UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Amanda Buosi Gazon

Um Estudo sobre certos Invariantes Homológicos Relativos Duais

São José do Rio Preto
2012

Amanda Buosi Gazon

Um estudo sobre certos invariantes homológicos relativos duais

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Topologia Algébrica, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade

São José do Rio Preto
2012

Gazon, Amanda Buosi.
Um estudo sobre certos invariantes homológicos relativos duais/ Amanda Buosi Gazon. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2012.
90 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Maria Gorete Carreira Andrade
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. Homologia relativa de grupos. 3. Grupos e pares de dualidade. 4. Invariantes homológicos. I. Andrade, Maria Gorete Carreira. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 515.14

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

Amanda Buosi Gazon

Um estudo sobre certos invariantes homológicos relativos duais

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Topologia Algébrica, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher
Professor Associado
Universidade Federal de São Carlos - UFSCar

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 02 de março de 2012.

Aos meus pais,
Ivo e Marinêz,
dedico.

Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço:

À Deus, por tudo.

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, que projetou este trabalho, por toda dedicação dispensada durante minha orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve para me atender, e principalmente pelo carinho e amizade nesses seis anos de convívio, desde a tutoria no PET, as orientações de Iniciação Científica na graduação, até a orientação de Mestrado.

À Profa. Dra. Ermínia L. Campello Fanti e à Profa. Dra. Évelin Meneguesso Barbaresco pelas sugestões dadas na apresentação da Qualificação desta dissertação.

À Banca Examinadora, por ter aceito o convite, em especial ao Prof. Pedrinho e à Profa. Ermínia pelas sugestões dadas na Defesa da dissertação.

À todos os professores do Departamento de Matemática do IBILCE, pela amizade e formação acadêmica.

Agradeço também aos meus pais, Ivo e Marinêz, que sempre apoiaram e financiaram meus estudos e pela compreensão por eu não estar presente em muitos momentos em que estava estudando.

À minha irmã Ana Carolina, pelo companheirismo e amizade, e por me substituir em casa nos momentos em que eu não podia estar presente.

Ao meu amor Eder, por todo carinho, apoio e compreensão, imprescindíveis para a conclusão deste trabalho.

À toda minha família, pelo estímulo e torcida dispensados em todos os momentos.

Aos amigos da graduação e aos amigos do PET-Matemática pelos anos que estivemos juntos compartilhando momentos inesquecíveis.

Aos amigos da pós-graduação, pelo agradável convívio.

Aos amigos de fora da universidade, que sempre torceram pelo meu sucesso.

Em especial agradeço às minhas amigas: Ana Paula, Marjory e Ligia, pelos conselhos e apoio, Ana Cláudia, Érica, Michelli, Amandinha e Letícia, pelo convívio durante esses últimos dois anos, Daniele, Camila, Taisa e Alexandra, pela amizade.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, à todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para que esse sonho se tornasse realidade!

"A mente que se abre a uma nova idéia
jamais volta ao seu tamanho original."

(Albert Einstein)

Resumo

Baseado na teoria de cohomologia de grupos, Andrade e Fanti definiram um invariante algébrico, denotado por $E(G, \mathcal{S}, M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S}$ é uma família de subgrupos de G de índice finito e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. O objetivo deste trabalho é definir um invariante dual a $E(G, \mathcal{S}, M)$, que denotaremos por $E_*(G, \mathcal{S}, M)$, utilizando a homologia de grupos em vez da cohomologia. Com este invariante, obtemos diversos resultados e aplicações, principalmente nas teorias de grupos e pares de dualidade e de decomposição de grupos. Estes resultados fornecem uma maneira alternativa de obter aplicações e propriedades nestas teorias. E, para desenvolver este trabalho, estudamos as teorias de (co)homologia absoluta e relativa de grupos, bem como suas interpretações topológicas, e a teoria de grupos e pares de dualidade.

Palavras-chave: (Co)homologia de Grupos, Grupos e Pares de Dualidade, Invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$.

Abstract

Based on the cohomology theory of groups, Andrade and Fanti defined an algebraic invariant, denoted by $E(G, \mathcal{S}, M)$, where G is a group, $\mathcal{S}$ is a family of subgroups of G with finite index and M is a $\mathbb{Z}_2G$-module. The purpose of this work is to define a dual invariant of $E(G, \mathcal{S}, M)$, which we denote by $E_*(G, \mathcal{S}, M)$, using the homology of groups instead of cohomology. With this invariant, we obtain many results and applications, especially in the duality and splitting theories of groups. These results provide an alternative way to get applications and properties in these theories. And to develop this work, we studied the absolute and relative (co)homology theories of groups, as well as their topological interpretations, and the theories of duality groups and pairs.

Keywords: *(Co)homology of Groups, Duality Groups and Pairs, Invariant $E_*(G, \mathcal{S}, M)$.*

Sumário

Introdução

A definição de (co)homologia relativa, $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ e $H_*(G, S; M)$, para um grupo G e S um subgrupo de G, foi introduzida por Ribes em [17]. Posteriormente, Bieri e Eckmann, em [8], introduziram a definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G e, em [2], Andrade e Fanti demonstraram que a definição dada por Bieri e Eckmann é um generalização da apresentada por Ribes, no sentido que, tomando $\mathcal{S} = \{S\}$, as duas definições coincidem (a menos de isomorfismo).

Baseadas nesta teoria de (co)homologia de grupos, Andrade e Fanti definiram o invariante algébrico $E(G, \mathcal{S}, M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de índice infinito em G e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo.

O objetivo deste trabalho é definir um invariante dual a $E(G, \mathcal{S}, M)$, que denotaremos por $E_*(G, \mathcal{S}, M)$, utilizando a homologia relativa de grupos em vez da cohomologia. Estudaremos o invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ quando M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial $M = \mathbb{Z}_2$, denotado por $E'_*(G, \mathcal{S})$, obtendo aplicações nas teoria de grupos e pares de dualidade e decomposição de grupos, e quando M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $M = Coind_S^G\mathbb{Z}_2 = Hom_S(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) \simeq Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), \mathbb{Z}_2) \overset{Not.}{=} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$, o qual denotamos por $E_*(G, S)$, obtendo aplicações na teoria de pares de dualidade.

Os resultados obtidos para o invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ fornecem uma maneira alternativa se obter aplicações, propriedades e exemplos nas teoria de grupos e pares de dualidade e decomposição de grupos.

A seguir relatamos o objetivo de cada um dos 5 capítulos em que esta dissertação está dividida.

No Capítulo 1 serão apresentados resultados na teoria de Álgebra Homológica, de fundamental importância para os capítulos posteriores. Introduzimos inicialmente

os conceitos de RG-módulos e resoluções de R sobre RG, onde R é um anel comutativo com unidade (que na maioria das vezes será considerado como $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$) e G um grupo denotado multiplicativamente. Veremos, ainda na primeira seção, como obter resoluções de R sobre RG via topologia, por meio de CW-complexos denominados $K(G,1)$-complexos.

Na seção 2 deste capítulo, apresentamos os módulos coinvariantes e invariantes, bem como seus isomorfismos com $R \otimes_{RG} \_$ e $Hom_{RG}(R, \_)$, respectivamente. Na próxima seção, fazemos um estudo sobre módulos induzidos e coinduzidos, módulos estes muito importantes em todo o trabalho, principalmente no isomorfismo de Shapiro e na obtenção de resultados sobre grupos e pares de dualidade e, ainda, enunciamos alguns resultados importantes utilizando tais módulos.

Encerramos este primeiro capítulo definindo decomposição de grupos e enunciando alguns resultados úteis para o final do trabalho.

No capítulo 2, após a apresentação de alguns resultados sobre $\otimes$ e Hom, definimos os n-ésimos grupos de homologia e cohomologia absoluta de um grupo G, com coeficientes no RG-módulo M:

$$H_n(G;M) = H_n(F \otimes_{RG} M) \quad \text{e} \quad H^n(G;M) = H^n(Hom_{RG}(F,M)),$$

onde $\varepsilon : F \to R$ é uma resolução projetiva de R sobre RG. Como exemplos, calculamos $H_*(G;M)$ e $H^*(G;M)$ para os casos em que G é um grupo cíclico infinito e cíclico finito de ordem n com gerador t.

Na seção seguinte, apresentamos o Lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H. Em seguida, vendo H_* e H^* como funtores, observamos que $H_*(\_;\_)$ é um funtor covariante em uma determinada categoria $\mathcal{C}$, e $H^*(\_;\_)$ é um funtor contravariante em uma categoria $\mathcal{D}$. Além disso, apresentamos os homomorfismos cor_H^G e res_H^G, chamados de aplicação co-restrição e aplicação restrição, respectivamente, que serão muito utilizadas no último capítulo.

Encerramos o segundo capítulo mostrando uma interpretação topológica para $H_*(G;M)$ e $H^*(G;M)$, relacionando a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de um espaço $K(G,1)$, conseguindo assim, vários exemplos com cálculo de (co)homologia de um espaço topológico através da (co)homologia de um grupo e vice-versa.

Iniciamos o capítulo 3 apresentando o conceito de (co)homologia relativa $H_*(G,\mathcal{S};M)$ e $H^*(G,\mathcal{S};M)$, para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ de subgrupos de G, com coeficientes em um RG-módulo M, com R um anel comutativo

com unidade. Em seguida, mostramos que $H_*(G,\mathcal{S};M)$ e $H^*(G,\mathcal{S};M)$ são funtores de duas variáveis $((G,\mathcal{S});M)$ e obtemos sequências exatas longas em (co)homologia para o par $(G,\mathcal{S})$.

Para finalizar este capítulo, apresentamos o conceito de um par $(G,\mathcal{S})$ ser realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X,Y) = K(G,\mathcal{S};1)$, ilustrando esta teoria com alguns exemplos. E, através deste conceito, temos uma interpretação topológica para a (co)homologia relativa de grupos, um resultado que relaciona a (co)homologia de grupos com a (co)homologia de pares Eilenberg-MacLane, a saber:

"Se (X,Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando o par grupo $(G,\mathcal{S})$ e M é um RG-módulo trivial, então

$$H_k(G,\mathcal{S};M) \simeq H_k(X,Y;M) \text{ e } H^k(G,\mathcal{S};M) \simeq H^k(X,Y;M)".$$

Com este resultado, podemos calcular a (co)homologia relativa de grupos através da (co)homologia relativa de espaços.

No capítulo 4, apresentamos inicialmente a definição de dimensão cohomológica de um grupo G ($cd\ G$) e alguns resultados importantes usando tal conceito. Em seguida, estudamos os grupos de tipo FP e FL. Além disso, apresentamos uma interpretação topológica para os grupos de tipo FP, usando o conceito de espaço finitamente dominado, e relacionamos os grupos de tipo FL com o complexo finito $K(G,1)$.

Na seção seguinte, apresentamos o importante conceito de grupos de dualidade, ou seja, grupos que satisfazem certos isomorfismos de dualidade em homologia e cohomologia. Definimos também grupos de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n-grupos) e mostramos alguns resultados envolvendo PD^n-grupos.

A seção seguinte apresenta uma interpretação topológica para grupos de dualidade de Poincaré, através da teoria de variedades asféricas, a saber:

"Se G é um grupo tal que existe uma variedade asférica X fechada (compacta e sem bordo) de dimensão n, com $\pi_1(X) = G$, então G é um grupo de dualidade de dimensão n",

conseguindo assim, exemplos de PD^n-grupos.

Uma outra teoria bastante importante é apresentada na seção seguinte, os conceitos de pares de dualidade de dimensão n (D^n-pares) e pares de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n-pares), observando que o conceito de grupo de dualidade é um caso particular do conceito de par de dualidade.

Para encerrar o capítulo, temos a interpretação topológica para pares de dualidade, um resultado que mostra a relação entre PD^n-pares e variedades e também fornece um critério para se produzir exemplos de PD^n-pares através de modelos topológicos, a saber:

"Se $(G, \mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X, Y) = K(G, \mathcal{S}; 1)$, onde X é uma n-variedade orientável com bordo, compacta e $Y = \partial X$, então $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par".

No último capítulo apresentamos a definição e alguns resultados principais do invariante cohomológico $E(G, \mathcal{S}, M)$, onde $(G, \mathcal{S})$ é um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ uma família de subgrupos de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Tais resultados podem ser encontrados em [2] e [3].

Este invariante não é nosso objeto principal de estudo, mas é utilizado como motivação para a definição e os resultados obtidos com o invariante homológico dual $E_*(G, \mathcal{S}, M)$.

Prosseguimos, então, definindo o invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$, onde novamente $(G, \mathcal{S})$ é um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ uma família de subgrupos de G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Em seguida, provamos que E_* é de fato um invariante numa categoria $\mathcal{C}$ e apresentamos uma caracterização para E_* quando trabalhamos com espaços vetoriais de dimensão finita.

Em seguida, estudamos o invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ no caso em que M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial $\mathbb{Z}_2$. Denotamos $E_*(G, \mathcal{S}, \mathbb{Z}_2)$ por $E'_*(G, \mathcal{S})$. Com o invariante $E'_*(G, \mathcal{S})$, provamos também resultados em situações que $(G, \mathcal{S})$ satisfazem certas propriedades de dualidade e de decomposição de grupos.

Na sequência, estudamos o invariante E_* quando $\mathcal{S} = \{S\}$ e M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo

$$M = Coind_S^G \mathbb{Z}_2 = Hom_S(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) \simeq Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), \mathbb{Z}_2) \overset{Not.}{=} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}.$$

Por simplicidade, denotaremos o invariante $E_*(G, \{S\}, \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ por $E_*(G, S)$.

Encerramos o trabalho provando resultados sobre $E_*(G, S)$ envolvendo a teoria de pares de dualidade e, obtemos, por exemplo, uma condição necessária para que um par grupo (G, S) seja um PD^n-par, isto é,

"Se (G, S) é um PD^n-par, com $[G : S] = \infty$, então $E_*(G, S) = 1$".

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo, estabelecemos alguns dos principais pré-requisitos para o desenvolvimento da teoria necessária para essa dissertação.

Em todo este capítulo, pelo anel comutativo com unidade R entendemos $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$.

1.1 RG-módulos e Resoluções de R sobre RG

Definição 1.1.1 *Sejam R um anel comutativo com a unidade 1 e G um grupo denotado multiplicativamente. Seja RG o R-módulo livre gerado pelos elementos de G. Um elemento de RG é expresso unicamente na forma $\sum_{g\in G} \alpha_g.g$, onde $\alpha_g \in R$ e $\alpha_g = 0$ para quase todo g. Em RG definimos a multiplicação*

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g.g\right).\left(\sum_{h\in G} \beta_h.h\right) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g.\beta_h.g.h$$

e a soma

$$\left(\sum_{g\in G} \alpha_g.g\right) + \left(\sum_{g\in G} \beta_g.g\right) = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g).g$$

*que fazem de RG um anel com unidade 1 (1 representa a multiplicação da unidade de R pelo elemento neutro de G), chamado de **anel grupo** de G sobre R.*

Definição 1.1.2 *Seja X um G-**conjunto**, isto é, um conjunto munido com uma ação de G em X.*

(a) *Dizemos que X é um G-**conjunto livre** se a ação de G em X é livre, isto é, $gx = x$, para algum $x \in X$ se, e somente se, $g = 1$.*
(b) *Dizemos que X é um G-**conjunto trivial** se a ação de G em X é trivial, isto é, $gx = x, \forall\ x \in X$ e $\forall\ g \in G$.*

A seguinte proposição caracteriza os RG-módulos.

Proposição 1.1.1 *Consideremos R um anel comutativo com unidade, G um grupo (multiplicativo) e M um conjunto não vazio. Então M é um RG-módulo (à esquerda) se, e somente se, M é um R-módulo (à esquerda) munido com uma ação (à esquerda) de G sobre M.*

Demonstração: Se M é um RG-módulo, então M é R-módulo, considerando:

$$rm := (r1)m$$

e a G-ação dada por

$$g.m := (1_R g)m.$$

Reciprocamente, se M é um R-módulo e existe uma ação de G sobre M, então podemos dar a M uma estrutura de RG-módulo da seguinte forma:

$$\left(\sum r_g g\right) m := \sum r_g (g.m).$$

■

Definição 1.1.3 *O homomorfismo $\varepsilon : RG \longrightarrow R$ definido por $\varepsilon(g) = 1,\ \forall\ g \in G$, e estendido linearmente, é denominado* **aplicação aumentação** *(note que ε é sobrejetor).*

Definição 1.1.4 *Consideremos a aplicação aumentação definida acima. O kernel de tal aplicação é chamado* **ideal aumentação** *de RG, o qual denotaremos por Δ ($\ker\ \varepsilon = \Delta$).*

Observação 1.1.1 (a) *Sejam $\varepsilon : RG \to R$ a aplicação aumentação usual definida anteriormente e $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in RG$. Assim,*

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon\left(\sum_{g \in G} r_g g\right) = \sum_{g \in G} r_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} r_g.$$

Se A é um RG-módulo trivial, temos

$$\alpha m = \left(\sum_{g \in G} r_g g\right) m = \sum_{g \in G} r_g (g.m) = \sum_{g \in G} r_g m = \varepsilon(\alpha) m.$$

(b) *Todo R-módulo M pode ser visto como um RG-módulo se considerarmos em M a G-ação trivial $\phi : G \longrightarrow Aut(M)$ tal que $\phi(g) = id_M$, para todo $g \in G$, isto é,*

$$g.m = m, \ \forall \ m \in M, \ \forall \ g \in G.$$

Neste caso,

$$(r_1g_1 + r_2g_2 + ... + r_kg_k)m = (r_1 + r_2 + ... + r_k)m, \ r_i \in R, \ g_i \in G, \ i = 1, ..., k \ e \ m \in M.$$

Em particular, o anel R admite tal estrutura (é o que consideraremos neste trabalho, a menos que se especifique o contrário).

Definição 1.1.5 *Seja X um G-conjunto e $x \in X$. Definimos a G-órbita de x como o conjunto*

$$G(x) = \{gx \mid g \in G\}$$

Observação 1.1.2 *As órbitas de X formam uma partição de X, isto é, existe E, conjunto de representantes para as G-órbitas de X, tal que*

$$X = \bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda).$$

Proposição 1.1.2 *Seja X um G-conjunto livre e seja E um conjunto de representantes para as G-órbitas em X. Então RX (R-módulo livre gerado por X) é um RG-módulo livre com base E.*

Demonstração: [9], I.3.

■

Corolário 1.1.1 *Se H é um subgrupo de G, então RG é um RH-módulo livre com base num conjunto E de representantes para as H-órbitas em G (que são as classes laterais gH de H em G), isto é, $RG = \bigoplus_{g \in E} gRH$.*

Demonstração: A multiplicação à direita dos elementos de H pelos elementos de G faz de G um H-conjunto livre, pois $g.h = h$ se e somente se $h = 1$. Portanto, o resultado segue da Proposição anterior.

■

Definição 1.1.6 *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e M um R-módulo. Uma* **resolução de M sobre R,** *ou uma R-resolução de M, é uma sequência exata de R-módulos*

$$F : \ldots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

onde $\varepsilon : F_0 \to M$ é chamada aplicação aumentação.

Se cada F_i é livre, dizemos que a **resolução** *é* **livre**.

Se cada F_i é projetivo, dizemos que a **resolução** *é* **projetiva**.

Notação: $\varepsilon : F \to M$ denotará uma resolução de M sobre R.

Observação 1.1.3 *Toda resolução livre é projetiva, uma vez que todo módulo livre é projetivo.*

Proposição 1.1.3 *Dado um R-módulo M sempre podemos construir uma R-resolução livre (e portanto projetiva) de M sobre R.*

Demonstração: [15], III.1.1. ■

Lema 1.1.1 *Se F é uma resolução projetiva de R sobre RG, e H é um subgrupo de G, então F também é uma resolução projetiva de R sobre RH.*

Demonstração: Consideremos a seguinte resolução projetiva de R sobre RG:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Como cada F_n é um RG-módulo projetivo, por [9], I.8.2(iii), temos que F_n é um somando direto de um RG-módulo livre. Deste modo,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i \in I} (RG)_i.$$

Agora, pelo Corolário 1.1.1, temos que RG é RH-módulo livre, assim,

$$RG \simeq \bigoplus_{j \in J} (RH)_j.$$

Portanto,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i,j} (RH)_{i,j}$$

e, novamente por [9], I.8.2(i), temos que F_n é um RH-módulo projetivo.

Logo, F é uma resolução projetiva de R sobre RH. ■

1.1.1 Obtenção de $\mathbb{Z}G$-resoluções projetivas de $\mathbb{Z}$ via métodos topológicos

Nesta seção, veremos como obter resoluções de R sobre RG via topologia, por meio de CW-complexos denominados $K(G,1)$-complexos.

Definição 1.1.7 *Um* **G-complexo** *é um CW-complexo X munido de uma ação G em X que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de X, então $gS = S$, para todo g em G.*

Se a ação de G em X permuta livremente as células, dizemos que X é um **G-complexo livre**.

Observação 1.1.4 *É importante notar que, pelo fato da ação de G em X induzir um homomorfismo dado por*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & G & \to & Homeo(X) \\ & g & \mapsto & \varphi_g : X \to X \end{array}$$

tal que $\varphi_g(x) = g.x$, temos que, se σ é uma célula de X, então $\varphi_g(\sigma) = g.\sigma$ também é uma célula de X, cuja dimensão é a mesma de σ (ou seja, φ_g preserva dimensão).

Dado X um G-complexo, podemos formar o complexo de cadeias $C_*(X, R)$, onde $C_n(X, R)$ é o R-módulo livre gerado pelas n-células de X.

A ação de G em X induz uma ação em $C_*(X, R)$ da seguinte forma:

$$g.(a_1\sigma_1 + ... + a_n\sigma_n) := a_1 g.\sigma_1 + ... + a_n g.\sigma_n.$$

Assim, $C_*(X, R)$ torna-se um complexo de cadeias de RG-módulos.

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon: & C_0(X, R) & \to & R \\ & \sigma^0 & \mapsto & \varepsilon(\sigma^0) = 1, \end{array}$$

para toda 0-célula de X, e a estendemos por linearidade.

Temos que ε é uma aplicação de RG-módulos, pois se σ^0 é uma 0-célula, então $\varepsilon(g.\sigma^0) = 1$, pois $g.\sigma^0$ também é 0-célula.

Proposição 1.1.4 *Se X é um G-complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de X*

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG.

Demonstração: [9], I.4.1.

■

Da teoria de espaços de recobrimento, podemos obter muitos exemplos de G-complexos livres. Para isto, recordemos alguns resultados sobre espaços de recobrimento.

Sejam Y um CW-complexo e $p : \widetilde{Y} \to Y$, um recobrimento de Y. Por [19], III.6.9.2, temos que $\widetilde{Y}$ também é um CW-complexo (as n-células de $\widetilde{\sigma}$ de $\widetilde{Y}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde σ é uma n-célula de Y, e $p|_{\widetilde{\sigma}} : \widetilde{\sigma} \to \sigma$ é um homeomorfismo). Além disso, G permuta as células de $\widetilde{Y}$.

Agora, G atua livremente em $\widetilde{Y}$, pois $g.\widetilde{y} = \widetilde{y}$ se, e somente se, $g = 1$ ([16], 5.3.2). Consequentemente, G atua livremente nas células de $\widetilde{Y}$.

Deste modo, $\widetilde{Y}$ é um G-complexo livre.

Vamos definir agora um CW-complexo particular, que satisfaz as condições citadas anteriormente.

Definição 1.1.8 *Seja Y um CW-complexo tal que:*
(i) Y é conexo.
(ii) $\pi_1(Y) = G$.
(iii) O recobrimento universal $\widetilde{Y}$ de Y é contrátil (é fato conhecido que, para CW-complexos conexos, sempre existe tal recobrimento universal e este é regular) ([19], III.6.9.1 e [14], I.6.7).

Nestas condições, Y é dito um **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo** $(G, 1)$ *ou simplesmente, $K(G, 1)$-**complexo**.*

Observação 1.1.5 *Pode-se mostrar que a condição (iii) da definição anterior pode ser substituída por uma das condições abaixo* ([9] I.4)*:*
$(iii)'$ $H_i(\widetilde{Y}) = 0$ *para* $i \geq 2$.
$(iii)''$ $\pi_i(Y) = 0$ *para* $i \geq 2$.

Observação 1.1.6 *Se $\widetilde{Y}$ é recobrimento universal de um CW-complexo Y, temos que $\widetilde{Y}$ é um G-complexo, onde $G = \pi_1(Y)$.*

Observação 1.1.7 *É fato conhecido que: "Dado um grupo G, sempre existe um $K(G, 1)$-complexo, o qual é único, a menos de homotopia"([9], VIII.7.1).*

Exemplo 1.1.1 *Sejam $G =< \alpha > \simeq \mathbb{Z}$ e $Y = S^1$.*

Temos que Y é um $K(G, 1)$-complexo, pois é um CW-complexo conexo, com $\pi_1(Y) = G$ e o recobrimento universal de Y é $\widetilde{Y} = \mathbb{R}$, que é contrátil.

Exemplo 1.1.2 *Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ (grupo abeliano livre de posto n) e $Y = T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (toro n-dimensional).*

Temos que Y é um CW-complexo conexo, $\pi_1(Y) = G$ e o recobrimento universal de Y é $\widetilde{Y} = \mathbb{R}^n$, que é contrátil. Logo, Y é um $K(G, 1)$-complexo.

Exemplo 1.1.3 *Sejam $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto S) e $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ (bouquet de círculos indexados por um conjunto S).*

Temos que Y é um CW-complexo conexo de dimensão 1, com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de S e, $\pi_1(Y) = G$ ([16], IV.3.4).

Além disso, Y é conexo e, se $\widetilde{Y}$ é recobrimento universal de Y, temos que $\widetilde{Y}$ tem dimensão 1 (pois $\widetilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é homeomorfismo local). Assim, $H_i(\widetilde{Y}) = 0$ para $i \geq 2$.

Portanto, Y é um $K(G, 1)$-complexo.

Lema 1.1.2 *Se X é um G-complexo livre compacto, então G é finito.*

Demonstração: Seja X/G o espaço das órbitas de X.

Temos que

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/G \\ & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

é recobrimento regular, e G atua livremente em X como o grupo das transformações de recobrimento ([14], p.21 e [9], p.17).

Agora, dado $\overline{x}_0 \in X/G$, temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(\overline{x}_0) &= \{x \in X;\ p(x) = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ \overline{x} = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ x \in G(x_0)\}. \end{aligned}$$

Como a ação de G em X é livre, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com G. Além disso, a fibra $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta e fechada ([16], p.165).

Suponhamos que $p^{-1}(\overline{x}_0)$ seja infinita. Como X é compacto, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação que está em $p^{-1}(\overline{x}_0)$, o que é um absurdo, pois $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta.

Deste modo, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é finita e, portanto, G é finito.

■

Exemplo 1.1.4 *Sejam* $G = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 \right\rangle$ *e g um inteiro maior ou igual a 1.*

Temos que G é o grupo com geradores $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$, e $\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1$ é a única relação, onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Além disso, G é infinito ([18], 6.4.3).

Temos ainda que G é o grupo fundamental da superfície orientada Y de genus g (soma conexa de g toros) ([16], IV.5. exemplo 5.3).

Agora, vamos mostrar que Y é um $K(G,1)$-complexo.

Seja $\widetilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ o recobrimento universal de Y. Como G é infinito, temos, pelo Lema 1.1.2, que $\widetilde{Y}$ não é compacto, assim, $\widetilde{Y}$ é uma superfície não compacta e conexa. Daí, por [14], III.22.25, temos que $H_2(\widetilde{Y}) = 0$. Como $H_k(\widetilde{Y}) = 0$ para $k > 2$, pois $\widetilde{Y}$ tem dimensão 2, temos que $H_k(\widetilde{Y}) = 0$ para $k \geq 2$.

Portanto, Y é um $K(G,1)$-complexo.

Exemplo 1.1.5 *Seja* $G =< c_1, \ldots, c_k;\ \prod_{i=1}^{k} c_i^2 >$.

Temos que G é o grupo fundamental de uma superfície Y fechada não orientável de genus k, $k \geq 2$ (soma conexa de k planos projetivos).

Analogamente ao exemplo anterior, temos que Y é um $K(G,1)$-complexo.

Proposição 1.1.5 *Se Y é um $K(G,1)$-complexo, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{Y}$ de Y:*

$$\cdots \longrightarrow C_2(\widetilde{Y},R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\widetilde{Y},R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\widetilde{Y},R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG.

Demonstração: Como Y é um $K(G,1)$, então $\widetilde{Y}$ é um G-complexo livre contrátil. Logo, pela Proposição 1.1.4, temos que o complexo acima é uma resolução livre de R sobre RG.

■

Exemplo 1.1.6 *Sejam $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto S) e $Y = \bigvee_{s\in S} S^1_s$ (bouquet de círculos indexados por um conjunto S).*

Vimos no exemplo 1.1.3 que Y é um $K(F(S),1)$-complexo.

Sabemos que $C_n(\widetilde{Y},R)$ tem um elemento básico para cada n-célula de Y (pois, $\widetilde{Y}$ é recobrimento universal de Y, logo, regular).

Tomemos um ponto base $\widetilde{y_0}$ em $\widetilde{Y}$ ($\widetilde{y_0}$: vértice em $\widetilde{Y}$). Temos que $\widetilde{y_0}$ representa a única G-órbita de vértices de $\widetilde{Y}$ (existe uma 0-órbita de vértices em $\widetilde{Y}$ para cada vértice em Y). Daí, $\widetilde{y_0}$ gera o RG-módulo livre $C_0(\widetilde{Y},R)$, e assim, $C_0(\widetilde{Y},R) \simeq RG$.

Como base para $C_1(\widetilde{Y},R)$, tomamos para cada $s \in S$ uma 1-célula orientada e_s de $\widetilde{Y}$, que é projetada sobre S^1_s (orientada no sentido positivo). Temos uma 1-órbita em $\widetilde{Y}$ para cada 1-célula em Y.

Podemos supor que e_s tem $\widetilde{y_0}$ como ponto inicial e, caso isto não ocorra, tomamos outro representante e_r com ponto inicial $\widetilde{y_0}$ (isto é, se e_r tem um ponto inicial $\widetilde{y_0}$, então, existe g em G tal que $g \cdot e_s = e_r$, pois G atua livremente e transitivamente, permutando as células de $\widetilde{Y}$), onde o ponto final de e_s será $s \cdot \widetilde{y_0}$.

Note que podemos identificar o grupo das transformações de recobrimento $G(\widetilde{Y})$ com $\pi_1(Y,y_0)$ da seguinte maneira: seja $\omega : I \to Y$ um laço em Y ($[\omega] \in \pi_1(Y,y_0)$). Temos que existe um único levantamento $\widetilde{\omega}$ de ω, começando em $\widetilde{y_0}$. Mais ainda, seja

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \pi_1(Y,y_0) & \to & G(\widetilde{Y}) \\ & [\omega] & \mapsto & f_w \end{array}$$

onde f_ω é a única transformação de recobrimento tal que $f_\omega(\widetilde{y_0}) = \widetilde{\omega}(1)$.

Temos que φ é isomorfismo e, daí, $G(\widetilde{Y}) \simeq \pi_1(Y, y_0)$. Além disso, $G(\widetilde{Y})$ atua livremente em $\widetilde{Y}$, com ação:

$$\begin{array}{rcl} G(\widetilde{Y}) \times \widetilde{Y} & \to & \widetilde{Y} \\ (f_\omega, \widetilde{y}) & \mapsto & f_\omega(\widetilde{y}). \end{array}$$

Olhando esta ação como uma ação de $\pi_1(Y)$ em $\widetilde{Y}$, temos $[\omega]\widetilde{y} = f_\omega(\widetilde{y}) = \widetilde{\omega}(1)$.

Como cada S^1_s representa um gerador em $\pi_1(Y, y_0) \simeq F(S)$, identificamos S^1_s com s através deste isomorfismo. Assim, temos que existe um único levantamento $\widetilde{s}$ de s, começando em $\widetilde{y_0}$ e o ponto final deste levantamento é $\widetilde{s}(1) = f_s(\widetilde{y_0}) = s \cdot \widetilde{y_0}$.

Tal levantamento é a 1-célula e_s, onde $p(e_s) = S^1_s \equiv s$ (a célula e_s é aplicada homeomorficamente em S^1_s).

Note que $G = F(S) \simeq G(\widetilde{Y})$, com $s \simeq f_s$.

Agora, voltando ao exemplo, temos $\partial(e_s) = s \cdot \widetilde{y_0} - \widetilde{y_0} = (s-1) \cdot \widetilde{y_0}$. Daí,

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} (RG)_s \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG, onde $\bigoplus_{s \in S} (RG)_s$ é um RG-módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$, para $g \in G$.

Exemplo 1.1.7 *Se $S = \{t\}$, então, $G = F(S)$ é cíclico infinito. Nesse caso, a resolução do exemplo anterior se reduz à*

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Veremos agora como é possível obter uma resolução livre de R sobre RG, através de um G-complexo livre X homeomorfo à esfera de dimensão ímpar S^{2k-1}.

Teorema 1.1.1 *Seja X um G-complexo livre homeomorfo à esfera de dimensão ímpar S^{2k-1} e considere $C_i(X)$ o $\mathbb{Z}G$-módulo livre gerado pelas células de dimensão i (uma em cada órbita de células).*

(a) *A ação de G em $H_{2k-1}(X) = C_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$ é trivial.*

(b) *A sequência*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

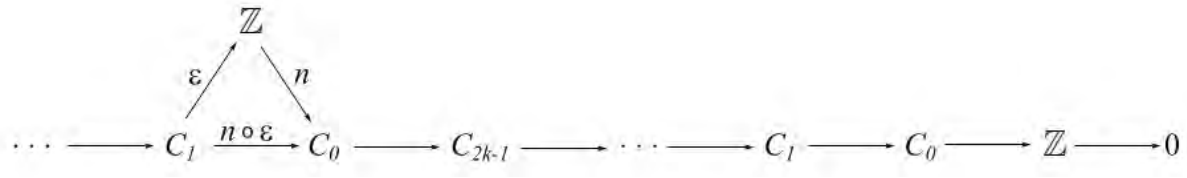
onde $n : \mathbb{Z} \to C_{2k-1}(X)$ é a inclusão, é exata.

Demonstração: [9], p.20.

■

A partir da sequência dada pelo Teorema anterior, obtemos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, de período $2k$, do modo a seguir.

Vamos denotar $C_*(X, \mathbb{Z})$ por C_* e considerar o diagrama:



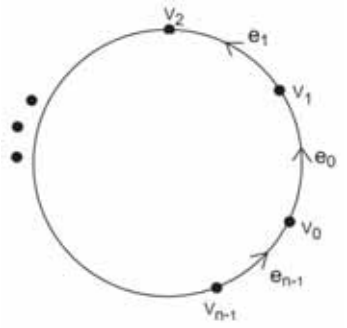
Assim, construímos a seguinte sequência:

$$\cdots \longrightarrow C_{2k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{n\circ\varepsilon} C_{2k-1} \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Já vimos que $\text{Im}\ \partial_1 = \ker \varepsilon$, além disso, $\ker \varepsilon = \ker(n \circ \varepsilon)$ (n : injetora) e $Im\ (n \circ \varepsilon) = Im\ n = \ker \partial_{2k-1}$ (ε : sobrejetora).

Deste modo, $(*)$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Exemplo 1.1.8 *Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t.*



Consideremos S^1 vista como um CW-complexo com n vértices (que podem ser identificados com as raízes n-ésimas da unidade) e n 1-células. Vamos denotar por $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ os vértices e por $e_i = (v_i, v_{i+1})$ as 1-células de S^1, e definir a ação de G em S^1 por $t^k \cdot v_i = v_{k+i}$ e $t^k \cdot e_i = e_{k+i}$, $k, i = 0, \ldots, n-1$.

Temos que G atua em S^1 como o grupo de rotações e, tal ação permuta livremente as células. Além disso, $v_i = t^i \cdot v_0$ e $e_i = t^i \cdot e_0$, $i = 0, \ldots, n$, assim, existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células. Portanto, $C_0(S^1) \simeq \mathbb{Z}G \simeq C_1(S^1, \mathbb{Z})$.

Deste modo, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Mas

$$\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1) = \frac{\ker \partial_1}{Im\ \partial_2} = \ker \partial_1.$$

Então, obtemos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

e, daí

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{n\circ\varepsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{n\circ\varepsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Agora, vamos determinar ∂_1 e $n \circ \varepsilon$.

• $\partial_1(e_0) = v_1 - v_0 = t \cdot v_0 - v_0 = (t-1) \cdot v_0$.

Logo, ∂_1 é a multiplicação por $t-1$.

Se $N = 1 + t + \ldots + t^{n-1}$, então Ne_0 gera $H_1(S^1, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Temos

$$\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \ker \partial_1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \partial_1(e_0 + t \cdot e_0 + \ldots + t^{n-1} \cdot e_0) &= (1 + t + \ldots + t^{n-1})\partial_1(e_0) \\ &= (1 + t + \ldots + t^{n-1})(t-1) \cdot v_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $e_0 + t \cdot e_0 + t^2 \cdot e_0 + \ldots + t^{n-1} \cdot e_0 \in \ker \partial_1$.

Agora, se $x = a_0 e_0 + a_1 t \cdot e_0 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} \cdot e_0 \in \ker \partial_1$, temos

$$\begin{aligned} \partial_1(a_0 e_0 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} \cdot e_0) = 0 &\Rightarrow (a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1})\partial_1(e_0) = 0 \\ &\Rightarrow (a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1})(t-1) \cdot v_0 = 0 \end{aligned}$$

o que nos dá:

$$(a_{n-1} - a_0)v_0 + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1} \cdot v_0 = 0.$$

Mas, como $C_0(X, \mathbb{Z})$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre que tem como base as 0-células $\{v_0, t \cdot v_0, \ldots, t^{n-1} \cdot v_0\}$, então, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$. Assim,

$$x = a_0(e_0 + t \cdot e_0 + \ldots + t^{n-1} \cdot e_0) = a_0 N e_0.$$

Portanto, $\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1, \mathbb{Z}) = \ker \partial_1 =< Ne_0 >$.

Como $Im(n \circ \varepsilon) = \ker \partial_1$, temos que $(n \circ \varepsilon)(v_0) = Ne_0$ e, deste modo, $(n \circ \varepsilon)(1_{\mathbb{Z}G}) = N$. Logo, $n \circ \varepsilon$ é a multiplicação por N.

Consequentemente, obtemos a seguinte resolução periódica, de período 2, de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

1.2 Coinvariantes e Invariantes

Sejam G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda).

Definição 1.2.1 *O* **grupo dos coinvariantes** *de M, o qual denotamos por M_G, é dado por*

$$M_G = M/A, \text{ onde } A \text{ é o subgrupo aditivo tal que}$$
$$A =< g \cdot m - m;\ g \in G \text{ e } m \in M > .$$

Observação 1.2.1 *O nome coinvariantes vem do fato de M_G ser o maior quociente de M no qual G atua trivialmente.*

Proposição 1.2.1 *Se R é visto como um RG-módulo trivial (à esquerda), então*

$$M_G \simeq R \otimes_{RG} M.$$

Demonstração: [9], II.2.1.

■

Definição 1.2.2 *Seja M um RG-módulo (à esquerda). O* **grupo dos invariantes** *de M, denotado por M^G, é dado por:*

$$M^G = \{m \in M;\ g \cdot m = m,\ \forall\ g \in G\}.$$

Observação 1.2.2 *M^G é o maior submódulo de M no qual G atua trivialmente.*

Proposição 1.2.2 $(Hom_R(M,N))^G = Hom_{RG}(M,N)$.

Demonstração: Sejam $g \in G$ e $f \in Hom_R(M,N)$. Temos

$$g.f = f \Leftrightarrow (g.f)(m) = f(m),\ \forall\ m \in M \Leftrightarrow g.f(g^{-1}.m) = f(m),\ \forall\ m \in M \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g.f(m') = f(g.m'),\ \forall\ m' \in M(m' = g^{-1}.m).$$

Logo,

$$(Hom_R(M,N))^G = \{f \in Hom_R(M,N) \mid g.f(m) = f(g.m)\} = Hom_{RG}(M,N).$$

■

Corolário 1.2.1 *$Hom_{RG}(R, M) \simeq M^G$, onde R é um RG-módulo com G-ação trivial.*

■

Observação 1.2.3 *Todo RG-módulo (à esquerda) M pode ser considerado como um RG-módulo (à direita), definindo a seguinte G-ação em M:*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & M \times G & \to & M \\ & (m, g) & \mapsto & m * g = g^{-1} \cdot m, \quad \forall\ g \in G,\ H \end{array}$$

1.3 Módulos Induzidos e Coinduzidos

Sejam R e S anéis e $\alpha : R \to S$ um homomorfismo de anéis.

Consideremos M um S-módulo (à esquerda). Podemos ver M como um R-módulo (à esquerda), definindo em M a R-ação:

$$\begin{array}{rccl} \mu: & R \times M & \to & M \\ & (r, m) & \mapsto & r \cdot m = \alpha(r)m \end{array}$$

Obtemos, desta forma, um funtor da categoria dos S-módulos (à esquerda) para a categoria dos R-módulos (à esquerda) denominado **restrição de escalares**. Neste caso, M é denotado por $Res^S_R M$.

Deste modo, se G é um grupo, H um subgrupo de G, $\alpha : RH \hookrightarrow RG$ a aplicação inclusão de RH em RG e M é um RG-módulo, podemos ver M como um RH-módulo através de α e o RH-módulo M é denotado por $Res^G_H M$ (**módulo restrição**).

Seja M um RH-módulo e,

$$Ind^G_H M = RG \otimes_{RH} M.$$

$Ind^G_H M$ é um grupo abeliano. Em $Ind^G_H M$ definimos a seguinte ação:

$$\begin{array}{ccc} G \times Ind^G_H M & \longrightarrow & Ind^G_H M \\ (g, \alpha \otimes m) & \mapsto & g\alpha \otimes m. \end{array}$$

Com esta ação, $Ind^G_H M$ torna-se um RG-módulo.

Consideremos agora o grupo abeliano (com a operação de adição) $Hom_{RH}(RG, M)$. Este grupo tem uma estrutura de RG-módulo, com a G-ação dada por

$$(g.f)(x) = f(xg),\ \forall\ g \in G,\ x \in RG.$$

Denotamos por $Coind^G_H M$ o RG-módulo $Hom_{RH}(RG, M)$, isto é,

$$Coind^G_H M = Hom_{RH}(RG, M).$$

Observação 1.3.1 *Se $H = \{1\}$, temos $RH \simeq R$. Deste modo*

$$Ind_{\{1\}}^{G} M = RG \otimes_R M \quad e \quad Coind_{\{1\}}^{G} M = Hom_R(RG, M).$$

Tais RG-módulos são chamados, respectivamente, **módulo induzido** *e* **módulo coinduzido**.

Observação 1.3.2 *Segue de [9] (III.3.2) e (III.3.5), respectivamente, considerando $M = N$ e $f = Id_M$, que as aplicações:*

$$\begin{array}{rccc} i: & M & \longrightarrow & Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M \\ & m & \mapsto & i(m) = 1 \otimes m \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \pi: & Coind_H^G M = Hom_{RH}(RG, M) & \longrightarrow & M \\ & f & \mapsto & \pi(f) = f(1) \end{array}$$

injeção canônica e projeção canônica são, respectivamente, RH-monomorfismo e RG-epimorfismo.

Proposição 1.3.1 *O RG-módulo $Ind_H^G M$ contém M como um RH-submódulo. Além disso, considerando E um conjunto de representantes para as classes laterais (à esquerda) de H em G, e denotando por gM o conjunto obtido de M (visto como RH-submódulo de $Ind_H^G M$ sob a ação de G), temos:*

$$Ind_H^G M = \bigoplus_{g \in E} gM.$$

Demonstração: [9], p. 67.

■

Proposição 1.3.2 *De modo análogo à indução, se considerarmos o mergulho $\rho : M \longrightarrow Coind_H^G M$, dado por*

$$\rho(m)(g) = \begin{cases} g.m & se\ g \in H \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

temos que M é um RH-módulo de $Coind_H^G M$ e, além disso,

$$Coind_H^G M = \prod_{g \in E} gM.$$

■

Observação 1.3.3 *A aplicação ρ se estende a um RG-homomorfismo $\varphi : RG \otimes_{RH} M \longrightarrow Hom_{RH}(RG, M)$ ([9], III.3.2). Tal aplicação pode ser identificada com a inclusão canônica da soma direta no produto direto ([9], p. 70) e, assim, podemos ver $Ind_H^G M$ como um RG-submódulo de $Coind_H^G M$.*

Proposição 1.3.3 *Se* $[G : H] < \infty$, *então* $Ind_H^G M \simeq Coind_H^G M$.

Demonstração: [9], III.5.9.

■

Proposição 1.3.4 *Seja* M *um* RG*-módulo. Existem* RG*-isomorfismos naturais:*
(i) $Ind_H^G \left(Res_H^G M\right) \simeq R(G/H) \otimes_R M$ *(com* G*-ação diagonal).*
(ii) $Coind_H^G \left(Res_H^G M\right) \simeq Hom_R(R(G/H), M)$ *(com* G*-ação diagonal).*

Demonstração: (i) [9], III.5.6.
(ii) Análogo a (i), [9], Ex. 2(b), p.71.

■

Corolário 1.3.1 $Ind_H^G R \simeq R(G/H)$.

■

Proposição 1.3.5 *Sejam* G *um grupo,* S *um subgrupo de* G *com* $[G : S] = \infty$. *Então, para qualquer* RS*-módulo* M,

$$(Ind_S^G M)^G = 0.$$

Demonstração: [1], 1.2.11

■

Proposição 1.3.6 *Sejam* G *um grupo e* S *um subgrupo de* G *com* $[G : S] = \infty$. *Se* G *é finitamente gerado, então*

$$(Coind_S^G M)_G = 0,$$

para todo RS*-módulo* M.

Demonstração: [9], p.71, ex. 4(b).

■

1.4 Decomposição de Grupos

Definição 1.4.1 *Sejam* G_1 *e* G_2 *grupos dados pelas apresentações* $G_k = \langle X_k; R_k \rangle$, $k = 1, 2$, *onde* X_k *é um conjunto de geradores e* R_k *é um conjunto de relações para* G_k.
(a) *Se* $T_1 \subset G_1$ *e* $T_2 \subset G_2$ *são subgrupos com um dado isomorfismo* $\sigma : T_1 \simeq T_2$ *então o produto livre* $G_1 *_T G_2$ *de* G_1 *e* G_2 *com subgrupo amalgamado* $T = T_1 = T_2$ *é dado por*

$$G_1 *_T G_2 = \langle X_1, X_2; R_1, R_2, t = \sigma(t),\ \forall\ t \in T \rangle.$$

(b) *Se* $G_1 = \langle X_1; R_1 \rangle$ *e se* T, T' *são subgrupos de* G_1 *com um dado isomorfismo* $\sigma : T \simeq T'$, *então o* HNN*-grupo* $G_1 *_{T,\sigma}$ *sobre o grupo base* G_1, *com respeito a* $\sigma : T \simeq T'$ *e com letra estável* p, *é dado por*

$$G_1 *_{T,\sigma} = \langle X_1, p; R_1, p^{-1}tp = \sigma(t),\ t \in T \rangle.$$

Proposição 1.4.1 **(a)** *Se $G = G_1 *_T G_2$ então temos a sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

onde α é dada por $\alpha(xT) = (xG_1, xG_2),\ x \in G$ e ε é a aplicação aumentação.

(b) *Se $G = G_1 *_{T,\sigma}$ então temos a sequência exata curta de $\mathbb{Z}_2G$-módulos*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

onde α é dada por $\alpha(xT) = xG_1 - xpG_1$.

Demonstração: [8].

■

Definição 1.4.2 *Dizemos que um grupo G se decompõe sobre um subgrupo S se G é:*
(a) *um produto livre não trivial com subgrupo amalgamado S, isto é, $G = G_1 *_S G_2$ com $G_1 \neq S \neq G_2$, ou*
(b) *um HNN-grupo com grupo base S, isto é, $G = G_1 *_{S,\sigma}$.*

Observação 1.4.1 *É verdade que, se $G = G_1 *_S G_2$ com $G_1 \neq S \neq G_2$ ou $G = G_1 *_{S,\sigma}$ então $[G : G_i] = \infty$ (ver [6]).*

Capítulo

2

(Co)homologia Absoluta de Grupos

Neste capítulo veremos o conceito de (co)homologia absoluta de grupos e alguns resultados sobre essa teoria necessários para o desenvolvimento do trabalho, dentre eles o Lema de Shapiro.

Antes de definirmos (co)homologia, vamos considerar alguns resultados importantes sobre $\otimes_{RG}$ e Hom_{RG}.

2.1 Alguns Resultados sobre $\otimes_{RG}$ e Hom_{RG}

Seja R um anel comutativo com unidade e considere o anel grupo RG.

Definição 2.1.1 *Sejam M e N RG-módulos. Então, M e N são naturalmente R-módulos. A* **G-ação diagonal**, *definida em $M \otimes_R N$, é dada por:*

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n$$

Proposição 2.1.1 *Sejam M e N RG-módulos (à esquerda). Temos*

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

onde $A =< g \cdot m \otimes g \cdot n - m \otimes n;\ \forall\ m \otimes n \in M \otimes_R N,\ \forall\ g \in G >$.

Demonstração: Vamos ver como obtemos $M \otimes_{RG} N$ de $M \otimes_R N$.

Consideremos a seguinte relação em $M \otimes_R N$:

$$(m * g) \otimes n \sim m \otimes g \cdot n,\ \ \forall\ m \in M, \forall\ g \in G.$$

Mas, vendo M como um RG-módulo (à direita), temos pela Observação 1.2.3, que

$$m * g = g^{-1} \cdot m, \ \forall\, m \in M, \forall\, g \in G.$$

Assim,

$$(m * g) \otimes n = (g^{-1} \cdot m) \otimes n.$$

Logo,

$$\overline{(g^{-1} \cdot m) \otimes n} = \overline{m \otimes g \cdot n}. \tag{2.1}$$

Portanto,

$$M \otimes_{RG} N = \frac{M \otimes_R N}{\sim}.$$

Trocando m por $g \cdot m$ em (2.1), temos

$$\overline{m \otimes n} = \overline{g \cdot m \otimes g \cdot n}. \tag{2.2}$$

Definimos, então a G-ação diagonal de G em $M \otimes_R N$:

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

Consideremos em $M \otimes_R N$ tal ação e A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos $g \cdot (m \otimes n) - m \otimes n$.

Assim, em $(M \otimes_R N)_G := \dfrac{M \otimes_R N}{A}$, estamos identificando elementos da forma $g \cdot m \otimes g \cdot n$ com $m \otimes n$, para todo $m \in M, n \in N, g \in G$.

Isto é o mesmo que identificar $(g^{-1} \cdot m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes n$ (por (2.1) e (2.2)).

Deste modo,

$$(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{\sim} = M \otimes_{RG} N.$$

■

Corolário 2.1.1 $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.

Demonstração: $M \otimes_{RG} N \simeq (M \otimes_R N)_G \simeq (N \otimes_R M)_G = N \otimes_{RG} M$. ■

Sejam M e N RG-módulos (à esquerda), e consideremos $Hom_R(M, N)$.

A ação de G em M e N induz uma ação de G em $Hom_R(M, N)$, dada por

$$\begin{array}{ccc} G \times Hom_R(M,N) & \to & Hom_R(M,N) \\ (g, f) & \mapsto & g \cdot f \end{array}$$

tal que $g \cdot f(x) = gf(g^{-1} \cdot x)$; $\ g \in G, f \in Hom_R(M, N)$ e $\ x \in M$.

Observação 2.1.1 *O uso de g^{-1} para definir a ação é necessário devido à contravariância de Hom na primeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo M a um RG-módulo à direita, considerando $m * g = g^{-1} \cdot m$.*

Deste modo, a ação fica:

$$g \cdot f(m) = gf(g^{-1} \cdot m) = gf(m * g).$$

Assim, $Hom_R(M, N)$ será um RG-módulo (à esquerda).

2.2 Definição da (Co)homologia Absoluta de um Grupo G

Veremos agora a definição da (co)homologia de um grupo G. Novamente, consideramos $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$.

Definição 2.2.1 ((Co)homologia absoluta) *Sejam*

$$\cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de R sobre RG e M um RG-módulo (à esquerda).

Podemos formar os **complexos de cadeia** *e* **cocadeia**, *respectivamente:*

$$F \otimes_{RG} M : \cdots \longrightarrow F_n \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{RG} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \longrightarrow 0$$

$$Hom_{RG}(F, M) : 0 \longrightarrow Hom_{RG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow Hom_{RG}(F_n, M) \longrightarrow \cdots$$

O **operador bordo** *é dado por $\overline{\partial}_n := \partial_n \otimes id$ e, o* **operador cobordo**, *por*

$$\begin{array}{rccc} \delta^n : & Hom_{RG}(F_n, M) & \to & Hom_{RG}(F_{n+1}, M) \\ & f & \mapsto & \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}. \end{array}$$

(a) O n-ésimo **grupo de homologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H_n(G; M) := H_n(F \otimes_{RG} M).$$

(b) O n-ésimo **grupo de cohomologia** *de G com coeficientes em M é definido por*

$$H^n(G; M) := H^n(Hom_{RG}(F, M)).$$

Observação 2.2.1 *As definições de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ independem da resolução projetiva $\varepsilon : F \longrightarrow R$ escolhida (a menos de isomorfismo canônico) ([9], I.7.5).*

Observação 2.2.2 *Tomando $M = \mathbb{Z}$, com G-ação trivial, temos*

$$H_*(G;\mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \overset{\text{Prop.2.1.1}}{=} H_*((F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G).$$

Proposição 2.2.1 *Dado um RG-módulo M, temos o isomorfismo:*

$$H_0(G;M) \simeq M_G.$$

Demonstração: Consideremos a resolução projetiva de R sobre RG:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $- \otimes_{RG} M$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\overline{\partial}_1} & F_0 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} & R \otimes_{RG} M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\partial}_0} & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Como tal funtor é exato à direita, temos que $Im\,\overline{\partial}_1 = \ker \overline{\varepsilon}$ e $\overline{\varepsilon}$ é sobrejetora.
Assim, $H_0(G;M) = \dfrac{\ker \overline{\partial}_0}{Im\,\overline{\partial}_1} = \dfrac{F_0 \otimes_{RG} M}{\ker \overline{\varepsilon}} \simeq R \otimes_{RG} M \overset{\text{Prop.1.2.1}}{\simeq} M_G$.
Logo, $H_0(G;M) \simeq M_G$. ■

Proposição 2.2.2 *Dado um RG-módulo M, temos o isomorfismo:*

$$H^0(G;M) \simeq M^G.$$

Demonstração: Consideremos a resolução projetiva de R sobre RG:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $Hom_{RG}(-,M)$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{RG}(R,M) & \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}} & Hom_{RG}(F_0,M) & \xrightarrow{\delta^0} & Hom_{RG}(F_1,M) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \delta^{-1}} & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Como tal funtor é exato à esquerda, temos que $Im\,\widetilde{\varepsilon} = \ker \delta^0$ e $\widetilde{\varepsilon}$ é injetora.
Assim, $H^0(G;M) = \dfrac{\ker \delta^0}{Im\ \delta^{-1}} = \ker \delta^0 = Im\,\widetilde{\varepsilon} \simeq Hom_{RG}(R,M) \overset{\text{Corol.1.2.1}}{\simeq} M^G$.
Logo, $H^0(G;M) \simeq M^G$.

■

Exemplos de Grupos de (Co)homologia

Exemplo 2.2.1 *Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo e G o grupo cíclico infinito com gerador t. Vamos calcular $H_*(G;M)$ e $H^*(G;M)$.*

Vimos, no exemplo 1.1.7, que

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1 = t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (*)$$

é resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

• Vamos calcular $H_*(G;M)$.

Tensorizando a resolução $(*)$ por M sobre $\mathbb{Z}G$ temos:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\partial_1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0.$$

Temos o seguinte isomorfismo

$$\varphi : M \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M$$

$$m \to 1 \otimes m.$$

com inversa $\varphi^{-1} : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M$ dada por $\varphi^{-1}(\alpha \otimes m) = \alpha m$.

Como $\overline{\partial_1} = \partial_1 \otimes id$ então, através do isomorfismo φ, obtemos o seguinte complexo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\overline{\partial_1}}} M \xrightarrow{\overline{\overline{\partial_0}}} 0 \quad (1),$$

onde $\overline{\overline{\partial_1}} = \varphi^{-1} \circ \overline{\partial_1} \circ \varphi$.

Assim, $\overline{\overline{\partial_1}}(m) = (t-1)m$. Daí, $H_*(G;M)$ é a homologia do complexo (1).

Logo,

$$H_0(G;M) = \begin{cases} M_G \quad (Prop.\ 2.2.1); \\ H_1(G;M) = \frac{\ker(t-1)}{\{0\}} = \{m \in M | (t-1)m = 0\} = \{m \in M | tm = m\} = M^G; \\ H_i(G;M) = 0, \quad para\ i \geq 2. \end{cases}$$

Note que: $H_1(G;M) = M^G \overset{Prop.\ 2.2.2}{=} H^0(G;M)$.

• Vamos calcular agora a cohomologia $H^*(G;M)$.

Aplicando $Hom_{\mathbb{Z}G}(-,M)$ na resolução $(*)$, obtemos o complexo:

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},M) \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,M) \xrightarrow{\delta_1} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,M) \longrightarrow 0,$$

onde $\delta_1(f)(x) = (f \circ (t-1))(x) = f((t-1)x) = (t-1)f(x)$.

Logo, $\delta_1 = t - 1$ (multiplicação por $t - 1$).

Temos o seguinte isomorfismo

$$\psi : Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \to M$$

$$f \mapsto f(1).$$

com inversa

$$\psi^{-1} : M \to Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M)$$

$$m \mapsto \psi^{-1}(m) : \mathbb{Z}G \to M$$

definida por $\psi^{-1}(m)(g) = gm$.

Daí, usando esses isomorfismos, temos o complexo

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\overline{\delta_1}} M \longrightarrow 0 \quad (2)$$

onde $\overline{\delta_1}(m) = (\psi \circ \delta_1 \circ \psi^{-1})(m) = (t-1)m$.

Assim, $H^*(G; M)$ é a cohomologia do complexo (2) e, temos então:

$$H^0(G; M) = \begin{cases} M^G \quad (Prop.\ 2.2.2); \\ H^1(G; M) = \frac{\ker 0}{Im(t-1)} = \frac{M}{(t-1)M} = M_G; \\ H^i(G; M) = 0, \quad para\ i \geq 2. \end{cases}$$

Note que: $H^1(G; M) = M_G \overset{Prop.\ 2.2.1}{=} H_0(G; M)$.

Em particular, se $M = \mathbb{Z}$, com G-ação trivial, temos

$$H_0(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} = H^1(G; \mathbb{Z}); \\ H_1(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} = H^0(G; \mathbb{Z}); \\ H_i(G; \mathbb{Z}) = H^i(G; \mathbb{Z}) = 0, \quad para\ i \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 2.2.2 *Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t.*

Pelo exemplo 1.1.8, temos a seguinte resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\ldots \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$.

Vamos calcular $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$.

Tensorizando a resolução por M, obtemos o complexo:

$$\ldots \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{N}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{t-1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0.$$

Através dos isomorfismos $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$ e $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M_G$, este complexo toma a seguinte forma:

$$\ldots \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \longrightarrow 0$$

Daí,

$$H_i(G;M) = \begin{cases} M_G, \text{ se } i = 0; \\ \frac{\ker t-1}{\text{Im } N}, \text{ se } i \text{ for ímpar}; \\ \frac{\ker N}{\text{Im } (t-1)}, \text{ se } i \text{ for par}. \end{cases}$$

Aplicando $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ à resolução acima, temos:

$$0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\overline{t-1}} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\overline{N}} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M)$$

e, através dos isomorfismos $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G$, obtemos:

$$0 \xrightarrow{\delta_0} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} \ldots$$

Assim:

$$H_i(G;M) = \begin{cases} M_G, \text{ se } i = 0; \\ \frac{\ker N}{\text{Im } (t-1)}, \text{ se } i \text{ for ímpar}; \\ \frac{\ker t-1}{\text{Im } N}, \text{ se } i \text{ for par}. \end{cases}$$

Em particular, no caso $M = \mathbb{Z}$ (com G-ação trivial), temos que $(t-1) = 0$ e $N = n, \forall r \in \mathbb{Z}$. Daí, $\ker(t-1) = \mathbb{Z}$, $Im(t-1) = \{0\} = \ker N$ e $\text{Im } N = n\mathbb{Z}$ e, assim obtemos:

$$H_i(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ se\ i = 0; \\ \mathbb{Z}_n, \ sei\ for \text{ ímpar}; \\ 0, se\ i\ for\ par. \end{cases}$$

e,

$$H^i(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ se\ i = 0; \\ 0, \ se\ i\ for \text{ ímpar}; \\ \mathbb{Z}_n, \ se\ i\ for\ par. \end{cases}$$

2.3 Lema de Shapiro

Vimos que, se H é um subgrupo de G e M é um RH-módulo, $Ind_H^G M$ e $Coind_H^G M$ são RG-módulos. Considerando tais RG-módulos, temos o seguinte resultado que relaciona a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H.

Proposição 2.3.1 (Lema de Shapiro) *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}H$-módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*
(a) $H_*(H;M) \simeq H_*(G; Ind_H^G M)$
(b) $H^*(H;M) \simeq H^*(G; Coind_H^G M)$.

Demonstração: Seja $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Pelo Lema 1.1.1, esta também é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$.

(a) Temos:

$$F \otimes_{\mathbb{Z}H} M \simeq (F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}H} M = F \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) = F \otimes_{\mathbb{Z}G} Ind_H^G M.$$

Assim,

$$H_*(H;M) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \simeq H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} Ind_H^G M) = H_*(G; Ind_H^G M).$$

Logo,

$$H_*(H;M) \simeq H_*(G; Ind_H^G M).$$

(b) Por [9] III.3.6, temos:

$$Hom_{\mathbb{Z}H}(F_n, M) \simeq Hom_{\mathbb{Z}G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)),\ \forall\, n.$$

Deste modo,

$$Hom_{\mathbb{Z}H}(F, M) \simeq Hom_{\mathbb{Z}G}(F, Coind_H^G M).$$

Assim,

$$H^*(H;M) = H^*(Hom_{\mathbb{Z}H}(F,M)) \simeq H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(F, Coind_H^G M)) = H^*(G; Coind_H^G M).$$

Portanto,

$$H^*(H;M) \simeq H^*(G; Coind_H^G M).$$

■

Exemplo 2.3.1 *Se $M = \mathbb{Z}$, então $H_*(G;\mathbb{Z}) \simeq H_*(G;\mathbb{Z}(G/H))$.*

De fato, $H_*(H;\mathbb{Z}) \overset{Shapiro}{\simeq} H_*(G; Ind_H^G Z) \overset{Corol.1.3.1}{\simeq} H_*(G;\mathbb{Z}(G/H))$.
Logo, $H_*(H;\mathbb{Z}) \simeq H_*(G;\mathbb{Z}(G/H))$.

Exemplo 2.3.2 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G, com $[G:H] < \infty$. Então,*
(i) $H^*(H;\mathbb{Z}) \simeq H^*(G;\mathbb{Z}(G/H))$;
(ii) $H^*(H;\mathbb{Z}H) \simeq H^*(G;\mathbb{Z}G)$.

De fato,
(i) $H^*(H;\mathbb{Z}) \overset{Shapiro}{\simeq} H^*(G; Coind_H^G \mathbb{Z}) \overset{Prop.1.3.3}{\simeq} H^*(G; Ind_H^G \mathbb{Z}) \overset{Corol.1.3.1}{\simeq} H^*(G; \mathbb{Z}(G/H))$.
Logo, $H^*(H;\mathbb{Z}) \simeq H^*(G;\mathbb{Z}(G/H))$.

(ii) $H^*(H;\mathbb{Z}H) \overset{Shapiro}{\simeq} H^*(G; Coind_H^G \mathbb{Z}H) \overset{Prop.1.3.3}{\simeq} H^*(G; Ind_H^G \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G; \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H) \simeq$
$\simeq H^*(G;\mathbb{Z}G)$.
Portanto, $H^*(G;\mathbb{Z}H) \simeq H^*(G;\mathbb{Z}G)$.

2.4 H_* e H^* como Funtores de duas variáveis

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cujos objetos são pares $(G;M)$, onde G é um grupo e M é um RG-módulo. Um morfismo em $\mathcal{C}$ de $(G;M)$ em $(G';M')$ é um par (α, f), onde $\alpha : G \to G'$ é um homomorfismo de grupos, e $f : M \to M'$ é um homomorfismo de RG-módulos, considerando M' como um RG-módulo via α, isto é, um homomorfismo de RG-módulos satisfazendo: $f(g * m) = \alpha(g).f(m)$.

Consideremos $(\alpha, f) : (G;M) \to (G';M')$, F uma resolução projetiva de R sobre RG e F' uma resolução projetiva de R sobre RG' (podemos ver F' como uma resolução de R sobre RG via α, pois cada F_n pode ser visto como um RG-módulo, definindo a ação: $g * x' = \alpha(g).x'$).

Como F é RG-projetiva e F' é acíclica para $i \geq 1$ (pois F' é RG'-resolução), temos por [9], II.6.2., que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \to F'$, estendendo a identidade de R, única a menos de homotopia.

Temos que $\tau(g.x) = g * \tau(x) = \alpha(g).\tau(x)$, pois τ é homomorfismo de RG-módulos.

Consideremos agora:

$$\begin{array}{rccc} \tau \otimes f : & F \otimes_{RG} M & \to & F' \otimes_{RG'} M' \\ & x \otimes m & \mapsto & \tau(x) \otimes f(m). \end{array}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $F \otimes_{RG} M$ e $F' \otimes_{RG'} M$. Assim, $\tau \otimes f$ induz uma aplicação bem definida:

$$\begin{array}{rccc} H_*(\alpha, f) \overset{not.}{=} (\alpha, f)_* : & H_*(G;M) & \to & H_*(G';M') \\ & [x \otimes m] & \mapsto & [(\tau \otimes f)(x \otimes m)] = [\tau(x) \otimes f(m)]. \end{array}$$

Verifica-se facilmente que:

(a) Se $M = M'$, $G = G'$, $\alpha = id_G$ e $f = id_M$, então

$$(\alpha, f)_* = id_{H_*(G;M)}.$$

(b) Se $(\alpha, f) : (G;M) \to (G';M')$ e $(\alpha', f') : (G';M') \to (G'';M'')$, então

$$(\alpha', f')_* \circ (\alpha, f)_* = (\alpha' \circ \alpha, f' \circ f)_* \overset{not.}{=} ((\alpha', f') \circ (\alpha, f))_*.$$

Logo, $H_*(\_;\_)$ é um funtor covariante em $\mathcal{C}$.

Para a cohomologia, vamos considerar uma categoria $\mathcal{D}$ cujos objetos são os mesmos que em $\mathcal{C}$, e os morfismos são pares (α, f), onde $\alpha : G \to G'$ e $f : M' \to M$ (f é desta forma pois Hom é contravariante na primeira variável).

Sejam F e F' resoluções de R sobre RG e RG', respectivamente. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, temos que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \to F'$, única a menos de homotopia. Temos que $\tau(g.x) = g * \tau(x)$ (pois τ é a aplicação de RG-módulos).

Consideremos a aplicação de cocadeias:

$$\begin{array}{rccc} Hom(\alpha, f): & Hom_{RG'}(F', M') & \to & Hom_{RG}(F, M) \\ & \phi & \mapsto & f \circ \phi \circ \tau. \end{array}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $Hom_{RG'}(F', M')$ e $Hom_{RG}(F, M)$. Assim, $Hom(\tau, f)$ induz uma aplicação bem definida:

$$\begin{array}{rccccc} Hom(\alpha, f)^* & \overset{not.}{=} & (\alpha, f)^*: & H^*(G'; M') & \to & H^*(G; M) \\ & & & [\phi] & \mapsto & [f \circ \phi \circ \tau]. \end{array}$$

Verifica-se facilmente que:

(a) Se $\alpha = id_G : G \to G$ e $f = id_M : M \to M$, então

$$(\alpha, f)^* = id_{H^*(G;M)}.$$

(b) Se $(\alpha, f) : (G; M') \to (G', M)$ e $(\beta, g) : (G'; M'') \to (G''; M')$, então

$$((\beta, g) \circ (\alpha, f))^* = (\alpha, f)^* \circ (\beta, g)^*.$$

Logo, $H^*(\_; \_)$ é um funtor contravariante em $\mathcal{D}$.

Observação 2.4.1 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Consideremos $\alpha : H \hookrightarrow G$ a inclusão e as RH-aplicações canônicas já vistas na Observação 1.3.2: $i : M \to Ind_H^G M$ e $\pi : Coind_H^G M \to M$. Por [9], p.80, ex.2, temos que os isomorfismos da Proposição 2.3.1 (Lema de Shapiro), são dados, respectivamente, por*

$$(\alpha, i)_* : H_*(H; M) \to H_*(G; Ind_H^G M)$$

$$(\alpha, \pi)^* : H^*(G; Coind_H^G M) \to H^*(H; M).$$

Tais isomorfismos são chamados **isomorfismos de Shapiro**.

Observação 2.4.2 *Sejam G um grupo e M, M' RG-módulos. Consideremos a aplicação $\alpha = id : G \to G$ e seja $f : M \to M'$ um RG-homomorfismo. Usando a teoria anterior, temos que existem homomorfismos induzidos*

$$(id, f)_* : H_*(G; M) \to H_*(G; M')$$

e,

$$(id, f)^* : H^*(G; M) \to H^*(G; M').$$

Temos, então, que $H_*(G; \_)$ e $H^*(G; \_)$ são funtores covariantes na categoria dos RG-módulos M.

Usando isto, mostra-se o seguinte resultado:

Proposição 2.4.1 *Seja* $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$ *uma sequência exata de RG-módulos. Temos:*
(i) *Para todo inteiro n, existe uma aplicação natural* $\partial_n : H_n(G; M'') \to H_{n-1}(G; M')$*, tal que a sequência:*

$$\cdots \longrightarrow H_1(G; M) \xrightarrow{j_1} H_1(G; M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G; M') \xrightarrow{i_0} H_0(G; M) \xrightarrow{j_0} H_0(G; M'') \longrightarrow 0$$

é exata, onde as aplicações i_k *e* j_k *são as induzidas em homologia, isto é,*

$$i_k = (id, i)_* : H_k(G; M') \to H_k(G; M)$$

$$j_k = (id, j)_* : H_k(G; M) \to H_k(G; M'').$$

(ii) *Para todo inteiro n, existe uma aplicação natural* $\delta^n : H^n(G; M'') \to H^{n+1}(G; M)$*, tal que a sequência:*

$$0 \longrightarrow H^0(G; M') \xrightarrow{i^0} H^0(G; M) \xrightarrow{j^0} H^0(G; M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G; M') \xrightarrow{i^1} H^1(G; M) \longrightarrow \cdots$$

é exata, onde as aplicações i^k *e* j^k *são as induzidas em cohomologia, isto é,*

$$i^k = (id, i)^* : H^k(G; M') \to H^k(G; M)$$

$$j^k = (id, j)^* : H^k(G; M) \to H^k(G; M'').$$

Demonstração: [9], III.6.1.

■

Observação 2.4.3 *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um RG-módulo. Consideremos a aplicação inclusão* $\alpha : H \hookrightarrow G$ *e a aplicação* $id : M \to M$*. Então, temos induzidos, em homologia e cohomologia, os seguintes homomorfismos:*
(i) $(\alpha, id)_* : H_*(H; M) \to H_*(G; M)$*, e*
(ii) $(\alpha, id)^* : H^*(G; M) \to H^*(H; M)$*.*

Denotaremos o homomorfismo $(\alpha, id)_*$ *por* cor_H^G *(ou simplesmente cor) e o homomorfismo* $(\alpha, id)^*$ *por* res_H^G *(ou simplesmente res).*

O homomorfismo cor_H^G *é chamado* **aplicação co-restrição** *e o homomorfismo* res_H^G *é chamado de* **aplicação restrição**.

As aplicações res_H^G *e* cor_H^G *são importantes no desenvolvimento do Capítulo 5.*

2.5 Interpretação Topológica para $H_*(G;M)$ e $H^*(G;M)$

Nesta seção, relacionamos a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de um espaço $K(G,1)$ (que é um CW-complexo conexo, cujo $\pi_1(Y) = G$ e tem seu recobrimento universal contrátil).

Vamos denotar $C_*(-,\mathbb{Z})$ por $C_*(-)$, e proceder do mesmo modo para a cohomologia.

Proposição 2.5.1 *Sejam X um G-complexo livre e Y o complexo de órbitas X/G. Então $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$.*

Demonstração: Consideremos a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/G \\ & x & \mapsto & p(x) = G(x) = \{g \cdot x;\ g \in G\} \end{array}$$

Em nível de complexo de cadeias, temos a aplicação induzida

$$\begin{array}{rccc} p_\#: & C_n(X) & \to & C_n(X/G) \\ & \sum a_i\sigma_i & \mapsto & \sum a_i G(\sigma_i) \end{array}$$

onde σ_i são n-células de X.

Agora, seja

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & C_n(X) & \to & C_n(X)_G = C_n(X)/A \\ & \alpha & \mapsto & \overline{\alpha} = \alpha + A \end{array}$$

onde $A = \langle g \cdot \alpha - \alpha;\ g \in G, \alpha \in C_n(X)\rangle$.

Vamos definir

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & C_n(X)_G & \to & C_n(X/G) \\ & \overline{\alpha} & \mapsto & \varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(\overline{\sum a_i\sigma_i}) = p_\#(\alpha) = \sum a_i G(\sigma_i) \end{array}$$

- φ está bem definida.

De fato $A \subset \ker\, p_\#$, pois, se σ_i é uma n-célula e $g \in G$, temos

$$p_\#(g \cdot \sigma_i - \sigma_i) = p_\#(g \cdot \sigma_i) - p_\#(\sigma_i) = G(g \cdot \sigma_i) - G(\sigma_i) = 0.$$

Então,

$$\begin{array}{rcl} x \in A & \Rightarrow & x = \displaystyle\sum_i \left(g_i \cdot \alpha_i - \alpha_i\right),\ \alpha_i \in C_n(X) \\ & \Rightarrow & x = \displaystyle\sum_i \left(g_i \sum_j \sigma_j^i - \sum_j \sigma_j^i \right) = \sum_{i,j} \left(g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i\right). \end{array}$$

Assim, $p_\#(x) = p_\#\left(\sum_{i,j}(g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i)\right) = 0$.
Deste modo,

$$\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2} \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) \in A \subset \ker\, p_\# \Rightarrow p_\#(\alpha_1) = p_\#(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\overline{\alpha_1}) = \varphi(\overline{\alpha_2}).$$

É fácil ver que φ é homomorfismo de grupos.
Além disso,

- φ é sobrejetora.

De fato,

$$\forall x = \sum a_i G(\sigma_i) \in C_n(X/G),\ \exists\, y = \sum a_i \overline{\sigma_i} \in C_n(X)_G \text{ tal que } \varphi(y) = x.$$

- φ é injetora.

De fato,

$$\varphi(\overline{\sum a_i\sigma_i}) = 0 \Rightarrow \sum a_i G(\sigma_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0.$$

Logo,

$$\sum a_i\sigma_i = 0 \Rightarrow \overline{\sum a_i\sigma_i} = 0.$$

Portanto, φ é isomorfismo.

■

Lema 2.5.1 *Seja A um grupo abeliano com G-ação trivial. Temos:*
(a) $F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$;
(b) $Hom_{\mathbb{Z}G}(F, A) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(F_G, A)$.

■

Proposição 2.5.2 *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, então*
(a) $H_*(G;M) \simeq H_*(K(G,1);M)$;
(b) $H^*(G;M) \simeq H^*(K(G,1);M)$.

Demonstração: Seja $Y = K(G,1)$ e X o recobrimento universal de Y. Então, o complexo celular aumentado do recobrimento universal X de Y, $\varepsilon : C_*(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (ver Prop. 1.1.5).

Deste modo, $H_*(G;M) = H_*(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$. Como $Y \simeq X/G$, pela Proposição 2.5.1, $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$. Daí,

$$(a) \qquad \begin{aligned} H_*(G;M) = H_*(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}G} M) &\overset{Lema 2.5.1(a)}{\simeq} H_*(C_*(X)_G \otimes M) \\ &\simeq H_*(C_*(Y) \otimes M) \\ &= H_*(Y;M). \end{aligned}$$

Portanto, $H_*(G;M) \simeq H_*(K(G,1);M)$.

$$(b) \qquad \begin{array}{lll} H^*(G;M) = H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(C_*(X),M)) & \overset{Lema 2.5.1(b)}{\simeq} & H^*(Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G,M)) \\ & \simeq & H^*(Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(Y),M)) \\ & = & H^*(Y;M). \end{array}$$

Portanto, $H^*(G;M) \simeq H^*(K(G,1);M)$. ■

Exemplo 2.5.1 *Consideremos o bouquet de círculos* $Y = \bigvee_{s\in S} S^1_s$.

Pelo exemplo 1.1.3, temos que Y é um $K(F(S),1)$, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado pelo conjunto S.
Assim, pela Proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(F(S)) \;=\; \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i=0 \\ \bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z} & \text{se } i=1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Exemplo 2.5.2 *Seja* Y *a soma conexa de* n *toros.*

Pelo exemplo 1.1.4, Y é um $K(G,1)$, onde $G = \left\langle a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g, \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]=1 \right\rangle$.
Portanto, pela Proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(G) \;=\; \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i=0 \\ \mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z} & (2g \text{ vezes}) \text{ se } i=1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i=2 \\ 0 & \text{se } i\geq 3. \end{cases}$$

Exemplo 2.5.3 *Sejam* $G \simeq \mathbb{Z}^{(n)} \simeq \mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}$ *e* $Y = T^n = S^1\times\ldots\times S^1$ *(toro* n*-dimensional).*

Pelo exemplo 1.1.2, T^n é um $K(G,1)$. Logo,

$$H_i(G) = H_i(T^n) = \mathbb{Z}^{k_i}, \qquad k_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Observação 2.5.1 *Existe, também, uma interpretação topológica para* $H_*(G;M)$ *e* $H^*(G;M)$*, considerando-se* M *como um* $\mathbb{Z}G$*-módulo não trivial:*

- $H_*(G;M) \simeq H_*(K(G,1);\mathcal{M})$,
- $H^*(G;M) \simeq H^*(K(G,1);\mathcal{M})$,

onde $\mathcal{M}$ *é o sistema de coeficientes locais associado so* $\mathbb{Z}G$*-módulo* M *([13]).*

Capítulo

3

(Co)homologia Relativa de Grupos

Ribes introduziu em [17] a definição de (co)homologia relativa, $H^*(G, S; M)$ e $H_*(G, S; M)$, para um grupo G e S um subgrupo de G. A definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ de subgrupos de G foi introduzida por Bieri e Eckmann em [8]. Esta definição introduzida por Bieri e Eckmann é uma generalização da apresentada por Ribes, no sentido que, tomando $\mathcal{S} = \{S\}$, as duas definições coincidem (a menos de isomorfismo). Este fato é demonstrado em [2].

Em [8], a teoria de (co)homologia relativa está definida sobre o anel $\mathbb{Z}$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo. Trabalharemos aqui com a (co)homologia definida sobre um anel comutativo com unidade R, com coeficientes em um RG-módulo M.

3.1 A Definição de $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ e $H_*(G, \mathcal{S}; M)$

Nesta seção, apresentamos a definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ de subgrupos de G.

Definição 3.1.1 *Um* **par grupo** $(G, \mathcal{S})$ *consiste de um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G, não necessariamente distintos.*

Consideremos $(G, \mathcal{S})$ um par grupo e $\mathbb{Z}(G/\mathcal{S})$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelas classes gS_i, na qual G atua por multiplicação à esquerda. Assim,

$$\mathbb{Z}(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}(G/S_i) \overset{Corol.1.3.1}{=} \bigoplus_{i\in I} Ind_{S_i}^G \mathbb{Z} = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}S_i} \mathbb{Z}$$

Seja $\varepsilon : \mathbb{Z}(G/\mathcal{S}) \to \mathbb{Z}$ a aplicação aumentação usual que leva cada gerador gS_i em $1 \in \mathbb{Z}$ e denotemos por Δ o núcleo de ε.

Definição 3.1.2 *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Os* **grupos de (co)homologia relativa** *para $(G,\mathcal{S})$ com coeficientes em M são definidos, para todo $k \in \mathbb{Z}$, por:*

$$H^k(G,\mathcal{S};M) = H^{k-1}(G; Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta, M))$$

$$H_k(G,\mathcal{S};M) = H_{k-1}(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}} M)$$

onde as ações de G em $Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta, M)$ e $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} M$ são dadas respectivamente por $gf(x) = gf(g^{-1}x)$ e $g(x \otimes_{\mathbb{Z}} m) = gx \otimes_{\mathbb{Z}} gm$ (ações diagonais).

Observação 3.1.1 **(i)** *Segue da definição que, para $k \leq 0$,*

$$H^k(G,\mathcal{S};M) = H_k(G,\mathcal{S};M) = 0.$$

(ii) *Se $\mathcal{S} = \emptyset$, por convenção, temos*

$$H^k(G,\emptyset;M) = H^k(G;M) \text{ e } H_k(G,\emptyset;M) = H_k(G;M).$$

(iii) *É conveniente, escrever para qualquer família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G,*

$$H_k(\mathcal{S},M) = \bigoplus_{i\in I} H_k(S_i;M) \text{ e } H^k(\mathcal{S},M) = \prod_{i\in I} H^k(S_i;M),$$

onde M é um $\mathbb{Z}\mathcal{S}$-módulo, isto é, um $\mathbb{Z}S_i$-módulo para todo i. Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo então M é um $\mathbb{Z}\mathcal{S}$-módulo por restrição de escalares.

Proposição 3.1.1 *Os grupos de homologia relativa se anulam para o módulo induzido $M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} L$, onde L é um grupo abeliano qualquer, para todo $k \neq 1$ se $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e para todo $k \neq 0$ se $\mathcal{S} = \emptyset$.*

Demonstração: Para $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e $k \neq 1$, temos

$$H_k(G,\mathcal{S};M) = H_k(G,\mathcal{S};\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} L) = H_{k-1}(G;\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} L)) =$$

$$= H_{k-1}(G;\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} (\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} L)) = H_{k-1}(G; Ind_{\{1\}}^G(\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} L)) \simeq$$

$$\overset{Shapiro}{\simeq} H_{k-1}(\{1\};\Delta \otimes_{\mathbb{Z}} L) = \{0\}$$

Para $\mathcal{S} = \emptyset$ e $k \neq 0$, temos

$$H_k(G;M) = H_k(G;\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} L) = H_k(G; Ind_{\{1\}}^G L) \overset{Shapiro}{\simeq} H_k(\{1\};L) = \{0\}$$

■

Proposição 3.1.2 *Os grupos de cohomologia relativa se anulam para o módulo coinduzido $M = Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, L)$, onde L é um grupo abeliano qualquer, para todo $k \neq 1$ se $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e para todo $k \neq 0$ se $\mathcal{S} = \emptyset$.*

Demonstração: Para $\mathcal{S} \neq \emptyset$ e $k \neq 1$, temos

$$H^k(G,\mathcal{S};M) = H^k(G,\mathcal{S};Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G,L)) = H^{k-1}(G;Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta,Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G,L))) \simeq$$

$$\simeq H^{k-1}(G;Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G,Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta,L))) = H^{k-1}(G;Coind_{\{1\}}^{G}(Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta,L))) \simeq$$

$$\overset{Shapiro}{\simeq} H^{k-1}(\{1\},Hom_{\mathbb{Z}}(\Delta,L)) = \{0\}$$

Para $\mathcal{S} = \emptyset$ e $k \neq 0$, temos

$$H^k(G;M) = H^k(G;Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G,L)) = H^k(G;Coind_{\{1\}}^{G}L) \overset{Shapiro}{\simeq} H^k(\{1\};L) = \{0\}$$

■

3.2 $H_*((\_,\_);\_)$ e $H^*((\_,\_);\_)$ como funtores de duas variáveis

Nesta seção, veremos que $H_*((\_,\_);\_)$ e $H^*((\_,\_);\_)$ são funtores de duas variáveis $((G,\mathcal{S});M)$.

Mostremos inicialmente que $H_*((\_,\_);\_)$ é um funtor covariante em uma determinada categoria $\mathcal{C}$.

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são pares $((G,\mathcal{S});M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G e M é um RG-módulo, cujos morfismos são aplicações

$$\psi : ((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow ((L,\mathcal{R} = \{R_j, j \in J\});N)$$

consistindo de:
(a) Um homomorfismo $\alpha : G \longrightarrow L$;
(b) Uma aplicação $\pi : I \longrightarrow J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$;
(c) Um homomorfismo $\phi : M \longrightarrow N$ tal que $\phi(g.m) = \alpha(g).\phi(m)$, isto é, ϕ é um homomorfismo de RG-módulos onde consideramos N como RG-módulo via α.

Vamos ver que nestas condições existe um homomorfismo (induzido por ψ):

$$\psi_* : H_*(G,\mathcal{S};M) \longrightarrow H_*(L,\mathcal{R};N).$$

Sejam

$$\varepsilon_G : R(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{R}(G/S_i) \longrightarrow R$$

$$xS_i \longmapsto 1$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon_L : R(L/\mathcal{R}) = \bigoplus_{j\in J} R(L/R_i) &\longrightarrow R\\ lR_j &\longmapsto 1\end{aligned}$$

as aplicações aumentações.

Denotemos por Δ o núcleo de ε_G e por Δ', o núcleo de ε_L.

Usando (b) nós temos uma aplicação, definida nos geradores de $R(G/\mathcal{S})$ e estendida por linearidade

$$\begin{aligned}\rho : R(G/\mathcal{S}) &\longrightarrow R(L/\mathcal{R})\\ xS_i &\longmapsto \alpha(x)R_{\pi(i)}.\end{aligned}$$

Temos: ρ está bem definida, é homomorfismo e $\rho(\Delta) \subset \Delta'$.
De fato:

Seja $\bar{\rho} = \rho\mid_{\Delta}: \Delta \longrightarrow \Delta'$.

Temos então:

$$\begin{aligned}(\bar{\rho},\phi)_* : \Delta \otimes_R M &\longrightarrow \Delta' \otimes_R N\\ x \otimes_R m &\longmapsto \rho(x) \otimes_R \phi(m)\end{aligned}$$

onde $\phi : M \longrightarrow N$ é dada em (c).

Por simplicidade, denotemos $\Delta \otimes_R M$ por $\mathcal{M}$ e $\Delta' \otimes_R N$ por $\mathcal{N}$.

Temos que $\mathcal{M}$ é um RG-módulo com G-ação diagonal:

$$g(x \otimes m) = gx \otimes gm, \text{ para todo } x \in \Delta, m \in M \text{ e } g \in G.$$

Da mesma forma, $\mathcal{N}$ é um RL-módulo com L-ação diagonal.

Lema 3.2.1 *A aplicação $(\bar{\rho},\phi)_* : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ satisfaz a condição $(\bar{\rho},\phi)_*(g.(\bar{x} \otimes m)) = \alpha(g).(\bar{\rho},\phi)_*(\bar{x} \otimes m)$, para todo $x \otimes m \in \mathcal{M}$ e $g \in G$, isto é, $(\bar{\rho},\phi)_*$ é uma aplicação de RG-módulos onde $\mathcal{N}$ é visto como RG-módulo via α.*

Demonstração: Inicialmente, note que $\rho : R(G/\mathcal{S}) \longrightarrow R(L/\mathcal{R})$ é tal que

$$\rho(g.u) = \alpha(g).\rho(u) \tag{3.1}$$

para todo $g \in G$ e $u \in R(G/\mathcal{S})$.
De fato: basta verificarmos isto nos geradores de $R(G/\mathcal{S})$.
Seja xS_i um gerador de $R(G/\mathcal{S})$. Temos:

$$\begin{aligned}
\rho(g.(xS_i)) &= \rho(gxS_i) && \text{(definição da ação de } G \text{ em } R(G/\mathcal{S}))\\
&= \alpha(gx)R_{\pi(i)} && \text{(pela definição de } \rho)\\
&= \alpha(g)\alpha(x)R_{\pi(i)} && (\alpha \text{ é homomorfismo})\\
&= \alpha(g).(\alpha(x)R_{\pi(i)}) && \text{(ação de } L \text{ em } R(L/\mathcal{R}))\\
&= \alpha(g).\rho(xS_i) && \text{(definição de } \rho).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que 3.2 é verdadeira.

Sejam agora $\bar{x} \otimes m \in \mathcal{M},\ g \in G$.

$$\begin{aligned}
(\bar{\rho},\phi)_*(g.(\bar{x}\otimes m)) &= (\bar{\rho},\phi)_*(g\bar{x}\otimes gm)\\
&= \rho(g\bar{x})\otimes\phi(gm)\\
&= (\alpha(g).\rho(\bar{x}))\otimes(\alpha(g).\phi(m))\\
&= \alpha(g).(\rho(\bar{x})\otimes\phi(m))\\
&= \alpha(g).(\bar{\rho},\phi)_*(\bar{x}\otimes m).
\end{aligned}$$

Logo, $(\bar{\rho},\phi)_*(g.(\bar{x}\otimes m)) = \alpha(g).(\bar{\rho},\phi)_*(\bar{x}\otimes m)$, ou seja, $(\bar{\rho},\phi)_*$ é uma aplicação de RG-módulos

■

Teorema 3.2.1 *$H_*((\_,\_);\_)$ é um funtor covariante na categoria $\mathcal{C}$.*

Demonstração: Denotemos por $\bar{\psi}$ a aplicação $(G \xrightarrow{\alpha} L, \mathcal{M} \xrightarrow{(\bar{\rho},\phi)_*} \mathcal{N})$.

Pelo Lema anterior,$(\bar{\rho},\phi)_*$ é uma aplicação de RG-módulos e daí, por [9](p. 75), temos que $\bar{\psi}$ induz, para todo $k \in \mathbb{Z}$, um homomorfismo

$$\bar{\psi}_k : H_k(G;\mathcal{M}) \longrightarrow H_k(L;\mathcal{N}).$$

Mas, por definição,

$$H_k(G,\mathcal{S};M) = H_{k-1}(G;\mathcal{M}) \text{ e } H_k(L,\mathcal{R};N) = H_{k-1}(L;\mathcal{N}).$$

Logo, considerando $\psi_k = \bar{\psi}_{k-1}$ temos o homomorfismo induzido

$$\psi_* : H_*(G,\mathcal{S};M) \longrightarrow H_*(L,\mathcal{R};N).$$

Daí, $H_*((\_,\_);\_)$ é um funtor covariante da categoria $\mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{A}$ dos grupos abelianos. De fato, verifica-se que:

• Se $\psi : ((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow ((G,\mathcal{S});M)$ é a aplicação identidade, então $\psi_* : H_*((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow$ $\longrightarrow H_*((G,\mathcal{S});M)$ é o homomorfismo identidade.

• Se $\psi : ((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow ((L,\mathcal{R};N)$ e $\gamma : ((L,\mathcal{R});N) \longrightarrow ((K,\mathcal{O});P)$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então $(\gamma\circ\psi)_* = \gamma_*\circ\psi_*$. ■

Mostraremos agora que a cohomologia relativa é um funtor contravariante em uma determinada categoria $\mathcal{D}$.

Seja $\mathcal{D}$ a categoria cujos objetos são pares $((G,\mathcal{S});M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S}=\{S_i, i\in I\}$ é uma família de subgrupos de G e M é um RG-módulo, cujos morfismos são aplicações

$$\psi : ((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow ((L,\mathcal{R}=\{R_j, j\in J\});N)$$

consistindo de:
(a) Um homomorfismo $\alpha : G \longrightarrow L$;
(b) Uma aplicação $\pi : I \longrightarrow J$ tal que $\alpha(S_i)\subset R_{\pi(i)}$;
(c) Um homomorfismo $\phi : N \longrightarrow M$ tal que $\phi(\alpha(g)n)=g\alpha(n)$, isto é, ϕ é um homomorfismo de RG-módulos onde consideramos N como RG-módulo via α.

Vamos ver que nestas condições existe um homomorfismo (induzido por ψ):

$$\psi^* : H^*(G,\mathcal{S};M) \longrightarrow H^*(L,\mathcal{R};N).$$

Sejam

$$\begin{aligned}\varepsilon_G : R(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i\in I}\mathbb{R}(G/S_i) &\longrightarrow R\\ xS_i &\longmapsto 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varepsilon_L : R(L/\mathcal{R}) = \bigoplus_{j\in J} R(L/R_i) &\longrightarrow R\\ lR_j &\longmapsto 1\end{aligned}$$

as aplicações aumentações.

Denotemos por Δ o núcleo de ε_G e por Δ', o núcleo de ε_L.

Definamos

$$\begin{aligned}\rho : R(G/\mathcal{S}) &\longrightarrow R(L/\mathcal{R})\\ xS_i &\longmapsto \alpha(x)R_{\pi(i)}\end{aligned}$$

nos geradores e estendamos ρ por linearidade.

Temos: ρ está bem definida, é homomorfismo e $\rho(\Delta)\subset\Delta'$.

Deste modo, podemos definir $\bar{\rho}=\rho\mid_{\Delta}: \Delta \longrightarrow \Delta'$.

Temos então:

$$(\bar{\rho},\phi)^* : Hom_R(\Delta',N) \longrightarrow Hom_R(\Delta,M)$$

dada por:

$$(\bar{\rho},\phi)^*(f)=\phi\circ f\ \bar{\rho},$$

onde $\phi : M \longrightarrow N$ é dada em (c).

Por simplicidade, denotemos $Hom_R(\Delta', N)$ por $\mathcal{N}$ e $Hom_R(\Delta, M)$ por $\mathcal{M}$.
Temos que $\mathcal{N}$ é um RL-módulo com L-ação diagonal:

$$(yf)(x) = yf^{-1}(y^{-1}x), \text{para todo} x \in \Delta', f \in \mathcal{N} \text{ e } y \in L. \qquad \text{(I)}$$

Da mesma forma, $\mathcal{M}$ é um RG-módulo com G-ação diagonal.

Lema 3.2.2 *A aplicação $(\bar{\rho}, \phi)^* : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$, definida anteriormente, satisfaz a condição*

$$(\bar{\rho}, \phi)^*(\alpha(g)f) = g(\bar{\rho}, \phi)^*(f),$$

para todo $f \in \mathcal{N}$ e todo $g \in G$, isto é, $(\bar{\rho}, \phi)^*$ é uma aplicação de RG-módulos onde $\mathcal{N}$ é visto como RG-módulo via α.

Demonstração: Inicialmente, note que $\rho : R(G/\mathcal{S}) \longrightarrow R(L/\mathcal{R})$ é tal que

$$\rho(g.u) = \alpha(g).\rho(u) \tag{3.2}$$

para todo $g \in G$ e $u \in R(G/\mathcal{S})$.

De fato: basta verificarmos isto nos geradores de $R(G/\mathcal{S})$.
Seja xS_i um gerador de $R(G/\mathcal{S})$. Temos:

$$\rho(g.(xS_i)) = \rho(gxS_i) = \alpha(gx)R_{\pi(i)} = \alpha(g)\alpha(x)R_{\pi(i)} = \alpha(g)(\alpha(x)R_{\pi(i)}) = \alpha(g).\rho(xS_i).$$

Logo, $\rho(g.(xS_i)) = \alpha(g).\rho(xS_i)$, para todo xS_i gerador de $R(G, \mathcal{S})$.
Portanto, $\rho(g.u) = \alpha(g).\rho(u)$, para todo $g \in G$ e $u \in R(G/\mathcal{S})$.
Sejam agora $f \in \mathcal{M}, u \in \Delta = \ker(\varepsilon_G)$. Temos:

$$\begin{aligned}(\bar{\rho}, \phi)^*(\alpha(g)f)(u) &= (\phi \circ (\alpha(g)f) \circ \bar{\rho})(u)\\ &= \phi(\alpha(g)f)(\bar{\rho}(u))\\ &\overset{(I)}{=} \phi(\alpha(g)f(\alpha(g^{-1}\bar{\rho}(u))))\\ &= g\phi(f(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u)))\\ &= g(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u)).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(g(\bar{\rho}, \phi)^*)(f)(u) &= g((\bar{\rho}, \phi)^*(f)(g^{-1}u))\\ &= g((\phi \circ f \circ \bar{\rho})(g^{-1}u))\\ &= g((\phi \circ f)(\bar{\rho}(g^{-1}u)))\\ &= g(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u)).\end{aligned}$$

Logo, $(\bar{\rho}, \phi)^*(\alpha(g).f) = g.(\bar{\rho}, \phi)^*(f)$, ou seja, $(\bar{\rho}, \phi)^*$ é uma aplicação de RG-módulos

■

Teorema 3.2.2 *$H^*((\_,\_);\_)$ é um funtor contravariante na categoria $\mathcal{D}$.*

Demonstração: Denotemos por ψ a aplicação $(G \xrightarrow{\alpha} L, \mathcal{N} \xrightarrow{(\bar{\rho},\phi)^*} \mathcal{M})$.

Pelo Lema anterior, $(\bar{\rho},\phi)^*$ é uma aplicação de RG-módulos e, assim, temos que ψ induz, para todo $k \in \mathbb{Z}$, um homomorfismo

$$\bar{\psi}^k : H^k(L;\mathcal{N}) \longrightarrow H^k(G;\mathcal{M}).$$

Mas, por definição,

$$H^k(G,\mathcal{S};M) = H^{k-1}(G;\mathcal{M}) \text{ e } H^k(L,\mathcal{R};N) = H^{k-1}(L;\mathcal{N}).$$

Logo, temos o homomorfismo induzido

$$\psi^* : H^*(L,\mathcal{R};N) \longrightarrow H^*(G,\mathcal{S};M).$$

Verifica-se que:

• Se $\psi : ((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow ((G,\mathcal{S});M)$ é a aplicação identidade, então $\psi^* : H^*((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow \longrightarrow H^*((G,\mathcal{S});M)$ é o homomorfismo identidade.

• Se $\psi : ((G,\mathcal{S});M) \longrightarrow ((L,\mathcal{R};N)$ e $\gamma : ((L,\mathcal{R});N) \longrightarrow ((K,\mathcal{O});P)$ são morfismos em $\mathcal{D}$, então $(\gamma \circ \psi)^* = \gamma^* \circ \psi^*$.

Segue então que $H_*((\_,\_);\_)$ é um funtor contravariante da categoria $\mathcal{D}$ na categoria $\mathcal{A}$ dos grupos abelianos. ■

O resultado a seguir é muito importante em nosso estudo. Ele é fortemente utilizado nas definições e demonstrações presentes no último capítulo.

Proposição 3.2.1 *Sejam $(G,\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\})$ um par grupo e M um RG-módulo. Então, temos as sequências exatas longas:*

(i) $$\cdots \to H^k(G;M) \overset{res^G_S}{\to} H^k(\mathcal{S};M) \overset{\delta'}{\to} H^{k+1}(G,\mathcal{S};M) \overset{J'}{\to} H^{k+1}(G;M) \to \cdots$$

(ii) $$\cdots \to H_{k+1}(G;M) \overset{J}{\to} H_{k+1}(G,\mathcal{S};M) \overset{\delta}{\to} H_k(\mathcal{S};M) \overset{cor^G_S}{\to} H_k(G;M) \to \cdots$$

que são naturais no RG-módulo M e no par $(G,\mathcal{S})$, onde $res^G_S : H^k(G;M) \longrightarrow H^k(\mathcal{S};M) := \prod_{i\in I} H^k(S_i;M)$ é dada por $res^G_S([f]) = (res^G_{S_i}[f])_{i\in I}$ e $cor^G_S : H_k(\mathcal{S};M) := \bigoplus_{i\in I} H_k(S_i;M) \longrightarrow H_k(G;M)$ é dada por $cor^G_S(\sum_{i\in I}[f_{ik}]) = \sum_{i\in I} cor^G_{S_i}[f_{ik}]$ são as aplicações induzidas, no nível k de (co)homologia, pelas inclusões $S_i \overset{i}{\hookrightarrow} G$.

Demonstração: [8], Proposição 1.1. ■

3.3 Interpretação Topológica da (Co)homologia Relativa

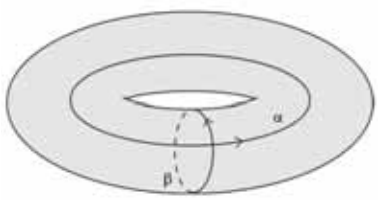
Nessa seção, definiremos Pares Eilenberg-MacLane, e veremos um dos principais resultados dessa teoria, que é a interpretação topológica da (co)homologia relativa de grupos.

Definição 3.3.1 *Um par grupo* $(G, \mathcal{S})$ *é* **realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane** $(X, Y) = K(G, \mathcal{S}, 1)$, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ *se:*

(i) X *é um* $K(G, 1)$ *complexo celular;*

(ii) Y *é um subcomplexo cujas componentes conexas* Y_i, $i \in I$, *são* $K(S_i, 1)$ *complexos, de tal modo que a aplicação* $i_* : \pi_1(Y_i) \to \pi_1(X)$ *induzida da inclusão* $i : Y_i \hookrightarrow X$ *é injetiva e aplica* $\pi_1(Y_i)$ *sobre* $S_i \subset G$, *depois de uma conveniente mudança de ponto base.*

Exemplo 3.3.1 *Sejam* $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ *e* $\mathcal{S} = \{S\}$, *onde* $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$. *Considere* X *o toro* T^2 *e,* α *e* β *os laços mostrados na figura abaixo:*



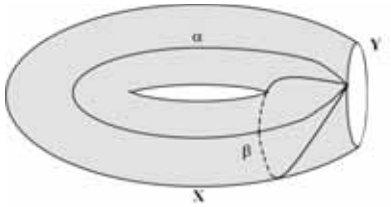
Seja Y *o laço representando por* α. *Temos que* (X, Y) *é um par Eilenberg-MacLane realizando* $(G, \mathcal{S})$.

De fato, $\pi_1(T^2) = \langle [\alpha] \rangle \oplus \langle [\beta] \rangle \simeq G$ e $S \simeq \langle [\alpha] \rangle$, identificando $[\alpha]$ com a e $[\beta]$ com b. Assim, sendo o T^2 conexo e o recobrimento universal do T^2 contrátil, temos que $X = T^2$ é um $K(G, 1)$. Como Y é o homemorfo a S^1 temos que $Y = K(S, 1)$-complexo.

Além disso, a aplicação $i_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$, definida por $i_*([\alpha]) = [i \circ \alpha]$, para todo $[\alpha] \in \pi_1(Y)$, onde $i : Y \to X$ é a inclusão, é injetora.

Portanto, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando $(G, \mathcal{S})$.

Exemplo 3.3.2 *Sejam* $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ *e* $\mathcal{S} = \{S\}$, *onde* $S = \langle bab^{-1}a^{-1} \rangle$. *Temos que* $(G, \mathcal{S})$ *é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane, onde* X *é o toro* T^2 *menos um disco aberto* D *e* Y *é o bordo de* X.



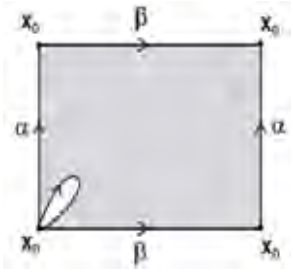
De fato, considere α e β como na figura acima.

Temos que X tem o mesmo tipo de homotopia da figura oito que denotaremos por F.

Logo, $\pi(X) \simeq \pi(F) = \langle[\alpha]\rangle * \langle[\beta]\rangle \simeq G \Longrightarrow \pi_1(X) = G$, identificando $[\alpha]$ com a e $[\beta]$ com b.

Além disso, X é um CW-complexo conexo e, como F tem recobrimento universal contrátil e X tem o mesmo tipo de homotopia de F, temos que X tem recobrimento universal contrátil. Portanto, X é um $K(G,1)$-complexo.

Representando X como na figura abaixo, vemos que $\pi(Y) \simeq \langle sts^{-1}t^{-1}\rangle = S$, identificando α com t e β com s.



Como Y é homemorfo a S^1 temos que $Y = K(S,1)$ complexo.

A aplicação

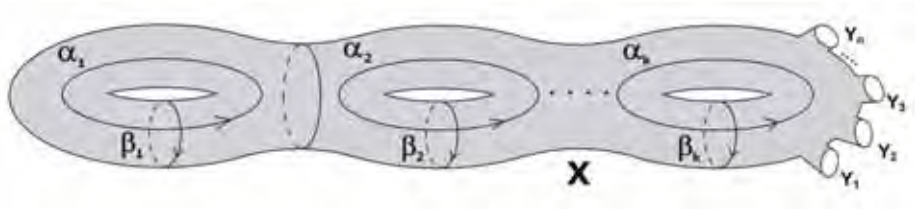
$$i_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$$

$$[\alpha] \longmapsto [i \circ \alpha],$$

onde $i : Y \to X$ é a inclusão, é injetora.

Portanto, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando $(G, \mathcal{S})$.

Exemplo 3.3.3 *Em geral, seja* $G = \langle a_1\rangle * \langle b_1\rangle * \cdots * \langle a_k\rangle * \langle b_k\rangle$, *onde* $a_j = [\alpha_j]$ *e* $b_j = [\beta_j]$, $j = 1, ..., k$, *são as classes de homotopia dos laços* α_j, β_j *mostrados na figura abaixo, e* $\mathcal{S} = \{S_i = \pi_1(Y_i),\ i = 1, ..., n\}$. *Temos que* (G, S) *é realizado topologicamente por um par Eilenberg-Maclane* (X, Y), *onde* X *é a superfície orientada de genus* k *menos* n *discos abertos, e* Y *é o bordo de* X.



Veremos agora um resultado que relaciona a (co)homologia de grupos com a (co)homologia de pares Eilenberg-MacLane.

Teorema 3.3.1 *Se* (X, Y) *é um par Eilenberg-MacLane realizando o par grupo* $(G, \mathcal{S})$ *e* M *é um* $\mathbb{Z}G$*-módulo trivial, então*

$$H_k(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_k(X, Y; M) \quad e,$$

$$H^k(G, \mathcal{S}; M) \simeq H^k(X, Y; M).$$

Demonstração: [8], Teo. 1.3.

■

Observação 3.3.1 *Como no caso da (co)homologia absoluta, se M for um $\mathbb{Z}G$-módulo qualquer, também existe uma interpretação topológica, a saber:*

$$H_k(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_k(X, Y; \mathcal{M}) \text{ e } H^k(G, \mathcal{S}; M) \simeq H^k(X, Y; \mathcal{M}),$$

onde $\mathcal{M}$ denota o sistema de coeficientes locais no $K(G, 1)$ associado ao $\mathbb{Z}G$-módulo M.

Capítulo

4

Grupos e Pares de Dualidade

Antes de estudarmos os conceitos de grupos e pares de dualidade, apresentamos algumas definições e resultados sobre condições de finitude, tais como dimensão (co)homológica e grupos de tipo FP e FL, bem como a interpretação topológica destes dois últimos.

4.1 Alguns Resultados sobre Condições de Finitude

Dimensão (Co)homológica

Seja R um anel comutativo com unidade.

Definição 4.1.1 *Sejam G um grupo e $\mathcal{H} = \{n \in \mathbb{N} \mid H^n(G; M) \neq 0,$ para algum RG-módulo $M\}$. Se $\mathcal{H}$ for limitado superiormente, a* **dimensão cohomológica** *do grupo G sobre R, é dada por: $cd_R(G) = sup\mathcal{H}$. Caso $\mathcal{H}$ não seja limitado superiormente, $cd(G) = \infty$.*

Observação 4.1.1 *A dimensão homológica, denotada $hd(G)$ é definida similarmente:*

$$hd_R G = sup\{n \mid H_n(G; M) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}.$$

Observação 4.1.2 *Pode-se mostrar que, se $cd_R G < \infty$, então*

$$cd_R G = sup\{k \mid H^k(G; F) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo livre } F\}.$$

Proposição 4.1.1 *Seja H um subgrupo de G. Então,*

$$cd\ H \leq cd\ G.$$

A igualdade é válida se $cd\ G < \infty$ e $[G : H] < \infty$.

Demonstração: Seja $cd\ H = n$. Então, por definição, existe M tal que $H^n(H; M) \neq 0$ e $H^k(H; M) = 0,\ k > n$.

Mas,

$$0 \neq H^n(H; M) \overset{Shapiro}{\simeq} H^n(G; Coind_H^G M).$$

Deste modo,

$$H^n(G; Coind_H^G M) \neq 0,$$

ou seja, existe $N = Coind_H^G M$ tal que $H^n(G; N) \neq 0$. Assim, $cd \geq n$.

Portanto,

$$cd\ H \leq cd\ G.$$

Consideremos agora as hipóteses $cd\ G < \infty$ e $[G : H] < \infty$.

Seja $cd\ G = n$. Pela Observação 4.1.2, existe um RG-módulo livre F, com $H^n(G; F) \neq 0$.

Suponhamos F' um RH-módulo do mesmo posto de F. Assim, podemos escrever

$$F = \bigoplus_{j \in J} (RG)_j \qquad \text{e} \qquad F' = \bigoplus_{j \in J} (RH)_j.$$

Temos:

$$Ind_H^G F' = RG \otimes_{RH} F' = RG \otimes_{RH} \bigoplus_{j \in J} (RH)_j = \bigoplus_{j \in J} (RG \otimes_{RH} RH)_j \simeq \bigoplus_{j \in J} (RG)_j = F.$$

Deste modo,

$$H^n(G; F) = H^n(G; Ind_H^G F') \overset{Prop.1.3.3}{\simeq} H^n(G; Coind_H^G F') \overset{Shapiro}{\simeq} H^n(H; F').$$

Visto que $H^n(G; F) \neq 0$, temos $H^n(H; F') \neq 0$. Logo, existe F' tal que $H^n(H; F') \neq 0$ e, deste modo, $cd\ H \geq n = cd\ G$, isto é, $cd\ G \leq cd\ H$.

Portanto, $cd\ G = cd\ H = n$.

■

Observação 4.1.3 *Se R admite uma resolução projetiva sobre RG, de comprimento finito, isto é,*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

então, $cd_R G \leq n$ e $hd_R G \leq n$.

Observação 4.1.4 *Temos $cd_R G \geq 0$, pois*

$$H^0(G; R) \overset{Prop.2.2.2}{\simeq} R^G \simeq R \neq 0.$$

Grupos de Tipo FP e FL

Definição 4.1.2 *Um grupo G é de* **tipo FP** *(tipo FL) sobre R se R admite uma resolução projetiva (livre) finita $\varepsilon : P \to R$ sobre RG:*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow G,$$

com cada P_i finitamente gerado como RG-módulo.

Observação 4.1.5 *Se G é do tipo FP sobre $\mathbb{Z}$, então G é do tipo FP sobre R, pois se $\varepsilon : P \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $\overline{\varepsilon} : P \otimes_R R \to R$ é uma resolução projetiva finita de R sobre RG.*

Exemplo 4.1.1 *Segue diretamente dos Exemplos 1.1.6 e 1.1.7, respectivamente, que $F(S)$, onde $S = \{s_1, ..., s_n\}$, e $\mathbb{Z}$ são do tipo FP sobre $\mathbb{Z}$.*

Observação 4.1.6 *É claro que, se G é de tipo FL, então G é de tipo FP.*

Interpretação Topológica para Grupos de Tipo FP e FL

Ser um grupo de tipo FP significa, intuitivamente, que certas condições de finitude (tais como dimensão cohomológica finita) são satisfeitas por G.

Quando se trata de CW-complexos, satisfazer condições de finitude significa ter um número finito de células ou dimensão finita. Como para todo grupo G existe um CW-complexo $Y = K(G, 1)$, veremos agora quais condições de finitude deve satisfazer Y se G for do tipo FP ou FL.

Proposição 4.1.2 *Se existe um complexo $K(G, 1)$ finito, então G é de tipo FL (e portanto de tipo FP).*

Demonstração: Seja Y um $K(G, 1)$ complexo finito. Pela Proposição 1.1.5, o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{Y}$ de Y é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Logo, G é de tipo FL.

■

Em vista da Proposição anterior, temos os seguintes exemplos de grupos de tipo FL:

Exemplo 4.1.2 *Grupos livres de posto finito: $G = F(S)$, S : finito (bouquet de círculos) são do tipo FL.*

Exemplo 4.1.3 *Grupos de superfície: Y = soma conexa de g toros ou g planos projetivos, ($Y \neq S^2$, $Y \neq P^2$) são do tipo FL.*

Exemplo 4.1.4 *Grupos abelianos livres de posto finito:* $Y = S^1 \times ... \times S^1$ *(toro n-dimensional) são do tipo* FL.

A propriedade FP também admite uma interpretação topológica e, para isso, precisamos da definição a seguir:

Definição 4.1.3 *Um espaço topológico* Y *é* **finitamente dominado** *se existe um CW-complexo finito* K*, tal que* Y *é um retrato de* K*, isto é, existem aplicações contínuas* $i : Y \to K$ *e* $r : K \to Y$*, com* $r \circ i = id_Y$.

Teorema 4.1.1 *Seja* G *um grupo. Se existe um* $K(G, 1)$ *finitamente dominado, então* G *é do tipo* FP.

Demonstração: [9],VIII.6.4. ■

Se G for finitamente apresentado (isto é, existe um número finito de geradores e relações para G), as recíprocas da Proposição e do Teorema acima são válidas, ou seja,

Teorema 4.1.2 *Seja* G *um grupo finitamente apresentado. Se* G *é de tipo FL (respec. FP), então existe um complexo* $K(G, 1)$ *finito (respec. finitamente dominado).*

Demonstração: [9], VIII.7.1. ■

4.2 Grupos de Dualidade

Veremos agora o importante conceito de **grupos de dualidade**, isto é, grupos que satisfazem certos isomorfismos de dualidade em homologia e cohomologia.

Definição 4.2.1 *Um grupo* G *é denominado* **grupo de dualidade de dimensão** n **sobre** R*, ou simplesmente um* D^n**-grupo**, *se existe um* RG*-módulo* C*, chamado* **módulo dualizante de** G*, e isomorfismos naturais tais que*

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M), \tag{4.1}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ *e todo* RG*-módulo* M*, onde* $C \otimes_R M$ *é visto como* RG*-módulo com a* G*-ação diagonal.*

Se $C \simeq R$ *como* RG*-módulo, dizemos que* G *é um* **grupo de dualidade de Poincaré de dimensão** n **sobre** R*, ou simplesmente um* PD^n**-grupo**. *Neste caso, se a ação de* G *em* $C \simeq R$ *é trivial, dizemos que* G *é* **orientável**. *Caso contrário,* G *é dito* **não orientável**;

Observação 4.2.1 *Se* $R = \mathbb{Z}_2$*, a única ação possível de* G *em* R *é trivial. Assim,* PD^n*-grupos sobre* $\mathbb{Z}_2$ *são sempre orientáveis.*

Mostremos agora que o módulo dualizante C e a dimensão n que aparecem na definição de um grupo de dualidade são determinados por G.

Proposição 4.2.1 *Seja G um D^n-grupo com módulo dualizante C, então:*
(i) $C \neq 0$;
(ii) $C \simeq H^n(G; RG)$
(iii) $cd_R(G) = n$.

Demonstração:
(i) Usando $k = 0$ e $M = R$ no isomorfismo de dualidade, temos

$$H^0(G; R) \simeq H_n(G; C \otimes_R R) \simeq H_n(G; C).$$

Agora, $H^0(G; R) \simeq R^G = R$ (pois R é visto como RG-módulo com a G-ação trivial). Assim,

$$H_n(G; C) \simeq R \neq \{0\}.$$

Portanto, $C \neq 0$.

(ii) Usando $k = n$ e $M = RG$ no isomorfismo de dualidade, temos:

$$H^n(G; RG) \simeq H_0(G; C \otimes_R RG) \simeq (C \otimes_R RG) \otimes_{RG} R \simeq C \otimes_R (RG \otimes_{RG} R) \simeq C \otimes_R R \simeq C.$$

Portanto, $C \simeq H^n(G; RG)$.

(iii) Por (i) e (ii), temos que $H^n(G; RG) \neq \{0\}$. Logo, $n \leq cd_R(G)$.
Por outro lado,

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M) = 0, \text{se } k > n, \text{ pois} n - k < 0.$$

Assim, $cd_R(G) \leq n$. Portanto, $cd_R(G) = n$. ■

Observação 4.2.2 *Foi demonstrado em [7], Teo. 3.9.2, que todo grupo de dualidade sobre R é de tipo FP sobre R.*

Logo, para definirmos grupos de dualidade, poderíamos nos restringir à categoria dos grupos de tipo FP.

Em [9],VIII.10.1, é demonstrado que *as seguintes condições são equivalentes para um grupo de tipo FP:*

(i) Existem um número inteiro n e um RG-módulo C tais que

$$H^i(G;M) \simeq H_{n-i}(G; C \otimes_R M)$$

para todos os RG-módulos M e todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Existem isomorfismos naturais

$$H^i(G; \_\,) \simeq H_{n-i}(G; C \otimes \_\,),$$

onde $n = cd_R G$ e $C = H^n(G; RG)$, para todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.

(iii) Existe um inteiro n tal que $H^i(G; RG \otimes A) = 0$, para todo $i \neq n$ e todos os grupos abelianos A.

Assim, se G é um grupo do tipo FP e quisermos mostrar que G é um grupo de dualidade, basta mostrarmos que a condição **(i)** é verdadeira.

Usaremos este resultado nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.2.1 *Se G é um grupo cíclico infinito, então G é um PD^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$.*

De fato, temos que G é de tipo FP e, vimos no Exemplo 2.2.1, que

$$H_1(G;M) = M^G \overset{Prop.2.2.2}{\simeq} H^0(G;M).$$
$$H^1(G;M) = M_G \overset{Prop.2.2.1}{\simeq} H_0(G;M).$$
$$H^n(G;M) = 0 \simeq H^{1-n}(G;M),\ \forall\ n \geq 2.$$

Portanto, G é um PD^1-grupo.

Exemplo 4.2.2 *Seja $G = F(S)$ o grupo livre com k geradores, $1 \leq k \leq \infty$. Temos que G é um D^1-grupo, mas não é um PD^1-grupo, se $k > 1$.*

De fato, temos que G é de tipo FP sobre $\mathbb{Z}$ e que $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$ pois, pelo Exemplo 1.1.7,

$$0 \longrightarrow (\mathbb{Z}G)^{(S)} \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 1.

Assim, pela Observação 4.1.3,

$$cd_{\mathbb{Z}} G \leq 1.$$

Se $cd_{\mathbb{Z}} G = 0$, teríamos $G = \{1\}$. Portanto, $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$.

Vamos mostrar que a condição (iii) do Teorema acima é verdadeira, isto é, que $H^i(G; \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$, para todo grupo abeliano A e $i \neq 1$.

De fato,

$$H^0(G;\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}}A)=H^0(G;Ind_{\{1\}}^{G}A)\overset{Prop.2.2.2}{\simeq}(Ind_{\{1\}}^{G}A)^{G}\overset{Prop.1.3.5}{=}0$$

e, $H^i(G;\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}}A)=0$, para $i>1$ (pois $cdG=1$).

Logo, G é um D^1-grupo.

Agora, consideremos $k>1$.

Temos que $H^0(G)=\mathbb{Z}$, o qual é finitamente gerado, e $H_1(G)=\mathbb{Z}^k$ é também finitamente gerado.

Agora, consideremos F_1 e T_1 denotando, respectivamente, a parte livre e de torção de $H_1(G)$, temos

$$F_1=\mathbb{Z}^k \quad e \quad T_1=\{0\}.$$

Como $\mathbb{Z}$ é domínio de ideais principais temos, por [14], p. 136, Prop. 23.18, que

$$H^1(G)\simeq F_1\oplus\{0\}=\mathbb{Z}^k\oplus\{0\}=\mathbb{Z}^k.$$

Por outro lado, como G é um D^1-grupo, temos

$$H^1(G)=H^1(G;\mathbb{Z})\simeq H_0(G;C\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})\simeq H^0(G;C).$$

Se $C\simeq\mathbb{Z}$, com G-ação trivial, temos

$$H^0(G;C)\simeq H_0(G;\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}.$$

Mas, $H_0(G;C)\simeq H^1(G)\simeq\mathbb{Z}^k$. Logo, $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}^k$, o que é um absurdo, pois $k>1$.

Se $C\simeq\mathbb{Z}$, com G-ação não trivial, temos que $g.n=-n,\ \forall\ n\in\mathbb{Z}\ e\ \ \forall\ g\in G$.

Deste modo,

$$B=\langle g.n-n:\ n\in\mathbb{Z}\ e\ g\in G\rangle\simeq 2\mathbb{Z}.$$

Assim,

$$H_0(G;C)\simeq C_G=\mathbb{Z}/B\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}_2.$$

Logo,

$$H_0(G;C)=\mathbb{Z}^k\simeq\mathbb{Z}_2,\ \text{ o que é um absurdo.}$$

Então, C não é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e, portanto, G não é um PD^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.2.3 *Se $G\simeq\mathbb{Z}_r$ (grupo cíclico finito de ordem r) então, G não é um grupo de dualidade de Poincaré (sobre $\mathbb{Z}$).*

De fato, se G fosse um PD^n-grupo, para algum n, teríamos

$$H^k(G;M)\simeq H_{n-k}(G;M),$$

para todo $k\in\mathbb{Z}$ e todo $\mathbb{Z}G$-módulo M.

Em particular, para $M=\mathbb{Z}$, teríamos

$$H^k(G;\mathbb{Z}) \simeq H_{n-k}(G;\mathbb{Z}) \quad (*).$$

Mas, pelo Exemplo 2.2.2, temos

$$H^{2k}(G;M) = \mathbb{Z}_r, \ \forall\ k \in \mathbb{Z}.$$

Se $(*)$ for verdadeira, teremos

$$H^{n-2k}(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r \ \forall\ k \in \mathbb{Z}.$$

Seja $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $2k_0 > n$. Logo, $n - 2k_0 < 0$ e, assim, $H_{n-2k_0}(G;\mathbb{Z}) = \{0\}$, o que nos dá uma contradição.

Nos exemplos acima, o anel R usado foi sempre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. A classe de grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ está contida na classe de grupos de dualidade sobre R, onde R é qualquer anel comutativo com unidade, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 4.2.2 *Se G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ com módulo dualizante C, então G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R com módulo dualizante $C \otimes_{\mathbb{Z}} R$.*

Demonstração: Seja M um RG-módulo. Temos que:

$$H^k(G;M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} (M \otimes_R R)) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} (R \otimes_R M)) \simeq$$
$$\simeq H_{n-k}(G; (C \otimes_{\mathbb{Z}} R) \otimes_R M).$$

Logo, existe $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$ tal que $H^k(G;M) = H_{n-k}(G; C' \otimes_R M)$.

Portanto, G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R, com módulo dualizante $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

■

Observação 4.2.3 *Os grupos que aparecem nos exemplos anteriores são, de acordo com a Proposição acima, grupos de dualidade sobre R. Em particular, são grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}_2$.*

Proposição 4.2.3 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Se G é um PD^n-grupo com $[G:H] < \infty$, então H é um PD^n-grupo.*

Demonstração: Sendo G um PD^n-grupo, temos

$$H^k(G;M) \simeq H_{n-k}(G;M), \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ e todo } \mathbb{Z}G\text{-módulo } M.$$

Assim,

$$H^k(H;M) \overset{Shapiro}{\simeq} H^k(G; Coind_H^G M) \overset{dualidade}{\simeq} H_{n-k}(G; Coind_H^G M) \overset{Prop.1.3.3}{\simeq}$$

$$\overset{Prop.1.3.3}{\simeq} H_{n-k}(G, Ind_H^G M) \overset{Shapiro}{\simeq} H_{n-k}(H, M).$$

Portanto, H é um PD^n-grupo. ■

4.3 Interpretação Topológica para Grupos de Dualidade de Poincaré

A teoria de grupos de dualidade de Poincaré está relacionada com a teoria de variedades asféricas, ou seja, variedades X que têm o mesmo tipo de homotopia de um complexo $K(G,1)$, onde $G = \pi_1(X)$, que chamaremos de $K(G,1)$-variedades.

Para uma $K(G,1)$**-variedade** n**-dimensional fechada (compacta e sem bordo)**, são válidos os seguintes resultados:

(I) G é de tipo FL e $cdG = n$ ([9], VIII.8.1).

(II) $H^i(G;\mathbb{Z}) = \begin{cases} 0, \ se\ i \neq n; \\ \Omega, \ se\ i = n. \end{cases}$

onde Ω é o módulo de orientação do recobrimento universal X de Y. ([9], VIII.8.2).

Segue então da dualidade de Poincaré para variedades fechadas (compactas e sem bordo) a seguinte interpretação topológica para grupos de dualidade de Poincaré:

Teorema 4.3.1 *Se G é um grupo tal que existe uma variedade asférica X fechada (compacta e sem bordo) de dimensão n, com $\pi_1(X) = G$, então G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ (e consequentemente sobre R), orientável ou não, dependendo da orientação de Y.*

Demonstração: Seja X uma variedade asférica n-dimensional fechada, isto é, uma $K(G,1)$-variedade fechada. Por (I), G é de tipo FL (logo, é FP) e $cdG = n$.

Além disso, por (II), $H^i(G;\mathbb{Z}G) = \begin{cases} 0, \ se\ i \neq n; \\ \Omega, \ se\ i = n. \end{cases}$ onde $\Omega \simeq \mathbb{Z}$ como grupo abeliano.

Pelo Teorema [9], VIII.10.1, p. 220, G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n (orientável $\Leftrightarrow$ Y for orientável).

■

Exemplo 4.3.1 *O toro $T^n = S^1 \times ... \times S^1$ é uma variedade asférica fechada de dimensão n. Logo, $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n.*

Exemplo 4.3.2 *Seja X uma superfície fechada. Pelo Teorema de Classificação de Superfícies ([16], I.5.1), temos as seguintes possibilidades para X:*

i) $X = S^2$

ii) $X = T^2$

iii) $X = P^2$ *(plano projetivo)*

iv) $X = T^2\#...\#T^2$ *(soma conexa de n toros)*

v) $X = P^2\#...\#P^2$ *(soma conexa de n planos projetivos)*

Destas, somente S^2 e P^2 não são asféricas. Portanto,

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b : [a, b] = 1 \rangle,$$

$$\pi_1(T^2\#...\#T^2) = \left\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n : \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = 1 \right\rangle,$$

$$\pi_1(P^2\#...\#P^2) = \left\langle a_1, ..., a_n : \prod_{i=1}^{n} a_i^2 = 1 \right\rangle (n \geq 2),$$

são grupos de dualidade de Poincaré de dimensão 2.

Não é conhecido se todo grupo de dualidade de Poincaré G de dimensão n, $n > 2$, sobre $\mathbb{Z}$ admite uma variedade asférica fechada X, com $\pi_1(X) = G$.

O caso $n = 2$ foi provado por Eckmann-Müller e Linell em [11] e [12]. Daí, G é um grupo de dualidade de dimensão 2 sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, G é um grupo superfície infinito (isto é, G é o grupo fundamental de uma superfície fechada diferente de S^2 e P^2).

Em [10] Dicks e Dunwoody estenderam este resultado para PD^2-grupos livres de torção sobre qualquer anel comutativo de característica zero.

Se G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 3, que é solúvel, então Thomas provou em [20] que a conjectura é verdadeira. No entanto, o caso geral $n \geq 3$ está ainda em aberto.

4.4 Pares de dualidade

Definição 4.4.1 *Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo. A* **dimensão cohomológica** *de $(G, \mathcal{S})$ sobre R, denotada por $cd_R(G, \mathcal{S})$, é dada por*

$$cd_R(G, \mathcal{S}) = sup\{n \mid H^n(G, \mathcal{S}; M) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}.$$

Se não existe tal número inteiro n, dizemos que $cd_R(G, \mathcal{S}) = \infty$.

Definição 4.4.2 *Um* **par de dualidade de dimensão** n **sobre** R *(D^n-**par**), consiste de um par grupo $(G, \mathcal{S})$ e um RG-módulo C, onde $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ é uma família finita de D^{n-1}-subgrupos de G com módulo dualizante C (visto como RS_i-módulo por restrição) e, temos os isomorfismos naturais:*

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_R M) \tag{4.2}$$

$$H^k(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M) \tag{4.3}$$

para todo RG-módulo M e todo $k \in \mathbb{Z}$.

Se $C \simeq R$, $(G, \mathcal{S})$ é chamado **par de dualidade de Poincaré de dimensão** n *(PD^n-**par**). Neste caso, cada $S_i \in \mathcal{S}$ é um PD^{n-1}-subgrupo de G.*

Observação 4.4.1 *O conceito de grupos de dualidade é um caso particular do conceito de par de dualidade, considerando $\mathcal{S} = \emptyset$, pois:*

$$H_k(G, \emptyset; M) := H_k(G; M) \quad e \quad H^k(G, \emptyset; M) := H^k(G; M).$$

Proposição 4.4.1 *Se $(G, \mathcal{S})$ é um D^n-par com módulo dualizante C, então G é um D^{n-1}-grupo como módulo dualizante $\Delta \otimes_R C$.*

Demonstração: Sendo $(G, \mathcal{S})$ um D^n-par, temos:

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_R M) := H_{n-k-1}(G; \Delta \otimes_R (C \otimes_{\mathbb{Z}} M)) \simeq H_{(n-1)-k}(G; (\Delta \otimes_R C) \otimes_R M).$$

Como todos os isomorfismos acima são naturais, temos que G é um D^{n-1}-grupo. ■

A categoria dos pares de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ está contida na categoria sobre R, onde R é um anel comutativo com unidade, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 4.4.2 *Se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$, então $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de dimensão n sobre R.*

Demonstração: Se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade sobre $\mathbb{Z}$, com módulo dualizante C, então temos que $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, ..., r\}$ é uma família finita de D^{n-1}-subgrupos de G (sobre $\mathbb{Z}$) com módulo dualizante C.

Pela Proposição 4.2.2, cada S_i é um D^{n-1}-subgrupo sobre R com módulo dualizante $C \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Consideremos M um RG-módulo. Logo, M é também um $\mathbb{Z}G$-módulo e, temos:

$$H^k(G, \mathcal{S}; M) \overset{D^n-par}{\simeq} H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G; (C \otimes_{\mathbb{Z}} R) \otimes_R M)$$
$$H^k(G; M) \overset{D^n-par}{\simeq} H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G, \mathcal{S}; (C \otimes_{\mathbb{Z}} R) \otimes_R M).$$

Como os isomorfismos envolvidos são naturais, temos que $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par sobre R com módulo dualizante $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

■

Exemplo 4.4.1 *Sejam $R = \mathbb{Z}_2$, $G = \langle t \rangle \oplus \langle s \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $S = \langle t^2 \rangle \oplus \langle s \rangle \simeq 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Então, (G, S) é um PD^n-par sobre $\mathbb{Z}_2$.*

De fato, temos que $G/S = \{\overline{(t, 1)}, \overline{(1, 1)}\} = \{(\overline{t}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{1})\} \simeq \{\overline{1}, \overline{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Calculemos $\Delta = \ker \varepsilon$, onde $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \to \mathbb{Z}_2$ é a aplicação aumentação.

Temos:

$$\mathbb{Z}_2(G/S) = \mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}_2) = \{\alpha\overline{1} + \beta\overline{T} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{T}, \overline{1} + \overline{T}\}.$$

Agora, $\varepsilon(0) = 0$; $\varepsilon(\overline{1}) = 1$ e $\varepsilon(\overline{1} + \overline{T}) = \varepsilon(\overline{1}) + \varepsilon(\overline{T}) = 1 + 1 = 0$.

Logo, $\Delta = \{0, \overline{1} + \overline{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Portanto, $Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) = M$ e $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M = M$.

Como G é PD^2-grupo, temos:

$$H_{3-k}(G, \mathcal{S}; M) := H_{3-k-1}(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) = H_{2-k}(G; M) \simeq H^k(G; M) \quad e,$$

$$H^k(G, \mathcal{S}; M) := H^{k-1}(G, Hom_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) = H^{k-1}(G; M) \simeq H_{2-(k-1)}(G; M) = H_{3-k}(G; M)$$

e, deste modo, como os isomorfismos envolvidos são naturais, temos que $(G, \mathcal{S})$ é um PD^3-par.

4.5 Interpretação Topológica para Pares de Dualidade de Poincaré

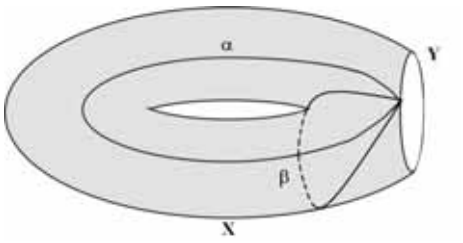
O seguinte resultado, que segue da dualidade de Poincaré-Lefschetz, pode ser encontrado em [8] e mostra a relação entre PD^n-pares e variedades, e também fornece um critério para se produzir exemplos de PD^n-pares através de modelos topológicos.

Teorema 4.5.1 *Se $(G, \mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X, Y) = K(G, \mathcal{S}, 1)$, onde X é uma n-variedade compacta orientável com bordo e $Y = \partial X$, então $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par sobre $\mathbb{Z}$ (consequentemente, $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par sobre R).*

Demonstração: [8], 6.3. ■

Usando este resultado, veremos alguns exemplos de PD^n-pares.

Exemplo 4.5.1 *Consideremos X o toro T^2 menos um disco aberto e $Y = \partial X$.*



Sejam $G = \pi(X) \simeq \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $\mathcal{S} = \pi(Y) \simeq \langle bab^{-1}a^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$, onde $a = [\alpha]$ e $b = [\beta]$ são as classes de homotopia dos caminhos α e β mostrados na figura.

Pelo Exemplo 3.3.1, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando $(G, \mathcal{S})$.

Como X é uma variedade de dimensão 2, com bordo, compacta e orientável, e $Y = \partial X$, então $(G, \mathcal{S})$ é um PD^2-par sobre R ($= \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$).

Exemplo 4.5.2 *Seja X a superfície orientada de genus $k \geq 1$ da qual um disco aberto foi removido e consideremos $Y = \partial X$.*

Considere $a_i = [\alpha_i]$ e $b_i = [\beta_i]$ as classes de homotopia dos caminhos α_i e β_i.

Assim, $G = \pi_1(X)$ é um grupo livre com $2k$ geradores $a_1, b_1, ..., a_k, b_k$ e $S = \pi_1(Y) = \langle [a_1, b_1], ..., [a_k, b_k] \rangle$, onde $[a_i, b_i] = b_i a_i b_i^{-1} a_i^{-1}$.

Pelo Exemplo 3.3.3, temos que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S).

Logo, pelo Teorema anterior, (G, S) é um PD^2-par.

Observação 4.5.1 *A recíproca do Teorema acima, isto é, "Se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}$ de dimensão n, então $(G, \mathcal{S})$ é realizado topologicamente po um par Eilenberg-MacLane (X, Y), onde X é uma n-variedade compacta com bordo e $Y = \partial X$", é verdadeira, para $n \geq 2$. ([11] e [12]).*

Em [10], Dicks e Dunwoody provaram que, se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de Poincaré de dimensão $n \leq 2$ sobre um anel comutativo com unidade R e G é livre de torção, então a recíproca do Teorema é verdadeira.

Capítulo

5

O Invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$

Baseado na teoria de cohomologia de grupos, foi definido por Andrade e Fanti em [2], um invariante cohomológico denotado por $E(G, \mathcal{S}, M)$, onde $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G com $[G : S_i] = \infty, \ \forall \ i \in I$.

Através desse invariante foram provados resultados em teoria de grupos e pares de dualidade e decomposição de grupos (ver [2], [3] [4], [5]).

Neste trabalho, definimos um invariante "dual" a $E(G, \mathcal{S}, M)$, denotado por $E_*(G, \mathcal{S}, M)$, usando, ao invés da teoria de cohomologia, a teoria de homologia de grupos, com o objetivo de obter resultados similares aos já demonstrados em [2] e [3].

5.1 O invariante cohomológico $E(G, \mathcal{S}, M)$

Iniciaremos este capítulo apresentando o invariante cohomológico $E(G, \mathcal{S}, M)$. Serão apresentados aqui dois casos particulares: quando $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$, denotado por $E(G, S)$, e quando M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial $\mathbb{Z}_2$, o qual é denotado por $E^{'}(G, \mathcal{S})$. As demonstrações serão omitidas e podem ser encontradas em [2] e [3], respectivamente.

5.1.1 A definição do invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$

Nesta subseção, introduzimos o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [2].

Sejam G um grupo e $\mathcal{S} = \{S_i, \ i \in I\}$ uma família de subgrupos de G. Pela Proposição 3.2.1(a), temos a seguinte sequência exata longa:

$$0 \to H^0(G;M) \stackrel{\varphi}{\to} \prod_{i\in I} H^0(S_i;M) \stackrel{\delta'}{\to} H^1(G,\mathcal{S},M) \stackrel{J'}{\to} H^1(G;M) \stackrel{res^G_{\mathcal{S}}}{\to} \prod_{i\in I} H^1(S_i;M) \to \cdots \quad (5.1)$$

Definição 5.1.1 *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo, com $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ uma família de subgrupos de G (não necessariamente distintos), e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Suponhamos $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$. Definimos*

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1 + \dim \ker res^G_{\mathcal{S}},$$

onde $res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G;M) \to \prod_{i\in I} H^1(S_i;M)$ é a aplicação dada na sequência exata longa (5.1).

$E(G,\mathcal{S},M)$ é um invariante algébrico na categoria $\mathcal{D}$ cujos objetos são pares $((G,\mathcal{S}),M)$ onde $(G,\mathcal{S})$ é um par grupo com $[G : S] = \infty$, para todo $S \in \mathcal{S}$, e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, e cujos morfismos são aplicações:

$$\psi : ((G,\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}),M) \to ((L,\mathcal{R} = \{R_j,\ j \in J\}),N)$$

consistindo de

(a) um homomorfismo de grupos $\alpha : G \to L$;

(b) uma aplicação $\pi : I \to J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$;

(c) uma aplicação $\phi : N \to M$ tal que $\phi(\alpha(g).n) = g.\phi(n)$, isto é, ϕ é um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo via $\alpha : G \to L$.

Mais precisamente, se ψ é um isomorfismo em $\mathcal{D}$, isto é, α é um isomorfismo de grupos, π é uma bijeção e ϕ é um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo, então

$$E(G,\mathcal{S},M) = E(L,\mathcal{R},N).$$

O resultado abaixo dá uma caracterização do invariante $E(G,\mathcal{S},M)$ em termos de "Característica de Euler Parcial".

Lema 5.1.1 *Sejam $(G,\mathcal{S})$ um par grupo onde $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ com $[G : S_i] = \infty,\ \forall\ i \in I$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se os grupos de cohomologia $H^0(G;M)$, $H^0(\mathcal{S};M) := \prod_{i\in I} H^0(S_i;M)$ e $H^1(G,\mathcal{S};M)$ são espaços vetoriais de dimensão finita, então*

$$E(G,\mathcal{S},M) = 1\ +\ \dim H^0(G;M)\ -\ \dim H^0(\mathcal{S};M)\ +\ \dim H^1(G,\mathcal{S};M).$$

■

5.1.2 O Invariante $E'(G, \mathcal{S})$

Veremos agora o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ no caso em que M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial $\mathbb{Z}_2$. Neste caso, $E(G, \mathcal{S}, M)$ é denotado por $E'(G, \mathcal{S})$. Os resultados desta subseção podem ser encontrados em [3].

Consideremos $\mathcal{S} = \{S\}$ uma família contendo um único subgrupo de G. Neste caso, temos o seguinte resultado:

Proposição 5.1.1 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G com $[G : S] = \infty$. Então*

$$E'(G, S) = 1 + \dim H^1(G, S; \mathbb{Z}_2).$$

■

O invariante $E'(G, S)$ e dualidade

Veremos agora o invariante $E'(G, \mathcal{S})$ quando $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade.

Proposição 5.1.2 *Se (G, S) é um D^n-par com módulo dualizante C e $[G : S] = \infty$, então*

$$E'(G, S) = 1 + \dim H_{n-1}(G; C).$$

■

Teorema 5.1.1 *Sejam $(G, \mathcal{S})$ um PD^n-par, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1, ..., r\}$, com $[G : S_i] = \infty$ e G finitamente apresentado. Então*

$$E'(G, \mathcal{S}) = 2 - r + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) < \infty.$$

■

Corolário 5.1.1 *Se $(G, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \{S_i,\ i = 1, ..., r\}$, é um PD^n-par com G finitamente apresentado e $[G : S_i] = \infty,\ i = 1, ..., r$, então*

$$r \leq 1 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) < \infty.$$

■

$E'(G, \mathcal{S})$ e decomposição de grupos

Apresentaremos a seguir uma relação entre o invariante $E'(G, \mathcal{S})$ e decomposição de grupos. Temos que, se $G = G_1 *_T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$ então $[G : G_1] = [G : G_2] = \infty$ e se $G = G_1 *_{T,\sigma}$ então $[G : G_1] = \infty$. Assim, neste caso, o invariante $E'(G, \mathcal{S})$ pode ser definido quando $\mathcal{S}$ é uma família de subgrupos de G_1 ou G_2.

O próximo resultado nos dá uma condição necessária para que G se decomponha sobre um subgrupo T.

Teorema 5.1.2 *Sejam G um grupo e T um subgrupo de G e suponha que G se decompõe sobre T.*
(i) *Se $G = G_1 *_T G_2$ então $E'(G, \{G_1, G_2\}) = 1$.*
(ii) *Se $G = G_1 *_{T,\sigma}$ então $E'(G, \{G_1\}) = 2$.*

■

Corolário 5.1.2 *Sejam G um grupo e n um número inteiro, $n > 1$, tal que $\dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 1$. Então:*
(i) *Se G_1 e G_2 são subgrupos de G tal que $(G, \{G_1, G_2\})$ é um PD^n-par, então $G \neq G_1 *_T G_2$ para todo subgrupo T de G_1 e G_2.*
(ii) *Se G_1 é um subgrupo de G tal que $(G, \{G_1\})$ é um PD^n-par, então $G \neq G_1 *_{T,\sigma}$, para todo subgrupo T de G_1.*

■

5.1.3 O invariante $E(G, S)$

Nesta subseção, veremos o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ no caso em que $\mathcal{S} = \{S\}$ e M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $M = Ind_S^G \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2(G/S)$, que será denotado por $E(G, S)$. Estes resultados podem ser encontrados em [2].

Veremos inicialmente algumas desigualdades envolvendo o invariante $E(G, S, M)$.

Proposição 5.1.3 **(i)** *Sejam S, T subgrupos de um grupo G satisfazendo $S \leq T \leq G$. Se $[G : T] = \infty$ então $E(G, T, M) \leq E(G, S, M)$ para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M.*

(ii) *Sejam N, M $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Se existe um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo $\phi : N \longrightarrow M$ tal que a aplicação induzida $\phi^* : H^1(G; N) \longrightarrow H^1(G; M)$ é um monomorfismo, então $E(G, S, N) \leq E(G, S, M)$ para todo subgrupo S de G com $[G : S] = \infty$.*

■

Proposição 5.1.4 *Sejam S, T subgrupos de G com $S \leq T \leq G$ e M um $\mathbb{Z}_2S$-módulo. Se $[T : S] = \infty$ e $\varphi^* : H^1(G, Ind_T^G(Ind_S^T M)) \longrightarrow H^1(G; Coind_T^G(Ind_S^T M))$ é um monomorfismo, onde φ^* é a aplicação induzida do mergulho natural $\varphi : Ind_T^G(Ind_S^T M) \longrightarrow Coind_T^G(Ind_S^T M)$, então $E(G, S, Ind_S^G M) \leq E(T, S, Ind_S^T M)$.*

■

Corolário 5.1.3 *Sejam S, T subgrupos de G, satisfazendo $S \leq T \leq G$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se $[G : S] = \infty$ e $[G : T] < \infty$ então*

$$E(G, S, Ind_S^G M) \leq E(T, S, Ind_S^T M).$$

■

$E(G, S)$ e dualidade

Com o resultado a seguir, podemos ver que o invariante E fornece uma condição necessária para que (G, S) seja um D^n-par.

Proposição 5.1.5 *Se (G, S) é um D^n-par com $[G : S] = \infty$ então*

$$E(G, S) = 1.$$

■

Exemplo 5.1.1 *Considere $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle = \mathbb{Z}$. Então $E(G, S) = 1$.* De fato, seja X o toro menos um disco aberto D^2 e $Y = \partial X \simeq S^1$. X é homotopicamente equivalente à figura oito. Assim, $\pi_1(X) = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $\pi_1(Y) = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle = S$. Temos então que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S). Assim, (G, S) é um PD^2-par e, portanto, $E(G, S) = 1$.

Proposição 5.1.6 *Sejam G um D^n-grupo com módulo dualizante C e S um subgrupo de G.*
(a) *Se S é um D^{n-1}-subgrupo com módulo dualizante $Res^G_S C$ então $E(G, S) \leq 2$.*
(b) *Se $hdS \leq n - 2$, então $E(G, S) = 1$.*

■

5.2 O Invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$

Vimos na seção anteior, a definição do invariante cohomológico $E(G, \mathcal{S}, M)$, onde $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G com $[G : S_i] = \infty$, $\forall\, i \in I$. Recordando,

$$E(G, \mathcal{S}, M) = 1 + \dim \ker res^G_{\mathcal{S}},$$

onde $res^G_{\mathcal{S}} : H^1(G; M) \longrightarrow \prod_{i \in I} H^1(S_i; M)$ é a aplicação induzida pelas inclusões $S_i \hookrightarrow G$.

Vamos agora definir o invariante "dual" $E_*(G, \mathcal{S}, M)$, usando a teoria de homologia de grupos, e estabelecer resultados similares aos enunciados na seção anterior.

Os resultados provados a seguir fornecem uma maneira alternativa de obter aplicações e propriedades na teoria de dualidade e decomposição de grupos, trabalhando com enfoque maior na homologia de grupos, em lugar da cohomologia.

Vejamos a seguir a definição de $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ e os resultados obtidos com este invariante.

5.2.1 A definição do invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$

Sejam G um grupo e $\mathcal{S} = \{S_i,\ i \in I\}$ uma família de subgrupos de G. Denotemos $\bigoplus_{i \in I} H_*(S_i; M)$ por $H_*(\mathcal{S}; M)$. Da Proposição 3.2.1, temos a seguinte sequência exata longa:

$$\cdots \to H_1(\mathcal{S}; M) \overset{cor_{\mathcal{S}}^G}{\to} H_1(G; M) \overset{J}{\to} H_1(G, \mathcal{S}; M) \overset{\delta}{\to} H_0(\mathcal{S}; M) \overset{cor_{0;\mathcal{S}}^G}{\to} H_0(G; M) \to 0. \qquad (5.2)$$

Definição 5.2.1 *Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G com $[G : S_i] = \infty$, $\forall\ i \in I$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Definimos:*

$$E_*(G, \mathcal{S}, M) = 1 + \dim \operatorname{coker} cor_{\mathcal{S}}^G$$

onde $cor_{\mathcal{S}}^G : \bigoplus_{i \in I} H_1(S_i; M) \longrightarrow H_1(G; M)$ é o homomorfismo que aparece na sequência exata longa (5.2) e é induzida em homologia pela inclusão $S_i \overset{i}{\hookrightarrow} G$.

Observação 5.2.1 *Como $\dim \operatorname{coker} cor_{\mathcal{S}}^G = \operatorname{codim} \operatorname{Im} cor_{\mathcal{S}}^G$, podemos definir o invariante E_* da seguinte maneira:*

$$E_*(G, \mathcal{S}, M) = 1 + \operatorname{codim} \operatorname{Im} cor_{\mathcal{S}}^G.$$

Observação 5.2.2 *Note que, da sequência exata longa (5.2), obtemos:*

$$\operatorname{coker} cor_{\mathcal{S}}^G = \frac{H_1(G; M)}{\operatorname{Im}\ cor_{\mathcal{S}}^G} = \frac{H_1(G; M)}{\ker J} \simeq \operatorname{Im}\ J.$$

Portanto, o invariante E_* também pode ser considerado da seguinte forma:

$$E_*(G, \mathcal{S}, M) = 1 + \dim \operatorname{Im}\ J.$$

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são pares $((G, \mathcal{S}); M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo e, cujos morfismos são aplicações

$$\psi : ((G, \mathcal{S}); M) \longrightarrow ((L, \mathcal{R} = \{R_j, j \in J\}); N)$$

consistindo de:
(a) Um homomorfismo $\alpha : G \longrightarrow L$;
(b) Uma aplicação $\pi : I \longrightarrow J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$;
(c) Um homomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$-módulos $\phi : M \longrightarrow N$ tal que $\phi(g.m) = \alpha(g).\phi(m)$, onde N é visto como $\mathbb{Z}_2G$-módulo por extensão de escalares via aplicação α ($g.n = \alpha(g).n$).

Observemos que um isomorfismo na categoria $\mathcal{C}$, $\psi : ((G, \mathcal{S}); M) \longrightarrow ((L, \mathcal{R}), N)$ consiste de:
(a) $\alpha : G \longrightarrow L$ um isomorfismo de grupos;
(b) $\pi : I \longrightarrow J$ bijeção tal que $\alpha(S_i) = R_{\pi(i)}$;
(c) $\phi : M \longrightarrow N$ isomorfismo de grupos abelianos que é um isomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$-módulos.

Vamos agora provar que $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ é um invariante na categoria $\mathcal{C}$.

Teorema 5.2.1 *Se, na categoria $\mathcal{C}$, $((G, \mathcal{S}); M)$ e $((L, \mathcal{R}); N)$ são isomorfos então*

$$E_*(G, \mathcal{S}, M) = E_*(L, \mathcal{R}, N),$$

isto é, $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ é um invariante na categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração: Consideremos o isomorfismo $\rho : \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R})$ definido nos geradores por $\rho(xS_i) = \alpha(x)R_{\pi(i)}$, cuja inversa $\beta : \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S})$ é dada por $\beta(lR_j) = \alpha^{-1}(l)S_{\pi^{-1}(j)}$.

Como $\rho(\Delta) = \Delta'$, segue que a restrição $\bar{\rho} : \Delta \longrightarrow \Delta'$ é também isomorfismo.

Considere o diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta & \xrightarrow{i_G} & \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) & \xrightarrow{\varepsilon_G} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\rho}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Delta' & \xrightarrow{i_L} & \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) & \xrightarrow{\varepsilon_L} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Como $\mathbb{Z}_2$ é $\mathbb{Z}_2$-projetivo, as aplicações ε_G e ε_L têm inversas à direita. Por ([15], I.5.10), i_G e i_L têm inversas à esquerda.

Logo, este diagrama induz o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Delta \otimes M & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \otimes M & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \otimes M & \longrightarrow & 0 \quad (1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\rho}\otimes\phi} & & \downarrow{\scriptstyle \rho\otimes\phi} & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes\phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Delta' \otimes N & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) \otimes N & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \otimes N & \longrightarrow & 0 \quad (2) \end{array}$$

Chamando $\mathcal{M} = \Delta \otimes M$, $\mathcal{N} = \Delta' \otimes N$, denotando $\bar{\rho} \otimes \phi$ por $\bar{\phi}$ e lembrando que $\mathbb{Z}_2 \otimes M \simeq M$, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \otimes M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \quad (1) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \bar{\rho}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho\otimes\phi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) \otimes N & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \quad (2) \end{array}$$

As aplicações horizontais da sequência (1) são todas $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismos e as da sequência (2) são $\mathbb{Z}_2L$-homomorfismos. As aplicações verticais são $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismos, considerando os $\mathbb{Z}_2L$-módulos como $\mathbb{Z}_2G$-módulos via α.

Seja $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2L$. Logo, $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ é também resolução projetiva de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$. De fato, $\alpha : G \longrightarrow L$ induz a seguinte ação de G em P_i: $g * x = \alpha(g).x$, $\forall\ g \in G$ *e* $x \in P_i$. Daí, cada P_i é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Como α é isomorfismo, cada P_i é $\mathbb{Z}_2G$-projetivo.

Seja $\tau : P \longrightarrow P$ a aplicação identidade. Temos que τ é compatível com α, isto é, $\tau(g * x) = \alpha(g)\tau(x)$.

Aplicando $P \otimes_{\mathbb{Z}_2 G} \_$ à sequência (1) e $P \otimes_{\mathbb{Z}_2 L} \_$ à sequência (2), temos o seguinte diagrama comutativo de complexo de cadeias:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}_2 G} \mathcal{M} & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}_2 G} (\mathbb{Z}_2(G/\mathcal{S}) \otimes M) & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}_2 G} M & \longrightarrow & 0 \quad (1') \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tau\otimes\bar{\phi}} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\otimes(\rho\otimes\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau\otimes\phi} & & \\ 0 & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}_2 L} \mathcal{N} & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}_2 L} (\mathbb{Z}_2(L/\mathcal{R}) \otimes N) & \longrightarrow & P \otimes_{\mathbb{Z}_2 L} N & \longrightarrow & 0 \quad (2') \end{array}$$

As sequências (1') e (2') são exatas pois $P \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$ é uma resolução $\mathbb{Z}_2G$-projetiva e $\mathbb{Z}_2L$-projetiva. Além disso as aplicações verticais são todas isomorfismos.

Aplicando o funtor $H_*(\_)$, junto com o Lema de Shapiro e a definição de homologia relativa, temos o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas ([9], I.0.4)

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I} H_1(S_i;M) & \xrightarrow{cor_{\mathcal{S}}^G} & H_1(G;M) & \xrightarrow{J_G} & H_1(G,\mathcal{S};M) & \xrightarrow{\delta_G} & \bigoplus_{i\in I} H_0(S_i;M) & \xrightarrow{cor_{0,\mathcal{S}}^G} & H_0(G;M) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \psi\ \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma\ \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \\ \cdots & \longrightarrow & \bigoplus_{j\in J} H_1(R_j;N) & \xrightarrow{cor_{\mathcal{R}}^L} & H_1(L;N) & \xrightarrow{J_L} & H_1(L,\mathcal{R};N) & \xrightarrow{\delta_L} & \bigoplus_{j\in J} H_0(R_j;N) & \xrightarrow{cor_{0,\mathcal{R}}^L} & H_0(L;N) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

As aplicações verticais são todas isomorfismos pois são induzidas por isomorfismos. Além disso, como $\ker J_G \overset{\psi}{\simeq} \ker J_L$, segue que a aplicação induzida no quociente

$$\bar{\psi} : \frac{H_1(G;M)}{\ker J_G} \longrightarrow \frac{H_1(L,N)}{\ker J_L}$$

é isomorfismo.

Daí, $E_*(G,\mathcal{S};M) = 1 + \dim(\operatorname{coker} cor_{\mathcal{S}}^G) = 1 + \dim \dfrac{H_1(G;M)}{\operatorname{Im}\ cor_{\mathcal{S}}^G} = 1 + \dim \dfrac{H_1(G;M)}{\ker J_G} =$
$= 1 + \dim \dfrac{H_1(L;N)}{\ker J_L} = 1 + \dim \dfrac{H_1(L;N)}{\operatorname{Im}\ cor_{\mathcal{R}}^L} = 1 + \dim(\operatorname{coker} cor_{\mathcal{R}}^L) = E_*(L,\mathcal{R};N).$

■

Apresentamos a seguir uma caracterização do invariante $E_*(G,\mathcal{S},M)$ quando os espaços vetoriais envolvidos têm dimensão finita.

Proposição 5.2.1 *Seja $(G,\mathcal{S})$ um par grupo onde $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ com $[G : S_i] = \infty$, $\forall\ i \in I$, e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se os espaços vetoriais $H_0(G;M)$, $H_0(\mathcal{S};M) := \bigoplus_{i\in I} H_0(S_i;M)$ e $H_1(G,\mathcal{S};M)$ têm dimensão finita, então:*

$$E_*(G,\mathcal{S},M) = 1 + \dim H_0(G;M) - \dim\ H_0(\mathcal{S};M) + \dim H_1(G,\mathcal{S};M).$$

Demonstração: A sequência exata longa (5.2) fornece a seguinte sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow \text{Im } J \xrightarrow{\chi} H_1(G, \mathcal{S}; M) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathcal{S}; M) \overset{cor_{0,\mathcal{S}}^{G}}{\twoheadrightarrow} H_0(G; M) \longrightarrow 0,$$

onde χ denota a aplicação inclusão.

Como os espaços envolvidos são todos de dimensão finita, temos:

$$\begin{aligned}
\dim H_0(G; M) &= \dim \frac{H_0(\mathcal{S}; M)}{\ker cor_{0,\mathcal{S}}^{G}} \\
&= \dim \ H_0(\mathcal{S}; M) - \dim \ker cor_{0,\mathcal{S}}^{G} \\
&= \dim H_0(\mathcal{S}; M) - \dim \text{Im } \ \delta \\
&= \dim H_0(\mathcal{S}; M) - \dim \frac{H_1(G, \mathcal{S}; M)}{\ker \delta} \\
&= \dim H_0(\mathcal{S}; M) - [\dim H_1(G, \mathcal{S}; M) - \dim \ker \delta] \\
&= \dim \ H_0(\mathcal{S}; M) - \dim H_1(G, \mathcal{S}; M) + \dim \text{Im } \ J.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\dim \text{Im } \ J = \dim H_0(G; M) - \dim H_0(\mathcal{S}; M) + \dim H_1(G, \mathcal{S}; M)$$

Portanto, usando a Observação 5.2.2, temos:

$$E_*(G, \mathcal{S}, M) = 1 + \dim H_0(G; M) - \dim \ H_0(\mathcal{S}; M) + \dim H_1(G, \mathcal{S}; M).$$

■

5.2.2 O Invariante $E'_*(G, \mathcal{S})$

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos com o invariante dual $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ no caso em que o $\mathbb{Z}_2G$-módulo M é $\mathbb{Z}_2$. Denotaremos $E_*(G, \mathcal{S}, \mathbb{Z}_2)$ por $E'_*(G, \mathcal{S})$. Os resultados a seguir podem ser comparados com aqueles contidos na Subseção 5.1.2 anterior.

Proposição 5.2.2 *Sejam G um grupo e $\mathcal{S} = \{S\}$ a família com um único subgrupo de G com $[G : S] = \infty$. Então:*

$$E'_*(G, S) = 1 + \dim H_1(G, S; \mathbb{Z}_2).$$

Demonstração: Consideremos a sequência exata:

$$\cdots \longrightarrow H_1(S; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{cor_S^G} H_1(G; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{J} H_1(G, S; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\delta} H_0(S; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{cor_{0,S}^{G}} H_0(G; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0.$$

Como $H_0(G; \mathbb{Z}_2) = (\mathbb{Z}_2)_G \simeq \mathbb{Z}_2$, $H_0(S; \mathbb{Z}_2) = (\mathbb{Z}_2)_S \simeq \mathbb{Z}_2$ e $cor_{0,S}^{G}$ é sobrejetora, segue que $cor_{0,S}^{G}$ é isomorfismo, e assim, a sequência exata longa acima toma a forma

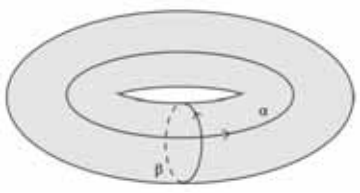
$$\cdots \longrightarrow H_1(S; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{cor_S^G} H_1(G; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{J} H_1(G, S; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 0.$$

Além disso, Im $J = H_1(G, S; \mathbb{Z}_2)$. Portanto, da Observação 5.2.2, segue que

$$E'_*(G, S) = 1 + \dim H_1(G, S; \mathbb{Z}_2).$$

■

Exemplo 5.2.1 *Sejam $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, onde $a = [\alpha]$ e $b = [\beta]$ são as classes de homotopia dos caminhos α e β mostrados na figura abaixo. Considere X o toro T^2 e Y o laço representado por α.*



Pelo Exemplo 3.3.1, temos que $H_1(G, S; \mathbb{Z}_2) = H_1(T^2, S^1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.
Portanto: $E'_*(G, S) = 2$.

$E'_*(G, \mathcal{S})$ e dualidade

Neste tópico, os grupos e pares de dualidade são considerados sobre $\mathbb{Z}_2$.

Estudaremos agora o invariante $E'_*(G, \mathcal{S})$ no caso em que $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade com $[G : S_i] = \infty, \ \forall S_i \in \mathcal{S}$.

Proposição 5.2.3 *Se (G, S) é um PD^n-par com $[G : S] = \infty$, então:*

$$E'_*(G, S) = 1 + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2).$$

Demonstração: Como (G, S) é um PD^n-par, temos:

$$H_1(G, S; \mathbb{Z}_2) \simeq H_1(G, S; \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) = H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2).$$

Pela Proposição 5.2.2, temos que $E'_*(G, S) = 1 + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$.

■

Corolário 5.2.1 *Se (G, S) é um PD^n-par com $[G : S] = \infty$, então*

$$E'_*(G, S) = 1 + \dim \Delta_G,$$

onde $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é a aplicação aumentação e $\Delta = \ker(\varepsilon)$.

Demonstração: Temos, pela Proposição 4.4.1, que G é um grupo de dualidade com módulo dualizante Δ. Daí,

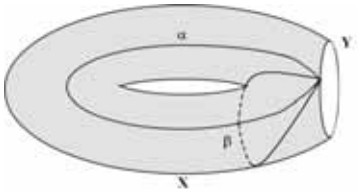
$$H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) \simeq H_0(G; \Delta) = \Delta_G.$$

Portanto, $E'_*(G, S) = 1 + \dim \Delta_G$.

■

Exemplo 5.2.2 *Sejam* $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ *e* $\mathcal{S} = \{S\}$, $S = \langle bab^{-1}a^{-1} \rangle$, *onde* $a = [\alpha]$ *e* $b = [\beta]$ *são as classes de homotopia dos caminhos* α *e* β *mostrados na figura a seguir.*

(G, S) *é um* PD^2*-par e, pelo Exemplo 3.3.2, temos* $H^1(G; \mathbb{Z}_2) = H^1(X; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, *onde* X *é o toro* T^2 *menos um disco aberto* D, *mostrado na figura abaixo.*



Portanto,

$$E'_*(G, S) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2) = 1 + \dim H^1(X; \mathbb{Z}_2) = 3.$$

Teorema 5.2.2 *Sejam* $(G, \mathcal{S})$ *um* PD^n*-par,* $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, ..., r\}$, *com* $[G : S_i] = \infty$, $\forall\ i = 1, ..., r$, *e* G *finitamente apresentado. Então*

$$E'_*(G, \mathcal{S}) = 2 - r + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) \ < \ \infty.$$

Demonstração: Se $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par, $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, ..., r\}$, então G é um D^{n-1}-grupo e, consequentemente, pela Observação 4.2.2, G é do tipo FP. Como G é finitamente apresentado, existe um $K(G, 1)$-complexo finitamente dominado (Teorema 4.1.2).

Assim, temos: $H_0(G; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, $H_0(\mathcal{S}; \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{i=1}^{r} H_0(S_i; \mathbb{Z}_2) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_2$ e $H_1(G, \mathcal{S}; \mathbb{Z}_2) \simeq$ $\simeq H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$. Como $\dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) < \infty$, temos, pela Proposição 5.2.1 que

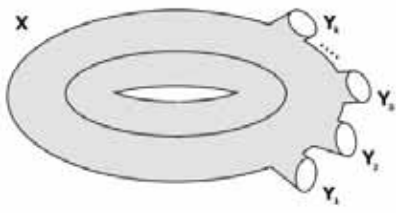
$$E'_*(G, \mathcal{S}) = 1 + \dim H_0(G; \mathbb{Z}_2) - \dim\ H_0(\mathcal{S}; \mathbb{Z}_2) + \dim H_1(G, \mathcal{S}; \mathbb{Z}_2) =$$

$$= 1 + 1 - r + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) = 2 - r + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) < \infty.$$

■

Exemplo 5.2.3 *Considere* X *o toro menos* k *discos abertos como na figura abaixo,* $G = \pi_1(X)$ *e* $\mathcal{S} = \{S_i = \pi_1(Y_i), i = 1, ..., k\}$. *É conhecido que* G *é um grupo livre com* $k + 1$ *geradores.*

Segue então que $(G, \mathcal{S})$ *é um* PD^2*-par e, pelo Exemplo 3.3.3, temos que* $H^1(G; \mathbb{Z}_2) =$ $= H^1(X; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_2$ $(k + 1$ *cópias*$)$.



Logo,

$$E'_*(G, \mathcal{S}) = 2 - k + \dim H^1(X; \mathbb{Z}_2) = 2 - k + (k+1) = 2 - k + k + 1 = 3.$$

Corolário 5.2.2 *Se $(G, \mathcal{S})$, $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, ..., r\}$, é um PD^n-par, com G finitamente apresentado e $[G : S_i] = \infty$, $\forall\ i = 1, ..., r$, então*

$$r \leq 1 + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) < \infty.$$

Demonstração:

$$E'_*(G, \mathcal{S}) \geq 1 \Longrightarrow 1 \leq 2 - r + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) < \infty \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow r \leq 1 + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) < \infty.$$

■

$E'_*(G, \mathcal{S})$ e decomposição de grupos

Veremos agora uma relação entre o invariante $E'_*(G, \mathcal{S})$ e decomposição de grupos.

Pela Observação 1.4.1, se $G = G_1 *_T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$ então $[G : G_1] = [G : G_2] = \infty$ e se $G = G_1 *_{T,\sigma}$ então $[G : G_1] = \infty$. Assim, neste caso, o invariante $E'_*(G, \mathcal{S})$ pode ser definido quando $\mathcal{S}$ é uma família de subgrupos de G_1 ou de G_2. O próximo teorema fornecerá uma condição necessária para G se decompor sobre um subgrupo T.

Teorema 5.2.3 *Seja G um grupo, T um subgrupo de G e suponha que G se decompõe sobre T.*

(a) *Se $G = G_1 *_T G_2$ então $E'_*(G, \{G_1, G_2\}) = 1$.*

(b) *Se $G = G_1 *_{T,\sigma}$ então $E'_*(G, \{G_1\}) = 2$.*

Demonstração:

(a) Como $G = G_1 *_T G_2$, temos, pela Proposição 1.4.1(a),a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

Segue então que $\Delta = \ker \varepsilon = \text{Im}\ (\alpha) \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$.

Daí,

$H_1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) := H_0(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) = H_0(G; \Delta) \simeq H_0(G; \mathbb{Z}_2(G/T)) \overset{Shapiro}{\simeq} H_0(T; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$

Além disso, $H_0(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ e $H_0(\{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Assim, pela Proposição 5.2.1, temos: $E'_*(G, \{G_1, G_2\}) = 1 + 1 - 2 + 1 = 1$.

(b) A demonstração é análoga ao item anterior, usando a Proposição 1.4.1(b), que fornece a sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

■

Corolário 5.2.3 *Seja G um grupo e n um número inteiro, $n > 1$, tal que* $\dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 1$. *Então:*
(a) *Se G_1 e G_2 são subgrupos de G tais que $(G, \{G_1, G_2\})$ é um PD^n-par, então $G \neq G_1 *_T G_2$ para todo subgrupo T de G_1 e G_2.*
(b) *Se G_1 é um subgrupo de G tal que $(G, \{G_1\})$ é um PD^n-par, então $G \neq G_1 *_{T,\sigma}$, para todo subgrupo T de G_1.*

Demonstração: Se $(G, \mathcal{S})$ é um PD^n-par, então $H_1(G, \mathcal{S}; \mathbb{Z}_2) \simeq H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$. Assim,
$E'_*(G, \mathcal{S}) \overset{Teo.5.2.2}{=} 2 - 2 + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 1$ se $\mathcal{S} = \{G_1, G_2\}$,

$E'_*(G, \mathcal{S}) \overset{Prop.5.2.3}{=} 1 + \dim H^{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 2$ se $\mathcal{S} = \{G_1\}$,
e o resultado segue do Teorema 5.2.3.

■

5.2.3 O Invariante $E_*(G, S)$

Nesta seção consideramos o invariante dual $E_*(G, \mathcal{S}, M)$ onde $\mathcal{S} = \{S\}$ e M é o $\mathbb{Z}_2G$-módulo dado por:

$$M = Coind_S^G \mathbb{Z}_2 = Hom_S(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) \simeq Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), \mathbb{Z}_2) \overset{Not.}{=} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}.$$

Por simplicidade, denotaremos o invariante $E_*(G, \{S\}, \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$ por $E_*(G, S)$.

Os resultados aqui apresentados podem ser comparados com aqueles contidos no artigo [2].

Estabelecemos inicialmente alguns limitantes para $E_*(G, S)$. Para isso, necessitamos do seguinte resultado:

Proposição 5.2.4 *Sejam S, T subgrupos de um grupo G satisfazendo $S \leqslant T \leqslant G$. Se $[G : T] = \infty$ então*

$$E_*(G, T, M) \leq E_*(G, S, M),$$

para todo $\mathbb{Z}_2G$-módulo M.

Demonstração: Para estabelecer o resultado temos que provar que

$$\dim \operatorname{coker} cor_S^G \geq \dim \operatorname{coker} cor_T^G.$$

Como $S \leqslant T \leqslant G$, temos as seguintes inclusões

$$S \overset{i}{\hookrightarrow} T \overset{j}{\hookrightarrow} G.$$

Seja $r = j \circ i : S \hookrightarrow G$.

Temos: $cor_S^G = cor_T^G \circ cor_S^T$. Além disso,

$$\forall\ \alpha \in \text{Im}\ \ cor_S^G \Longrightarrow \alpha \in \text{Im}\, cor_T^G \circ cor_S^T \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\ \exists\ \beta \in H_1(S; M)\ \ \text{tal que}\ \ \alpha = cor_T^G(cor_S^T(\beta)) \Longrightarrow \alpha \in \text{Im}\ \ cor_T^G.$$

Logo, Im $cor_S^G \subset$ Im cor_T^G.

Temos então bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \dfrac{H_1(G;M)}{\text{Im}\ \ cor_S^G} & \longrightarrow & \dfrac{H_1(G;M)}{\text{Im}\ \ cor_T^G} \\ & \alpha + \text{Im}\ \ cor_S^G & \mapsto & \alpha + \text{Im}\ \ cor_T^G. \end{array}$$

É claro que φ é sobrejetora. Logo,

$$\dim \frac{H_1(G;M)}{\text{Im}\ \ cor_T^G} \leq \dim \frac{H_1(G;M)}{\text{Im}\ \ cor_S^G}.$$

Ou seja,

$$\dim \text{coker}\, cor_T^G \leq \dim \text{coker}\, cor_S^G.$$

Temos então:

$$E_*(G, T, M) \leq E_*(G, S, M).$$

■

Corolário 5.2.4 *Sejam S, T subgrupos de um grupo G satisfazendo $S \leqslant T \leqslant G$ com $[G : T] = \infty$.*
(i) *Se $M = \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ então $E_*(G, T, \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \leq E_*(G, S)$.*
(ii) *Se $M = \overline{\mathbb{Z}_2(G/T)}$ então $E_*(G, T) \leq E_*(G, S, \overline{\mathbb{Z}_2(G/T)})$.*

■

Provaremos agora um resultado que nos fornecerá em uma relação entre os invariantes $E_*(G, S)$ e $E'_*(G, S)$, visto anteriormente.

Proposição 5.2.5 *Sejam N, M $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Se existe um $\mathbb{Z}_2G$-homomorfismo $\phi : N \longrightarrow M$ tal que a aplicação induzida $\phi_{*_G} : H_1(G; N) \longrightarrow H_1(G; M)$ é um epimorfismo, então*

$$E_*(G, S, M) \leq E_*(G, S, N)$$

para todo subgrupo S de G com $[G : S] = \infty$.

Demonstração: Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_1(G;N) & \xrightarrow{\phi_{*G}} & H_1(G;M) \\ {\scriptstyle cor_N}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle cor_M} \\ H_1(S;N) & \xrightarrow{\phi_{*S}} & H_1(S;M) \end{array}$$

onde $cor_N = cor_{S,N}^G$, $cor_M = cor_{S,M}^G$, $\phi_{*G} = (id_G, \phi)_*$ e $\phi_{*S} = (id_S, \phi)_*$.

Temos:

$$cor_M \circ \phi_{*S} = \phi_{*G} \circ cor_N. \tag{5.3}$$

Queremos mostrar: $\dim \text{coker}\,(cor_N) \geq \dim \text{coker}\,(cor_M)$.

Observe que $\phi_{*G}(\text{Im}\, cor_N) \subset \text{Im}\, cor_M$.

De fato:

$$\forall\ \gamma \in \phi_{*G}(\text{Im}\, cor_N) \Longrightarrow\ \exists\ x \in H_1(S; N) \mid \gamma = \phi_{*G}(cor_N(x)) = cor_M(\phi_{*S}(x)) \in \text{Im}\, cor_M.$$

Podemos definir então a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \dfrac{H_1(G;N)}{\text{Im}\ \ cor_N} & \longrightarrow & \dfrac{H_1(G;M)}{\text{Im}\ \ cor_M} \\ & \alpha + \text{Im}\ \ cor_N & \mapsto & \phi_{*G}(\alpha) + \text{Im}\ \ cor_M. \end{array}$$

• ψ está bem definida. De fato:

Sejam $\alpha, \beta \in \text{Im}\, H_1(G, N)$. Temos:

$$\alpha + \text{Im}\, cor_N = \beta + \text{Im}\, cor_N \Longrightarrow \alpha - \beta \in \text{Im}\, cor_N \Longrightarrow \phi_{*G}(\alpha - \beta) \in \text{Im}\, cor_M \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \phi_{*G}(\alpha) + \text{Im}\, cor_M = \phi_{*G}(\beta) + \text{Im}\, cor_M.$$

• ψ é sobrejetora, pois ϕ_{*G} é sobrejetora por hipótese. Assim, temos:

$$\dim \frac{H_1(G;M)}{\text{Im}\ \ cor_M} \leq \dim \frac{H_1(G;N)}{\text{Im}\ \ cor_N}.$$

Logo, $\dim \text{coker}\,(cor_M) \leq \dim \text{coker}\,(cor_N)$. E portanto,

$$E_*(G, S, M) \leq E_*(G, S, N).$$

■

Observação 5.2.3 *Considere G um grupo, S um subgrupo de G e o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $M = \mathbb{Z}_2$. Temos $Coind_S^G \mathbb{Z}_2 \simeq Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), \mathbb{Z}_2) \overset{not.}{=} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$.*

Então existe um $\mathbb{Z}_2G$-epimorfismo canônico $\pi : \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ definido por $\pi(f) = f(1)$.

Pela Observação 2.4.1, o isomorfismo induzido $(\alpha, \pi)^* : H^*(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \to H^*(H; \mathbb{Z}_2)$, onde $\alpha : S \hookrightarrow G$ é a inclusão, é o isomorfismo de Shapiro.

O próximo resultado nos dá uma relação entre os invariantes $E_*(G, S)$ e $E'_*(G, S)$.

Corolário 5.2.5 *Sejam os $\mathbb{Z}_2G$-módulos $M = \mathbb{Z}_2$ e $N = Coind_S^G \mathbb{Z}_2 \overset{Not.}{=} \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$. Seja $\pi : \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ a projeção canônica definida acima. Se $\pi_* : H_1(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \longrightarrow \longrightarrow H_1(G; \mathbb{Z}_2)$ é epimorfismo, então*

$$E'_*(G, S) \leq E_*(G, S),$$

para todo subgrupo S de G com $[G : S] = \infty$.

Demonstração: Basta usar π_* no lugar de ϕ_{*G} na Proposição anterior.

■

O objetivo agora é estabelecer uma desigualdade envolvendo $E_*(G, S)$ e $E_*(T, S)$, onde $S \leqslant T \leqslant G$. Para isso necessitamos de um resultado mais geral. Faremos primeiramente algumas observações importantes:

Observação 5.2.4 *Seja G um grupo, T um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}_2T$-módulo. Temos as seguintes aplicações:*
(a) *um $\mathbb{Z}_2G$-monomorfismo canônico $\varphi : Ind_T^G M \longrightarrow Coind_T^G M$ tal que*

$$\varphi(g_0 \otimes m)(g) = \begin{cases} gg_0m & \text{se } gg_0 \in T \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

que é um isomorfismo se $[G : T] < \infty$ ([9], III.5.9).

(b) *um $\mathbb{Z}_2T$-monomorfismo canônico $i : M \longrightarrow Ind_T^G M$, definido por $i(m) = 1 \otimes m$ ([9], p.67). O isomorfismo do Lema de Shapiro $(\alpha, i)_* : H_*(T; M) \xrightarrow{\simeq} H_*(G; Ind_T^G M)$ é induzido por (α, i), onde $\alpha : T \hookrightarrow G$ é a inclusão (Observação 2.4.1).*

(c) *um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo canônico $\psi : Coind_T^G Coind_S^T M \longrightarrow Coind_S^G M$, onde $S \leqslant T \leqslant G$ ([9], p.64 (3.6)).*

(d) *um $\mathbb{Z}_2T$-homomorfismo $\chi : Coind_S^T M \longrightarrow Coind_S^G M$, $S \leqslant T \leqslant G$, dado pela composição $Coind_S^T M \xrightarrow{i} Ind_T^G Coind_S^T M \xrightarrow{\varphi} Coind_T^G Coind_S^T M \xrightarrow{\psi} Coind_S^G M$, isto é, $\chi = \psi \circ \varphi \circ i$.*

Teorema 5.2.4 *Sejam S, T subgrupos de G com $S \leqslant T \leqslant G$ e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Se $[T : S] = \infty$ e $\varphi_* : H_1(G; Ind_T^G(Coind_S^T M)) \longrightarrow H_1(G; Coind_T^G(Coind_S^T M))$ é epimorfismo, onde φ_* é a aplicação induzida do mergulho natural $\varphi : Ind_T^G(Coind_S^T M) \longrightarrow \longrightarrow Coind_T^G(Coind_S^T M)$, então*

$$E_*(T, S, Coind_S^T M) \leq E_*(G, S, Coind_S^G M).$$

Demonstração: Considerando as aplicações definidas na Observação 5.2.4, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_1(S; Coind_S^T M) & \xrightarrow{cor_S^T} & H_1(T; Coind_S^T M) \\ \downarrow{\scriptstyle (id_S, \chi)_*} & & {\scriptstyle (\alpha, \chi)_*}\downarrow \\ H_1(S; Coind_S^G M) & \xrightarrow[cor_S^G]{} & H_1(G; Coind_S^G M) \end{array}$$

A aplicação induzida $(\alpha, \chi)_* : H_1(T; Coind_S^T M) \longrightarrow H_1(G; Coind_S^G M)$ é dada pela composição:

$$H_1(T; Coind_S^T M) \xrightarrow{(\alpha,i)_*} H_1(G; Ind_T^G Coind_S^T M) \xrightarrow{\varphi_*} H_1(G; Coind_T^G Coind_S^T M) \xrightarrow{\psi_*} H_1(G; Coind_S^G M),$$

onde $\varphi_* \equiv (id, \varphi)_*$ e $\psi_* \equiv (id, \psi)_*$.

Assim, $(\alpha, \chi)_* = \psi_* \circ \varphi_* \circ (\alpha, i)_*$.

Como $(\alpha, i)_*$ é o isomorfismo de Shapiro, ψ_* é isomorfismo e φ_* é epimorfismo por hipótese, segue que $(\alpha, \chi)_*$ é epimorfismo.

Além disso, $(\alpha, \chi)_*(\text{Im } cor_S^T) \subset \text{Im } cor_S^G$.

De fato, pelo diagrama acima,

$$(\alpha, \chi)_* \circ cor_S^T = cor_S^G \circ (id, \chi)_*.$$

Assim, $\forall\ y \in \text{Im}\, cor_S^T \Rightarrow y = cor_S^T(x)$, para algum $x \in H_1(S; Coind_S^T M) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha, \chi)_*(y) = (\alpha, \chi)_*(cor_S^T(x)) = cor_S^G \circ (id, \chi)_*(x) \in \text{Im}\, cor_S^G$.

Temos então bem definida a aplicação

$$\overline{(\alpha, \chi)_*} : \frac{H_1(T; Coind_S^T M)}{\text{Im}\, cor_S^T} \longrightarrow \frac{H_1(G; Coind_S^G M)}{\text{Im}\, cor_S^G}$$

dada por $\overline{(\alpha, \chi)_*}(a + \text{Im}\, cor_S^T) = (\alpha, \chi)_*(a) + \text{Im}\, cor_S^G$.

Como $(\alpha, \chi)_*$ é um epimorfismo, segue que $\overline{(\alpha, \chi)_*}$ é um epimorfismo.

Logo, $\dim \text{coker}\, (cor_S^G) \geq \dim \text{coker}\, (cor_S^T)$.

Portanto, $E_*(T, S, Coind_S^T M) \leq E_*(G, S, Coind_S^G M)$.

■

Segue então uma relação entre $E_*(T, S)$ e $E_*(G, S)$

Corolário 5.2.6 *Sejam S, T subgrupos de G satisfazendo $S \leqslant T \leqslant G$, e M o $\mathbb{Z}_2G$-módulo trivial $\mathbb{Z}_2$. Se $[G : S] = \infty$ e $[G : T] < \infty$, então:*

$$E_*(T, S) \leq E_*(G, S).$$

■

$E_*(G, S)$ e dualidade

Neste tópico, veremos alguns resultados em teoria de dualidade de grupos e pares usando o invariante $E_*(G, S)$.

Proposição 5.2.6 *Seja G um PD^n-grupo e S um subgrupo de G.*
(i) *Se S é um PD^{n-1}-grupo então $E_*(G, S) \leq 2$.*
(ii) *Se $cd\ S \leq n - 2$ então $E_*(G, S) = 1$.*

Demonstração: Como G é PD^n-grupo, segue das Proposições 4.2.3 e 4.1.1 que, nas hipóteses de **(i)** e **(ii)**, $[G : S] = \infty$. Assim, $E_*(G, S)$ pode ser definido.

Do fato de G ser um PD^n-grupo e usando o Lema de Shapiro, temos:

$$H_1(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \simeq H^{n-1}(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \simeq H^{n-1}(S; \mathbb{Z}_2).$$

(i) Se S é um PD^{n-1}-grupo temos $H^{n-1}(S; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$ e assim, coker $cor_S^G = \dfrac{H^1(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})}{\text{Im } cor_S^G} =$
$= \dfrac{\mathbb{Z}_2}{\text{Im } cor_S^G}$ só pode ser $\{0\}$ ou $\mathbb{Z}_2$.
Assim, $E_*(G, S) \leq 2$.

(ii) Se $cd\ S \leq n-2$ temos $H^{n-1}(S, \mathbb{Z}_2) = \{0\}$ e daí coker $cor_S^G = \{0\}$.
Logo, $E_*(G, S) = 1$.

■

Exemplo 5.2.4 *Sejam $G = \mathbb{Z}^n$ e $S \simeq \mathbb{Z}^r$, com S subgrupo de G e $n > r \geq 2$.*
Observe que G é um PD^n-grupo e S é um PD^r-grupo.
Se $r = n-1$, temos $E_*(G, S) \leq 2$ e se $r \leq n-2$, temos $E_*(G, S) = 1$.

O resultado a seguir é importante, pois fornece uma condição necessária para que (G, S) seja um PD^n-par.

Teorema 5.2.5 *Se (G, S) é um PD^n-par com $[G : S] = \infty$ então*

$$E_*(G, S) = 1.$$

Demonstração: Considere a sequência exata longa (5.2), onde $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$,

$$\cdots \longrightarrow H_1(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \overset{cor_S^G}{\longrightarrow} H_1(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \overset{J}{\longrightarrow} H_1(G, S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \overset{\delta}{\longrightarrow}$$
$$\overset{\delta}{\longrightarrow} H_0(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \longrightarrow H_0(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \longrightarrow 0.$$

Como (G, S) é um PD^n-par, temos:

$$\begin{aligned}
H_1(G, S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) &\simeq H^{n-1}(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) && \text{(dualidade de Poincaré)} \\
&\simeq H^{n-1}(G; Coind_S^G \mathbb{Z}_2) \\
&\simeq H^{n-1}(S; \mathbb{Z}_2) && \text{(Lema de Shapiro)} \\
&\simeq H_0(S; \mathbb{Z}_2) \\
&\simeq (\mathbb{Z}_2)_S \\
&\simeq \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.3.6, temos $H_0(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) = 0$.

Mostremos que $H_0(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) = (\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})_S \neq 0$.

Temos $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)} \simeq Hom(\mathbb{Z}_2(G/S), \mathbb{Z}_2)$ com a G-ação diagonal $(g.f)(\overline{\alpha}) = g.f(g^{-1}\overline{\alpha}),\ \forall\ g \in G,\ \forall\ \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_2(G/S)$.

Agora, como em $\mathbb{Z}_2$ a G-ação é trivial temos $g.f(g^{-1}\overline{\alpha}) = f(g^{-1}\overline{\alpha}),\ \forall\ g \in G$ e $\forall\ \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_2(G/S)$.

Em particular, para $\overline{\alpha} = \overline{1} = 1.S$ e $s \in S$ temos:

$$(s.f)(\overline{1}) = f(s^{-1}.\overline{1}) = f(\overline{s^{-1}}) = f(\overline{1}).$$

Ou seja,

$$s.f(\overline{1}) - f(\overline{1}) = 0,\ \forall\ f \in \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)},\ \forall\ s \in S. \qquad (*)$$

Considere agora a aplicação aumentação

$$\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \longrightarrow \mathbb{Z}_2.$$

Vamos verificar que ε fornece um elemento não nulo $\overline{\varepsilon}$ em $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}_S = \frac{Hom(\mathbb{Z}_2(G/S),\mathbb{Z}_2)}{A}$, onde

$$A = \langle sf - f \mid f \in \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)},\ s \in S\rangle.$$

Vamos supor $\overline{\varepsilon} = \overline{0}$ em $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}_S$. Logo, $\varepsilon \in A$. Assim, existem $s_1, s_2, ..., s_k \in S$ e $f_1, f_2, ..., f_k \in \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ tais que

$$\varepsilon = (s_1f_1 - f_1) + (s_2f_2 - f_2) + ... + (s_kf_k - f_k).$$

Daí, aplicando ambos os lados da igualdade na unidade $\overline{1} \in \mathbb{Z}_2(G/S)$ e usando $(*)$ temos:

$$1 = \varepsilon(\overline{1}) = 0,$$

o que nos dá uma contradição.

Logo, $\overline{\varepsilon}$ é um elemento não nulo de $\mathbb{Z}_2(G/S)_S$.

Concluimos então que $\{0, \overline{\varepsilon}\} \simeq \mathbb{Z}_2 \subset H_0(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})$.

Voltando à sequência exata longa acima, obtemos:

$$\cdots \longrightarrow H_1(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \overset{cor_S^G}{\longrightarrow} H_1(G; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \overset{J}{\longrightarrow} \mathbb{Z}_2 \overset{\delta}{\longrightarrow} H_0(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)})(\neq 0) \longrightarrow 0.$$

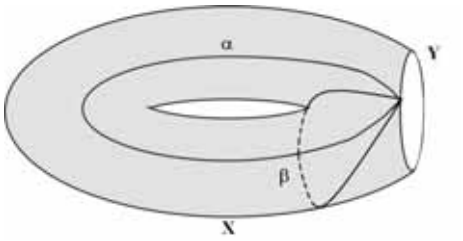
Como δ é sobrejetor, segue $H_0(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) \simeq \mathbb{Z}_2$ e Im $J = \ker \delta = 0$.

Portanto, pela Observação 5.2.2, temos

$$E_*(G, S) = 1.$$

■

Exemplo 5.2.5 *Seja X o toro menos um disco aberto e Y o bordo de X. Temos: $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \pi_1(X)$ e $S = \langle bab^{-1}a^{-1} \rangle = \pi_1(Y)$ onde $a = [\alpha]$ e $b = [\beta]$ são as classes de homotopia dos caminhos α e β mostrados na figura. Sabemos que o par (G, S) é um PD^n-par e, pelo Teorema anterior, $E_*(G, S) = 1$.*



As técnicas da demonstração anterior nos fornece o seguinte resultado:

Proposição 5.2.7 *Se (G, S) é um par grupo com $[G : S] = \infty$ e S é um subgrupo normal em G, então (G, S) não é PD^n-par.*

Demonstração: Se (G, S) fosse um PD^n-par, teríamos, pela demonstração do Teorema anterior,

$$H_0(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) = \mathbb{Z}_2. \qquad (*)$$

Mas, como S é normal em G, a ação de S em $\overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ é trivial.

De fato, $\forall\ f \in \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}$ e $s \in S$,

$$\begin{aligned}
(s.f)(\overline{g}) &= f(s^{-1}\overline{g}) \quad \text{(ação diagonal e } \mathbb{Z}_2 : \mathbb{Z}_2G\text{-módulo trivial)} \\
&= f(\overline{s^{-1}g}) \\
&= f(\overline{s^{-1}}.\overline{g}) \qquad (S \text{ normal em } G) \\
&= f(\overline{g}) \qquad .
\end{aligned}$$

Logo: $sf = f$.

Assim,

$$H_0(S; \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}) = \overline{\mathbb{Z}_2(G/S)}. \qquad (**)$$

Como $[G : S] = \infty$ temos, de $(*)$ e $(**)$, uma contradição.

■

5.3 Conclusão

Conseguimos provar com o invariante $E_*(G, \mathcal{S}, M)$, à medida em que a teoria era aplicável, vários resultados análogos aos contidos em [2] e [3].

A cohomologia é mais comumente utilizada nos livros e artigos, e por este motivo, tem-se um número maior de resultados e ferramentas prontos para serem usados, como por exemplo, o cálculo de alguns grupos de cohomologia e propriedades da aplicação restrição res_S^G.

Como consequência destes fatos, existem alguns resultados que garantimos apenas para casos particulares dos estabelecidos em [2] e [3], para o invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$.

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, M.G.C. **Invariantes Relativos e Dualidade**. 1992. Tese (Doutorado em Matemática), IMECC-UNICAMP, Campinas.

[2] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C. A relative cohomological invariant for pairs of groups. **Manuscripta Math.**, v.83, p.1-18, 1994.

[3] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; PAPANI, F.M.G. A Relative Invariant, Duality and Splitting of Groups. **Revista de Matemática e Estatística**, v. 21, p.131-141, 2003.

[4] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; DACCACH, J.A. On certain relative cohomological invariant. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, Bulgária, v. 21, n. 3, p. 335-351, 2005.

[5] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; SILVA, F.S.M. Another characterization for a certain invariant for a group pair. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, v. 35, p. 349-356, 2007.

[6] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C. A remark about amalgamation of groups and index of subgroups.**International Journal of Applied Mathematics**, v. 23, p. 55-62, 2010.

[7] BIERI, R.; **Homological Dimension of Discrete Groups**, Queen Mary College Math. Notes, Londres, 1976.

[8] BIERI, R.; ECKMANN, B. Relative homology and Poincaré duality for Group Pairs. **Journal of Pure and Applied Algebra**, v.13, p.277-319, 1978.

[9] BROWN, K. S. **Cohomology of Groups**. New York: Springer-Verlag, 1982.

[10] DICKS, W.; DUNWOODY, M. **Groups acting on graphs**. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[11] ECKMANN, B.; LINELL, P.A. Poincaré Duality Groups of Dimension Two II, **Comm. Math. Helv. 58**, p. 111-114, 1983.

[12] ECKMANN, B.; MÜLLER, H. Poincaré Duality Groups of Dimension Two, **Comm. Math. Helvetici 55**, p. 510-520, 1980.

[13] EILENBERG, S. Homology of Spaces with Operators I, **Trasn. Amer. Math. Soc. 61**, p. 378-417, 1947; errata 62 (1947) 548.

[14] GREENBERG, M.J. **Lectures on Algebraic Topology**. Benjamin, 1966.

[15] HU, S.T. **Introduction to Homological Algebra**. São Francisco: Holden-Day Series in Mathematics, 1968.

[16] MASSEY, W.S. **Algebraic Topology: An Introduction**. New York: Springer-Verlag, 1967.

[17] RIBES, L. On a Cohomology Theory for Pairs of Groups. **Proc. of the A.M.S.**, v.21, p. 230-234, 1969.

[18] ROBINSON, D.J.S. **A Course in the Theory of Groups**. Berlin: Springer, 1982.

[19] SCHUBERT, H. **Topology**. MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.

[20] THOMAS, C.B. Splittings theorems for certain PD^3-groups, **Math. Z. 186**, p.201-209, 1984.

Autorizo a reprodução xerográfica para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 02 / 03 / 2012

Amanda Bueno Gazon

Assinatura