x}_{42} = 2$ e $S_{41} = S_{42} = 2,5$. Procede-se então com os limitantes inferiores das duas novas subregiões, mantém-se o da subregião que não foi cortada e despreza-se a região podada:

Subregião 1

$$\begin{aligned}\bar{x}_{31} &= 2 \\ \underline{x}_{31} &= 2 \\ \bar{y}_{31} &= 0,5 \\ \underline{y}_{31} &= 0 \\ I_{31} &= 2,1667 \\ S_{31} &= 2,5\end{aligned}$$

Subregião 2

$$\begin{aligned}\bar{x}_{32} &= 2 \\ \underline{x}_{32} &= 1 \\ \bar{y}_{32} &= 1 \\ \underline{y}_{32} &= 0,5 \\ I_{32} &= 1,5833 \\ S_{32} &= 2,5\end{aligned}$$

Subregião 3

$$\begin{aligned}\bar{x}_{33} &= 1 \\ \underline{x}_{33} &= 0,5 \\ \bar{y}_{33} &= 2 \\ \underline{y}_{33} &= 1 \\ I_{33} &= 1,5833 \\ S_{33} &= 2\end{aligned}$$

Como $\min(S_{4j}) - \min(I_{4j}) = 0,41666 < 0,5$, encerram-se as iterações. O valor do ótimo global encontra-se entre o menor limitante superior e o menor limitante inferior da última iteração. Sendo assim, o ótimo está entre 1,5833 e 2. Os limites das variáveis são mostrados na Figura 3.8.

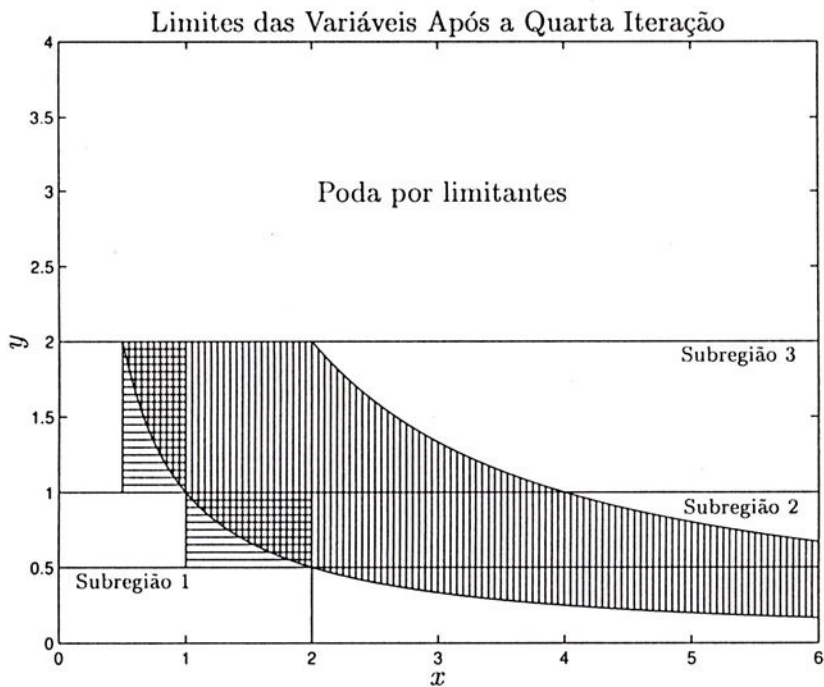


Figura 3.8: Limites das variáveis após execução da quarta iteração.

A evolução dos limitantes inferiores e superiores no decorrer das iterações é mostrado pela Figura 3.9.

Os valores de x e y correspondentes ao ótimo global encontram-se dentro do hiper-retângulo referente à subregião do menor limitante inferior da última iteração. Colocando-se uma precisão de 0,01 pode-se observar a evolução dos limitantes dada na Figura 3.10.

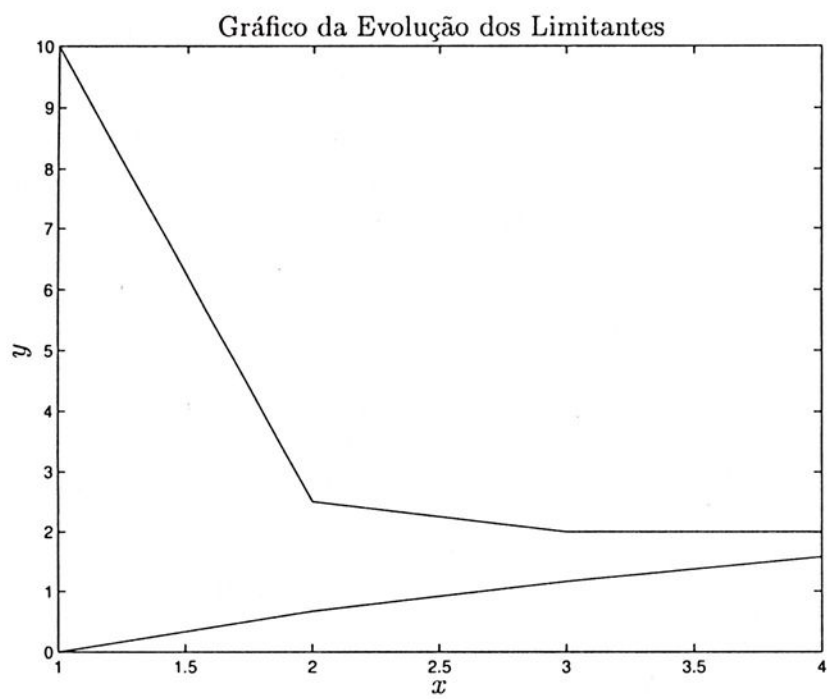


Figura 3.9: Evolução dos limitantes.

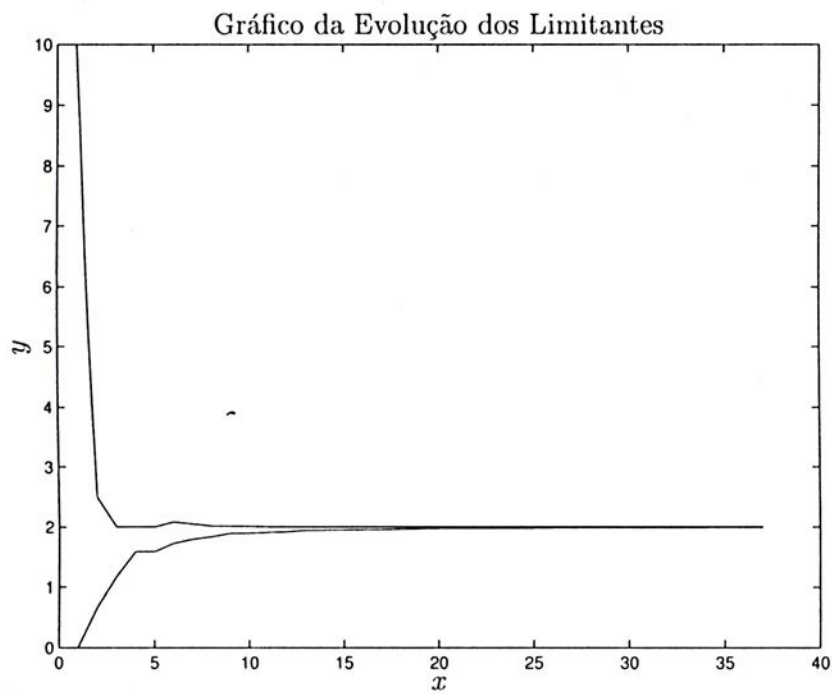


Figura 3.10: Evolução dos limitantes superior e inferior para uma precisão de 0,01.

3.4 Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Contínuos

3.4.1 Limitante Superior

Considere o problema de redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos contínuos formulado na Seção 2.2 pela equação (2.7), um limitante superior γ_U para a norma $\mathcal{H}_\infty$ (ao quadrado) do erro de redução pode ser obtido fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $B_r = \hat{B}_r$ em (2.7), isto é

$$\begin{aligned} \gamma_U^2 &= \min \mu \\ \text{s.a.} \quad &\begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - P_{12}\hat{A}_r & -P_{11}B - P_{12}\hat{B}_r & C' \\ -\hat{A}_r'P_{12}' - P_{12}'A & -\hat{A}_r'P_{22} - P_{22}\hat{A}_r & -P_{12}'B - P_{22}\hat{B}_r & -C_r' \\ -B'P_{11} - \hat{B}_r'P_{12}' & -B'P_{12} - \hat{B}_r'P_{22} & \mathbf{I} & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \\ &\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que, fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $B_r = \hat{B}_r$ em (2.7), uma restrição foi imposta em $\mathcal{Q}$ implicando que

$$\gamma_U(\hat{A}_r, \hat{B}_r) \geq \gamma_{(A_r, B_r) \in \mathcal{Q}} \quad (3.11)$$

Uma observação importante é que (3.10) é um problema de otimização descrito na forma de LMIs que pode ser eficientemente resolvido por procedimentos numéricos de características polinomiais de convergência [GNLC95]. Os valores iniciais de $\hat{A}_r$ e $\hat{B}_r$ são obtidos usando-se o valor do ponto de corte.

A forma dual do limitante superior pode ser feita seguindo o mesmo procedimento, diferindo apenas nas variáveis a serem fixadas. Assim, fixando-se $A_r = \hat{A}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (2.8) temos:

$$\begin{aligned} \gamma_U^2 &= \min \mu \\ \text{s.a.} \quad &\begin{bmatrix} -AQ_{11} - Q_{11}A' & -AQ_{12} - Q_{12}\hat{A}_r' & -Q_{11}C' + Q_{12}\hat{C}_r' & B \\ -\hat{A}_r'Q_{12}' - Q_{12}'A' & -\hat{A}_r'Q_{22} - Q_{22}\hat{A}_r' & -Q_{12}'C' + Q_{22}\hat{C}_r' & B_r \\ -CQ_{11} + \hat{C}_r'Q_{12}' & -CQ_{12} + \hat{C}_r'Q_{22} & \mathbf{I} & D - D_r \\ B' & B_r' & D' - D_r' & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \\ &\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.4.2 Limitante Inferior

Um limitante inferior para o problema de redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos formulado pela equação (2.7) pode ser obtido através da relaxação das restrições, criando-se novas variáveis que re-

presentem os termos bilineares, ou seja, definindo-se $W_1 = P_{12}A_r$, $W_2 = P_{12}B_r$, $W_3 = P_{22}A_r$ e $W_4 = P_{22}B_r$ na equação (2.7), obtendo-se

$$\gamma_L^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - W_1 & -P_{11}B - W_2 & C' \\ -W_1' - P_{12}'A & -W_3' - W_3 & -P_{12}'B - W_4 & -C_r' \\ -B'P_{11} - W_2' & -B'P_{12} - W_4' & I & D' - D_r' \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}' & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.13)$$

Claramente, a equação (3.13) representa um problema relaxado quando comparado com a equação (2.7), implicando que

$$\gamma_{(A_r, B_r) \in \mathcal{Q}} \geq \gamma_L \quad (3.14)$$

Assim como o limitante superior, o limitante inferior dado por (3.13), é um problema de otimização via LMI que pode ser eficientemente resolvido. O limitante inferior, portanto, deve ser representado pelas LMIs (3.13) em conjunto com as inequações (3.8), que devem ser feitas para cada bilinearidade escalar contida nas matrizes W_1 , W_2 , W_3 e W_4 . A formulação dual do limitante inferior pode ser construída fazendo-se $W_1 = Q_{12}A_r'$, $W_2 = Q_{12}C_r'$, $W_3 = Q_{22}A_r'$ e $W_4 = Q_{22}C_r'$ na equação (2.8), e é representada por:

$$\gamma_L^2 = \min \mu$$

$$s.a \begin{bmatrix} -AQ_{11} - Q_{11}A' & -AQ_{12} - W_1 & -Q_{11}C' + W_2 & B \\ -W_1' - Q_{12}'A' & -W_3' - W_3 & -Q_{12}'C' + W_4 & B_r \\ -CQ_{11} + W_2' & -CQ_{12} + W_4' & I & D - D_r \\ B' & B_r' & D' - D_r' & \mu I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.15)$$

3.5 Redução $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Discretos

3.5.1 O Limitante Superior

O limitante superior para a redução de modelos discretos segue o mesmo procedimento da redução de modelos contínuos: restringe-se as matrizes A_r e B_r em valores fixos e procede-se com a solução da LMI resultante. Deste modo, fazendo-se $A_r = \hat{A}_r$ e $B_r = \hat{B}_r$ em (2.11) tem-se:

$$\begin{aligned}
 \gamma_U^2 = \min \quad & \mu \\
 \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & C' & A'P_{11} & \cdots \\ P'_{12} & P_{22} & 0 & -C'_r & \hat{A}'_r P'_{12} & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & D' - D'_r & B'P_{11} + \hat{B}'_r P'_{12} & \cdots \\ C & -C_r & D - D_r & \mu \mathbf{I} & 0 & \cdots \\ P_{11}A & P_{12}\hat{A}_r & P_{11}B + P_{12}\hat{B}_r & 0 & P_{11} & \cdots \\ P'_{12}A & P_{22}\hat{A}_r & P'_{12}B + P_{22}\hat{B}_r & 0 & P'_{12} & \cdots \\ & & & \cdots & AP_{12} & \\ & & & & \hat{A}'_r P_{22} & \\ & & & & B'P_{12} + \hat{B}'_r P_{22} & \\ & & & & 0 & \\ & & & & P_{12} & \\ & & & & P_{22} & \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

A formulação dual segue o mesmo procedimento, desta vez fazendo-se $A_r = \hat{A}_r$ e $C_r = \hat{C}_r$ em (2.12):

$$\begin{aligned}
 \gamma_U^2 = \min \quad & \mu \\
 \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & B & AQ_{11} & \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & 0 & B_r & \hat{A}_r Q'_{12} & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & D - D_r & CQ_{11} - \hat{C}_r Q'_{12} & \cdots \\ B' & B'_r & D' - D'_r & \mu \mathbf{I} & 0 & \cdots \\ Q_{11}A' & Q_{12}\hat{A}'_r & Q_{11}C' - Q_{12}\hat{C}'_r & 0 & Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12}A' & Q_{22}\hat{A}'_r & Q'_{12}C' - Q_{22}\hat{C}'_r & 0 & Q'_{12} & \cdots \\ & & & \cdots & AQ_{12} & \\ & & & & \hat{A}_r Q_{22} & \\ & & & & CQ_{12} - \hat{C}_r Q_{22} & \\ & & & & 0 & \\ & & & & Q_{12} & \\ & & & & Q_{22} & \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.5.2 O Limitante Inferior

O limitante inferior também é feito nos moldes do caso contínuo, isto é, relaxando-se as matrizes bilineares. Portanto, definindo-se $W_1 = P_{12}A_r$, $W_2 = P_{12}B_r$, $W_3 = P_{22}A_r$ e $W_4 = P_{22}B_r$ na equação (2.11), obtendo-se

$$\begin{aligned}
 \gamma_L^2 = \min \quad & \mu \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 & C' & A'P_{11} & \cdots \\ P'_{12} & P_{22} & 0 & -C'_r & W'_1 & \cdots \\ 0 & 0 & I & D' - D'_r & B'P_{11} + W'_2 & \cdots \\ C & -C_r & D - D_r & \mu I & 0 & \cdots \\ P_{11}A & W_1 & P_{11}B + W_2 & 0 & P_{11} & \cdots \\ P'_{12}A & W_3 & P'_{12}B + W_4 & 0 & P'_{12} & \cdots \\ \cdots & AP_{12} & & & & \\ \cdots & W'_3 & & & & \\ \cdots & B'P_{12} + W'_4 & & & & \\ \cdots & 0 & & & & \\ \cdots & P_{12} & & & & \\ \cdots & P_{22} & & & & \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

No caso dual, faz-se $W_1 = Q_{12}A'_r$, $W_2 = Q_{12}C'_r$, $W_3 = Q_{22}A'_r$ e $W_4 = Q_{22}C'_r$ na equação (2.12) obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 \gamma_L^2 = \min \quad & \mu \\
 \text{s.a} \quad & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & B & AQ_{11} & \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & 0 & B_r & W'_1 & \cdots \\ 0 & 0 & I & D - D_r & CQ_{11} - W'_2 & \cdots \\ B' & B'_r & D' - D'_r & \mu I & 0 & \cdots \\ Q_{11}A' & W_1 & Q_{11}C' - W_2 & 0 & Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12}A' & W_3 & Q'_{12}C' - W_4 & 0 & Q'_{12} & \cdots \\ \cdots & AQ_{12} & & & & \\ \cdots & W'_3 & & & & \\ \cdots & CQ_{12} - W'_4 & & & & \\ \cdots & 0 & & & & \\ \cdots & Q_{12} & & & & \\ \cdots & Q_{22} & & & & \end{bmatrix} \geq 0 \\
 & \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Da mesma forma que no caso contínuo, cada bilinearidade escalar contida dentro das matrizes W_1 , W_2 , W_3 e W_4 , deve ser restrita ao conjunto de inequações (3.8).

3.6 Construção do Hiper-Retângulo Inicial $\mathcal{Q}$

O problema de redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos não impõe restrições naturais às variáveis do problema, que são os elementos das matrizes A_r , B_r , C_r , D_r , μ , P (ou Q , no caso dual), W_1 , W_2 , W_3



e W_4 . Para construir a região de busca, definida pelo hiper-retângulo $\mathcal{Q}$, uma nova região relaxada pode ser obtida resolvendo-se $2N_t$ problemas de otimização via LMIs, sendo N_t o número total de variáveis (veja [MF97] para mais detalhes). Denotando $x \in \mathbb{R}^{N_t}$ o vetor de todas as variáveis matriciais (exceto A_r e B_r (C_r , no caso dual), resolva para $i = 1, \dots, N_t$

$$\begin{array}{ll} \max & \text{ou} \quad \min \quad x_i \\ \text{s.a} & \text{(LMI Relaxada)} \end{array}$$

sendo que LMI relaxada pode ser (3.13), (3.15), (3.18) ou (3.19), dependendo do problema em questão. Com este procedimento obtêm-se, $x_{i_{\min}} \leq x_i \leq x_{i_{\max}}$, para todo $x_i \in \mathbf{x}$.

Os valores máximo e mínimo dos elementos das matrizes A_r e B_r (C_r , no caso dual) são obtidos em função dos vetores $x_{\min}$ e $x_{\max}$.

3.7 Análise da Convergência

Para que o algoritmo *branch and bound* minimize γ é necessário a existência de duas funções, γ_L e γ_U , sobre a região $\mathcal{Q}$, tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

C1. γ_L é um limitante inferior e γ_U um limitante superior para γ , isto é,

$$\gamma_L \leq \gamma \leq \gamma_U$$

para todo hiper-retângulo $\mathcal{Q}$.

C2. Seja $\text{Size}(\mathcal{Q})$ o comprimento do maior lado do hiper-retângulo $\mathcal{Q}$. Quando $\text{Size}(\mathcal{Q}) \rightarrow 0$, $\gamma_U(\mathcal{Q}) - \gamma_L(\mathcal{Q}) \rightarrow 0$ uniformemente, isto é, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$, tal que,

$$\text{Size}(\mathcal{Q}) \leq \delta \Rightarrow \gamma_U(\mathcal{Q}) - \gamma_L(\mathcal{Q}) \leq \epsilon$$

Claramente, γ_L definido pelas equações (3.13), (3.15), (3.18) e (3.19); e γ_U definidos pelas equações (3.10), (3.12), (3.16) e (3.17) satisfazem as condições **C1** e **C2**. A condição **C1** segue imediatamente das equações (3.11) e (3.14); se o maior lado de $\mathcal{Q}$ é iterativamente reduzido pelo algoritmo, a condição **C2** também é satisfeita. Assim, as condições **C1** e **C2** são satisfeitas e portanto, o algoritmo converge para o ótimo global em um tempo finito (veja [BBB91]).



Capítulo 4

Novos Métodos para Melhorar o Tempo de Convergência

4.1 Introdução

Já foi visto que o método *Branch and Bound* descrito para a otimização global em redução de modelos utilizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ assegura a convergência ao ótimo global em tempo finito. Esse tempo de convergência depende de alguns fatores: o tamanho da região de busca, a ordem do sistema a ser reduzido e a ordem do sistema reduzido a que se deseja. Em relação ao tamanho da região de busca, pode-se dizer que quanto maior essa região, maior será o tempo de convergência. Na prática, essa região é limitada fazendo-se uma restrição ao máximo valor de cada parâmetro descrito na Seção 3.6. Os limites de cada parâmetro podem, algumas vezes, ser ilimitados, o que obriga o projetista a definir um raio máximo a que cada variável pode alcançar. Essa restrição, por sua vez, é arbitrariamente definida pelo projetista que deve estipular valores que não ultrapassem muito o limite real. Se essa região definida for muito pequena, o problema de otimização será degradado e então o valor obtido pode não corresponder ao ótimo global. Na prática, normalmente ocorre que no decorrer das iterações o menor valor do limitante inferior dentre todas as regiões ultrapassa numericamente o menor valor do limitante superior, indicando assim parâmetros pouco relaxados. Se o projetista definir valores muito relaxados para os parâmetros, o problema de otimização poderá convergir alternando-se a cada iteração para mais de uma realização válida do modelo global, penalizando sobremaneira o tempo de convergência. Uma maneira de se contornar o problema de convergência é fixando-se o modelo reduzido global a uma realização conveniente. Nas Seções 4.3.1 e 4.3.2, serão descritos métodos para se restringir os modelos reduzidos a realizações controlável ou observável. Pode-se dizer que, como o sistema reduzido, assim como o original, é estável e de realização mínima, então pode-se obter realizações na forma canônica controlável ou observável para este modelo.

Outro método que pode ser aplicado para diminuir o número de iterações é fazer uso



dos valores singulares de Hankel como critério de parada. Na Seção 4.2 é demonstrada uma maneira de fazer uso deste valor para se terminar mais rapidamente o algoritmo *branch and bound*, sem que para isso se perca a garantia de convergência ao ótimo global.

4.2 O Uso dos Valores Singulares de Hankel como Critério de Parada

A principal vantagem em se utilizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ como critério de redução global de modelos reside no uso dos valores singulares de Hankel do modelo original no critério de parada do algoritmo. Em [ZDG96] descreve-se que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro entre os modelos original e reduzido, representada por $\|H - H_r\|_\infty$, tem como limitante inferior um valor singular de Hankel do modelo original, como descrito a seguir:

$$\|H - H_r\|_\infty \geq \sigma_{r+1}(H) \quad (4.1)$$

sendo σ_i o i -ésimo valor singular de Hankel referente à $H(s)$. Os valores singulares de Hankel $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_n$ são colocados em ordem decrescente. O que sempre se observa no algoritmo *branch and bound* aplicado à redução de modelos é que o limitante superior converge mais rapidamente que o inferior, mas o ótimo global só aparecerá com a aproximação de ambos. Em alguns casos, o limitante superior é tal que o modelo reduzido gerado por ele representa uma norma $\mathcal{H}_\infty$ tal que $\|H - H_r\|_\infty \leq \sigma_{r+1}(H) + \epsilon$, ϵ suficientemente pequeno. Essa condição é suficiente para se concluir que o ótimo global foi obtido com precisão ϵ . Neste caso não há a necessidade da confirmação desse valor pelo limitante inferior, o que reduz o número de iterações no problema. Vale salientar que nem sempre a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro no ponto de ótimo global atinge o valor $\sigma_{r+1}(H)$, não sendo esta, portanto, uma condição necessária ao ótimo global.

Outro ponto importante em uma redução de modelos utilizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ é que pode-se ainda fazer uso dos valores singulares de Hankel para encontrar previamente um máximo valor para a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução. Em [ZDG96], descreve-se que o valor máximo da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução pode ser encontrado usando os valores singulares do modelo original como segue:

$$\|H - H_r\|_\infty \leq 2 \cdot (\sigma_{r+1}(H) + \sigma_{r+2}(H) + \dots + \sigma_n(H)) \quad (4.2)$$

Esse limitante superior máximo definido pela equação (4.2) tem pouca utilidade na melhora do tempo de convergência, mas pode ajudar o projetista a estabelecer metas para uma redução, podendo optar por modelos reduzidos de ordem mais elevada, conforme critérios de projeto.

4.3 Usando Formas Canônicas - Caso Contínuo no Tempo

4.3.1 Reduzindo o Sistema Usando o Método Primal $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Controlável

Considere um sistema reduzido de ordem r estável próprio de realização mínima. Este sistema pode ser descrito na forma canônica controlável em espaço de estados (veja [Oga97] para maiores detalhes) fazendo-se (para sistemas SISO):

$$A_r = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_r = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{r-1} \ c_r], \quad D_r = d_1.$$

O método proposto também pode ser aplicado diretamente ao caso MIMO. Ao se optar por reduzir um sistema a uma realização canônica controlável uma vantagem é imediatamente notada: o número de variáveis é substancialmente reduzido. A matriz A_r , inicialmente com r^2 variáveis passa a ter r variáveis e a matriz B_r passa de r variáveis para uma matriz com elementos constantes. Outra vantagem de extrema importância é imposta pela forma canônica controlável ao método primal $\mathcal{H}_\infty$: como a matriz B_r tem agora elementos constantes, reduz-se também o número de matrizes bilineares na equação (2.7). Isto proporciona um limitante inferior menos relaxado e menor número de parâmetros a serem cortados no processo iterativo do *Branch and Bound*. Note que a forma canônica controlável seria menos eficiente se aplicada ao dual $\mathcal{H}_\infty$ descrito pela equação (2.8), pois como a matriz C_r é composta de termos variáveis, não seria possível a eliminação das matrizes bilineares. Este problema será discutido mais adiante na Seção 4.3.2.

Para o caso da redução à forma canônica controlável com o método primal $\mathcal{H}_\infty$, duas bilinearidades matriciais são verificadas: $P_{12}A_r$ e $P_{22}A_r$. Como as restrições mostradas em (3.8) para que o limitante inferior convirja só podem ser aplicadas a variáveis escalares, faz-se necessário exprimir as bilinearidades matriciais em forma de vários termos com bilinearidades escalares. Considere a bilinearidade matricial $P_{12}A_r$, descrita abaixo em forma de termos escalares:

$$\begin{aligned}
P_{12}A_r &= \begin{bmatrix} P_{12}(1,1) & \cdots & P_{12}(1,r) \\ P_{12}(2,1) & \cdots & P_{12}(2,r) \\ P_{12}(3,1) & \cdots & P_{12}(3,r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{12}(n,1) & \cdots & P_{12}(n,r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_r(1,1) & A_r(1,2) & \cdots & A_r(1,r) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{12}(1,1)A_r(1,1) + P_{12}(1,2) & P_{12}(1,1)A_r(1,2) + P_{12}(1,3) & \cdots \\ P_{12}(2,1)A_r(1,1) + P_{12}(2,2) & P_{12}(2,1)A_r(1,2) + P_{12}(2,3) & \cdots \\ P_{12}(3,1)A_r(1,1) + P_{12}(3,2) & P_{12}(3,1)A_r(1,2) + P_{12}(3,3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ P_{12}(n,1)A_r(1,1) + P_{12}(n,2) & P_{12}(n,1)A_r(1,2) + P_{12}(n,3) & \cdots \\ \cdots & P_{12}(1,1)A_r(1,r) \\ \cdots & P_{12}(2,1)A_r(1,r) \\ \cdots & P_{12}(3,1)A_r(1,r) \\ \vdots & \vdots \\ \cdots & P_{12}(n,1)A_r(1,r) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Considere agora a matriz $\mathbf{T}$ definida como:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

A bilinearidade matricial $P_{12}A_r$ pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned}
P_{12}A_r &= \begin{bmatrix} P_{12}(1,1)A_r(1,1) & P_{12}(1,1)A_r(1,2) & \cdots & P_{12}(1,1)A_r(1,r) \\ P_{12}(2,1)A_r(1,1) & P_{12}(2,1)A_r(1,2) & \cdots & P_{12}(2,1)A_r(1,r) \\ P_{12}(3,1)A_r(1,1) & P_{12}(3,1)A_r(1,2) & \cdots & P_{12}(3,1)A_r(1,r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{12}(n,1)A_r(1,1) & P_{12}(n,1)A_r(1,2) & \cdots & P_{12}(n,1)A_r(1,r) \end{bmatrix} + P_{12}\mathbf{T} \\
&= \bar{W}_1 + P_{12}\mathbf{T}
\end{aligned}$$

Note que cada termo da matriz $\bar{W}_1$ representa uma bilinearidade escalar, que pode ser definida segundo a equação (3.8). Isso facilita a descrição dos termos bilineares que podem ser representados isolando-se cada termo da matriz $\bar{W}_1$. Neste caso, a descrição do limitante superior não se altera. Já o limitante inferior deve agora ser representado pelas seguintes LMIs:

$$\begin{aligned}
\gamma_L &= \min \mu \\
s.a \quad &\begin{bmatrix} -A'P_{11} - P_{11}A & -A'P_{12} - \bar{W}_1 - P_{12}T & \cdots \\ -\bar{W}'_1 - T'P'_{12} - P'_{12}A & -B'_rP'_{12} - P_{12}B_r & \cdots \\ -B'P_{11} - \bar{W}'_2 - T'P_{22} & -B'P_{12} - B'_rP_{22} & \cdots \\ C & -C_r & \cdots \\ \cdots & -P_{11}B - \bar{W}_2 - P_{22}T & C' \\ \cdots & -P'_{12}B - P_{22}B_r & -C'_r \\ \cdots & I & D' - D'_r \\ \cdots & D - D_r & \mu I \end{bmatrix} \geq 0 \\
&\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

sendo que $\bar{W}_2$ segue a mesma definição de $\bar{W}_1$ para a bilinearidade $P_{22}A_r$.

4.3.2 Reduzindo o Sistema Usando o Método Dual $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Observável

Comentou-se na seção anterior que a redução na forma canônica controlável não traria muitos benefícios se aplicada ao método dual $\mathcal{H}_\infty$ pelo fato de não haver a eliminação de termos matriciais bilineares. Essa eliminação porém pode ser feita se for aplicada ao dual $\mathcal{H}_\infty$ a forma canônica observável. Considere novamente um sistema reduzido de ordem r estável próprio de realização mínima. Este sistema pode ser descrito na forma canônica observável em espaço de estados (veja [Oga97] para maiores detalhes) fazendo-se (para sistemas SISO):

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{r-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}$$

$$C_r \triangleq [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1], \quad D_r = d_1.$$

Como na forma canônica observável o valor de C_r é fixo, elimina-se duas bilinearidades matriciais no problema dual $\mathcal{H}_\infty$, da mesma maneira que a forma canônica controlável eliminava duas bilinearidades matriciais para o problema primal $\mathcal{H}_\infty$. O número de variáveis envolvidas na solução do dual $\mathcal{H}_\infty$ com a forma canônica observável é o mesmo que no primal $\mathcal{H}_\infty$ com a forma canônica controlável, assim como o número de bilinearidades matriciais. Espera-se, portanto, que não haja grandes disparidades em relação ao desempenho de tempo de convergência entre ambos os métodos.

O problema de redução feito com a forma canônica observável no método dual $\mathcal{H}_\infty$ apresenta duas bilinearidades matriciais: $Q_{12}A'_r$ e $Q_{22}A'_r$. Considere a bilinearidade matricial $Q_{12}A'_r$:

$$\begin{aligned}
 Q_{12}A'_r &= \begin{bmatrix} Q_{12}(1,1) & \cdots & Q_{12}(1,r) \\ Q_{12}(2,1) & \cdots & Q_{12}(2,r) \\ Q_{12}(3,1) & \cdots & Q_{12}(3,r) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{12}(n,1) & \cdots & Q_{12}(n,r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ A_r(1,r) & A_r(2,r) & \cdots & A_r(r,r) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} Q_{12}(1,r)A_r(1,r) & Q_{12}(1,1) + Q_{12}(1,r)A_r(2,r) & \cdots \\ Q_{12}(2,r)A_r(1,r) & Q_{12}(2,1) + Q_{12}(2,r)A_r(2,r) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ Q_{12}(n,r)A_r(1,r) & Q_{12}(n,1) + Q_{12}(n,r)A_r(2,r) & \cdots \\ \cdots & Q_{12}(1,r-1) + Q_{12}(1,r)A_r(r,r) \\ \cdots & Q_{12}(2,r-1) + Q_{12}(2,r)A_r(r,r) \\ \ddots & \vdots \\ \cdots & Q_{12}(n,r-1) + Q_{12}(n,r)A_r(r,r) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Definindo $\mathbf{T}$ como em (4.3) a bilinearidade matricial $Q_{12}A'_r$ pode então ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 Q_{12}A'_r &= \begin{bmatrix} Q_{12}(1,r)A_r(1,r) & Q_{12}(1,r)A_r(2,r) & \cdots & Q_{12}(1,r)A_r(r,r) \\ Q_{12}(2,r)A_r(1,r) & Q_{12}(2,r)A_r(2,r) & \cdots & Q_{12}(2,r)A_r(r,r) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{12}(n,r)A_r(1,r) & Q_{12}(n,r)A_r(2,r) & \cdots & Q_{12}(n,r)A_r(r,r) \end{bmatrix} + Q_{12}\mathbf{T}' \\
 &= \bar{W}_1 + Q_{12}\mathbf{T}'
 \end{aligned}$$

Novamente cada termo da matriz $\bar{W}_1$ representa uma bilinearidade escalar, que pode ser limitada segundo a equação (3.8). A descrição do limitante superior também não se altera. Já o limitante inferior deve agora ser representado pelas seguintes LMIs:

$$\begin{aligned}
 \gamma^2 &= \min \mu \\
 \text{s.a.} \quad &\begin{bmatrix} -AQ_{11} - Q_{11}A' & -AQ_{12} - \bar{W}_1 - Q_{12}\mathbf{T}' & \cdots \\ -\bar{W}'_1 - \mathbf{T}Q'_{12} - Q'_{12}A' & -\bar{W}'_2 - \mathbf{T}Q_{22} - \bar{W}_2 - Q_{22}\mathbf{T}' & \cdots \\ -CQ_{11} + C_rQ'_{12} & -CQ_{12} + C_rQ_{22} & \cdots \\ B' & B'_r & \cdots \\ \cdots & -Q_{11}C' + Q_{12}C'_r & B \\ \cdots & -Q'_{12}C' + Q_{22}C'_r & B_r \\ \cdots & \mathbf{I} & D - D_r \\ \cdots & D' - D'_r & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \\
 &\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

sendo que $\overline{W}_2$ segue a mesma definição de $\overline{W}_1$ para a bilinearidade $Q_{22}A'_r$.

4.4 Usando Formas Canônicas - Caso Discreto no Tempo

4.4.1 Reduzindo o Sistema Usando o Método Primal $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Controlável

Considere um sistema discreto reduzido de ordem r estável próprio de realização mínima. Este sistema pode ser descrito na forma canônica controlável em espaço de estados (veja [FP80] para maiores detalhes) fazendo-se (para sistemas SISO):

$$A_r = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{r-1} & a_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_r = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{r-1} \ c_r], \quad D_r = d_1.$$

As vantagens de se reduzir um sistema discreto a uma realização canônica controlável utilizando o primal $\mathcal{H}_\infty$ são basicamente as mesmas do caso contínuo: redução das variáveis e das conexões bilineares. Nota-se que o método de se encontrar a forma canônica controlável de um sistema discreto é também o mesmo. Suprime-se aqui as explicações pertinentes às bilinearidades matriciais no caso discreto, pois são numericamente idênticas às do caso contínuo, descritas na Seção 4.3.1. O limitante inferior, considerando as notações dadas na Seção 4.3.1, pode então ser descrito por:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

s.a

P_{11}

P'_{12}

0

C

$P_{11}A$

$P'_{12}A$

P_{12}

P_{22}

0

$-C_r$

$\overline{W}_1 + P_{12}T$

$\overline{W}_2 + P_{22}T$

0

I

$D - D_r$

$P_{11}B + P_{12}B_r$

$P'_{12}B + P_{22}B_r$

0

$-C'_r$

$D' - D'_r$

μI

0

0

0

0

0

0

C'

$\overline{W}'_1 + T'P'_{12}$

$B'P_{11} + B'_rP'_{12}$

0

P_{11}

P'_{12}

AP_{12}

$\overline{W}'_1 + T'P'_{22}$

$B'P_{12} + B'_rP'_{22}$

0

P_{12}

P_{22}

≥ 0

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P'_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.6)$$

4.4.2 Reduzindo o Sistema Usando o Método Dual $\mathcal{H}_\infty$ e a Realização Canônica Observável

A possibilidade de se ter um sistema reduzido na forma canônica observável utilizando o método dual $\mathcal{H}_\infty$ é também válido para sistemas discretos, visto que há similaridades referentes às bilinearidades matriciais e método de obtenção da forma canônica observável. Considere assim o sistema SISO descrito na forma canônica observável em espaço de estados (veja [FP80] para maiores detalhes):

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_r \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{r-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_r \end{bmatrix}$$

$$C_r = [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1], \quad D_r = d_1.$$

As características do uso da forma canônica observável são as mesmas do caso contínuo. São também análogas as bilinearidades matriciais e o método a que se apresentam dentro dos limitantes. O limitante inferior para este caso pode ser descrito como:

$$\gamma^2 = \min \mu$$

$$s.a \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & B & AQ_{11} & \cdots \\ Q'_{12} & Q_{22} & 0 & B_r & \bar{W}_1 + \mathbf{T}Q'_{12} & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & D - D_r & CQ_{11} - C_r Q'_{12} & \cdots \\ B' & B'_r & D' - D'_r & \mu \mathbf{I} & 0 & \cdots \\ Q_{11}A' & \bar{W}_1 + Q_{12}\mathbf{T}' & Q_{11}C' - Q_{12}C'_r & 0 & Q_{11} & \cdots \\ Q'_{12}A' & \bar{W}_2 + Q_{22}\mathbf{T}' & Q'_{12}C' - Q_{22}C'_r & 0 & Q'_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & AQ_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \bar{W}_2 + \mathbf{T}Q'_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & CQ_{12} - C_r Q_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Q_{12} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & Q_{22} & \cdots \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.7)$$

Capítulo 5

Exemplos Numéricos

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos que ilustram a eficiência dos métodos apresentados. Para a obtenção dos gráficos, foram elaborados programas computacionais que não serão apresentados. Porém, alguns aspectos práticos na elaboração dos programas podem ser vistos no Apêndice B.

Os tempos de convergência dos algoritmos foram obtidos executando-se os programas em um micro-computador com as seguintes características básicas:

- Processador AMD Athlon Thunderbird de 1000 MHz;
- 384 MB de memória SDRAM 133 MHz;
- placa mãe ASUS A7V, Front Side Bus em 200 MHz.

Todos os exemplos numéricos aqui apresentados foram executados no Matlab 5.3, sob um sistema operacional Microsoft Windows NT4 - SP6. A única exceção foi a redução do modelo para ordem 2 no Exemplo 2, cujo programa foi executado no LMISol sob um sistema operacional Linux Red Hat 7.2.

5.1 Exemplo 1. Uso dos Valores Singulares de Hankel

O primeiro exemplo refere-se à redução $\mathcal{H}_\infty$ do modelo de um sistema dado por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,1000 & -0,8889 \\ 1,0000 & -0,1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,0000 \\ -1,0000 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1,0000 & -1,0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Os valores singulares de Hankel para (5.1) são: $\sigma_1 = 4,74370$ e $\sigma_2 = 4,68815$. O objetivo é obter um modelo de primeira ordem, isto é, $r = 1$. Neste caso, segundo (4.1), o menor



valor que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro entre os modelos pode chegar é $\sigma_2 = 4,68815$. A Figura 5.1 mostra a evolução dos limitantes inferior e superior da função γ , equações (3.13) e (3.10). Mostra também σ_2 que, no caso, foi alcançado pelo limitante superior em apenas 8 iterações (8,25 segundos), com precisão de 10^{-2} , enquanto o limitante inferior precisou de 2048 (35 minutos e 12 segundos) para chegar ao mesmo resultado. Assim, o algoritmo poderia parar em 8 iterações.

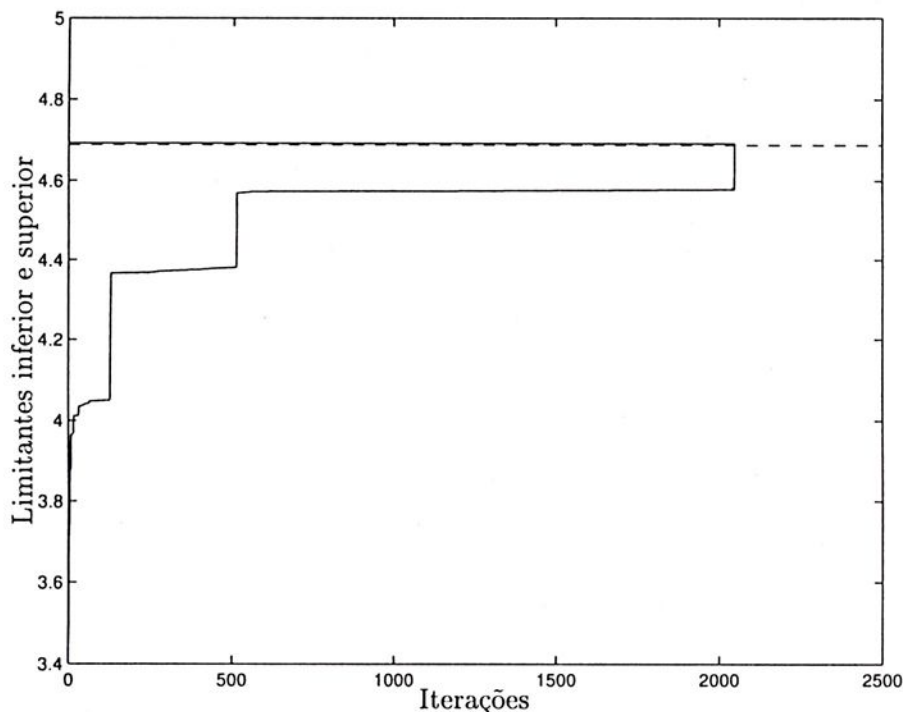


Figura 5.1: Evolução dos limitantes inferior e superior (raiz quadrada) para a redução $\mathcal{H}_\infty$ do modelo do Exemplo 1. O valor de σ_2 é representado pela linha tracejada.

O modelo reduzido resultante é dado por

$$\dot{x}(t) = -34,5020x(t) + 0,9988u(t)$$

$$y(t) = 315,9273x(t) - 4,3451u(t)$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ do modelo do erro de redução é 4,6919. Estes resultados mostram claramente que o número de iterações pode ser reduzido em 250 vezes [AMTP].

5.2 Exemplo 2: Utilizando a Forma Canônica Controlável

Considere o seguinte modelo dinâmico descrito em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,8615 & 0,6906 & -12,4086 \\ -0,2575 & -2,9221 & 14,2841 \\ 12,42510 & -14,2697 & -3,1102 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11,3803 \\ -6,8414 \\ 0,0000 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} -0,7293 & -3,3060 & -8,4363 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 4,9777u(t)$$

Trata-se de um modelo estável contínuo de ordem 3. Primeiramente, é feita uma redução para um modelo de ordem 1. O gráfico resultante mostrado na Figura 5.2 representa uma redução em que é usado o valor singular de Hankel como critério de parada, mas não é restrito a nenhuma forma canônica. Como via de comparação, o gráfico da Figura 5.3 foi construído usando-se o algoritmo que reduz a um modelo na forma canônica controlável.

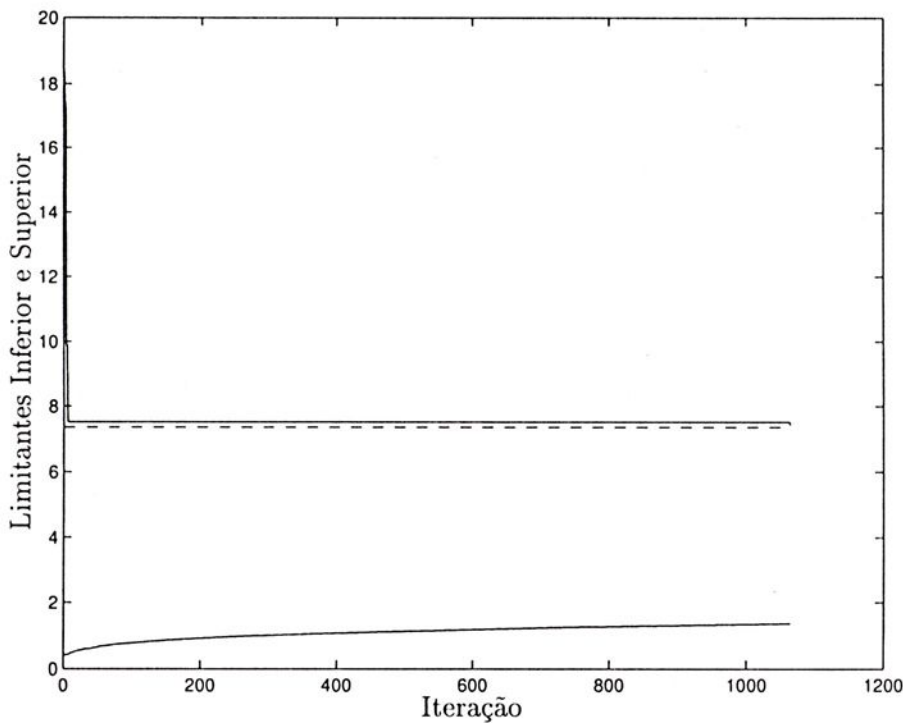


Figura 5.2: Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para uma redução a um modelo reduzido com realização genérica. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.

Foi considerado para ambos os problemas uma precisão de 1% do valor de singular de Hankel. No caso, considerando que o valor singular de Hankel é 7,3637, então a precisão estipulada é de 0,073637. O resultado foi que o algoritmo que reduz a um modelo genérico (Figura 5.2) retornou o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -11,7188x(t) + 50u(t) \\ y(t) &= -5,1792x(t) + 12,2485u(t) \end{aligned}$$

O número de iterações necessárias (alcançada pelo limitante superior ao valor singular de Hankel) foi de 1064 (24 minutos e 43 segundos) e a precisão alcançada foi de 0,0659.

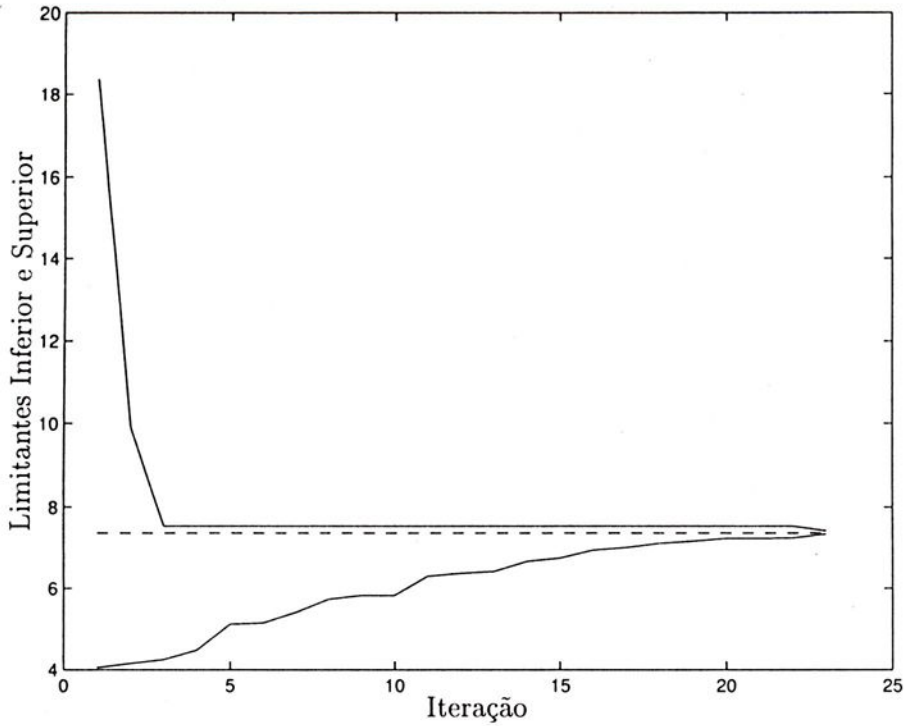


Figura 5.3: Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para uma redução a um modelo reduzido na forma canônica controlável. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.

O algoritmo que reduz a uma forma canônica controlável (Figura 5.3) retornou o seguinte modelo:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -11,7188x(t) + 1,0000u(t) \\ y(t) &= -258,9596x(t) + 12,2461u(t)\end{aligned}$$

Para este algoritmo o número de iterações necessárias (alcançada pelo limitante superior ao valor singular de Hankel) foi de 23 (34,9 segundos) e a precisão alcançada foi de 0,0568. Isso representa um ganho considerável de tempo, já que o algoritmo que reduz a uma forma canônica controlável foi um pouco mais de 46 vezes mais eficiente em termos de número de iterações. Considerando que quanto maior o número de divisões no espaço de busca gera um maior tempo computacional por iteração, a diferença de tempo de execução é consideravelmente menor no segundo caso. Esta diferença é ainda mais sensível quando se trata de problemas em que se quer reduzir para um modelo de ordem maior que 1. A redução de modelos para as formas canônicas controláveis/observáveis não torna o problema fácil para reduções de modelos para ordem maior que 1, mas pelo menos fica viável em implementações computacionais de menor desempenho.

Ainda para a redução do modelo para uma ordem $r = 1$, foi executado o programa de otimização local utilizando o primal $\mathcal{H}_\infty$ descrito em [Ass00] e a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução

obtida foi de 13,8452, comprovando assim uma grande diferença que justifica o maior tempo de processamento para uma otimização global.

O mesmo problema foi reduzido a um modelo na forma canônica controlável de ordem 2. O resultado é mostrado através do gráfico da Figura 5.4.

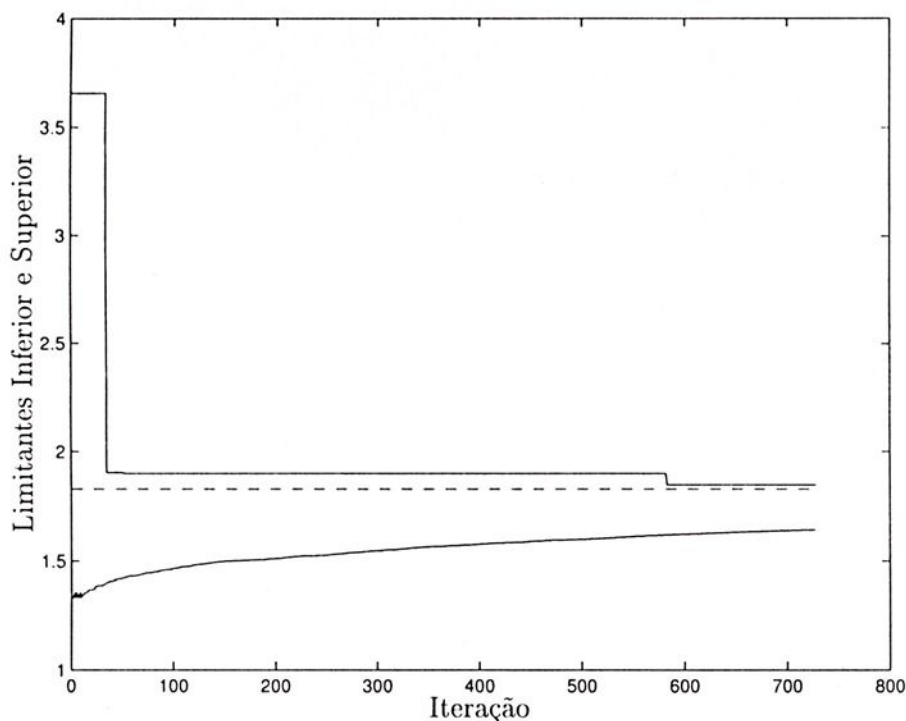


Figura 5.4: Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para uma redução a um modelo reduzido na forma canônica controlável de ordem 2. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.

Neste caso, a precisão foi também de 1% do valor singular de Hankel (1,8273). O número de iterações necessárias para que o limitante superior atingisse a precisão estipulada foi de 728 iterações (12 minutos e 39 segundos). A precisão alcançada foi de 0,0174 e o modelo resultante é mostrado em (5.2).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -8,8873 & -408,2215 \\ 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 77,7996 & -2450,8316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 3,1330u(t) \end{aligned} \quad (5.2)$$

O gráfico da Figura 5.5 dá uma idéia do comportamento da norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução para o modelo em questão em função de $A_r(1,1)$ e $A_r(1,2)$ em torno do ótimo global.

As respostas em frequência do sistema original e dos sistemas reduzidos de primeira e segunda ordens são mostrados na Figura 5.6.

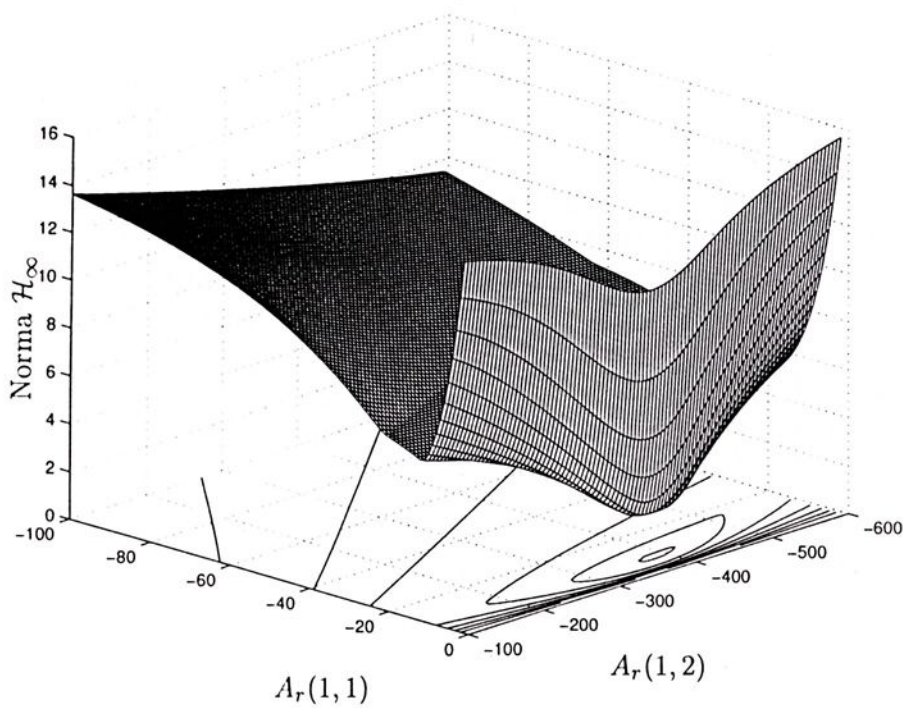


Figura 5.5: Gráfico e curvas de nível da norma H_∞ do erro de redução do modelo de ordem 3 para o modelo de ordem 2 em questão em função das variáveis $A_r(1,1)$ e $A_r(1,2)$.

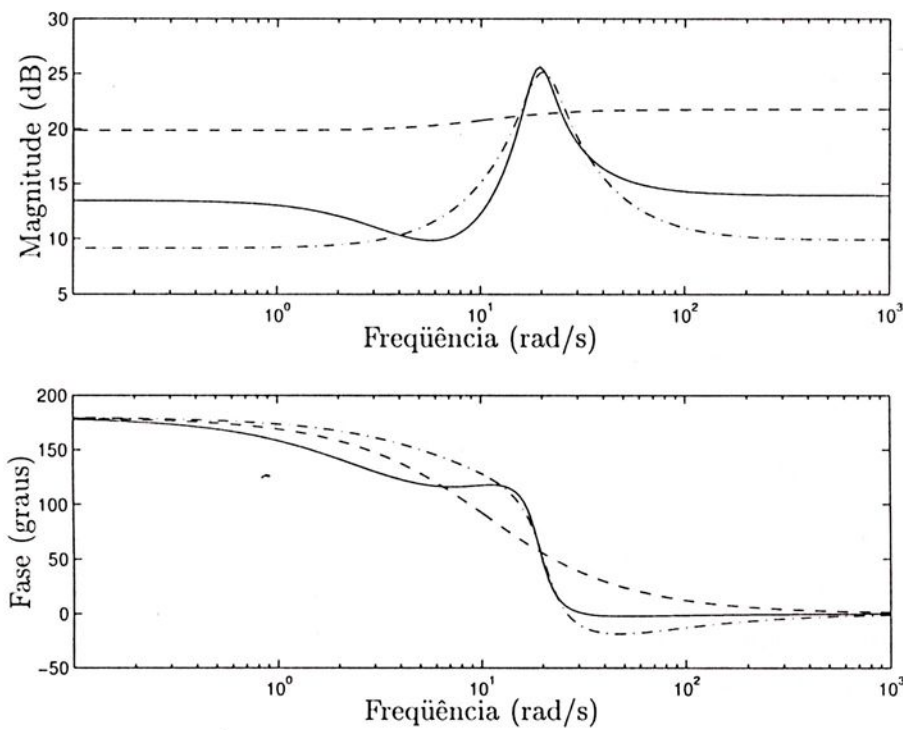


Figura 5.6: Resposta em frequência para os três modelos. Linha contínua representa o sistema original (ordem 3), linha tracejada o modelo de ordem 1 e o representado por traço-ponto o de ordem 2.

5.3 Exemplo 3: Redução em Modelos Discretos

Considere o modelo discreto estável descrito a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2530 & -0,2209 & 0,2379 & 0,4665 \\ -0,4174 & -0,1104 & 0,1985 & 0,0502 \\ 0,1476 & 0,3771 & 0,2762 & 0,3006 \\ -0,3564 & 0,1584 & -0,3980 & 0,4391 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4437 \\ -0,9499 \\ 0,0000 \\ 0,0000 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0,0000 & -0,2656 & -1,1878 & -2,2023 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + 0,0000u(k)$$

O resultado para uma redução a um modelo de ordem $r = 1$ é mostrado na Figura 5.7.

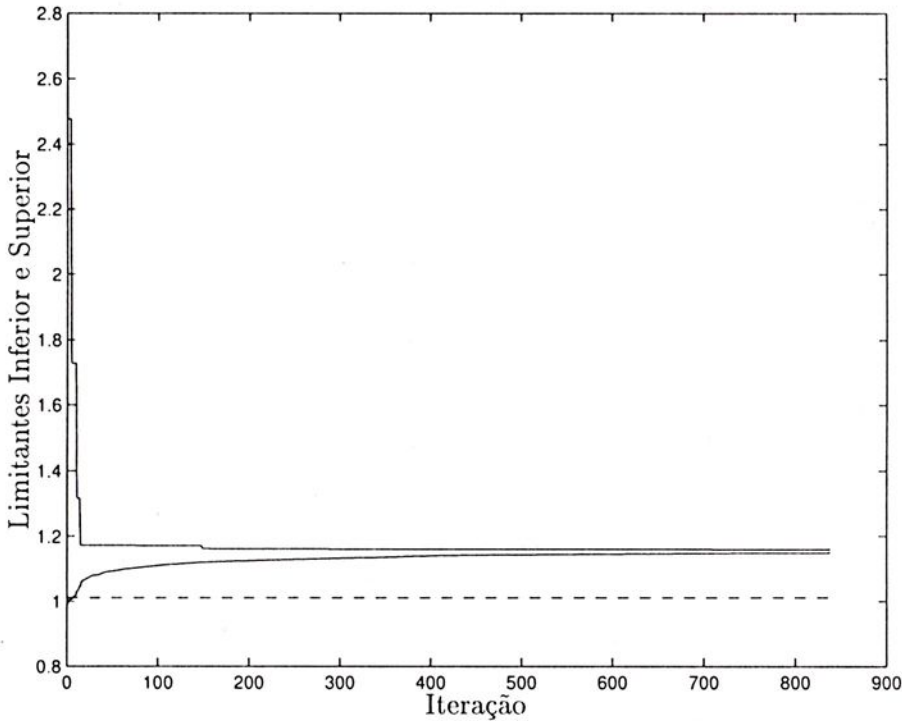


Figura 5.7: Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para o modelo reduzido discreto. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.

O algoritmo utilizado para a redução representada na Figura 5.7 não força o sistema reduzido a um modelo na forma canônica. É interessante notar que o comportamento dos limitantes na Figura 5.7 não levam ao valor singular de Hankel limite. É um caso mais difícil de ocorrer e pode ser observado em igual frequência para o caso contínuo no tempo. Ainda assim, neste caso, a convergência em tempo finito é assegurada, porém com um maior custo computacional. O modelo reduzido obtido com a redução é dado a seguir:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= 0,7422x_1(k) + 4,4000u(k) \\ y(k) &= 0,1774x_1(k) - 0,2218u(k)\end{aligned}$$

A precisão exigida do algoritmo foi de 0,010111 (1% do valor singular de Hankel), alcançada pela aproximação dos limitantes superior e inferior em 838 iterações (37 minutos e 39 segundos).

Ainda que o sistema globalmente reduzido não toque o limite imposto pelo valor singular de Hankel, é possível reduzir o número de iterações fazendo o modelo convergir para um sistema na forma canônica controlável. A Figura 5.8 ilustra a convergência dos limitantes para este caso.

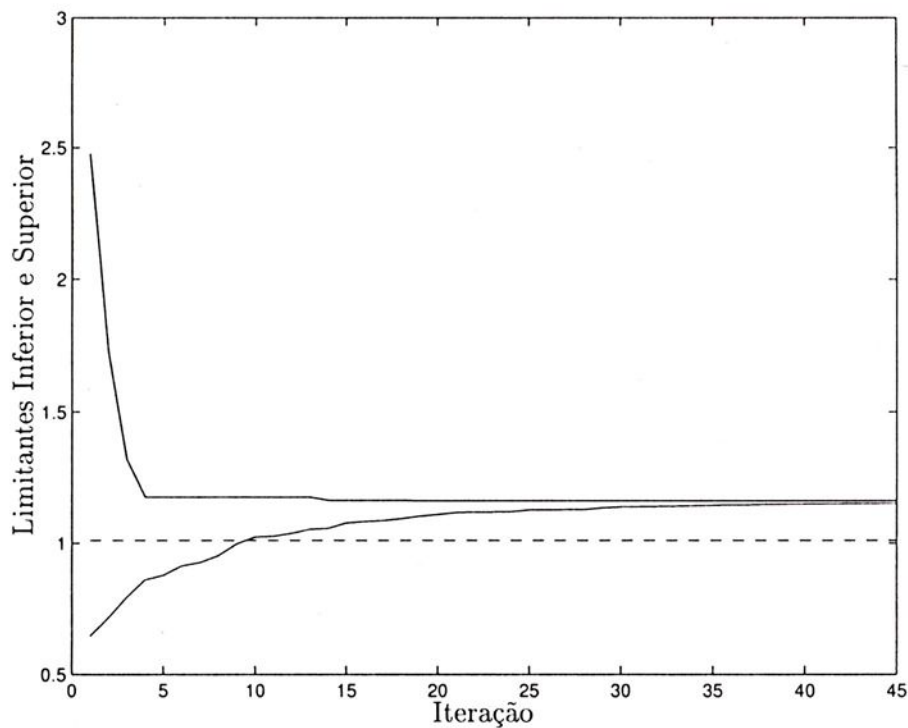


Figura 5.8: Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ dos limitantes inferior e superior para o modelo reduzido discreto na forma canônica controlável. A linha tracejada representa o valor singular de Hankel.

O modelo reduzido resultante é dado por:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= 0,7422x_1(k) + 1,0000u(k) \\ y(k) &= 0,7807x_1(k) - 0,2217u(k)\end{aligned}$$

A precisão exigida do algoritmo foi de 0,010111 (1% do valor singular de Hankel), alcançada pela aproximação dos limitantes superior e inferior em 45 iterações (1 minuto e 57

segundos), isto é, uma melhora de pouco mais de 18 vezes em relação ao número de iterações de uma otimização para um modelo genérico.



Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

O problema de redução global de modelos usando a norma $\mathcal{H}_\infty$ foi abordado neste trabalho. Para isso foi investigada e implementada a técnica de otimização não-linear *branch and bound* que possibilita a obtenção do ótimo global em tempo finito para uma dada precisão. O algoritmo *branch and bound* visto aqui envolve a construção de uma árvore de busca com problemas de otimização descritos na forma de LMIs em cada nó. Essas LMIs são eficientemente resolvidas. O grande custo computacional empregado neste tipo de problema pôde ser reduzido com dois métodos propostos neste trabalho. O primeiro envolve um valor singular de Hankel do modelo original como um limite inferior que a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução pode alcançar. Ao chegar suficientemente próximo deste valor, o limitante superior do *branch and bound* pode ser considerado o valor ótimo, sem que para isso se faça necessária a aproximação do limitante inferior. Este método termina mais rapidamente a execução do algoritmo, sem perder a garantia de convergência.

Outro método proposto neste trabalho e que também diminui o esforço computacional do *branch and bound* apóia-se no fato de que, se o algoritmo for forçado a convergir para um modelo na forma canônica controlável no caso de uma otimização pela norma $\mathcal{H}_\infty$ primal, ou na forma canônica observável no caso de uma otimização pela norma $\mathcal{H}_\infty$ dual, o algoritmo pode reduzir substancialmente o número de iterações necessárias para a convergência. Esta constatação deve-se ao fato que este procedimento reduz o número de variáveis e de bilinearidades matriciais no problema. Este método pode ser associado ao método em o que valor singular de Hankel como limite inferior é usado, reduzindo ainda mais o número de iterações. Foi mostrado ainda que ele reduz o número de iterações do *branch and bound* mesmo quando a norma $\mathcal{H}_\infty$ do erro de redução não converge para o valor singular de Hankel limite.

A otimização global em redução de modelos é ainda algo recente, e foi primeiramente apresentada à comunidade científica através do artigo [AP99b] em 1999. A partir deste momento um grande leque de possibilidades abriu-se para o problema de otimização global. O presente trabalho é uma extensão do primeiro artigo apresentado e constitui uma pequena parte do



que ainda pode ser feito nesta área. Uma visão estreita no vasto horizonte de possibilidades pode vislumbrar algumas aplicações futuras na área de otimização global. Dentre elas pode-se listar:

- Otimização global em redução de modelos usando as formas canônicas e a norma $\mathcal{H}_2$;
- Otimização global em redução de modelos para os casos $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_\infty$, contínuos ou discretos, com incertezas na planta;
- Otimização global em redução de modelos com ênfase em faixas específicas de frequência;
- Otimização global em redução de modelos utilizando outras normas diferentes do par $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$;
- Investigação de soluções abordando algoritmos mistos de otimização global e local, utilizando a otimização global para uma melhor inicialização da otimização local;
- Otimização global no problema de redução da ordem de plantas instáveis;
- Investigação de outras formas de otimização não-linear que podem ser aplicadas.



Referências Bibliográficas

- [Agu00] L. A. Aguirre. *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares*. Editora UFMG, 2000.
- [AMTP] E. Assunção, H. F. Marchesi, M. C. M. Teixeira, and P. L. D. Peres. Otimização global rápida para problemas de redução $\mathcal{H}_\infty$ de modelos. Aceito para Publicação no XIV Congresso Brasileiro de Automática, 2002.
- [AP99a] E. Assunção and P. L. D. Peres. A $\mathcal{H}_2$ and/or $\mathcal{H}_\infty$ -norm Model Reduction of Uncertain Discrete-time Systems. In *Proceedings of the 1999 American Control Conference*, pages 4466–4470, San Diego, CA, USA, 1999.
- [AP99b] E. Assunção and P. L. D. Peres. A global optimization approach for the $\mathcal{H}_2$ -norm model reduction problem. In *Proceedings of the 38th Conference on Decision & Control*, pages 1857–1862, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [AP01] E. Assunção and P. L. D. Peres. Otimização global para os problemas de redução $\mathcal{H}_2$ de modelos e redução $\mathcal{H}_2$ da ordem do controlador. *Revista da Sociedade Brasileira de Automática*, 12:93–101, 2001.
- [Ass00] E. Assunção. *Redução $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ de Modelos Através de Desigualdades Matriciais Lineares: Otimização Local e Global*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2000.
- [BB91] S. Boyd and C. H. Barrat. *Linear Controller Design*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1991.
- [BBB91] V. Balakrishnan, S. Boyd, and S. Balemi. Branch and Bound Algorithm for Computing the Minimum Stability Begree of Parameter-dependent Linear Systems. In *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control*, pages 295–317, 1991.
- [Ber97] E. B. Beran. *Methods for Optimization-based Fixed-Order Control Design*. PhD. Thesis, Technical University of Denmark, 1997.
- [BGFB94] S. Boyd, El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, USA, 1994.



- [Car00] J. L. M. Carvalho. *Sistemas de Controle Automático*. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.
- [Che93] C. T. Chen. *Analog and Digital Control System Design: Transfer-Function, State-Space, and Algebraic Methods*. Saunders College Publishing, 1993.
- [Che99] C. T. Chen. *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 1999.
- [EN00] L. ElGhaui and S. Niculescu. *Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control*. Siam, USA, 2000.
- [FP80] G. F. Franklin and J. D. Powell. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, USA, 1980.
- [Gar97] C. Garcia. *Modelagem e Simulação*. Edusp, 1997.
- [Glo84] K. Glover. All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their $\mathcal{L}_\infty$ -error bounds. *International Journal of Control*, 39(6):1115–1193, 1984.
- [GNLC95] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The Mathworks Inc., Natick, MA, USA, 1995.
- [JK98] S. M. Joshi and A. G. Kelkar. Inner loop control of supersonic aircraft in the presence of aeroelastic modes. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(6):730–739, 1998.
- [MF97] C. D. Maranas and C. A. Floudas. Global optimization in generalized geometric programming. *Computers & Chemical Engineering*, 21(4):351–369, 1997.
- [Moo81] B. C. Moore. Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1):17–32, 1981.
- [NG94] A. Nemirovski and P. Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, Maryland, june 1994.
- [Oga97] K. Ogata. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1997.
- [PTP97] R. M. Palhares, R. H. C. Takahashi, and P. L. D. Peres. $\mathcal{H}_2$ guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, 28(2):183–188, 1997.



- [SGL94] M. G. Safonov, K. C. Goh, and J. H. Ly. Control System Synthesis Via Bilinear Matrix Inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 45–49, 1994.
- [SS99] I. S. Shaw and M. G. Simões. *Controle e Modelagem Fuzzy*. Editora Edgard Blucher LTDA, 1999.
- [VB00] J. G. VanAntwerp and R. D. Braatz. A Tutorial on Linear and Bilinear Matrix Inequalities. In *Journal of Process Control*, pages 363–385, Urbana-Champaign, Illinois, USA, 2000.
- [ZDG96] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, New Jersey, USA, 1996.



Apêndice A

Complemento de Schur

O estudo das propriedades das LMIs pode ser encontrado em [VB00], [BGFB94] e [EN00]. Um importante resultado sobre LMI é o complemento de Schur. O complemento de Schur converte uma classe de desigualdades matriciais não-lineares, que aparecem regularmente na teoria de controle, em desigualdades matriciais lineares (LMIs). O complemento de Schur é ilustrado a seguir.

Seja a desigualdade matricial não-linear:

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)' > 0, \quad R(x) > 0 \quad (\text{A.1})$$

sendo $Q(x) = Q(x)'$, $R(x) = R(x)'$ e $S(x)$ são afins em x . Então o sistema (A.1) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)' & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

Uma demonstração do complemento de Schur pode ser encontrada em [VB00] e é mostrada a seguir.

A.1 Dedução do Complemento de Schur

($\Rightarrow$) Assuma que:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{A.2})$$

e defina:

$$F(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

então

$$F(u, v) > 0, \quad \forall [u, v] \neq 0 \quad (\text{A.4})$$



Considere, inicialmente, $u = 0$. Então

$$F(0, v) = v^T R(x) v > 0, \quad \forall v \neq 0 \Rightarrow R(x) > 0.$$

Considere, agora,

$$v = -R(x)^{-1} S(x)^T u, \quad \text{com } u \neq 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} F(u, v) &= u^T (Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T) u > 0, \quad \forall u \neq 0 \\ &\Rightarrow Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T > 0. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Assuma, agora:

$$Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T > 0, \quad R(x) > 0 \quad (\text{A.5})$$

com $F(u, v)$ definido em (A.3).

Fixando-se u e otimizando-se em termos de v :

$$\nabla_v F^T = 2R(x)v + 2S(x)^T u = 0 \quad (\text{A.6})$$

Desde que $R > 0$, de (A.6), temos:

$$v = -R(x)^{-1} S(x)^T u \quad (\text{A.7})$$

Substituindo (A.7) em (A.3), temos:

$$F(u) = u^T (Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T) u$$

Desde que $(Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T) > 0$, o mínimo de $F(u)$ ocorre para $u = 0$, que também implica que $v = 0$. Então, o mínimo de $F(u, v)$ ocorre em $(0, 0)$ e é igual a zero. Portanto, $F(u, v)$ é definida positiva.

Apêndice B

Aspectos Práticos para a Construção de um Programa

B.1 Introdução

A otimização global em redução de modelos envolve exaustivos processos iterativos, tanto na parte referente ao *branch and bound*, como na parte que retorna a solução de cada LMI envolvida nos limitantes. Basicamente três programas computacionais foram utilizados para a geração dos resultados neste trabalho: o Matlab, plataforma comercial da MathWorks Inc.¹, o Scilab, que é distribuído gratuitamente pela Inria Software² e o LMISol, desenvolvido na Universidade de Campinas apenas para plataformas Unix e também distribuído gratuitamente³. A grande dificuldade em elaborar um programa desta natureza consiste no fato de alguns termos de matrizes variáveis estarem também contidos em desigualdades escalares, como é o caso do conjunto de inequações (3.8) no cálculo do limitante inferior. Inicialmente, apenas o Matlab teria recursos de programação suficientes para isolar termos de matrizes variáveis. Porém, alguns testes com LMIs simples mostraram a pouca confiabilidade desta plataforma de cálculo, o que obriga o uso das outras duas que, além de se mostrarem de maior confiabilidade, são distribuídas gratuitamente. Apesar de usar o mesmo algoritmo do Matlab para solução de LMIs (ver [NG94] para maiores detalhes), o LMISol demonstrou-se uma solução mais rápida e confiável para este tipo de problema. O fato do LMISol não permitir que sejam separados os termos das matrizes de variáveis, levou à elaboração de uma maneira de extraí-los sem que para isto sejam declarados explicitamente o uso em separado de cada um deles. Apesar de se mostrar eficiente em alguns casos, o operador linear criado ao longo deste trabalho e descrito neste capítulo, chamado de operador $\mathcal{M}$, não foi eficiente em alguns casos em que havia muitos termos a serem isolados. Neste caso, optou-se por desmembrar todos os termos das matrizes em escalares, o que torna a programação extremamente difícil, dado o elevado

¹ www.mathworks.com

² www.rocq.inria.fr/scilab/

³ www.dt.fee.unicamp.br/~mauricio



número de variáveis escalares.

B.2 O Operador Linear $\mathcal{M}$

O operador $\mathcal{M}$ é uma manipulação matricial que tem por objetivo isolar um determinado elemento de uma matriz genérica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ em uma matriz quadrada de zeros cujo elemento a ser isolado esteja sobre a diagonal principal. Considere, por exemplo, uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ mostrada a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ A(2,1) & A(2,2) \\ A(3,1) & A(3,2) \end{bmatrix}$$

O operador $\mathcal{M}$ permite criar, quando aplicado em $\mathbf{A}$, as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A(2,1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A(3,1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(1,2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(2,2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A(3,2) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A(1,1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A(1,2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(2,1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(2,2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que entre as matrizes formadas pelo operador $\mathcal{M}$, destacam-se as seguintes propriedades:

1. Cada elemento $A(m, n)$ pode ser isolado nas diagonais (m, m) ou (n, n) apenas;
2. A matriz formada é simétrica.

B.2.1 Utilização do Operador $\mathcal{M}$

Suponha as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{P}$ descritas a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A(1,1) & A(1,2) \\ A(2,1) & A(2,2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P(1,1) & P(1,2) \\ P(2,1) & P(2,2) \\ P(3,1) & P(3,2) \end{bmatrix}$$

Chama-se de $\mathcal{M}c(x, y)[\cdot]$ o resultado da operação $\mathcal{M}$ que leva o elemento (x, y) para a posição (y, y) (deslocamento sobre a coluna) e $\mathcal{M}l(x, y)[\cdot]$ o resultado da operação que

leva o elemento (x, y) para a posição (x, x) (deslocamento sobre a linha), onde todos os outros elementos da matriz resultante são zero. Caso deseja-se obter, por exemplo, o valor de $P(3, 1) \cdot A(1, 2)$ basta fazer:

$$\begin{aligned} & \text{Tr}(\mathcal{M}c(3, 1)[P] \cdot \mathcal{M}l(1, 2)[A]) \\ & \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} P(3, 1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A(1, 2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ & \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} P(3, 1) \cdot A(1, 2) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = P(3, 1) \cdot A(1, 2). \end{aligned}$$

Este operador $\mathcal{M}$ permite que se contorne um problema na descrição de restrições com LMIs: muitos programas que resolvem LMI não permitem isolar termos dentro das matrizes para que sejam executadas operações em cada variável separadamente.

Procedimento do Operador $\mathcal{M}c(x, y)[\cdot]$

Como já foi dito, o operador $\mathcal{M}c(x, y)[\cdot]$ faz o deslocamento do elemento (x, y) para a posição (y, y) e por isso é chamado deslocamento sobre a coluna. Ele é feito da seguinte maneira: Considere uma matriz genérica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Queremos $\mathcal{M}c(k, p)[\mathbf{A}]$.

1. Controi-se uma matriz $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com todos os elementos iguais a zero, exceto o elemento (p, k) , que deve ser igual a 1;
2. Controi-se ainda uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com todos os elementos iguais a zero, exceto o elemento (p, p) , que deve ser igual a 1.
3. Faz-se a multiplicação $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$.

Deste modo temos que o traço da matriz $\mathcal{M}c(k, p)[\mathbf{A}]$ é o próprio elemento $A(k, p)$.

Procedimento do Operador $\mathcal{M}l(x, y)[\cdot]$

O operador $\mathcal{M}l(x, y)[\cdot]$ faz o deslocamento do elemento (x, y) para a posição (x, x) e por isso é chamado deslocamento sobre a linha. Ele é feito da seguinte maneira: Considere uma matriz genérica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Queremos $\mathcal{M}l(k, p)[\mathbf{A}]$.

1. Controi-se uma matriz $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ com todos os elementos iguais a zero, exceto o elemento (p, k) , que deve ser igual a 1;
2. Controi-se ainda uma matriz $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ com todos os elementos iguais a zero, exceto o elemento (k, k) , que deve ser igual a 1.

3. Faz-se a multiplicação $(A \cdot Y)' \cdot X$.

Deste modo temos que o traço da matriz $\mathcal{M}(k, p)[A]$ é o próprio elemento $A(k, p)$.

B.2.2 A Utilização do Operador $\mathcal{M}$ em LMIs

Considere o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \gamma^2 = \min \quad & \mu \\ \text{s.a.} \quad & \begin{bmatrix} -A'P - PA & -PB & C' \\ -B'P & \mathbf{I} & D' \\ C & D & \mu \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \\ & P > 0 \\ & P(1, 2) + P(3, 1) < 0 \end{aligned}$$

A última LMI do problema de minimização não pode ser declarada de forma explícita para muitos programas computacionais e por isso torna-se necessário o uso do operador $\mathcal{M}$. A seguir é demonstrado como podemos usar esse operador para declarar a LMI em questão:

$$\text{Tr}(\mathcal{M}(1, 2)[P] + \mathcal{M}(3, 1)[P]) < 0$$

Mais explicitamente temos:

$$\text{Tr} \left(\left(P \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)' \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) < 0$$

sendo que $P \in \Re^{3 \times 3}$.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dee.feis.unesp.br

