UNESP

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO - CIENTÍFICOS

O ENSINO–APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO 3º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Mariângela Pereira

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2004

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

O ENSINO–APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO 3º CICLO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Mariângela Pereira

Orientadora: Prof^{a}. Dr^{a}. Lourdes de la Rosa Onuchic

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, para a obtenção do Título de Mestre em Educação Matemática.

RIO CLARO (SP)

2004

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof^{a}. Dr^{a}. Miriam Godoy Penteado

Prof. Dr. Ruy Madsen Barbosa

Prof^{a}. Dr^{a}. Lourdes de la Rosa Onuchic
(orientadora)

Mariângela Pereira

Rio Claro, ___ de __________ de 2004.

Resultado: ____

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Edson e Maria pelo apoio e compreensão dedicados a mim durante este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela minha vida, pela minha família e por todas as pessoas que colocou em meu caminho que, de alguma forma, colaboraram com o desenvolvimento deste trabalho.

À Profª. Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic, querida amiga, pela confiança, apoio, compreensão e dedicação. Uma orientadora e educadora que não mede esforços para fazer de nós, professores de matemática, verdadeiros profissionais da educação.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Aos professores Doutores Ruy Madsen Barbosa e Miriam Godoy Penteado, membros da Comissão Examinadora, pelas valiosas sugestões, na época do Exame de Qualificação.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Campus de Rio Claro.

À direção, coordenação, professores e alunos da Escola Estadual Professor Nelson Stroili, de Rio Claro, que gentilmente colaboraram para a realização desta pesquisa.

Às professoras e amigas deixadas em Rio Claro: Eliana P. Vidal, Elizabeth Quirino de Azevedo, Márcia Roat, Ângela Stipp, Maria Lúcia Missano, Telma E. B. Grimaldi, Iara Cury e Rosa M. Mautone da Costa.

Aos membros do Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas (GTERP), pelas discussões e sugestões sobre a minha pesquisa.

Aos meus irmãos Elisângela e Emmanuel pela paciência comigo e pela confiança nos meus esforços.

Aos meus pais Edson e Maria, aos meus familiares e ao Vangrei, companheiro querido e dedicado, pelo incentivo e carinho sempre presentes.

SUMÁRIO

Índice

Lista de Figuras

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo principal verificar qual é a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, partindo de problemas geradores de novas idéias matemáticas. Dentro da Educação Matemática, atualmente, o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas é visto como uma metodologia alternativa, que visa à um trabalho centrado no aluno, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, levando-o a construir um conhecimento matemático através da resolução desses problemas. Nessa metodologia, o aluno participa da construção do conhecimento com a orientação e a supervisão do professor que, somente no final desse processo de construção, formaliza as novas idéias construídas, utilizando notação e terminologia corretas. As unidades temáticas trabalhadas com esses alunos foram Divisibilidade e Números Racionais. Constatei que, ao trabalhar com esta metodologia, em sala de aula, houve um aumento na motivação, tanto da professora em ensinar quanto dos alunos em aprender. Além disso, em muitas ocasiões, foi possível observar os alunos relacionando suas atividades com alguns tópicos já trabalhados anteriormente. Todos esses fatos, retratados em minha aplicação, reforçam a relevância desse trabalho. A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho é a metodologia de Romberg.

Palavras-chave: 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Ensino-Aprendizagem de Matemática. 3. Ensino Fundamental. 4. Resolução de Problemas. 5. Ensino através da Resolução de Problemas.

Abstract

The main objective of this dissertation is to verify which was the contribution of the Methodology of teaching-learning of Mathematics through Problem Solving for the “disciplina Matemática para o 3º ciclo do Ensino Fundamental”, starting from generating problems of new mathematical ideas. Inside the process of Mathematical Education, the teaching-learning of Mathematics through problem solving is seen as an alternative methodology that seeks a kind of work centered in the student, starting from problems which can generate new concepts and new contents. In that methodology, students participate in the construction of knowledge under the teacher’s orientation and supervision. Both Divisibility and Rational Numbers were worked with those students. Could be verified that, when working with this methodology in classroom, there was an increase in the interest and motivation, so for the teacher, when teaching, as for the students, when learning. Besides, in many occasions, it was possible to observe the students relating their activities with some mathematical topics, already worked previously. All these facts, portrayed in my application, reinforce the relevance of that work. The research methodology adopted in this work is the methodology of Romberg.

Keywords: 1. Mathematics - Study and teaching. 2. Teaching-learning of Mathematics. 3. Ensino Fundamental. 4. Problem Solving. 5. Teaching through the Problem Solving.

Introdução

Com o término do curso de Licenciatura em Matemática chegaram minhas primeiras experiências em sala de aula e minhas primeiras angústias como professora. Não me sentia preparada para assumir a importante profissão de professor, com o compromisso de ensinar Matemática. Lembrei de Rubem Alves que, em seu livro "Conversas com quem gosta de ensinar", durante sua fala, compara o educador com o professor dizendo: *Professores há aos milhares. Mas professor é profissão, não é algo que se define por dentro, por amor. Educador, ao contrário, não é profissão; é vocação. E toda vocação nasce de um grande amor, de uma grande esperança.* Haviam se passado apenas quatro anos desde que deixara de ser estudante do Ensino Médio e muita coisa havia mudado. As atitudes dos jovens, perante professores, coordenadores e diretores, eram muito diferentes daquelas assumidas por mim enquanto aluna da rede estadual de ensino. Embora ainda tivesse como exemplo a postura de antigos professores, pude perceber que não poderia agir como eles agiam. Muita coisa havia realmente mudado! O que poderia eu fazer para que, um dia, pudesse me sentir uma educadora?

Minha primeira experiência como docente foi com classes do 3º ciclo do Ensino Fundamental, ou seja, em 5ª e 6ª séries, onde encontrei dificuldade em lidar com os alunos. O relacionamento com eles não era bom pois o comportamento deles em sala de aula era difícil e a forma de ensino tradicional parecia não ser a mais adequada ao trabalho daquela sala. Notei que minha formação docente precisava de algo mais para lidar com essas angústias e que precisaria encontrar formas diferenciadas de trabalhar na sala de aula.

Decidi, então, pesquisar algo sobre outras metodologias de ensino para a sala de aula. Resolvi fazer o curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática na Universidade do Norte Paulista (UNORP), em São José do Rio Preto, com o intuito de ficar mais informada sobre Educação Matemática. De todas as áreas a que mais me interessou foi a de Ensino-Aprendizagem, pois meu interesse sempre esteve voltado para o trabalho em sala de aula.

No ano 2000, assumi o cargo de professora efetiva da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo e optei por escolher a cidade de Rio Claro, esperando poder fazer o Mestrado em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista (UNESP).

Nesse mesmo ano, ingressei como aluna especial no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, onde cursei algumas disciplinas e iniciei a participação no Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela professora Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. Nesse período, fiquei surpresa ao verificar a quantidade de pesquisas sobre as dificuldades enfrentadas por professores no trabalho em sala de aula de Matemática. Isso era motivo de preocupação para muitos educadores havia já um bom tempo. Tomei conhecimento da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, que tem sido, para mim, uma boa alternativa na busca de uma melhora no ensino-aprendizagem de Matemática para os dias de hoje. Desse modo, decidi que esta metodologia de ensino-aprendizagem poderia ser utilizada como uma forma diferenciada de trabalho em sala de aula, nesta pesquisa de Mestrado.

Como Metodologia de Pesquisa, apresento o Modelo de Thomas A. Romberg, onde estão descritas dez atividades essenciais para o desenvolvimento de um trabalho de pesquisa.

No Capítulo 1 – Metodologia de Pesquisa – é apresentado o artigo de Romberg, matemático, educador e professor de Currículo e Ensino do Centro de Pesquisas em Educação, de Wisconsin, EUA. Nele, o autor procura mostrar a importância da pesquisa em Educação Matemática, situando-a como parte do conhecimento científico atual. Nesse trabalho, Romberg diz que pretende identificar, nas Ciências Sociais, as amplas tendências de pesquisa que estão relacionadas ao estudo do ensino e aprendizagem nos cenários escolares e determinar como estas tendências têm influenciado o estudo de Matemática nas escolas. Diz, também, que, como uma ajuda para entender a base destas tendências, ele descreve algumas características da Educação Matemática como um campo de estudo; esboça as atividades dos pesquisadores; e resume a variedade de métodos usados por eles.

Adotando para minha pesquisa a Metodologia de Romberg, procurei seguir o esquema da Figura 1.2, que fala sobre as atividades do pesquisador, enquanto pesquisa, e de como elas estão relacionadas. As dez atividades dos pesquisadores estão dispostas em três blocos: o primeiro é destinado à identificação do problema; o segundo visa criar e selecionar estratégias de pesquisa e seus correspondentes procedimentos, importantes para a condução do trabalho; e o terceiro é um bloco de ação que permite, após aplicação do procedimento central, coletar evidências, interpretá-las e relatar resultados.

Minha pesquisa, propriamente dita, inicia-se no Capítulo 2 – Identificar o Problema da Pesquisa – que é composto pelas quatro primeiras atividades do esquema de Romberg, onde se identifica o problema da pesquisa. A partir de um fenômeno de interesse, é elaborado um modelo preliminar contendo as primeiras idéias do pesquisador para apresentar um caminho a ser seguido durante a pesquisa. Relacionando-o com idéias de outros pesquisadores, sobre o tema a ser estudado, ficou definido meu problema de pesquisa. Identificar o problema de pesquisa é uma atividade que tem função diretiva no trabalho. A pergunta-problema desta pesquisa é: *Qual é a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina de Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos?*

O Capítulo 3 – Criar Estratégias e Procedimentos – foi destinado a criar e selecionar estratégias de pesquisa e procedimentos correspondentes, objetivando dar início à resolução de meu problema, responder à pergunta colocada. Definido o problema da pesquisa, foram idealizadas e selecionadas, entre elas, estratégias de pesquisa que procuram responder à questão: o que fazer para levar a pesquisa à frente?, e, para resolvê-lo, selecionar os correspondentes procedimentos: como fazer isso? Foi escolhida a estratégia central: Criar um Projeto, para ser aplicado em sala de aula, e o procedimento central correspondente a ela: a Concepção do Projeto. Criado esse Projeto, ele foi aplicado em sala de aula.

O Capítulo 4 – A Aplicação do Projeto – foi dedicado à aplicação do Projeto em sala de aula e o desenvolvimento desse trabalho foi rico.

Ensinar Matemática bem é um compromisso complexo e não há receitas fáceis para ajudar todos os alunos a aprenderem ou para ajudar todos os professores a tornarem-se eficientes.

Os professores determinam e criam um ambiente que conduz a aprendizagem de Matemática através das decisões que eles tomam, das conversações que eles organizam e do cenário físico que eles criam. As ações dos professores encorajam os alunos a pensar, a levantar questões, a resolver problemas e a discutir suas idéias, suas estratégias e suas soluções.

Dentro de um trabalho cooperativo, em sala de aula, envolvendo tanto alunos como professor, é necessário que o professor esteja predisposto a criar condições para que os alunos possam trabalhar em conjunto, saber ouvir o aluno e intervir corretamente. Numa aprendizagem cooperativa, o professor passa a ser um mediador. Nessa nova função ele precisa não só saber muita Matemática como ter, bem claro, os objetivos que deverão ser atingidos.

São relatados muitos e variados acontecimentos e situações ocorridos durante a aplicação, bem como os diálogos travados entre professora e alunos.

Na descrição da aplicação foram apresentados episódios de sala de aula, mostrando a importância da dinâmica adotada por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, num trabalho com os tópicos: Divisibilidade e Números Racionais.

Aplicado o Projeto, o Capítulo 5 – Coletar Evidências e Dar Sentido às Informações Obtidas – foi dedicado à apresentação das informações coletadas, que se mostraram evidentes durante a aplicação, evidências relevantes, irrelevantes e, às vezes, até incompreensíveis. Essas evidências foram analisadas e interpretadas buscando responder à pergunta-problema da pesquisa. Conclusões foram tiradas e sugestões foram feitas.

Respondendo à pergunta da pesquisa, em face de todas as considerações colocadas, quero afirmar, com segurança, que a contribuição da metodologia adotada nesse trabalho foi relevante.

Capítulo 1 – Metodologia de Pesquisa

Considerações Iniciais

> A principal razão porque metodologia de pesquisa em educação é uma área tão excitante é que Educação não é em si mesma uma disciplina. De fato, Educação é um campo de estudo, um local que contém fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que, por si mesmos, constituem a matéria prima para investigações de muitos tipos. (SHULMAN, 1988, p.5, apud ROMBERG, 1992, p. 49)

A estrutura de um trabalho está pautada em uma metodologia de pesquisa. A metodologia de pesquisa utilizada neste trabalho está baseada no modelo de Thomas A. Romberg, apresentado em seu artigo, publicado em 1992, no Capítulo 3 do Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, com o título: *Perspectives on Scholarship and Research Methods* (Perspectivas sobre Educação e Métodos de Pesquisa).

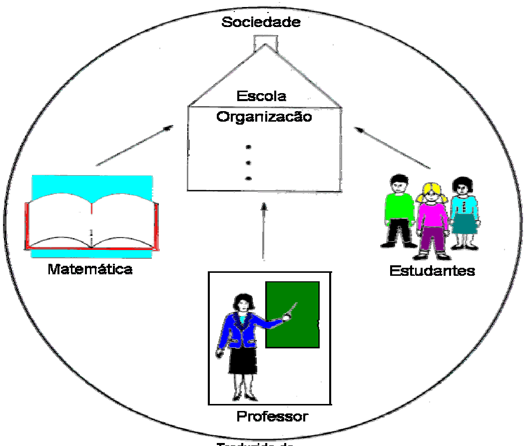
Metodologia de Romberg

Thomas A. Romberg é matemático, educador e professor de Currículo e Ensino do Centro de Pesquisas em Educação, de Wisconsin, EUA. Em seu artigo, o autor procura mostrar a importância da pesquisa em Educação Matemática, situando-a como parte do conhecimento científico atual. Nesse trabalho, Romberg diz que pretende identificar, nas Ciências Sociais, as amplas tendências de pesquisa que estão relacionadas ao estudo do ensino e aprendizagem nos cenários escolares e determinar como estas tendências têm influenciado o estudo de Matemática nas escolas. Diz, também, que, como uma ajuda para entender a base destas tendências, ele descreve algumas características da Educação Matemática como um campo de estudo; esboça as atividades dos pesquisadores; e resume a variedade de métodos usados por eles.

1.1 – A Educação Matemática como um campo de estudo

Para Romberg (1992, p. 51), o termo pesquisa refere-se a processos, a coisas que se faz, não a objetos que se pode tocar e ver. Além disso, diz ele que fazer pesquisa não pode ser visto como algo mecânico ou como um conjunto de atividades que os indivíduos seguem de maneira prescrita ou predeterminada, mas que atividades envolvidas em fazer pesquisa reúnem mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica e que, como em todas as artes, há consenso, num amplo sentido, sobre que procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado trabalho aceitável.

A Educação Matemática é um campo de estudo porque, como Shulman (1988, apud Romberg, 1992, p. 49) argumentou, a escola é complexa e, assim, as perspectivas e os procedimentos de investigação dos estudiosos, sobre muitas disciplinas, têm sido usados para investigar as questões levantadas e inerentes aos processos envolvidos no ensino e na aprendizagem da Matemática nas escolas. O artigo apresenta o diagrama de E. G. Begle (Romberg, 1992, p. 50), Figura 1.1, que ilustra a inter-relação dos componentes (estudantes, professor, matemática e escola) no processo de escolarização e a necessidade de múltiplas perspectivas e múltiplos procedimentos. Nesse diagrama, o empreendimento de escolarização está situado dentro de um contexto social; o currículo de Matemática envolve um subconjunto de Matemática; e o ensino é levado adiante por um professor com um grupo de estudantes dentro de uma sala de aula, na escola, ao longo de um certo tempo. Ou seja, os professores atuando na escola, os alunos pertencentes a essa escola, a disciplina de Matemática a ser nela trabalhada e tudo isso objetivando preparar o aluno para, saindo da escola, viver bem em sociedade.



Traduzido de
"PERSPECTIVES ON SCHOLARSHIP
AND RESEARCH METHODS" - Thomas A. Romberg
(Adaptado de E. G. Begle - 1961)

Figura 1.1 – A relação entre sociedade, matemática, estudantes, professores e escola.

Ainda, segundo Romberg (1992, p. 49-50), esse diagrama foi esboçado para apresentar um ponto de vista que relaciona o ensino da Matemática ao desenvolvimento de cinco pontos básicos:

1. As escolas foram criadas por grupos sociais para preparar seus jovens para viver bem em sociedade.

2. Um ensino de Matemática forte é abordado a partir de uma preocupação sobre que idéias da Matemática devem ser ensinadas e que usos são indicados para elas.
3. O ensino de Matemática pode ser eficiente se o aprendiz for levado em consideração.
4. Um ensino de Matemática eficiente pode ser realizado através de considerações de aspectos educacionais.
5. Os professores são os condutores e guias que fazem o processo de ensino funcionar.

1.2 – As atividades dos pesquisadores

A metodologia de Romberg é apresentada em um modelo onde estão descritas dez atividades essenciais para o desenvolvimento de um trabalho de pesquisa. Romberg distribui essas atividades em três blocos que vão orientar o pesquisador a investigar, planejar e desenvolver o seu trabalho. Abaixo segue o diagrama (Figura 1.2) apresentado por Romberg, com a seqüência das atividades propostas para o desenvolvimento da pesquisa e sobre as quais discorrerei nos próximos capítulos. Ele diz que não há nada único sobre esta lista de atividades, pois quase todos os textos sobre métodos de pesquisa esboçam um conjunto semelhante de atividades. Entretanto essas atividades são aí colocadas para: 1) esclarecer alguns problemas comuns que pessoas não familiarizadas com pesquisa se deparam ao procurar entender o processo de investigação; e 2) para dar fundamentação à discussão das tendências de pesquisa. Ele observa que embora as atividades sejam apresentadas por ele numa seqüência, elas não precisam ser necessariamente seguidas nessa ordem, pois fatores como intenção, hipóteses, conjecturas, disponibilidade de informação, métodos, etc., do pesquisador não podem, na prática, ser separados tão nitidamente.

Para nós, Romberg apresenta como novidade entre as metodologias de pesquisa existentes, enfocar a visão inicial do pesquisador de forma esquemática, num modelo preliminar que possa conter os passos da pesquisa inicialmente vislumbrados pelo pesquisador.

No primeiro bloco estão reunidas as quatro primeiras atividades que estão relacionadas com a identificação do problema. Para Romberg, essas são as mais importantes, pois elas estão envolvidas em situar as idéias que se tem sobre um particular problema, relacioná-las com a pesquisa de outros pesquisadores e decidir o que se quer investigar. O pesquisador tem um problema particular (Fenômeno de Interesse), representa-o em um modelo (Modelo Preliminar) e o situa relacionando-o com idéias de outros pesquisadores da área, definindo, assim, o problema da pesquisa que pode ser dado por uma Pergunta ou uma Conjectura.

Tendo um problema é preciso resolvê-lo. Assim, o segundo bloco do modelo envolve criar estratégias e procedimentos que abram caminhos para essa resolução e que levem à tomada de decisões sobre a escolha de evidências coletadas quando um procedimento central é aplicado.

O terceiro bloco, após uma ação que envolve colocar em prática aquilo que foi planejado, destina-se a coletar evidências, dar sentido às informações coletadas, a relatar os resultados obtidos e apresentá-los a outros.

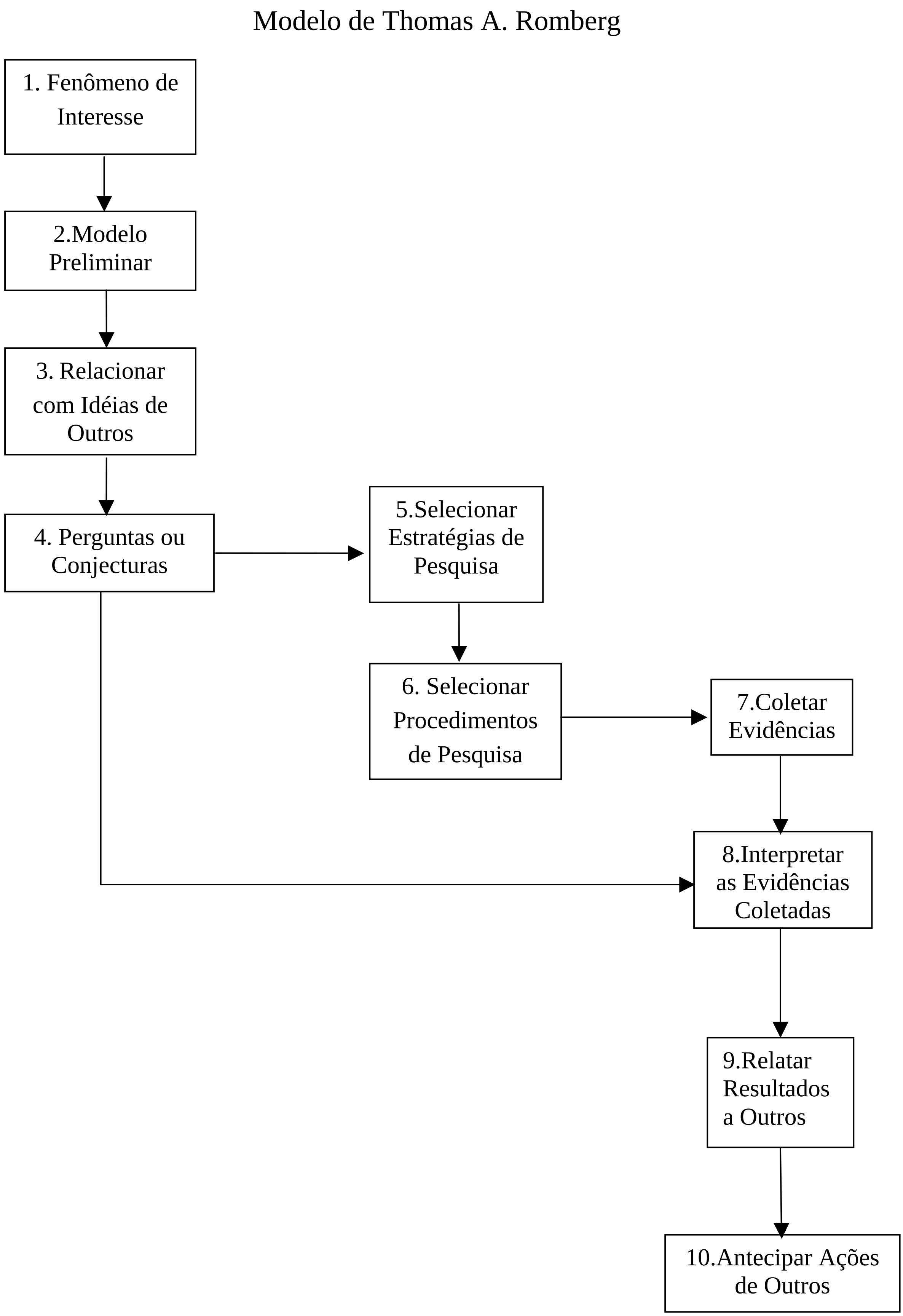


Figura 1.2 – Atividades de pesquisa e como elas estão relacionadas.

1.3 – Os métodos usados pelos pesquisadores

Para Romberg (1992, p. 56): “As atividades 5 a 10 são aquelas em que o pesquisador decide: (1) que evidência é necessária para conduzir as questões ou conjecturas levantadas; (2) como coletar, analisar e interpretar essa evidência; e (3) como relatar as descobertas para outros. Deve-se notar que pesquisadores raramente começam uma investigação com uma estratégia fixada para obter evidência ou com um método específico de análise em mente.” [...] “As decisões sobre que métodos utilizar são tomadas como uma conseqüência das atividades 1 a 4.” Tomado esse cuidado há dois aspectos para o uso do termo *métodos de pesquisa* que precisam ser bem compreendidos. Primeiro, os métodos específicos discutidos na literatura de pesquisa podem incluir a maneira na qual a informação é coletada, como ela é agregada e analisada, ou, às vezes, até como ela é relatada. Segundo, os métodos atuais que um pesquisador usa para obter evidência dependem de pelo menos cinco fatores: visão de mundo; orientação do tempo em que as questões estão sendo levantadas; se a situação presentemente existe ou não; a fonte antecipada de informação; e o julgamento de resultados obtidos.

A **visão de mundo** situa os métodos usados dentro das crenças de uma particular comunidade de pesquisa. A **orientação do tempo** refere-se a saber se as questões que estão sendo levantadas são dirigidas ao passado, ao presente ou ao futuro. Quanto às **situações**, é importante saber se elas presentemente existem ou precisam ser criadas. A **fonte de evidência** deve ser ou artefatos (livros, discursos e outros), ou respostas às questões feitas ou observações de ações. O **julgamento** se refere à avaliação de estudos como uma categoria distinta de métodos de pesquisa. Existe na literatura um grande número de métodos específicos que estão baseados neles ou que usam esses cinco fatores.

Romberg apresenta dois tipos diferentes de métodos usados pelos pesquisadores: métodos usados com evidência existente e métodos usados quando uma situação existe e evidência deve ser desenvolvida.

Métodos usados com evidência existente

Há três métodos nos quais os pesquisadores não têm liberdade para gerar novos dados. Eles precisam encontrar o que já existe e não podem alterar a forma em que os dados aparecem. São: historiografia; análise de conteúdo; e análise de tendência.

Historiografia: Nesta abordagem, é feito um esforço para esclarecer condições e problemas atuais através de uma compreensão mais profunda e plena do que tem sido feito ou ocorrido no passado.

Análise de conteúdo: Este método é usado para investigar questões orientadas no presente quando artefatos atuais podem ser examinados.

Análise de tendência: Este método é usado para ir adiante a partir de informações sobre o passado ou o presente para fazer predições sobre o futuro.

Métodos usados quando uma situação existe e evidência deve ser desenvolvida

Segundo Romberg (1992, p. 56), há muitos métodos diferentes de investigação para os quais uma situação existe e evidência específica precisa ser obtida. Em cada método, o pesquisador tem controle sobre a forma pela qual a informação é obtida e agregada, sendo alguns deles: pesquisa retrospectiva; entrevistas estruturadas; estudos de casos e pesquisa-ação.

- Pesquisa retrospectiva: Este método é usado para estudar questões que são orientadas no passado – a situação existiu uma vez, e os indivíduos que foram participantes na situação passada podem ser entrevistados usando este método.
- Entrevistas estruturadas: Neste método assume-se que por ouvir (e codificar) respostas a perguntas feitas, os pesquisadores podem encontrar mais informações esclarecedoras do que usando pesquisas de massa descritiva.
- Estudos de casos: Este método é usado para organizar e relatar informação sobre ações, percepções e crenças de um indivíduo ou grupo sob condições ou circunstâncias específicas. O pesquisador está interessado em contar uma história detalhada sobre um caso particular. O pesquisador não está interessado em fazer julgamentos sobre um programa ou em testar uma hipótese teórica.
- Pesquisa-ação: Este método refere-se a uma estratégia de pesquisa usada para investigar situações educacionais onde o pesquisador assume uma prática que precisa ser documentada e compreendida expandindo-se dentro de um trabalho feito em escolas e salas de aula. Ainda, essa documentação deve ser com freqüência registrada pelo professor.

Capítulo 2 – Identificar o Problema da Pesquisa (Primeiro Bloco de Romberg)

Considerações Iniciais

No primeiro bloco do modelo de Romberg é que se identifica o problema da pesquisa. Nesse bloco estão reunidas as quatro primeiras atividades do pesquisador relacionadas com a identificação do problema.

2.1 – Fenômeno de Interesse

Para Romberg (1992, p. 51), "o fenômeno de interesse de toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular no mundo real. Em Educação Matemática, o fenômeno envolve professores e alunos, como os alunos aprendem, como eles interagem com a Matemática, como eles respondem aos professores, como os professores planejam ensinar e muitos outros pontos".

Esse é o momento em que se pergunta: "Sobre o que pretendemos pesquisar?" Alguns autores classificam essa atividade como o foco da pesquisa.

No meu caso, acredito que o interesse pelo "Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas" tenha nascido de minha própria experiência enquanto professora. Como veremos durante toda a pesquisa, esse tema nada mais é do que o meu objeto de estudo ou, na linguagem de Romberg, o meu fenômeno de interesse.

2.1.1 – Minha Trajetória rumo à Educação Matemática

Durante minha vida de estudante, desde as séries iniciais não tive dificuldades com a aprendizagem de Matemática. Conseguia reproduzir tudo o que me era ensinado. Era uma verdadeira repetidora de conteúdos, sem questionamentos.

Acredito que a compreensão dos conteúdos estava um pouco distante de minha realidade. Os conteúdos ensinados nem sempre faziam sentido para mim mas se, para ter boa nota, bastava repeti-los, eu conseguia me adaptar ao sistema e gostava do que fazia. Porém, o mesmo não ocorria com alguns de meus colegas que não gostavam de Matemática e acabavam sendo tachados de "incapazes".

Um dos fatores determinantes que me levaram a gostar dessa disciplina foram os professores de Matemática que tive, pois estes transmitiam segurança em relação aos conteúdos e, de certa forma, eu me sentia "amparada". Seus métodos eram tradicionais e uma característica comum entre eles era a estrutura organizada de suas aulas, onde as iniciavam com definições, davam exemplos e exercícios de fixação e, às vezes, finalizavam com problemas. O conteúdo me chegava pronto e acabado e eu o aceitava sem questionar, apenas repetindo.

O tempo passou e, no final do Ensino Médio, me deparei com um problema muito sério: "Deveria escolher uma profissão". Esse é, em geral, um momento bastante difícil para os adolescentes, pois dessa decisão depende seu futuro.

Nesse momento, procurei fazer uma análise de minha vida como estudante e observei que era nas disciplinas da área de exatas, como Matemática, Física e Química, que me destacava mais. Como em minha cidade, São José do Rio Preto, havia o curso de Matemática na UNESP, resolvi prestar vestibular para o curso de Licenciatura em Matemática e passei. Passei, também, no vestibular da FUVEST, no curso de Licenciatura em Matemática na UFSCAR – São Carlos, mas optei por ficar em minha cidade.

Já no primeiro ano de Graduação, na disciplina de Cálculo I, onde havia juntos tanto alunos de licenciatura como de bacharelado, o professor, após os resultados da primeira prova, comentou que as notas haviam sido baixas, principalmente as dos alunos da licenciatura. Ele disse que não deveria haver essa diferença entre os alunos de bacharelado e de licenciatura, pois os alunos de licenciatura têm os mesmos direitos que os de bacharelado e podem seguir a carreira de pesquisador (Mestrado e Doutorado). Assim, esse professor não aceitava essa disparidade entre as notas de licenciandos e bacharelandos.

Ao longo do curso de Graduação tive diferentes tipos de professores, desde aqueles cuja forma de ensino era sempre a mesma, isto é, o mesmo conteúdo era ensinado da mesma forma e os exercícios trabalhados com os mesmos passos durante vários anos, até aqueles que não tinham uma postura organizacional de ensino, agindo de maneira mais solta. Senti, desde então, que o curso, apesar de ser considerado um dos melhores cursos de Matemática do Brasil, não estava me preparando para o cotidiano da sala de aula.

No segundo ano de Graduação, apareceram-me as primeiras propostas para aulas particulares e que não foram recusadas. Essa pequena experiência com aulas particulares não fazia com que me sentisse segura como professora, pois eu apenas reforçava o conteúdo já ensinado pela professora da sala. Não tinha experiência suficiente para saber como deveriam ser introduzidos os conteúdos matemáticos com algum sucesso. A partir daí, percebi que a prática em dar aulas viria com o tempo. *Será que não estava me acostumando a repetir aquelas mesmas coisas, da mesma forma?*

No último ano de Graduação, na disciplina de Prática de Ensino de Matemática, fiz estágio em escolas da rede estadual de ensino. Assistia às aulas e, eventualmente, participava dela auxiliando os alunos. Pude observar que a preocupação que o professor tinha não era apenas com o conteúdo mas, principalmente, em procurar manter a disciplina em sala de aula. Isto me deixou bastante frustrada, pois as minhas angústias aumentavam e me questionava se, algum dia, conseguiria ser uma 'boa' professora e, com esse trabalho, poder preparar bem os alunos que iriam depender de mim em sua instrução.

Ao término do curso, nos primeiros meses, fiquei ansiosa para ministrar aulas, pois continuava acreditando que a prática iria contribuir para a minha experiência. Somente no mês de abril de 1998 é que foram surgindo algumas aulas particulares e, também, algumas substituições em escolas estaduais. Nas aulas de substituição, nas escolas estaduais, manter a disciplina da classe se apresentava como a pior parte. Após algum tempo descobri que também o professor responsável por essa classe tinha os mesmos problemas, com os alunos, quanto à disciplina. Esse professor era aquele que deveria ministrar aulas para aquela turma durante todo o ano letivo mas que, com freqüência se ausentava de algumas aulas.

Apesar disso, aos poucos fui conseguindo o respeito dos alunos, principalmente pela segurança que eles pareciam sentir em mim quanto ao domínio daquele conteúdo matemático que estava sendo trabalhado.

Devido às aulas no ensino público em substituição não serem constantes, havia semanas com aulas e outras sem, decidi então enviar alguns currículos para escolas particulares, onde poderia obter maior número de aulas.

Pouco tempo depois, fui chamada para ministrar aulas de reforço em uma escola particular, onde teria aulas todas as tardes. Nesse período tive a oportunidade de observar e de fazer uma comparação entre os alunos do ensino público e os das escolas particulares, percebendo que eles apresentavam certas dificuldades em comum. Observei que ambos cometiam "erros", muitas vezes, no mesmo conteúdo e da mesma forma, havendo necessidade de recapitular certos conteúdos previamente "ensinados", mas que não haviam sido bem assimilados por eles.

Minha pouca prática inicial pôde contar com a ajuda de meus primeiros alunos e sinto que essa colaboração foi importante. Como o passar do tempo pude sentir que minha experiência ia melhorando e acreditar que, indo em busca de novos caminhos, poderia aprender novas formas de trabalho para a sala de aula.

Como já fazia parte de meus planos continuar estudando, fazer Mestrado em Matemática e, mais particularmente, em Educação Matemática, comecei a planejar um modo de participar, como aluna especial, do curso de Mestrado em Educação Matemática na UNESP de Rio Claro. Mas, para isso, precisaria conseguir aulas em Rio Claro para me manter financeiramente fora de casa.

Havia prestado o concurso da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo e estava aguardando o chamado. Assim decidi fazer o curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática na Universidade do Norte Paulista (UNORP) em São José do Rio Preto, iniciado em abril de 1999, no intuito de ficar mais informada sobre Educação Matemática. Ao cursar as disciplinas do curso fui me conscientizando do que tratava esta área de pesquisa, relacionada à Matemática, mas foi através da disciplina “Metodologia de Resolução de Problemas” que pude visualizar melhor as diferentes áreas de trabalho que a Educação Matemática possui. De todas as áreas a que me interessou mais foi a de Ensino-Aprendizagem, pois o meu interesse sempre esteve relacionado com o trabalho em sala de aula.

No ano 2000, ingressei no cargo de professora efetiva da rede estadual de ensino do Estado de São Paulo e optei por escolher a cidade de Rio Claro pois, assim, ficaria mais fácil fazer o Mestrado em Educação Matemática.

Tive a oportunidade, naquele momento, de ser a professora responsável pelas classes em que ministraria aulas e as minhas primeiras classes foram do 3º ciclo do Ensino Fundamental, onde notei que, apesar da distância entre as cidades de São José do Rio Preto e Rio Claro, a situação, com o ensino de Matemática, era semelhante.

Nesse mesmo ano ingressei como aluna especial no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, onde fiz algumas disciplinas e iniciei a participação no Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas (GTERP), coordenado pela Profª. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic. Nesse grupo, tive acesso à bibliografia sobre Resolução de Problemas. Nessa época, tive contato, também, com alguns materiais de pesquisa sobre o ensino de Matemática e suas dificuldades e fiquei surpresa ao verificar que esse assunto era motivo de preocupação para muitos educadores há um bom tempo.

Com relação ao ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental, o conteúdo matemático da 1ª série desse ciclo, que passarei a chamar de 5ª série, é, muitas vezes, visto por professores como uma revisão do que foi trabalhado nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental. Porém, como acredito, nesse momento esse conteúdo deveria ser visto com um espírito mais crítico, onde justificativas e formalizações poderiam ser trabalhadas com mais cuidado, levando os alunos a pensar e saber identificar o que se faz aí. Apesar de ser trabalhada, na maioria das vezes, pelos professores, apenas como uma revisão, alguns alunos ainda apresentam dificuldades nesse trabalho como se estivessem aprendendo tais conteúdos pela primeira vez ou porque o viram mal naquela fase. Há alunos que chegam a afirmar que até a 4ª série "gostavam" de Matemática, porém na 5ª série já não "gostam mais". *Por que isso? Será que o fato de ter na 5ª série um único professor responsável por essa disciplina é um desconforto para eles? Será que a revisão os entedia?*

Daí surgiram-me alguns questionamentos: *Como tornar a Matemática interessante ao iniciar a 5ª série do Ensino Fundamental? O que fazer para mudar esse quadro existente? Será que o trabalho feito a partir de problemas na 5ª série do Ensino Fundamental poderia ajudar esses alunos ao longo de sua escolaridade?*

Todas essas experiências unidas às minhas inquietações, observações e questionamentos a respeito das dificuldades apresentadas pelos alunos dessa série, quanto à disciplina Matemática, comentadas acima, serviram para a definição de meu fenômeno de interesse: **O *Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas***.

2.2 – Modelo Preliminar

Para Romberg (1992, p. 51), "um pesquisador faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como esses aspectos estão relacionados, então os ilustra num modelo".

O modelo preliminar dá uma visão geral do fenômeno a ser estudado, apontando possíveis pontos de partida e um possível encaminhamento para a pesquisa. Sempre, há a possibilidade de que o modelo preliminar de pesquisa não seja seguido, ou que não seja seguido à risca, mas, partindo dele, o pesquisador poderá organizar suas ações, de acordo com a realidade que se revela durante a pesquisa.

Assim, o Modelo Preliminar é o modelo que constitui a primeira idéia do que se pretende que venha a acontecer na pesquisa.

Olhando o fenômeno de interesse, **O ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas**, foi construído um modelo preliminar (Figura 2.1) que pudesse retratar uma possível trajetória do trabalho representando as primeiras idéias de como a pesquisa poderia se desenvolver em um modelo.

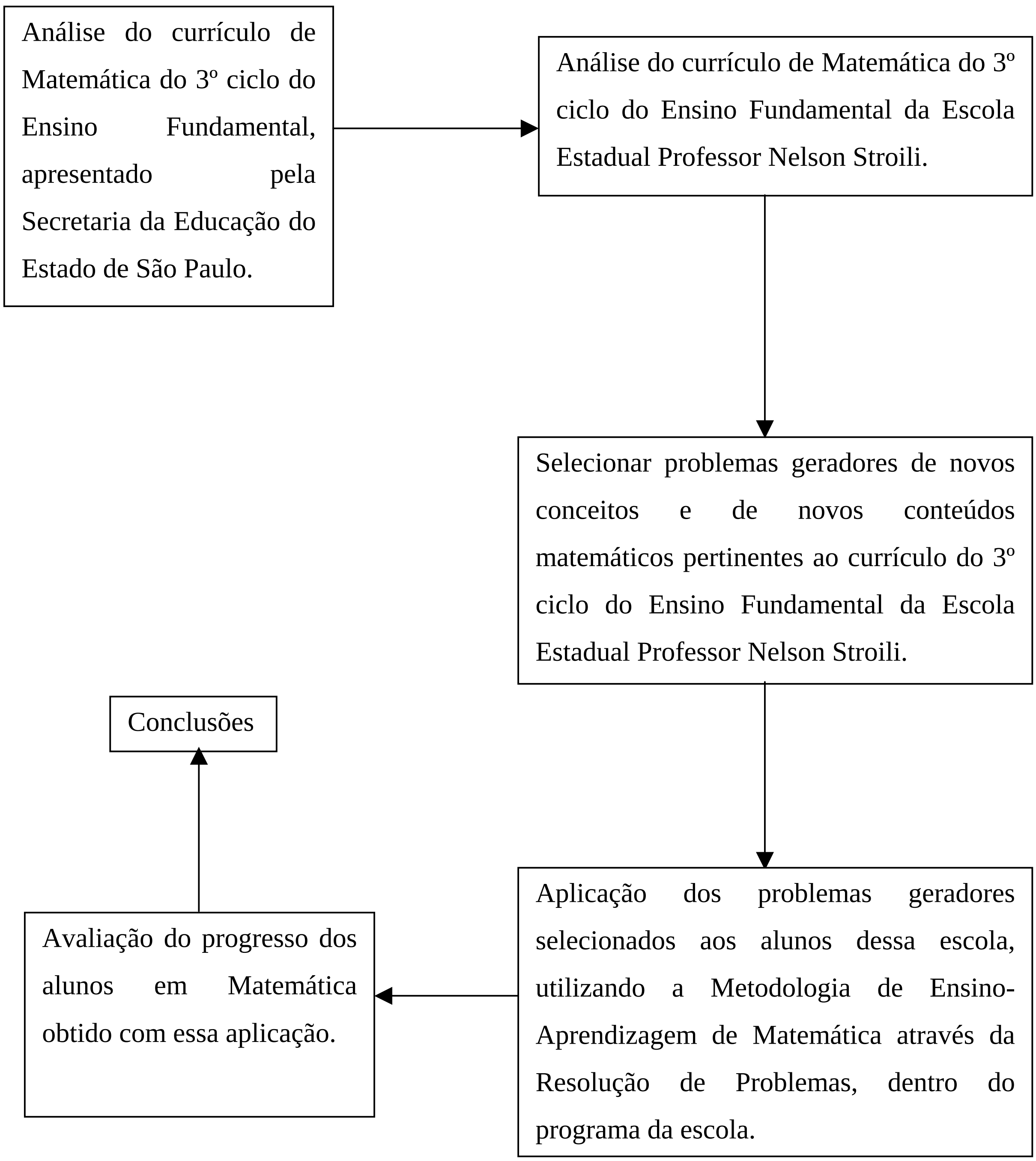


Figura 2.1 – Esboço do Modelo Preliminar da Pesquisa

Como meu Fenômeno de Interesse é **O Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas**, percebi a necessidade de analisar o que a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo propõe no currículo de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental. E, por ser professora efetiva da Escola Estadual Professor Nelson Stroili, em Rio Claro, e ter classes desse ciclo, optei por utilizar meus próprios alunos para a pesquisa. Desta maneira, haveria necessidade de, também, analisar o currículo de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental da escola pesquisada, ou seja, olhar o quê de Matemática e como é proposto pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo dentro do programa do 3º ciclo do Ensino Fundamental e, posteriormente, no currículo de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental da escola pesquisada, comparando-os.

Após essa análise, deveriam ser escolhidos alguns tópicos matemáticos, dentro do programa analisado, e buscar problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos relacionados aos tópicos escolhidos. Esses problemas seriam apresentados em um projeto de trabalho, distribuídos em aulas para atender aos objetivos gerais formulados onde, para cada problema, haveria objetivos específicos. O projeto de trabalho estará apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e, após sua aplicação, o progresso desses alunos será avaliado.

2.3 – Relacionar com Idéias de Outros

Considerações Iniciais

Como Romberg (1992, p. 51) descreve, esta é uma importante atividade na qual se examina o que outras pessoas pensam sobre o fenômeno de interesse definido e determinar se suas idéias podem ser usadas para esclarecer, ampliar ou modificar o modelo proposto. Faz-se necessário, então, comparar, confrontar e debater sobre as tendências atuais e passadas sobre o ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a fim de que essas idéias, apresentadas por outros autores, possam validar ou não as idéias por mim defendidas.

Nesta etapa da pesquisa, serão identificados como "outros" as pessoas que trabalham ou trabalharam com o ensino de Matemática no 3º ciclo do ensino fundamental e sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, levantados estudos que tratam do assunto, tanto em literatura de pesquisa quanto em livros didáticos nacionais e internacionais, artigos de pesquisa, teses, revistas, jornais e documentos da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, isto é, tudo o que estiver relacionado com o assunto.

2.3.1 – Abordagem Histórica do Ensino de Matemática

No século XX, o ensino de Matemática no Brasil passou por várias reformas que, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental (1998, p. 19), não tiveram força suficiente para mudar a prática docente, que visava eliminar o caráter elitista desse ensino, bem como melhorar sua qualidade. Essas reformas: o ensino de Matemática por repetição; o ensino de Matemática com compreensão; o movimento da Matemática Moderna; a Resolução de Problemas; e, agora, várias linhas alternativas de trabalho como a Modelagem, os Jogos, a História da Matemática, a Etnomatemática, o uso da Tecnologia e, para nós, o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas foram promovidas por reformas sociais e, conseqüentemente, havendo mudanças fortes na forma de como se ensina e como se aprende Matemática.

Segundo Onuchic (1999, p. 200):

> Ao passar de uma sociedade rural, onde “poucos precisavam conhecer matemática”, para uma sociedade industrial onde mais gente “precisava aprender matemática” em razão da necessidade de técnicos especializados, daí para uma sociedade de informação onde a maioria das pessoas “precisa saber matemática” e, agora, caminhando para uma sociedade do conhecimento que exige de todos “saber muita matemática”, é natural que o homem se tenha interessado em promover mudanças na forma de como se ensina e como se aprende matemática.
> Assim, discussões no campo da Educação Matemática no Brasil e no mundo mostram a necessidade de se adequar o trabalho escolar às novas tendências que, se acreditava, poderiam levar a melhores formas de se ensinar e aprender matemática.

Observa-se que há muito tempo discute-se a necessidade de o ensino de Matemática acompanhar a evolução social do mundo, pois como a sociedade muda, a forma de ensino deve mudar também para que o homem possa acompanhar tais mudanças.

Quando a maioria das pessoas pertencia a uma sociedade rural não havia necessidade de muita gente ter conhecimento de Matemática, pois o homem lidava com a terra e o conhecimento necessário era passado de uma geração para outra, de pai para filho; a sociedade industrial precisou de mais pessoas que soubessem um pouco mais de Matemática, por exemplo de técnicos especializados que precisavam saber lidar com máquinas ou construí-las; na sociedade da informação, em vista da matéria prima ser a informação, aumentou a necessidade de mais gente saber mais Matemática; e, agora, na sociedade do conhecimento exige-se que todos saibam Matemática.

Em todas as reformas observa-se a preocupação de que as pessoas saibam Matemática suficiente para ajudá-los a viver bem a cada momento. O objetivo central de todas as reformas no ensino de Matemática é o de que ela seja bem aprendida. Pode-se notar que, em todas as reformas ocorridas, houve sempre pessoas que conseguiam obter sucesso nessa disciplina mas, ao avaliar o progresso da massa, pode-se perceber que esse objetivo não havia sido atingido.

Uma outra característica das reformas ocorridas no ensino de Matemática neste século é o do não aproveitamento dos pontos positivos de uma reforma ao passar para outra, não se levando em consideração o que de bom podia ter havido nelas.

Numa análise dos movimentos de reforma do ensino de Matemática, no século XX, Onuchic (1999, p. 201) diz que:

> No início do século XX, o ensino de matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia [...]
> Anos depois, dentro de outra orientação, os alunos deviam aprender matemática com compreensão. Esta reforma descartava a anterior. As tabuadas e seus treinos eram condenados. O aluno devia “entender” o que fazia. Mas, o professor falava, o aluno escutava e apenas repetia, não participando da construção de seu conhecimento. O professor não havia sido preparado para seguir e trabalhar as idéias novas que queriam implementar.

Por essa ocasião, alguns educadores matemáticos já se preocupavam com a possibilidade de resolver problemas para se aprender Matemática.

Segundo Onuchic (1999, p. 202):

> Nas décadas de 1960 e 1970, o ensino de matemática no Brasil e em outros países do mundo foi influenciado por um movimento de renovação conhecido como Matemática Moderna. Esta reforma também deixava de lado as reformas anteriores. Apresentava uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. Realçava muitas propriedades, tinha preocupações excessivas com abstrações matemáticas e apresentava uma linguagem matemática universal, concisa e precisa. Entretanto, acentuava o ensino de símbolos e uma terminologia complexa que comprometia o aprendizado.
> Nesta reforma o professor falava, porém muitas vezes não seguro daquilo que dizia. O aluno não percebia a ligação que todas aquelas propriedades enunciadas tinham a ver com a matemática dos problemas e, principalmente, com a matemática usada fora da escola. Embora procurasse usá-las em exercícios de aplicação, repetindo o que havia sido feito em classe e dizendo o nome daqueles novos símbolos matemáticos que lhes eram apresentados, com freqüência não conseguia lhes dar significado. Esse ensino passou a ter preocupações excessivas com formalização, distanciando-se das questões práticas.

Durante a reforma conhecida como Matemática Moderna, deixou-se de considerar um ponto básico que viria a se tornar seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do Ensino Fundamental.

Os PCN (1998, p. 20) dizem que:

> No Brasil, a Matemática Moderna foi veiculada, principalmente, pelos livros didáticos e teve grande influência. O movimento da Matemática Moderna teve seu refluxo a partir da constatação da inadequação de alguns de seus princípios e das distorções ocorridas na sua implantação.

As idéias desse movimento foram impostas aos professores, muitas vezes, despreparados para assumi-las. Essas idéias eram baseadas em resultados positivos obtidos em aplicações feitas em Colégios de Aplicação, onde os professores estavam preparados para trabalhar com a linguagem da teoria dos conjuntos. No entanto, na grande maioria das escolas isso não ocorria. Assim, como nas reformas anteriores, ao se avaliar os alunos, percebeu-se que a maioria deles ainda não sabia Matemática e o movimento da Matemática Moderna foi definhando.

2.3.2 – Resolução de Problemas

Devido ao insucesso das reformas ocorridas foi que se começou a dar importância à Resolução de Problemas.

Apesar de problemas de Matemática sempre terem ocupado um lugar central no currículo da Matemática escolar desde a Antigüidade, a importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a idéia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia atenção.

Segundo Onuchic (1999, p. 203, 204):

> [...] O ensino de Resolução de Problemas, enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser investigado de forma sistemática sob a influência de Polya, nos Estados Unidos, nos anos 1960.
> No fim dos anos 1970, a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Em 1980 é editada, nos Estados Unidos, uma publicação do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's[1], que chamava todos os interessados, pessoas e grupos, para juntos, num esforço cooperativo massivo, buscar uma melhor educação matemática para todos.

Nesse documento, pedia-se que a resolução de problemas fosse foco do ensino da Matemática para os anos 1980 e destacava que o desenvolvimento da habilidade, em resolução de problemas, deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa

[1] Conselho Nacional de Professores de Matemática – Uma Agenda para Ação: Recomendações para a Matemática Escolar dos anos 80.

década e que o desempenho em saber resolver problemas mediria a eficiência de um domínio da competência matemática. Além disso, segundo os PCN (1998, p. 20), a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos e lingüísticos, além dos cognitivos na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares.

Essas idéias influenciaram as reformas que ocorreram em todo o mundo, a partir de então, e vêm sendo discutidas no Brasil, sendo que algumas aparecem incorporadas pelas propostas curriculares das Secretarias de Estado e Secretarias Municipais de Educação, havendo experiências bem-sucedidas que comprovam sua fecundidade. No entanto, segundo os PCN (1998, p. 20-21), [...] é importante salientar que ainda hoje se nota, por exemplo, a insistência no trabalho com a linguagem da teoria dos conjuntos nas séries iniciais, a formalização precoce de conceitos, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais e as poucas aplicações práticas da Matemática no ensino fundamental.

Como se pode observar, na prática as idéias demoram a se concretizar e, durante a década de 1980, trabalhou-se muito com estratégias de resolução de problemas. Foram usadas idéias de Polya que, desde 1944, falava em resolução de problemas para se ensinar e aprender Matemática. Muito trabalho foi feito e muitos livros didáticos foram escritos nessa linha mas, quase sempre, se apoiando em estratégias apresentando caminhos de resolução e não, como realmente queria Polya, no pensar dos alunos.

A reforma Resolução de Problemas foi contra a Matemática Moderna. É mais uma reforma descartando as anteriores. Nessa nova reforma o que se considera importante é saber resolver problemas. O foco desse trabalho é ensinar a resolver problemas. Um bom aluno em Matemática é aquele que é bom resolvedor de problemas. Assume-se, assim, um ensino das mais variadas estratégias. O professor ensinando a resolver problemas e sempre o ensino centrado no professor. Mas, os testes aplicados mostravam que, apesar de aprenderem a resolver diferentes tipos de problemas, utilizando diferentes estratégias, os alunos, em sua maioria, não eram bons em Matemática.

Os estudos da década de 80 deram grande atenção ao processo da resolução de problemas, não se limitando à busca da solução mas, mesmo assim, o processo continuou preso à busca da solução do problema, com a orientação do professor.

Percebia-se que não havia consenso sobre como se entender a primeira recomendação, do documento Uma Agenda para a Ação, que dizia: Resolução de Problemas deve ser o foco da Matemática escolar nos anos 80. Schroeder & Lester (1989, p. 31-34) apresentam três modos diferentes de abordar Resolução de Problemas, que podem ajudar a refletir sobre essas diferenças: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas.

No modo ensinar sobre resolução de problemas o professor procura ressaltar o modelo de resolução de problemas de Polya, que descreve um conjunto de quatro fases interdependentes no processo de resolver problemas matemáticos: compreender o problema, criar um plano, levar avante esse plano e olhar de volta o problema original. Nesse momento, contempla-se a parte teórica da resolução de problemas.

No modo ensinar a resolver problemas procura-se ressaltar as estratégias para se resolver um problema, baseando-se, às vezes, em problemas semelhantes. Nesse caso, o professor se concentra na Matemática que foi ensinada e o que dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros.

O modo de ensinar Matemática através da resolução de problemas preocupa-se mais com o processo do que com a solução final. Os problemas são importantes não somente como um propósito para se aprender Matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a construção dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. O foco está na ação por parte do aluno. Essa metodologia não descarta o que de bom tiveram as outras orientações curriculares, "[...] mas busca-se, com ela, usar tudo o que havia de bom nas reformas anteriores: repetição, compreensão, a linguagem matemática da teoria dos conjuntos, técnicas de resolução de problemas e, às vezes, até a forma de ensino tradicional." (ONUCHIC, 1999, p. 211)

Outra pesquisa, em Educação Matemática, que se manifesta sobre essas diferenças na concepção de resolução de problemas, é de Mendonça (1999, p. 15-33) que as apresenta assim:

- ✓ como um *objetivo*, em que se ensina Matemática para resolver problemas;
- ✓ como um *processo*, em que a ênfase está no desempenho e nas estratégias utilizadas pelos alunos;
- ✓ como *ponto de partida*, em que o problema é considerado como um elemento que desencadeia um processo de construção do conhecimento.

No final da década de 1980, começo dos anos 1990, houve uma volta às idéias construtivistas e a pesquisa em resolução de problemas ficou ameaçada. Assim, pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Começaram a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. A resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento.

O modo de se abordar a resolução de problemas que será utilizado é o terceiro: ensinar matemática através da resolução de problemas, onde o problema é visto como um *ponto de partida* para a construção de novos conceitos e novos conteúdos.

2.3.3 – O 3º Ciclo do Ensino Fundamental

Durante a vida o homem passa por muitas situações de transição ao longo de sua aprendizagem. A primeira delas é a passagem do nascimento, onde a criança deixa o corpo materno e sai para o mundo. Caso tenha freqüentado escolas infantis, passa por outras situações de mudança. Mas, o que realmente aparece como uma importante transição, a segunda, é sua passagem para a vida escolar inicial, onde a professora, como uma segunda mãe, passa a exercer uma função meritória. Nesse momento a criança que apenas recebia orientações de seus pais passa a recebê-las, também, da professora. A terceira transição ocorre quando da passagem da 4ª para a 5ª série do Ensino Fundamental onde, agora, a criança recebe orientações de diferentes professores, sendo que cada um deles possui sua própria forma de ensinar e condizente às características determinadas por suas crenças e concepções sobre ensino e aprendizagem. A quarta transição é a passagem da 8ª série do Ensino Fundamental para o 1º ano do Ensino Médio, onde os jovens passam a aplicar o conhecimento construído nos oito anos do Ensino Fundamental. Ao final dessa fase, ocorre a quinta transição, na qual os alunos estarão definindo se se lançam para o mercado de trabalho ou se dirigem para a Universidade. Ao escolher a Universidade, defrontam-se com o vestibular que exige deles a definição de escolha de uma profissão. Ao terminar o Ensino Superior, em uma sexta transição, tornam-se adultos responsáveis e são lançados na Sociedade.

> Os estudantes dos graus médios[2] são únicos. Nenhum outro período escolar cobre completamente tão ampla gama de desenvolvimento intelectual, físico, psicológico e social, e os educadores devem ser sensíveis para entrar no leque de capacidades desses jovens. Para muitos estudantes a escola média representa a última chance para desenvolver um sentido de propósito acadêmico e compromisso pessoal para objetivos pessoais. Aqueles que falham no nível dos graus médios geralmente se afastam da

[2] Os graus médios, nos EUA, são as 6ª, 7ª e 8ª séries que equivalem às 5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries do Brasil.

> escola e nunca devem novamente ter oportunidades de desenvolver seu potencial mais completo. (HONIG, 1987, p. v, apud SOWDER, J. T., 2000)

Durante esse período, muitos estudantes formarão concepções sobre si mesmos como aprendizes de Matemática – sobre sua competência, sua atitude e seu interesse e motivação. Essas concepções definirão a forma de estudar Matemática nos anos seguintes e isso, por sua vez, seguramente irá influir nas oportunidades de suas vidas. Os estudantes, nessa fase, adquirem um gosto e desenvolvem uma compreensão de idéias matemáticas se eles encontram com freqüência problemas desafiadores e interessantes.

Em meu trabalho de pesquisa observarei alunos que adentram a terceira transição, a passagem da 4ª para a 5ª série do Ensino Fundamental e analisarei os conteúdos programáticos de Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, buscando comparar as modificações sofridas durante as reformas ocorridas no Ensino de Matemática do século XX.

É minha intenção verificar se um trabalho diferenciado, feito em sala de aula, com uma metodologia alternativa, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, poderá contribuir para uma melhora no ensino-aprendizagem de Matemática.

2.3.4 – Conteúdos Programáticos e as Reformas do Ensino de Matemática no século XX

Assim como o ensino de Matemática, o currículo de Matemática sofreu modificações com as reformas ocorridas no século XX.

A 5ª série do Ensino Fundamental de hoje era, nas primeiras décadas do Século XX, denominada primeiro ano do Ginásio ou primeira série do Curso Ginasial. Em alguns momentos não havia documentos que registrassem o currículo abordado para a Matemática escolar da época.

Para poder identificar o conteúdo matemático abordado no primeiro ano do Ginásio, procurei analisar os índices de alguns livros didáticos de Matemática de modo a tentar visualizar, de maneira fidedigna, como o conteúdo matemático era tratado em cada período.

Dentre os conteúdos matemáticos abordados nesse nível de ensino, me limitarei a enfatizar os tópicos Divisibilidade e Números Racionais.

Década de 1950

O programa de Matemática da Primeira Série Ginasial, de acordo com as portarias nº 966, de 2 de outubro de 1951, e nº 1045, de 14 de dezembro de 1951, no tocante aos tópicos acima citados se apresentam assim:.

II – Divisibilidade Aritmética

- Múltiplos e divisores. Divisibilidade. Princípios fundamentais. Caracteres de divisibilidade por 10 e suas potências: por 2, 4 e 8; por 5 e 25; por 3 e 9; por 11. Propriedades elementares dos restos. Provas das operações por um divisor.
- Números primos e números compostos; números primos entre si. Crivo de Eratóstenes. Reconhecimento de um número primo. Decomposição de um número em fatôres primos. Cálculo dos divisores de um número. Número divisível por dois ou mais números primos entre si dois a dois; aplicação à divisibilidade.
- Máximo divisor comum. Algorítmo de Euclides; simplificações. Propriedades. Máximo divisor comum pela decomposição em fatôres primos.
- Mínimo múltiplo comum. Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum. Propriedades.

III – Números Fracionários

- Frações. Fração ordinária e fração decimal. Comparação de frações; simplificação; redução ao mesmo denominador. Operações com frações ordinárias.
- Frações decimais; números decimais. Propriedades dos números decimais; operações. Conversão de fração ordinária em número decimal e vice-versa. Número decimal periódico.

Desta década foram selecionados dois livros. No livro, Matemática para a Primeira Série Ginasial, 52ª edição, 1958, de Ary Quintela, é apresentado um programa de Matemática, de acordo com as portarias de 1951, citadas acima. Este livro, apresenta um índice detalhado dos conteúdos matemáticos nele abordados.

UNIDADE II: DIVISIBILIDADE ARITMÉTICA. NÚMEROS PRIMOS

I - Divisibilidade

- Múltiplo;
- Divisor;
- Divisibilidade;
- Princípios fundamentais;
- Caracteres;
- Divisibilidade por 10 e suas potências;
- Divisibilidade por 2, 4 e 8;
- Divisibilidade por 5 e 25;
- Divisibilidade por 3 e 9;
- Divisibilidade por 11;
- Restos. Prova dos divisores.

II – Números primos

- Número primo;
- Números primos entre si;
- Números primos entre si dois a dois;
- Tábua de números primos. Crivo de Eratóstenes;
- Princípio fundamental;
- Reconhecer se um número é primo;
- Decomposição em fatôres primos;
- Aplicações da decomposição em fatôres primos.

III – Máximo divisor comum

- Divisor comum;
- Máximo divisor comum;
- Determinação do máximo divisor comum de dois números;
- Simplificações do algoritmo;
- Propriedades do m.d.c.;
- M.D.C. de mais de dois números;
- Cálculo do m.d.c. pela fatoração;

IV – Menor múltiplo comum

- Definição;
- Determinação do m.m.c. pela fatoração;
- Múltiplos comuns;
- Relação entre o m.d.c. e o m.m.c.;
- Exercícios de revisão da Unidade II.

UNIDADE III: NÚMEROS FRACIONÁRIOS

I – Frações ordinárias

- Noção de fração;
- Modo de escrever uma fração;
- Frações decimais e ordinárias;
- Modo de ler uma fração;
- A fração como resultado de uma medida;
- A fração como quociente;
- Definição;
- Comparação de frações;
- Propriedades das frações;
- Fração de um número;
- Simplificação das frações;
- Redução à expressão mais simples;
- Redução de frações ao mesmo denominador;
- Transformação das frações impróprias e dos números mistos;
- Operações com frações;
- Adição;
- Subtração;
- Multiplicação;
- Numeros inversos;
- Divisão;
- Potenciação;
- Operações com números mistos;
- Frações positivas e negativas;
- Resolução de problemas.

II – Números decimais

- Fração decimal;

- Número decimal;
- Leitura dos números decimais;
- Propriedades;
- Adição e subtração;
- Multiplicação;
- Divisão

Conversão de fração ordinária em decimal e vice-versa

- Quociente aproximado;
- Conversão da frações ordinárias em números decimais;
- Dízimas periódicas;
- Caracteres de convertibilidade;
- Conversão das dízimas periódicas simples em frações ordinárias;
- Conversão das dízimas periódicas compostas em frações ordinárias;
- Operações com as dízimas periódicas.

No livro Elementos de Matemática: Primeiro Volume para a Primeira Série do Curso Ginasial, 47ª Edição – Professor Jácomo Stávale, 1956, é apresentado um prefácio da Segunda Edição do livro Primeiro ano de Matemática, 1931, onde o autor faz uma alusão a um momento de reforma no ensino da época

> [...] Aos que me chamarem de retrógrado ou antiquado ou cousa que o valha responderei que, compreendendo perfeitamente que os métodos antigos para o ensino da Matemática devem ser profundamente modificados, não há, entretanto, razão para exagerar a nova orientação e fazer do ensino da Matemática um verdadeiro caos. Eu prefiro ficar entre as duas correntes, aproveitando o que há de bom na escola antiga e na moderna. (STÁVALE, 1956, p. VI)

Pelo que se observa, este autor abordava, em sua fala, um instante de transição do ensino de Matemática por repetição para o ensino de Matemática com compreensão.

O autor apresenta, também, um índice em que detalha minuciosamente os tópicos matemáticos apresentados no livro.

Cap. 2 – Divisibilidade Aritmética – Números Primos

- Preliminares;
- Teoremas gerais da divisibilidade;
- Caracteres de divisibilidade;
- Primeiro grupo dos caracteres de divisibilidade;
- Segundo grupo dos caracteres de divisibilidade;
- A regra dos noves fora;
- Prova da subtração pelos restos;
- Prova da multiplicação pelos restos;
- Números primos;
- Crivo de Eratóstenes;
- Regra para verificar se um número é primo ou composto;
- Decomposição em fatores primos;
- Divisão de um produto indicado por um dos seus fatores;
- Quando um número é divisível por dois números primos entre si, é também divisível pelo produto deles;
- Divisores de um número;

- Calcular todos os divisores de um número;
- Parte alíquota de uma grandeza;
- Máximo divisor comum;
- Teoremas fundamentais;
- Calcular o m.d.c. de dois números;
- Regra para calcular o m.d.c. de dois números;
- Calcular os quocientes de dois números pelo seu m.d.c.;
- Propriedades do m.d.c.;
- Simplificação do processo das divisões sucessivas;
- Dividindo-se dois números pelo seu m.d.c. os quocientes são primos entre si;
- Composição do m.d.c. de dois ou mais números;
- Mínimo múltiplo comum;
- Observações sobre o m.m.c. de dois ou mais números.

Cap. 3 – Números Fracionários

- Definição;
- Leitura de uma fração ordinária;
- Frações próprias, impróprias e aparentes;
- Transformação de uma fração imprópria em número inteiro ou misto;
- Transformação de um número inteiro em fração com denominador dado; transformação de um número misto em fração imprópria;
- Simplificação das frações ordinárias;
- Simplificação de uma fração pelo processo das divisões sucessivas;
- Simplificação de uma fração pelo processo do m.d.c.;
- Redução de frações ao mesmo denominador;
- Redução de frações ao menor denominador;
- Comparação de frações;
- Propriedades das frações;
- Adição de frações ordinárias;
- Subtração de frações ordinárias;
- Expressões aritméticas fracionárias;
- Multiplicação de frações ordinárias;
- Simplificação na multiplicação de frações ordinárias;
- Divisão de frações ordinárias;
- Fração de fração;
- A fração ordinária considerada como um quociente;
- Divisão com resto;
- Expressões aritméticas fracionárias;
- Frações decimais;
- Números inteiros e frações decimais;
- As subdivisões do milésimo;
- Multiplicação ou divisão de uma fração decimal por 10^n;
- Adição e subtração de frações decimais;
- Multiplicação de frações decimais;
- Divisão de frações decimais;
- Transformação de uma fração decimal em ordinária;
- Transformação de uma fração ordinária em decimal;
- Divisão com resto;
- Quociente aproximado a menos de uma unidade;
- Dízimas periódicas;
- Valor absoluto e relativo de um período;
- Geratriz de uma dízima periódica;
- O verdadeiro valor de uma dízima periódica;
- Operações sobre as dízimas periódicas;
- Caracteres de convertibilidade.

Cada um dos tópicos é apresentado de forma bastante detalhada, explicada e, após cada um deles, são deixados muitos exercícios, cada um com sua particularidade. Percebe-se, então, que apesar de muitos exercícios, estes possuem diferenças entre si, mostrando que coisas positivas foram aproveitadas da reforma anterior (repetição). Dentre os exercícios são postas muitas questões que estimulam a compreensão do tópico aprendido.

Décadas de 1960 e 1970

No início da década de 1960, foram encontrados livros que, ainda, se apoiavam nas portarias, nº 966 e nº 1045, de 1951. Por exemplo o livro, Matemática para a Primeira Série Ginasial, 91ª edição, 1960, de Osvaldo Sangiorgi, cujo índice mostra:

Capítulo II: Divisibilidade aritmética: números primos; máximo divisor comum; mínimo múltiplo comum.

I – Divisibilidade aritmética:

- Definição. Critérios de divisibilidade. Divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12. Propriedades elementares dos restos. Provas por um divisor. Exercícios sôbre a divisibilidade aritmética.

II – Números primos:

- Definição. Tábua dos números primos (Crivo de Eratóstenes). Reconhecimento. Decomposição de um número em fatôres primos. Determinação de todos os divisores de um número. Número de divisores de um número. Divisibilidade de um número por outro mediante seus fatôres primos. Tábua dos números primos menores que 1000. Exercícios sôbre números primos. Curiosidades sôbre divisibilidade.

III – Máximo divisor comum:

- Divisor comum de dois ou mais números. Máximo divisor comum de dois ou mais números. Determinação do m.d.c. de dois ou mais números. Propriedades. Problemas de aplicação do m.d.c. Exercícios sôbre o máximo divisor comum.

IV – Mínimo múltiplo comum:

- Múltiplo comum de dois ou mais números. Mínimo múltiplo comum de dois ou mais números. Determinação do m.m.c. de dois ou mais números. Propriedades. Propriedade entre o m.d.c. e o m.m.c. de dois números. Problemas de aplicação do m.m.c. Exercícios sôbre o mínimo múltiplo comum.

Capítulo III: Números fracionários; operações fundamentais; métodos de resolução de problemas sôbre frações; frações decimais como números decimais.

I – Números fracionários:

- Noção intuitiva de fração. Definição. Frações próprias, impróprias e aparentes. Extração de inteiros. Números mistos. Propriedades das frações. Simplificação. Frações irredutíveis. Redução ao mesmo denominador. Redução de frações ao mínimo denominador comum. Comparação de frações. Aplicações. Exercícios sôbre frações.

II – Operações fundamentais com as frações:

- Adição de frações de mesmo denominador e de denominadores diferentes. Subtração de frações de mesmo denominador e de denominadores diferentes. Uso de parênteses. Multiplicação. Observações. Potenciação. Divisão. Expressões aritméticas fracionárias. Exercícios sôbre operações com frações. Curiosidades sôbre frações.

III – Métodos de resolução de problemas sôbre frações:

- Métodos de resolução de nove problemas. Problemas sôbre frações.

IV – Frações decimais como números decimais:

- Noção intuitiva e operações: Noção intuitiva e definição. Leitura de um número decimal. Transformação de uma fração decimal em um número decimal e vice-versa. Propriedades dos números decimais. Operações com os números decimais. Observações. Quocientes aproximados. Exemplo de aplicação.
- Conversão de fração ordinária a um número decimal e vice-versa: Condição para que uma fração ordinária se converta numa decimal exata. Condição para que uma fração ordinária se converta numa dízima periódica. Geratrizes. Observação. Expressões aritméticas envolvendo dízimas periódicas. Exercícios sôbre números decimais.

Nesse livro, a apresentação detalhada dos conteúdos, numa seqüência ordenada de ações, mostra-se, aritmeticamente, conveniente para os professores.

Mas, neste período, o Movimento da Matemática Moderna no Ensino de Matemática surgia em todo o mundo, inclusive no Brasil. Encontrei no documento publicado na Revista DIDÁTICA, nº 1, Marília, 1964, o artigo: Mesa-Redonda Sôbre Introdução da Matemática Moderna no Ensino de Qualquer Grau, que apresentava argumentos sobre a importância de se estruturar a Matemática no ensino primário e secundário. Nela é feita “uma exposição sobre assuntos mínimos para um moderno programa de Matemática para o Ginásio, p. 132-137, organizado pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) de São Paulo. Nela, também, o GEEM apresenta os assuntos mínimos considerados indispensáveis para a Escola Secundária atual” (SANGIORGI, 1964, p. 130). Nesse documento, foram realçados 24 itens para assuntos mínimos de um Programa de Matemática para os quatro anos de Ginásio e 18 para os três anos de Colégio.

Segundo o relato de Sangiorgi (1964),

> [...] levando-se em conta a flexibilidade do currículo e a continuidade que deve existir no ensino dos diversos assuntos, o professor interessado em Matemática Moderna poderá programar, dos itens apresentados, o número que achar conveniente. Apenas como caráter de sugestão, poder-se-ia

> desenvolver em classes normais 6 itens por série de ginásio (naturalmente na ordem em que aparecem, tanto quanto possível). [...] (p. 131)
> [...] Convém assinalar que o programa ora apresentado pelo GEEM, mereceu aprovação unânime do plenário, relativo à Comissão de Matemática do V Encontro de Mestres, realizado na capital de São Paulo, de 27 a 28 de junho último, sob o patrocínio da CADES e jurisdição da Inspetoria Seccional de São Paulo, bem como da reunião de professores da Secção K – Educação, relativa a "Introdução da Matemática Moderna no Curso Secundário", da XVI Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência, realizada em Curitiba, Paraná, em 10 do corrente. (p.132)

Apresento aqui apenas os tópicos que serão por mim explorados neste trabalho de pesquisa.

ASSUNTOS MÍNIMOS	SUGESTÕES
1 – Número e numeral. Sistemas de numeração. Bases.	1 – A idéia de **conjunto** deve ser dominante; destacar os conceitos de número (como **idéia**) e numeral (como símbolo, nomes... que representam os números). Lembrar a importância de outros sistemas de numeração (antigos e modernos) além do decimal; ressaltar as aplicações de algumas bases.
2 – Operações (operações inversas) com os números inteiros, propriedades estruturais.	2 – A operação deve ter um significado **mais geral** do que aquele que o aluno normalmente possui; deve-se destacar o significado de operação inversa. As propriedades estruturais das operações com números inteiros devem ser ressaltadas como o início das estruturas matemáticas.
3 – Divisibilidade, múltiplos e divisores, números primos – fatoração completa.	3 – O uso da linguagem de conjuntos e operações entre conjuntos trará novos centros de interesse na explanação da matéria. Devem ser acentuadas as relações de "mútiplo de" e "divisor de"; o estudo das operações m.d.c. e m.m.c. e as respectivas propriedades estruturais.
4 – Números fracionários; operações (operações inversas); propriedades estruturais.	4 – Destacar com os números fracionários a permanência das propriedades já introduzidas com os números inteiros (a estrutura contínua). Dar a idéia de número racional absoluto, e suas propriedades.
[...]	[...]

No fim da década de 1960, com a Matemática Moderna em vigor, encontrei o livro: Matemática: Curso Moderno, para os ginásios, 1º volume, de Osvaldo Sangiorgi, 1969. Nele, pude observar que a linguagem da Teoria dos Conjuntos mostrava-se bastante evidente, como podemos destacar apresentando seu índice.

Cap. 2

- Operações no conjunto dos números naturais (N);
- Adição de números naturais; propriedades estruturais;
- Subtração; associação de adições e subtrações;
- Expressões numéricas – "pontuação". Problemas de aplicação;

> [...]
> • Divisibilidade no conjunto N; relações "múltiplo de", "divisor de";
> • Critérios de divisibilidade; propriedades dos restos;
> • Números primos; números compostos;
> • Fatoração completa;
> • Técnica operatória da radiciação; raiz quadrada;
> • Operações: maximação e minimação; propriedades estruturais;
>
> **Cap. 3**
>
> • Conjunto dos números racionais (Q);
> • Números fracionários; frações;
> • Classe de equivalência entre frações;
> • Estrutura de ordem nos números fracionários;
> • Operações; propriedades estruturais;
> • Problemas de aplicação; estruturas;
> • Representação decimal dos números racionais;
> • Numerais decimais; operações;
> • Dízimas periódicas; geratrizes;
> • Potenciação e radiciação;
> • APÊNDICE 3 – Número racional absoluto.

Este livro apresenta seus tópicos de maneira bastante minuciosa, fazendo algumas demonstrações e a linguagem da teoria de conjuntos estava bastante presente, principalmente em seus exercícios. Na parte teórica, ainda, os conteúdos são apresentados como nos livros da reforma anterior. Por exemplo, quando ele introduz a definição de 'múltiplo de' e 'divisor de' diz que:

> "Se um número é *divisível* por outro, diz-se também que ele é múltiplo desse outro; o outro passa a ser seu divisor ou submúltiplo." (SANGIORGI, 1969, p. 149)

Já o livro: Ensino Atualizado da Matemática – Curso Ginasial, 2ª edição revista, de Omar Catunda e outros, 1971, Bahia, apresenta a mesma definição com uma linguagem mais impregnada da teoria dos conjuntos. Por exemplo, na definição de "múltiplo de", Catunda, 1971, p. 40, diz que:

> "Dado um número natural ***a***, considere-se a aplicação ***f***, de **N** em **N**, que a cada número natural ***q*** faz corresponder ***aq***. Em símbolos, tem-se:
>
> $$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$$
>
> $$q \longrightarrow aq$$
>
> com
>
> $$a \in \mathbf{N},\ q \in \mathbf{N},\ aq \in \mathbf{N}.$$
>
> Os produtos ***aq***, para um ***a*** fixo, dizem-se *múltiplos* de ***a***. O conjunto dessas imagens será designado, no que segue, por M_a
> Diz-se, também, que ***a*** é submúltiplo de ***aq***."

Observa-se que, apesar de serem livros que surgiram durante a reforma da Matemática Moderna, nem todos eles continham a mesma força quanto à presença da linguagem e da notação da teoria de conjuntos e o formalismo colocado.

Em 1975, surgiu o documento: Guias Curriculares Propostos para as Matérias do Núcleo Comum do Ensino do 1º Grau da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, que apresentava um currículo que representava a reforma da época. Este documento foi elaborado com o objetivo de assegurar o contínuo aprimoramento das estruturas educativas para que tornassem a implementação da Lei 5692/71 uma realidade efetiva para toda a extensa rede de ensino de 1º grau paulista. Nele, a 1ª série do Ginásio passou a ser chamada 5ª série do 1º Grau.

Neste documento o conteúdo matemático para todo o 1º Grau contemplava quatro temas básicos:

- ✓ Relações e funções;
- ✓ Campos Numéricos;
- ✓ Equações e Inequações;
- ✓ Geometria.

Para a 5ª série, os conteúdos eram:

- ✓ Conjuntos; relações e funções.
- ✓ Estrutura de N e potenciação.
- ✓ Números inteiros: conceito.
- ✓ Estrutura de Z.
- ✓ Geometria intuitiva.

Mais detalhadamente, se apresentava assim:

CONTEÚDO	OBJETIVOS
1 – Conjuntos; Elementos; Pertinência.	• Escrever em extensão o conjunto determinado por uma propriedade, dado um conjunto universo. • Saber que um conjunto só fica determinado, se, para qualquer elemento, somente uma das alternativas é verdadeira: o elemento pertence ou o elemento não pertence ao conjunto. • Traduzir simbolicamente se um elemento pertence ou não a um conjunto.
2 – Diagramas.	• Construir e interpretar diagramas de conjuntos. • Representar dois conjuntos quaisquer por meio de diagramas.
3 – Igualdade e Inclusão.	• Determinar se um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B, verificando se cada elemento de A é também elemento de B. • Traduzir simbolicamente se um conjunto está ou não contido em outro. • Distinguir a relação de pertinência da relação de inclusão. • Saber que A = B, **se e somente se**, $A \subset B$ e $B \subset A$.
4 – Reunião.	• Determinar a reunião de dois conjuntos quaisquer. • Identificar a reunião de dois conjuntos em um diagrama (pintar, assinalar, etc.) • Traduzir simbolicamente a reunião de dois conjuntos. • Associar o conetivo **ou** à reunião de dois conjuntos.
5 – Intersecção.	• Determinar a intersecção de dois conjuntos quaisquer. • Identificar a intersecção de dois conjuntos em um diagrama. • Traduzir simbolicamente a intersecção de dois conjuntos. • Associar o conetivo **e** à intersecção de dois conjuntos.
6 – Partição.	• Reconhecer se uma família de subconjuntos é uma partição de um conjunto dado. • Determinar partições diferentes de um mesmo conjunto. • Assinalar, em um diagrama, uma partição de um conjunto dado.
[...]	[...]

No final da década de 1970, localizei o documento da Secretaria de Estado da Educação – São Paulo – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas (CENP) –

Subsídios para Implementação do Guia Curricular de Matemática – Álgebra para o 1º grau – 5ª a 8ª séries, 1978, onde são apresentadas orientações aos professores ao efetuarem seus planejamentos.

Observando as atividades propostas por ele, percebe-se que a linguagem da teoria dos conjuntos estava bastante definida. O objetivo deste documento era fornecer ao professor elementos que permitissem resolver o problema de identificar as atividades necessárias à obtenção dos resultados esperados, permitindo, desse modo, a efetiva implementação das propostas curriculares no que diz respeito à Matemática.

Década de 1980

Para esta década observa-se o surgimento do documento: "Uma Agenda para a Ação" do NCTM, que apresentava, para seu país, recomendações para o ensino de Matemática nos anos 1980. Nele, como recomendação primeira, a resolução de problemas aparecia como o foco da Matemática escolar nos anos oitenta. As idéias apresentadas neste documento tiveram repercussão em todo o mundo.

No Brasil encontrei o documento: Proposta Curricular para o Ensino de Matemática – 1º Grau (Versão Preliminar), 1986, cuja autoria era da Equipe Técnica de Matemática da CENP e seu objetivo era reformular a proposta curricular anterior em vigência desde 1976.

Nesse documento, com relação à organização dos conteúdos, os temas tratados não diferiam dos abordados em programas anteriores, porém a intensidade e a maneira pela qual cada um desses temas vinha sendo trabalhado é que revelava diferenças de um programa para outro.

O documento apresentava ainda as seguintes observações com relação ao conteúdo:

> - A utilização da linguagem da Teoria dos Conjuntos, enquanto linguagem unificadora dos vários campos da Matemática, foi intencionalmente minimizada, dado que essa orientação não tem facilitado a apreensão dos conceitos matemáticos pela criança;
> - [...]
> - A resolução de problemas deve estar presente em cada tema abordado no programa: como preocupação metodológica, como ampliação de conceitos, como desafio à reflexão dos alunos e à sua criatividade, como instrumento que propicie a generalização de propriedades.

O ensino de Matemática do 1ª Grau era dividido em 3 blocos:

✓ 1º bloco ou Ciclo Básico (1ª e 2ª séries);

✓ 2º bloco (3ª, 4ª e 5ª séries);

✓ 3º bloco (6ª, 7ª e 8ª séries).

Assim, o conteúdo matemático pertinente ao 2º bloco era:

NÚMEROS	MEDIDAS	GEOMETRIA
• [...] - Divisibilidade: • Decomposição de um número em fatores; • Classificação dos números naturais primos / não primos; • Regras principais da divisibilidade; • MMC e MDC; - Potenciação; - Números racionais absolutos: • Conceito; • Representação fracionária; • Representação decimal; • Representação fracionária e decimal; • Ordenação de números racionais (comparação); • Adição e subtração de números racionais na forma decimal; • Multiplicação de números racionais na forma decimal; • Divisão de números racionais na forma decimal; • Equivalência de frações; • Adição e subtração de frações; • Multiplicação de frações; • Divisão de frações; • [...]	- O conceito de medida; - Medidas de comprimento com utilização de unidades não padronizadas e unidades padronizadas; - [...]	- Planificação de sólidos geométricos; - Classificação das curvas em: abertas / fechadas, simples / não simples; - Identificação de segmento de reta como o caminho mais curto entre dois pontos; - Classificação das curvas fechadas simples em polígono / não polígono; - Classificação dos polígonos de acordo com o número de lados. - [...]

Busquei, também, localizar alguns livros didáticos da época e encontrei o livro, Matemática e Realidade, de Gelson Iezzi e outros, 5ª série, São Paulo: Atual, 1984, que apresenta seus conteúdos de forma bastante similar à dos livros atuais e, no final de cada capítulo, são deixadas uma série de exercícios e uma série de testes destinados à revisão e amarração dos conteúdos vistos nas diversas unidades. Desta forma, é apresentado aqui o seu índice:

[...] **Cap. 3 – Divisores e múltiplos em N**

- ✓ Divisibilidade;
- ✓ Números primos;
- ✓ Decomposição em fatores primos;
- ✓ Divisores de um número;
- ✓ Máximo divisor comum (mdc);
- ✓ Múltiplos de um número;
- ✓ Mínimo múltiplo comum (mmc);

- ✓ Exercícios – Série final
- ✓ Testes

Cap. 4 – Números racionais absolutos

- ✓ Frações;
- ✓ Leitura de uma fração;
- ✓ Tipos de frações;
- ✓ Frações equivalentes;
- ✓ Os números racionais absolutos;
- ✓ Simplificação de frações;
- ✓ Redução de frações a um mesmo denominador;
- ✓ Comparação de frações;
- ✓ Adição e subtração;
- ✓ Multiplicação;
- ✓ Divisão;
- ✓ Potenciação;
- ✓ Frações e numerais decimais;
- ✓ Transformação de fração decimal em numeral decimal;
- ✓ Propriedades dos numerais decimais;
- ✓ Divisão de naturais;
- ✓ Divisão de decimais;
- ✓ Decimais exatos. Dízimas periódicas;
- ✓ Exercícios – Série final
- ✓ Testes

Década de 1990 até hoje

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN): Matemática (1998, p.49):

> [...] os currículos de matemática do Ensino Fundamental compreendem quatro grandes temas. São eles:
> - ✓ Tratamento da informação – Permite ao cidadão analisar as informações cotidianas, como dados estatísticos, tabelas e gráficos.
> - ✓ Estudo dos Números e das Operações – Compreende a aritmética e a álgebra.
> - ✓ Estudo das grandezas e das medidas – Possibilita interligações entre os campos da aritmética, da álgebra, da geometria e de outras áreas do conhecimento.
> - ✓ Estudo do espaço e das formas – Constitui o campo da geometria.

Apesar disso, observa-se que, em termos escolares, os conteúdos matemáticos muitas vezes são tratados isoladamente e são apresentados e esgotados num único momento. Quando acontece de serem retomados, isso é feito apenas com a perspectiva de serem utilizados como ferramentas para a aprendizagem de novas noções. De modo geral, parece não se levar em consideração que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos.

Atualmente, o Ensino Fundamental está dividido em ciclos. O primeiro ciclo é formado pelas 1ª e 2ª séries, o segundo, pelas 3ª e 4ª séries, o terceiro, pelas 5ª e 6ª séries e o quarto, pelas 7ª e 8ª séries.

Para este período encontrei o livro: Tudo é matemática, Luiz Roberto Dante, 5ª série, 2003, que se apóia, como outros livros, nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Seu índice é apresentado da seguinte forma:

Pode-se observar que, neste livro, o autor utiliza problemas e situações-problema durante a apresentação de conceitos e conteúdos matemáticos. Porém, apesar de ser um livro que utiliza a resolução de problemas, este método de trabalho leva a um ensino de estratégias de resolução de problemas.

Neste item, Conteúdos Programáticos e as reformas do Ensino de Matemática no século XX, objetivou-se verificar a evolução dos conteúdos Divisibilidade e Números Racionais, durante os períodos de reformas no ensino de Matemática ocorridas no século XX.

Nota-se que apesar de possuírem em seus índices algumas semelhanças, ao ser feita uma analise do conteúdo apresentado no corpo do livro, pôde ser observado que, com o passar dos anos, este se tornou mais compactado. Algumas propriedades que antes eram trabalhadas e demonstradas com detalhes, hoje nem sempre são citadas.

2.3.5 – O Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental

Falou-se, no item 2.3.3, sobre as transições sofridas pelo homem ao longo de sua vida.

O que será que ocorre com o ensino e a aprendizagem de Matemática nesses períodos de transição?

Sabe-se que a base do desenvolvimento matemático das crianças se estabelece em seus primeiros anos. A aprendizagem matemática é construída sobre a curiosidade e o entusiasmo das crianças e cresce naturalmente a partir de suas experiências. Na fase correspondente ao 1º ciclo, a Matemática deve estar ligada sempre ao mundo da criança. As experiências matemáticas que as crianças vivem em seu dia-a-dia as levam a explorar idéias relacionadas a modelos, formas, números e espaço, desenvolvendo nelas a capacidade de relacionar, que é uma característica da aprendizagem matemática.

Parece que a maioria das crianças que entram no 2º ciclo, o faz com entusiasmo e interesse ao aprender Matemática. Muitas dessas crianças dizem, com freqüência, que acham Matemática fácil e acreditam que o que elas estão aprendendo é importante. Se a Matemática estudada no 2º ciclo é interessante e compreensível, as idéias matemáticas mais sofisticadas neste nível podem manter o engajamento e o entusiasmo desses estudantes. Mas se sua aprendizagem torna-se um processo de apenas repetir e memorizar, eles logo podem começar a perder esse interesse. O ensino, neste nível, deve ser ativo e intelectualmente estimulante e precisa ajudar os estudantes a dar sentido à Matemática.

Este fato se modifica ao entrar no 3º ciclo, como diz Azevedo, 2002, p. 13-15, que teve oportunidade de ser professora alfabetizadora de uma classe, que adorava a Matemática, mas que depois, novamente ao se tornarem seus alunos, na 5ª série, diziam que não gostavam mais de Matemática. Em seu trabalho a autora pergunta: *Por que eles não gostavam mais de matemática? O que acontecera com aquele entusiasmo, com aquela vontade, aquela euforia dos primeiros anos escolares? O que mudara? Onde estava o erro?*

Em um trabalho de monografia que trata das atitudes dos alunos de 1ª a 4ª séries em relação à Matemática, Torquato, 2002, ao fazer uma pesquisa com alunos, utilizando dados estatísticos, mostra que a matéria que eles mais gostam de estudar nos primeiros anos é a Matemática, porém descreve que, para os alunos, a importância da explicação da professora cresce no progresso das séries escolares, denotando assim uma diminuição de sua autonomia ao longo das séries.

A passagem para o terceiro ciclo marca o início da convivência do aluno com uma organização escolar com a qual não está habituado, horário compartilhado por diferentes matérias e diferentes professores, nível de exigências distinto, posições variadas quanto à conduta em sala de aula e à organização do trabalho escolar e as diferentes concepções quanto à relação professor-aluno.

Além disso, em termos da organização curricular, há uma mudança nesse ciclo em relação ao que vinha sendo desenvolvido anteriormente, pois os conhecimentos passam a se dividir em disciplinas distintas umas das outras, abordadas de forma isolada. Há uma mudança em termos de forma de trabalho entre os diversos professores e suas respectivas práticas de ensino.

Observa-se, também, uma forte tendência em fazer do primeiro ano deste ciclo um ano de revisão dos conteúdos estudados em anos anteriores. Nota-se, de maneira geral, que os professores acreditam que os alunos vêm do ciclo anterior com um domínio de conhecimentos abaixo do desejável e acham que, para resolver o problema, é necessário fazer uma retomada de conteúdos, resultando em uma revisão que permanece por quase toda a 1ª série do 3º ciclo do Ensino Fundamental.

Mas, segundo os PCN (1998, p. 61-65), a revisão infindável de tópicos causa grande desinteresse nos alunos e, ao final, fica a sensação de que a série inicial do terceiro ciclo é uma série “desperdiçada”. Neste momento seria necessária uma revisão dentro de um espírito crítico, onde os conceitos fossem reconstruídos pelos próprios alunos sob a supervisão dos professores.

Desta maneira, faz-se necessário refletir sobre o que é possível fazer para minimizar os problemas que caracterizam a passagem dos alunos para o terceiro ciclo e de como mudar esse quadro. Para que isso ocorra é preciso destacar a importância de levar efetivamente em conta que os alunos cheguem ao terceiro ciclo com uma bagagem razoável de conhecimentos matemáticos e que é fundamental dar continuidade ao processo de consolidação desses conhecimentos. No entanto, muitas vezes, esses alunos não conseguem exprimir suas idéias usando adequadamente a linguagem escrita e, conseqüentemente, a linguagem matemática, isso não significando que não tenham podido construir nenhum tipo de conceito matemático.

Percebe-se a necessidade de diagnosticar o domínio que cada aluno tem sobre os diferentes conteúdos que serão explorados e identificar quais são suas possibilidades e dificuldades diante da aprendizagem desses conteúdos.

Segundo os PCN (1998, p. 63), "neste ciclo, é preciso desenvolver o trabalho matemático ancorado em relações de confiança entre o aluno e o professor e entre os próprios alunos, fazendo com que a aprendizagem seja vivenciada como uma experiência progressiva, interessante e formativa, apoiada na ação, na descoberta, na reflexão e na comunicação. É preciso ainda que essa aprendizagem esteja conectada à realidade, tanto para extrair dela situações-problema que permitam desenvolver conteúdos como para voltar a ela ao aplicar os conhecimentos construídos".

No documento Proposta Curricular para o ensino de Matemática: Ensino Fundamental (São Paulo, 1997, p.75), os conteúdos a serem desenvolvidos na 5ª série do Ensino Fundamental são:

Números	Medida	Geometria
Sistemas de Numeração: Comparação entre o sistema de numeração decimal com outros sistemas de numeração. Operações com números naturais: Utilização das operações em diversas situações-problema. Potenciação: conceito, representação, propriedades. Divisibilidade: Decomposição de um número em fatores primos. Principais regras de divisibilidade. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum: Conceito, propriedades e resolução de problemas. Números racionais absolutos: Comparação de frações quaisquer. Adição e subtração de frações quaisquer. Multiplicação de frações quaisquer. Divisão de frações quaisquer. Representação na forma decimal. Problemas envolvendo medidas e porcentagem.	Ampliação e redução de figuras (áreas e perímetros). Volume: Conceito de volume. Medida de volume, utilizando unidades não padronizadas. O metro cúbico. Cálculo do volume do prisma reto de base retangular.	Noções de reta, semi-reta, segmento de reta. Alturas de triângulos, paralelogramos e trapézios: identificação e construção com esquadro. Noção de circunferência: Conceito de círculo, circunferência, superfície esférica e esfera. Elementos de uma circunferência: centro, raio, corda, diâmetro, arco e circunferência máxima. Posições relativas de uma reta e uma circunferência. Divisão da circunferência em partes iguais.

De acordo com os PCN (1998, p. 61-77), com intenção, neste ciclo, de amenizar os problemas referenciados anteriormente, é preciso:

> [...] que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, buscando relações existentes entre eles, aprimorando a capacidade de análise e de tomada de decisões, que começam a se manifestar. Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas. (p. 63)
>
> [...] Quanto aos números naturais, muitas vezes considera-se que o trabalho com eles se encerra no final do segundo ciclo. No entanto, é importante que o aluno continue a explorá-los em situações de contagem, de ordenação, de codificação, em que tenha oportunidade de realizar leitura e escrita de números "grandes" e desenvolver uma compreensão mais consistente das

> regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza. Também os estudos relacionados ao desenvolvimento histórico dos números podem fornecer excelentes contextos para evidenciar as regras desse sistema e a necessidade da construção de outros números, que não apenas os naturais. (p. 66)
>
> [...] Conceitos como os de “múltiplo” e “divisor” de um número natural ou o conceito de “número primo” podem ser abordados neste ciclo como uma ampliação do campo multiplicativo, que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores, e não como assunto novo, desvinculado dos demais. (p. 66)
>
> [...] O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merece atenção especial no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: relação parte/todo, quociente, razão e operador. (p. 66)
>
> [...] A resolução de situações-problema com números naturais, racionais e inteiros permite, neste ciclo, a ampliação do sentido operacional, que se desenvolve simultaneamente à compreensão dos significados dos números. A esse respeito convém salientar que a resolução de situações-problema com diferentes tipos de números é pouco trabalhada neste ciclo (e menos ainda no quarto ciclo), não possibilitando aos alunos ampliar ou construir novos significados, seja para a adição/subtração, multiplicação/divisão ou para a potenciação/radiciação. (p.66-67)
>
> [...] os alunos reorganizam e ampliam os conhecimentos sobre Espaço e Forma abordados no ciclo anterior, trabalhando com problemas mais complexos de localização no espaço e com formas nele presentes. (p. 68)
>
> [...] As atividades geométricas centram-se em procedimentos de observação, representações e construções de figuras, do manuseio de instrumentos de medidas que permitam aos alunos fazer conjecturas sobre algumas propriedades dessas figuras. (p. 68)
>
> [...] é importante que os alunos sejam estimulados a construir e analisar diferentes processos de resolução de situações-problema e compará-los. (p. 70)

É de extrema importância trabalhar no aluno a idéia de justificar suas soluções e deixar por escrito suas idéias quanto à resolução de um problema. Isso, no começo é difícil, pois os alunos não estão acostumados mas, depois, eles chegam a desenvolver tal habilidade, conseguindo, muitas vezes, surpreender os professores com sua capacidade.

Os PCN (1998, p. 61-77), descrevem o currículo proposto, no Brasil, para o 3º ciclo do Ensino Fundamental de modo a mostrar sua importância e, como conseqüência disso, vê-se a importância de se fazer um bom trabalho nessa fase que servirá de base para os ciclos posteriores. Vê-se que idéias contidas nos PCN são idéias encontradas nos Standards 1989, do NCTM.

O NCTM, dos Estados Unidos, objetivando um ensino de Matemática de qualidade, K – 12, apresenta, em seu livro Principles and Standards for School Mathematics (2000); seis **Princípios** recomendados para o trabalho com a Matemática escolar: Eqüidade; Currículo; Ensino; Aprendizagem; Avaliação; e Tecnologia; cinco **Padrões de Conteúdo**: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Medida; e Análise de Dados e Probabilidade, que explicitamente descrevem o conteúdo que os estudantes devem aprender; os outros cinco padrões são **Padrões de Processo**: Resolução de Problemas; Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação, que destacam os caminhos para se adquirir e usar o conhecimento de conteúdo.

Juntos, os princípios e padrões, apresentam uma visão para orientar os educadores num esforço para a melhoria contínua da Educação Matemática nas salas de aula, nas escolas e nos sistemas educacionais.

Segundo os Standards 2000, o **Princípio do Currículo** (p. 14) diz que

> [...] um currículo é mais do que uma coleção de atividades; ele precisa ser coerente, enfocando sobre matemática importante e bem articulado através das séries.

Para que um currículo seja coerente, as idéias matemáticas devem estar relacionadas entre si e serem construídas umas sobre as outras, de modo que a compreensão e o conhecimento dos alunos aumentem e suas habilidades em aplicar a Matemática construída se desenvolvam.

É verdade que

> A Matemática ensinada, ainda nos dias de hoje, se apresenta como um "armário" com gavetas onde, em cada gaveta, se guarda separadamente cada conteúdo matemático, obstruindo a visão do aluno quanto às conexões que, efetivamente, os conteúdos matemáticos têm entre si.
> Os currículos da matemática escolar deveriam se concentrar nos conteúdos e procedimentos que merecem o tempo e a atenção dos estudantes. Os tópicos matemáticos deveriam ser considerados importantes por diferentes razões: suas utilidades em desenvolver outras idéias matemáticas, ligar diferentes áreas da matemática ou aprofundar a visão de matemática como uma disciplina e como uma criação humana. (PEREIRA, 2002, p. 615-619)

Observa-se que nenhum currículo pode ser concebido como definitivo, pois ele deve estar em constante transformação para atender às solicitações das necessidades que possam surgir no ensino de Matemática que, por sua vez, também está em constante modificação.

Justificar para os estudantes que o estudo de certos tópicos matemáticos é importante, apenas como base de "pré-requisitos", seja para a Matemática que ainda se vai estudar ou para atividades da vida futura do estudante, pode fazer com que esta se torne estéril e desinteressante.

Segundo o National Council of Supervisors of Mathematics[3] (NCSM, 1990, p. 23-35), mudar os conteúdos matemáticos de um currículo não significa mudar o ensino. Bons objetivos podem perigar se se mantiverem inalteradas as metodologias e as formas de

[3] Conselho Nacional de Supervisores de Matemática.

avaliação, assim como qualquer mudança metodológica pode ser fortemente dificultada se os conteúdos não forem alterados. Isto não significa que basta mudar o currículo para que o ensino e a aprendizagem se modifiquem. Porém, qualquer proposta de renovação curricular, se não quiser desde logo ficar condenada ao insucesso, tem que contemplar de forma equilibrada e articulada, o conjunto dos componentes curriculares.

Ainda, segundo o NCSM, o currículo deve ser equilibrado. A Matemática não será, certamente, "a rainha das ciências", nem "a disciplina mais importante". Pontos de vista como estes contribuem para o desenvolvimento de "angústias" e de outras atitudes negativas ou "perigosas" face à Matemática. Ela é, ou pode ser, no entanto, uma disciplina importante, por seu valor cultural e pelo papel que tem desempenhado no desenvolvimento da ciência, da cultura e de outros ramos da atividade humana. Ainda dizem que estas são algumas das razões porque se defende que "todos devem ter oportunidade de aprender Matemática, o que não significa necessariamente que a Matemática, a todo o momento, seja a mesma para todos".

Segundo os Standards 2000, a aprendizagem matemática envolve acumular idéias e construir sucessivamente compreensões mais profundas e refinadas. Um currículo de matemática escolar deveria fornecer um mapa que ajudasse os professores a guiar os estudantes em níveis crescentes de sofisticação e de conhecimentos profundos. Tal guia requer um currículo bem articulado e tal que os professores, de cada nível, compreendam a Matemática que tem sido estudada pelos alunos no nível anterior e que será o foco do nível seguinte.

Ainda, nos Standards 2000 (p.16), o **Princípio do Ensino** diz que:

> [...] o ensino eficiente de matemática requer compreender o que os estudantes sabem e precisam aprender, e então desafiá-los e apoiá-los a aprender bem.

Ensinar bem Matemática é uma tarefa complexa e não há receitas fáceis para ajudar os estudantes a aprender ou para ajudar os professores a torná-la eficiente. Para que isso ocorresse, os professores deveriam saber e conhecer profundamente a Matemática que estão ensinando e serem capazes de fazer uso daquele conhecimento com flexibilidade em suas tarefas de ensino. Eles precisariam estar comprometidos com seus alunos, como aprendizes de matemática e como seres humanos, e serem capazes de escolher e usar uma variedade de estratégias pedagógicas e de avaliação.

Os Standards 2000 (p. 17), apresentam muitos tipos diferentes de conhecimentos matemáticos que os professores precisam saber para ajudá-los a fazer julgamentos curriculares, a responder às questões dos alunos, a ver adiante para onde os conceitos estão sendo levados e a planejar seu trabalho adequadamente. Esses conhecimentos são: conhecimento sobre o domínio do conteúdo trabalhado; conhecimento flexível e profundo sobre os objetivos curriculares e sobre idéias importantes que são centrais em suas grades curriculares; conhecimento sobre os desafios que os alunos provavelmente encontrem ao construir essas idéias; saber como as idéias podem ser representadas para poder ensiná-las com eficiência; conhecimento sobre como a compreensão dos estudantes pode ser avaliada.

Um ensino eficiente de Matemática requer um compromisso com o desenvolvimento da compreensão matemática nos estudantes. Como os estudantes aprendem ao conectar novas idéias com seu conhecimento anterior, os professores devem saber o que seus estudantes já conhecem. Os professores devem saber como preparar questões e planejar aulas que envolvam sempre conhecimentos anteriores dos estudantes. Também, para um ensino eficiente, é importante que o ambiente de sala de aula seja desafiador para o aluno.

Assim, os professores podem estabelecer e criar um ambiente propício para a aprendizagem matemática quando, através das decisões que tomam e das conversas que organizam, permitem um ambiente físico acolhedor. As ações dos professores devem encorajar os estudantes a pensar, questionar, resolver problemas e discutir suas idéias, estratégias e soluções.

Atividades matemáticas interessantes devem sempre ser usadas para introduzir novas idéias matemáticas importantes e para comprometer e desafiar intelectualmente os estudantes. Atividades bem escolhidas podem estimular a curiosidade dos alunos e atraí-los para a Matemática. Essas podem estar conectadas às experiências do mundo real dos alunos ou podem aparecer em contextos que são puramente matemáticos.

Os professores devem decidir quais são os aspectos de uma atividade preparada para a sala de aula. Como organizar e orquestrar o trabalho dos estudantes? Que perguntas fazer para desafiar os alunos diante de uma situação-problema? Como auxiliar, no processo de exploração do problema, sem interferir no seu modo de pensar mantendo o desafio?

Para os Standards 2000 (p. 19):

> um ensino eficiente envolve observar os estudantes, ouvir cuidadosamente suas idéias e explicações, ter objetivos matemáticos e usar a informação para tomar decisões instrucionais. Professores que empregam tais práticas motivam os estudantes a engajar-se num pensar e raciocinar matemáticos e dão oportunidades de aprender que desafiam os alunos em todos os níveis de compreensão.

Esse documento diz também que oportunidades para refletir e aprimorar a prática instrucional – durante a aula e fora dela, sozinho ou com outros – são cruciais na visão da matemática escolar exposta nos Princípios e Padrões. Para melhorar seu ensino de Matemática, os professores devem ser capazes de analisar o que eles e seus alunos estão fazendo e considerar como aquelas ações estão afetando a aprendizagem dos alunos.

Ainda, nos Standards 2000, p. 20, o **Princípio da Aprendizagem** diz que “os estudantes devem aprender Matemática com compreensão, construindo ativamente novo conhecimento, a partir de experiência e conhecimento anterior”.

Como vemos, a visão da matemática escolar nos Princípios e Padrões está baseada sobre aprendizagem matemática dos estudantes com compreensão. Infelizmente, aprender matemática sem compreensão tem sido, por muito tempo, um resultado comum do ensino da matemática escolar.

Os estudantes que memorizam fatos ou procedimentos sem compreendê-los, freqüentemente não se sentem seguros em saber quando ou como usar o que sabem e essa aprendizagem é muitas vezes bastante frágil (Bransford, Brown e Cocking, 1999, apud Standards 2000, p. 20).

Dessa maneira, aprender com compreensão também faz a aprendizagem posterior mais fácil. Quando os estudantes trabalham ativamente para resolver um problema difícil ou para compreender uma idéia complexa, eles experimentam um sentimento muito especial de realização que, por sua vez, os conduz a um desejo de continuar e estender seu empenho com a matemática.

2.4 – Perguntas ou Conjecturas

Para Romberg (1992, p. 52), “este é um passo importante no processo de pesquisa porque, quando se examina um fenômeno particular, muitas perguntas inevitavelmente aparecem. Decidir que perguntas examinar não é fácil.”

> Mais do que simplesmente levantar questões interessantes, os pesquisadores em geral fazem uma ou mais conjecturas (suposições ou predições racionais) sobre o que seria necessário para responder as questões feitas. As conjecturas baseiam-se na relação entre as variáveis que caracterizam o fenômeno e nas idéias sobre aquelas variáveis chave e sua relação com o esboçado no modelo. (ROMBERG, 1992, p. 52)

O problema da pesquisa, dado por uma pergunta ou por uma conjectura, tem uma função diretiva no trabalho, para que não se corra o risco de percorrer outros caminhos que não sejam aqueles sugeridos pela própria pesquisa.

Ao iniciar a prática docente, ministrando aulas no Ensino Fundamental, ao ingressar na pós-graduação em Educação Matemática e no decorrer da pesquisa, surgiram-me muitas perguntas a respeito de meu fenômeno de interesse – O Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas:

- ✓ O que acontece na transição do 2º para o 3º ciclo do Ensino Fundamental com relação ao ensino-aprendizagem de Matemática?
- ✓ Como tornar a Matemática interessante para os alunos ao iniciar o 3º ciclo do Ensino Fundamental?
- ✓ Será que meu trabalho feito na 5ª série do Ensino Fundamental poderia ajudar no trabalho da 6ª série do mesmo ciclo?
- ✓ Usar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas pode melhorar o ensino-aprendizagem de Matemática nesse ciclo?

A partir das perguntas levantadas, deixo claro que pretendo despertar uma certa curiosidade sobre o que a metodologia adotada pode fornecer para a melhoria do ensino e da aprendizagem da Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental. Acredito que seja possível tornar a Matemática mais significativa para os alunos do 3º ciclo do Ensino Fundamental a partir de um trabalho diferenciado em sala de aula, levando em conta muito de seus conhecimentos prévios, relacionando-os adequadamente. Ao tentar resolver um problema, os alunos devem recorrer constantemente a seus conhecimentos anteriores buscando construir novos conceitos e conteúdos matemáticos.

Ao ensinar Matemática na 5ª série, pretende-se que os alunos aprendam construindo, junto com o professor, os conteúdos do currículo de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental, com suas definições, propriedades e aplicações. Essa construção deverá ser feita com compreensão e significado e poderá estar apoiada num ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas.

Estabelecer a pergunta não é fácil e obriga o pesquisador a uma ampla reflexão sobre o fenômeno de interesse escolhido para a pesquisa. A pergunta específica de meu trabalho é: ***Qual é a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos?*** Esse é o problema desta pesquisa, que será feita em minha própria sala de aula. De acordo com os métodos propostos por Romberg, apresentados no capítulo anterior, acredito que esta pesquisa se encaixa numa pesquisa-ação, pois sou a professora da sala pesquisada e o trabalho de campo será feito por mim e meus alunos.

Além disso, pretendo fazer entrevistas semi-estruturadas com a professora do ciclo anterior dos alunos pesquisados e fazer a análise da produção dos alunos em atividades aplicadas, trabalhadas e recolhidas durante a aplicação do Projeto em sala de aula.

Capítulo 3 – Criar Estratégias e Procedimentos (Segundo Bloco de Romberg)

Considerações Iniciais

Reconheço que o processo de ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Fundamental é responsável pela construção de uma base de conhecimento matemático. Esse conhecimento é aplicado no Ensino Médio onde as definições profissionais começam a se manifestar.

A pergunta diretriz de minha pesquisa, *Qual é a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos?,* é a pergunta-problema dessa pesquisa.

Selecionar estratégias de pesquisa para coletar evidências e, o passo seguinte, selecionar procedimentos de pesquisa, são atividades importantes pois é hora de se planejar o caminho da resolução desse problema. Tomando sempre como guia o modelo de Romberg, darei continuidade a essa pesquisa, trabalhando estratégias e procedimentos selecionados.

> A decisão sobre que métodos utilizar segue diretamente das questões que se seleciona, da visão do mundo onde as questões estão situadas, do 'modelo preliminar' que foi construído a fim de explicar o 'fenômeno de interesse', e da conjectura que se tenha feito sobre a evidência necessária. (ROMBERG, 1992, p. 52)

Para essas atividades me perguntei: "O que farei para resolver o meu problema?" e "Como farei para resolvê-lo?"

> É neste passo que as técnicas ensinadas em cursos de métodos de pesquisa são importantes: como selecionar uma amostra, como coletar informações (entrevistas, pergunta, observação, teste), como organizar a informação coletada e assim por diante. Há um grande número de procedimentos específicos que se poderia seguir para diferentes tipos de questões. (ROMBERG, 1992, p. 52)

Assim, serão selecionados estratégias e procedimentos adequados para atender à pergunta-problema, que possam fornecer evidências sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, através da Resolução de Problemas. É importante determinar procedimentos adequados à realização das estratégias selecionadas e que, para cada estratégia selecionada, haja um procedimento correspondente.

A **Estratégia Central** é a de **Criar um Projeto de Trabalho**, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, utilizando a ***Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas***. Para que esta se realize, estratégias auxiliares serão selecionadas. O **Procedimento Central**, correspondente à estratégia central, será a **Concepção de um Projeto de Trabalho** apoiado nessa metodologia e, para que este se concretize, outros procedimentos auxiliares serão selecionados.

3.1 – Selecionar Estratégias e Procedimentos de Pesquisa

Ao estabelecer cada estratégia e selecionado o correspondente procedimento, este será colocado em ação, conclusões serão tiradas e utilizadas no procedimento central posto em ação, que é a aplicação do Projeto em sala de aula.

E_1 - Conhecer a instituição onde o trabalho será realizado.

O objetivo desta estratégia é conhecer o local, a forma de trabalho com a Matemática, nesta escola, os alunos, a direção, enfim tudo o que envolve o ambiente onde trabalharei. O procedimento correspondente à ela é ir à instituição pesquisada buscar informações sobre sua linha de trabalho e identificar a clientela[4] recebida por ela.

- ✓ **A instituição**

Ao buscar a instituição, decidi que esta seria a Escola Estadual Professor Nelson Stroili, onde fui professora efetiva de Matemática. Isso favoreceu meu contato com a direção, a coordenação e a secretaria da escola, facilitando o trabalho. Esta instituição se localiza em um bairro pobre de periferia na cidade de Rio Claro e sua clientela é, em sua maioria, constituída de pessoas carentes.

Quando foi exposta, à direção e à coordenação da escola, a idéia proposta deste trabalho, esta foi acolhida prontamente. A escola possui um tipo de trabalho bastante flexível quanto às formas diferenciadas de ensino. O projeto que ela desenvolve é bastante abrangente e permite novas idéias. Isto pode ser mostrado na Proposta Pedagógica da Escola a seguir:

> **PROPOSTA PEDAGÓGICA DA ESCOLA**
> OBJETIVOS DA ESCOLA
> Melhorar a qualidade de ensino-aprendizagem, enfocando a escrita, a leitura, a interpretação e o raciocínio lógico dos nossos alunos, dando valor à Pluralidade Cultural aqui existente, repudiando qualquer discriminação

[4] Clientela é o nome dado aos alunos que são recebidos por essa instituição.

> sócio-econômico-cultural em nossa Unidade Escolar (U. E.), visando à formação do trabalhador crítico e cidadão participante da sociedade.
> Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais e Proposta Curricular da CENP-SEE[5], a Proposta Pedagógica, desta U. E., está direcionada para a linha sócio-construtivista-interacionista. Desta forma, o aluno será orientado e terá condições de obter uma formação, através de atividades vinculadas ao seu cotidiano que possam conduzi-lo à sua realização pessoal e profissional e que a Escola seja um espaço destinado ao crescimento intelectual, cultural e ético de seus alunos.
> O professor será mediador do conhecimento, respeitando a criatividade e a habilidade dos alunos. Assim, aprendendo a aprender ele terá condições para construir instrumentos que o capacitem para o processo de uma educação permanente.
> A comunidade escolar estará voltada para a busca da sensibilidade dos alunos no que diz respeito à sua conscientização, como cidadãos atuantes, avaliando suas atitudes no sentido da compreensão da realidade social, possibilitando a sua transformação, discutindo em grupo e valorizando o espírito do trabalho coletivo.
> Portanto, o trabalho coletivo visa:
> - oferecer um ensino de boa qualidade para que o aluno possa se realizar pessoal e profissionalmente na sociedade em que vive;
> - erradicar a evasão;
> - integrar a Escola à Comunidade;
> - resgatar a auto-estima do aluno;
> - avaliar e valorizar os hábitos e atitudes positivas apresentados pelos alunos;
> - conscientizar toda Comunidade Escolar sobre a política educacional do sistema na Escola;
> - democratizar as relações na Escola;
> - valorizar os profissionais da Educação.
>
> (Equipe Pedagógica da Diretoria de Ensino de Limeira e Equipe de Coordenação das Escolas, 1998)

A escola apresenta projetos de socialização para os alunos pois, por se tratar de uma escola localizada em um bairro carente da cidade, esta procura proporcionar atividades que se acredita não fazerem parte do cotidiano desses alunos. Ao longo do ano letivo, a escola apresenta eventos como: festa do sorvete, festa junina, campeonatos interclasses, tarde do salgado, apresentação de teatro feita pelos próprios alunos e outras atividades que ocorrem no período de aulas.

Embora a proposta seja rica nem sempre as recomendações postas eram cumpridas.

E_2 - Investigar o conteúdo programático de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental proposto pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e pela instituição onde o trabalho será realizado.

[5] CENP – SEE: Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – Secretaria de Estado da Educação.

Pretendo analisar o que os meios legais propõem como conteúdo programático para o ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental e como ele é visto pela instituição considerada. O procedimento correspondente a essa estratégia é buscar, na instituição, cópia dos conteúdos programáticos de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental, propostos pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e pela própria instituição.

✓ O conteúdo programático de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental

No documento, Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: Ensino Fundamental (São Paulo, 1997, p. 75), estão relacionados os conteúdos a serem desenvolvidos na 5ª série do Ensino Fundamental, apresentados na página 44 desta dissertação. Da Escola Estadual Professor Nelson Stroili apresento, o Plano de Ensino – Ano Letivo de 2002, abaixo:

Números	Medida	Geometria
Sistemas de Numeração: Comparação entre o sistema de numeração decimal com outros sistemas de numeração. Operações com números naturais: Utilização das operações em diversas situações-problema. Potenciação: conceito, representação, propriedades. Divisibilidade: • Múltiplos e divisores; • Decomposição de um número em fatores primos; • Principais regras de divisibilidade; • Mínimo múltiplo e máximo divisor comum: Conceito, propriedades e resolução de problemas. Números racionais absolutos: • Idéia de fração; • Nomenclatura; • Operação; • Comparação de frações quaisquer. • Representação decimal;	Áreas e Perímetros: • Noção de área; • Área do retângulo; • Unidades de medida: m, m^2 e m^3.	Formas Geométricas: • Bloco Retangular; • Cilindro; • Ângulos; • Perpendiculares e paralelas; • Polígonos; • Quadriláteros.

Ao analisar a relação dos conteúdos programáticos de Matemática utilizados pela instituição, observei que esta se apresentava de forma mais reduzida do que aquela proposta pela Secretaria da Educação. Ao questionar os outros professores de Matemática, a coordenação e a direção da escola sobre este fato, argumentaram que a relação dos conteúdos fora reduzida para poder se adequar à realidade da clientela e que, no dizer deles, o importante era que os conteúdos assumidos por eles fossem bem trabalhados e que não houvesse preocupação, por parte dos professores, em apenas cumprir o programa. Como professora nova da instituição, resolvi acatar a sugestão da maioria.

E_3 - Usar uma metodologia de ensino alternativa para o trabalho de sala de aula de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas será adotada na pesquisa, visando a um trabalho diferenciado em sala de aula.

✓ A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas

Observa-se que, atualmente, o ensino de Matemática passa por dificuldades principalmente por não possuir uma metodologia que tenha acompanhado as mudanças vividas pela sociedade.

Segundo Viktor (2002, p. 28-32),

> O conceito negativo que muita gente tem da matemática não é gratuito nem vem do berço, mas deve-se em grande parte a uma didática desinteressante, incapaz de prender a atenção do aluno e de levá-lo a pensar matematicamente.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, o problema é um ponto de partida e os professores, através da resolução do problema, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, visando, principalmente, o processo e não somente a solução do problema trabalhado.

O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas aos problemas considerados.

Na abordagem de resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas, como aprende Matemática para resolver problemas. O ensino de resolução de problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia, o ensino é fruto de um processo mais amplo, um ensino que se faz por meio da resolução de problemas.

Na publicação do National Council of Teacher of Mathematics[6], NCTM, Principles and Standards for School Mathematics[7] (Standards 2000), 2000, p. 52, encontra-se:

> Resolução de Problemas não é somente um objetivo para aprender matemática mas, também, um modo importante de fazer isso [...] Resolução de Problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática e, portanto, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de matemática. [...] Bons problemas integrarão múltiplos tópicos e envolverão matemática significativa.

Van de Walle, 2001, p. 40, sobre essa citação diz que:

> Esta visão está longe de ser realizada. Entretanto, nas salas de aula em que os professores têm adotado esta abordagem, a excitação de professor e aluno é alta e ninguém quer retornar ao ensino tradicional.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas torna-se para mim um caminho na busca de conseguir o meu intuito, o de colaborar com o ensino e a aprendizagem de Matemática. A partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos constantes do programa de Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental, objetiva-se um ensino-aprendizagem com mais significado para o aluno e, concordo com Polya (1994, p. v), quando diz que:

> Um professor de matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com o conhecimento destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

O professor tem por obrigação desafiar o conhecimento de seus alunos, estimulando-os na descoberta do conhecimento. Este desafio deve ser feito de maneira a não desanimá-los mas incentivando-os sempre. Isto pode ser feito através de problemas do cotidiano dos alunos, de forma a poder mostrar para eles a Matemática que há em suas vidas. O professor precisa, também, estar bem preparado para cada aula e dominar os conteúdos matemáticos.

Van de Walle, 2001, p. 41, afirma que:

> Não há dúvida de que ensinar com problemas é difícil. As atividades devem ser preparadas ou selecionadas a cada dia, levando em consideração a compreensão atual dos estudantes e as necessidades do currículo. Geralmente é difícil planejar com mais do que alguns dias de antecedência. Se você tem um livro texto tradicional, algumas modificações serão necessárias. Há bons motivos para tal esfoço.

---

[6] Conselho Nacional de Professores de Matemática, dos EUA.

[7] Princípios e Padrões para a Matemática Escolar.

Isso me mostra a necessidade de estar preparando as aulas, quase que semanalmente, para poder atender às dificuldades que forem surgindo durante o processo de ensino-aprendizagem. Os problemas devem ser propostos de acordo com o conteúdo que se quer construir para tal momento e, como conseqüência destes, que o tópico matemático possa ser formalizado. As idéias matemáticas são resultados de experiências com resolução de problemas, em vez de elementos que devem ser ensinados antes da resolução de problemas.

Desta forma, os conceitos matemáticos devem ser construídos e não impostos, favorecendo a aprendizagem dos alunos.

> [...] a abordagem da Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, preocupa-se muito mais com a aprendizagem de um campo de conceitos matemáticos por parte dos alunos do que com o aprender a resolver problemas, apesar de que, enquanto aprende matemática, o aluno aprende também a resolver problemas. Aqui, faz-se uso da resolução de um determinado problema ou de uma situação-problema para que o aluno possa construir sua própria aprendizagem, com significado e compreensão. (PIRONEL, 2002, p. 61)

Nessa metodologia, a compreensão da Matemática, por parte dos alunos, envolve a idéia de que entender é essencialmente relacionar, pois como diz Van de Walle, 2001, p. 28:

> Compreender pode ser definido como uma medida da qualidade e da quantidade de conexões que uma nova idéia tem com idéias existentes. E quanto maior o número de conexões com uma rede de idéias, melhor será a compreensão.

Essa idéia está baseada na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada idéia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de idéias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias idéias matemáticas contidas num problema. Assim, é importante ter a visão de que compreender deve ser o principal objetivo do ensino. Para ocorrer compreensão devem ser utilizados problemas que servirão de ponto de partida para a construção de conteúdos matemáticos. Uma situação-problema do cotidiano do aluno poderá disparar a construção de um conteúdo matemático.

Para nós, problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que temos curiosidade e interesse em fazer. É bom lembrar que o que é problema para um pode não ser problema para outro, dependendo do conhecimento que cada um tenha sobre o assunto.

Onuchic, em aulas do Programa de Educação Continuada da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE – SP, 1998, propõe que o professor interessado em trabalhar

Matemática a partir de um problema, em sala de aula, deve, ao realizar uma atividade, levantar os seguintes questionamentos:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de Matemática poderiam ser iniciados com este problema?
- Haveria necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para que séries você acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à solução?
- A solução é necessariamente única?
- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Você, como professor, teria dificuldade em trabalhar este problema?
- Que grau de dificuldade você acredita que seu aluno possa ter diante deste problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

De acordo com estes questionamentos o professor pode verificar se o problema proposto pode servir como um meio para se ensinar Matemática.

Sierpinska, 1994, p. xi, conta que:

> [...] Minha preocupação com a questão de compreender tem suas origens nos problemas práticos de ensinar matemática e naquelas questões básicas e simples como:
>
> - Como ensinar de modo que os alunos entendam?
> - Por que, apesar de todos os meus esforços de boa explicação, eles não entendem e fazem todos esses "erros" sem sentido?
> - O que exatamente eles não entendem?
> - O que eles entendem e como?
>
> Minha primeira abordagem a estas questões foi empírica: observações de estudantes enquanto discutiam problemas matemáticos, tentando dar-lhes sentido, comunicando sua compreensão aos outros. Os problemas dados aos estudantes eram aqueles que, para serem resolvidos, eles tinham, de fato, que construir um novo (para eles) conceito matemático. As dificuldades que eles encontravam, a tentativa de compreensões de uma situação ainda não muito clara eram, freqüentemente, muito próximas daquelas experimentadas por matemáticos do passado. As dificuldades dos estudantes, assim, adquiriam um significado e um sentido mais universal, dependendo, não tanto de sua falta de experiência matemática, ou de habilidades, ou de idiossincrasias de seu pensar ainda imaturo, mas da natureza do conceito matemático em si mesmo e da cultura na estrutura onde se desenvolvia.

Van de Walle, 2001, p. 40-41, diz que:

> Tradicionalmente, o professor ensinava matemática, os estudantes a praticavam por um tempo e, então, esperava-se que eles usassem as novas habilidades ou idéias na resolução de problemas. Esta abordagem fortemente arraigada em nossa cultura, raramente funciona bem [...] Aulas eficientes começam onde os estudantes estão, não onde nós (professores) estamos. Ou seja, o ensino deveria começar com as idéias que as crianças já têm, as idéias que eles usarão para criar novas idéias.

No ensino atual de Matemática, o professor tem um programa curricular a cumprir, porém, nem sempre, os alunos têm suas habilidades desenvolvidas de forma a acompanhar o nível em que o conteúdo deva estar. Assim, faz-se necessária uma avaliação prévia para que o professor perceba em que nível seu aluno se encontra e que ele (professor) possa trabalhar as dificuldades de seus alunos de forma a atingir o nível que se espera para cada série. Essa forma de trabalho é um desafio para o professor, porém deve ser recompensador e gratificante ver os alunos conseguirem atingir o objetivo estabelecido. Essa forma de trabalho poderá contribuir para que o aluno se sinta valorizado ao perceber que a compreensão matemática lhe é acessível. Desse modo, o professor poderá perceber que, quando bem trabalhada, a imagem de vilã que a Matemática possui será desfeita.

Pironel, 2002, p. 62, acrescenta que:

> É evidente que a avaliação se dá a cada momento do processo educacional, num parâmetro informal, através da observação e de questionamentos que o professor pode fazer a seus alunos, com o intuito de verificar a compreensão do problema e, para além disso, auxiliá-los nas conexões entre as diferentes idéias, conceitos e procedimentos matemáticos, com o propósito de que o aluno possa desenvolver ainda mais suas habilidades matemáticas, além de permitir a reflexão sobre as questões levantadas pelo professor e incentivar a discussão entre os membros do grupo formado. Essa avaliação informal ocorre diariamente nas aulas enquanto o professor percorre os grupos formados.

Pode-se utilizar, durante a resolução de um problema, a avaliação como ferramenta para diagnosticar o ponto em que o aluno se encontra dentro do conteúdo matemático, pois, como diz Dante (1999, p. 18-32), *[...] o objetivo da avaliação é diagnosticar como está se dando o processo de ensino-aprendizagem e coletar informações para corrigir possíveis distorções observadas nele. Por exemplo, se os resultados da avaliação não foram satisfatórios, é preciso buscar as causas.* É através de um diagnóstico que pode haver uma reformulação no processo de ensino-aprendizagem.

Nota-se que a construção de conhecimentos matemáticos torna-se mais significativa quando comparada às experiências vividas por matemáticos no passado, onde o conhecimento surgia a partir de investigações e desafios apoiados no que já conheciam. No momento de construir conhecimento, o papel do professor é muito importante, pois ele pode possibilitar a existência de condições favoráveis ao aluno para que se desenvolva a construção desse conhecimento.

Não se pode colocar o conhecimento dentro da cabeça do aluno, pois o processo de ensino-aprendizagem se dá de dentro para fora e, para isso, o professor deve exercer a múltipla função de motivador, estimulador, mediador, condutor, avaliador e orientador. O professor deve reunir seus alunos em pequenos grupos para dar início à sua aula, dentro de um trabalho de ensino-aprendizagem colaborativo e participativo.

O objetivo de um trabalho, em sala de aula, ao usar esta metodologia alternativa não é o de dar receitas prontas para resolver problemas, mas mostrar uma forma diferente de se trabalhar a Matemática.

E_4 - Conhecer a professora, dos alunos pesquisados, no 2º ciclo do Ensino Fundamental.

O procedimento adotado foi entrevistar essa professora. Através de uma entrevista semi-estruturada com a professora, queria conhecer um pouco do passado desses alunos quanto ao trabalho de Matemática desenvolvido por ela.

✓ Entrevista com a professora dos alunos no ciclo anterior

Decidi conversar com a professora que havia ministrado aulas para os alunos pesquisados, no 2ª ciclo do Ensino Fundamental.

Como visava conhecer um pouco mais sobre os alunos pesquisados, tanto no que se refere ao trato pessoal quanto ao conhecimento matemático trazido por eles, elaborei uma entrevista semi-estruturada e formulei algumas questões que, durante a entrevista, deram oportunidade de diálogo entrevistadora-entrevistada.

Apresento aqui a transcrição da entrevista feita com a professora.

Entrevista com a Professora

1) **Qual é sua percepção a respeito dos alunos desta classe quando eram seus alunos?**

R: Eles eram muito interessados, freqüentes, muito participantes, eram até um pouco agitados demais. Era muito importante que eles participassem, mas nós tínhamos que controlar a ordem da fala, um por vez, para que eles não atrapalhassem o bom andamento das discussões, para não sair do rumo do assunto que se tinha. Os pais eram, também, bem participantes. Se você precisasse pedir alguma coisa, você mandava um bilhete. Eu mandava muitos bilhetes. ‘Seu filho não fez a tarefa!’, ‘Ele teve um comportamento diferente!’ e eles retornavam. Com relação à reunião, os pais vinham em peso.

E com relação à parte financeira?

R: Eu acho que se você for comparar com outras classes do Nelson Stroili, eles têm um nível um pouco melhor. Agora, se comparar com a nossa vida (professora), eles são bastante carentes. O poder aquisitivo familiar é baixo. Mas esses pais se esforçavam em fazer o que podiam pelos filhos.

Os alunos, sempre queriam participar de festinhas, levar pratos de salgados para comemorar algum fato. Eles queriam sempre participar e algum professor é, até, capaz de tê-los como um pouco indisciplinados, mas isto ocorria devido ao interesse que eles tinham pela escola.

Nós conseguimos uma afinidade grande com os alunos. Eles foram e são tão amorosos..., eles têm um carinho muito grande pelo professor, parecia uma classe até diferente em comparação com as outras. Sinto que eles ouvem os professores, contam fatos que ocorrem em suas vidas, são, às vezes, até um pouco infantis, imaturos, carentes ...

2) **Como você avalia o aproveitamento das aulas de Matemática no 2º ciclo?**

R: Eu acho que eu não fiz grandes coisas em Matemática com eles. Acho que me preocupava muito com que eles tivessem conhecimento da tabuada, uma parte mais concreta das quatro operações, raciocínio. Mas tive que me preocupar muito mais com a parte de Português, a alfabetização. Peguei a classe na 3ª série com 16 alunos analfabetos. Então, foi muito difícil... Tive que fazer uma alfabetização muito rápida. Achava que a Matemática ajudava na alfabetização, ajudava a desenvolver o raciocínio. Eu trabalhei pouco a Matemática. Foi um trabalho muito difícil, ao trabalhar todas as matérias, se o grande problema era a alfabetização.

3) **Com relação à resolução de problemas com enunciado, como você poderia classificar os alunos? Eles sabiam interpretar o enunciado e partir em busca da solução?**

R: Eu os achava muito imaturos. Como tínhamos a metade da classe com problemas de alfabetização, eu acho que os outros conseguiam, mas estes não, pois eles não sabiam nem ler. Então, eu tive que largar um pouco e tentar alfabetizar rapidamente. Na 4ª série, eu consegui um pouco mais pois a classe estava um pouco mais homogênea. Daí eles, os fracos, conseguiram começar um pouquinho o avanço, mas acho que esta parte de problemas de enunciado ficou um pouco prejudicada por causa da alfabetização. Depois que eles começaram ler eu fazia junto com eles, eu lia, explicava e tentava desenvolver o raciocínio, mas acho que deixei bastante a desejar.

4) **Você observou alguma diferença na resolução de problemas, em que o aluno não se prendeu apenas ao algoritmo?**

R: Eu percebi, e bastante, até tinha aluno que não conseguia, pois tinha muito problema com a alfabetização, mas ele tinha um raciocínio fantástico, fazia cálculo mental. Eu tentava ver se eu descobria como ele tinha pensado, e tinha dificuldade de ver como ele pensava, sem ser da maneira tradicional. [e ela citou dois alunos, um considerado muito bom (hoje) e outro mais fraco (hoje)][8].

Você alguma vez pediu para eles escreverem esta forma diferente de raciocínio?

R: Eles conseguiam explicar através da tabuada, entende? Eles calculavam, assim, se um era tanto, então ... Eu cheguei a dar liberdade para passar no papel.

5) **Como você introduzia um tópico matemático?**

R: Eu dava tudo através de um tipo de cartão, sabe cartão, sucata. Eu cortava e fazia tudo através de cartão.

Usando sempre recursos manipulativos?

R: É. Daí eu trabalhava bem e, depois, quando eu percebia que a classe, na maioria, tinha já atingido o que eu queria, então aí, eu começava a passar para a parte mais abstrata.

Aí você formalizava?

R: Aí. Depois, para a parte mais abstrata, eu tentava colocar alguma regra e aí eu tentava estudar com eles, pois eu achava que eles tinham dificuldade de estudar, de memorizar, de guardar, de abstrair o conceito, e eu ficava estudando com eles. Eu tinha um jeito diferente de trabalhar: eu chegava e, depois de explicar a tabuada, eu fazia grupinhos[9], grupinhos de dois, dois grupinhos de um, dois grupinhos de dois, [...] trabalhava o concreto e depois passava para o abstrato. Eu passava também assim, um grupinho de um, um grupinho de dois, [...] depois eu invertia a tabuada. E aí eu colocava: olha o que é duas vezes o dois. E fazia eles falarem, quando chegavam na sala de aula, a tabuada. Eu colocava assim: ‘o que é duas vezes o dois’, e eles respondiam: ‘dois grupinhos de dois’. Todos os dias, fazíamos a “oração” e eles falavam a tabuada.

E somente depois é que você passava o conteúdo, a parte abstrata?

---

[8] Observação da pesquisadora, na ocasião da entrevista.

[9] Grupinhos de peças do material dourado, que é formado por peças (cubinhos) de madeira que representavam a unidade.

R: É, isso era só quando eu já tinha certeza de que eles já sabiam muito bem. ‘Às vezes eu acho que eu sou ultrapassada na minha maneira, mas é como eu acreditava e achava que dava certo.’ Eu consegui a maioria.

Então podemos dizer que você construía o conhecimento junto com eles para depois mostrar o que era.

R: É, pois eu acho que do contrário (apresentando a parte Matemática e depois fazendo exercícios) não adiantava nada, né?

[...] o que eu utilizei bastante é o material dourado. Para o sistema de numeração decimal, eu acho que é muito bom usar o material dourado. O problema que tem é que você precisa ter um cuidado especial com as peças para que não sejam perdidas. Mas se você trabalha em grupos e distribui aos grupos, eles se tornam responsáveis por aquelas peças e eu acho que é muito bom. Mesmo para estudar a tabuada, adição, subtração, ... Na divisão acho que é excelente. Você faz os grupos e diz vamos dividir, dividir é isto um para este, este, ... Então eles entendem o processo da divisão, o que acontece quando dividimos algo. Eu fazia primeiro na mesa e eles assistiam, daí formava grupos e no grupo eles iam fazer aquilo que fiz, passava alguma coisa na lousa e eles iam mostrar para mim o que era tal operação. E, depois, acho bem difícil passar a divisão para o abstrato. Eu passava o processo longo ... Eu utilizava ‘Os passos da divisão ... [lista de vários exercícios repetitivos de cada tipo da divisão][10]. Depois de fazerem os passos da divisão..., no final, parece ser tão natural porque eu tinha dificuldade de trabalhar a divisão.

6) **Como você observava o aluno que era capaz de pensar sobre o problema e aquele que esperava pela solução apresentada na lousa?**

R: Eu tinha uma maneira de trabalhar em que eu segurava e não deixava os alunos dizerem os seus resultados, enquanto os outros não tivessem terminado. Tinha disciplina, então eu já combinava com eles: ninguém fala a não ser que eu pergunte e aí eu geralmente perguntava para aquele que eu sabia que esperava para copiar, então eles tentavam fazer. Antes de colocar as soluções na lousa, eu passava de carteira em carteira dando um visto, exigindo, porque aluno se você deixar de lado ele não vai fazer. E eu sempre tive o hábito de trocar o aluno de lugar quando eu percebia que ele ficava muito familiar com os colegas.

Você trabalhava em grupos ou não?

[10] Explicação da pesquisadora.

R: Não tanto, mas quando era algum trabalho diferente, como sistema de numeração decimal ou as 4 operações, trabalhar com o material dourado ou com cartão, aí eu trabalhava em grupo. Senão, se fosse individual, eu passava de carteira em carteira passando o visto. Todos fizeram? Então agora eu vou escolher um aluno para ir à lousa e colocar a sua solução. Daí eu perguntava para a classe: ‘está certo o que ele colocou na lousa?’ ‘Então quem acha que está certo?’ Se estivesse certo, a maioria iria concordar. Sempre você percebe aquele que ia querer apagar para copiar o que estava na lousa. Daí eu dizia: ‘Você não sabe se aquilo está certo!’ Então vai, vai, e chega, se aquele estava certo ou errado, pelos alunos. Eu dizia: está certo ou está errado. Então se está errado, como será o certo? E até chegar aí, isto prende a atenção e todo mundo participa e faz. Eu acho que isto aí é em tudo, não é só em Matemática, principalmente em alfabetização. Eu sempre fui mais dedicada com a alfabetização e sempre tive mais dificuldade em desenvolver a matemática.

Você sabe que uma coisa que eu nunca tive vergonha foi de pedir? Eu me lembro que, quando eu viajava para Limeira, iam muitos colegas e supervisores e eu ia perguntando... A maneira de se trabalhar, eu comparo a uma colcha de retalhos. Você vai perguntando sobre a experiência de outros e vai juntando à sua forma de trabalhar. Eu nunca achava que eu tinha conseguido aquilo que eu pretendia [exigente consigo mesmo][11]. Em todos os sentidos, você vai pegando um resultado que deu positivo para um e outro resultado positivo para outro, e assim por diante. Por exemplo, na alfabetização eu tenho um aluno que tem dificuldade com M antes de P e B. Daí alguém diz ‘eu tenho uma música, você vai ensinar esta música e eles nunca mais vão esquecer, ou você tem uma historinha’. Então, em tudo, você vai juntando outras experiências. Por exemplo as 4 operações, a tabuada, tudo ajuda a memorizar. Eles primeiro precisam entender o processo, mas tudo chega em um momento que é necessário memorizar. Como a tabuada o aluno precisa entender, pois se ele entende ele faz o cálculo e ele chega lá e demora mais do que se ele tiver mentalizado. Eu fazia joguinho de tabuada, menino contra menina, eu acho que estimula. Acho que o aluno precisa entender o que é a tabuada.

7) Como era feita a avaliação?

R: Minha avaliação era constante, era diária, era individual, aluno por aluno ... Eu era muito criteriosa. Se ele não tivesse feito a atividade no horário normal de aula, eu o segurava até terminar a atividade, porque se fizermos assim, no outro dia ele vai fazer junto com os outros

[11] Observação da pesquisadora.

alunos. Eu acho isso muito importante. Eles me achavam muito enérgica, mas eles aprendiam e depois que acostumavam comigo queriam ficar na minha classe. Eles gostam e querem regras ... Muitos pais me achavam muito enérgica mas depois me agradeciam. O que acontecia, no início, era algum pai ir até a direção reclamar que o filho chegou, depois da hora em casa. Daí ele ia falar comigo e eu dizia: é só ele não conversar e não perder tempo que ele consegue fazer junto com os outros. O pai acabava me dando razão e eu não tinha mais problema.

Com relação à forma de avaliação, eu não chegava a falar que era uma prova ou uma avaliação. Eu dava no caderno, daí eu marcava trabalho diferente. Eu corrigia e dava nota. Eu não dava nome: avaliação. E eu não sei até que ponto isso foi prejudicial, pois quando houve o SARESP[12], aí eles ficaram preocupados. Hoje eu penso que devemos falar que aquilo que está sendo feito é uma avaliação, para perder o medo. Os alunos diziam, na época do SARESP, que nem tinham dormido à noite porque iam passar por uma avaliação.

Eles sabiam que sua avaliação era diária?

R: Eles sabiam. A felicidade deles era muito grande e diziam: Eu consegui, agora eu consegui! Porque eu dava uma atividade e eles iam conseguindo vencer cada uma delas. Mesmo aquele aluno-problema, ele conseguia progredir, da maneira dele mas conseguia, ele não ficava parado.

8) **Você conseguia perceber a diferença nas atitudes dos alunos: os que eram capazes de ler e interpretar e enfrentar a busca da solução e aqueles, que não conseguindo, precisavam de sua explicação para poder entender o que estava feito na lousa?**

R: A princípio eu deixava um pouco para ver, pois a metade da classe conseguia com desembaraço, porque você não pode tirar esta chance de interpretação deles pois, à medida que você lê, eles perdem o interesse e ficam preguiçosos. Então eu dava um tempo, mas quando você percebe que aqueles alunos que têm mais facilidade já tinham feito, eu dava sinal para que eles não falassem nada sobre a solução. Dizia: ‘Agora espera, tem que ter paciência com os outros’. Então, aí eu relia, explicava e daí, quando todos tivessem feito, eu pedia para colocar as soluções na lousa e perguntava para a classe: quem concorda com

---

[12] Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

aquela solução? Às vezes, surgiam maneiras diferentes de se fazer aquele problema, principalmente quando era com fração.

No começo do ano, você fazia algum tipo de acordo com eles quanto à forma de trabalho e avaliação ao longo do ano?

R: Ah, eu sempre colocava, sim. Eu colocava os 'deveres do escolar' [música que continha os deveres de um escolar][13]. Falava o quanto eu gostava do meu trabalho, o quanto eu gostava de cada um deles e como considerava cada um deles como meus filhos. E dizia: 'O que eu exijo de você é o que eu exijo da minha filha, e é o que eu peço para os professores cobrarem dela.' Então, eu dizia: 'se você cumprir os seus deveres, eu estarei cumprindo os meus também'. Eu acho que funciona de maneira boa, agradável ... Eu dizia: 'não haverá problema de nota'. 'Se você não aprendeu, vou ensinar de novo, e se, ainda não aprender, eu vou ensinar novamente e vou ensinar até que você aprenda'. 'Então a nota não me interessa o que me interessa é que você aprenda'.

E quanto ao programa, você conseguia cumprir todo?

R: Eu sempre trabalhei com o planejamento. Conforme cada unidade temática ia sendo atingida, pela maioria, eu já anotava na caderneta e passava para a próxima. E dava para cumprir todo o conteúdo programado, sim.

Você dava tarefa para casa?

R: Eu dava quase que todos os dias em um caderno à parte e se, não fizessem, eu enviava bilhete para os pais e comparava a assinatura da mãe com a lista de presença das reuniões de pais e mestres. A matéria que eu mais trabalhava no dia, eu mandava de tarefa para casa.

Nas tarefas você apresentava atividades de tópicos que seriam apresentados na aula seguinte?

R: Eu tinha uma forma de trabalhar que eu achava, que se eu adiantasse alguma atividade na véspera, que serviria para um assunto da aula seguinte, parece que este assunto fluía muito melhor no dia seguinte. Por exemplo, quando eu ia introduzir a subtração de números naturais, no final da aula eu dizia: 'vamos ver como se faz isto' E quando ia terminar de explicar, eu deixava no suspense para o dia seguinte. Parece que isto os estimulava e, no dia seguinte, eles ficavam curiosos para saber como era feito e cobravam. É uma boa motivação!

---

[13] Explicação da pesquisadora.

Eu sinto tanto em não fazer agora ... [Atualmente, essa professora se encontra aposentada.][14]. Eu tinha tanto prazer em trabalhar. Tenho uma saudade muito grande do contato com os alunos.

E_5 - Identificar o perfil dos alunos que serão investigados nesta pesquisa.

Traçar o perfil dos alunos, com quem irei trabalhar, perante documentos da secretaria da escola, informações da professora entrevistada e de minhas observações, é o objetivo dessa estratégia. Como procedimento, decidi buscar dados sobre os alunos, na secretaria da escola, nas informações concedidas pela professora do ciclo anterior e em minhas atividades na sala de aula, visando traçar o perfil dos alunos.

✓ Perfil dos alunos

O que se pôde obter junto à secretaria da escola foram, apenas, as listas de freqüência e as notas desses alunos em anos anteriores, no 2º ciclo do Ensino Fundamental.

Por meio desses documentos, observou-se que os alunos eram, em geral, bastante freqüentes e, com relação à nota, estas eram razoáveis. Porém, no final da 4ª série, uma parte deles foi deixada para a recuperação de férias. Esses alunos, apesar das qualidades descritas na entrevista, apresentavam dificuldades.

Assim, para poder falar sobre o perfil desses alunos, procurei cruzar as informações obtidas na secretaria, na entrevista da professora anterior e nos dados obtidos por mim.

Uma característica dessa instituição é a de ter, entre seus alunos, muitos carentes. Mas, pelos dados da entrevista, notei que alguns desses alunos vêm de famílias um pouco menos carentes, cujos pais se esforçam no trabalho para poder dar estudo aos filhos, o que para esses pais é muito importante. Por outro lado, como há alunos vindos de lares não muito bem estruturados, pôde-se perceber nesses alunos problemas mais graves de disciplina em sala de aula, já na 5ª série.

A professora entrevistada, em uma conversa informal anterior à entrevista concedida, e também na entrevista, disse que esses alunos haviam sido bem alfabetizados, mas que ela acreditava que o conteúdo matemático havia sido um pouco falho. Apesar disso, segundo ela, eles eram alunos esforçados e interessados.

---

[14] Explicação da pesquisadora.

E_6 - Elaborar um Termo de Compromisso para o trabalho de sala de aula.

Para executar essa estratégia, decidimos, professora e alunos, estabelecer regras que nortearão o trabalho em sala de aula, elaborando um Termo de Compromisso para disciplinar a condução desses trabalhos.

✓ Termo de Compromisso

Para começar a trabalhar com os alunos, fiz um diálogo com a classe esclarecendo alguns pontos de como seria nosso trabalho nesse ano, destacando a importância da Matemática em suas vidas e citando algumas situações rotineiras em que eles a utilizam.

Elaboramos e discutimos, professora e alunos, o Termo de Compromisso, que foi um acordo feito entre nós sobre a forma como o processo de ensino-aprendizagem seria desenvolvido, de maneira a disciplinar os trabalhos em sala de aula. Esse documento foi discutido, votado e assinado por todos, professora e alunos.

> Daí a importância de se fazer uma negociação permanente. Como nem todo assunto vai interessar a todo mundo todos os dias, convém fazer um acordo, uma espécie de 'contrato social' com a classe, estabelecendo as regras do jogo. Todos participarão da leitura das regras, mas uma vez acatadas pela maioria, a turma se obriga a cumpri-las. Caso uma ou várias regras, com o tempo, não funcionem mais, pára-se tudo e discute-se com os alunos a criação de novas regras. (JOVER, 1998, p. 34-38)

Os PCN: Matemática (1997, p. 41-42), chamam a atenção

> para o fato de que as interações que ocorrem na sala da aula devem ser regulamentadas por um 'contrato didático' no qual, para cada uma das partes, sejam explicitados claramente seu papel e suas responsabilidades diante do outro.

<u>Termo de Compromisso:</u>

Introdução:

Este Termo de Compromisso tem por objetivos estabelecer parâmetros para nortear o desenvolvimento e a organização de um trabalho diferenciado em Matemática, apontando as responsabilidades e os direitos dos alunos e da professora. O trabalho será realizado na disciplina de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental na Escola Estadual Professor Nelson Stroili.

Conteúdo e Metodologia:

Será desenvolvido o conteúdo matemático pertinente à 5ª série do Ensino Fundamental, proposto pela instituição onde o trabalho será aplicado, pela professora Mariângela Pereira, utilizando a "Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas".

Normas:

- O trabalho será desenvolvido de forma cooperativa. Os estudantes trabalharão em pequenos grupos com o objetivo de resolver problemas;
- Todos deverão engajar-se na discussão dos problemas apresentados;
- Os grupos serão formados por quatro alunos, aceitando-se três alunos na impossibilidade de um quarto elemento juntar–se ao grupo devido à insuficiência do número de alunos na sala de aula;
- O trabalho individual de cada membro terá um efeito direto sobre o sucesso do grupo.

Avaliação:

Cada aluno será avaliado individualmente, de acordo com o artigo 24, inciso V – a, da L.D.B. da Educação Nacional, lei Nº 9394 de 20/12/1996, nos seguintes itens:

- ✓ FREQÜÊNCIA – Peso 1 – "Todos deverão estar presentes no local e horário estipulados."
- ✓ TAREFA – Peso 1 – "As tarefas serão recolhidas no início de cada aula."
- ✓ TRABALHO DE GRUPO – Peso 1 – "Os trabalhos de grupos serão observados e avaliados durante a atividade."
- ✓ PARTICIPAÇÃO – Peso 1 – "Participação nas discussões e desenvolvimento de atividades propostas."
- ✓ DISCIPLINA – Peso 1 – "Será observada a disciplina em sala de aula em todos os momentos da aula de Matemática."
- ✓ PROVA – Peso 5 – "A avaliação escrita terá validade de 5 pontos."

Outras resoluções:

Questões e problemas surgidos durante o desenvolvimento do trabalho serão discutidos por todos, alunos e professora, a fim de chegarmos a um comum acordo, ficando estabelecido que as normas deverão ser cumpridas pelos alunos e pela professora.

Ciente dessas normas, de pleno acordo com todas as condições estabelecidas, assinam abaixo.

Rio Claro, ______ de ______________ de 2002.

________________________________ ______________________________

Prof[a]. Mariângela Pereira Aluno (a):

Neste documento, eram apresentados direitos e deveres de professora e alunos e foi proposto que os alunos decidissem se queriam, ou não, utilizá-lo. Durante o diálogo com a classe, procurei deixar bem claro que esta forma de trabalho teria muitas vantagens, mas havia algumas regras a serem cumpridas. Notei que alguns alunos, aparentemente mais "espertos", se manifestaram contra algumas condições apresentadas no Termo de Compromisso pois, provavelmente, não cumpririam com suas obrigações e ficariam prejudicados. Esse fato ficou mais nítido durante a aplicação do Projeto.

Como a maioria dos alunos concordou e assinou, foi possível aplicar o Projeto seguindo as normas do Termo de Compromisso.

E_7 - Apresentar problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, seguindo o conteúdo programático estipulado pela escola.

Apresentar problemas geradores é a estratégia selecionada e elaborar problemas, que podem ajudar na construção de novas idéias matemáticas, é o procedimento correspondente.

✓ Problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos

As atividades propostas para este trabalho são situações-problema que dão início à construção de conteúdos matemáticos programados. São problemas selecionados pelo professor para gerar conteúdos, cuja formalização dar-se-á somente no final de cada atividade.

Ao começar, com uma situação-problema, o processo de ensino-aprendizagem de um determinado tópico matemático, é necessário que se dê atenção aos aspectos chave desse tópico e, para se obter resposta ao problema considerado, técnicas operatórias adequadas são desenvolvidas. Para que haja compreensão o problema servirá como ponto de partida para a construção de novo conhecimento.

Ao elaborar problemas geradores, o professor poderá fazer uso de todos os recursos disponíveis que se encontram em livros didáticos, revistas especializadas, publicações da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, calendários e cardápios matemáticos[15], apresentados aos alunos como desafios, ou, até, criar situações convenientes à construção pretendida.

Ao trabalhar a partir de problemas geradores, nosso objetivo principal deve ser o de fazer com que o problema, a tarefa dada, leve os alunos a se engajarem na construção das idéias que queremos que eles aprendam.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas é um bom caminho para atender as demandas de pensar, refletir e saber tomar decisão diante de uma situação-problema apresentada e, portanto, um meio de fazer uso dos problemas geradores.

E_C - Criar um Projeto de trabalho

A partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, concebe-se um Projeto para o trabalho de sala de aula, que é o procedimento central.

---

[15] Os calendários e cardápios matemáticos são coleções de problemas matemáticos encontrados nas revistas Mathematics Teacher e Mathematics Teaching in the Middle School, EUA.

✓ Concepção do Projeto

Ao criar um projeto de trabalho para a sala de aula necessita-se de harmonia, pois se passa por uma série de situações diversas. Deve-se analisar o conteúdo matemático proposto para a série pesquisada, observar a realidade dos alunos, propor problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos a partir do conteúdo programático correspondente à série, obter um espaço físico, preparar materiais instrucionais e administrar o tempo destinado à sua aplicação. Além disso, aplicar um projeto para um trabalho diferenciado em sala de aula envolve trabalhar com diferentes personalidades e situações em seu transcorrer, ou seja, não é uma tarefa fácil.

As atividades elaboradas para a concepção desse Projeto são atividades de Aritmética, que é a parte da Matemática que trabalha sobre números, estabelecendo relações entre eles, definindo operações sobre eles e identificando propriedades sobre elas.

As duas unidades temáticas: Divisibilidade e Números Racionais são os conteúdos matemáticos escolhidos para esta pesquisa. Esses conteúdos foram selecionados, pelo pesquisador, para a pesquisa, por considerá-los importantes.

O tópico Divisibilidade é uma ampliação do campo multiplicativo, daquilo que já vinha sendo construído nos ciclos anteriores e, não, como assunto novo desvinculado dos demais. Embora, para os alunos, possa parecer um assunto novo, eles já haviam aprendido multiplicação como técnica operatória. Em continuação a esse trabalho, no 3º ciclo, os conceitos de múltiplo e divisor de um número natural e o conceito de número primo são abordados. Assim, é importante que esse trabalho não se resuma à apresentação de diferentes técnicas ou de dispositivos práticos que permitem ao aluno encontrar, mecanicamente, o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum sem compreender as situações-problema que esses conceitos permitem resolver. Por isso, é importante começar com situações-problema que levem à construção desses novos seres, com compreensão e significado, podendo ser aplicados sempre que necessário.

O estudo dos números racionais, em nossa aplicação, merece especial atenção no 3º ciclo. Veremos números racionais, em sua representação "barra fracionária", como diferentes personalidades, ao explorar os significados de quociente, operador e relação parte-todo.

A resolução de situações-problema, com números racionais, leva à ampliação do sentido operacional que deve ser desenvolvido ao mesmo tempo em que se dá a compreensão dos significados dos mesmos. Como por exemplo, ao determinar o mínimo múltiplo comum de dois números quando se quer adicionar duas frações com denominadores diferentes. Embora as operações sejam as mesmas, as técnicas operatórias mudam.

Essas duas unidades temáticas serão desenvolvidas no final da 1ª série do 3º ciclo do Ensino Fundamental. Cada unidade temática terá seus objetivos gerais; para cada aula haverá objetivos específicos e, para cada problema, serão apresentados também os seus objetivos específicos. A partir disso, a professora, que é a própria pesquisadora, com os alunos, irá formalizar o conteúdo construído a partir do problema gerador.

Para a unidade temática Divisibilidade, pretendo abordar os seguintes tópicos:

- ✓ Múltiplos e Divisores;
- ✓ Critérios de Divisibilidade;
- ✓ Números Primos;
- ✓ Reconhecimento de um número primo;
- ✓ Fatores de um número;
- ✓ Regra prática para a fatoração;
- ✓ Determinação dos divisores de um número;
- ✓ Máximo Divisor Comum;
- ✓ Mínimo Múltiplo Comum.

Na unidade temática Números Racionais, trabalharei frações ordinárias e decimais e números decimais e, para isso, serão abordados os seguintes tópicos:

- ✓ Conceito de fração;
- ✓ Representação de uma Fração;
- ✓ Leitura de números fracionários;
- ✓ Frações decimais e ordinárias;
- ✓ Frações equivalentes;
- ✓ Simplificação de frações;
- ✓ Adição e subtração de frações;
- ✓ Multiplicação de frações;
- ✓ Divisão de frações;

Acredito que o professor, que for trabalhar com a Matemática do 3º ciclo do Ensino Fundamental e, é claro, dos demais ciclos também, deve levar em consideração o conhecimento matemático trazido, pelos alunos, dos anos anteriores e utilizar a metodologia proposta desde o início do trabalho, de maneira a deixá-los familiarizados com esta nova forma de ensino.

Objetivos do Projeto:

O principal objetivo ao criar este Projeto é o de motivar e levar os alunos a construir e relacionar conceitos matemáticos pertinentes ao programa de Matemática, do 3º ciclo do Ensino Fundamental, através da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, de forma que eles possam, segundo Azevedo (2002, p. 92):

> ✓ trabalhar em grupos de forma a criar uma relação amistosa entre seus componentes e, às vezes, até polêmica, levando-os a adquirir confiança em si mesmos;
> ✓ desenvolver sua capacidade de questionar e de experimentar as informações oferecidas;
> ✓ ver o ambiente de ensino-aprendizagem como um local de trabalho prazeroso, descontraído e produtivo;
> ✓ compreender a importância do contexto em que o problema está inserido;

Este Projeto foi elaborado para ser aplicado, por mim, em 45 aulas de 50 minutos cada, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, considerando a realidade da instituição trabalhada e dos alunos pesquisados.

As atividades são constituídas de problemas geradores de novos conceitos e de novos conteúdos matemáticos, pertinentes ao conteúdo programático. Esses problemas servirão de ponto de partida para a construção de conhecimento matemático com os alunos. Entendendo por problema algo que não sabemos fazer mas que temos interesse em fazer.

Henderson e Pingry (1953, p. 232, Apud Kroll e Miller, 1993, p. 59) afirmam que "O que é um problema para um estudante pode ser um exercício para outro e, ainda, uma frustração para um terceiro." O problema se constitui problema quando realmente for um desafio para quem o resolver, mas se a pessoa tiver subsídios para resolvê-lo este já não se torna mais um problema para ela e, sim, um exercício de fixação.

Assim, foi elaborado o Roteiro de Atividades, que, posteriormente será aplicado em sala de aula

Roteiro de atividades

Unidade 1: DIVISIBILIDADE

Objetivos Gerais da Unidade:

Sempre a partir de situações-problema, levar o aluno a:

- ✓ Relacionar situações reais com a Matemática;
- ✓ Construir os conceitos de Múltiplos e Divisores de um número;
- ✓ Perceber a relação que existe entre múltiplo e divisor de um número;
- ✓ Perceber alguns critérios de divisibilidade;
- ✓ Chegar ao conceito de números primos;
- ✓ Questionar-se sobre maneiras mais simples de reconhecer se um número é primo ou composto;
- ✓ Construir o conceito de fatoração de um número;
- ✓ Chegar à regra prática para a fatoração de um número;
- ✓ Identificar a regra prática para a determinação dos divisores de um número;
- ✓ Introduzir o conceito de divisores comuns entre dois ou mais números;
- ✓ Construir o conceito de Máximo Divisor Comum;
- ✓ Construir a regra das divisões sucessivas para o cálculo do Máximo Divisor Comum;
- ✓ Criar a regra da decomposição simultânea para o Máximo Divisor Comum;
- ✓ Construir o conceito de Mínimo Múltiplo Comum;
- ✓ Construir a regra para a determinação do Mínimo Múltiplo Comum.

1ª e 2ª AULAS

Objetivos das aulas:

- ✓ Mostrar ao aluno o papel da Matemática em situações de seus cotidianos;
- ✓ Construir o conceito de múltiplos e divisores de um número.

Será feita a leitura de um texto e, posteriormente, sua discussão. O texto servirá de referência para que o aluno resolva o Problema 1.

Texto: Jogos[16]

Na história da humanidade o jogo sempre despertou muito interesse. Um ramo da Matemática (Cálculo de Probabilidades) teve surpreendente desenvolvimento, a partir das preocupações de Pascal, um matemático francês que viveu entre 1623 e 1662, ao responder às angustiantes perguntas de seu amigo, um apaixonado jogador e filósofo, o Cavaleiro de Méré, em Paris, no século XVII.

Inúmeros jogos têm servido de ponto de partida para aprendermos muitos conceitos de matemática, de maneira interessante. Também os instrumentos que utilizamos para jogar, como o dado, por exemplo, muitas vezes servem para refletir sobre os números, as figuras geométricas, as medidas, etc.

Quando várias pessoas querem participar de um jogo, verificamos se a quantidade de participantes é conveniente, ou não, para aquele jogo.

Existem jogos para apenas 2 jogadores, como o JOGO DA VELHA; outros, ainda, em que participa 1 jogador apenas: PACIÊNCIA. Há, ainda, os jogos em que o número de jogadores pode variar, como no BANCO IMOBILIÁRIO (2 a 6 jogadores), ou no jogo de BOLA DE GUDE, com 2 ou mais participantes.

Pergunta-se:

Que outros jogos você conhece? Quantas pessoas costumam participar deles?

Problema 1[17]**:**

"Distribuir igualmente as 48 cartas de um certo baralho (usualmente o baralho tem 52 cartas) para os participantes de um jogo. Cada jogador deve ficar com uma carta, pelo menos. Participam do jogo, no mínimo, duas pessoas".

- ✓ Qual o menor número de jogadores permitido no jogo? E o maior?
- ✓ Podem participar desse jogo 3 jogadores? e 5? e 18?

[16] Adaptado do livro: Experiências Matemáticas, 5ª série, Secretaria de Estado da Educação – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 2ª versão, São Paulo, 1997.

[17] Idem anterior.

Objetivos do problema:

- ✓ Relacionar uma situação real com Matemática.
- ✓ Participar da busca de caminhos matemáticos que pudessem facilitar a solução do problema.
- ✓ Construir os conceitos de múltiplo e divisor de um número.

Tarefa Extraclasse[18]:

> "Distribuir igualmente as 36 cartas de um certo baralho (não usual) para os participantes de um jogo. Cada jogador deve ficar com uma carta pelo menos. Participam do jogo, no mínimo, duas pessoas."
>
> - ✓ Qual o menor número de jogadores permitido no jogo? E o maior?
> - ✓ Podem participar desse jogo 3 jogadores? e 5? e 18?
> - ✓ Em quais situações os jogadores recebem mais cartas? E menos cartas?

3ª AULA

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

Objetivo da aula:

- ✓ Formalizar os conceitos construídos na aula anterior.

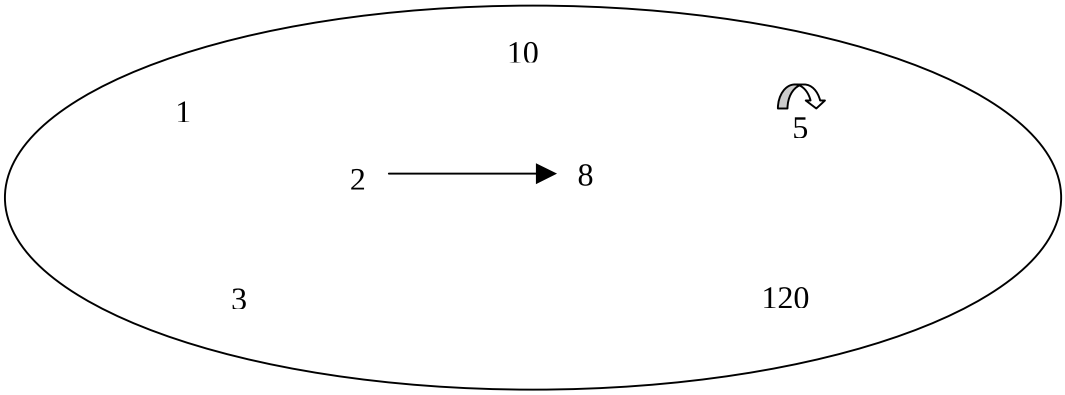
4ª e 5ªAULAS

Objetivos das aulas:

- ✓ Fazer com que o aluno perceba algumas regularidades nos múltiplos de alguns números;
- ✓ Reforçar os conceitos de divisor e múltiplo de um número;
- ✓ Ver a relação que existe entre múltiplo e divisor de um número;

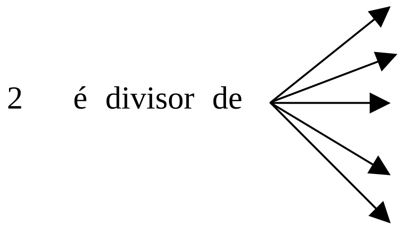
[18] Adaptada do livro: Experiências Matemáticas, 5ª série, da Secretaria de Estado da Educação – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 2ª versão, São Paulo, 1997.

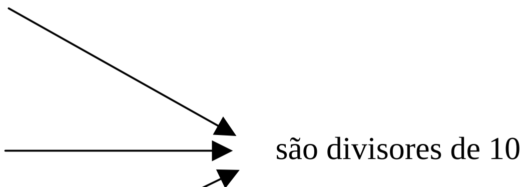
<u>Problema 2</u>[19]: No seguinte diagrama, a flecha significa <u>é divisor de.</u> Por exemplo, 2 é divisor de 8, ou 5 é divisor de 5:



Desenhe todas as flechas que estão faltando.

Olhando o diagrama anterior, complete:





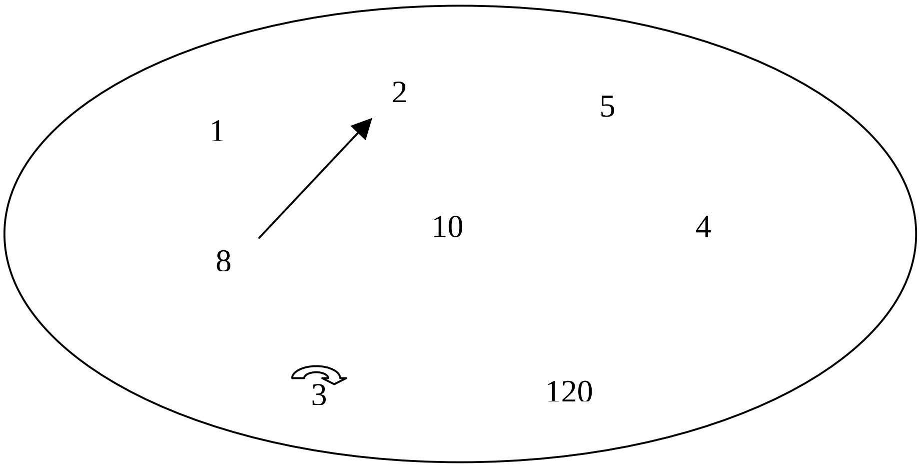
<u>Objetivos do problema:</u>

- ✓ Compreender o conceito de divisor e múltiplo de um número;
- ✓ Perceber que o número 1 é divisor de todos os números e é chamado de divisor universal;
- ✓ Perceber que o número 0 é múltiplo de todos os números e é chamado múltiplo universal;

[19] Idem anterior.

- ✓ Perceber que todos os números diferentes de zero são divisores de si mesmos.

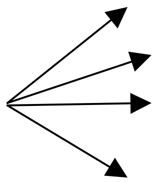
<u>Problema 3</u>[20]**:** No diagrama seguinte, a flecha significa <u>é múltiplo de.</u> Por exemplo, 8 é múltiplo de 2 ou 3 é múltiplo de 3

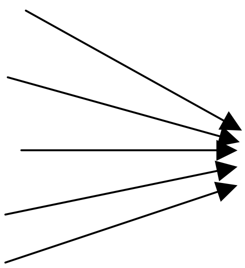


Desenhe todas as flechas que estão faltando.

Agora, complete:

10 é múltiplo de





são múltiplos de 2

<u>Objetivos do problema:</u>

- ✓ Compreender o conceito de divisor e múltiplo de um número;
- ✓ Perceber que, neste caso, o número 120 é múltiplo de todos os outros números do diagrama;

[20] Idem anterior.

✓ Perceber que todos os números são múltiplos de si mesmos.

Tarefas Extraclasse[21]:

1 – Dê os divisores de:

a) 120 e) 4

b) 10 f) 3

c) 8 g) 2

d) 5 h) 1

2 – Coloque as respostas, do exercício anterior, na seguinte tabela:

Números de um divisor, apenas	Números de dois divisores, apenas	Números com MAIS de dois divisores

Posteriormente, pretende-se retornar ao Problema 1 e à tarefa extraclasse, ambos dados nas **1ª e 2ª aulas**, com o objetivo de formalizar o conceito de múltiplos e divisores comuns entre dois ou mais números.

6ª e 7ª AULAS

Discussão dos exercícios deixados como tarefa na aula anterior.

Objetivos das aulas:

✓ Observar os números que possuem apenas um divisor;
✓ Observar os números que possuem dois divisores;
✓ Observar os números que possuem mais de dois divisores;
✓ Estimular o surgimento do conceito de números primos.

[21] Idem anterior.

8ª, 9ª e 10ª AULAS

Objetivo das aulas:

- ✓ Estabelecer critérios de divisibilidade.

Problema 4[22]:

Crivo de Eratóstenes

Siga as seguintes instruções:

1- Construir uma tabela com os números naturais de 2 a 100.

2- Riscar nessa tábua todos os múltiplos de 2, maiores que 2, com amarelo. Todos os múltiplos de 3, maiores que 3, com verde, e assim por diante, variando as cores.

3- Colocar no quadrinho anexo, os números que ficaram sem riscar.

	2	3							
									100

4- Completar:

- ✓ Múltiplos de 2, maiores que 2:

[22] Idem anterior.

- ✓ Múltiplos de 3, maiores que 3:
- ✓ Múltiplos de 4, maiores que 4:
- ✓ Múltiplos de 5, maiores que 5:
- ✓ Múltiplos de 6, maiores que 6:

Objetivos do problema:

- ✓ Fazer com que o aluno perceba características dos múltiplos de um número. Exemplo: que os múltiplos de 2 são todos pares e que esses múltiplos podem ser encontrados contando de 2 em 2;
- ✓ Fazer com que o aluno perceba as relações que existem entre os múltiplos de 6 e os múltiplos de 2 e de 3.

Tarefa Extraclasse[23]: Dados os números 3465, 5648, 6120 e 8976, diga quais deles são divisíveis por 6, 5, 9 e 10?

11ª e 12ª AULAS

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

Objetivo das aulas:

- ✓ Trabalhar os conceitos formalizados na aula anterior (critérios de divisibilidade).

13ª AULA

Retomar o problema 4, objetivando construir o conceito de números primos.

Objetivos da aula:

- ✓ Fazer com que o aluno perceba que os números que sobraram na tabela têm apenas dois divisores;
- ✓ Construir o conceito de números primos e compostos.

Tarefa Extraclasse[24]: Verifique se os seguintes números são primos ou compostos. Justifique sua resposta.

---

[23] Adaptadas do livro: Matemática e realidade: 5ª série, Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado – São Paulo: Atual, 1997.

[24] Idem anterior.

a) 15

b) 27

c) 36

d) 31

e) 197

<u>14ª e 15ª AULAS</u>

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

<u>Objetivo das aulas:</u>

✓ Fazer com o aluno se questione sobre meios matemáticos mais simples de reconhecer quando um número é primo ou composto.

<u>16ª e 17ª AULAS</u>

Retomar o conceito de decomposição de um número, visto quando introduzido o tópico: divisores de um número.

<u>Objetivo das aulas</u>:

✓ Introduzir o conceito de fatoração de um número.

<u>Tarefa Extraclasse</u>[25]: Fatore os seguintes números:

a) 120

b) 27

c) 15

d) 18

e) 630

<u>18ª AULA</u>

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

<u>Objetivo da aula:</u>

[25] Idem anterior.

- ✓ Induzir o aluno a questionar a existência de meios matemáticos que facilitem a fatoração de um número.

<u>19ª e 20ª AULAS</u>

<u>Objetivos das aulas:</u>

- ✓ Fazer com que o aluno, ao usar conhecimentos vistos anteriormente, busque meios matemáticos para determinar os divisores de um número.
- ✓ Identificar a regra prática para a determinação dos divisores de um número.

<u>Problema 5</u>[26]: Determine os divisores de 630.

<u>Objetivo do problema:</u>

- ✓ Levar o aluno a encontrar um modo simples, apoiado na fatoração, que apresentasse todos os divisores de um número.

<u>21ª e 22ª AULAS</u>

<u>Objetivo das aulas:</u>

- ✓ Fazer com que o aluno utilize o conhecimento construído anteriormente para resolver as seguintes atividades.

<u>Atividades de fixação</u>[27]:

1) Coloque V para verdadeiro e F para falso, nas seguintes afirmações:
   a) 2 é divisor de 7 ( )
   b) 3 é divisor de 12 ( )
   c) 15 é múltiplo de 2 ( )
   d) 21 é múltiplo de 8 ( )
   e) 7 é um número primo ( )
2) Quais são os divisores de 18? Justifique sua resposta.
3) Dê 5 múltiplos de 3. Justifique sua resposta.

---

[26] Idem anterior.
[27] Idem anterior.

4) O que são números primos?
5) Quais são os 10 primeiros números primos?
6) Decomponha o número 100 em um produto de:
   a) Dois fatores;
   b) Três fatores;
   c) Quatro fatores;
   d) Fatores primos.

23ª AULA

Objetivos da aula:

- ✓ Fazer com que o aluno perceba a utilidade da Matemática para solucionar problemas do cotidiano;
- ✓ Relacionar os dados de um problema com os conceitos de múltiplos e divisores de um número;
- ✓ Trabalhar o conceito de divisores comuns entre números;

Problema 6[28]: Na folha I (Anexo 1), estão representados diversos pisos e uma lajota que será usada para decorá-los. A pretensão do pedreiro é assentar as lajotas nos pisos, recobrindo-os totalmente sem partir nenhuma delas. Verifique em que casos isso é possível e por quê? Justifique.

Objetivos do problema:

- ✓ Construir o conceito de divisores comuns de dois ou mais números;
- ✓ Fazer com que o aluno perceba que a medida do lado do piso deve ser múltipla da medida do lado da lajota, ou seja, a medida do lado da lajota seja divisor da medida do lado do piso.

[28] Adaptado do livro: Experiências Matemáticas, 5ª série, da Secretaria de Estado da Educação – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 2ª versão, São Paulo, 1997.

24ª e 25ª AULAS

Objetivos das aulas:

- ✓ Fazer com que o aluno seja capaz de utilizar conceitos aprendidos anteriormente para resolver outros problemas;
- ✓ Fazer com que os alunos utilizem o conceito de múltiplo e divisor de um número;
- ✓ Utilizar o conceito de divisores comuns entre dois ou mais números;
- ✓ Construir o conceito de Máximo Divisor Comum.

Problema 7[29]: Na folha II (Anexo 2), sabendo que os quatro retângulos representam um mesmo piso e que o lado de cada quadrícula representa 1 m:

a) Calcule as medidas dos lados do retângulo.
b) Invente, para cada retângulo, lajotas quadradas para ladrilhá-los, sem partir nenhuma delas. Cada retângulo deverá conter um único tipo de lajota.
c) É possível recobrir, totalmente, qualquer um desses retângulos com placas quadradas de 5 m de lado sem parti-las?
d) Organize suas descobertas, na seguinte tabela:

Retângulo	Lado da lajota (m)	Total de placas
I		
II		
III		
IV		

Objetivo do problema:

- ✓ Perceber que as medidas das lajotas quadradas devem ser divisores das medidas do piso.

Tarefas Extraclasse[30]:

1) Na folha III (Anexo 3), circule as respostas corretas:

---

[29] Idem anterior.
[30] Idem anterior.

2) Calcular o m.d.c. (80, 112).

26ª e 27ª AULAS

Discutir as tarefas deixadas na aula anterior.

Objetivos das aulas:

- ✓ Fazer com que o aluno trabalhe os conceitos aprendidos anteriormente, tais como: divisores comuns entre dois ou mais números e máximo divisor comum;
- ✓ Fazer com que os alunos questionem a existência de outros caminhos matemáticos para o cálculo do m.d.c. além da definição, do crivo de Eratóstenes e de tentativas, que possam simplificá-lo e, dessa forma, introduzir a regra das divisões sucessivas para o cálculo do m.d.c.

28ª AULA

Objetivos da aula:

- ✓ Fazer com que o aluno perceba o uso da Matemática na solução de problemas de fora da sala de aula;
- ✓ Trabalhar o conceito de múltiplos comuns de dois ou mais números;
- ✓ Construir o conceito de Mínimo Múltiplo Comum de dois ou mais números.

Problema 8[31]: No ponto de ônibus passa um ônibus para Floridiana de 15 em 15 minutos e um ônibus para o Jardim São Paulo de 10 em 10 minutos. Se os dois ônibus passaram juntos às 8h30min. Quanto tempo depois eles irão passar juntos novamente?

Objetivo do problema:

- ✓ Fazer a ligação da Matemática de sala de aula com uma situação do cotidiano, ao usar o conceito de Mínimo Múltiplo Comum.

Tarefa Extraclasse[32]: Calcule o Mínimo Múltiplo Comum de:

a) 12 e 15

[31] Idealizado pela pesquisadora.
[32] Idealizado pela pesquisadora.

b) 3, 4 e 6

c) 15, 24 e 60

<u>29ª e 30ª AULAS</u>

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

<u>Objetivos das aulas:</u>

- ✓ Trabalhar o conceito de mínimo múltiplo comum (m.m.c.), construído na aula anterior;
- ✓ Fazer com que o aluno questione a existência ou não de uma ferramenta matemática que facilite o cálculo do mínimo múltiplo comum, quando os números trabalhados são grandes;
- ✓ Introduzir o processo da decomposição simultânea.

<u>Atividade de fixação</u>[33]: Determine:

a) m.m.c. (4, 8)

b) m.m.c. (4, 5, 20)

c) m.m.c. (24, 36, 54)

Unidade 2: NÚMEROS RACIONAIS

<u>Objetivos Gerais da Unidade:</u>

- ✓ A partir de situações associadas à divisão, fazer com que o aluno perceba que há problemas que admitem como resposta um número natural e problemas que exigem outro tipo de número como resposta;
- ✓ Considerar o conjunto dos números racionais positivos, $Q_+ = \{\frac{a}{b}, a, b \in N, b \neq 0\}$;
- ✓ Localizar números racionais na reta numérica;
- ✓ Considerar $\frac{a}{b} \in Q_+$ como um operador;

[33] Adaptadas do livro: Matemática e realidade: 5ª série, Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado – São Paulo: Atual, 1997.

- ✓ Considerar $\frac{a}{b} \in Q_{+}$, com a, b $\in$ N e b $\neq 0$, como o quociente da divisão de a por b, $\frac{a}{b} = \frac{a \div b}{b \div b} = \frac{a \div b}{1} = a \div b$;
- ✓ Identificar $\frac{a}{b} \in Q_{+}$, com a, b $\in$ N, b $\neq 0$, como uma fração , isto é, uma relação parte-todo;
- ✓ Representar, com símbolos, a fração escrita por extenso;
- ✓ Ler e interpretar números racionais envolvendo a representação fracionária;
- ✓ Reconhecer frações equivalentes como representações diferentes de um mesmo número racional;
- ✓ Simplificar frações aplicando a fatoração e a propriedade fundamental das frações equivalentes;
- ✓ Determinar a representante mais simples de uma classe de equivalência de frações;
- ✓ Comparar dois números racionais em Q_{+};
- ✓ Efetuar a adição de dois números racionais em Q_{+};
- ✓ Efetuar a subtração de dois números racionais, quando possível em Q_{+};
- ✓ Efetuar a multiplicação de dois números racionais em Q_{+};
- ✓ Reconhecer que a multiplicação, em Q_{+}, apresenta uma nova propriedade: a existência do inverso multiplicativo para todo número diferente de zero;
- ✓ Efetuar a divisão de dois números racionais quaisquer em Q_{+}, com o segundo diferente de zero.

1ª e 2ª AULAS

Objetivos das aulas:

- ✓ Fazer com que o aluno perceba que existem situações-problema que admitem o número natural como resposta, enquanto que outros tipos não admitem o número natural como resposta, isto é, exigem um número racional;
- ✓ Fazer com que o aluno perceba a importância de se voltar ao enunciado do problema antes de dar a resposta definitiva.

Situação: Zeca é um garoto muito querido por seus colegas por ser muito caridoso. Ele possui uma bicicleta que é mais conhecida por bicicleta maluca do Zeca.

Problema 1[34]**:** Na bicicleta maluca de Zeca há lugar para 5 pessoas. Um dos lugares é sempre ocupado por ele, que é o dono da bicicleta. Os outros lugares, ele usa para transportar seus amigos. Hoje, por exemplo, Zeca vai transportar 15 amigos, jogadores de basquetebol, da quadra até o ponto do ônibus. Quantas viagens, no mínimo, ele terá que fazer para transportar os 15 amigos em sua bicicleta?

Problema 2[35]**:** Enquanto esperavam a chegada de Zeca com sua bicicleta, os 15 amigos consumiram 33 chocolates. Os chocolates foram divididos igualmente entre eles. Quanto chocolate cada um consumiu?

Objetivos dos problemas:

- ✓ Fazer os grupos lerem e interpretarem os problemas a fim de poderem explorá-los e chegar às soluções;
- ✓ Perceber a necessidade de se trabalhar com números diferentes, os racionais, e, assim, com diferentes técnicas operatórias.

Tarefa Extraclasse[36]**:** Os amigos de Zeca resolveram dar-lhe uma festa do sorvete. Nesta festa estavam o Zeca, a Aninha e 16 amigos do Zeca. Foram comprados 38 sorvetes de palito. Quantos sorvetes cada um consumiu, lembrando que todos consumiram a mesma quantidade?

3ª AULA

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

Objetivo da aula:

- ✓ Fixar os objetivos assumidos anteriormente.

4ª AULA

Objetivo da aula:

- ✓ A partir do conceito de divisão, apresentar uma personalidade do número racional: o número racional como quociente $\frac{a}{b}$, a, b $\in$ N, b $\neq$ 0, $\frac{a}{b} = \frac{a \div b}{b \div b} = \frac{a \div b}{1} = a \div b$.

---

[34] Adaptado do livro: Experiências Matemáticas, 5ª série, da Secretaria de Estado da Educação – Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas, 2ª versão, São Paulo, 1997.

[35] Idem anterior.

[36] Idealizada pela pesquisadora a partir do problema 2.

Problema 3[37]: Três amigas foram à pizzaria Mama Mia:

1. Dani, Luci e Jane compraram duas pizzas. As pizzas foram divididas igualmente entre elas. Quanto cada uma comeu de pizza?
2. Como podemos representar as quantidades de pizza que cada uma recebeu? Como esse número é chamado?
3. Se cada pizza custou R$15,00, quanto cada uma pagou pelo que comeu?

Objetivos do problema:

- ✓ Construir o conceito de número racional como o quociente de uma divisão.

5ª AULA

Objetivos da aula:

- ✓ A partir do conceito de fração, fazer representação de alguns números racionais;
- ✓ Trabalhar a leitura de frações;
- ✓ Fazer com que o aluno perceba que várias frações escritas de formas diferentes podem representar a mesma quantidade;
- ✓ Construir o conceito de frações equivalentes.

Atividades[38]:

1) Faça 4 retângulos iguais e represente neles as seguintes frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{4}$.

2) Faça 3 retângulos, iguais ao retângulo abaixo, e represente as seguintes frações: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$.

Tarefa Extraclasse[39]: Quanto dá?

---

[37] Idealizado pela pesquisadora.

[38] Adaptadas do livro: Para Aprender Matemática, 5ª série, Iracema Mori & Dulce Satiko Onaga, 4ª edição, 1991.

[39] Idem anterior.

a) $\frac{1}{2}$ de 46;

b) $\frac{1}{3}$ de 69;

c) $\frac{2}{5}$ de 100.

6ª e 7ª AULAS

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

Objetivos das aulas:

- ✓ Fazer com que o aluno representasse, cada parte fracionária, da barra de chocolate consumida, em relação ao todo, barra de chocolate, como um número fracionário e como medida de quantidade (peso);
- ✓ Reforçar o conceito, a representação e a leitura de fração.

8ª AULA

Problema 4[40]: Renata ganhou uma barra de chocolate de um quilo de sua mãe. Ela poderia consumi-la sozinha. Sua mãe, porém, lhe advertiu que não comesse tudo de uma só vez. Assim, Renata resolveu dividir a barra de chocolate em 4 partes iguais. No Sábado ela comeu uma das partes. Na 2ª-feira, comeu outra parte. Quanto Renata comeu do chocolate no Sábado (kg)? Até 2ª-feira, quanto ela já havia comido da barra? Quanto lhe sobrou da barra? Quanto representa em gramas cada parte da barra repartida por ela?

Objetivos do problema:

- ✓ Fazer com que o aluno represente cada parte fracionária consumida em relação ao todo, como um número fracionário e como medida de quantidade (peso);
- ✓ Construir os conceitos de adição e subtração de frações de mesmo denominador.

[40] Adaptado do livro: Transformando a Prática das Aulas de Matemática, 6ª série, Tânia M. M. Campos, Célia M. C. Pires, Edda Curi, São Paulo: PREM, 2001.

9ª AULA

Problema 5[41]**:** Gastei $\frac{2}{5}$ de meu salário com aluguel. Do que sobrou $\frac{1}{2}$ em alimentação. Da 2ª sobra, $\frac{1}{3}$ foi colocado na poupança. E ainda sobraram R$100,00. Qual foi o meu salário?

Objetivos do problema:

- ✓ Fazer com que o aluno seja capaz de representar, com um desenho, o que se pede na linguagem escrita, no enunciado;
- ✓ Fazer com que o aluno seja capaz de compreender, ao longo da resolução do problema, a mudança no "todo";
- ✓ Trabalhar os conceitos de adição e subtração de frações;

Tarefa Extraclasse[42]**:** Calcule:

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2}$

b) $\frac{7}{8} - \frac{5}{8}$

c) $\frac{5}{11} + \frac{7}{11}$

d) $\frac{7}{8} + \frac{7}{11}$

10ª AULA

Discutir a tarefa deixada na aula anterior.

Objetivos da aula:

- ✓ Construir, professora e alunos, os conceitos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes;
- ✓ Justificar a técnica operatória para executar essa operação.

---

[41] Idealizado pela pesquisadora.

[42] Adaptadas do livro: Matemática: idéias e desafios, 5ª série, Iracema Mori & Dulce Satiko Onaga, 2ª edição, 1997.

Tarefas Extraclasse[43]**:**

1) Antônio ganhou de seu patrão uma Colomba Pascal. Seu filho comeu $\frac{1}{3}$ da Colomba. Quanto sobrou da Colomba Pascal?

2) Luciana comeu $\frac{2}{5}$ de uma barra de chocolate e Gabriel comeu $\frac{2}{3}$ do que havia sobrado. O restante eles deram para o Maurício.
   - ✓ Quem comeu mais chocolate: Luciana ou Gabriel?
   - ✓ Que fração do chocolate Maurício comeu?

3) Com a venda de doces, dona Carminha conseguiu ganhar R$1600,00 neste mês. A metade desse dinheiro ela gastou comprando alimentos. $\frac{1}{4}$ dele, ela gastou comprando material escolar para Luciana. Com $\frac{3}{8}$ do que sobrou ela comprou um vestido e o restante guardou na poupança.
   - ✓ Quanto dona Carminha gastou em alimentos?
   - ✓ Quanto custou o material escolar de Luciana?
   - ✓ Qual o preço do vestido novo de Dona Carminha?
   - ✓ Quanto Dona Carminha guardou na poupança?

11ª e 12ª AULAS

Discutir as tarefas deixadas na aula anterior.

Objetivos das aulas:

- ✓ Usar os conceitos vistos anteriormente, na resolução dos problemas dados;
- ✓ Analisar a postura dos alunos diante de situações-problema que exigem identificar partes do todo e a mudança do todo em diferentes situações.

13ª AULA

Objetivos da aula:

- ✓ Usar os conceitos vistos anteriormente;

---

[43] Idealizadas pela pesquisadora.

- ✓ Construir os conceitos de multiplicação e divisão de frações.

<u>Problema 6</u>[44]: Duca quer achar a terça parte da metade de uma folha de papel. Que fração indica a terça parte da metade da folha?

<u>Objetivo do problema:</u>

- ✓ Construir o conceito de multiplicação de frações a partir do conceito de multiplicação de números naturais.

14ª AULA

<u>Problema 7</u>[45]: A esposa do Sr. Antônio recebeu o salário do mês. Ela pegou $\frac{2}{5}$ de seu salário e dividiu igualmente entre seus três filhos. Quanto desse salário cada um recebeu?

<u>Objetivo do problema:</u>

- ✓ Construir o conceito de divisão de frações.

15ª AULA

<u>Objetivo da aula:</u>

- ✓ Trabalhar o conceito de divisão de frações.

<u>Situação:</u> "Cafezinho, uma preferência nacional"

Podemos encontrar café já embalado em pacotes de 1 kg, $\frac{1}{2}$ kg ou $\frac{1}{4}$ kg.

Em alguns armazéns, cafeterias ou barracas de feira, como a de Dona Zefa, o café é moído na hora.

---

[44] Adaptado do livro: Transformando a Prática das Aulas de Matemática, 5ª série, Tânia M. M. Campos, Célia M. C. Pires, Edda Curi, São Paulo: PREM, 2001.

[45] Adaptado do livro: Matemática e realidade: 5ª série, Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado – São Paulo: Atual, 1997.

<u>Problema 8</u>[46]: Dona Zefa vende café, em pacotes de 1 kg, $\frac{3}{4}$ kg, $\frac{1}{2}$ kg, $\frac{1}{4}$ kg e $\frac{1}{8}$ kg. Utilizando as embalagens de café de dona Zefa, responda às questões abaixo. Se você achar necessário, desenhe figuras.

1. Dois pacotes de $\frac{1}{2}$ kg contêm 1 kg de café. De que outras formas você pode obter 1 kg de café? Escreva todas as maneiras possíveis.
2. Se uma pessoa comprar 5 pacotes de $\frac{1}{4}$ kg, ela levará mais, menos ou exatamente 1 kg? E se comprar 10 pacotes de $\frac{1}{8}$ kg?
3. Se Zefa pesar 6 pacotes de $\frac{1}{4}$ kg, quantos "quilos" marcará a balança? E se pesar 7 pacotes de $\frac{1}{4}$ kg?

Justifique.

[46] Extraído do livro: Transformando a Prática das Aulas de Matemática, 6ª série, Tânia M. M. Campos, Célia M. C. Pires, Edda Curi, São Paulo: PREM, 2001.

Capítulo 4 – A Aplicação do Projeto

Considerações Iniciais

No capítulo anterior, foi apresentado o desenvolvimento de estratégias através dos procedimentos de pesquisa que levaram à concepção do Projeto.

Neste capítulo será descrito o desenvolvimento da aplicação desse Projeto em sala de aula.

O Princípio do Ensino, estabelecido nos Standards 2000, diz que: Um ensino de Matemática eficiente requer da parte do professor um conhecimento do que os alunos sabem e do que eles precisam para poder aprender e, com isso, desafiá-los e incentivá-los a aprender bem.

Ensinar Matemática bem é um compromisso complexo e não há receitas fáceis para ajudar todos os alunos a aprenderem ou para ajudar todos os professores a tornarem-se eficientes.

Um ensino eficiente de Matemática requer que os professores conheçam e entendam a Matemática que ensinam e que sejam capazes de contar com esse conhecimento em suas atividades de ensino; eles precisam conhecer e estarem comprometidos com seus alunos, enquanto aprendizes de Matemática e como seres humanos; em sala de aula, devem ser hábeis ao escolher e usar diferentes estratégias pedagógicas e de avaliação adequadas ao tópico trabalhado.

Os professores determinam e criam um ambiente que conduz a aprendizagem de Matemática através das decisões que eles tomam, das conversações que eles organizam e do cenário físico que eles criam. As ações dos professores encorajam os alunos a pensar, a levantar questões, a resolver problemas e a discutir suas idéias, suas estratégias e suas soluções.

Reflexão e análise são atividades individuais, mas essas atividades podem ser grandemente intensificadas em discussões de grupos, com outro colega apenas ou em comunidades de professores.

Mas, segundo os PCN: Matemática, 1998, p. 21, o que ainda se encontra é que:

> [...] parte dos problemas referentes ao ensino de matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à

> formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas de formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que infelizmente são, muitas vezes, de qualidade insatisfatória. A implantação de propostas inovadoras, por sua vez, esbarra na falta de uma formação profissional qualificada, na existência de concepções pedagógicas inadequadas e, ainda, nas restrições ligadas às condições de trabalho.
> Quanto à organização dos conteúdos, é possível observar uma forma excessivamente hierarquizada de fazê-lo. É uma organização, dominada pela idéia de pré-requisito, cujo único critério é a definição da estrutura lógica da Matemática, que desconsidera em parte as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Nessa visão, a aprendizagem ocorre como se os conteúdos se articulassem como elos de uma corrente, encarados cada um como pré-requisito para o que vai sucedê-lo.

Também é discutível a qualidade do conhecimento matemático recebido por parte de certos professores, no que se refere à sua qualificação, pois Viktor, 2002, p. 28-32, diz que:

> ‘A média dos formandos em matemática no Provão realizado no fim do curso de licenciatura é 1,2 – o pior entre todas as carreiras. E o mais grave é que 70% das questões de múltipla escolha abordam conteúdos do ensino médio. Estamos entregando diploma a quem não sabe o mínimo para ensinar.’, diz Elizabeth Belfort, coordenadora do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), que é mestre em matemática e fez doutorado em educação matemática na Inglaterra.

A formação do professor de Matemática atualmente está ruim e, conseqüentemente, os alunos desses professores saem da escola, de ensinos fundamental e médio, cada vez menos preparados tanto para o mercado de trabalho quanto para o ingresso na Universidade. Constata-se que este fato tem sido percebido, inclusive, em outras áreas. Estão sendo formados profissionais cada vez mais despreparados para exercerem suas funções. Estas dificuldades com os alunos são também fruto do desconhecimento de metodologias alternativas de ensino.

Apesar dessas situações serem comuns, podemos encontrar escolas de qualidade e professores de alto nível que estão cumprindo seu papel e lutando para que essas situações revertam.

Nota-se que tem havido muitas discussões, em Educação Matemática, sobre a necessidade de se adequar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da Matemática em muitos campos da atividade humana. Tais discussões têm influenciado análises e revisões nos currículos de Matemática, nas ações pedagógicas e nas novas formas de avaliação.

Assim, é imperiosa a necessidade de mudança quanto à formação de professores. O que, em geral se vê, quando jovens professores entram para o mercado de trabalho, é a utilização, por parte deles, das lembranças de posturas de antigos professores para atuarem como docentes.

O ponto central de meu interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas, baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender Matemática ao construir novos conceitos, a saber utilizar os processos envolvidos e a desenvolver as técnicas operatórias necessárias para o trabalho feito em cada unidade temática.

Ao definir a classe em que a pesquisa será desenvolvida, decidiu-se adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Na página 58 deste trabalho consta que:

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas constitui-se num caminho para se ensinar Matemática e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nela, o problema é um ponto de partida e os professores, através da resolução do problema, devem fazer conexões entre os diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, visando, principalmente, o processo e não somente a solução do problema trabalhado.

O ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas aos problemas considerados.

Na abordagem de resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas, como aprende Matemática para resolver problemas. O ensino de resolução de problemas não é mais um processo isolado. Nessa metodologia, o ensino é fruto de um processo mais amplo, um ensino que se faz por meio da resolução de problemas.

Para o desenvolvimento das aulas, será utilizado, sempre que possível, um roteiro de operacionalização de trabalho para a sala de aula, apresentado por Onuchic (1998), com o objetivo de construir conteúdos matemáticos de maneira significativa, a partir de problemas:

> <u>Formar grupos</u> – entregar uma atividade
> Lembrar que, no mundo real, aprender é muitas vezes um processo compartilhado e que o progresso em direção a um objetivo vem através de esforços combinados de muita gente. É preciso que os estudantes experimentem este processo cooperativo e que se lhes dê a oportunidade de aprender uns com os outros. Sentimos que muito da aprendizagem em sala de aula será feita no contexto de pequenos grupos.
> <u>O papel do professor</u>
> Dentro desse trabalho, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador,

> interventor, controlador e incentivador da aprendizagem. O professor lança questões desafiadoras e ajuda os alunos a se apoiarem, uns nos outros, para atravessar as dificuldades. O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.
> <u>Resultados na lousa</u>
> Com o trabalho dos alunos terminado, o professor anotaria na lousa os resultados obtidos pelos diferentes grupos. Anota resultados certos, errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.
> <u>Plenária</u>
> Chama os alunos todos, de todos os grupos, para uma assembléia plena. Como todos trabalharam sobre o problema dado, estão ansiosos quanto a seus resultados. Procuram defender seus pontos de vista e participam.
> <u>Análise dos resultados</u>
> Nesta fase, os pontos de dificuldade encontrados pelos alunos são novamente trabalhados. Surgem, outra vez, problemas secundários que, se não resolvidos, poderão impedir que se leve o trabalho à frente. O aspecto exploração é bastante importante nesta análise.
> <u>Consenso</u>
> A partir da análise feita, com a devida retirada das dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.
> <u>Formalização</u>
> Num trabalho conjunto de professor e alunos, com o professor dirigindo o trabalho, é feita uma síntese do que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. É importante destacar, nesse momento, o que de matemática nova se construiu, usando as novas terminologias e notações relativas ao assunto.

Esse roteiro ajudará a direcionar o trabalho em sala de aula, pois apresenta parâmetros de como proceder diante de uma situação-problema colocada, visando à construção matemática de conhecimento pelos alunos.

Mas para que esse trabalho se concretize, é importante que os alunos desenvolvam habilidades para o trabalho cooperativo, pois esse é o primeiro passo em direção ao ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.

> A cooperação é tão importante para o sucesso de equipes esportivas quanto para o avanço da ciência. É tão valiosa para o funcionamento das famílias quanto para as relações dos indivíduos. Na sociedade contemporânea, é mais provável que indivíduos cooperativos atinjam suas metas pessoais. (ARTZT & NEWMAN, 1991, p.1)

As relações sociais que ocorrem em sala de aula são muito próximas das que ocorrem na vida, em sociedade. Esta é uma fase importante na vida de uma pessoa, pois é nessa fase que as crianças começam a manter relações sociais umas com as outras sem a tão forte presença da família. Assim, é importante orientá-las para um relacionamento bom, onde cada um deve aprender a respeitar o limite do outro e saber que existem regras a serem seguidas.

> A sala de aula é um ambiente natural para atividades de aprendizagem cooperativa. Os estudantes que têm a oportunidade de trabalhar em pequenos grupos podem começar a praticar habilidades cooperativas necessárias aos membros do grupo ao resolver problemas juntos. Além disso, cada membro do grupo pode aprender o conteúdo do currículo

> através de suas interações com os outros membros do grupo.” [...] “Desta maneira, os estudantes podem falar sobre o problema em questão, discutir estratégias de solução, relacionar o problema com outros que tinham sido resolvidos antes, resolver dificuldades e pensar sobre o processo todo de resolução do problema. (ARTZT & NEWMAN, 1991, p.1)

Um trabalho cooperativo, em sala de aula, envolve tanto alunos como professor. É necessário que o professor esteja predisposto a criar condições para que os alunos possam trabalhar em conjunto, saber ouvir o aluno e intervir corretamente. Numa aprendizagem cooperativa, o professor passa a ser um mediador. Nessa nova função ele precisa não só saber muita Matemática como ter, bem claro, os objetivos que deverão ser atingidos.

O trabalho em grupo ajuda na formação de um cidadão organizado e para isso há alguns pontos relevantes que devem ser considerados:

> [...] Primeiro, os membros de um grupo devem perceber que eles são parte de uma equipe e que todos eles têm um objetivo comum. Segundo, os membros do grupo devem perceber que o problema que eles estão resolvendo é um problema do grupo e que o sucesso ou a falha do grupo será compartilhado por todos os membros. Terceiro, para atingir a meta do grupo, todos os estudantes devem conversar uns com os outros – para se engajarem na discussão de todos os problemas. Finalmente, deve-se deixar claro que o trabalho individual de cada membro tem um efeito direto no sucesso do grupo. O trabalho de equipe é de extrema importância. (ARTZT & NEWMAN, 1991, p. 2)

Os compromissos devem ser cumpridos por todos para que o trabalho em equipe funcione.

Um outro fator relevante da metodologia utilizada é a necessidade de se deixar tarefa para casa. Esta é uma maneira de fazer com que o aluno esteja conectado com a sua aprendizagem escolar.

> As pesquisas têm mostrado que, geralmente, passar tarefas para casa com regularidade é melhor do que não passar tarefa nenhuma ou do que passar tarefa voluntária (Goldstein, 1960; Coulter, 1979; Rickards, 1982). Várias pesquisas (Frederick e Walberg, 1980; Keith, 1982) mostraram que o tempo gasto em tarefas de casa contribui de maneira modesta mas significativa para melhorar as notas e que os efeitos dessas tarefas, quando realizadas regularmente, podem ser cumulativos (Goldstein, 1960). (HOLDAN, 1994, p. 278-284)

> Os exercícios que os alunos levam para fazer fora da escola são um ótimo jeito de medir como cada um está aprendendo. [...]
> [...] a tarefa que o professor dá para seus alunos fazerem em casa é, sim, uma importante ferramenta de aprendizado, capaz de dar ao educador instrumentos para medir a evolução de cada um deles ao longo do ano. (FACCIO & GUIMARÃES, 2003, p. 60-61)

Assim, meu trabalho para a sala de aula conterá tarefas para casa como uma forma de o aluno fixar conhecimento construído e refletir sobre o que lhe foi “ensinado” em sala de aula. Além disso, algumas tarefas que lhe serão deixadas, como desafios, pretendem prepará-lo para a construção de novas idéias matemáticas.

Um dos principais objetivos de se deixar tarefas para casa é ‘ensinar’ o aluno a trabalhar sozinho e criar um vínculo agradável com os estudos, dar-lhe autonomia para buscar o conhecimento por conta própria.

4.1 – Minha posição antes da aplicação

No início de 2002, como professora da Escola Estadual Professor Nelson Stroili e iniciando o curso de Mestrado, pretendia elaborar um Projeto que seria aplicado a uma 5ª série do Ensino Fundamental, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Assim, como professora de uma 5ª série desta escola, propus aos alunos a utilização do Termo de Compromisso desde o início do ano letivo. Esse termo foi votado e assinado por professora e alunos, havendo o compromisso de que os alunos poderiam vir a trabalhar em grupos, seriam estabelecidas regras de disciplina e haveria a socialização do conhecimento em busca de atitudes compatíveis com a cidadania. Utilizei, como professora dessa turma, o método tradicional de ensino porém com algumas mudanças, no intuito de preparar os alunos para, posteriormente, serem conduzidos de uma maneira diferenciada. Nesse período, o problema, ainda, não era visto como um ponto de partida sendo apenas trabalhado no final de cada tópico.

Foi trabalhada, com os alunos, a história dos sistemas de numeração até o surgimento do sistema decimal e feita uma revisão crítica das quatro operações fundamentais com suas propriedades.

Durante esse tempo, pude conhecer os alunos e elaborar o Projeto que seria aplicado sobre os tópicos Divisibilidade e Números Racionais.

No que se refere à unidade temática Divisibilidade, percebe-se sua importância ao ser esse tópico trabalhado após o ensino das quatro operações fundamentais, mostrando a construção de novos conceitos matemáticos e suas relações. Divisão de números naturais faz parte da Matemática trabalhada no 2º ciclo do Ensino Fundamental. No 3º ciclo, vamos trabalhar o conceito de divisibilidade que está ligado ao conceito de divisão. Devemos olhar divisibilidade como uma propriedade – a qualidade de ser divisível – e a divisão como um procedimento operatório. Além disso, objetiva-se fazer com que o aluno perceba que há ferramentas matemáticas que, ao serem usadas, simplificam o trabalho feito apenas com conteúdos aprendidos anteriormente.

Com relação à unidade temática Números Racionais, embora as representações fracionárias dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número.

No início de 2002, o diretor da escola recebeu uma orientação da Diretoria de Ensino, dada a partir de resultados da prova aplicada pelo SARESP, no ano anterior, onde o baixo índice de notas obtidas foi causado pelo fato de os alunos não saberem ler e nem interpretar textos. Assim, a direção da escola exigiu que os professores, no 1º bimestre de 2002, iniciassem um trabalho de leitura e interpretação de textos com os alunos e que, somente depois, iniciassem o conteúdo respectivo de cada série em todas as disciplinas. O diretor sugeriu aos professores que utilizassem textos de livros dos ciclos anteriores como material único de trabalho com os alunos (Anexo 4). Desta forma, os conteúdos matemáticos para a série pesquisada foram iniciados, praticamente, no 2º bimestre de 2002 provocando, assim, um atraso em meu trabalho.

Além disso, como a clientela dessa escola era constituída por alunos, em geral, carentes, a escola lhes oferecia um ambiente onde a maioria dos acontecimentos sociais do bairro ocorria. Durante o ano letivo a escola proporcionava alguns eventos sociais que a tornavam um referencial para aquelas crianças do bairro. Muitos desses eventos ocorriam para angariar fundos para a APM (Associação de Pais e Mestres) que eram utilizados para atender a alguns gastos da escola, pois, como o diretor sempre dizia, ‘o dinheiro enviado pelo Governo do Estado era insuficiente’.

No decorrer do ano letivo, ocorreram alguns desses eventos que não estavam relacionados no planejamento feito no início do ano, provocando atraso no trabalho pedagógico planejado. Além disso, no final desse ano, como de costume em anos anteriores naquela escola em meados de novembro, os alunos que já tinham média para aprovação foram dispensados das aulas, permanecendo na escola apenas aqueles que haviam ficado para recuperação.

Por isso meu Projeto, que havia sido proposto para ser aplicado na 5ª série do Ensino Fundamental, no 2º semestre de 2002, precisou continuar no 1º bimestre de 2003, na 6ª série. Felizmente, foi possível e muito importante continuar como professora desta turma em 2003.

Na realidade a aplicação do Projeto se iniciou no final de setembro de 2002. A unidade temática Divisibilidade foi trabalhada até o final desse ano, ficando para o ano seguinte a unidade temática Números Racionais, onde foi introduzido novamente o Termo de Compromisso que, desta vez, foi aceito e assumido com maior facilidade, pois os alunos já estavam acostumados com aquela forma de trabalho.

4.2 – O desenvolvimento da aplicação do Projeto em sala de aula

Em busca de evidências que pudessem colaborar com a pergunta-problema, trabalhando com o método de pesquisa-ação, professora e alunos desenvolveram a aplicação desse Projeto.

Para o 3º ciclo do Ensino Fundamental nessa unidade escolar, os alunos tiveram cinco aulas de Matemática semanais de 50 minutos cada, sendo, para essa classe, duas duplas e uma simples em 2002 e, em 2003, uma dupla e três simples.

O desenrolar da aplicação desse Projeto será apresentado aqui contando o que aconteceu em sala de aula. Para a unidade temática Divisibilidade foram necessárias 38 aulas, embora fosse previsto utilizar 30 e, para a unidade temática Números Racionais, 20, enquanto previa-se 15.

Apesar de a aplicação do Projeto iniciar-se somente no final de setembro de 2002, os alunos já estavam trabalhando dentro do Termo de Compromisso desde o início do mesmo ano e, conseqüentemente, já sabiam trabalhar em grupos, apesar de não ser esta uma prática muito constante no período anterior à aplicação efetiva do Projeto em sala de aula.

Quando foi decidido iniciar-se a aplicação desse Projeto em sala de aula, foi solicitado, junto à UNESP de Rio Claro, o uso de uma filmadora para se registrar os acontecimentos em sala de aula. No início os alunos ficaram excitados com a presença de uma filmadora, um fato muito incomum em suas vidas.

Como o Projeto foi aplicado em uma sala de aula regular, com mais de quarenta alunos, foi preciso que alguém manipulasse a filmadora durante a movimentação da professora pelos grupos, de forma a poder captar de modo fidedigno os acontecimentos. Devido à impossibilidade de algum funcionário, quer da escola quer da UNESP, poder colaborar nas filmagens, foi requisitada a ajuda de uma aluna de outra sala para tal ação. Algumas aulas foram filmadas. Porém, como ficou difícil exigir sempre a presença dessa aluna, achei melhor continuar o trabalho sem a filmadora, contando, então, apenas com o diário de campo, as lembranças de fatos ocorridos e as atividades entregues pelos alunos.

As aulas foram, sempre que possível, trabalhadas dentro das idéias do roteiro apresentado anteriormente. Em todos os passos desse roteiro, o professor que o utiliza tem oportunidade de fazer uma avaliação continuada do progresso do aluno: dentro do grupo, nos questionamentos levantados, na postura assumida diante de um problema, na apresentação do resultado por escrito, na socialização ao construir Matemática, na participação na plenária e na colaboração da formalização do objeto matemático construído.

Após a aplicação do Projeto, serão coletadas todas as evidências identificadas, analisadas frente à pergunta-problema e relatados os resultados dessa análise, oferecendo, então, conclusões e sugestões a quem possa interessar.

Unidade 1 - Divisibilidade

Os alunos já conheciam a dinâmica de trabalho em grupos e as condições do Termo de Compromisso desde o início do ano letivo. No início da aplicação do Projeto decidi filmar o trabalho. Isso os deixou muito excitados. Percebi que alguns alunos estavam mais preocupados em aparecer na filmagem do que envolvidos no trabalho de Matemática propriamente dito. Em um dado momento, nas **1ª e 2ª aulas**, foi preciso parar a filmagem e comentar sobre as razões de estarem ali reunidos e, também, de estarem sendo filmados. Isso gastou um pouco do tempo previsto para o trabalho.

Para esse dia tinha, como objetivos, mostrar-lhes o papel da Matemática em situações de seus cotidianos e introduzir-lhes os conceitos de múltiplo e divisor de um número.

Com os alunos reunidos em grupos, foi entregue a cada grupo uma atividade que começava com um texto sobre jogos.

Jogos[47]

Na história da humanidade o jogo sempre despertou muito interesse. Um ramo da Matemática (Cálculo de Probabilidades) teve surpreendente desenvolvimento, a partir das preocupações de Pascal, um matemático francês que viveu entre 1623 e 1662, ao responder às angustiantes perguntas de seu amigo, um apaixonado jogador e filósofo, o Cavaleiro de Méré, em Paris, no século XVII.

Inúmeros jogos têm servido de ponto de partida para aprendermos muitos conceitos de Matemática, de maneira interessante. Também os instrumentos que utilizamos para jogar, como o dado, por exemplo, muitas vezes servem para refletirmos sobre os números, as figuras geométricas, as medidas, etc.

Quando várias pessoas querem participar de um jogo, verificamos se a quantidade de participantes é conveniente, ou não, para aquele jogo.

Existem jogos para apenas 2 jogadores, como o JOGO DA VELHA; outros, ainda, em que participa 1 jogador apenas: PACIÊNCIA. Há, ainda, os jogos em que o número de jogadores pode variar, como no BANCO IMOBILIÁRIO (2 a 6 jogadores), ou no jogo de BOLA DE GUDE, com 2 ou mais participantes.

Pergunta-se:

Que outros jogos você conhece? Quantas pessoas costumam participar deles?

Foi dado um tempo para que os alunos, nos grupos, lessem e discutissem o texto. Após algum tempo a professora pediu que falassem sobre o texto. O texto os motivou muito e levou-os a comentar sobre suas próprias experiências. Muitos citaram jogos com baralho, como paciência, buraco, cacheta, burro e as possíveis quantidades de participantes em cada jogo. Outros citaram o jogo de dominó, jogos com dados e até videogames. Eles estavam interessados no assunto.

Múltiplos e Divisores

Foi entregue a cada grupo o Problema 1 e dado um tempo para que o lessem e o discutissem entre os integrantes do mesmo.

[47] A partir daqui não serão colocadas as referências de modo a evitar repetições. Estas referências foram colocadas, na íntegra, no Roteiro de Atividades, no Capítulo 3.

Problema 1: "Distribuir igualmente as 48 cartas de um certo baralho (usualmente o baralho tem 52 cartas), para os participantes de um jogo. Cada jogador deve ficar com uma carta, pelo menos. Participam do jogo, no mínimo, duas pessoas".

- ✓ Qual é o menor número de jogadores permitido nesse jogo? E o maior?
- ✓ Podem participar desse jogo 3 jogadores? e 5? e 18?

Para esse problema tinha, como objetivos, fazer com que os alunos pudessem relacionar uma situação real com Matemática, que participassem da busca de caminhos matemáticos que pudessem facilitar sua resolução e, posteriormente, chegassem a construir os conceitos de múltiplo e divisor de um número.

Em uma primeira observação percebi que em alguns grupos os alunos faziam divisões do número 48, que se limitavam apenas a divisões por 2 e por 3, enquanto outros reclamavam não terem entendido o problema. Assim, foi preciso fazer alguns questionamentos:

– De acordo com as regras desse jogo, pode haver apenas um jogador? Poderia haver mais de 3 jogadores? E, nesse caso, quantas cartas cada um receberia?

Tais questões colaboraram para organizar, nos alunos, as idéias do problema e parece que eles o compreenderam melhor.

Ao percorrer os grupos, percebi que alguns alunos se interessaram em responder antes a segunda parte do problema: - Podem participar desse jogo 3 jogadores? e 5? e 18? E, conseqüentemente, eles faziam divisões do número de cartas, 48, por 3, 5 e 18.

Ao responderem a primeira parte do problema, a maioria dos alunos disse que o menor número de pessoas era 2 (como já estava explícito no enunciado do problema) e que o maior número era 48. Para que chegassem a essa conclusão, foi preciso ajudá-los na interpretação do enunciado do problema. De início parece que eles não haviam notado bem essas informações, eles não tinham conseguido fazer uma boa interpretação do texto.

Percebi, então, que precisava insistir nos questionamentos relacionados ao problema e fiz duas perguntas:

– Pode haver apenas um jogador nesse jogo?
– Qual é o menor número de cartas que cada jogador pode receber?

Alguns alunos responderam que poderia haver um só jogador, sem dar atenção ao enunciado que dizia: "Participam do jogo, no mínimo, duas pessoas".

Antes mesmo de buscar resposta à segunda questão dada, diante da resposta à primeira, fiz nova pergunta, chamando a atenção para a importância de se ler o enunciado muito bem:

– Com os dados do enunciado, qual é o menor número possível de jogadores?

Relendo o enunciado do problema, os alunos puderam perceber que estava escrito, no mínimo, dois jogadores.

Passando a discutir a segunda questão: “Qual é o menor número de cartas que cada jogador pode receber?”, face à discussão anterior sobre a interpretação do enunciado, os alunos, com mais facilidade, responderam que cada jogador deveria ficar com, pelo menos, uma carta.

Depois disso, querendo estender o problema, perguntei: “E se pudesse participar do jogo apenas um jogador, quantas cartas ele receberia?”, tendo como objetivo final desse trabalho chegar ao conceito de divisores de um número, no caso o número quarenta e oito.

Alguns alunos conseguiram perceber, com a expressão “no mínimo”, que poderia haver 3, 4, 5, ou mais jogadores.

Perguntei: “Será que podemos construir uma tabela com os dados: número de jogadores, número de cartas por jogador e número total de cartas, incluindo a possibilidade de haver apenas um jogador?” e fui à lousa.

Observei que alguns alunos ainda esperavam pelos resultados de outros colegas. Outros prestavam atenção às conversas de alunos de grupos próximos, querendo captar informações sobre o que estavam fazendo e, com isso, usar essas dicas para conseguir resolver o problema dado. Além disso, muitas vezes foi preciso pedir atenção para que o trabalho fosse feito em grupo, pois muitos alunos o faziam individualmente. No início, parecia haver uma certa disputa entre os componentes dos grupos e, muitas vezes, era preciso intervir sobre essas diferenças. Apesar de já terem experimentado o trabalho em grupos antes, ainda não haviam desenvolvido o espírito de equipe.

Na lousa, a partir dos meus questionamentos, os alunos, depois de dividir 48 pela seqüência dos números 1, 2, 3, 4, 5, ..., 48, diziam os valores e eu ia completando a tabela. Nesse momento, talvez, estivesse interferindo um pouco além do devido.

Após a tabela ser completada na lousa,

Número de Jogadores	Número de Cartas/Jogador	Total de Cartas
1	48	48
2	24	48
3	16	48
4	12	48
6	8	48
8	6	48
12	4	48
16	3	48
24	2	48
48	1	48

perguntei se havia alguma relação entre as colunas ‘número de jogadores’ e ‘número de cartas por jogador’. Eles responderam que os mesmos números apareciam em ambas as colunas mas em ordem inversa e, também, após algum tempo, que o número de jogadores vezes o número de cartas/jogador dava sempre 48.

Durante as discussões, um aluno disse que poderia haver 9 jogadores, pois surgiu uma dúvida sobre a frase ‘distribuir igualmente’, em que o aluno afirmou que as 48 cartas poderiam ser distribuídas igualmente para 9 jogadores e restariam 3 cartas. Como o problema pedia para **distribuir igualmente as 48 cartas**, expliquei que isso significava dividir todas as 48 cartas igualmente entre os participantes, esclarecendo que, em Matemática, dividir é visto como divisão exata, isto é, com resto zero, embora houvesse outra operação matemática, a divisão com resto, que não se aplicava ao problema proposto.

Como os grupos ainda estavam com a folha de atividade em mãos, notou-se que vários deles apagavam suas soluções obtidas anteriormente à ida da professora à lousa, fato que pôde ser constatado durante a análise dos trabalhos entregues, devido às marcas deixadas na folha.

Ao analisar as resoluções do Problema 1, percebi que minha interferência havia provocado nos alunos uma ‘corrida’ em apagar o que já haviam escrito e anotar o que havia sido dito. Havia nos alunos uma grande necessidade de entregar o trabalho com tudo certo, pois talvez acreditassem que haveria, como sempre, uma avaliação posterior da professora sobre erros e acertos. Eles estavam mais preocupados com uma possível “nota” que poderiam tirar. Além disso, havia, como é natural, a impressão de um certo medo de expor suas idéias e errarem. Outros mantiveram suas próprias soluções e, dessa forma, seus resultados e próprios modos de raciocinar puderam ser analisados.

O grupo 1

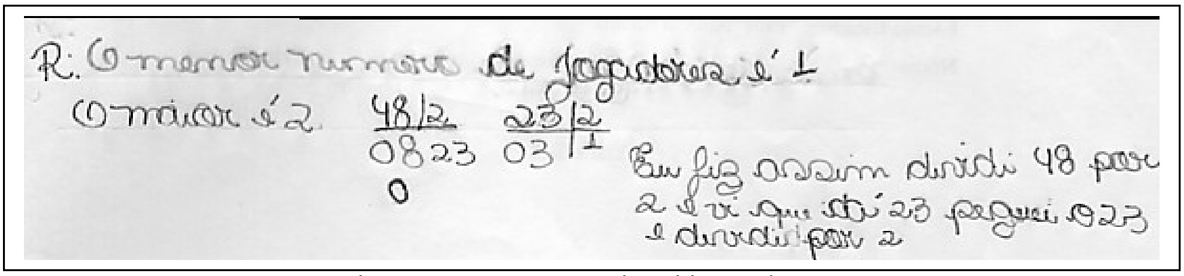

R: O menor numero de jogadores é 1
O maior é 2.
Eu fiz assim dividi 48 por 2 e vi que deu 23 peguei o 23 e dividi por 2

Figura 4.1.1 – Grupo 1 (Problema 1)

procurou caminhos para resolver o problema, inclusive explicando os passos que seguiu. Observa-se que esse grupo se preocupava em fazer ‘qualquer coisa’, sem pensar se isso tinha sentido ou não, além de ter enorme dificuldade com a operação divisão.

O grupo 7

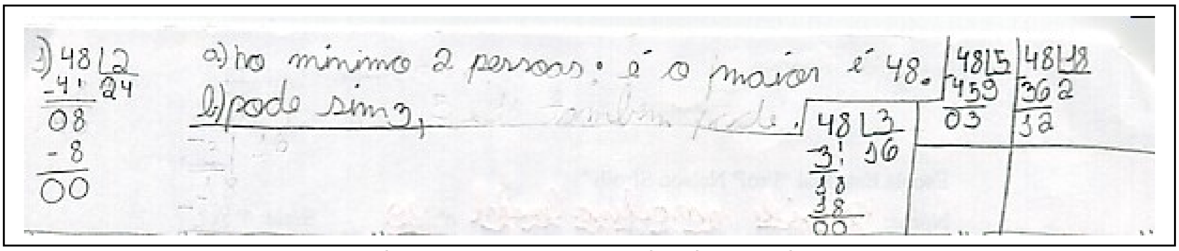

a) no minimo 2 pessoas: é o maior é 48.
b) pode sim,

Figura 4.1.2 – Grupo 7 (Problema 1)

respondeu a tudo o que o problema pedia, de maneira sucinta, mas poderia ter explicado suas ações. Parece que o grupo ficou satisfeito com a condição do resto, nas divisões, ter que ser zero para atender às condições do problema.

O grupo 4,

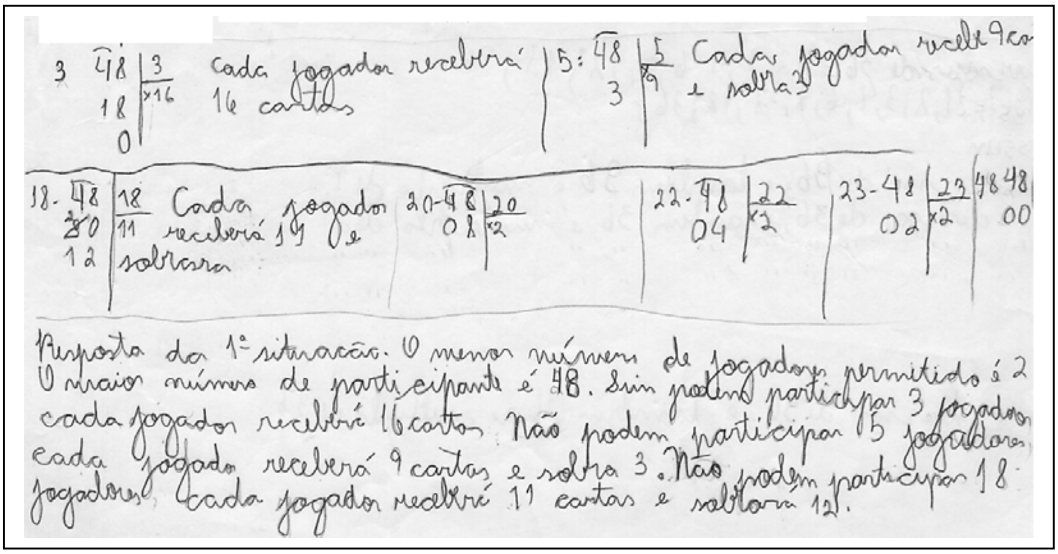

Cada jogador receberá 16 cartas
Cada jogador recebe 9 cartas e sobra 3
Cada jogador receberá 11 e sobraram
Resposta da 1ª situação. O menor número de jogadores permitido é 2 O maior número de participante é 48. Sim podem participar 3 jogadores cada jogador receberá 16 cartas. Não podem participar 5 jogadores cada jogador receberá 9 cartas e sobra 3. Não podem participar 18 jogadores, cada jogador receberá 11 cartas e sobraram 12.

Figura 4.1.3 – Grupo 4 (Problema 1)

depois de verificar que 18 não era divisor de 48, buscou outros divisores, mas não percebeu que 24 era também um divisor de 48 e foi direto para o 48. Porém, apresentou dificuldade na divisão por dois algarismos, isto é, na divisão de 48 $\div$ 18 esse grupo errou no algoritmo. Ao fazer 48 dividido por 18, achou 1 e subtraindo 18 de 48 achou 30. Ao fazer 30 dividido por 18 achou 1 e subtraindo 18 de 30 achou resto 12. O que não percebeu é que o quociente era (1 + 1), pois (1 + 1) vezes 18 = 2 vezes 18 = 36 que, com resto 12, leva a 48. Errou ao apresentar o número 11 como o quociente dessa divisão.

Apesar disso, esse grupo procurou deixar bem explicadas as operações, a partir das perguntas do problema.

De volta ao problema, ainda na plenária, a professora disse que os números das duas primeiras colunas da tabela eram chamados **fatores** ou **divisores** de 48, que são números que dividem exatamente 48 e que 48 era dito **múltiplo de** ou **divisível por** seus fatores e foram colocadas na lousa as possíveis decomposições de 48

48 = 1 x 48
48 = 2 x 24
48 = 3 x 16
48 = 4 x 12
48 = 6 x 8
48 = 8 x 6
48 = 12 x 4
48 = 16 x 3
48 = 24 x 2
48 = 48 x 1

e então foi escrito que:

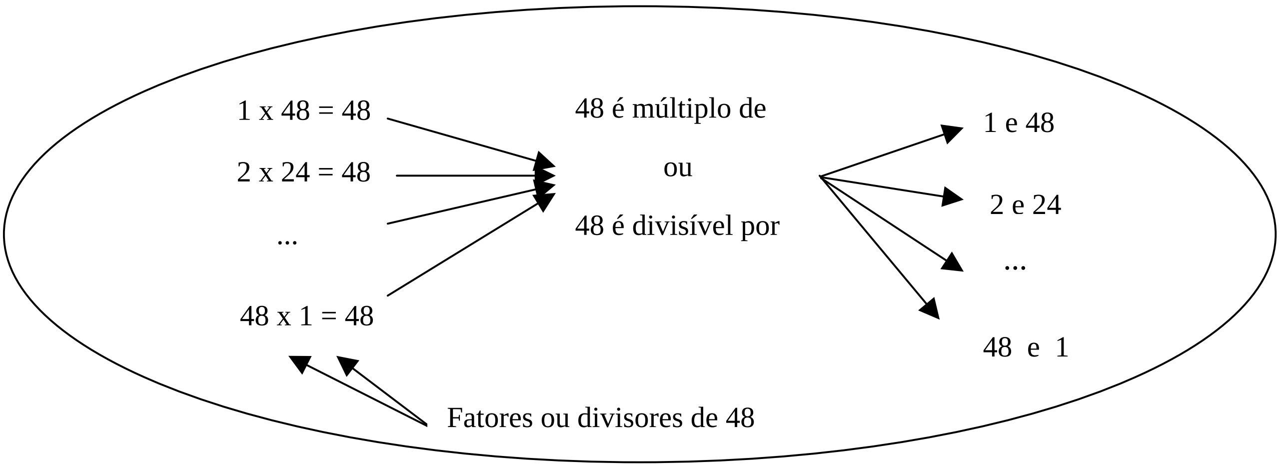
1 é divisor de 48 e 48 é múltiplo de 1
2 é divisor de 48 e 48 é múltiplo de 2; assim por diante, até que
48 é divisor de 48 e 48 é múltiplo de 48

Os significados das palavras: **divisor**, **divide**, **múltiplo** e **divisível**, foram construídos pela professora e pelos alunos.

Disse ainda que: o “sufixo or”, na palavra ***divisor***, indica **quem faz a ação**, ou seja, o divisor ou fator é quem divide e, o “sufixo endo”, na palavra ***dividendo***, indica **o que sofre a ação**, isto é, o divisor divide o dividendo exatamente. O dividendo é divisível pelo divisor e também é chamado múltiplo do divisor.

Como disse Stávale (1956, p. 80), “numa divisão exata, o dividendo é o produto do divisor pelo quociente”, pode-se concluir que múltiplo de um número qualquer é o produto desse número por um fator inteiro.

Pedi aos alunos que preenchessem os diagramas abaixo, para se familiarizarem com o que foi descoberto nessa atividade.



Chamei a atenção dos alunos para a seguinte relação:

Se um número é **múltiplo** de outro, então este outro é **divisor** ou **fator** desse número.

Disse também que múltiplos e divisores andam sempre juntos. Mas que, para cada número, diferente de zero, considerado há uma infinidade de múltiplos (o número multiplicado por todos os elementos do conjunto N) e que para cada número diferente de zero há um número finito de divisores (o menor divisor é 1 e o maior é ele mesmo).

Para construir os conceitos de múltiplo e divisor foram necessárias as duas primeiras aulas e, ainda, a aula seguinte.

Foi deixado, **na 3ª aula**, um problema de fixação dos conceitos trabalhados, como

Tarefa Extraclasse: “Distribuir igualmente as 36 cartas de um certo baralho (não usual) para os participantes de um jogo. Cada jogador deve ficar com uma carta, pelo menos. Participam do jogo, no mínimo, duas pessoas”.

- ✓ Qual é o menor número de jogadores permitido no jogo? E o maior?
- ✓ Podem participar desse jogo 3 jogadores? e 5? e 18?
- ✓ Em quais situações os jogadores recebem mais cartas? E menos cartas?

As **4ª e 5ª aulas** iniciaram-se com o recolhimento da tarefa deixada na aula anterior e a discussão da mesma. Os objetivos para essas aulas eram: rever o que havia sido discutido nas aulas anteriores e formalizar o conteúdo Múltiplos e Divisores de um número.

Como a tarefa deixada para casa era semelhante à do Problema 1, um problema de fixação de conteúdo para alunos, eles seguiram os mesmos passos do problema anterior para executá-la.

Reconheço que, ao trabalhar essa tarefa, levando os alunos a operar com a divisão, eu poderia ter pedido a eles que fizessem todas as divisões de 36 por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ..., 36 e que observassem em que casos a divisão era exata, ou seja, tivesse resto zero.

$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;1\;} \\ 0 & 36 \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;2\;} \\ 0 & 18 \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;3\;} \\ 0 & 12 \end{array}}$	$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;4\;} \\ 0 & 9 \end{array}}$
$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;5\;} \\ 1 & 7 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;6\;} \\ 0 & 6 \end{array}}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;7\;} \\ 1 & 5 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;8\;} \\ 4 & 4 \end{array}$
$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;9\;} \\ 0 & 4 \end{array}}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;10\;} \\ 6 & 3 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;11\;} \\ 3 & 3 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;12\;} \\ 0 & 3 \end{array}}$
$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;13\;} \\ 10 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;14\;} \\ 6 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;15\;} \\ 6 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;16\;} \\ 4 & 2 \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;17\;} \\ 2 & 2 \end{array}$	$\boxed{\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;18\;} \\ 0 & 2 \end{array}}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;19\;} \\ 17 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;20\;} \\ 16 & 1 \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;21\;} \\ 15 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;22\;} \\ 14 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;23\;} \\ 13 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;24\;} \\ 12 & 1 \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;25\;} \\ 11 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;26\;} \\ 10 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;27\;} \\ 9 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;28\;} \\ 8 & 1 \end{array}$
$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;29\;} \\ 7 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;30\;} \\ 6 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;31\;} \\ 5 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 36 & \underline{\;32\;} \\ 4 & 1 \end{array}$

36	33	36	34	36	35	36	36
3	1	2	1	1	1	0	1

Poderiam, assim, constatar que só nos casos de divisão por 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36 o resto é zero e que, portanto, todos os divisores de 36 eram esses números.

Na oportunidade de todas essas divisões feitas, poderia comentar, mais uma vez, o erro cometido por alguns alunos, na divisão de um número por outro de dois algarismos, reforçando o conceito de divisão e praticando essa técnica operatória.

Essa prática não foi aplicada em minha sala de aula mas é aqui deixada como uma possível sugestão de trabalho.

Os conceitos de múltiplo e divisor de um número foram formalizados, quando a professora na lousa escreveu:

Múltiplos e Divisores de um Número

<u>Definições</u>

Um número é divisível por outro quando a sua divisão por esse número é exata.

Exemplo: 48 é divisível por 6, pois 48 ÷ 6 = 8 e o resto é zero.

Se um número é **divisível** por outro, diz-se também que ele é **múltiplo** desse outro e o outro é seu **divisor** ou **submúltiplo**.

Exemplo:

$$\boxed{48 \div 6 = 8}$$

Assim:

48 → divisível por 6 ou múltiplo de 6

48 → divisível por 8 ou múltiplo de 8

6 → divisor de 48 ou submúltiplo de 48

8 → divisor de 48 ou submúltiplo de 48

Ainda, coloquei na lousa

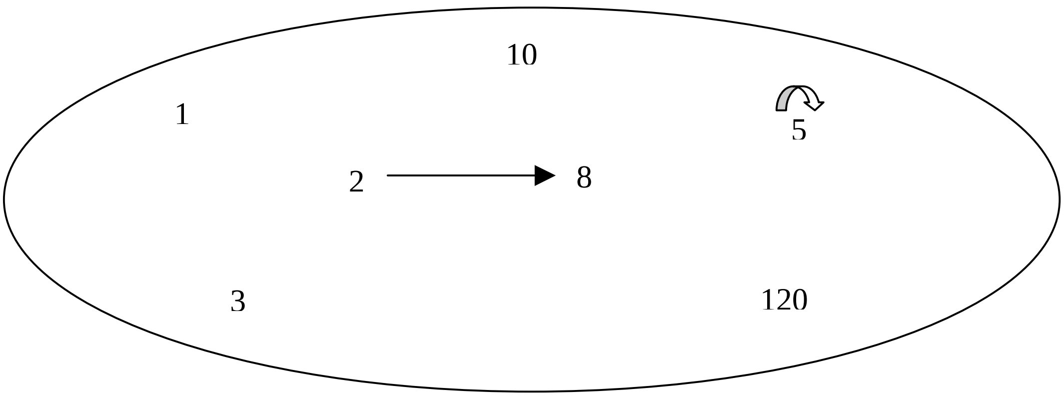
> “Um número diferente de zero tem um conjunto infinito de múltiplos e um conjunto finito de divisores.”

> Em todo o estudo da divisibilidade, os números 0 e 1 desempenham papéis especiais: enquanto o 0 é múltiplo de qualquer número, **múltiplo universal**, o 1 é divisor de qualquer número, **divisor universal**. (Aniceto Monteiro)

Para as **6ª e 7ª aulas**, o objetivo era o de reforçar os conteúdos vistos anteriormente, fazendo com que os alunos percebessem regularidades nos múltiplos de alguns números; a relação que existe entre múltiplo e divisor de um número; que o número 1 é divisor de todos os números; que todo número diferente de zero é divisor de si mesmo; que o número 0 é múltiplo de qualquer número; e que, para qualquer número, diferente de zero, há infinitos múltiplos e um número finito de divisores.

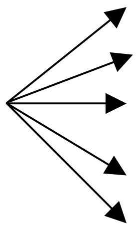
Entreguei aos grupos o

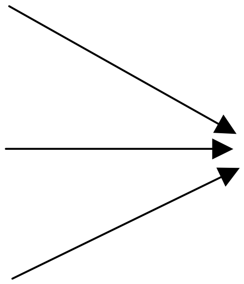
Problema 2: No seguinte diagrama, a flecha significa **é divisor de**. Por exemplo, 2 é divisor de 8, ou 5 é divisor de 5:



Desenhe todas as flechas que estão faltando no diagrama acima.

Olhando o diagrama anterior, complete:

2 é divisor de 

 são divisores de 10

Foi dado um tempo para que os grupos o lessem e discutissem entre seus integrantes. Os alunos acharam a atividade divertida, devido ao fato de ser um diagrama onde teriam que completar com flechas o que se pedia, ou seja, uma atividade diferente daquelas a que estavam acostumados. Ficaram animados mas sentiam necessidade de uma explicação sobre o significado e o uso das flechas. Nessa atividade, houve envolvimento de toda a classe, pois os alunos ficaram surpresos quando o sinal tocou e, para surpresa minha, pediram que a aula continuasse. Havia terminado a primeira aula do dia.

Nesse dia, as duas aulas não eram seqüenciais. Tínhamos a **1ª** e a **última** e, ao voltar, consegui que eles se animassem novamente, enfrentando o problema deixado.

Ao percorrer os grupos, observei que alguns alunos não haviam ainda entendido o que deveriam fazer. No desenvolvimento desta atividade, foi preciso fazer uma recordação de como eles haviam trabalhado o Problema 1, o do baralho, ou seja, de como foram encontrados os divisores de 48, fazendo suas possíveis decomposições.

Para esta atividade, faltou a exigência da professora em pedir aos alunos que justificassem suas respostas. Muitos deles deixaram apenas as flechas e suas contas indicadas.

O grupo 2 apresentou o seguinte resultado:

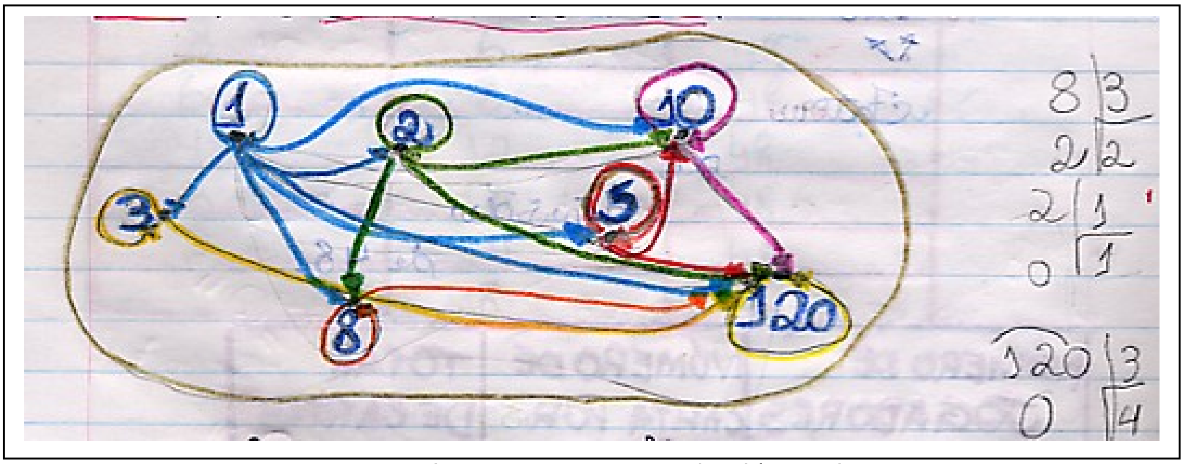


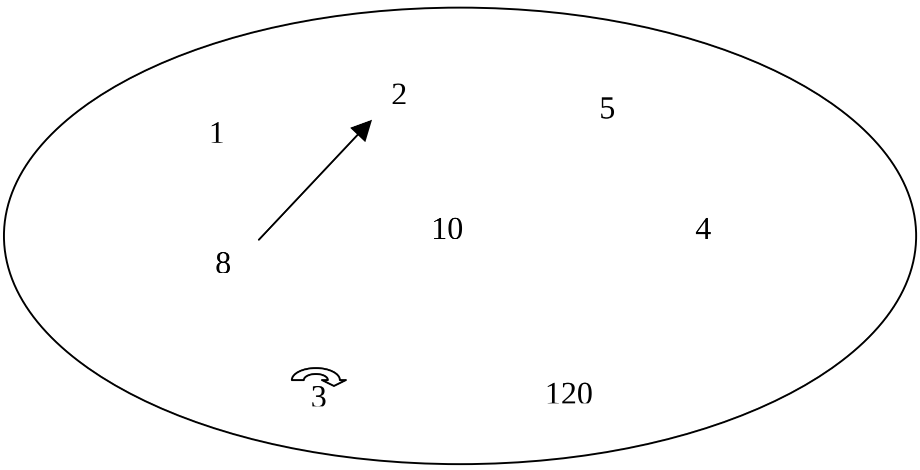
Figura 4.1.4 – Grupo 2 (Problema 2)

Ao analisar o material recebido, notei que esse grupo fez algumas divisões com alguns números indicados no diagrama e aquelas divisões, que apresentavam resto zero, eram indicadas com flechas que partiam do divisor e chegavam ao dividendo. Repetiram essa mesma ação com outros números.

Continuando a atividade, parece que, na parte seguinte, completando o trabalho, os alunos apenas olhavam as flechas do diagrama e completavam os outros itens. Notou-se, em vários grupos, pelas marcas deixadas nas folhas, que as divisões haviam sido feitas e apagadas. Parece que essas operações eram, para eles, apenas um recurso que podia garantir o desenho correto das flechas, pois haviam entendido que o divisor divide o múltiplo deixando resto zero. **(relacionaram)**

A seguir lhes foi entregue o

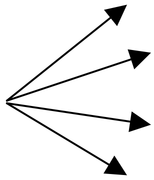
Problema 3: No diagrama seguinte, a flecha significa **é múltiplo de**. Por exemplo, 8 é múltiplo de 2 ou 3 é múltiplo de 3.

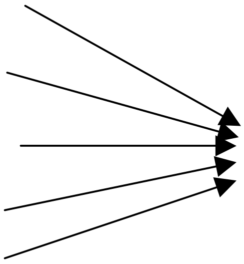


Desenhe todas as flechas que estão faltando no diagrama dado.

Agora, complete:

10 é múltiplo de





são múltiplos de 2

Este problema é semelhante ao anterior, embora a relação definida sobre ele seja outra.

Quando os alunos iniciaram o trabalho com esse problema, percebi que eles estavam confundindo divisores com múltiplos, ou seja, que esses conceitos não estavam ainda bem claros para eles. Acredito que isso possa ter ocorrido devido ao modo como eles haviam compreendido a relação existente entre múltiplo e divisor, isto é, não conseguindo imaginar a mesma flecha com dois significados diferentes. Assim, foi preciso lançar mão de outro recurso – usar as tabuadas – dizendo que os resultados dos produtos nas tabuadas (por exemplo do 2, 3, 4, ...) eram múltiplos desses números. A partir desses exemplos eles se mostraram mais convencidos e seguros.

Durante a exploração do Problema 3, perguntei aos alunos:

– O número 8 está na tabuada do 2? E na do 3? E na do 1? e assim por diante.

É preciso relatar que essa atividade foi explorada por professora e alunos antes que eles entregassem seus resultados. A formalização desse trabalho deu-se quase que simultaneamente.

Durante a discussão, entre professora e alunos, algumas perguntas foram feitas:

– De algum número partiram flechas para todos os outros números? O que isso significa?

Alguns alunos disseram que do número 1 partiram flechas para todos os outros números do diagrama.

Perguntei por que isto ocorria e um aluno do Grupo 2 disse:

– Porque todos os números podem ser divididos por 1.

e completando, disse que, por isso, o número 1 é divisor de todos os outros números. 1 é chamado divisor universal.

Uma outra pergunta foi:

– Em algum número chegaram flechas de todos os outros números? Por quê?

Uma aluna do grupo 1 disse:

– Professora, no meu foi o número 120. Acho que é porque ele dá para dividir pelos outros números.

Continuando, questionei:

– De cada número parte uma flecha para ele mesmo? O que isso significa?

Nesse momento a classe estava bastante participativa e até mesmo aqueles alunos que, no início, pareciam perdidos, durante a discussão começaram a se envolver no trabalho. Um aluno do grupo 5, que no início estava um pouco confuso, disse:

– Eu acho que é porque 1 dá para dividir por 1, 2 dá por 2, 3 dá por 3, ...

Reforçando a idéia vinda desse aluno, disse:

– Então o número 1 é divisor do 1? O número 2 é divisor do 2? ...

A classe concordou.

Aproveitando essa fala, recordando, chamamos a atenção do leitor para o seguinte:

"Um número é divisível por outro quando a sua divisão por esse outro é exata."

Se um número é divisível por outro diz também que ele é múltiplo desse outro, e o outro passa a ser seu divisor.

Múltiplo e divisor sempre andam juntos, pois se o primeiro número é múltiplo (ou divisível) do segundo, isto é, divisor (ou divide) do primeiro. Isto permite dizer que no conjunto dos números naturais, a relação: "ser divisível por", ou sua inversa: "ser divisor de" são relações de ordem onde valem as propriedades reflexiva e transitiva. Assim, todo número é divisor e múltiplo de si mesmo. Por exemplo, 5 é múltiplo e divisor de 5. Também vale a transitividade, pois se 20 é divisível por 10 e 10 é divisível por 5 então 20 é divisível por 5.

Na figura 4.1.4, os alunos puderam perceber que 1 é divisor de todos os números; que qualquer número é divisor de si mesmo, e que se 2 é divisor de 10 e 10 é divisor de 120, então 2 é divisor de 120. Também puderam observar que não vale a simetria, isto é, 2 é divisor de 10 e 10 não é divisor de 2, mas seu múltiplo (anti-simétrica).

Continuei a perguntar:

– As flechas que partem de 2 apontam para que números? E de 5? E de 10? Por quê?

Nesse momento pedi que observassem as características dos números que recebiam as flechas do 2, do 5 e do 10. Pretendia que eles começassem a notar algo de comum nesses números.

Na realidade, estava assumindo que os alunos pudessem fazer uso de conhecimento anterior sobre os números pares e ímpares. Dante (2000, p. 34), no livro 2 da série Vivência e Construção, diz que:

> Quando formamos grupos de 2 e **não sobram elementos**, o número total de elementos é par.
> Quando formamos grupos de 2 e **sobra um elemento**, o número total de elementos não é par, é ímpar.

Jácomo Stávale (1956, p. 70) apresenta:

> Primeiro caracter: Um número é divisível por 2, por 5 ou por 10, quando o número formado pelo primeiro algarismo da direita é divisível por 2, por 5 ou por 10.
> Um número inteiro qualquer pode sempre ser decomposto em duas parcelas, sendo a primeira terminada por um zero e a segunda constituída pelo algarismo das unidades.
> A primeira parcela, com um zero à direita é divisível por 10 e, por conseqüência, por 2 e por 5. Ora, se a segunda for divisível por 2, por 5 ou por 10, a soma também o será. Entretanto, se a segunda não for divisível por 2, por 5 ou por 10, a soma também não o será e os restos das duas divisões serão iguais.
> Os números formados por um algarismo, divisíveis por 2, são 2, 4, 6, 8 e 0; divisível por 5 são 5 e 0; o único divisível por 10 é zero. É por isto que se diz que um número é divisível por 2 quando termina em 2, 4, 6, 8 ou 0; por 5 quando termina em 5 ou 0; por 10, quando termina em 0.
> Os números divisíveis por dois são chamados números pares; os não divisíveis por 2 são chamados números ímpares.

Um aluno do grupo 4 disse prontamente:

– Os números que recebem as flechas do número 2 são pares.

Procurei não explorar muito esta parte para não interferir na atividade que seria proposta posteriormente, onde seriam trabalhados os critérios de divisibilidade.

Após terem completado os dois diagramas, os problemas 2 e 3, foram feitos mais alguns questionamentos:

– De algum número partiram flechas para todos os outros números, no diagrama I? O que isso significa?

Eles responderam que era o número 1 e que 'o número 1 é divisor de todos os números'. Conforme eles respondiam, pedia-se que colocassem, no caderno, essas frases como observações importantes e fiz mais uma pergunta.

- Em algum número chegaram flechas de todos os outros números, no diagrama I? Por quê?
- No 120, pois todos os números do diagrama I são divisores de 120. 120 é múltiplo desses números.
- De cada número parte uma flecha para ele mesmo? O que isso significa?
- Que todo número diferente de zero dá para dividir por ele mesmo.

Chamando a atenção de todos os alunos, adverti que essa afirmação não servia para o número zero, pois nunca é permitida a divisão por zero. Assim, o correto é afirmar que "todo número diferente de zero é divisor dele mesmo."

– As flechas que partem de 2 apontam para que números? Por quê?, perguntei.

Um aluno do grupo 4 prontamente respondeu:

– Para os números pares, por que estes podem ser escritos como 2 vezes qualquer número.

Como não foi possível terminar a discussão sobre os dois problemas propostos nas aulas previstas, foi necessário continuar esse trabalho de fixação de conceitos na aula seguinte.

Acredito que os objetivos colocados nas páginas 109 e 117, se não plenamente, pelo menos satisfatoriamente foram atingidos. Os alunos mostraram-se participativos e, trabalhando colaborativamente nos grupos, ajudaram a construir e formalizar, com muita ajuda da professora, os conceitos de múltiplo e divisor e de um número.

Como se tinha por objetivo, nas **9ª e 10 ª aulas**, construir os conceitos de múltiplos e divisores comuns de dois ou mais números, pedi aos alunos que voltassem ao Problema 1 e à tarefa extraclasse da **2ª aula** mostrando, novamente, os divisores de 48 e 36.

Perguntei o que percebiam com relação aos divisores desses dois números. Um aluno, do grupo 5, participando, o que não era freqüente nele, disse prontamente:

– Eles têm alguns números iguais como divisores.

Aproveitando sua colocação foi dito que aqueles números que apareciam tanto nos divisores de 36 quanto nos de 48 eram divisores comuns a eles. O significado da palavra “comum” foi procurado no dicionário. Um aluno do grupo 4, que possuía o dicionário Aurélio escolar, leu em voz alta para a classe.

> Comum significa pertencente a todos ou a muitos; vulgar, trivial, ordinário; aquilo que é comum, habitual, geral.

A partir daí, foi formalizado o conceito de divisores comuns de dois ou mais números, através da decomposição dos mesmos e, posteriormente, o conceito de múltiplos comuns de dois ou mais números. Na lousa, foi registrado:

Divisores comuns de dois ou mais números

Sejam dados os números 36 e 48.

Os divisores de 36 são: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{6}$, 9, $\underline{12}$, 18 e 36

Os divisores de 48 são: $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, $\underline{6}$, 8, $\underline{12}$, 16, 24 e 48

Os números sublinhados são chamados divisores comuns de 36 e 48.

Chamando D (n) o conjunto dos divisores de n, pudemos escrever:

D (36) = {1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36} e D (48) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48} e, chamando D_C (36, 48), o conjunto de Divisores Comuns de 36 e 48, concluiu-se que,

D_C (36, 48) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Observando que há um **número finito** de divisores comuns de 36 e 48.

Múltiplos comuns de dois ou mais números

Sejam dados os números 2 e 3.

Os múltiplos de 2 são: $\underline{0}$, 2, 4, $\underline{6}$, 8, 10, $\underline{12}$, 14, 16, $\underline{18}$, 20, ...

Os múltiplos de 3 são: $\underline{0}$, 3, $\underline{6}$, 9, $\underline{12}$, 15, $\underline{18}$, 21, 24, 27, ...

Os números sublinhados são alguns múltiplos comuns de 2 e 3.

Então, chamando M (n) o conjunto dos múltiplos de n, pudemos escrever:

M (2) = {0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...} e M (3) = {0, 3, 6, 9, 12, 15, ...} e, chamando M_C (2, 3), o conjunto de Múltiplos Comuns de 2 e 3, concluiu-se que,

M_C (2, 3) = {0, 6, 12, 18, ...}

Observando que há uma **infinidade** de múltiplos comuns de 2 e 3.

Foram deixadas algumas tarefas extraclasse para fixação dos conceitos construídos.

Tarefas Extraclasse:

1 – Dê os divisores de:

a) 120 e) 4

b) 10 f) 3

c) 8 g) 2

d) 5 h) 1

2 – Com as respostas obtidas, complete a tabela abaixo:

Números de um divisor, apenas	Números de dois divisores, apenas	Números com MAIS de dois divisores

Nas **11ª e 12ª aulas**, foram recolhidas as tarefas deixadas na aula anterior e discutidas com a classe. O objetivo era o de que os alunos começassem a classificar os números quanto à quantidade de divisores que possuem para, posteriormente, introduzir os conceitos de números primos e números compostos.

Lembrei aos alunos que a palavra tabela já fazia parte de seu vocabulário.

Os alunos, em geral, não tiveram maiores dificuldades em executar as tarefas dadas, pois já haviam utilizado a decomposição de números e sabiam reconhecer cada fator do produto como divisor daquele número. Eles ainda não haviam aprendido a achar os divisores de um número pela regra prática, pois não tinham o conceito de número primo.

Durante as discussões, na plenária, procurei chamar a atenção dos alunos para a coluna de números de um divisor apenas, onde só havia sido colocado o número 1. Perguntei se havia algum outro número que também pudesse ficar nessa coluna.

Alguns alunos disseram que o número 2 estaria nessa coluna.

Ao pedir que escrevessem o número dois de maneira multiplicativa, isto é, como produto de números, eles fizeram a decomposição: 2 = 1 x 2 e 2 = 2 x 1, concluindo que o número dois tinha dois divisores: o 1 e ele mesmo. Após essa conversa todos concordaram que somente o número 1 possuía apenas um divisor. Complementei, dizendo que o número 1 possui apenas um divisor, que é ele mesmo, pois pode ser escrito apenas como 1 x 1 = 1.

A maioria dos grupos apresentou 1 na primeira coluna, 2, 3 e 5 na 2ª coluna e 4, 8, 10 e 12 na 3ª coluna.

No Projeto, para o tópico Múltiplos e Divisores, haviam sido propostas 7 aulas mas, realmente, para a aplicação foram necessárias 12 aulas.

Números Primos e Compostos

Na **13ª aula**, foi apresentado o

Problema 4:

Crivo de Eratóstenes

Siga as seguintes instruções:

- ✓ Construir uma tabela com os números naturais de 2 a 100.
- ✓ Riscar nessa tabela todos os múltiplos de 2, maiores que 2, com amarelo. Todos os múltiplos de 3, maiores que 3, com verde, e assim por diante, variando as cores.
- ✓ Colocar no quadrinho anexo, os números que ficaram sem riscar.

	2	3							
									100

✓ Completar:

- Múltiplos de 2, maiores que 2:
- Múltiplos de 3, maiores que 3:
- Múltiplos de 4, maiores que 4:
- Múltiplos de 5, maiores que 5:
- Múltiplos de 6, maiores que 6:

e deixei que eles o discutissem livremente entre os integrantes de cada grupo. Os objetivos eram os de fazer com que os alunos percebessem características dos múltiplos e divisores de um número, estabelecer critérios de divisibilidade e, posteriormente, construir o conceito de números primos e compostos.

Essa atividade levou mais tempo do que o previsto, pois nela pedia-se para riscar com cores distintas os múltiplos de 2, maiores que 2, os múltiplos de 3, maiores que 3, e assim por diante. Em um certo momento, as cores se misturavam na folha de atividade e os alunos ficaram confusos. Assim, pedi que, conforme fossem riscando, anotassem separadamente os múltiplos de cada um dos números. Foi preciso deixá-los continuar o trabalho nas aulas seguintes.

Nas **14ª e 15ª aulas**, conforme iam terminando, os alunos percebiam que precisariam riscar somente até os múltiplos de 50, pois os múltiplos de 51 seriam maiores do que 100. Esse fato acabou chegando aos ouvidos de outros grupos que estavam atrasados, mas que estavam ficando desestimulados, pois ‘estava demorando muito para acabar’, como diziam. Essa dica deu um pouco mais de ânimo aos retardatários. Essa atividade, talvez, pudesse ser mais bem explorada, porém percebi que eles ficaram cansados com a “árdua” tarefa de riscar...

Esperei até que todos, efetivamente, terminassem o trabalho, para fazer alguns questionamentos sobre o que haviam obtido e pedi, aos grupos, que analisassem, em seus trabalhos, os múltiplos de cada um dos números dados. A partir daí iniciou-se uma discussão sobre suas descobertas.

Perguntei: - Que características podemos perceber nos múltiplos de 2, maiores que 2? E nos de 3? e, assim por diante.

Nesse momento um aluno do grupo 4 respondeu prontamente: - Todos os múltiplos de 2 são pares.

A partir dessa afirmação outros alunos criaram coragem para dizer o que pensavam e uma aluna do grupo 3 perguntou: - E os múltiplos de três são impares?

Imediatamente, um aluno do grupo 9, contestando, perguntou: - Você não vê que o número 30 é múltiplo de 3, e ele não é ímpar?

Nesse instante, pôde ser mostrado que os múltiplos de 3 podem ser pares ou ímpares.

Deixei que discutissem um pouco mais mas, como não há uma característica visual simples quanto aos múltiplos de 3, disse que há uma regra que garante a divisibilidade de um número dado por 3 e que ela seria trabalhada posteriormente.

Uma aluna do grupo 8 foi uma das últimas a terminar a atividade, mas durante as discussões ela disse: - Professora quando fui riscar os múltiplos de 4 não precisei riscar nenhum.

Aos alunos foi questionado sobre o porquê daquilo ter ocorrido.

A discussão ficou bastante agitada, pois alguns queriam dar suas justificativas antes de outros. Foi preciso colocar na lousa uma ordem de fala.

Como eles haviam utilizado cores para riscar os múltiplos, um aluno do grupo 2 disse: “Professora, como eles estavam riscados de amarelo eles são múltiplos de 2”.

Perguntei, então, - Será que todo número que for múltiplo de 4 é múltiplo de 2?

Todos disseram que sim. Então se concluiu que os múltiplos de 4 já estavam riscados por serem, também, múltiplos de 2.

Um aluno do grupo 5 disse:

– Fessora, no meu trabalho foram riscados todos os números da coluna do 5, menos o 5, e todos os da coluna do 10...

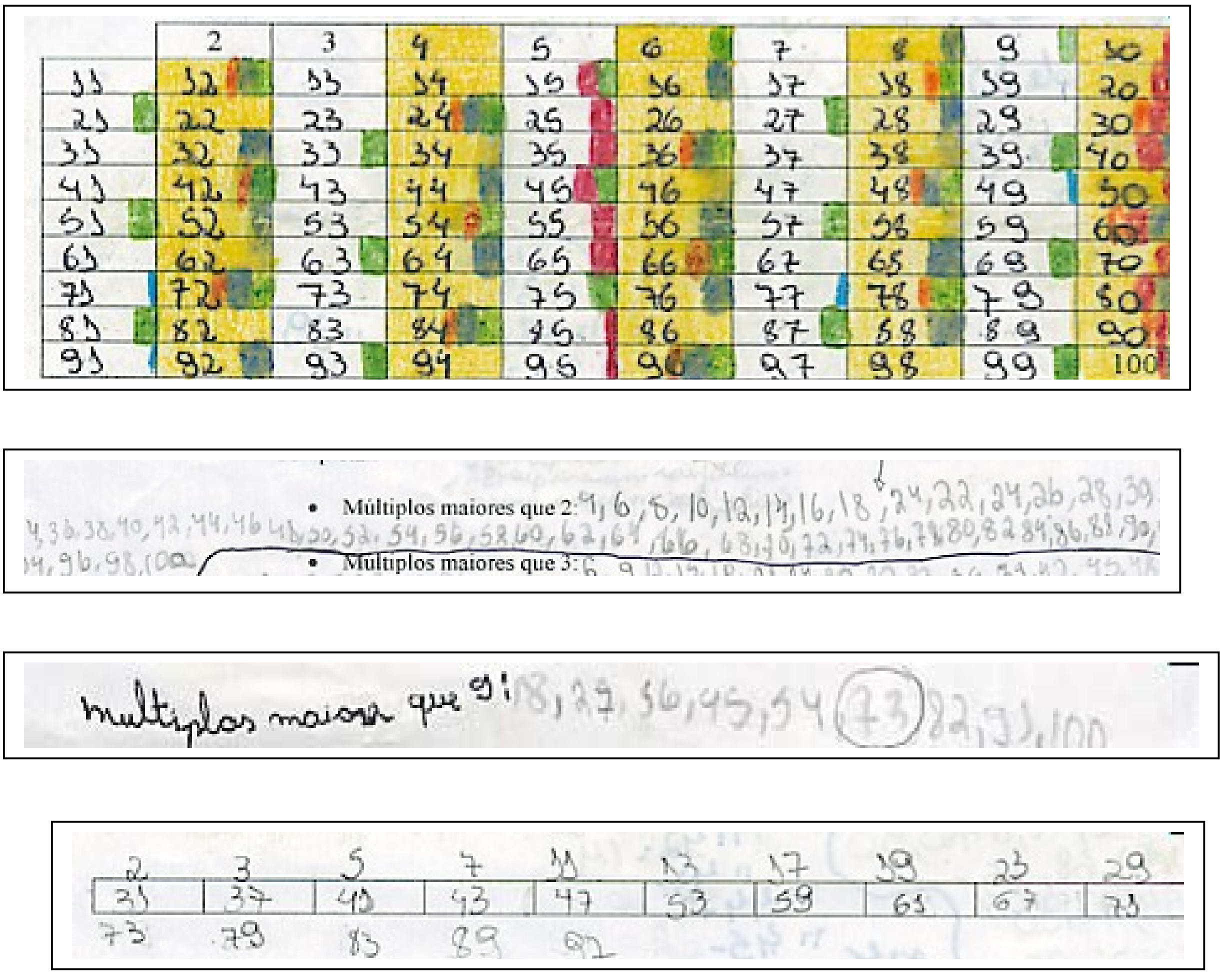


Figura 4.1.5 – Grupo 6 (Problema 4)

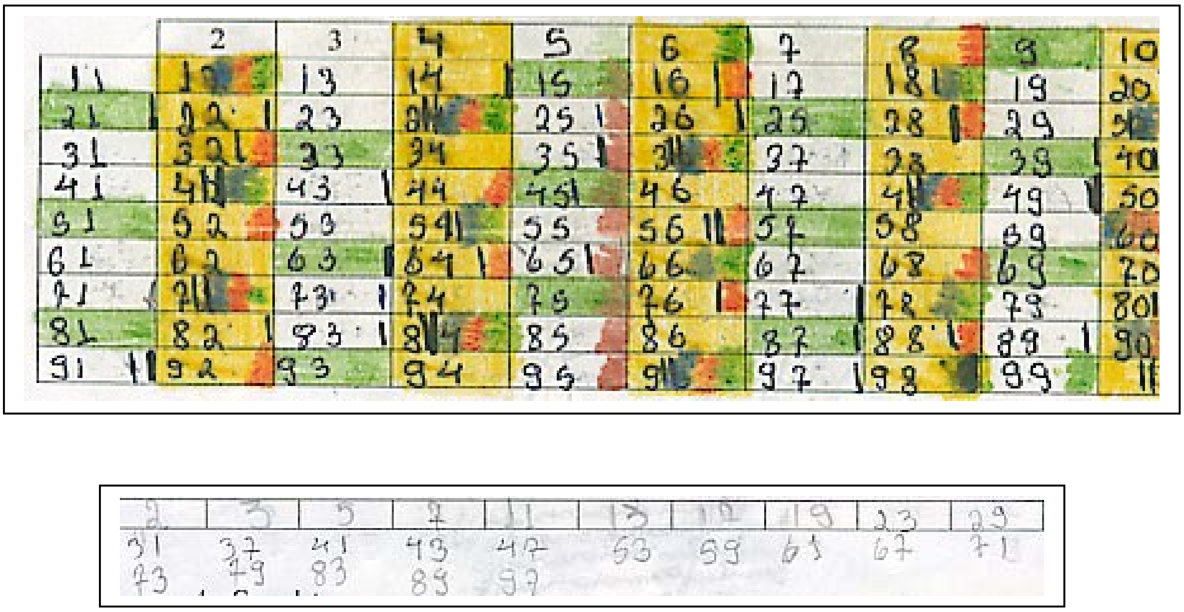


Figura 4.1.6 – Grupo 4 (Problema 4)

Ao analisar as atividades entregues pelos grupos, observei que alguns acabaram se perdendo ao anotarem os múltiplos de 2, 3, ... Isso ocorreu por falta de atenção, pois querendo encontrar múltiplos de 9, errou porque, ao contar a partir de 54, parece que pulou a linha 61-70 da tabela, marcou 73 e depois 82, 91 e 100. Porém ao colocar, no quadro anexo, os números que não haviam sido riscados, esse grupo colocou o número 73, que, para eles, havia sido riscado. Tais fatos podem ter ocorrido devido à ânsia de terminar logo a atividade. Por outro lado, houve grupos que conseguiram organizar suas anotações com capricho, garantindo soluções corretas. Nota-se que os integrantes do grupo 4 riscaram, de maneira organizada, os múltiplos pedidos e se detiveram em anotar corretamente os números não riscados no quadro anexo.

A maioria dos grupos apresentou, no quadro anexo, os números que, após todo esse ritual, permaneceram não riscados. Com isso estavam adiantando o conceito que se queria construir: o de número primo.

Critérios de Divisibilidade

Para saber se um número é divisível por outro basta fazer a divisão desse número por esse outro. Se o resto for zero, dizemos que ele é divisível por esse outro. Se o resto for diferente de zero, dizemos que o número não é divisível por esse outro.

A operação divisão, quase sempre, se apresenta aos alunos como difícil. É freqüente encontrar alunos que não sabem justificar ou compreender o processo operatório da divisão que, quanto maior for o número de algarismos do divisor, maiores dúvidas apresentam. O objetivo dessa atividade é o de chegar a certas regras que permitam verificar quando determinados números são divisíveis por outros, sem efetuar essa operação. Tais regras são chamadas critérios de divisibilidade.

“[...] observamos que um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples do que a própria divisão.” (TÁBOAS & RIBEIRO, 1985, p. 21-24)

<u>Divisibilidade por 2:</u>

No trabalho com o Crivo de Eratóstenes, olhando na tabela, ficou claro, para os alunos, que todos os múltiplos de 2 maiores do que 2 são pares.

Mas a tabela foi escrita de 2 até 100. Será que isso que viram na tabela vale para números maiores do que 100?

Para atender a esse questionamento, decidi afirmar e justificar, com um exemplo, que:

“todo número terminado em zero é múltiplo de dois.”

Considerei o número 4790

vendo que $4790 = 479 \times 10$ e que $10 = 2 \times 5$

Então, posso escrever

$$4790 = 479 \times 10 = 479 \times (2 \times 5) = (479 \times 5) \times 2 = m\,(2)$$

A partir desse resultado, com outro exemplo, mostrei que a soma de múltiplos de dois é um múltiplo de dois.

Tomei os números 4792 e 4795

Escrevi, na lousa, usando o mesmo raciocínio anterior e lembrando que “se um número divide todas as parcelas de uma soma, então ele divide a soma.” (Stávale, 1956, p. 82)

- $4792 = 4790 + 2 = m\,(2) + m\,(2) = m\,(2)$

Observo que o número considerado poderia ser 4794, 4796 ou 4798, pois 2, 4, 6 e 8 são múltiplos de dois.

- $4795 = 4790 + 5 = m\,(2) + m\,\cancel{(2)} = m\,\cancel{(2)}$, onde $\diagup$ significa “não é”.

isto é, a soma de um múltiplo de dois com um número que não é múltiplo de dois, não é múltiplo de dois.

Observo que o número considerado poderia ser 4791, 4793, 4797, 4799, pois 1, 3, 7 e 9 não são múltiplos de dois.

Dessa maneira, quem garante que um número é (ou não) divisível por dois é o dígito das unidades.

- ✓ Se ele for par, o número todo o será e, portanto, será um número múltiplo de dois.
- ✓ Se ele for ímpar, o número todo o será e, portanto, não será um múltiplo de dois.

Pode-se afirmar então que: “Um número natural é divisível por dois quando ele termina em 0, 2, 4, 6, ou 8, ou seja, quando ele é par”.

Divisibilidade por 3:

Olhando a tabela, a partir do questionamento de uma aluna: “todo número múltiplo de três é ímpar?” e da contestação de outro aluno, dizendo que “30 é múltiplo de 3 e é par”, pôde ser mostrado que os múltiplos de três podem ser pares ou ímpares e que há uma regra para garantir quando um número é ou não é divisível por 3.

Perguntei: - O número 475686 é divisível por 3?

A primeira atitude dos alunos foi a de fazer a divisão:

```
475686 |_3______
17       158562
 25
  16
   18
    06
     0
```

e, como o resto da divisão é zero, puderam garantir que esse número era divisível por 3.

Pedi aos alunos que adicionassem os valores absolutos dos algarismos componentes desse número. Eles fizeram 4 + 7 + 5 + 6 + 8 + 6 = 36 e pedi que dividissem 36 por três.

```
36 |_3__
06   12
 0
```

Chegando, também, a um resto zero, igual ao obtido na divisão anterior.

Deixei que, com esse procedimento, experimentassem outros números. Sempre observando o Crivo de Eratóstenes, pegaram 99, 87 e 83 e fizeram as divisões desses números por 3. Depois, adicionando os algarismos desses números, fizeram as divisões das somas por 3.

Apresentando seus resultados assim:

❖ $\begin{array}{r|l} 99 & 3 \\ \cline{2-2} 09 & 33 \\ 0 & \end{array}$ $\therefore$ 99 é divisível por 3

e, ao fazerem 9 + 9 = 18 e

$\begin{array}{r|l} 18 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$ também obtiveram resto zero

❖ $\begin{array}{r|l} 87 & 3 \\ \cline{2-2} 27 & 29 \\ 0 & \end{array}$ $\therefore$ 87 é divisível por 3

como 8 + 7 = 15 e

$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 5 \end{array}$ confirmou resto zero

❖ 83 | 3 ∴ 83 não é divisível por 3, pois o resto da divisão é 2

$$\begin{array}{r|l} 83 & 3 \\ \hline 23 & 27 \\ 2 & \end{array}$$

e fazendo 8 + 3 = 11 e

$$\begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

verificaram que para esse número, o resto também foi 2

Perceberam, com ajuda da professora, que o resto da divisão de um número por três é o mesmo que o resto da divisão da soma dos algarismos do número considerado por três.

Disse aos alunos que isso que eles haviam verificado nesses três casos valia para investigar, de uma maneira mais rápida, quando um número é, ou não é, divisível por 3.

Afirmando que essa propriedade pode ser verificada, escrevi na lousa

“Um número é divisível por três quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por três.”

É verdade que eu poderia ter verificado essa regra com um exemplo numérico, usando a decomposição de um número. Assim,

$4365 = 4000 + 300 + 60 + 5 =$

$= 4 \times 1000 + 3 \times 100 + 6 \times 10 + 5 =$

Sabendo que

$10 = 9 + 1$		$9 = m(3)$		$9 = 3 \times 3$
$100 = 99 + 1$	e que	$99 = m(3)$	pois,	$99 = 33 \times 3$
$1000 = 999 + 1$		$999 = m(3)$		$999 = 333 \times 3$

e substituindo nas operações acima, vem:

$= 4 \times (999 + 1) + 3 \times (99 + 1) + 6 \times (9 + 1) + 5 =$

$= 4 \times 999 + 4 + 3 \times 99 + 3 + 6 \times 9 + 6 + 5 =$

$= m(3) + 4 + m(3) + 3 + m(3) + 6 + 5$

e como a soma de múltiplos de três é um múltiplo de três, então

$4365 = m(3) + 4 + 3 + 6 + 5$

Mas como 4 + 3 + 6 + 5 = 18 é um múltiplo de 3 então, a soma, m (3) + 18, também o será. Portanto, 4365 é múltiplo de três.

Com este exemplo poderia dizer que todo número, com um número qualquer de algarismos, pode ser sempre escrito como um múltiplo de três mais a soma dos valores absolutos de seus algarismos e que, se esta soma for (ou não for) múltiplo de três, então o número dado será (ou não será) um múltiplo de três.

Reconheço que não teria sido fácil desenvolver esse tipo de raciocínio com esses alunos, considerando a exigüidade do tempo destinado a essa tarefa.

Divisibilidade por 4:

Buscando descobrir quando um número é divisível por quatro, olhando na tabela, uma aluna do grupo 8 observou que não havia precisado riscar nenhum número da mesma, concluindo que aqueles números, múltiplos de quatro, também eram múltiplos de dois.

Comentei que, como $4 \times 25 = 100$, todo número terminado em dois zeros é múltiplo de 4 e de 25 e que se o número não terminar em dois zeros pode ser escrito assim:

$$4365 = 4300 + 65 = m\,(4) + 65$$

e como 65 não é múltiplo de quatro, o número todo não o é também.

Dessa forma, pode-se escrever que:

"Um número é divisível por 4 quando o número formado por seus dois últimos algarismos da direita é divisível por 4."

Exemplos:

- 1964 é divisível por 4 porque 64, que é o número formado por seus dois últimos algarismos da direita, é divisível por 4.
- 873215 não é divisível por 4, pois 15 não é divisível por 4.

Divisibilidade por 5:

Olhando na tabela, com relação aos múltiplos de 5, os alunos observaram que haviam sido riscados os números da coluna do 5, menos o 5, e todos da coluna do 10.

Retomando a justificativa apresentada no critério de divisibilidade por 2, onde viu-se que $10 = 2 \times 5$, percebiam que todo número terminado em zero é múltiplo de 2 e múltiplo de 5 e que, como exemplo,

$$\begin{aligned} 4790 &= 479 \times 10 = \\ &= 479 \times (2 \times 5) = \\ &= (479 \times 2) \times 5 = \\ &= \quad m\,(5) \end{aligned}$$

Mas 4792 é divisível por 5? e 4795?, perguntei.

Os alunos mostraram

$$\begin{aligned} 4792 &= 4790 + 2 = \\ &= m\,(5) + 2 = \\ &= m\,(5) + \text{não é } m\,(5) = \\ &= \quad \text{não é } m\,(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4795 &= 4790 + 5 = \\ &= m\,(5) + 5 = \\ &= m\,(5) + m\,(5) = \\ &= \quad m\,(5) \end{aligned}$$

Desse modo, quem garante que um número é divisível por 5 é o último algarismo da direita do número:

- ✓ Se for igual a 0 ou 5, o número será um múltiplo de 5.
- ✓ Se for diferente de 0 ou 5, o número não será um múltiplo de 5.

Assim, pude escrever na lousa:

“Um número é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.”

<u>Divisibilidade por 6:</u>

Olhando na tabela, os alunos perceberam que, ao riscar os múltiplos de 6, estes já estavam riscados em amarelo, como múltiplos de dois, e em verde, como múltiplos de três. E justificaram dizendo que os múltiplos de 6 são pares e que a soma dos valores absolutos de seus algarismos é um número divisível por 3.

Como exemplo, foi deixado o número: 47616

Fazendo a divisão, verificaram que 47616 é m (6).

$$\begin{array}{l|l} 47616 & 6 \\ \cline{2-2} \;\;56 & 7936 \\ \;\;\;21 & \\ \;\;\;\;36 & \\ \;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Mas viram que, abreviadamente, usando regras conhecidas, 47616 é par, pois termina em 6 e que 4 + 7 + 6 + 1 + 6 = 24, que é divisível por 3. Então pude escrever que

“Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3.”

Divisibilidade por 7:

Olhando na tabela, os alunos não viam uma característica que os levasse a criar uma regra para a divisibilidade por 7.

Nesse caso, foi dito a eles que há regras criadas para se dizer quando um número é divisível por 7 mas que, por serem mais complexas e demoradas, sugere-se que, nesse caso, se faça a divisão usual.

Divisibilidade por 8:

Olhando na tabela, os alunos perceberam que todos os múltiplos de 8 estavam riscados. Disse que $1000 = 8 \times 125$ e que, então, todo número terminado em três zeros é um múltiplo de 8.

Consideramos o número 456112 e fizemos a decomposição

$$456112 = 456000 + 112 = m\,(8) + 112$$

e vendo que 112 é múltiplo de 8 pois:

$$\begin{array}{r|l} 112 & 8 \\ \cline{2-2} 32 & 14 \\ 0 & \end{array}$$

Então 456112 é múltiplo de 8, pois soma de múltiplos de 8 é múltiplo de 8.

Observei que é mais rápido fazer $112 \div 8$ do que $456112 \div 8$.

Divisibilidade por 9:

Para a divisibilidade por 9, chamei a atenção dos alunos para a regra válida para divisibilidade por 3, que se estendia, agora, para 9. Assim, escrevi:

"Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos é divisível por 9."

e, como exemplos, deixei:

- 2871 é divisível por 9, porque a soma: $2 + 8 + 7 + 1 = 18$, que é divisível por 9.
- 3712 não é divisível por 9, porque a soma: $3 + 7 + 1 + 2 = 13$, não é divisível por 9.

Divisibilidade por 10:

Olhando na tabela, um aluno chamou a atenção para o fato de que todos os números da coluna do 10 estavam riscados, pois os números terminados em zero eram múltiplos de 2 e de 5 e, portanto, do produto 10.

Então: "Um número é divisível por 10 quando termina em zero."

Para cumprir esse tópico pretendia-se utilizar cinco aulas, mas, na verdade, para o desenvolvimento do mesmo, foram usadas seis, da **13ª** até **18ª aulas**.

Foi deixada a seguinte:

<u>Tarefas Extraclasse:</u>

Dados os números 3465, 5648, 6120 e 8976, diga quais deles são divisíveis por 6, 5, 9 e 10.

Nas **19ª e 20ª aulas**, foi retomado o Problema 4 com o objetivo de fazer com que o aluno pudesse perceber que os números que sobraram sem riscar, na tabela, tinham apenas dois divisores e, posteriormente, construir os conceitos de número primo e número composto. Esse trabalho parece ter sido mais tranqüilo para os alunos, pois eles já sabiam encontrar os divisores de um número.

Para isso algumas perguntas foram feitas:

- Ao completarem a atividade, sobraram, na tabela, números sem serem riscados?
- O que esses números têm em comum? Tentem relacionar com o que já aprenderam anteriormente.
- Quais são os divisores dos números que sobraram sem riscar? Há alguma característica comum quanto aos divisores dos números não riscados?

Nesse momento foi preciso discutir novamente o significado de divisor e múltiplo de um número e, a partir daí, uma aluna do grupo 4 disse:

- Professora, então se o número 4 (riscado) é múltiplo de 2 e de 4, os números 2 e 4 são seus divisores?

Diante da afirmativa da professora ela completou:

- Então os números que não foram riscados não são múltiplos de nenhum número!

Perguntei-lhe:

– Quais são os divisores desse número riscado?, apontando para o 4.

Antes que ela respondesse, o grupo 4 disse:

– Do 4 são: 2, 4 e o 1.

Continuei:

– E do 7, não riscado?

Alguém do grupo 9 disse:

– Eu sei. Do 7 são: 7 e o 1, porque o 7 = 1 × 7, e não podemos escrever de outra maneira diferente.

Então, chamei a atenção daquela aluna, reforçando o que disse o grupo 9, e afirmei que, se 1 e 7 são divisões de 7, então 7 é múltiplo de 1 e de 7, porque múltiplo e divisor andam juntos.

Foi feito o mesmo trabalho, com outros números que não haviam sido riscados, e os alunos perceberam que todos os números não riscados tinham apenas dois divisores. Dessa forma, eu lhes disse que estas eram as diferenças dos números não riscados e os riscados: os números não riscados têm somente dois divisores, ele mesmo e a unidade; os números riscados têm: ele mesmo, a unidade e outros divisores diferentes desses.

Os números não riscados são chamados números primos. Os demais são chamados números compostos

Na lousa, eu formalizei os conceitos de número primo e número composto, escrevendo:

Número Primo é o número, diferente de 1, que possui somente dois divisores: o número 1 e ele mesmo.

Exemplos:

- 2 é primo, pois ele possui apenas dois divisores: 1 e 2.
- 4 não é primo, pois ele possui mais de dois divisores: 1, 2 e 4.

Observei que o número 1 não é número primo, porque ele tem apenas um divisor que é ele mesmo. Disse também que o único número par que é primo é o 2.

Os números que têm mais de dois divisores são chamados **números compostos**.

Exemplo:

- 12 tem mais de dois divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Então, 12 é um número composto.

O nome números primos chamou a atenção dos alunos principalmente pela palavra primo. Eles chegaram a brincar com essa nomenclatura e, achando-a interessante, perguntaram se havia, também, números irmãos.

Respondendo a essa pergunta disse que primo, nesse contexto, não significa parentesco familiar, mas a condição de ser o primeiro número de uma seqüência em que, a partir do 1º, todos os demais são seus múltiplos. Ainda relacionando com outro idioma, falei que, em inglês, fala-se ***prime number***, traduzido por nós como número primo e que não significa ***cousin number***, onde ***cousin*** é primo, parente. Em inglês, ***prime*** significa o primeiro.

Ainda falando sobre o assunto, no livro de Lellis e Imenes (1999, p. 32), está escrito que "primo vem da língua latina e significa primeiro. Os números primos são os primeiros, no sentido em que eles geram todos os demais números naturais, através da multiplicação."

Tarefas foram deixadas, para casa, com o objetivo de fixação desses conceitos. Algumas delas, mesmo sabendo que os alunos não tinham ainda recursos para resolvê-las, foram deixadas, como desafio, preparando seu espírito para um novo trabalho em sala de aula.

Tarefa Extraclasse:

Verifique se os seguintes números são primos ou compostos. Justifique sua resposta.

- ✓ 15
- ✓ 27
- ✓ 36
- ✓ 31
- ✓ 197

Nas **21ª e 22ª aulas**, recolheu-se e foi discutida a tarefa deixada na aula anterior, desde que o objetivo era o de fazer com que os alunos perguntassem sobre a existência de meios matemáticos mais simples para reconhecer quando um número é primo ou composto.

Ao iniciar a exploração das tarefas vi que, para responder aos 4 primeiros números dados na tarefa: 15, 27, 36, 31, os alunos puderam recorrer à tabela construída no Crivo de Eratóstenes. Foi fácil dizer que 15, 27 e 36 são números compostos, pois se apresentavam riscados. Já, o número 31 não estava riscado e, portanto, é número primo.

Disse aos alunos que outra forma, mais elaborada, de fazer essas identificações, seria usar o processo da decomposição dos números dados em seus fatores. Assim,

$15 = 1 \times 3 \times 5$, d (15) = 1, 3, 5, 15.

$27 = 1 \times 3 \times 3 \times 3$, d (27) = 1, 3, 9, 27.

$36 = 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$, d (36) = 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Descobrir os divisores de 36 mostrou-se mais difícil para os grupos, pois eles precisavam saber combinar corretamente os produtos dos fatores primos. Levantar todas as possibilidades foi bastante difícil para muitos deles.

Como esses três números, 15, 27 e 36, têm mais de dois divisores, eles são ditos números compostos.

Recorrendo à tabela de Eratóstenes, puderam ver que o número 31 só pôde ser decomposto em 1×31. Então o número 31 tem só dois divisores e, por isso, é dito um número primo.

Nenhum dos alunos conseguiu verificar se o número 197 era primo ou não.

Com o número 197, o problema cresceu. 197 não fazia parte da tabela e, para eles, não era fácil chegar a uma decomposição desse número.

$197 = 1 \times 197 = 1 \times ?$

Como 197 é ímpar, não é divisível por 2.

Logo 2 não é divisor desse número.

Como $1 + 9 + 7 = 17$ e 17 não é divisível por 3, então 197 não é divisível por 3.

Não é divisível por 4 pois, caso contrário, seria divisível por 2.

Não termina em 0 ou 5, portanto não é divisível por 5.

Como não é divisível por 2 e por 3, não é divisível por 6.

Não é divisível por 7, pois:

$$\begin{array}{r|l} 197 & 7 \\ \cline{2-2} 57 & 28 \\ 1 & \end{array}$$

Não é divisível por 8, senão seria divisível por 2.

Não é divisível por 9, senão seria divisível por 3.

Não é divisível por 10, senão terminaria em zero.

Não é divisível por 11, pois:

197	11
87	17
10	

Não é divisível por 12, senão seria divisível por 3 e por 4.

Não é divisível por 13, pois:

197	13
67	15
2	

A partir daí, pode-se notar que deveriam dividir apenas pela seqüência dos números primos pois, caso contrário, concluiriam que já haviam trabalhado com alguns de seus fatores.

Seguindo essa seqüência foram feitas as seguintes divisões:

197	17	197	19	197	23	197	29
27	11	07	10	13	8	23	6
10		7					
197	31	197	37	197	41	197	43
11	6	12	5	33	4	25	4
197	47	197	51	197	53	197	59
09	4	44	3	38	3	20	3
197	61	197	67	197	71	197	73
14	3	63	2	55	2	51	2
197	79	197	83	197	89	197	97
39	2	31	2	19	2	03	2
197	101	197	103	197	107	197	109
96	1	94	1	90	1	88	1

$\begin{array}{r|l} 197 & 113 \\ \cline{2-2} 84 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 119 \\ \cline{2-2} 78 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 127 \\ \cline{2-2} 70 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 131 \\ \cline{2-2} 66 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 197 & 133 \\ \cline{2-2} 64 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 137 \\ \cline{2-2} 60 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 139 \\ \cline{2-2} 58 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 143 \\ \cline{2-2} 54 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 197 & 149 \\ \cline{2-2} 48 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 151 \\ \cline{2-2} 46 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 157 \\ \cline{2-2} 40 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 161 \\ \cline{2-2} 36 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 197 & 163 \\ \cline{2-2} 34 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 167 \\ \cline{2-2} 30 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 173 \\ \cline{2-2} 24 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 179 \\ \cline{2-2} 18 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 197 & 181 \\ \cline{2-2} 16 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 187 \\ \cline{2-2} 10 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 191 \\ \cline{2-2} 06 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 197 & 193 \\ \cline{2-2} 04 & 1 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 197 & 197 \\ \cline{2-2} 00 & 1 \end{array}$

Ao fazer todas essa operações, concluiu-se que os únicos divisores de 197 são 1 e 197, ou seja, 197 é um número primo.

Chamamos a atenção deles de que não precisariam ter sido feitas todas essas operações pois, a partir de 197 ÷ 17, que resultou o quociente 11, todas as outras operações tiveram como quocientes números que já haviam sido trabalhados anteriormente. Por exemplo, quando foi feito 197 ÷ 19, obteve-se como quociente o número 10, que já havia sido descartado por não ser divisor de 197. Por isso, poder-se-ia ter parado as divisões com o número 197 pelos números primos até a obtenção de um quociente menor ou igual ao divisor.

Uma regra para o reconhecimento de um número primo pode, então, ser enunciada.

Reconhecimento de um número primo:

Problema: Como há infinitos números e infinitos números primos, dado um número qualquer, como saber se ele é primo ou não?

Para saber se um determinado número é primo, devemos dividi-lo sucessivamente pela seqüência dos números primos (2, 3, 5, 7, ...).

Se ocorrer, numa dessas divisões:

✓ um resto zero, esse número é múltiplo desse divisor e, portanto, não é primo;

✓ nenhum resto zero, o número é primo.

Neste ***último*** caso, só é preciso fazer as divisões desse número pelos primos até obter um quociente menor ou igual ao divisor.

Voltando ao problema: o número 197 é primo ou composto?

Como responder a essa questão de uma maneira mais rápida?

- 197 é divisível por 1, pois 1 é divisor de todos os números.
- 197 não é divisível por 2, porque não é par.
- 197 não é divisível por 3, porque a soma dos seus dígitos, $1 + 9 + 7 = 17$, não é divisível por 3.
- 197 não é divisível por 5, porque não termina em 0 ou 5.
- $197 \div 7 = 28$ e sobra 1; o quociente (28) é maior que o divisor (7).
- $197 \div 11 = 17$ e sobra 10; o quociente (17) é maior que o divisor (11).
- $197 \div 13 = 15$ e sobra 2; o quociente (15) é maior que o divisor (13).
- $197 \div 17 = 11$ e sobra 10; o quociente (11) é menor que o divisor (17).

Como não se encontrou nenhum resto igual a 0 até se obter um quociente menor que o divisor, concluímos que 197 é um número primo.

No Projeto, para o tópico Números Primos e Compostos, haviam sido planejadas três aulas mas, para a aplicação, foram necessárias quatro.

Fatoração Completa de um número

Na **23ª aula**, retomei o conceito visto anteriormente de decomposição de um número em seus fatores e, acrescentando o conceito de números primos, formalizei o tópico fatoração completa de um número.

Fatores de um número:

A palavra fator, está associada à idéia de multiplicação.

Assim, por exemplo:

✓ em $5 \times 4 = 20$, temos que 5 e 4 são fatores ou divisores de 20.

✓ Em $2 \times 3 \times 5 = 30$, temos que 2, 3 e 5 são fatores ou divisores de 30.

Em ambos os casos, diz-se que os números 20 e 30 foram fatorados. Mas o número 30 foi fatorado completamente, porque em sua decomposição foram usados somente seus fatores primos.

Recorrendo à tabela da questão 2, deixada na **10ª aula**, lembrei aos alunos que há números que só têm dois fatores, há números com mais de dois fatores e há até um número que só tem um fator. Assim, escrevi:

- ✓ O número 1 tem somente um fator: ele mesmo;
- ✓ Todo número primo tem exatamente dois fatores: o número 1 e ele mesmo;
- ✓ Todo número composto tem mais de dois divisores.

Exemplos:

$1 = 1$

$7 = 1 \times 7 \longrightarrow$ 7 é número primo

$60 = 2 \times 30 = 2 \times 2 \times 15 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5 \longrightarrow$ 60 é número composto

Podemos afirmar que:

"Todo número natural maior do que 1 admite uma única decomposição em fatores primos. Essa decomposição é chamada fatoração completa do número."

Foram deixadas algumas tarefas extraclasse com o objetivo de, na aula seguinte, introduzir a regra prática para a fatoração de um número.

Tarefa Extraclasse: Fatore os seguintes números:

- ✓ 120
- ✓ 27
- ✓ 15
- ✓ 18
- ✓ 630

Nas **24ª e 25ª aulas**, as tarefas foram recolhidas e discutidas na lousa.

Até esse momento, os alunos sabiam fatorar apenas na linha horizontal.

Pôde-se encontrar entre as tarefas entregues coisas assim:

$27 = 1 \times 27 = 1 \times 3 \times 9 = 1 \times 3 \times 3 \times 3$

$15 = 1 \times 15 = 1 \times 3 \times 5$

$18 = 1 \times 18 = 1 \times 2 \times 9 = 1 \times 2 \times 3 \times 3$

onde puderam ver na tabela esses resultados.

Um pouco mais difícil de encontrar foi o caso de 120, que foi além da tabela.

$120 = 1 \times 120 = 1 \times 2 \times 60 = 1 \times 2 \times 2 \times 30 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

Os alunos se assustaram mesmo e não conseguiram chegar à decomposição de 630, alegando que 630 era "muito grande". Aproveitando o que haviam feito nas questões anteriores, mostrei que eles poderiam fatorar 630 fazendo:

$630 = 1 \times 630 = 1 \times 2 \times 315 = 1 \times 2 \times 3 \times 105 = 1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 35 =$

é par

a soma $3 + 1 + 5 = 9$ é m (3)

é m (5)

a soma $1 + 5 = 6$ é m (3)

$= 1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Então,

$630 = 1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

Apresentei, como regra prática para a fatoração, usualmente chamada de **Dispositivo prático para a fatoração completa de um número**, o seguinte

- ✓ Conhecer a seqüência dos números primos a partir de 2: {2, 3, 5, 7, ...}
- ✓ Escrever o número, no caso 630; colocar uma barra vertical à sua direita; dividir 630 pelo primeiro número primo que seja seu divisor; obter o quociente que, por sua vez, será dividido pelo próximo número primo que seja seu divisor; repetindo-se essa operação até chegar ao quociente 1.
- ✓ Na prática, foi feito assim:

		divisores primos	
	630	2	$\longrightarrow$ é par
quociente 1	315	3	$\longrightarrow$ $3 + 1 + 5 = 9$ é m (3)
quociente 2	105	3	$\longrightarrow$ $1 + 0 + 5 = 6$ é m (3)
quociente 3	35	5	$\longrightarrow$ 35 é m (5), termina em 5
quociente 4	7	7	$\longrightarrow$ 7 é primo
quociente 5	1		

Então, $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ ou seja $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Disse que não seria preciso fazer as divisões dos números por seus fatores primos na ordem seqüencial deles, pois a ordem dos fatores não altera o produto, mas, utilizar essa ordem, em geral, facilita o trabalho.

Os alunos perceberam que fazer a decomposição dos números em fatores primos na vertical tornou essa tarefa mais simples.

No Projeto, para o tópico fatoração completa de um número, foram propostas três aulas e para a aplicação foram suficientes as três.

Algoritmo para a determinação de todos os divisores de um número

Nas **26ª e 27ª aulas**, foi introduzido o

Problema 5: Determine todos os divisores de 630.

O objetivo deste problema era o de levar os alunos a encontrar um modo simples, apoiado na fatoração, que apresentasse todos os divisores de um número dado.

Nesse dia, nosso trabalho ficou um pouco prejudicado devido à necessidade de eu ter de atender duas classes ao mesmo tempo, devido a uma excursão com alunos e professores de outras classes. Nessa escola é costume que, quando um professor sai da escola para acompanhar uma excursão, suas aulas fiquem sob a responsabilidade do professor que está na sala mais próxima à sua.

Para ministrar aulas como as que foram propostas em meu trabalho, não é possível o professor se ausentar da sala, principalmente pela necessidade de se fazer observações continuadas. Nesse dia, ao cuidar de duas salas, o trabalho ficou bastante prejudicado e acabou sendo apenas apresentada a regra prática para se encontrar todos os divisores de um número.

Determinação dos divisores de um número:

Dado o número 630, encontrar todos os seus divisores.

Como os alunos já haviam feito a fatoração completa de 630, quanto a seus fatores primos, na horizontal: $630 = 1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ e, como também haviam encontrado alguns de seus fatores compostos, pedi a eles que, a partir da fatoração completa de 630, na horizontal, buscassem todos os fatores desse número.

Assim, ao fazer

$630 = 1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

combinando esses fatores em produtos 1 a 1, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4 e 5 a 5, encontram-se todos os seus divisores.

1 é divisor de todos os números

$1 \times 2 = 2$
$1 \times 3 = 3$
$1 \times 5 = 5$
$1 \times 7 = 7$

$2 \times 3 = 6$
$2 \times 5 = 10$
$2 \times 7 = 14$
$3 \times 3 = 9$
$3 \times 5 = 15$
$3 \times 7 = 21$

$2 \times 3 \times 3 = 18$
$2 \times 3 \times 5 = 30$
$2 \times 3 \times 7 = 42$
$2 \times 5 \times 7 = 70$
$3 \times 3 \times 5 = 45$
$3 \times 3 \times 7 = 63$
$3 \times 5 \times 7 = 105$

$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$
$2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$
$2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$
$3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$

Reconhecendo-se que não é difícil perderem-se alguns desses divisores na busca dessa maneira, chamei a atenção dos alunos de que há uma regra que praticamente elimina esses erros. Isso acontece quando se faz a fatoração na vertical e lembrei que 1 é divisor de todos os números.

- ✓ decompõe-se o número 630 em fatores primos; faz-se uma linha na horizontal acima deles; traça-se uma linha vertical à sua direita; e coloca-se à direita e acima dela o fator 1.

		1
630	2	
315	3	
105	3	
35	5	
7	7	
1		

- ✓ traçam-se linhas horizontais separando os fatores primos; e multiplica-se cada fator primo por todos os números que estão à direita e acima dele, obtendo-se todos os fatores (primos e compostos), sem repetir os que já foram encontrados.

		1
630	2	2
315	3	3, 6
105	3	9, 18
35	5	5, 10, 15, 30, 45, 90
7	7	7, 14, 21, 42, 63, 126, 35, 70, 105, 210, 315, 630
1		

Vê-se então que, ordenadamente, o conjunto dos divisores de 630 é:

D (630) = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630}.

Números Primos entre si

Quando dois ou mais números admitem somente o 1 como divisor comum, eles são chamados primos entre si.

Exemplos:

- 12 e 7, cujo único divisor comum é o 1, são primos entre si;

		1
12	2	2
6	2	4
3	3	3, 6, 12
1		

		1
7	7	7
1		

D (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

D (7) = {1, 7}

- 5, 10 e 14, também são primos entre si, pois o único divisor, que é divisor de todos ao mesmo tempo, é o 1.

		1
5	5	5
1		

		1
10	2	2
5	5	5, 10
1		

		1
14	2	2
7	7	7, 14
1		

Erro comum: pensar que para serem primos entre si os números devam, necessariamente, ser primos é errado. No exemplo acima temos o número 5 que é primo e 10 e 14 que são compostos. No entanto, são primos entre si, pois o único divisor comum aos três é o 1.

Na **28ª aula**, foram propostas algumas atividades individuais, com o objetivo de fixação de conceitos e práticas operatórias trabalhados.

Atividades Extras:

1) Coloque V para verdadeiro e F para falso, nas seguintes afirmações:
   - ✓ 2 é divisor de 7 ( )
   - ✓ 3 é divisor de 12 ( )
   - ✓ 15 é múltiplo de 2 ( )
   - ✓ 21 é múltiplo de 8 ( )
   - ✓ 7 é um número primo ( )
2) Quais são os divisores de 18? Justifique sua resposta.
3) Dê 5 múltiplos de 3. Justifique sua resposta.
4) O que são números primos?
5) Quais são os 10 primeiros números primos?
6) Decomponha o número 100 em um produto de:
   - ✓ Dois fatores;
   - ✓ Três fatores;
   - ✓ Quatro fatores;
   - ✓ Fatores primos.

Os alunos puderam resolver essas questões sem maiores problemas, porém o tempo não foi suficiente e foi preciso continuar nas **29ª e 30ª aulas**.

Esta aplicação serviu para avaliar o progresso dos alunos e, também, para medir o sucesso ou não da abordagem de ensino assumida e o papel do professor. Através dela notei que a maioria dos alunos era capaz de fazer esse tipo de trabalho, encontrar os divisores por sua decomposição.

Após essas atividades, ocorreu uma semana de interrupção nas atividades escolares. Houve uma excursão feita pela classe pesquisada para Holambra e houve a participação no campeonato interclasses. Ambos os eventos não constavam do calendário escolar elaborado no início do ano. O campeonato funcionou da seguinte forma: na hora do jogo saiam apenas as classes que iriam jogar, 2 classes por vez, e os alunos que não fossem jogar fariam a vez da torcida e a classe que vencesse disputaria com outra em outro horário. Nas duas últimas aulas, após o recreio, todas as salas iam para a quadra, pois era o momento da participação de todos. Com isso, muitas aulas ficaram prejudicadas.

Não se pode deixar de considerar que essas atividades prejudicaram o trabalho proposto para esta pesquisa mas, deve-se reconhecer também que elas proporcionaram aos alunos boas oportunidades de socialização.

Para o tópico Algoritmo para a determinação de todos os divisores de um número, haviam sido propostas quatro aulas mas, para sua aplicação, foram necessárias cinco.

Máximo divisor comum (m.d.c.) de dois ou mais números

Nas **31ª e 32ª aulas**, com o objetivo de utilizar o conceito de divisores comuns entre números para, posteriormente, construir o conceito de máximo divisor comum entre dois ou mais números, foi apresentado o

Problema 6: Na folha I (Anexo 1) estão representados diversos pisos e uma lajota para decorá-los. A pretensão do pedreiro é assentar as lajotas nos pisos, recobrindo-os totalmente sem partir nenhuma delas. Verifique em que casos isso é possível. E por quê?

Nesse problema, os alunos deveriam verificar em que pisos a lajota poderia ser utilizada, de modo a cobri-lo totalmente e sem que nenhuma delas fosse partida. Alguns questionamentos foram levantados pela professora: - Será que é preciso desenhar para encontrar os pisos que serão inteiramente cobertos sem que as lajotas sejam partidas?

Foi dado tempo aos alunos para pensar e poder explorar o problema. Depois, como numa primeira avaliação do trabalho, percebi que havia alunos que realmente estavam desenhando, enquanto outros contavam as quadrículas e procuravam alguma relação entre o número de quadrículas dos pisos e o das lajotas.

Para esses grupos, perguntei: - Há alguma relação entre a medida do lado da lajota e a medida do lado do piso?

Nesse momento, parece que aqueles que estavam desenhando pararam para contar as quadrículas e começaram a analisar as medidas, tanto da lajota quanto do piso, horizontais e verticais. Eles ainda não estavam alertas a uma possível relação matemática entre as medidas da lajota e a dos pisos, embora estivessem num caminho que os levaria à resolução do problema dado.

O que se esperava é que depois de conhecer múltiplos e divisores, pudessem perceber que as duas dimensões, do piso, devessem ser múltiplas de 3 e, assim, haveria um número inteiro de lajotas cobrindo os pisos.

Com esse raciocínio, poderiam facilmente dizer que os pisos 1, 3, 4 seriam cobertos completamente sem que se partisse nenhuma delas.

Fazendo, então, outras suposições, disse: - Suponha que as medidas das lajotas, comprimento e largura, sejam dadas em metros. Será que se poderia utilizar essa lajota para cobrir um piso de 24m por 18m? E de 36m por 25m? Por quê? Justifique.

Muitos responderam a essa questão, usando o argumento anterior, dizendo que contavam as quadrículas da lajota 3×3 e procuravam ver se poderiam fazer grupos de 3 em 24 e de 3 em 18. Como haviam praticado, com a professora do ciclo anterior, nas tabuadas.

Então, perguntei: - O que significa fazer grupos de 3 em 24? E grupos de 3 em 18?

Nesse momento, alguns alunos mais espertos prontamente responderam: - É só ver se o número 24 está na tabuada do 3 e se o número 18 também está na tabuada do 3.

Durante a aplicação da atividade, pôde-se notar que, apesar de eles estarem reunidos com seus respectivos companheiros de grupo, alguns alunos ficavam atentos às colocações feitas por grupos vizinhos para poder absorver suas idéias. É como se eles estivessem interessados e, ao ouvirem novas idéias que satisfizessem suas angústias, pudessem utilizá-las.

Observo que nenhum dos alunos se questionou sobre as dimensões dadas aos pisos e às lajotas. Reconheço que deixei de aproveitar a oportunidade de socializar sobre esse tipo de trabalho, de conversar sobre construção de pisos, dilatação das lajotas e tamanho usual de lajotas num piso.

Os alunos entregaram a atividade, porém não foi possível acabar o trabalho naquele dia.

Na **33ª aula**, retomou-se o problema 6, colocando, na lousa, as resoluções de alguns grupos.

O grupo 2 apresentou a resolução abaixo, desenhando as lajotas nos pisos 1, 3 e 4. Deixou os outros pisos em branco querendo, possivelmente, dizer que, nesses, para cobri-los, seria preciso quebrar lajotas.

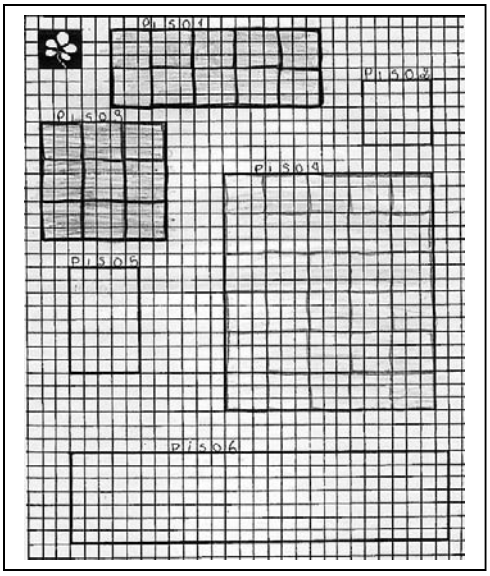


Figura 4.1.7 – Grupo 2 (Problema 6)

Justificou essas atitudes com as seguintes colocações:

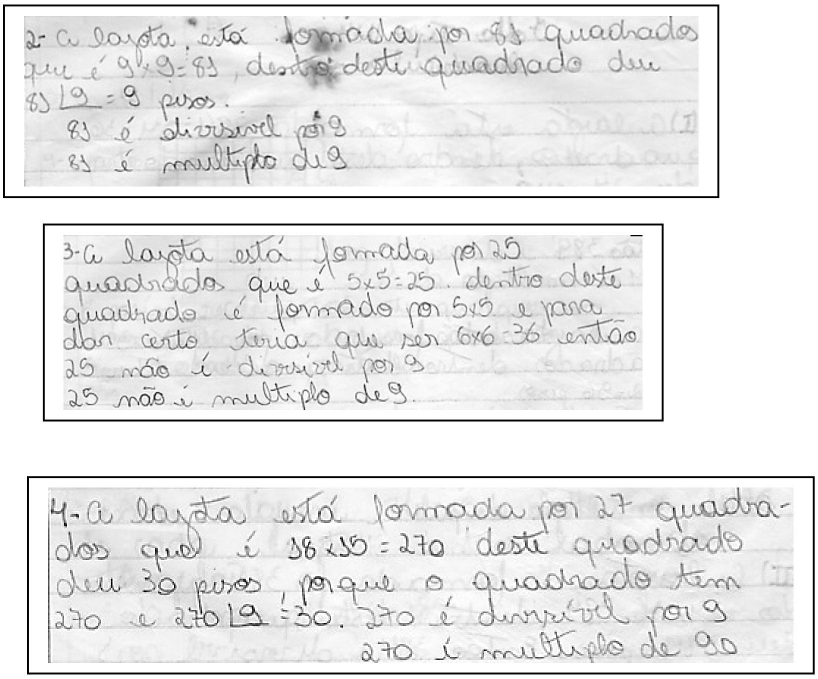
1- R: É possível assentar 10 Pisos No 1º retângulo Eu medi o piso
que está da amostra e calculei para ver se cabe dentro do
retângulo. No segundo quadrado não cabe os pisos porque
o quadrado é pequeno. No 3º quadrado cabe 9 pisos. No
4º quadrado cabe 30 pisos sem quebrar. No 5º quadrado
não cabe porque o quadrado é muito estreito. No 6º qua-
drado não cabe porque é muito estreito.
No 1º retângulo cabe 10 Pisos porque o número de
quadradinhos combinou com a medida do piso por
isso que cabe 10 pisos dentro do retângulo.

Figura 4.1.8 – Grupo 2 (Problema 6)

O que se nota aqui é a troca da palavra lajota por piso. Isso poder ter acontecido porque usualmente se fala mais em comprar pisos do que comprar lajotas. Também, nota-se que o grupo não sabe diferenciar quadrados de retângulos.

O grupo 4 repetiu o trabalho do grupo 2, desenhando as lajotas nos pisos dados. Trocou também as palavras piso e lajota. Justificou dizendo que

1- a lajota está formada por 90 quadradi-
nhos que é 15x6=90, dentro deste quadra-
do deu 10 pisos 90 $\underline{|9}$ = 10 por isso que
o quadrado tem 10 pisos.
90 é divisível por 9
90 é múltiplo de 9



2- a lajota está formada por 81 quadrados que é 9x9=81, dentro deste quadrado deu 81 |9 = 9 pisos.
81 é divisível por 9
81 é multiplo de 9

3- a lajota está formada por 25 quadrados que é 5x5=25. dentro deste quadrado é formado por 5x5 e para dar certo teria que ser 6x6=36 então 25 não é divisível por 9
25 não é multiplo de 9.

4- a lajota está formada por 27 quadrados que é 18x15=270 deste quadrado deu 30 pisos, porque o quadrado tem 270 e 270 |9 =30. 270 é divisível por 9
270 é multiplo de 90

Figura 4.1.9 – Grupo 4 (Problema 6)

Esse grupo soube usar o conceito de múltiplo e de ser divisível ao verificar quantas quadrículas havia em cada piso e fez uma relação entre a quantidade de quadrículas da lajota e a quantidade de quadrículas dos pisos. Indo além do pedido no problema, mostrou que para o o piso 2 uma forma de tornar possível, o pedido, era mudar as dimensões do piso.

Como nem sempre, para os alunos, houve clareza e compreensão nas palavras utilizadas na resolução deste problema, procurei relacionar as dimensões dos pisos, comprimento e largura, com as dimensões da lajota, 3×3, e, para trabalhar com situações de seu cotidiano, usei como referência o piso da sala de aula.

Escrevi na lousa:

D (15) = {1, 3, 5, 15}   e   D (6) = {1, 2, 3, 6}

e perguntei quais eram os divisores comuns a 15 e 6, chegando a:

D_C (15, 6) = {1, 3}

Chamei a atenção dos alunos para o fato de que 15 e 6 são divisíveis por 3 e que, portanto, as lajotas 3×3 cobriam inteiramente os pisos 1, 3 e 4. Já, para os pisos 2, 5 e 6, não acontecia o mesmo pois, 5, 8 e 7 não são divisíveis por 3.

Concluindo disse que, para achar o **divisor comum de dois ou mais números**, usando o algoritmo de determinação de todos os divisores desses números, é preciso lembrar que um número é chamado divisor comum de dois números, quando ele for divisor de ambos.

Exemplo: Dê os divisores comuns de 9 e 27.

		1
9	3	3
3	3	9
1		

		1
27	3	3
9	3	9
3	3	27
	1	

D(9) = {1, 3, 9}

D(27) = {1, 3, 9, 27}

D_C (9, 27) = {1, 3, 9}

Nas **34ª e 35ª aulas**, foi proposto, para os grupos, o

Problema 7: Na folha II (Anexo 2), sabendo que os quatro retângulos representam um mesmo piso e que o lado de cada quadrícula representa 1 m:

a) Calcule as medidas dos lados dos retângulos.

b) Invente, para cada retângulo, lajotas quadradas para ladrilhá-los, sem partir nenhuma delas. Cada retângulo deverá conter um único tipo de lajota.

c) É possível recobrir, totalmente, qualquer um desses retângulos com placas quadradas de 5 m de lado sem parti-las?

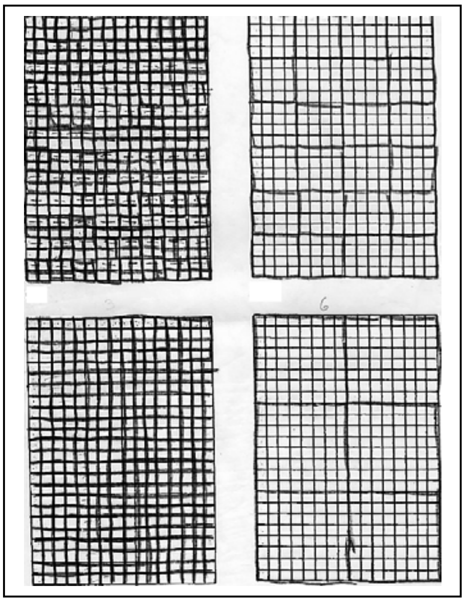
d) Organize suas descobertas, na seguinte tabela:

Retângulo	Lado da lajota (m)	Total de placas
I		
II		
III		
IV		

onde estavam representados quatro retângulos (pisos) e os alunos deveriam criar lajotas quadradas que pudessem ser utilizadas para ladrilhá-los, sem partir nenhuma delas. E, para cada retângulo, deveriam criar apenas um tipo de lajota. O objetivo, para essa atividade, era o de utilizar o conteúdo visto na aula anterior e construir o conceito de máximo divisor comum.

De modo geral, eles procuraram utilizar as técnicas usadas na aula anterior, ou seja verificar que números seriam divisores tanto de 24 quanto de 16.

Assim, como outros grupos, o grupo 2 apresentou a seguinte solução:



2-R: vertical tem 16m. horizontal 24m. Todos os retângulos são iguais. No 1º Retângulo coube 96 Pisos. No 2º retângulo coube 24 Pisos. No 3º Retângulo tem 393 Pisos. No 4º retângulo tem 6 retângulo.
Nós conseguimos fazer todas as atividades medindo e contando os quadrados.

Figura 4.1.10 – Grupo 2 (Problema 7)

Esse grupo apesar de ter trocado horizontal por vertical, afirmou, depois, que conseguiu realizar os quatro itens dessa atividade, medindo e contando os quadrados. Embora tenham trocado as dimensões horizontal e vertical, criaram, para o retângulo R_1, lajotas 2×2 e observaram que as 384 quadrículas ($16 \times 24 = 384$) eram cobertas por 96 lajotas desse tipo, contando. Para o segundo retângulo, cobriram as 384 quadrículas com 24 lajotas 4×4. Para o terceiro retângulo usaram 384 (apesar de terem escrito 393 (sic)) lajotas 1×1. O quarto retângulo foi coberto por 6 lajotas 8×8.

Ao organizar suas criações fizeram:

Retângulo	Lado da lajota (m)	Total de placas
I	2 por 2	1
II	4 por 4	2
III	1 por 1	3
IV	8 por 8	4

Figura 4.1.11 – Grupo 2 (Problema 7)

Nota-se que esse grupo não percebeu que lajotas e placas representavam a mesma coisa e, apesar de terem respondido que não, no item que perguntava se era possível recobrir os pisos com placas quadradas 5×5, não justificaram sua resposta, embora fosse fácil dizer que 5 não é divisor de 16 nem de 24.

Durante a plenária perguntei: - Existe alguma relação entre os lados de cada lajota e os lados do retângulo? Quanto mede o lado da maior lajota possível? É possível recobrir a maior lajota com as menores, sem partir nenhuma delas? Por quê?

Vários alunos disseram que os lados das lajotas deviam ser divisores dos lados do retângulo. Disseram, também, que o lado da maior lajota mede 8 metros.

Pôde-se observar que alguns grupos relacionavam as soluções obtidas, utilizando conceitos trabalhados anteriormente. Alguns grupos conseguiram perceber que as medidas possíveis para as dimensões das lajotas eram as soluções encontradas para o problema, ou seja, os divisores comuns às dimensões do piso. Mais uma vez foi discutido o significado da palavra comum concluindo-se que ser comum é pertencer a dois ou a mais de dois.

A partir desta atividade foram feitos alguns questionamentos sobre a maior lajota possível para o retângulo dado.

Lembrei que se um número é divisível por outro, ele também é divisível pelos seus submúltiplos, ou seja, por seus divisores menores.

No caso, se 8 é divisor de 16 e 24 então 4 é divisor de 16 e 24, ainda 2 é divisor de 16 e 24 e, finalizando, 1 é divisor de 16 e 24. Portanto, é possível recobrir a maior lajota (8×8) com lajotas 4×4, 2×2 e 1×1.

Então, construindo o conceito de máximo divisor comum, escrevi na lousa:

Máximo Divisor Comum:

Vimos no problema 6, olhando nos desenhos, que os lados de cada lajota, para atenderem o problema, são divisores comuns dos lados do retângulo que é o piso. Assim:

$D(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}$

$D(24) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

e

$D_C\,(16, 24) = \{1, 2, 4, 8\}$

e o maior divisor comum de 16 e 24 é o 8.

Desta forma, a medida do lado da maior lajota quadrada possível é 8 m, pois 8 é o maior dos divisores comuns a 16 e 24, isto é, m.d.c. (16,24) = 8.

Este procedimento de se encontrar o m.d.c. de dois ou mais números está **apoiado na definição do m.d.c.**, que formalizando, coloquei na lousa:

<u>Definição</u>: O **máximo divisor comum (m.d.c.)** de dois ou mais números naturais não nulos é o maior número que é divisor de todos esses números.

<u>Definição</u>: Quando dois ou mais números naturais apresentam o máximo divisor comum igual a 1, esses números são chamados números primos entre si.

Para a aula seguinte foram deixadas uma tarefa de fixação e outra com o objetivo de se introduzir o procedimento do cálculo do m.d.c. de dois ou mais números, a partir da definição.

<u>Tarefas Extraclasse</u>:

1) Na folha III (Anexo 3), circule o que é pedido em cada item:
2) Calcular o m.d.c.(80, 112).

Nas **36ª e 37ª aulas**, foram recolhidas e discutidas, na lousa, as tarefas deixadas na aula anterior. O objetivo era o de que os alunos fixassem os conceitos trabalhados anteriormente e que buscassem, se possível, meios matemáticos que facilitassem o cálculo do máximo divisor comum de dois ou mais números.

Com relação à tarefa 1, os alunos não apresentaram maiores problemas, pois eles tinham apenas que aplicar o que já haviam trabalhado.

Quanto à tarefa 2, nenhum dos alunos conseguiu desenvolvê-la, pois diziam que os números eram muito ‘grandes’.

Quando deixei essa tarefa, pretendia, que os alunos trabalhassem, apoiados na definição, de máximo divisor comum, construída a partir do problema 6, e usando o algoritmo da determinação de todos os divisores dos números considerados.

Foi preciso uma forte intervenção de minha parte para chegar ao m.d.c. procurado.

Pedi para:

- ✓ Fatorar completamente o número 80 e achar todos os seus divisores;

		1
80	2	2
40	2	4
20	2	8
10	2	16
5	5	5, 10, 20, 40, 80
1		

$\therefore$ D (80) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80}

- ✓ Fatorar completamente o número 112 e achar todos os seus divisores;

		1
112	2	2
56	2	4
28	2	8
14	2	16
7	7	7, 14, 28, 56, 112
1		

$\therefore$ D (112) = {1, 2, 4, 7, 8, 14, 16, 28, 56, 112}

- ✓ Achar os divisores comuns de 80 e 112;

D_C (80, 112) = {1, 2, 4, 8, 16}

- ✓ Apresentar o maior desse divisor comum;

$\therefore$ m.d.c. (80, 112) = 16

Outra maneira de mostrar aos alunos como encontrar o máximo divisor comum de 80 e 112, utilizando a fatoração, foi a seguinte:

- ✓ Fatorar, completamente, 80 e 112;

80	2	112	2
40	2	56	2
20	2	28	2
10	2	14	2
5	5	7	7
1		1	

- ✓ Escrever 80 e 112 em sua decomposição em fatores primos;

  $80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5$

  $112 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 2^4 \times 7$

- ✓ Buscar, nos dois números fatorados, tudo o que há de comum entre esses fatores primos: 2, 2, 2, 2. O máximo divisor comum desses dois números é encontrado multiplicando-se todos esses fatores comuns a ambos. Assim,

  mdc (80, 112) $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16$

Foi ainda, dito aos alunos que se pode escrever:

$80 = 2^4 \times 5$

$112 = 2^4 \times 7$

Assim, m.d.c. (80, 112) $= 2^4 = 16$

A **Regra das divisões sucessivas para o cálculo do máximo divisor comum, conhecida como o Algoritmo de Euclides**, é outro caminho para se chegar ao m.d.c. de dois ou mais números. Ela se apresenta assim:

	1	2	2	quocientes
112	80	32	16	divisores
32	16	0		restos

- ➢ Divide-se o maior número pelo menor:

$$\begin{array}{r|l} 112 & 80 \\ \hline 32 & 1 \end{array}$$

- ➢ Se o resto não for zero, divide-se, sucessivamente, o divisor pelo resto da divisão, até obter resto zero.

$$\begin{array}{r|l} 80 & 32 \\ \hline 16 & 2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{r|l} 32 & 16 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

- ➢ O m.d.c. é o divisor da última divisão efetuada:

  m.d.c. (80, 112) = 16

No Projeto, para o tópico máximo divisor comum entre dois ou mais números, haviam sido propostas quatro aulas, mas na aplicação foram necessárias sete.

Mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre dois ou mais números

Na **38ª aula**, ao adentrar a sala de aula levei um susto, pois havia apenas alguns alunos. Como já é costume, nessa escola, os alunos que têm média para a aprovação são liberados das aulas em meados de novembro, ficando apenas os que estiverem em recuperação. No dia anterior, o diretor havia liberado os alunos que “tinham nota”. Ainda assim, resolvi continuar meu trabalho.

Foi apresentado o

Problema 8: No ponto de ônibus passa um ônibus para Floridiana de 15 em 15 minutos e um ônibus para o Jardim São Paulo de 10 em 10 minutos. Se os dois ônibus passaram juntos às 8h30min, quanto tempo depois eles irão passar juntos novamente?

cujo objetivo era o de construir o conceito de mínimo múltiplo comum de dois ou mais números.

Os alunos se entusiasmaram com o problema, pois este representava uma situação de seus cotidianos, com dados referentes aos seus próprios bairros ou próximos de suas casas.

Inicialmente, o problema foi discutido pelos alunos utilizando o cálculo mental, pois eles conseguiam calcular, de cabeça, quais seriam os horários dos ônibus, com as informações dadas no problema.

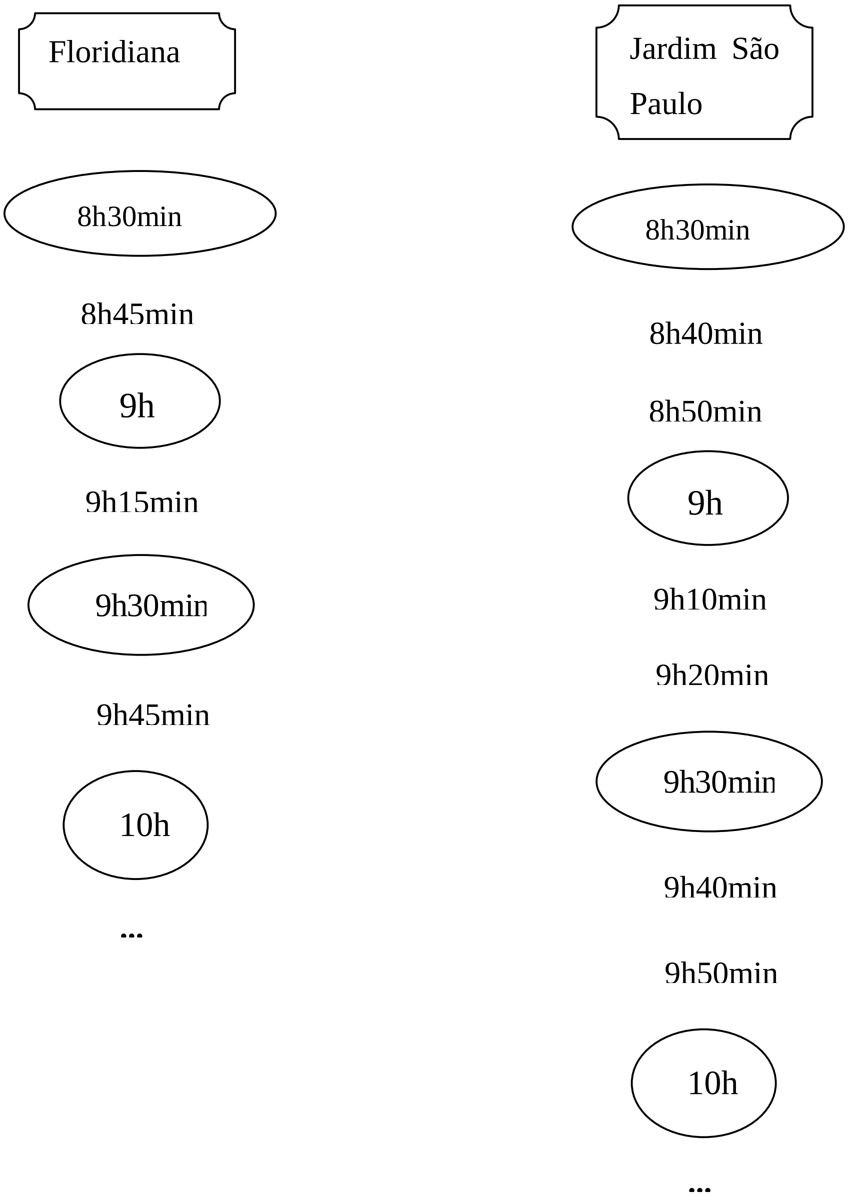
Desse modo, foi pedido aos alunos que buscassem relações matemáticas que pudessem chegar às mesmas soluções que haviam obtido mentalmente.

Um aluno do grupo 9 disse: - Professora, é só fazer a tabuada do 15 e somar com 8h30min, para saber o horário do ônibus para Floridiana e fazer a tabuada do 10 e somar com 8h30min, para saber o horário do ônibus para o Jardim São Paulo.

Observei que, de maneira geral, os alunos concordavam com as sugestões desse aluno.

Então, perguntei: - Como saberemos a que horas os ônibus passarão juntos novamente?

A maioria dos alunos colocou os horários de cada um dos ônibus, a cada passada pelo local, a partir das 8h30min, e observaram os horários que eram comuns, circulando-os.



Respondendo a que horas novamente se encontrariam, disseram: 9 h, 9h30min, ...

Num diálogo questionador, procurei saber dos alunos “quanto tempo depois das 8h30min” eles voltariam a se encontrar e eles responderam que depois de 30 min, 60 min, ...

Disse a eles que esses números poderiam aparecer se eles buscassem alguns múltiplos de 15 e de 10 e, depois, seus múltiplos comuns. Junto com eles, coloquei na lousa:

M (15) = {$\underline{0}$, 15, $\underline{30}$, 45, $\underline{60}$, 75, $\underline{90}$, 105, ...}

M (10) = {$\underline{0}$, 10, 20, $\underline{30}$, 40, 50, $\underline{60}$, 70, 80, $\underline{90}$, 100, ...}

e que, portanto,

M_C = {0, 30, 60, 90, ...}

concluindo que o menor múltiplo comum de 15 e 10, diferente de zero, é 30.

Assim, m.m.c. (10, 15) = 30

Voltando ao problema, disse que isso significa que os dois ônibus passariam juntos, pelo mesmo local, pela primeira vez, 30 minutos depois das 8h30min; 60 minutos depois das 8h30min, pela 2ª vez; 90 minutos depois das 8h30min, pela 3ª vez, ..., isto é, que os dois ônibus passariam juntos pelo mesmo local a cada 30 minutos.

Esta forma de trabalhar leva à construção do conceito de m.m.c. de dois ou mais números, onde se pede para:

- ✓ Construir uma seqüência de múltiplos;
- ✓ Achar alguns múltiplos comuns;
- ✓ Tomar o menor deles.

Este procedimento dá o modo de se encontrar o **mínimo múltiplo comum de dois ou mais números pela definição**.

Definição: O mínimo múltiplo comum de dois ou mais números é o **menor** dos múltiplos comuns a eles, diferente de zero.

Mínimo múltiplo comum através da fatoração

Mostrei que poderiam ter trabalhado assim:

- ✓ Decompondo os dois números em fatores primos;

$$\begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- ✓ Escrever os números dados na sua forma fatorada;

  $15 = 3 \times 5$

  $10 = 2 \times 5$

- ✓ Achar o m.m.c. dos números dados, multiplicando-se todos os fatores, comuns e não comuns, afetados de seus maiores expoentes.

Então, m.m.c. (15,10) = 2 × 3 × 5 = 30

Como fixação, pedi para achar o m.m.c. (24, 630).

24	2
12	2
6	2
3	3
1	

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

Assim,

$$\begin{cases} 24 = 2^3 \times 3 \\ 630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \end{cases}$$

e m.m.c. (24, 630) = $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ = 8 × 9 × 5 × 7 = 2520

Observei que o mínimo múltiplo comum de quaisquer dois ou mais números, deve conter todos os fatores primos de cada um deles.

Chamei a atenção de que, se fôssemos trabalhar pela definição, deveríamos chegar ao m.m.c. igual a 2520, através dos múltiplos de 24 e de 630,

M (24) = {0, 24, 48, 72, 96, 120, ... , 2520}

M (630) = {0, 630, 1260, 1890, 2520, ... }

o que demandaria muito trabalho.

Regra da decomposição simultânea para a busca do m.m.c.

15, 10	2
15, 5	3
5, 5	5
1, 1	

- ✓ Escrever os números 15 e 10, separando-os por vírgula, e colocar um traço vertical ao lado do último número. No outro lado do traço, coloca-se o menor dos fatores primos – comuns ou não comuns – dos números dados;

$$\begin{array}{r|l} 15,\ 10 & 2 \end{array}$$

- ✓ Sob os números que forem divisíveis pelo fator primo considerado, coloca-se o quociente da divisão. Os números não divisíveis por ele devem ser repetidos.

$$\begin{array}{r|l} 15,\ 10 & 2 \\ 15,\ \ \ 5 & \end{array}$$

- ✓ Prosseguir com este procedimento até chegar ao quociente 1 sob todos os números.

$$\begin{array}{r|l} 15,\ 10 & 2 \\ 15,\ \ \ 5 & 3 \\ 5,\ \ \ 5 & 5 \\ 1,\ \ \ 1 & \end{array}$$

- ✓ O m.m.c. é o produto dos fatores primos colocados do lado direito do traço.

  Então, m.m.c (15, 10) = $2 \times 3 \times 5 = 30$

Para o tópico mínimo múltiplo comum de dois ou mais números, haviam sido propostas 3 aulas, mas foi utilizada apenas uma aula, desde que esse assunto foi trabalhado apenas com alunos que estavam em recuperação.

Unidade 2 – Números Racionais

A segunda parte da aplicação do Projeto teve início no primeiro bimestre de 2003. Inicialmente foi discutido e votado, novamente, o Termo de Compromisso que, nesse momento, teve maior aceitação pelos alunos, pois eles já estavam habituados com o mesmo.

O estudo dos números racionais, em nossa aplicação, merece especial atenção no 3º ciclo. Trabalharei, nesta aplicação, números racionais, como diferentes personalidades, ao explorar os significados de quociente, operador e relação parte-todo.

Observa-se que há muito tempo tem-se discutido sobre o lugar dos números racionais no currículo de Matemática. Segundo Onuchic & Botta, 1997, p. 5-8,

> Há quem chegue a afirmar que os números racionais ainda estão no currículo escolar mais por inércia (...já que estão no programa, então vamos trabalhar com eles) do que por necessidade (onde, nas atividades diárias,

> usamos esse tipo de números?). Há muitas críticas devidas à constatação do baixo entendimento que os alunos apresentam em relação aos conceitos e às técnicas operatórias que envolvem esses números.

Acredita-se que não deveria haver necessidade de se despender tanto tempo no trabalho com os números racionais, já que esse tempo, na maioria das vezes, é gasto no treinamento de técnicas operatórias em detrimento da construção de conceitos importantes, e, sim, na construção desses conceitos e de se explorar número racional fazendo conexões entre suas diversas personalidades.

> Aulas eficientes começam onde os estudantes estão, não onde nós estamos. Isto é, o ensino deveria começar com idéias que as crianças já têm, idéias que eles usarão para criar novas. Prender a atenção dos estudantes requer tarefas ou atividades que sejam problemáticas e requer pensar. Os estudantes aprendem matemática como um resultado da resolução de problemas. Idéias matemáticas são resultados de experiências de resolução de problemas, ao invés de elementos que devem ser ensinados antes de resolver problemas (Hiebert et al., 1996, 1997). Além disso, o processo de resolver problemas está agora completamente entrelaçado com a aprendizagem; as crianças estão aprendendo matemática fazendo matemática! (VALLE, J. A. V., 2001, p. 41)

Conceito e leitura de frações:

Nas **1ª** e **2ª aulas** tinha-se como objetivo fazer com que os alunos percebessem que existem certos tipos de problemas que admitem, como resposta, números naturais, enquanto que para outros tipos de problemas os números naturais já não são suficientes, necessitando-se de outros tipos de número. Outro objetivo era o de fazer com que os alunos percebessem a importância de se voltar ao enunciado do problema antes de dar a resposta definitiva.

Situação: Zeca é um garoto muito querido por seus colegas por ser muito caridoso. Ele possui uma bicicleta que é mais conhecida por bicicleta maluca do Zeca.

Com os alunos reunidos em grupos, foi entregue o

Problema 1: Na bicicleta maluca de Zeca há lugar para 5 pessoas. Um dos lugares é sempre ocupado por ele, que é o dono da bicicleta. Os outros lugares, ele usa para transportar seus amigos. Hoje, por exemplo, Zeca vai transportar 15 amigos, jogadores de basquetebol, da quadra até o ponto do ônibus. Quantas viagens, no mínimo, ele terá que fazer para transportar os 15 amigos em sua bicicleta?

Em uma primeira observação dos grupos, notei que os mesmos faziam divisões dos 15 amigos por 5, que era o número de lugares possíveis na bicicleta do Zeca. Mas, deixavam de considerar que o Zeca estaria em todas as viagens. Daí, foram feitos por mim alguns questionamentos visando pôr luz à má interpretação do problema por alguns grupos:

- Como a bicicleta é conduzida de um lugar para o outro?

Eles responderam que o Zeca a conduziria.

Continuei os questionamentos:

- Quantos amigos do Zeca poderão ser conduzidos em sua bicicleta em cada viagem?

Em um primeiro momento eles disseram que eram 5. Mas um aluno do grupo 4 disse:

- E o Zeca? Vocês estão se esquecendo dele!

Nesse momento, observei que alguns alunos apagavam suas contas, pois estes haviam esquecido de considerar que a bicicleta não poderia ir de um lugar ao outro, sozinha.

Foi dado um tempo para que os grupos terminassem suas atividades e estas foram recolhidas. A partir daí, foi feita a plenária, onde se discutiu as diversas soluções apresentadas pelos grupos.

Ao analisar o material entregue pelos grupos, observei que alguns não perceberam as dicas dadas durante o diálogo entre a professora e os grupos e cometeram alguns erros.

O grupo 2

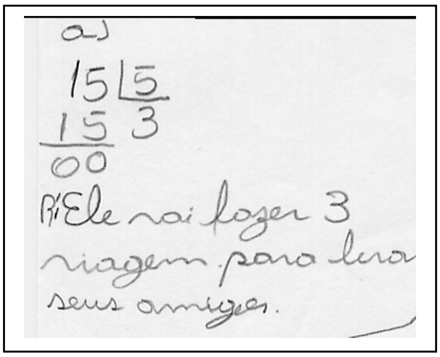
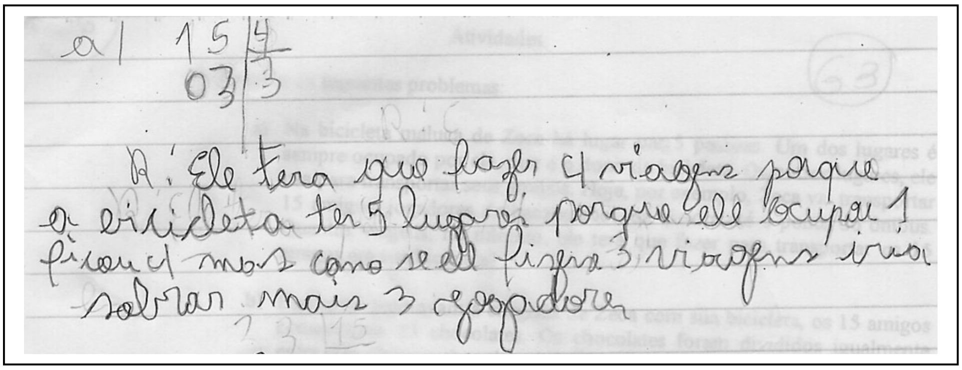


Figura 4.2.1 – Grupo 2 (Problema 1)

ao responder a primeira parte do problema, não considerou que o Zeca iria conduzir a bicicleta em todas as viagens, dividindo o total de amigos do Zeca pelo total de lugares na bicicleta.

O grupo 3


a) 15|4
03|3

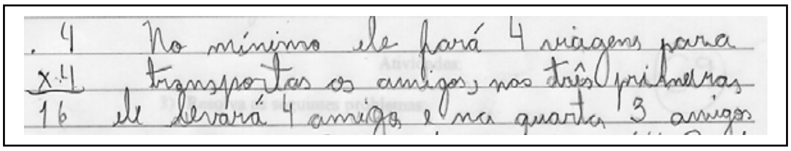
R: Ele tera que fazer 4 viagens porque a bicicleta ter 5 lugares porque ele ocupa 1 ficou 4 mais como se ele fizer 3 viagens iria sobrar mais 3 jogadores

Figura 4.2.2 – Grupo 3 (Problema 1)

disse que o Zeca teria que fazer 4 viagens, justificando que pegaram os 15 amigos e os distribuíram pelo número de lugares disponíveis na bicicleta, 4, considerando o lugar do Zeca.

Notei que esse grupo percebeu que apesar de o número de amigos, da última viagem, ser menor que o número de lugares disponíveis na bicicleta, seria necessária uma viagem a mais para levá-los.

O grupo 9


4 x 4 = 16

No mínimo ele fará 4 viagens para transportar os amigos, nos três primeiras ele levará 4 amigos e na quarta 3 amigos

Figura 4.2.3 – Grupo 9 (Problema 1)

também conseguiu justificar sua resolução de maneira bastante clara. Verificaram o número que multiplicado por 4 resulta em um número aproximado do número de amigos, $4 \times 4 = 16$.

O grupo 4 fez uma representação da situação.

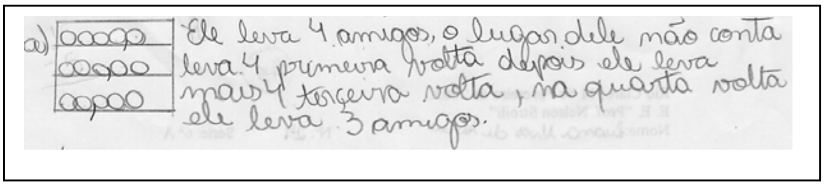

a) Ele leva 4 amigos, o lugar dele não conta leva 4 primeira volta depois ele leva mais 4 terceira volta, na quarta volta ele leva 3 amigos.

Figura 4.2.4 – Grupo 4 (Problema 1)

Esse grupo apresentou a resolução com um desenho bem interpretado, separando os 15 atletas de 4 em 4 por vírgulas. Na justificativa escrita deixaram de colocar quantos atletas foram na 2ª viagem.

A seguir foi entregue o

<u>Problema 2</u>: Enquanto esperavam a chegada de Zeca com sua bicicleta, os 15 amigos consumiram 33 chocolates. Os chocolates foram divididos igualmente entre eles. Quanto chocolate cada um consumiu?

Neste problema, todos perceberam que deveriam ser divididos igualmente 33 chocolates entre os 15 amigos do Zeca e que a operação requerida era a divisão.

Foram apresentadas algumas resoluções curiosas.

O grupo 4

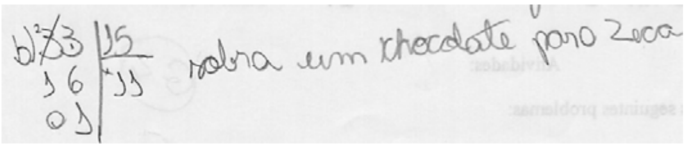


Figura 4.2.5 – Grupo 4 (Problema 2)

fez uma divisão incorreta de 33 por 15, obtendo quociente 11 e resto igual a 1. Desse modo, afirmaram que sobraria um chocolate para o Zeca.

Observa-se que o erro, discutido na página 113, repete-se aqui. O grupo tentou fazer a divisão, errando na conta que, se certa, se mostraria assim:

$$
\begin{array}{r|l}
33 & 15 \\ \cline{2-2}
-\underline{15} & 1+1 \\
18 & \\
-\underline{15} & \\
03 &
\end{array}
$$

e que, na forma simplificada seria:

$$
\begin{array}{r|l}
33 & 15 \\ \cline{2-2}
18 & 1+1 \\
03 &
\end{array}
\qquad \text{ou} \qquad
\begin{array}{r|l}
33 & 15 \\ \cline{2-2}
03 & 2
\end{array}
$$

O grupo 2

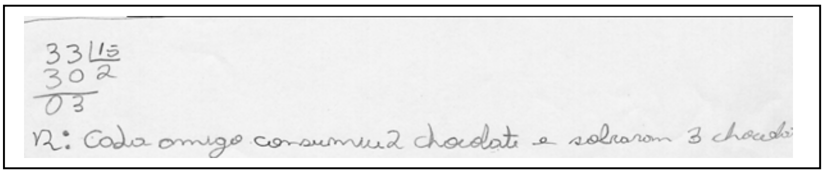


Figura 4.2.6 – Grupo 2 (Problema 2)

fez a divisão corretamente, mas afirmou que cada um consumiria 2 chocolates e sobrariam 3. Esse grupo não atentou para a frase ‘todos divididos igualmente entre eles’, deixando o resto indicado em sua divisão, ou ainda, preferiu deixar o resto indicado em sua divisão pois não percebeu que os chocolates restantes poderiam ser repartidos em pedaços.

O grupo 3

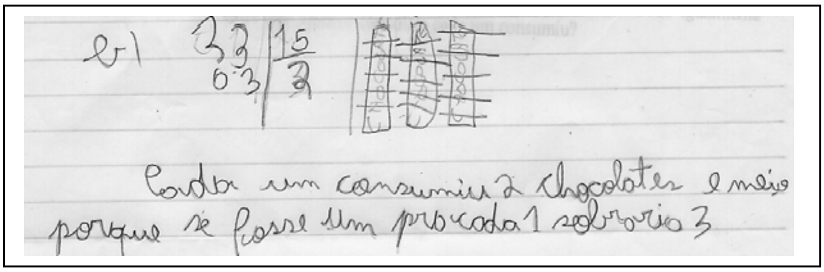


Figura 4.2.7 – Grupo 3 (Problema 2)

fez a divisão 33 ÷ 15 corretamente, mas respondeu que cada atleta consumiu dois chocolates e meio e que, se fosse um para cada um (sic), sobrariam 3 chocolates (Na verdade acredita-se que queriam dizer dois para cada um).

Ao tomar os 3 chocolates restantes, querendo dividir cada chocolate entre os 5 atletas, cometeram um erro freqüente entre os alunos: 5 cortes para dividir cada chocolate em 5 partes (5 cortes fazem 6 partes). Além disso, erraram ao chamar cada uma dessas partes de meio. Meio? O que será que pensaram nesse momento?

Já, o grupo 9 conseguiu refletir sobre o que fazer com os chocolates que restaram.

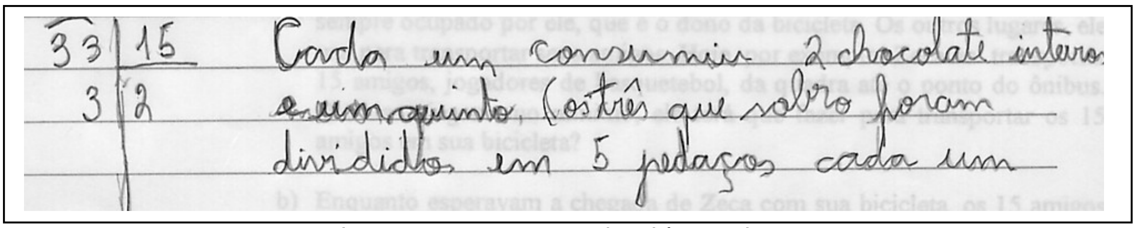


Figura 4.2.8 – Grupo 9 (Problema 2)

Esse grupo percebeu que poderia dividir aqueles 3 chocolates entre os 15 amigos, ou seja, que poderia cortar os três chocolates restantes de modo que todos pudessem comer igualmente. Afirmaram que eles poderiam ser divididos em 5 pedaços cada um, totalizando 15 pedaços iguais de chocolate. Percebe-se que eles trouxeram, para a sala de aula, um conhecimento construído anteriormente e disseram que cada pedacinho era chamado um quinto, pois o chocolate inteiro foi dividido em 5 partes iguais.(relacionaram!)

Segundo Van de Walle, 2001, p. 27,

> usamos idéias que já temos para construir uma nova idéia, desenvolvendo no processo uma rede de conexões entre as idéias. Quanto mais idéias são usadas e mais conexões são feitas, melhor compreendemos.

Os objetivos pretendidos para esses problemas foram atingidos?

Pôde-se notar que a maioria dos grupos percebeu que ambos os problemas eram de divisão. Apesar disso, alguns utilizaram corretamente o algoritmo enquanto que outros erraram, repetindo um erro já cometido e trabalhado anteriormente.

No Problema 1, os objetivos foram atingidos por quase todos os grupos, pois para eles era natural trabalhar esse problema com números naturais, o que não era novo para eles.

Já no Problema 2, observei que alguns grupos não se detiveram na frase: “divididos igualmente”, pois os mesmos mantiveram os restos de suas divisões. Acredito que esse fato ocorreu porque os alunos perceberam que não haveria um número natural que satisfizesse aquele problema e optaram por deixar o resto.

No entanto, houve grupos que conseguiram perceber que os chocolates restantes poderiam ser cortados em pedaços iguais, se aproximando da solução. Um deles apresentou nomenclatura correta para o pedaço, $\frac{1}{5}$ de chocolate, ou seja, esse grupo relacionou com tópicos trabalhados anteriormente. Nesse problema, o segundo objetivo (voltar ao problema antes da resposta definitiva) não foi atingido pela maioria dos grupos. Caso contrário, teriam percebido que número natural não serviria como resposta ao problema.

Procurei, nesses dois problemas, trabalhar com grandezas discretas e contínuas. As grandezas discretas só podem ser divididas por seus divisores enquanto que as contínuas, por um número qualquer.

Na **3ª aula**, objetivava-se fixar as idéias trabalhadas anteriormente. Desta forma, iniciou-se a aula recolhendo e discutindo a

Tarefa Extraclasse: Os amigos de Zeca resolveram dar-lhe uma festa do sorvete. Nesta festa estavam o Zeca, a Aninha e 16 amigos do Zeca. Foram comprados 38 sorvetes de palito. Quantos sorvetes cada um consumiu? Lembrando que todos consumiram a mesma quantidade.

deixada na aula anterior.

Durante a plenária e ao analisar o material entregue pelos alunos, notei que os alunos relacionaram a tarefa deixada com o problema 2.

O grupo 1

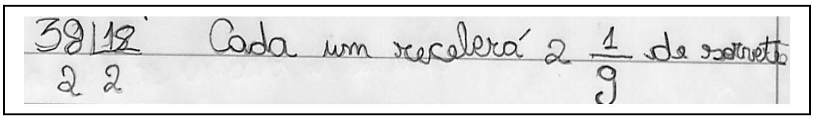


Figura 4.2.9 – Grupo 1 (Tarefa)

dividiu os 38 sorvetes pelas 18 pessoas (16 amigos + Zeca + Aninha), deixando de resto 2 sorvetes, e afirmou que cada pessoa receberia 2 sorvetes e mais $\frac{1}{9}$ de sorvete. Eles, possivelmente, tenham percebido que a natureza do objeto (contínuo) permitia que se cortasse, cada sorvete, em 9 partes iguais a $\frac{1}{9}$ de sorvete e, obtendo 18 dessas partes, coube a cada uma dessas pessoas $\frac{1}{9}$ de sorvete.

O grupo 9

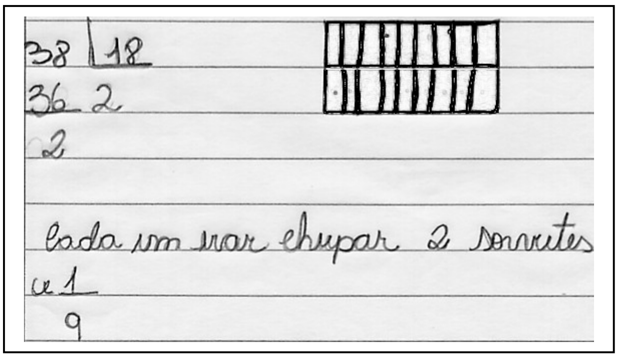


Figura 4.2.10 – Grupo 9 (Tarefa)

fez uma representação para a situação, onde, dividindo 38 sorvetes por 18 pessoas, coube 2 sorvetes por pessoa e sobraram 2. Esse grupo representou os 2 sorvetes restantes em 2 retângulos, dividindo cada um deles em 9 partes iguais, totalizando 18 pedaços iguais a $\frac{1}{9}$ do sorvete. Desse modo, afirmou que cada pessoa consumiria 2 sorvetes e $\frac{1}{9}$.

O grupo 2

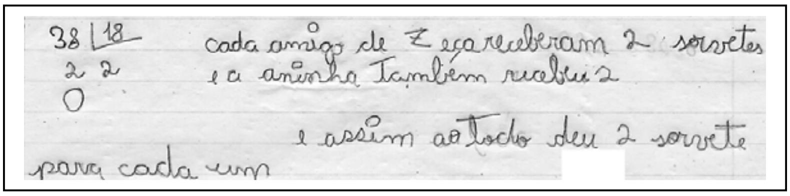


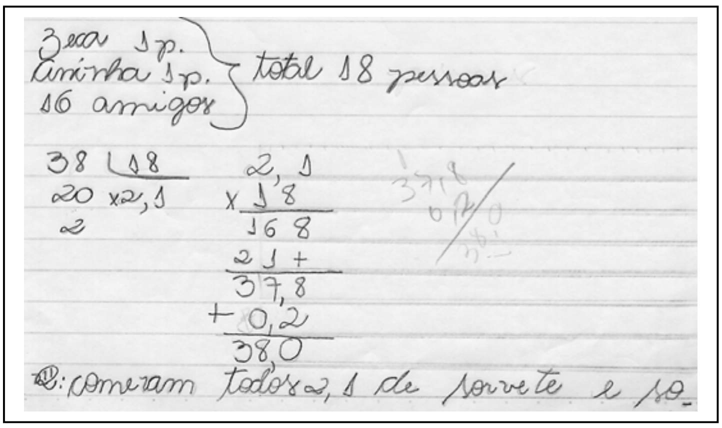
Figura 4.2.11 – Grupo 2 (Tarefa)

fez a divisão de 38 por 18, obtendo resto 2 e afirmou que cada amigo do Zeca iria receber 2 sorvetes e a Aninha também receberia 2. Será que esse grupo não percebeu que ao dividir por 18 a Aninha já estava incluída? Esse grupo usou inicialmente a técnica operatória correta

$$\begin{array}{r|l} 38 & 18 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \end{array}$$

porém colocou, depois, um zero embaixo do resto 2. Disse que ao todo dariam 2 sorvetes para cada um, parecendo que os dois sorvetes restantes foram os dados para Aninha.

O grupo 8



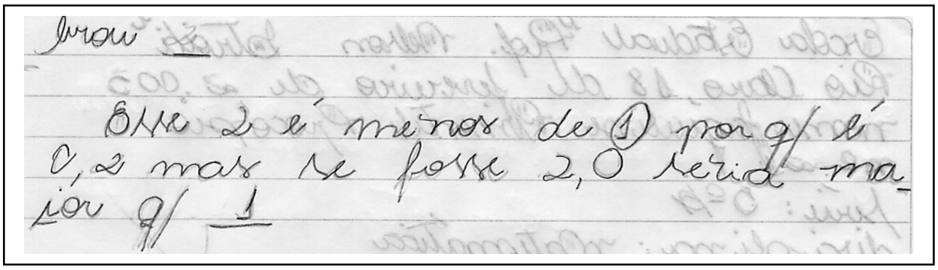

Esse 2 é menor de 1 porq/ é
0,2 mas se fosse 2,0 seria maior q/ 1

Figura 4.2.12 – Grupo 8 (Tarefa)

trabalhou bem a divisão, colocando até a parte decimal. Justificou a natureza do número 2 restante, que de fato era 0,2 do todo. Apesar disso não resolveu o problema corretamente pois se pedia para dividir todos os 38 sorvetes igualmente, sem deixar resto.

Esse grupo obteve como resposta $2\frac{1}{10}$ ao invés de $2\frac{1}{9}$. Como $\frac{1}{10} \prec \frac{1}{9}$ e $\frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{10}{90} - \frac{9}{90} = \frac{1}{90}$, então cada um perderia $\frac{1}{90}$ de sorvete. Como são 18 atletas, $18 \times \frac{1}{90} = \frac{1}{5} = \frac{2}{10} = 0{,}2$, que é o que sobrou do sorvete na divisão feita por esse grupo.

Pode-se observar que muitos grupos procuraram fazer ligações com conteúdos vistos em séries anteriores.

Se esse mesmo problema tivesse sido dado para outras turmas, que já tivessem trabalhado com dízimas, poderíamos mostrar que, se esse grupo tivesse continuado a divisão, encontraria o quociente

$$2{,}111... = 2 + 0{,}111... = 2 + \frac{1}{9} = 2\frac{1}{9}$$ resolvendo o problema

Na **4ª aula**, foi entregue aos grupos o

<u>Problema 3</u>: Três amigas foram à pizzaria Mama Mia:

1. Dani, Luci e Jane compraram duas pizzas. As pizzas foram divididas igualmente entre elas. Quanto cada uma comeu de pizza?
2. Como podemos representar as quantidades de pizza que cada uma consumiu? Como esse número é chamado?
3. Se cada pizza custou R$15,00, quanto cada uma pagou pelo que comeu?

e dado um tempo para que o lessem e discutissem entre os integrantes do grupo. O objetivo deste problema era o de construir o conceito de **número racional como quociente de uma divisão, uma das personalidades do número racional**. Assim, ver o número racional $\frac{a}{b}$, a, b $\in$ N, b $\neq$ 0 e $\frac{a}{b} = \frac{a \div b}{b \div b} = \frac{a \div b}{1} = a \div b$.

Em uma primeira observação, percebi que os grupos dividiam as pizzas em 8, 6, 4 e 2 pedaços, isto é, múltiplos de 2. Acredito que isto ocorreu por ser comum, em restaurantes e lanchonetes, as pizzas serem entregues já cortadas, em números pares de pedaços: 2, 4, 6 ou 8, de acordo com o tamanho das mesmas, pequena, média ou grande. Com isso, os alunos foram distribuindo os pedaços para cada uma das meninas do problema, havendo ou não sobra de partes.

A partir de um certo tempo as resoluções do problema foram recolhidas e levadas à plenária. Durante a plenária, notei que os alunos relacionavam o problema dado com problemas, sobre a mesma temática, vistos na 4ª série do Ensino Fundamental. Ao analisar as atividades entregues pelos grupos, observei que muitos procuraram dividir as pizzas em quantidades que pudessem ser repartidas igualmente pelas três meninas, isto é, em múltiplos de três: 3, 6, 9, ...

O grupo 3

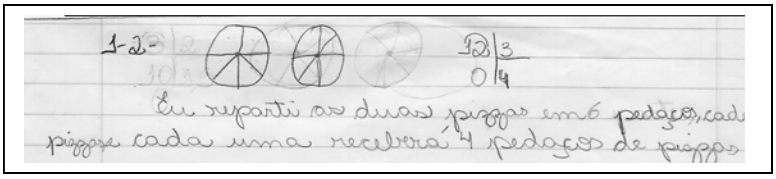


Figura 4.2.13 – Grupo 3 (Problema 3)

procurou descobrir um número que desse para dividir por 3. Desse modo, dividiram a pizza em 6 pedaços, embora não se apresentassem iguais no desenho. Então, as duas pizzas teriam 12 pedaços no total que, repartidos pelas três meninas, dariam 4 pedaços para cada uma e o grupo preocupando-se apenas em indicar a quantidade de pedaços que cada uma consumiu.

Não fazendo relação dessa quantidade de pedaços com o todo: uma pizza, repartida em 6 pedaços iguais, não souberam responder a questão **2** do problema, que pedia a relação entre a parte consumida por cada menina e o todo de partes em que a pizza foi dividida, ou seja, não souberam chegar a $\frac{4}{6}$ de pizza que é equivalente a $\frac{2}{3}$ de pizza e que se lê dois terços de pizza.

O grupo 4

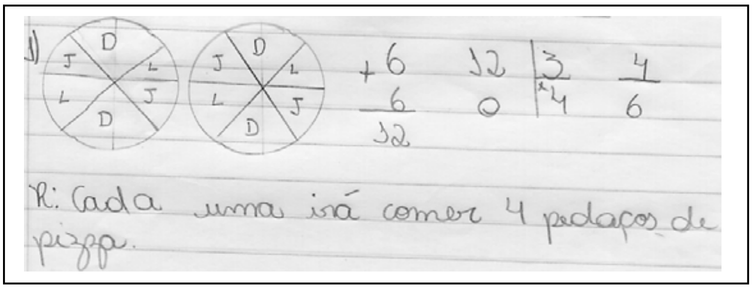


Figura 4.2.14 – Grupo 4 (Problema 3 - 1)

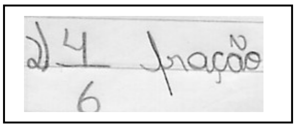


Figura 4.2.15 – Grupo 4 (Problema 3 - 2)

trabalhou da mesma forma que o grupo 3. Dividiu em seis partes cada pizza e repartiu os 12 pedaços para as três meninas. Porém, esses alunos souberam representar essa quantidade: $\frac{4}{6}$, além de dizer que esse número é chamado fração (recordações do 2º ciclo?).

O grupo 9

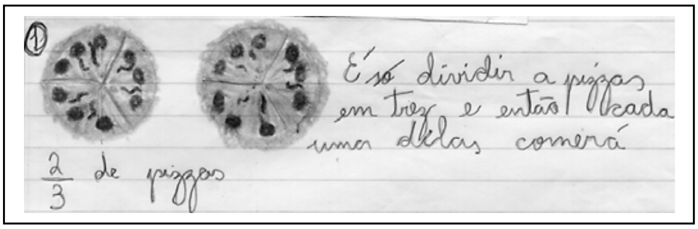


Figura 4.2.16 – Grupo 9 (Problema 3 - 1)

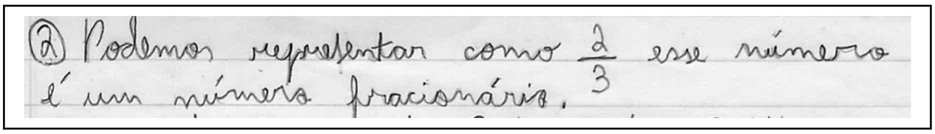
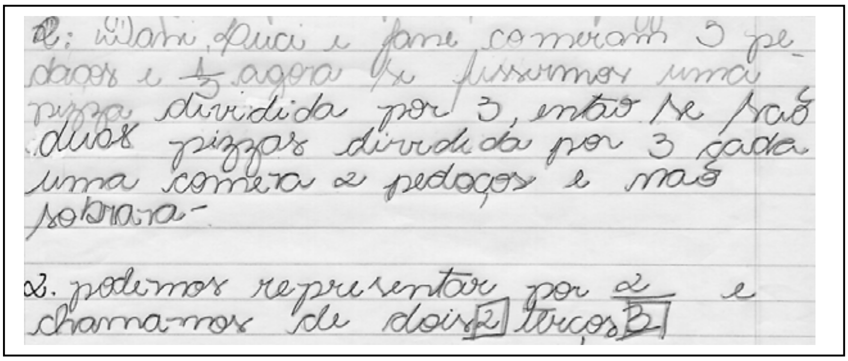


Figura 4.2.17 – Grupo 9 (Problema 3 - 2)

dividiu cada uma das pizzas em 3 pedaços e justificou sua resposta dizendo que cada menina comeria $\frac{2}{3}$ de pizza e que esse número é um número fracionário.

O grupo 8


1: Vitória, Lúcia e Jane comeriam 3 pedaços e $\frac{1}{5}$ agora se fizermos uma pizza dividida por 3, então se são duas pizzas dividida por 3 cada uma comerá 2 pedaços e não sobrará.

2. podemos representar por $\frac{2}{3}$ e chamamos de dois[2] terços[3]

Figura 4.2.18 – Grupo 8 (Problema 3 - 1, 2)

foi confuso ao tentar explicar sua resposta. No item **1**, imaginaram as pizzas divididas em 5 partes. Ao distribuir estas partes entre as três meninas viram que caberia, a cada uma, três dessas partes, isto é, $\frac{3}{5}$ de pizza, e ainda sobraria $\frac{1}{5}$ de pizza. Deixaram de ver que esse $\frac{1}{5}$ deveria, também, ser repartido entre as três meninas.

Na segunda hipótese, ao dividir cada pizza em três partes iguais, acertaram ao dizer que cada pessoa comeria duas dessas partes, dizendo que não haveria sobra e que o consumo de cada uma seria $\frac{2}{3}$ de pizza.

Com relação ao item 2, utilizando a segunda hipótese dada à questão anterior, acertaram dizendo que poderiam representar por $\frac{2}{3}$ e fazer a leitura, dois terços.

Para a questão **3**, o grupo 8 disse, com segurança, que:

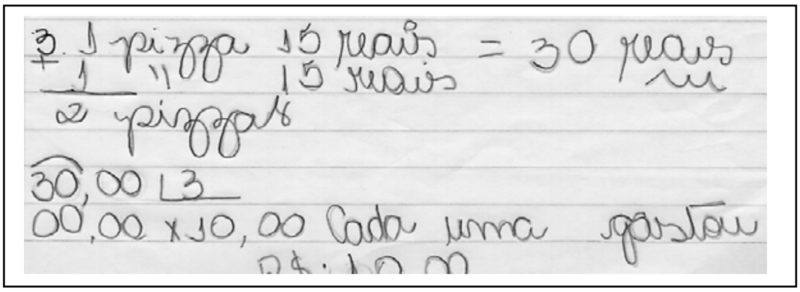

3. 1 pizza 15 reais = 30 reais
+ 1 " 15 reais
2 pizzas
30,00 | 3
00,00 x 10,00 Cada uma gastou R$: 10,00

Figura 4.2.19 – Grupo 8 (Problema 3 - 3)

Ainda, com relação à questão **3**, notei que a maioria dos grupos teve o mesmo procedimento: somou o preço de cada uma das pizzas, resultando 30 reais e dividiu esse valor pelas 3 meninas, respondendo que cada uma havia pago R$ 10,00.

O grupo 5, de modo diferente,

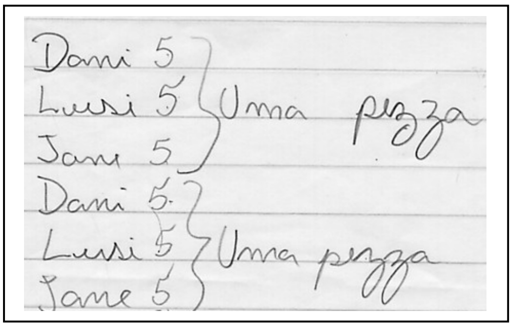


Figura 4.2.20 – Grupo 5 (Problema 3 - 3)

considerou o valor de cada pizza dividido por 3, ou seja, cada uma das meninas deveria pagar R$5,00 por pedaço ($\frac{1}{3}$ de pizza) totalizando, nas duas pizzas, R$ 10,00 para cada uma.

Com este problema, eu quis identificar a personalidade quociente de número racional. De fato, esse problema requer a idéia de divisão, cujo resultado é o quociente.

Esta idéia de divisão para o número racional é trabalhada considerando-se grandezas de naturezas diferentes.

Assim,

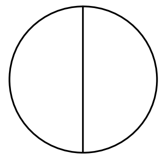
$$\begin{array}{l|l} 2\ \text{pizzas} & 3\ \text{meninas} \\ \cline{2-2} 0 & \frac{2}{3}\,\frac{pizza}{menina} \end{array} \qquad \text{pois,} \qquad \frac{2}{3}\,\frac{pizza}{\cancel{menina}} \times 3\cancel{meninas} = 2\,pizzas$$

Nesse momento, desejava-se que os alunos pudessem perceber que, ao trabalhar esse problema, dividindo as pizzas em um determinado número de pedaços, que cada uma das meninas recebesse um número inteiro de pedaços mais uma fração da sobra. Infelizmente isso não aconteceu. Parece que os alunos não estavam ainda preparados para enfrentar o problema de um modo mais criativo. Assim, um trabalho interessante mas que demandaria mais tempo (e havia um programa a cumprir), poderia ser feito do seguinte modo:

Dividir cada pizza em um determinado número de partes: **n**, sendo o todo uma pizza.

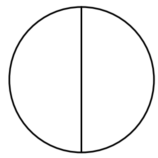
Se **n = 2**

1. Representando e dando nome à parte: $\frac{1}{2}$ e lido “um meio”



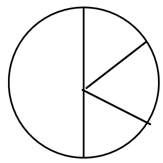
2. Distribuindo as quatro partes igualmente entre as meninas,

   cabe, a cada uma, uma dessas partes : $\frac{1}{2}$



3. Sobra: $\frac{1}{2}$

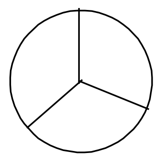
4. Esta sobra também deve ser dividida entre elas. Assim, $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$



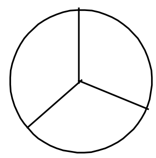
5. Juntando o que cabe a cada uma: $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ que é a parte consumida por cada uma.

Se **n = 3**

1. $\frac{1}{3}$ e lido “um terço”.



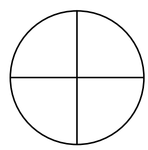
2. 6 partes $\div$ 3 = 2 partes a cada uma. Assim, $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$



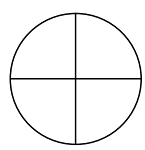
3. zero
4. ——
5. $\frac{2}{3}$

Se **n = 4**

1. $\frac{1}{4}$ e lido “um quarto”



2. 8 partes $\div$ 3 = 2 partes a cada uma. Assim, $2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



3. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

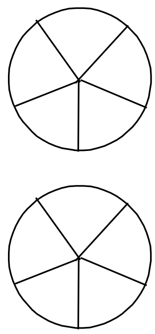
4. $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$

5. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3+1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Se **n = 5**

1. $\frac{1}{5}$ e lido “um quinto”

2. 10 partes $\div$ 3 = 3 partes a cada uma. Assim, $3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

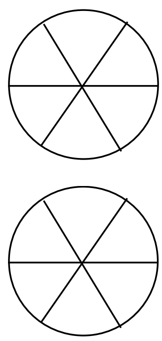


3. $\frac{1}{5}$

4. $\frac{1}{5} \div 3 = \frac{1}{15}$

5. $\frac{3}{5} + \frac{1}{15} = \frac{9+1}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

Se **n = 6**



1. $\frac{1}{6}$ e lido “um sexto”

2. 12 partes $\div$ 3 = 4 partes a cada uma. Assim, $4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3. zero

4. —

5. $\frac{2}{3}$

Se **n = 8**

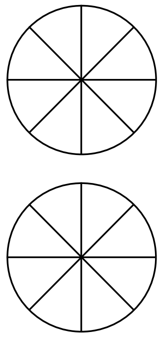
1. $\frac{1}{8}$ e lido “um oitavo”

2. 16 partes $\div$ 3 = 5 partes a cada uma. Assim, $5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

3. $\frac{1}{8}$

4. $\frac{1}{8} \div 3 = \frac{1}{24}$

5. $\frac{5}{8} + \frac{1}{24} = \frac{15+1}{24} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$



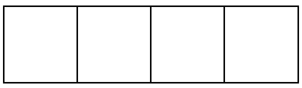
Em todos os casos analisados tem-se a divisão

2 pizzas	3 meninas
0	$\frac{2}{3} \frac{pizza}{menina}$

Ainda, durante a plenária, comecei a trabalhar, com os alunos, outras idéias relativas a números racionais.

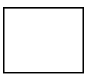
Disse: - Considere uma barra de chocolate dividido em quatro partes iguais e faça uma representação geométrica dessa barra.

Fizeram o desenho que copiei na lousa.

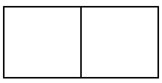


Todo = 1 = $\frac{4}{4}$

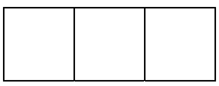
Perguntei: - Como se chama cada parte que vocês vêem no desenho?



um quarto: $\frac{1}{4}$



dois quartos: $\frac{2}{4}$



três quartos: $\frac{3}{4}$

Considerando a barra de chocolate como o todo, podemos identificar:

$\frac{1}{4} \longrightarrow$ O todo foi dividido em quatro partes iguais e foi tomada uma dessas partes;

$\frac{2}{4}$ $\longrightarrow$ O todo foi dividido em quatro partes iguais e foram tomadas duas dessas partes;

$\frac{3}{4}$ $\longrightarrow$ O todo foi dividido em quatro partes iguais e foram tomadas três dessas partes;

As representações, usando pares de números naturais: $\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$ são chamadas, nesse caso, números fracionários ou frações.

Chamei atenção dos alunos sobre o significado da palavra fratura, fazendo uma relação dela com a palavra fração: quebra.

A partir daí foi possível formalizar o construído **conceito de fração como uma relação da parte com o todo**, **uma outra personalidade do número racional**.

Formalizando, escrevi na lousa:

Fração é parte de um todo que é expressa por um número fracionário e que indica a relação da parte com o todo, isto é, indica a relação que existe entre o número de partes consideradas e o total de partes iguais em que o todo foi dividido.

Assim, um número racional, comumente pensado como uma 'fração', é um número que pode ser expresso como uma relação entre dois números naturais **a** e **b**, com **b** diferente de zero. Acima da barra fracionária fica o ***numerador***: **a**, e abaixo dela, o ***denominador***: **b**. O ***denominador*** diz em quantas partes iguais o todo foi dividido: **b** e dá nome à parte: $\frac{1}{b}$. O ***numerador*** diz quantas dessas partes iguais foram tomadas: **a**. O ***numerador*** e o ***denominador*** são os termos da fração.

Observamos que muitas vezes são apresentadas frações em que o numerador é maior que o denominador. Essas frações são chamadas frações impróprias. Nesse caso, extraindo-se os inteiros contidos nesse número, o que sobra é uma fração do todo. Assim, pode-se escrever a parte inteira seguida da parte fracionária e é aí que a fração se apresenta. Damos à ela o nome de número misto.

Exemplo:

$$\frac{5}{4}=\frac{4}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}$$

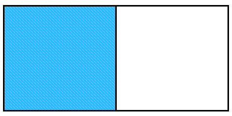
Duas atividades para a sala de aula, foram propostas para os alunos:

1) Desenhe quatro retângulos iguais, represente neles as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{4}$ e justifique o que foi feito.

2) Faça 3 retângulos, iguais ao retângulo abaixo, e represente neles as seguintes frações: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$.

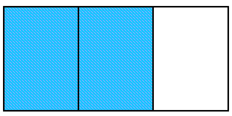
Na atividade 1, a maioria dos alunos trabalhou considerando o todo representado por:

Assim:



$\frac{1}{2}$

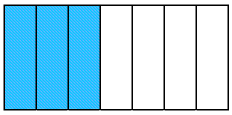
Dividi o todo em duas partes iguais e tomei uma.



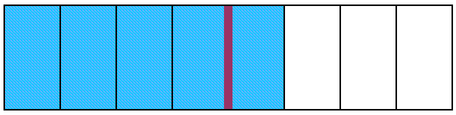
$\frac{2}{3}$

Dividi o todo em três partes iguais e tomei duas.

Dividi o todo em sete partes iguais e tomei três.



$\frac{3}{7}$



Muitos alunos disseram que não podiam representar $\frac{5}{4}$ nesse todo.

Para representar $\frac{5}{4}$, mostrei que era preciso considerar outro todo e tomar dele apenas $\frac{1}{4}$, completando os $\frac{5}{4}$ pedidos, pois $\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

Considerando os termos de uma fração, passamos à

Classificação de frações

✓ As frações são classificadas em:

- fração ordinária – é do tipo $\frac{a}{b}$, onde o denominador é diferente de potência de dez.

  Exemplos: $\frac{3}{7}, \frac{7}{15}, \frac{9}{8}, \frac{17}{6}, \frac{3}{20}$

- fração decimal – é do tipo $\frac{a}{b}$, onde o denominador é uma potência de dez.

  Exemplos: $\frac{4}{10}, \frac{8}{100}, \frac{9}{1000}$.

✓ As frações são classificadas em:

- fração própria – é a fração menor do que 1, onde o numerador é menor do que o denominador.

  Exemplos: $\frac{3}{5}, \frac{7}{9}, \frac{2}{3}, \frac{1}{15}, \ldots$

- fração imprópria – é a fração maior do que 1. O numerador é maior do que o denominador.

  Exemplos: $\frac{7}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{17}{12}, ...$

- fração aparente – é uma fração que apresenta o número natural divisível pelo denominador. Tais frações são denominadas aparentes, por serem iguais aos números naturais que se obtêm dividindo o numerador pelo denominador.

  Exemplos: $\frac{6}{3}, \frac{15}{5}, \frac{28}{7}, \frac{8}{2}, ...$

Números Mistos

- Conversão de fração imprópria para número misto.

Podem-se extrair os inteiros de uma fração imprópria, que constituem sua parte natural, bastando, para isso, *dividir o numerador pelo denominador*. O quociente obtido é a parte natural da fração imprópria, enquanto que a parte fracionária, menor do que 1, tem o mesmo denominador e para numerador o resto da divisão.

O numeral cuja representação consta de um número natural e de uma fração própria é denominado *forma mista* ou *número misto de uma fração imprópria*.

Exemplo: A fração imprópria $\frac{19}{5}$ tem a seguinte forma mista: $3\frac{4}{5}$, pois:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$$

Logo: $\boxed{\frac{19}{5} = 3\frac{4}{5}}$

- Conversão de número misto em fração imprópria.

A forma apresentada, nos livros, em geral, para a conversão de número misto em fração imprópria é a seguinte:

Constrói-se uma fração de *mesmo denominador* e de *numerador igual ao produto do número natural pelo denominador somado com o numerador*.

Exemplo:

$$\boxed{3\frac{4}{5} = \frac{19}{5}} \rightarrow \boxed{\begin{cases} numerador: 5 \times 3 + 4 = 19 \\ deno\min ador: 5 \end{cases}} \rightarrow \boxed{\frac{19}{5}}$$

Reconheço que a forma mais simples de se passar da forma mista para a de fração imprópria é transformar a parte inteira como uma fração aparente de mesmo denominador que a parte fracionária e somar essas duas frações, isto é, $3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5} = \frac{15}{5} + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}$.

Leitura de uma fração

A leitura de uma fração depende de seu denominador e de seu numerador.

- **Quando o denominador é uma potência de 10, isto é, é 10, ou 100, ou 1000**, **...**, lê-se o numerador e acrescenta-se a palavra **décimo**, ou **centésimo**, ou **milésimo, ...**

  Exemplos:

  $\frac{15}{100} \longrightarrow$ lê-se **quinze centésimos**

  $\frac{3}{10} \longrightarrow$ lê-se **três décimos**

- **Quando o denominador é menor que 10**, para cada fração existe um termo para a sua leitura:

  $\frac{1}{2} \longrightarrow$ um meio

  $\frac{2}{3} \longrightarrow$ dois terços

  $\frac{3}{4} \longrightarrow$ três quartos

  $\frac{2}{5} \longrightarrow$ dois quintos

  $\frac{5}{6} \longrightarrow$ cinco sextos

  $\frac{3}{7} \longrightarrow$ três sétimos

  $\frac{6}{8} \longrightarrow$ seis oitavos

  $\frac{5}{9} \longrightarrow$ cinco nonos

- **Quando o denominador é maior que 10**, lê-se o numerador, o denominador e acrescenta-se a ele a palavra **avos**.

  Exemplos:

  $\frac{6}{21} \longrightarrow$ seis vinte e um avos

$\frac{5}{13} \longrightarrow$ cinco treze avos

Uma das justificativas do significado de “avos” é

Segundo Dante (2003, p. 125), **avos** quer dizer: “divisão em partes iguais.”

Outra justificativa, possivelmente tenha se originado de “oitavos”.

No trabalho feito até aqui com os alunos, foram trabalhadas duas personalidades do número racional: divisão (quociente) e relação parte-todo (fração).

Como dizem Onuchic e Botta, 1997, p. 6, o significado **quociente** é percebido quando um número de objetos precisa ser repartido ou dividido igualmente num certo número de grupos *(problema das pizzas)*. Nas aplicações, este modo aparece mais freqüentemente do que os outros. Ele se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão (por ex. $\frac{2}{3}$ é o resultado da divisão de dois objetos entre três pessoas).

Ainda dizem essas autoras que, no significado **parte-todo (medida),** a unidade é introduzida na forma de uma figura contínua (por ex. um pedaço de corda) ou um conjunto discreto (por ex. um determinado número de balas). Aqui o todo é repartido em partes de igual tamanho. Como medida, envolve medir a área de uma região ao parti-la e cobri-la com unidades de um tamanho apropriado (formas congruentes ou não de mesma área).

Esta ação pode levar a um quociente partitivo (medida) ou quotitivo (cotas).

Como dizem Onuchic e Botta, na divisão partitiva, o dividendo é repartido no número de partes especificadas pelo divisor e o resultado, chamado quociente, é o tamanho de cada uma das partes. Na divisão quotitiva, o divisor especifica uma medida que será repetidamente extraída do dividendo, e o quociente será um número puro, o número de quotas.

Exemplos:

- ✓ Em uma escola há 5 crianças em cada fila. Quantas filas haverá se houver 15 crianças?

15 crianças	5 crianças/fila	quotitiva, sem resto
0	3 filas	

- ✓ Temos 14 cadeiras e precisamos colocá-las em duas filas de mesmo tamanho. Quantas cadeiras haverá em cada fila?

14 cadeiras	2 filas	partitiva, sem resto
0	7 cadeiras/fila	

- ✓ Quantas pilhas de 4 cubos cada uma podem ser feitas com 17 desses cubos?

17 cubos	4 cubos/pilha	quotitiva , com resto 1 (cubo)
1	4 pilhas	

- ✓ Se 19 cubos forem agrupados em 3 pilhas, quantos cubos haverá em cada pilha?

19 cubos	3 pilhas	partitiva, com resto 1 (cubo)
1	6 cubos/pilha	

Pode-se observar que várias situações-problema poderiam ter sido apresentadas aos alunos de modo que eles pudessem perceber as duas diferentes idéias que a divisão pode assumir, até sentirem-se confortáveis ao resolver esses problemas.

A divisão é dita partitiva quando se divide um total num certo número de partes e é quotitiva quando se divide o total pelo tamanho da parte. Como, na maioria das vezes, o professor do 3º ciclo assume que as crianças já tenham um certo desembaraço com a operação divisão, nem sempre dá a devida atenção a esse conceito envolvendo essas duas idéias.

Foi necessário utilizar a **5 ª aula** para completar a formalização pretendida.

Frações equivalentes:

Nas **6ª** e **7ª aulas**, voltei para a *atividade 2* trabalhada na **5ª aula**.

2) Faça 3 retângulos, iguais ao retângulo abaixo, e represente neles as seguintes frações: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$.

Para essa aula, meu objetivo era o de fazer com que os alunos fixassem a idéia de que várias frações, escritas de formas diferentes, poderiam representar a mesma quantidade e, posteriormente, construir o conceito de frações equivalentes.

As resoluções dessa atividade foram recolhidas e levadas à plenária.

Durante a plenária, na análise do material entregue pelos grupos, observei que alguns deles não se preocuparam em manter o todo sempre do mesmo tamanho, isto é, em manter, durante a atividade, sempre o mesmo todo.

O grupo 2

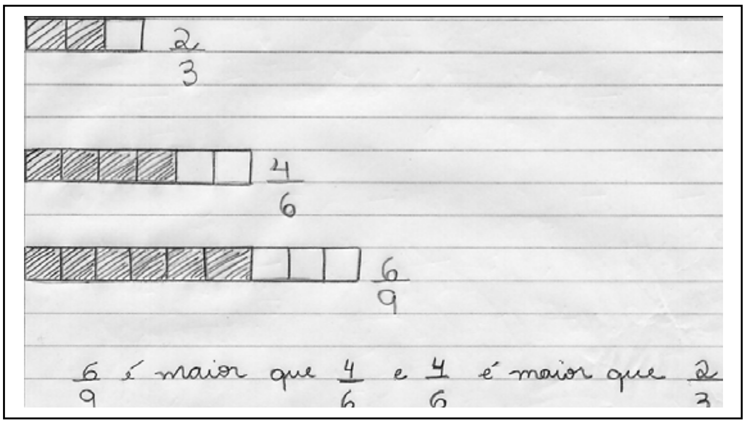


Figura 4.2.21 – Grupo 2 (Atividade 2)

parece que só se preocupou com a forma do retângulo e não com a sua área. Esse grupo não utilizou sempre o todo do mesmo tamanho, chegando a afirmar que $\frac{6}{9}$ é maior do que $\frac{4}{6}$ e que $\frac{4}{6}$ é maior do que $\frac{2}{3}$. Nota-se que esse grupo manteve a unidade fracionária do mesmo tamanho em todos os retângulos. Indicando, no primeiro retângulo a parte fracionária igual a $\frac{1}{3}$ do todo; no segundo, igual a $\frac{1}{6}$ do todo; e no terceiro, igual a $\frac{1}{9}$ do todo. Esse é um erro muito grave e freqüente que acontece quando não se trabalha com cuidado o conceito de todo.

No entanto, outros grupos conseguiram fazer a representação correta utilizando, para o todo, o retângulo apresentado no enunciado. Vê-se que souberam ler e interpretar o que foi pedido.

O grupo 9 fez assim

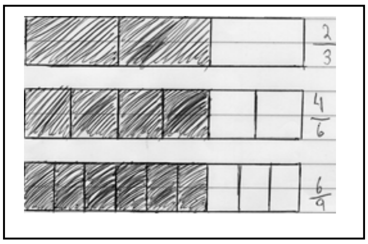


Figura 4.2.22 – Grupo 9 (Atividade 2)

O grupo 3 fez assim

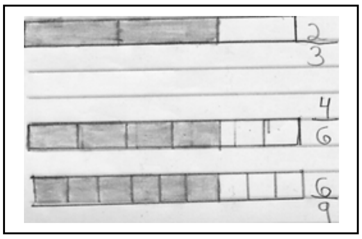


Figura 4.2.23 – Grupo 3 (Atividade 2)

Ambos os grupos 9 e 3 não deixaram suas justificativas por escrito, apenas fizeram sua representação geométrica. Parece que eles consideraram a representação deixada como suficiente para responder o problema.

Ainda, com os alunos envolvidos nesse contexto, foram distribuídas três folhas de papel sulfite para cada grupo e lhes pedi para representar nessas folhas as quantidades pedidas no problema em questão.

Os alunos tiveram um pouco de dificuldade em dividir a folha em 3 partes iguais e, então, lhes dei algumas dicas sobre dobraduras. A partir daí, eles logo notaram que para dividir em 6 partes iguais teriam que dividir em 3 partes e que cada terço deveria ser dividido em 2 partes iguais e assim por diante.

Enquanto ainda dobravam as folhas, foi-lhes pedido que imaginassem estar falando de tortas e que cada folha de papel sulfite representasse uma delas. Se a Aninha comesse $\frac{2}{3}$ da torta, o João comesse $\frac{4}{6}$ da torta e o Roberto comesse $\frac{6}{9}$ da torta. Quem teria comido mais?

Pedi aos alunos que cortassem as folhas dobradas, de modo que ficassem separados $\frac{2}{3}$ da folha, $\frac{4}{6}$ da folha e $\frac{6}{9}$ da folha.

Alguns alunos, prontamente, colocando os $\frac{6}{9}$ da folha sobre os $\frac{4}{6}$ da folha e as duas partes sobre os $\frac{2}{3}$ da folha, puderam perceber que os três haviam comido a mesma parte da torta, enquanto outros alunos ainda estavam envolvidos com as dobraduras. Deu o sinal para o fim da aula e essa questão, então, foi deixada como tarefa para casa, para ser discutida na aula seguinte.

Na **8ª aula**, retornou-se à discussão desse problema, que tinha como objetivo construir o conceito de frações equivalentes.

Foi dado um tempo para que os grupos se organizassem e retomassem as folhas dobradas e cortadas. Essa atividade foi desenvolvida sem muita intervenção da professora.

Durante a plenária notei que muitos grupos relacionaram a situação das tortas com a tarefa anteriormente desenvolvida e alguns questionamentos foram feitos:

- Quem comeria mais, a Aninha, o João ou o Roberto?

Um aluno do grupo 7 disse: - Professora, o Roberto comeria mais.

Esse aluno, seguramente, pensava nos $6 \succ 4 \succ 2$ sem cogitar dos valores das partes, $\frac{1}{9} \prec \frac{1}{6} \prec \frac{1}{3}$.

Foi pedido para que um deles fizesse, na lousa, uma representação gráfica dessa situação.

Logo depois, um aluno do grupo 5 disse:

- Acontece que eles vão comer a mesma quantidade. É igual à atividade dos retângulos!
- Por quê?, perguntei.

E o aluno foi à lousa para fazer a representação, dizendo:

- Para comer $\frac{2}{3}$, teria que dividir a torta em 3 pedaços iguais e pegar duas. (fez a representação na lousa)
- Para comer $\frac{4}{6}$, teria que pegar a mesma torta, dividir em 6 partes iguais e pegar 4 delas. (fez a representação na lousa com o todo do mesmo tamanho)

- Para comer $\frac{6}{9}$, teria que pegar a mesma torta, dividir em 9 partes iguais e pegar 6 delas. (também fez a representação com o todo do mesmo tamanho)
- Então, disse ele, pelo desenho dá para ver que são a mesma quantidade de torta!

Nesse momento, perguntei para a classe:

- Isso significa que $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ são iguais?

Uma aluna do grupo 3 disse:

- Professora, pelo desenho eu consigo ver que são iguais, mas pelos números não.

Pedi, então, que observassem as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$, e perguntei:

- Alguém consegue ver alguma semelhança?

Por alguns instantes os alunos se detiveram a observar essas duas frações na lousa. E disseram que não viam nada.

Insisti, dizendo:

- Mas vejam, em quantas partes o todo foi dividido na primeira fração? E na segunda?

Uma aluna do grupo 1, disse:

- Professora, a segunda fração foi dividida em três partes **a mais** do que a primeira.
- E existe uma relação, como essa, nos numeradores de cada uma das frações?, perguntei.
- O numerador da segunda fração é duas vezes o numerador da primeira. – disse essa aluna do grupo 1.
- Essa relação pode ser vista também no denominador?, perguntei mais uma vez.

Nesse momento, um aluno do grupo 9 disse:

- Professora, tanto o numerador quanto o denominador na primeira fração ($\frac{2}{3}$) foram multiplicados por 2, para ficar igual à segunda ($\frac{4}{6}$).

Complementando o que esse aluno havia afirmado, disse:

- Podemos ver também que se dividirmos os dois termos da fração $\frac{4}{6}$ por 2 encontraremos a fração $\frac{2}{3}$.

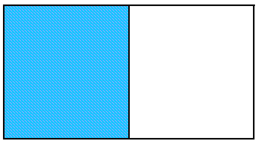
Após algumas considerações, foi discutida a relação que há entre estes números fracionários, ou seja, que $\frac{4}{6}$ foi obtido quando se multiplicou por 2 tanto o numerador quanto o denominador de $\frac{2}{3}$, e que chegaram a $\frac{6}{9}$ quando se multiplicou por 3, tanto o numerador quanto o denominador de $\frac{2}{3}$. Disse, então, que essas frações: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ e $\frac{6}{9}$ são ditas **frações equivalentes**.

A atividade manipulativa, mexendo com as folhas de sulfite, contribuiu para que eles percebessem que, quando se comparam frações, o todo deve ser sempre o mesmo e que o tamanho das partes fracionárias é que varia, de acordo com o número de partes em que o todo foi dividido. Além disso, notaram que $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9}$, como números, embora representem ações diferentes.

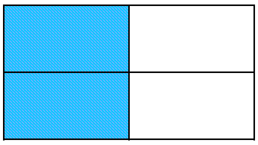
A partir daí, formalizando, foi possível escrever na lousa o conceito de frações equivalentes.

Frações Equivalentes

Observe as seguintes figuras:



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$

As frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ são chamadas **frações equivalentes** e indicamos essa equivalência por: $\frac{2}{4} \sim \frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Assim, duas ou mais frações que representam a mesma parte da unidade (todo) são chamadas **frações equivalentes**, isto é, frações equivalentes têm o mesmo valor em relação à mesma unidade.

Observei que a palavra equivalência significa de igual valor.

$$\begin{cases} equi = igual \\ valência = valor \end{cases}$$

Para se construir a classe de equivalência de uma dada fração, basta aplicar a seguinte regra:

"Quando **multiplicamos** ou **dividimos os termos de uma fração por um mesmo número**, diferente de zero, obtemos uma **fração equivalente** a ela."

Na **9ª aula**, foi recolhida a

> **Tarefa Extraclasse:** Quanto dá?
>
> a) $\frac{1}{2}$ de 46;
>
> b) $\frac{1}{3}$ de 69;
>
> c) $\frac{2}{5}$ de 100.

deixada na aula anterior e feita a discussão da mesma.

Para essa aula, objetivava-se que os alunos questionassem a existência de algum caminho matemático que levasse a resolver esses problemas, ao fazer o cálculo de fração de uma quantidade numérica dada.

Durante a plenária e ao analisar o material entregue pelos grupos, observei que eles, em sua maioria, recorriam aos métodos utilizados a partir da representação geométrica do todo. Eles representavam o todo e o dividiam pelo denominador, tomando a quantidade de partes indicada pelo numerador.

O grupo 7

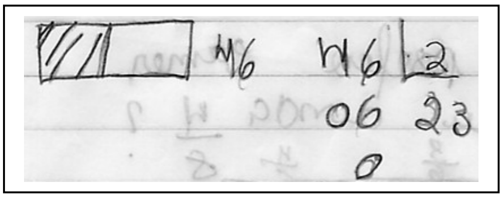


Figura 4.2.24 – Grupo 7 (Tarefa)

ao trabalhar o item **a**, nesse caminho, dividiu o 46 em 2 partes e pintou uma delas, sem explicitar o resultado da operação pedida.

O grupo 1

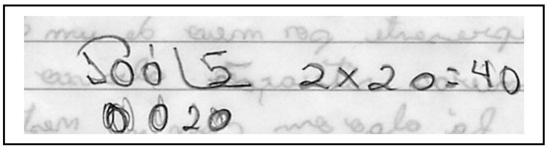


Figura 4.2.25 – Grupo 1 (Tarefa)

ao discutir o item **c**, seguiu os mesmos passos e, como o numerador era diferente de um, eles se lembraram de considerar as partes tomadas no numerador, ou seja, de multiplicar o resultado da divisão pelo número dado no numerador.

O grupo 8

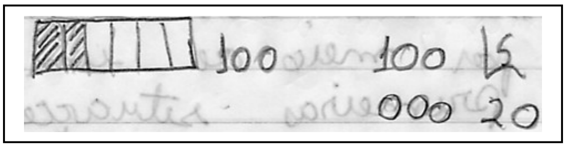


Figura 4.2.26 – Grupo 8 (Tarefa)

também no item **c**, utilizou a representação geométrica para justificar suas respostas, esquecendo-se de considerar as duas partes fracionárias pintadas. Além disso, cometeu o erro (muito comum) de, ao querer dividir em cinco partes, fazer cinco cortes no todo, obtendo seis partes do todo.

O grupo 2

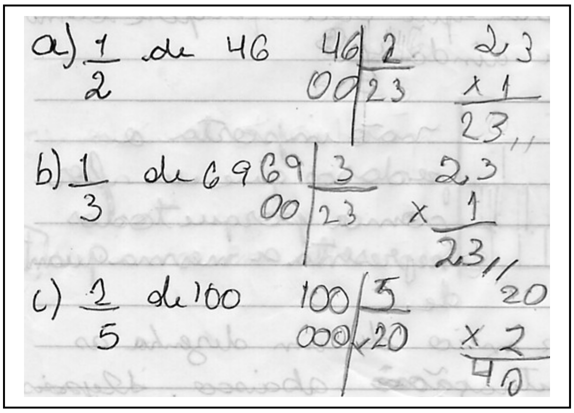


Figura 4.2.27 – Grupo 2 (Tarefa)

utilizou-se de recursos aritméticos e mostrou compreender, que ao dividir o todo, o quociente representava cada parte pedida daquele todo, ou seja, quando dividiram 100 por 5 e encontraram 20, conseguiram notar que 20 representava uma das partes fracionárias em que o todo foi dividido e, como o exercício pedia $\frac{2}{5}$ de 100, fizeram $20 \times 2 = 40$, chegando à solução.

De modo geral, os alunos não questionaram por outros caminhos que a Matemática pudesse oferecer pois, para eles, foi natural continuar com o raciocínio utilizado anteriormente. Isto reflete que, na maioria, os alunos não são criativos ou não se lhes dá oportunidade de serem criativos. Estão acostumados a sempre repetir o que o professor faz.

Durante a plenária a professora fez alguns questionamentos:

- E se no item **c** ao invés de $\frac{2}{5}$ tivéssemos pedido $\frac{4}{5}$ de 100, como fariam esse cálculo?

Um aluno do grupo 4 disse:

- Teríamos que dividir em cinco partes e pegar quatro.

Continuei:

- Como se chama cada parte fracionária?
- Um quinto!, disse um aluno do grupo 3.
- Quantos “um quinto” teremos que pegar agora?
- 4, somamos quatro quintos!, disse o mesmo aluno do grupo 3.
- Há uma outra forma de calcular isso?, eu disse.

Uma aluna do grupo 1, disse:

- Professora, se multiplicarmos por 4 também dá.

Nesse momento os alunos observaram que, para os itens **a** e **b**, também valia esse mesmo procedimento.

Assim, foi possível mostrar para os alunos a regra prática para se achar as partes de um todo, ou seja, que se divide o todo pelo denominador e o resultado obtido é multiplicado pelo numerador.

A partir das representações geométricas, que era o ponto de partida deles para a busca da solução, com a imagem dela criada pelos alunos, pôde-se chegar à regra prática que, em geral, é "dada" a eles no início do trabalho com esse tópico.

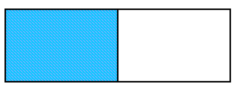
Apesar de no objetivo, para esse problema, ter aparecido a idéia de operador como uma outra personalidade do número racional, deixei os alunos trabalharem com os recursos que tinham e chegar à regra prática que diz como operar nesse caso. Embora não tenha sido trabalhado, em sala de aula, com eles a idéia de "operador", uma outra personalidade do número racional, gostaria de deixar, para possíveis leitores, aqui registrado esse trabalho.

Lembrando que o dobro de cinco é o mesmo que 2×5 e que o triplo de 4 é o mesmo que 3×4, percebemos que quando se fala em uma quantidade de outra quantidade, se está relacionando multiplicativamente essas duas quantidades.

Assim, ao dizer $\frac{1}{2}$ de 46, estou falando de $\frac{1}{2} \times 46$.

Como fazer essa multiplicação?

- $4 \times 8 = 8 + 8 + 8 + 8 = 32$
- $5 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$
- $\frac{1}{2} \times 20 = ?$



10

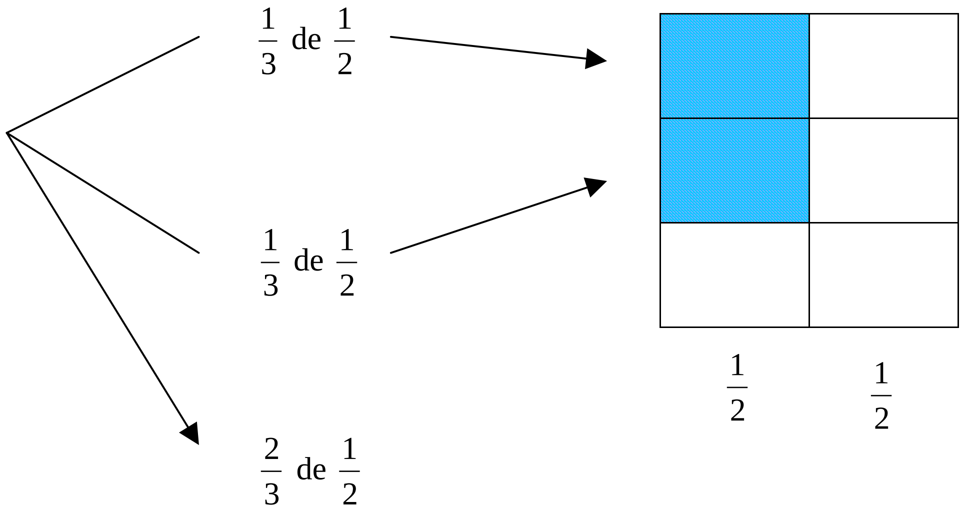
o que significa $20 \div 2 = 10$

Assim, achar a metade de 20, $\left(\frac{1}{2} \times 20\right)$, corresponde a fazer $20 \div 2 = 10$.

- Outro caso a considerar seria achar $\frac{2}{3}$ da metade de uma figura dada, ou seja, achar duas terças partes da metade da figura.

Quando tratamos de multiplicações onde seus fatores são números fracionários, o aluno, pela primeira vez, vai deparar-se com um novo significado dado a uma operação, diferente daquele visto com números naturais. Neste caso, será necessário concretizar este novo significado, dando-lhe o sentido de “partes das partes de um total considerado”.

Assim,



Ou seja: $\frac{2}{6}$ da figura toda $\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}\right)$ ou simplificando $\frac{1}{3}$.

$$\boxed{\frac{2}{3}\,de\,\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \times 2\right) \div 3 = \left(\frac{1}{2} \div 3\right) \times 2 = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

Nesses dois últimos casos, os números racionais $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ funcionam como operador, ou seja, é o multiplicador na operação multiplicação.

Segundo Onuchic e Botta (1997, p. 6), o significado de operador é semelhante ao processo de “encolher” ou de “esticar”, de “reduzir” ou de “ampliar”. Define uma estrutura multiplicativa de números racionais que é a “mais algébrica destas idéias básicas”. Ainda, como multiplicação, a $\times$ b, onde **a** é o multiplicador e **b** é o multiplicando, $\frac{2}{3}$ pode ser visto assim:

- ✓ $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ (duas vezes $\frac{1}{3}$)
- ✓ $\frac{2}{3} = 1 \times \frac{2}{3}$ (uma vez $\frac{2}{3}$)
- ✓ $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 1$ ($\frac{2}{3}$ de 1)
- ✓ $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ ($\frac{1}{3}$ de 2)

Nesta tarefa dada, “de” aparece com o sentido de multiplicação. Assim,

a) $\frac{1}{2}$ de 46 = 23, ou seja, (46 $\times$ 1) $\div$ 2 = 23 ou (46 $\div$ 2) $\times$ 1 = 23, isto é, o multiplicador atuou sobre 46 como uma função composta.

Analogamente,

b) $\frac{1}{3}$ de 69 = $\frac{1}{3}$ $\times$ 69 = 23

Ainda,

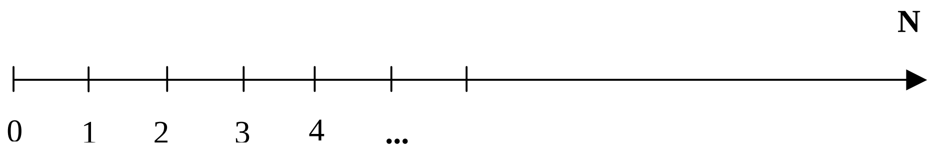
c) $\frac{2}{5}$ de 100 = $\frac{2}{5}$ $\times$ 100 = 40, pois (100 $\times$ 2) $\div$ 5 = 40 ou (100 $\div$ 5) $\times$ 2 = 40

Aqui nesses casos, vê-se o número racional como um operador, que se mostra como um redutor. E pode-se afirmar que:

- Se o multiplicador, na multiplicação, é uma fração própria, o produto será menor que o multiplicando, isto é, o operador é um redutor.
- Se o multiplicador, na multiplicação, é uma fração imprópria, o produto será maior que o multiplicando, isto é, o operador é um ampliador.

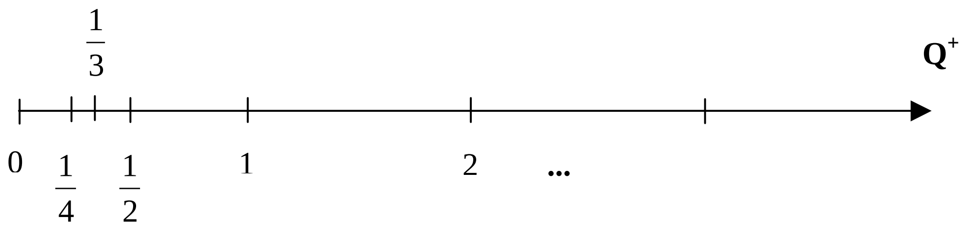
Uma outra personalidade do número racional, que não foi trabalhada em minha sala de aula, mas que quero deixar aqui registrada, é o **número racional visto como um ponto na reta.**

Na reta **N**, localizamos os números naturais, a partir de zero, assim:



Na reta $\mathbf{Q}^{+}$, localizamos todos os números naturais e todos aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com a, b $\in$ **N**, b $\neq$ 0.

Ao pedir para localizar os números racionais $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ como pontos na reta numerada, o cuidado que se deve ter é que $\frac{1}{2} \succ 0$ e $\frac{1}{2} \prec 1$; $\frac{1}{3} \succ 0$ e $\frac{1}{3} \prec 1$; $\frac{1}{4} \succ 0$ e $\frac{1}{4} \prec 1$. Logo, esses números se localizam na reta numerada.



Assim, $\frac{1}{2}$, à igual distância de 0 e 1; $\frac{1}{3}$, a $\frac{1}{3}$ de zero e $\frac{2}{3}$ de 1; e $\frac{1}{4}$, a $\frac{1}{4}$ de 0 e $\frac{3}{4}$ de 1.

A atividade de localizar um número racional na reta numerada leva o aluno a fazer estimativas de localização de pontos entre dois números racionais nela representados.

Deixo aqui registrada essa personalidade pois sabe-se que é erro freqüente ao se pedir que marque na reta $\frac{2}{3}$, muitos alunos irem localizá-lo entre 2 e 3.

Na **10ª aula**, foi entregue aos grupos o

Problema 4: Renata ganhou de sua mãe uma barra de chocolate de um quilo. Ela poderia consumi-la sozinha. Sua mãe, porém, lhe advertiu que não comesse tudo de uma só vez. Assim, Renata resolveu dividir a barra de chocolate em 4 partes iguais. No Sábado ela comeu uma das partes. Na 2ª-feira, comeu outra parte. Quanto Renata comeu do chocolate no Sábado (kg)? E até 2ª-feira, quanto ela já havia comido da barra? Quanto lhe sobrou da barra? Quanto representa em gramas cada parte da barra repartida por ela?

Para essa aula, o objetivo foi o de fazer com que o aluno representasse, cada parte fracionária, da barra de chocolate consumida, em relação ao todo, barra de chocolate, como um número fracionário e como medida de quantidade (peso).

Um outro objetivo foi o de dar início à construção dos conceitos de adição e subtração de frações.

No enunciado deste problema, há perguntas que pedem respostas, visando à quantidade, em gramas, que Renata consumiu e outras que pedem a parte fracionária da barra de chocolate que foi consumida.

Foi dado um tempo para que lessem e interpretassem o problema entre os integrantes dos grupos. Durante uma primeira observação, notei que a maioria dos grupos utilizava a representação geométrica para resolver o problema. Eles faziam a representação com os dados do problema.

Alguns grupos questionaram quantos gramas havia em um quilo de chocolate. Porém, quando esta questão foi levantada, um dos alunos prontamente respondeu que eram 1000 gramas.

Após recolher esta atividade foi feita a plenária. Durante a plenária e, ao analisar o material entregue pelos grupos, notei que grande parte deles conseguiu fazer uma boa resolução desse problema, utilizando a representação gráfica da situação.

O grupo 9

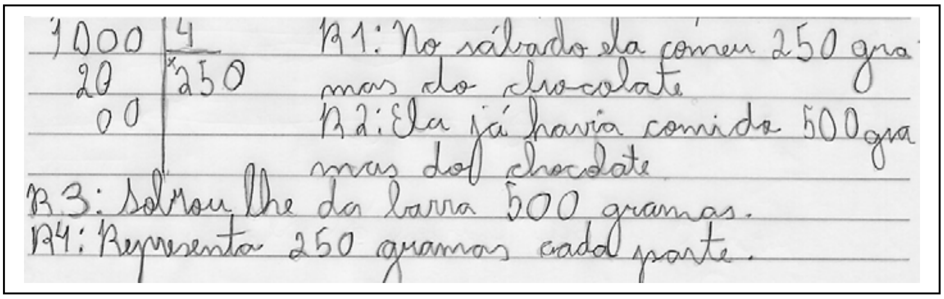


Figura 4.2.28 – Grupo 9 (Problema 4)

deixou sua resolução em gramas. Esse grupo dividiu 1000 gramas por 4, encontrando como quociente 250 gramas. A partir disso, eles utilizaram técnicas operatórias de adição e de subtração para responder às questões do problema com números naturais, deixados em gramas.

O grupo 2

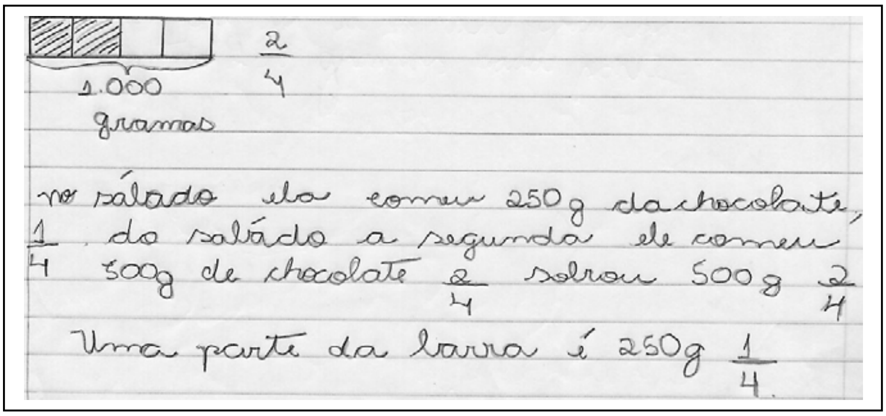


Figura 4.2.29 – Grupo 2 (Problema 4)

deixou sua resolução em números fracionários e em gramas, mas não mostrou a que todo se referia quando disse $\frac{1}{4}$ e $\frac{2}{4}$. Afirmou que no sábado ela havia comido 250 g de chocolate, ou $\frac{1}{4}$, sem escrever, corretamente, $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate.

Dentre os grupos, o grupo 7

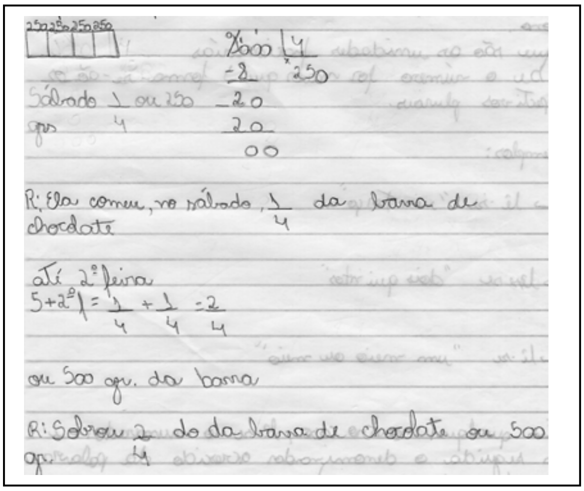
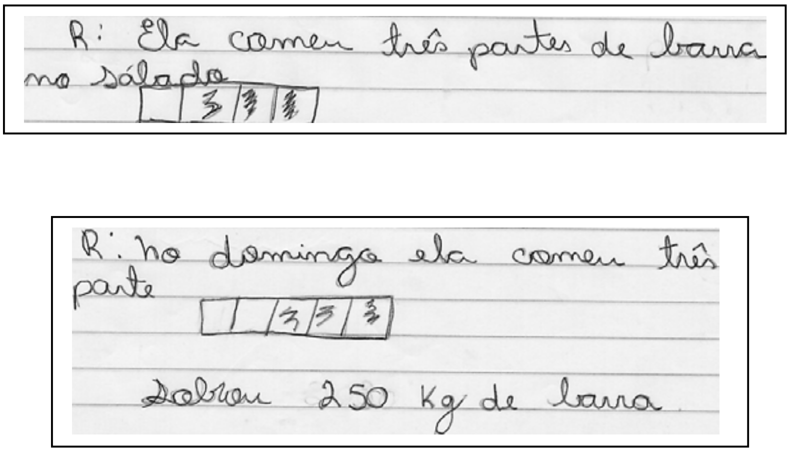

250 250 250 250
1000 | 4
−8 | 250
20
−20
00
Sábado $\frac{1}{4}$ ou 250 gr
R: Ela comeu, no sábado, $\frac{1}{4}$ da barra de chocolate
até 2ª feira
$5+2^a) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$
ou 500 gr. da barra
R: Sobrou $\frac{2}{4}$ da barra de chocolate ou 500 gr

Figura 4.2.30 – Grupo 7 (Problema 4)

fez uma indicação formal da adição de frações. Ao responder o que havia sobrado da barra de chocolate, esses alunos deixaram suas soluções em números fracionários e em gramas embora tivessem considerado 500 gramas da barra ao invés de 500 gramas de chocolate. Esse grupo afirmou que havia sobrado $\frac{2}{4}$ da barra de chocolate ou 500 gramas. Deveriam ter dito 500 gramas de chocolate, pois eles já haviam relacionado $\frac{1}{4}$ da barra com 250 gramas de chocolate.

O grupo 4


R: Ela comeu três partes de barra no sábado

R: no domingo ela comeu três parte

Sobrou 250 Kg de barra

Figura 4.2.31 – Grupo 4 (Problema 4)

afirmou que ela havia comido três partes da barra no sábado. Isso indica que o grupo não leu, ou não soube interpretar, corretamente o enunciado do problema, ao dizer que havia comido três partes da barra. Além disso, afirmaram esses alunos que, no domingo, ela também havia comido três partes, no entanto, não havia referência a domingo no problema. Em sua representação, na primeira figura, a barra está dividida corretamente em quatro partes, porém não justificaram quantos gramas havia em cada parte da barra. Na segunda figura, o grupo dividiu a barra em cinco partes e marcou três. O que será que pensaram? Errada também se mostrou a sobra.

O primeiro objetivo colocado para esse problema não foi atingido, por todos os grupos, visto que, na maioria, os alunos, ao usarem a equivalência uma barra de chocolate igual a um quilo de chocolate igual a mil gramas de chocolate, passaram a trabalhar com números naturais e a medida gramas.

Acredito que, pelo fato de se colocar, no enunciado, o peso da barra em quilogramas, os alunos deixaram de trabalhar com as partes fracionárias da barra e, assim, o segundo objetivo, trabalhar com frações, foi um pouco prejudicado.

Na plenária houve minha intervenção ao dizer que, ao juntar algumas das partes iguais em que a barra foi dividida, do fazer $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ eles podiam pensar em,

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, desde que as partes são unidades de mesma natureza: $\frac{1}{4}$ da barra.

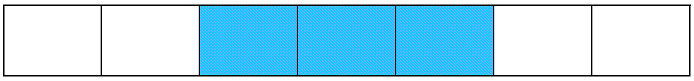
Disse também, durante a plenária, depois de os alunos haverem compreendido as justificativas acima que, como recurso prático da Matemática, quando se faz $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, ou quando se faz a adição de frações com mesmo denominador, sempre se obtém outra fração de mesmo denominador, e para numerador, adicionam-se os numeradores. Assim,

$$\boxed{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{2}{4}}$$

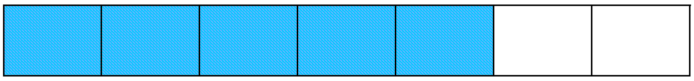
<u>Adição e subtração de frações com o mesmo denominador:</u>

Pedi que observassem as situações seguintes, dadas graficamente:

$\frac{2}{7}$



$\frac{3}{7}$



$\frac{5}{7}$

Diante de meus questionamentos, puderam responder e disseram que o ***todo***: $1 = \frac{7}{7}$, e disseram que o todo foi dividido em 7 partes iguais e que cada parte recebeu o nome de $\frac{1}{7}$.

Perguntei:

Como expressar numericamente a operação $\frac{2}{7} + \frac{3}{7}$?

Olhando nos desenhos, viram que:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = 2 \times (\frac{1}{7}) + 3 \times (\frac{1}{7}) = (2 + 3) \times \frac{1}{7} = 5 \times (\frac{1}{7}) = \frac{5}{7}$$

e disse, então, que, simplificando, pode-se escrever:

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$ (dá-se o mesmo denominador e adicionam-se os numeradores)

Formalizando, escrevi na lousa:

“A soma de duas frações de *mesmo denominador* é uma fração que tem o mesmo denominador e por numerador *a soma dos numeradores*.”

Continuei e pedi que, observando as figuras, fizessem $\frac{5}{7} - \frac{3}{7}$.

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = 5 \times (\frac{1}{7}) - 3 \times (\frac{1}{7}) = (5-3) \times \frac{1}{7} = 2 \times (\frac{1}{7}) = \frac{2}{7}$$

ou de um modo simplificado:

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$$

Analogamente, $\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$

e formalizando escrevi na lousa:

"A diferença de duas frações de *mesmo denominador* é uma fração que tem por numerador *a diferença dos numeradores* e por denominador o *denominador comum."*

Para desenvolver esse trabalho foi necessário utilizar as **11ª** e **12ª aulas**.

Na **13ª aula**, foi entregue aos grupos o

Problema 5: Gastei $\frac{2}{5}$ de meu salário com o aluguel. Do que sobrou, $\frac{1}{2}$ em alimentação. Da 2ª sobra, $\frac{1}{3}$ foi colocado na poupança. E ainda sobraram R$100,00. Qual é o meu salário?

e dado um tempo para que o lessem e discutissem entre os integrantes do mesmo.

Para essa aula, objetivava-se fazer com que os alunos fossem capazes de fazer uma representação gráfica do que se pedia na linguagem escrita, trabalhar os conceitos de adição e subtração de frações, construídos anteriormente, e trabalhar a variação do todo. Além disso, esse problema exigiria conceitos ainda não trabalhados mas que, através de uma representação gráfica, os alunos poderiam ser capazes de resolvê-lo.

Pode parecer estranho ao leitor apresentar esse problema. É verdade que eles já conseguiam fazer representações gráficas para o todo e para frações e trabalhar as operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais.

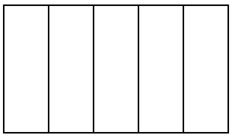
Esse problema está sendo entregue como um desafio: Como os grupos podem operar diante dele?

Quando propus este problema, minha expectativa era a de que, depois de saber fazer adição e subtração de frações com o mesmo denominador, algum grupo, ao olhar na representação gráfica do problema, pudesse pensar em algo assim:

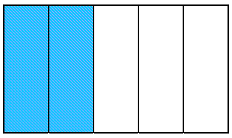
1. Desenhar um retângulo representando o salário:

1 

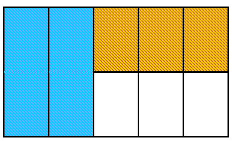
2. Ao dividir o retângulo em 5 partes iguais, o todo seria:

$1 = \frac{5}{5}$ 

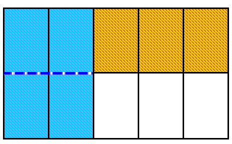
3. Como o aluguel consumiria $\frac{2}{5}$ do salário, a primeira sobra seria dada por:

aluguel  $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

4. Que os grupos pudessem, ao olhar o desenho, imaginar que metade dessa sobra fosse desenhada.

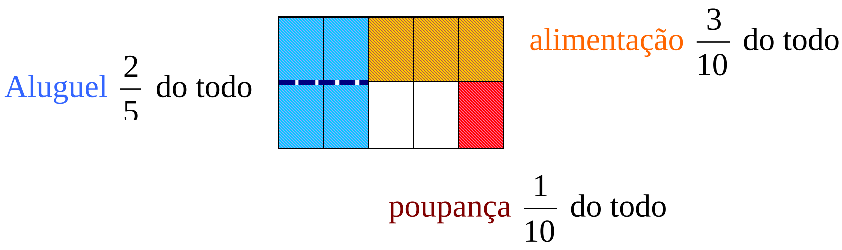
aluguel $\frac{2}{5}$ do todo  alimentação

e ver que $\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$ e reconhecer que $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ e $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ e o todo $1 = \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$

aluguel $\frac{2}{5}$ do todo  alimentação $\frac{3}{10}$ do todo

5. Olhando na figura percebessem que a segunda sobra é igual a $\frac{3}{10}$.

6. Na continuação, o problema diz que $\frac{1}{3}$ da segunda sobra, $\frac{3}{10}$, seria colocado na poupança.



Olhando na figura acima, ver que $\frac{1}{3}$ da 2ª sobra, isto é, $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{10} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10}$ foi colocado na poupança.

Desse modo, a terceira sobra representa $\frac{2}{10}$ do salário.

7. Se $\frac{2}{10}$ do salário é igual a R$ 100,00, então $\frac{1}{10}$ é a metade de R$ 100,00 e, portanto, igual a R$ 50,00.

Se cada $\frac{1}{10}$ do salário vale R$ 50,00 e o todo é igual a $\frac{10}{10}$, o salário é $10 \times$ R$50,00 = R$ 500,00.

Na verdade, não esperava que tudo isso pudesse acontecer mas, de qualquer forma, desejava submeter essas crianças a um desafio, onde a criatividade e a compreensão pudessem levá-los a algumas boas idéias. Mas, o que aconteceu foi o seguinte:

Durante a observação dos grupos notei que os mesmos tinham dificuldade em perceber que as frações dadas pelo problema referiam-se a vários todos. O todo mudava nos momentos em que se consideravam as sobras do salário quando pago o aluguel, após o gasto com alimentação e quando parte dele foi colocada na poupança.

O grupo 9

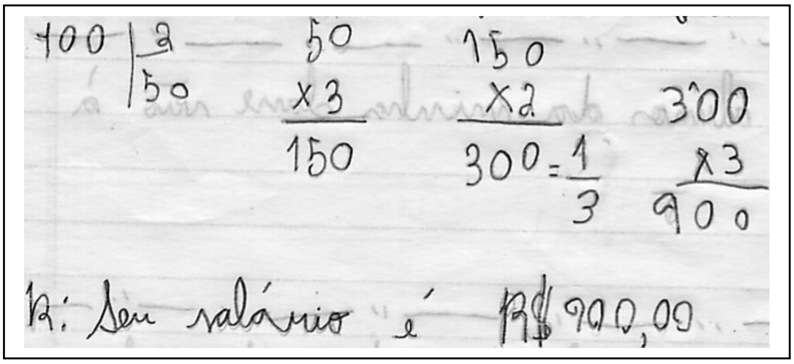


Figura 4.2.32 – Grupo 9 (Problema 5)

não fez uma representação geométrica para a situação apresentada no problema. No entanto esse grupo, considerando a sobra final: 100 e imaginando que essa quantia se referia a dois pedaços iguais resultantes de $\frac{1}{3}$ da 2ª sobra, fez 100 dividido por 2, resultando 50. O número 50 foi multiplicado por 3, resultando 150, como metade da 1ª sobra. O 150 foi multiplicado por 2, resultando 300 que foi denominado $\frac{1}{3}$ pelo grupo. Aí houve o erro: $\frac{1}{3}$ de quê? No final, o número 300 foi multiplicado por 3, resultando 900, que foi a resposta dada pelo grupo para o valor do salário. Que pena! Eles estavam indo tão bem!

O grupo 1

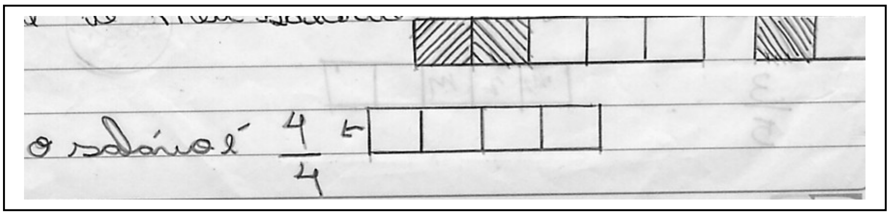


Figura 4.2.33 – Grupo 1 (Problema 5)

fez a representação do salário, com o todo dividido em 5 partes iguais, marcando duas delas. Um outro todo, para eles a parte marcada, foi dividida em duas partes e pegou uma. Sem entender, buscaram o que sobrou das duas figuras sem marcar e afirmaram que o salário era $\frac{4}{4}$. Nota-se que esse grupo não compreendeu o problema, mas arriscaram dar alguma resposta, mesmo sendo absurda.

O grupo 6,

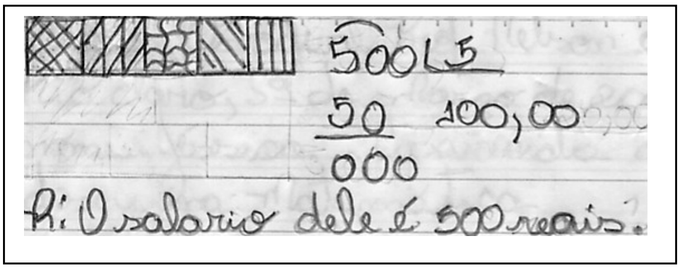


Figura 4.2.34 – Grupo 6 (Problema 5)

por sua vez, apresentou o valor 500 motivado pelo desenho feito por eles e, admitindo como sobra final R\$ 100,00, pensou nessa sobra como $\frac{1}{5}$ do todo. (Na verdade, é isso mesmo! Mas eles não mostraram o porquê.) Assim, dividiu 500 por 5, resultando 100. Deram como resposta que o salário era de 500 reais. Essa é a resposta do problema mas as justificativas dos passos assumidos para a resolução do problema ficaram escondidas.

Poderiam ter mostrado que $\frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2+3+1}{10} =$ $= \frac{6}{10} = \frac{4}{5}$ e, portanto, a sobra é $\frac{1}{5}$ do salário. Mas eles não estavam preparados para operar dessa forma.

O grupo 2

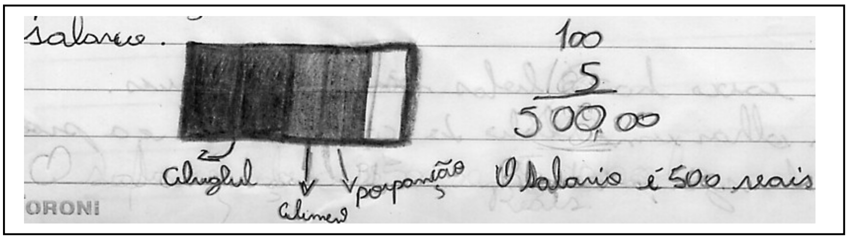


Figura 4.2.35 – Grupo 2 (Problema 5)

fez uma representação do todo que foi dividido em 5 partes iguais, onde duas dessas partes foram destinadas ao aluguel e do restante (3 partes), disseram que uma parte foi destinada à alimentação e a outra foi colocada na poupança restando, uma parte das cinco. Erraram ao considerar $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}$ igual a $\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}$. Como o que sobrou no fim corresponde a $\frac{1}{5}$ do todo, a resposta dada foi a resposta certa (salário de 500 reais), mas o caminho de resolução não foi correto.

Os grupos 3 e 4

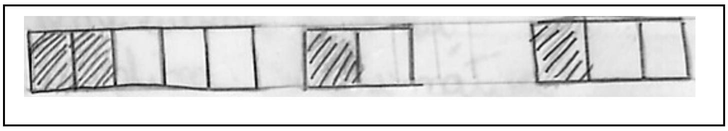


Figura 4.2.36 – Grupo 3 (Problema 5)

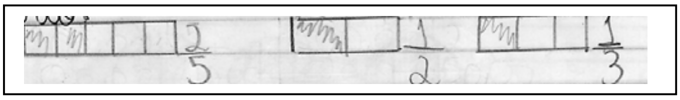


Figura 4.2.37 – Grupo 4 (Problema 5)

fizeram uma representação geométrica para o salário e a dividiram em 5 partes iguais com duas delas pintadas. Desenharam também outro retângulo, representando a parte pintada, que foi dividido em 2 partes com uma delas pintada também, enquanto que o terceiro, a primeira sobra, foi dividido em 3 partes com uma delas pintada. Esses grupos não terminaram de escrever o que haviam pensado.

Não perceberam a mudança dos todos referentes às sobras e pegaram $\frac{1}{2}$ da 1ª parte: $\frac{2}{5}$ (pintada) e $\frac{1}{3}$ da 2ª parte: $\frac{3}{5}$ (sem pintar). Contaram as partes pintadas nos três conjuntos apresentados e não souberam o que fazer com elas.

O grupo 8

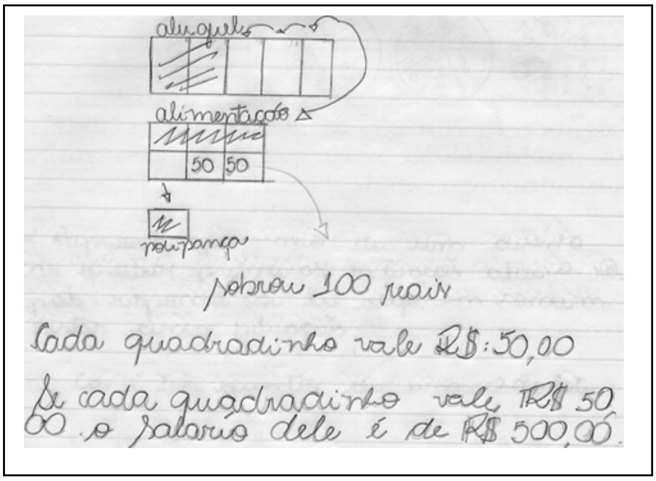


Figura 4.2.38 – Grupo 8 (Problema 5)

foi o único grupo a conseguir perceber que o todo variava, concluindo corretamente o valor do salário.

Na **14ª aula** foi recolhida e discutida a

> **<u>Tarefa Extraclasse</u>:** Calcule:
>
> a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2}$
>
> b) $\frac{7}{8} - \frac{5}{8}$
>
> c) $\frac{5}{11} + \frac{7}{11}$
>
> d) $\frac{7}{8} + \frac{7}{11}$

deixada na aula anterior.

Para essa aula objetivava construir, junto com os alunos, os conceitos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes e justificar a técnica operatória responsável por essa operação.

Observei que os alunos tiveram dificuldade apenas no último item, em que as frações possuíam denominadores diferentes. Nenhum aluno tentou fazer esse cálculo.

Lembrando que $\frac{7}{8} + \frac{7}{11} = 7 \times \frac{1}{8} + 7 \times \frac{1}{11}$ e vendo que $\frac{1}{8}$ é de natureza diferente de $\frac{1}{11}$, essa operação não pôde ser feita com o recurso que eles tinham.

Chamei a atenção para o fato de que era preciso encontrar frações equivalentes a $\frac{7}{8}$ e $\frac{7}{11}$, que tivessem um mesmo denominador.

Foi preciso fazer uma recordação do conceito de frações equivalentes para que eles pudessem resolver esse problema. Além disso, utilizamos a regra prática para o cálculo do m.m.c que havia sido apresentada para alguns alunos, no final da aplicação da Unidade 1.

Reconheço que deveria ter iniciado o ano letivo de 2003, trabalhando o conceito de m.m.c. de dois ou mais números, visto que, esse conceito, em 2002, foi trabalhado apenas com alguns alunos dessa turma. Nesta aula, esse trabalho foi desenvolvido, com a classe, como um problema secundário.

Ao calcular o m.m.c. (8, 11), lembrou-se que 8 e 11 são números primos entre si e que, portanto, o m.m.c. desses dois números é o produto deles. Assim, m.m.c.(8, 11) = 88.

Logo, $\frac{7}{8} = \frac{77}{88}$ e $\frac{7}{11} = \frac{56}{88}$ e, então, $\frac{7}{8} + \frac{7}{11} = \frac{77}{88} + \frac{56}{88} = \frac{133}{88}$.

A partir disso, pude formalizar os conceitos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes escrevendo na lousa:

Adição e subtração de frações com denominadores diferentes.

Quando se adicionam frações com denominadores diferentes, basta considerar frações equivalentes às dadas que tenham o *mesmo denominador* e fazer a adição dessas frações obtidas, seguindo conhecimento anterior.

Foi dado um exemplo:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = ?$$

Nesse caso os denominadores são 3 e 5. É preciso achar um número que seja tanto múltiplo de 3 quanto de 5, de preferência o menor dos múltiplos comuns a 3 e 5, para que possam surgir frações equivalentes a $\frac{4}{5}$ e a $\frac{2}{3}$, com os menores números para facilitar o cálculo. Como o m.m.c. (3, 5) = 15, então:

$$\frac{4}{5} + \frac{2}{3} = \frac{12}{15} + \frac{10}{15} = \frac{22}{15}$$

Como esse mesmo procedimento vale para a subtração escrevi:

$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$$

Foi utilizada a **15ª aula** para completar o que se pretendia na **14ª aula** e, ainda, uma série de exercícios de fixação foram trabalhados individualmente. Foram deixadas tarefas extraclasse em forma de situações-problema.

Nas **16ª** e **17ª aulas**, foram recolhidos e discutidos os problemas deixados para tarefa na aula anterior.

Tarefas Extraclasse:

1. Antônio ganhou de seu patrão uma Colomba Pascal. Seu filho comeu $\frac{1}{3}$ da Colomba. Quanto sobrou da Colomba Pascal?
2. Luciana comeu $\frac{2}{5}$ de uma barra de chocolate e Gabriel comeu $\frac{2}{3}$ do que havia sobrado. O restante eles deram para o Maurício.
   - Quem comeu mais chocolate: Luciana ou Gabriel?
   - Que fração do chocolate Maurício comeu?
3. Com a venda de doces, dona Carminha conseguiu ganhar R$1600,00 neste mês. A metade desse dinheiro ela gastou comprando alimentos. $\frac{1}{4}$ do que restou ela gastou comprando material escolar para Luciana. Com $\frac{3}{8}$ do que ainda sobrou ela comprou um vestido e o restante guardou na poupança.
   - Quanto dona Carminha gastou em alimentos?
   - Quanto custou o material escolar de Luciana?
   - Qual o preço do vestido novo de Dona Carminha?
   - Quanto Dona Carminha guardou na poupança?

O objetivo desta tarefa, nas **1ª** e **2ª questões**, era o de fixar o conceito de subtração de frações e, na **terceira**, o de analisar a postura dos alunos diante de situações-problema que exigem identificar partes do todo e a variação do todo em diferentes situações.

Durante a plenária e ao analisar o material entregue pelos grupos, observei que os mesmos não haviam tido, em geral, dificuldades com a primeira das tarefas dadas.

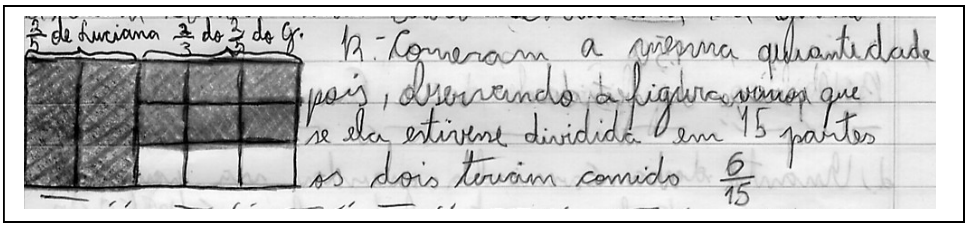
O grupo 9

Figura 4.2.39 – Grupo 9 (Tarefa 1)

fez uma representação e apresentou o algoritmo da subtração de frações para encontrar a sobra da Colomba Pascal.

Na atividade seguinte, observei que os grupos procuraram utilizar recursos geométricos de representação de frações, que já haviam usado anteriormente.

O grupo 9



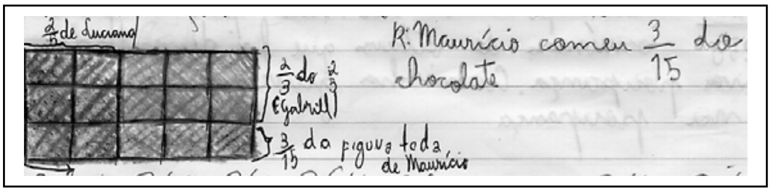
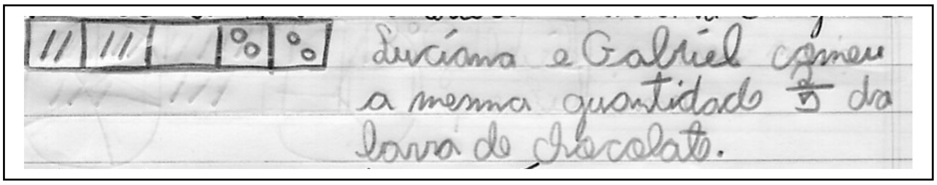


Figura 4.2.40 – Grupo 9 (Tarefa 2)

fez essa representação, verificando que o todo havia mudado, de $1 = \frac{5}{5}$ para $\frac{5}{5} = \frac{15}{15}$ e apresentaram sua solução em 15 avos, que foi o número total de partes iguais em que o todo foi dividido. Além disso, mostrou o que sobrou para Maurício, $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

O grupo 8



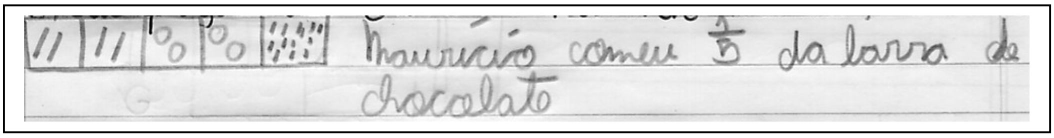


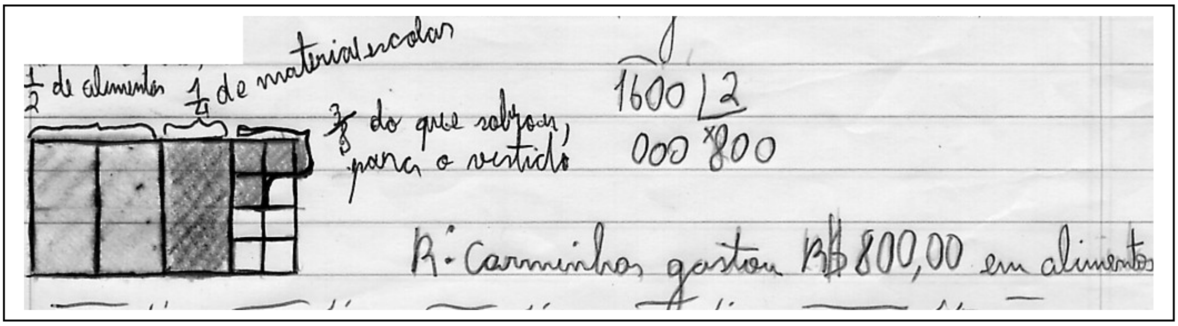
Figura 4.2.41 – Grupo 8 (Tarefa 2)

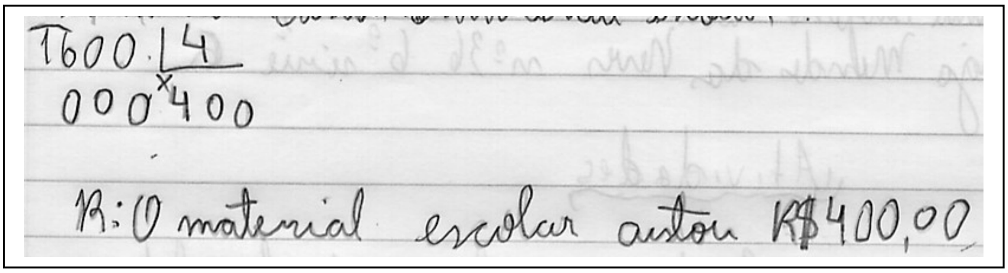
pegou a barra e a dividiu em 5 partes iguais. Tomou duas delas para Luciana, $\frac{2}{5}$. Sobraram 3 dessas partes. Aí, tomaram $\frac{2}{3}$ desse novo todo, a sobra, que estava dividida em 3 partes iguais e representavam $\frac{2}{5}$ do todo inicial. Chegando à resposta correta. Ao responder a segunda parte do problema, corretamente afirmaram que a parte que ficou para o Maurício era $\frac{1}{5}$ da barra de chocolate, além de ter feito a representação gráfica correta.

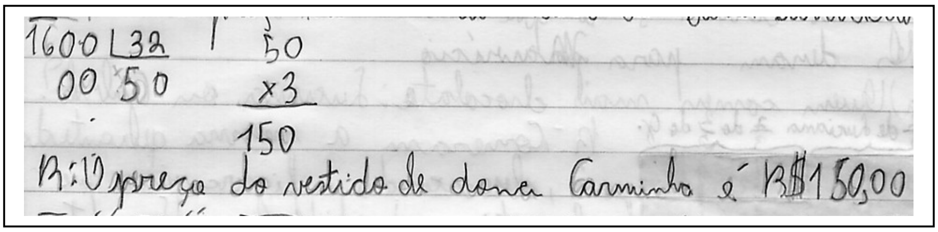
Esse grupo procurou diferenciar, no desenho, a quantidade que Luciana comeu da quantidade de Gabriel com sinais gráficos diferentes.

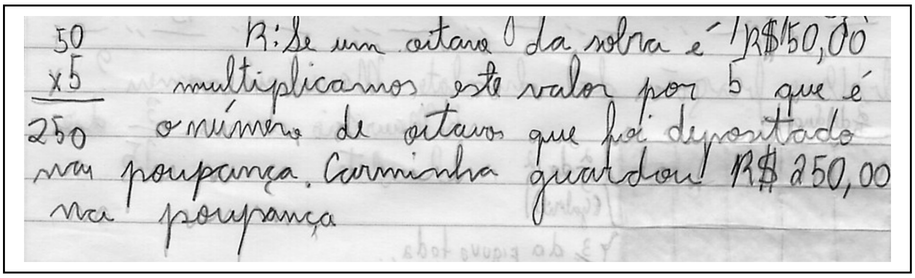
Na terceira atividade foram percebidos diferentes tipos de resolução.

O grupo 9 fez uma representação geométrica para responder os quatro itens do problema







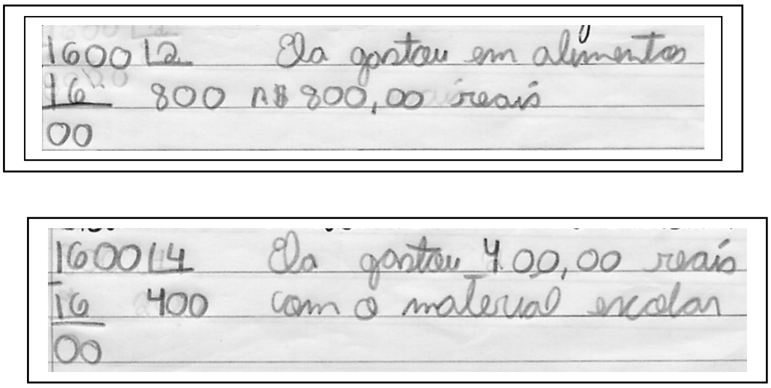

50
x5
250

R: Se um oitavo da sobra é R$ 50,00 multiplicamos este valor por 5 que é o número de oitavos que foi depositado na poupança. Carminha guardou R$ 250,00 na poupança

Figura 4.2.42 – Grupo 9 (Tarefa 3)

e deu resposta correta ao item ***a***. No item ***b***, não se preocupou com a frase '$\frac{1}{4}$ do que restou ela gastou com material escolar', tomando $\frac{1}{4}$ do todo ao invés de $\frac{1}{4}$ da sobra. Ao considerar $\frac{1}{4}$ do todo para o material escolar, deu uma resposta incorreta ao item ***b*** que, conseqüentemente, acarretou novos enganos, apesar do raciocínio, a partir do erro, estar correto.

O grupo 8


1600 | 2
16   800
00

Ela gastou em alimentos 800 R$ 800,00 reais

1600 | 4
16   400
00

Ela gastou 400,00 reais com o material escolar

Figura 4.2.43 – Grupo 8 (Tarefa 3)

ao afirmar que depois de gastos com alimentos R$ 800,00, e gastos, com material escolar, R$ 400,00, deixou como sobra R$ 400,00. Errou pois entendeu que, com material escolar, haviam gasto $\frac{1}{4}$ do salário. Daí novos erros, inclusive considerando apenas $\frac{1}{8}$ da segunda sobra para o vestido.

O grupo 3

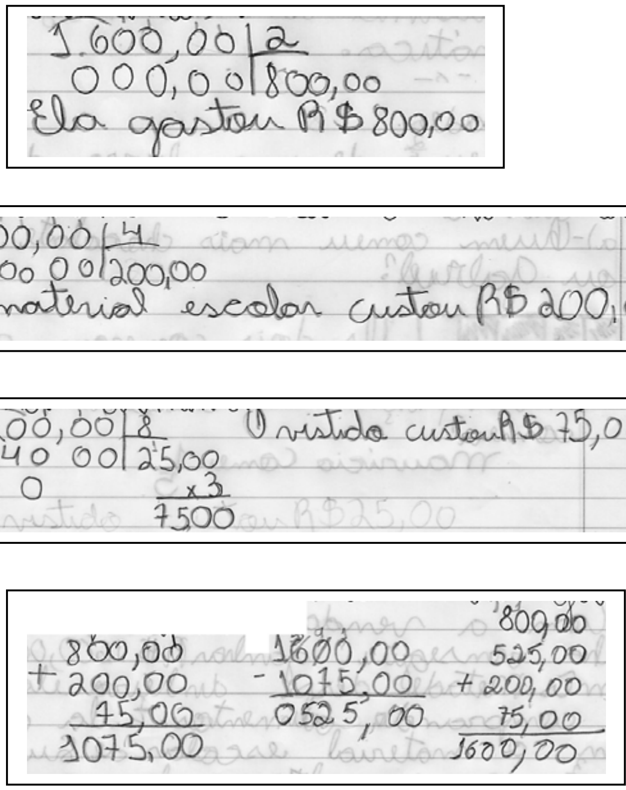


Figura 4.2.44 – Grupo 3 (Tarefa 3)

respondeu corretamente as duas primeiras partes do problema e, inclusive, calculou $\frac{1}{4}$ da primeira sobra para a parte gasta com o material escolar, R$ 200,00. Apesar disso, ao calcular o valor gasto com o vestido não utilizou a segunda sobra, R$ 600,00, dividindo R$ 200,00 em oito partes iguais e pegando 3 dessas. Isso acarretou erro para a questão seguinte, apesar de ter utilizado raciocínio correto para o cálculo do que sobrou para a poupança.

Na **18ª aula**, foi entregue aos grupos o

Problema 6: Duca quer achar a terça parte da metade de uma folha de papel. Que fração da folha indica a terça parte da metade da folha?

Para essa aula, objetivava-se construir o conceito de multiplicação de frações.

Durante a plenária e ao analisar o material entregue pelos alunos, observei que os mesmos fizeram relações com uma atividade sobre frações equivalentes, em que utilizaram dobraduras para realizá-la.

O grupo 5

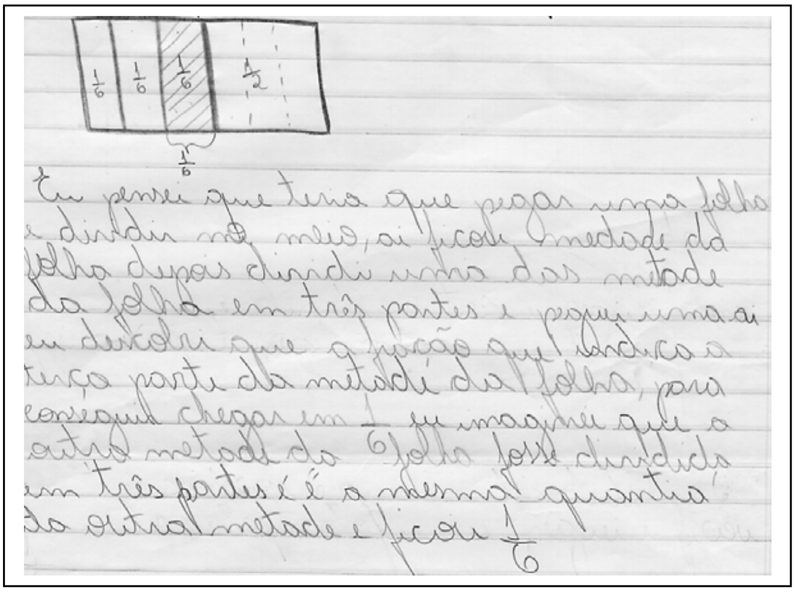


Figura 4.2.45 – Grupo 5 (Problema 6)

ao utilizar as idéias do trabalho com dobraduras que já havia experimentado, dividiu a folha ao meio e dividiu uma das metades da folha em três partes. Os alunos justificaram que haviam chegado a $\frac{1}{6}$ da folha, imaginando que a outra metade da folha também ficaria divida em três partes, totalizando seis partes fracionárias da folha toda.

Assim, pode-se imaginar que, no pensamento do grupo, aconteceu o seguinte

$1 = \frac{6}{6}$ (folha toda)

$\frac{6}{6} \div 2 = \frac{3}{6}$ (meia folha)

$\frac{3}{6} \div 3 = \frac{1}{6}$ ($\frac{1}{3}$ da metade da folha)

O grupo 9

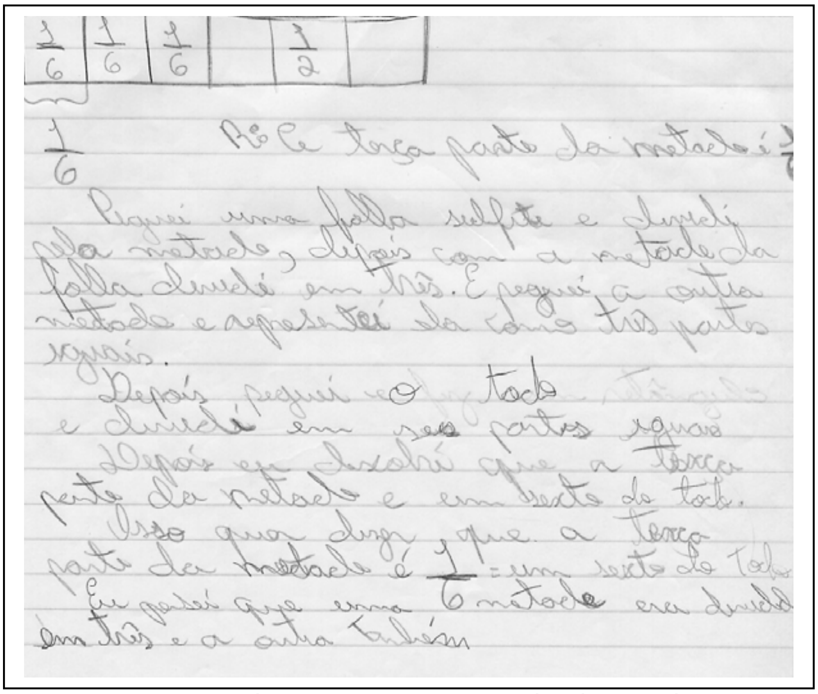


Figura 4.2.46 – Grupo 9 (Problema 6)

também conseguiu dar uma boa explicação sobre sua resolução.

Pôde-se notar que a maioria dos grupos utilizou o recurso da dobradura para resolver esse problema.

A partir das justificativas dadas, pelos grupos, sobre o modo como encontraram a terça parte da metade da folha e, fazendo alusão sobre a multiplicação de números naturais, chamei mais uma vez a atenção deles para o seguinte:

- O dobro de 4 é igual a $2 \times 4 = 8$
- O triplo de 7 é igual a $3 \times 7 = 21$

Da mesma forma, se se falasse em metade de oito, ou um terço de 12, poderíamos entender $\frac{1}{2} \times 8 = 4$, $\frac{1}{3} \times 12 = 4$, respectivamente.

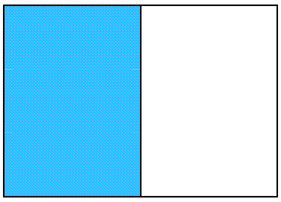
Assim, no problema, olhando no desenho feito por eles, a terça parte da metade da folha seria $\frac{1}{6}$ da folha, ou seja, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Então, aos alunos, eu poderia chamar a atenção de que, para multiplicar essas duas frações, bastaria ter para o numerador o produto dos numeradores e para o denominador o produto dos denominadores.

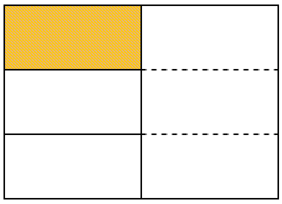
Formalizando, coloquei na lousa:

<u>Multiplicação de frações</u>

Neste caso, o todo é a folha de sulfite.



$\frac{1}{2}$ do todo



$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$ do todo

Representou-se $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ pelo produto $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, que significa **a terça parte da metade de um todo**.

Assim: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

> “ O produto de frações é uma fração em que:
>
> - o numerador é o produto dos numeradores;
> - o denominador é o produto dos denominadores.”

Após essa formalização, foram apresentados outros exemplos de multiplicação de frações:

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{3 \times 10}{5 \times 9} = \frac{\cancel{30}^{10}}{\cancel{45}^{15}} = \frac{\cancel{10}^{2}}{\cancel{15}^{3}} = \frac{2}{3} \text{ ou}$$

$$\frac{3 \times 10}{5 \times 9} = \frac{\cancel{3}^{1} \times 2 \times \cancel{5}^{1}}{\cancel{5}^{1} \times \cancel{3}^{1} \times 3} = \frac{1 \times 2 \times 1}{1 \times 1 \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{2}=\frac{\cancel{2}^{1}\times 4\times \cancel{6}^{2}}{\cancel{3}^{1}\times 5\times \cancel{2}^{1}}=\frac{1\times 4\times 2}{1\times 5\times 1}=\frac{8}{5}$$

Na **19ª aula**, foi entregue aos grupos o

> **Problema 7:** A esposa do Sr. Antônio recebeu o salário do mês. Ela pegou $\frac{2}{5}$ de seu salário e dividiu igualmente entre seus três filhos. Quanto desse salário cada um recebeu?

Para essa aula, objetivava-se construir o conceito de divisão de frações.

Durante a plenária e ao analisar o material entregue pelos grupos, observei que alguns utilizaram representações gráficas para resolver o problema dado. Outros lançaram mão do conceito trabalhado de multiplicação de frações. Outros, ainda, tentaram trabalhar com operações aritméticas sobre números naturais.

O grupo 9

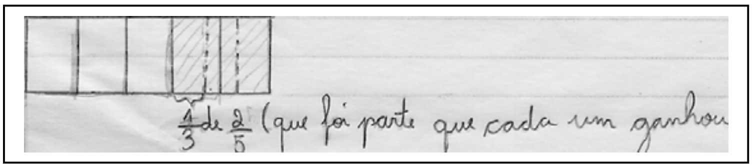


Figura 4.2.47 – Grupo 9 (Problema 7)

apresentou sua resolução com uma representação gráfica, indicando como solução $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$. Esse grupo não conseguiu apresentar uma resposta numérica para sua solução. Mas, poderia, a partir dessa indicação, utilizar o conceito de multiplicação de frações e fazer $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$.

O grupo 8

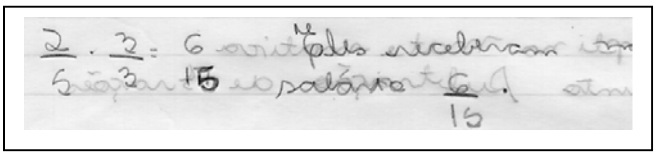


Figura 4.2.48 – Grupo 8 (Problema 7)

não utilizou representação gráfica. Esse grupo fez $\frac{2}{5} \times \frac{3}{3}$, errando ao não perceber que $\frac{3}{3} = 1$, e obtendo, como resposta, $\frac{6}{15}$. Esse grupo tentou usar, sem entender, o conceito de multiplicação construído anteriormente ao invés de dividir a fração em três partes.

O grupo 5

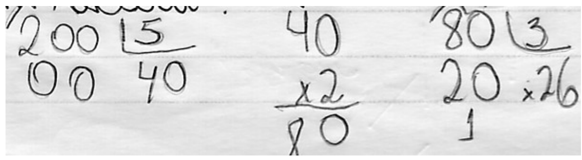


Figura 4.2.49 – Grupo 5 (Problema 7)

apresentou solução numérica. Esse grupo supôs um valor para o salário, 200. Dividiu este valor por 5, encontrando 40. Multiplicou esse valor por 2, resultando 80, e dividiu o resultado pelos três filhos, sobrando resto. Não foi uma boa escolha.

Como o raciocínio adotado (bom), deveria ter tomado uma quantia que fosse divisível por 5 e por 3. Portanto, por 15.

Se tivessem tomado R\$ 600,00, teriam feito:

$$\begin{array}{r|l} 600 & 5 \\ \hline 10 & 120 \\ 00 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 120 \\ \times 2 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 240 & 3 \\ \hline 00 & 80 \end{array}$$

Com isso, o todo que é $1 = \frac{5}{5} = \frac{15}{15}$ corresponde a R$ 600,00

e, como $\begin{array}{r|l} 600 & 15 \\ \hline 00 & 40 \end{array}$

Então, $\frac{1}{15}$ corresponde a R$ 40,00

$\frac{2}{15}$ corresponde a R$ 80,00

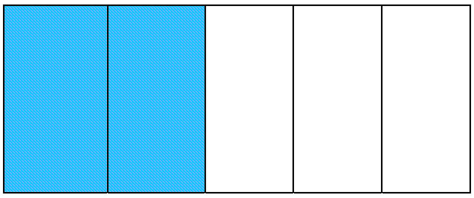
Verificando a resposta, vê-se que:

$$\frac{2}{15} \text{ de } 600 = \frac{2}{15} \times 600 = \frac{2 \times \cancel{600}^{40}}{\cancel{15}^{1}} = \frac{2 \times 40}{1} = 80$$

O objetivo de se chegar ao conceito de divisão de frações a partir do problema dado não foi atingido com o trabalho dos alunos.

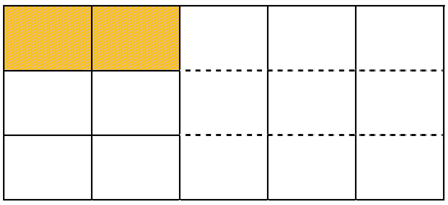
Visando chegar ao conceito de divisão de frações, que é a operação inversa da multiplicação de frações, na lousa, comentei:

✓ $\frac{2}{5}$ é a parte do salário que seria destinada aos 3 filhos.



$$\frac{2}{5} = 2 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$$

Como o problema pede que essa parte seja repartida igualmente entre eles, isso significa $\frac{2}{5} \div 3$



Isso é o mesmo que achar $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$. Mas $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.

Assim, $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$.

✓ De outro modo, poderia ter sido feito assim:

$$\begin{array}{l|l} \frac{2}{5} & 3 \\ \hline & \mathbf{n} \end{array} \qquad \text{ou seja} \qquad \frac{2}{5} \div 3 = \mathbf{n}$$

A partir do conceito de divisão: D = q $\times$ d + r

$$\mathbf{n} \times 3 = \frac{2}{5}$$

Como queremos achar o número, **n**, e sabemos que $\frac{1}{3}$ de 3 = $\frac{1}{3} \times 3 = 1$, multiplicamos os dois membros da igualdade por $\frac{1}{3}$

$$\mathbf{n} \times \cancel{3}^{1} \times \frac{1}{\cancel{3}^{1}} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{n} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$$

Então,

$$\boxed{\frac{2}{5} \div 3 = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}$$

Ou, ainda, olhando na figura:

$$1 = \frac{5}{5} = \frac{15}{15}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{6}{15} \div 3 = \left(6 \times \frac{1}{15}\right) \div 3 = (6 \div 3) \times \frac{1}{15} = 2 \times \frac{1}{15}$$

Poderia ter sido perguntado, também, e se fosse $\frac{2}{5} \div \frac{1}{3}$?

Utilizando o recurso da dobradura, isso seria o mesmo que perguntar, quantas vezes $\frac{1}{3}$ da folha cabe em $\frac{2}{5}$ da folha?

Ficando assim:

Como $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ e $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$, nota-se que $\frac{1}{3}$ da folha cabe 1 vez em $\frac{2}{5}$ dela e sobra $\frac{1}{15}$ da folha que é $\frac{1}{5}$ da vez. Logo $\frac{1}{3}$ da folha coube, em $\frac{2}{5}$ da folha, (1 + $\frac{1}{5}$) da vez = ($\frac{5}{5}$ + $\frac{1}{5}$) da vez = $\frac{6}{5}$ da vez.

Isso é o mesmo que dizer:

$$\boxed{\frac{2}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{5},}$$

ou seja, para fazer a divisão conserva-se a primeira fração e multiplica-se pela recíproca da segunda. Essa regra é, em geral, simplesmente apresentada aos alunos para executar a operação divisão com números fracionários e quase sempre compreendida de uma maneira mecânica.

Para fixação do conceito, perguntei quanto dá $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4}$?

Isso já poderia ser feito utilizando a regra dada, desde que a tivessem entendido, assim:

$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

Na **20ª aula**, foi entregue aos grupos uma

<u>Situação</u>: “Cafezinho, uma preferência nacional”

Podemos encontrar café já embalado em pacotes de 1 kg, $\frac{1}{2}$ kg ou $\frac{1}{4}$ kg.

Em alguns armazéns, cafeterias ou barracas de feira, como a de Dona Zefa, o café é moído na hora.

Problema 8: Dona Zefa vende café, em pacotes de 1 kg, $\frac{3}{4}$ kg, $\frac{1}{2}$ kg, $\frac{1}{4}$ kg e $\frac{1}{8}$ kg. Utilizando as embalagens de café de dona Zefa, responda às questões abaixo. Se você achar necessário, desenhe figuras.

1. Dois pacotes de $\frac{1}{2}$ kg contêm 1 kg de café. De que outras formas você pode obter 1 kg de café? Escreva todas as maneiras possíveis.
2. Se uma pessoa comprar 5 pacotes de $\frac{1}{4}$ kg, ela levará mais, menos ou exatamente 1 kg? E se comprar 10 pacotes de $\frac{1}{8}$ kg?
3. Se Zefa pesar 6 pacotes de $\frac{1}{4}$ kg, quantos "quilos" marcará a balança? E se pesar 7 pacotes de $\frac{1}{4}$ kg?

Justifique suas respostas!

Para essa aula, objetivava trabalhar os conceitos construídos anteriormente, além de fazer com que o aluno pudesse relacionar, em cada caso, o número fracionário com o todo.

Durante a plenária e ao analisar o material entregue pelos grupos, observei que os alunos se interessaram pelo problema, pois se tratava de uma situação que podia ocorrer em seus cotidianos. Eles conseguiam visualizar em um quilo, quantas vezes aparecia o $\frac{1}{2}$ Kg, o $\frac{1}{4}$ Kg, o $\frac{1}{8}$ kg, ou mistura dessas diferentes medidas.

O grupo 9

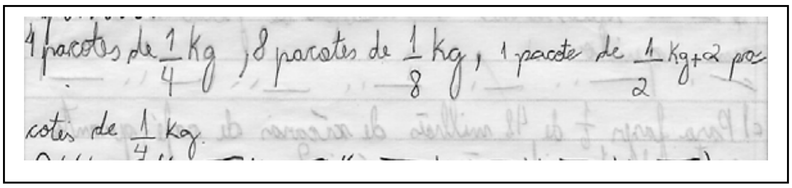
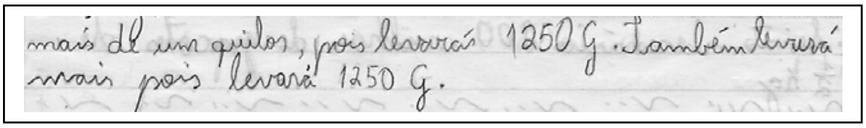

4 pacotes de $\frac{1}{4}$ Kg, 8 pacotes de $\frac{1}{8}$ Kg, 1 pacote de $\frac{1}{2}$ Kg + 2 pacotes de $\frac{1}{4}$ Kg.

Figura 4.2.50 – Grupo 9 (Problema 8)

apresentou algumas soluções para a primeira parte do problema, porém não observou que o enunciado pedia todas as maneiras possíveis.


mais de um quilos, pois levará 1250 G. Também levará mais pois levará 1250 G.

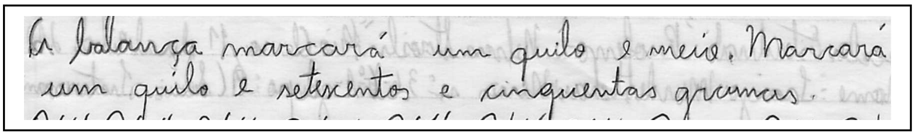

A balança marcará um quilo e meio. Marcará um quilo e setecentos e cinquentas gramas.

Figura 4.2.51 – Grupo 9 (Problema 8)

Esse grupo, depois de responder a primeira questão, evitou trabalhar com números fracionários, mudou a unidade de medida quilograma para grama e, então, trabalhou apenas com números inteiros positivos.

O grupo 3

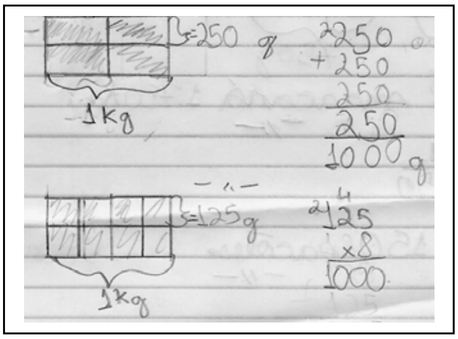


Figura 4.2.52 – Grupo 3 (Problema 8)

de maneira geral, deixou suas resoluções com representações gráficas, utilizando gramas para justificar suas soluções. No item 1, utilizou apenas pacotes de 250 e de 125 gramas para obter 1 quilo, não observando que o problema pedia que se escrevessem todas as maneiras possíveis.

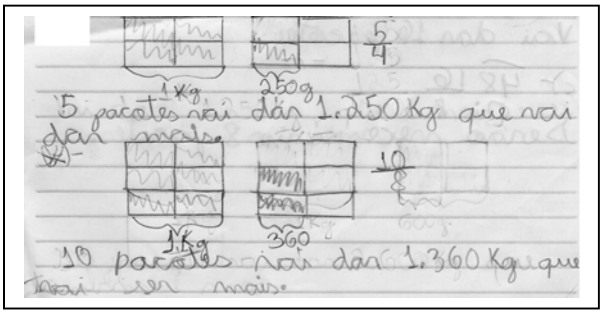


Figura 4.2.53 – Grupo 3 (Problema 8)

Para o item 2, esse grupo, utilizou a representação gráfica para mostrar que, em ambos os casos, 5 pacotes de $\frac{1}{4}$ de kg ou 10 pacotes de $\frac{1}{8}$ de kg, representam quantidades maiores do que 1 kg. Acertaram a primeira questão desse item, sem trabalhar com números fracionários. Porém, na segunda questão, o grupo se atrapalhou na representação gráfica, e também, na quantidade de café existente nas partes fracionárias.

Ao transformar a unidade de medida quilograma para grama não soube usar a correta unidade na resposta dada.

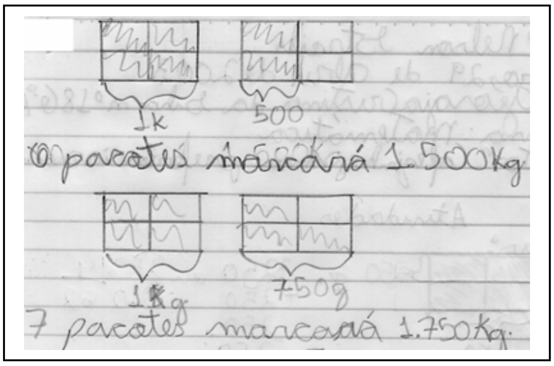


Figura 4.2.54 – Grupo 3 (Problema 8)

Para o item 3 utilizaram a mesma idéia anterior, cometendo o mesmo erro quanto à unidade atribuída na resposta.

Tinha-se a expectativa de que os alunos pudessem apresentar um número maior de possibilidades para a questão 1, uma vez que, se se buscassem todas as possibilidades, encontraríamos, partindo do maior pacote até o menor:

1 de (1kg)

2 de ($\frac{1}{2}$ kg)

1 de ($\frac{1}{2}$ kg) + 2 de ($\frac{1}{4}$ kg)

1 de ($\frac{1}{2}$ kg) + 4 de ($\frac{1}{8}$ kg)

1 de ($\frac{1}{2}$ kg) + 1 de ($\frac{1}{4}$ kg) + 2 de ($\frac{1}{8}$ kg)

4 de ($\frac{1}{4}$ kg)

3 de ($\frac{1}{4}$ kg) + 2 de ($\frac{1}{8}$ kg)

2 de ($\frac{1}{4}$ kg) + 4 de ($\frac{1}{8}$ kg)

1 de ($\frac{1}{4}$ kg) + 6 de ($\frac{1}{8}$ kg)

8 de ($\frac{1}{8}$ kg)

Capítulo 5 – Coletar Evidências e dar Sentido às Informações Obtidas (Terceiro Bloco de Romberg)

Considerações Iniciais

No capítulo anterior foi descrito o desenvolvimento da aplicação do Projeto em sala de aula.

Neste capítulo, seguindo a metodologia de Romberg, serão coletadas evidências surgidas no transcorrer dessa aplicação. Essas evidências serão descritas e interpretadas em termos da pergunta-problema dessa pesquisa. Os resultados obtidos a partir dessa interpretação serão relatados e conclusões finais serão tiradas, com sugestões que possam antecipar ações de outros pesquisadores.

5.1 – Coletar Evidências[48]

> Este passo pode ser dado diretamente uma vez que se tenha decidido coletar certas informações que servem para construir um argumento que diz respeito às questões que estão sendo perguntadas. (ROMBERG, 1992, p. 52)

É nesta atividade, atividade 7 do modelo de Romberg, que tudo o que ficou evidente na aplicação do Projeto foi coletado, tudo o que se refere às ações de alunos e professora no trabalho desenvolvido em sala de aula.

A partir da aplicação do Projeto ficou claro para mim que:

- Os alunos tiveram dificuldade em aceitar que a mesma professora, que havia trabalhado antes, com eles, de maneira tradicional, pudesse mudar sua forma de trabalho, pois a revisão de conteúdos que, normalmente, é feita no início da 5ª série do Ensino Fundamental, havia sido feita seguindo os moldes tradicionais de ensino.
- A mudança na metodologia de ensino adotada, a partir do Projeto, chocou alguns alunos.

[48] Segundo o dicionário Houaiss, evidência significa qualidade ou caráter de evidente, atributo do que não dá margem à dúvida; indicação, indício, sinal, traço.

- No início da aplicação em sala de aula, ao se pedir aos alunos que trabalhassem em grupos, como não haviam ainda experimentado resolver problemas num trabalho colaborativo, apresentavam comportamentos individualistas, chegando até a ocorrer algumas desavenças entre eles que necessitaram, nesse momento, de intervenções da professora.
- Os alunos apresentaram dificuldade quanto a se considerarem capazes de enfrentar a resolução de um problema sem a "ajuda" direta da professora.
- Não foi necessário muito tempo para que os alunos se sentissem mais seguros para enfrentar um problema dado.
- Os alunos, no momento da aplicação do Projeto em sala de aula, estavam iniciando um período de transição em suas vidas, ocorrendo mudanças comportamentais, afetivas, psicológicas e físicas, provocando alterações em seus modos de pensar e de agir.
- O Termo de Compromisso, votado e aceito por professora e alunos, constituiu-se numa peça importante para a implantação da nova dinâmica de trabalho em sala de aula.
- No início da aplicação, a professora, ao conduzir questionamentos relativos aos problemas oferecidos, não deu muita oportunidade aos alunos de pensarem por si mesmos.
- No decorrer da aplicação, os questionamentos levantados pela professora foram feitos de uma maneira mais especulativa, dando chance aos alunos de se manifestarem.
- Mostraram-se importantes e proveitosos os diálogos entre professora e alunos, durante a plenária.
- A preocupação dos alunos com "nota", vendo nota como uma forma de avaliação, foi grande.
- Os alunos se preocupavam, muitas vezes, em apenas adivinhar as possíveis operações e usar as técnicas operatórias, com os dados numéricos explícitos nas atividades dadas, que deveriam ser utilizadas no decorrer dos trabalhos.
- Os alunos, muitas vezes, não davam atenção às respostas, às vezes até absurdas, que obtinham, deixando de verificar a validade das mesmas.
- Pedir aos alunos que justificassem suas resoluções por escrito foi importante.
- A aplicação da metodologia adotada no Projeto devesse ocorrer, com os alunos, desde o início do ano letivo.

- O calendário escolar anual, com seus muitos eventos extraclasse, alterou o planejamento da aplicação do Projeto.
- Muitas vezes os alunos, ao resolverem problemas, fizeram relações com conteúdos que haviam sido trabalhados anteriormente.
- As dúvidas dos alunos em tópicos já trabalhados, quando detectadas dentro da resolução de um problema proposto, puderam ser mais bem trabalhadas, quando vistas como problemas secundários.
- A Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas fez com que os alunos se interessassem mais pela Matemática.
- Foi importante para os alunos trabalhar sobre os tópicos: Divisibilidade e Números Racionais como conhecimento novo a ser construído, na 5ª série do Ensino Fundamental.
- Uma boa escolha de problemas geradores é importante para a motivação e a manutenção do interesse dos alunos.
- Mostra-se válido o papel da professora como observadora, ao longo do desenvolvimento do trabalho em sala de aula, ao dar condições de avaliar o rendimento dos grupos em geral e de cada aluno em particular.

Estes temas descritos serão agrupados dentro de determinadas características e, a partir dessas descrições, permitirão apresentar evidências do que ocorreu em vários momentos em nossa sala de aula.

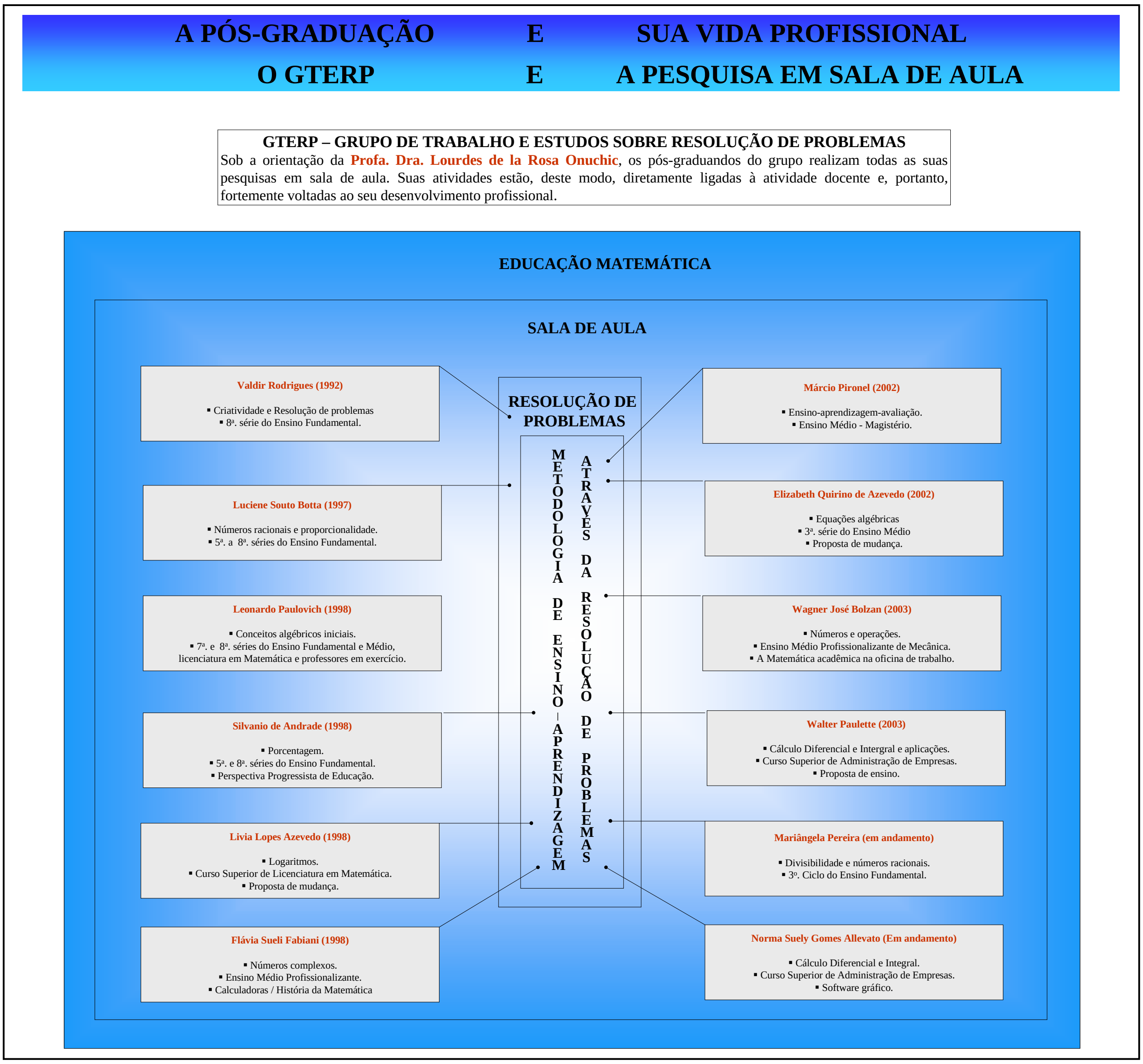
5.2 – Interpretar e Relatar as Evidências Coletadas

Todas as informações obtidas durante a aplicação do Projeto, algumas relevantes, outras irrelevantes e, às vezes, até incompreensíveis, devem ser analisadas e bem interpretadas. É importante decidir, entre todas, aquelas que merecem maior ou menor atenção de nossa parte, no que se refere à ajuda que possa dar para responder a pergunta-problema da pesquisa.

Na página dez de meu trabalho, está escrito que Romberg, em seu modelo, afirmou que *as decisões sobre que métodos utilizar são tomadas como uma conseqüência das atividades 1 a 4.* Ou seja, que, para cada evidência encontrada, pode-se usar diferentes métodos para interpretar e, posteriormente, relatar resultados de cada evidência assumida.

Segundo Romberg, *as informações coletadas podem ser interpretadas através de métodos quantitativos, onde testes estatísticos apropriados são aplicados para validar ou não a conjectura ou pergunta proposta. Mas, se números não são usados, os métodos de análise devem ser qualitativos.*

Ainda, para Romberg (1992, p. 53), *ser membro de uma comunidade de pesquisa implica uma responsabilidade em informar a outros membros sobre a investigação completa e ir em busca de seus comentários e críticas. Muito freqüentemente, os pesquisadores relatam somente os procedimentos e as descobertas e não o modelo ou a visão de mundo que têm.* Dentro de meu trabalho em Educação Matemática posso afirmar que minha linha de pesquisa se identifica com o trabalho da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Na Conferência "A Pós-Graduação e sua Vida Profissional", dos 20 anos da PGEM da UNESP de Rio Claro, 2004, eu, juntamente com o Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas, GTERP, apresentamos o pôster abaixo.



Neste pôster é possível notar que a comunidade de pesquisa em que estou inserida prioriza o trabalho em sala de aula, utilizando a resolução de problemas como uma ferramenta forte de ensino-aprendizagem de Matemática e, dentro dela, mais especificamente, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, visando à construção do conhecimento matemático pelo aluno com a orientação do professor, a partir de uma situação-problema.

Dando sentido às evidências coletadas na aplicação de meu Projeto em sala de aula, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, decidi fazer uso do Roteiro de atividades mostrado nas páginas 103 e 104, objetivando analisar essas evidências em função da pergunta-problema.

No início desta pesquisa, ao elaborar o modelo preliminar, coloquei, como um dos caminhos a ser percorrido, o de analisar o currículo de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental. Naquele momento, o currículo foi visto apenas como uma relação de conteúdos programáticos e dessa forma foi explorado ao longo da pesquisa. Como, nos elementos curriculares para a Matemática, devem ainda ser observadas as especificidades de: adquirir conhecimentos e desenvolver capacidade de compreensão; adquirir habilidade em técnicas operatórias; e desenvolver hábitos de estudo e pesquisa: clareza, rigor e precisão na resolução de problemas, a avaliação, conforme exigências do Termo de Compromisso adotado, pôde levar a uma melhor verificação do rendimento dos alunos.

A partir da descrição do trabalho feito em sala de aula, no Capítulo 4, podemos reunir alguns temas levantados a partir de evidências coletadas.

❖ ***A instituição e o Projeto de trabalho diferenciado em sala de aula***

No início do ano letivo de 2002, participei, como professora da escola, da elaboração do planejamento anual onde, no primeiro semestre, deveria fazer uma revisão crítica dos conteúdos programáticos vistos nos ciclos anteriores. Simultaneamente, como pesquisadora, iniciando o curso de Pós-Graduação em Educação Matemática na UNESP de Rio Claro, deveria criar um Projeto de trabalho, para a 5ª série do Ensino Fundamental, adotando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Nesse Projeto, planejado para ser aplicado no segundo semestre, seriam trabalhados os tópicos Divisibilidade e Números Racionais. Devido aos maus resultados da prova aplicada pelo SARESP, em leitura e interpretação de textos, em 2001, conforme dito na página 107, o trabalho pedagógico regular na escola e, em particular o de Matemática, ficou prejudicado. Somente, em setembro de 2002 é que a aplicação de meu Projeto teve início.

Durante o ano letivo, ocorreram alguns eventos na escola que não estavam no planejamento do início do ano, chegando às vezes a prejudicar o bom andamento do trabalho em sala de aula. Desse modo, reforço a importância de se aplicar um projeto de mudança desde o início do ano letivo, devido às conseqüências que ele pode gerar no trabalho com alunos, chamando à responsabilidade, de criação e cumprimento, a equipe de docentes e a equipe de gestão da instituição.

Além disso, reconheço que o planejamento feito no início do ano, nas escolas, deveria sempre contar com a participação efetiva de todos os professores, de modo a garantir que o que fosse planejado para a sala de aula realmente pudesse ocorrer durante o ano letivo. Nele, é preciso que fiquem bem claros os objetivos pretendidos para cada atividade a ser trabalhada e, também, que fossem programados os eventos sociais, culturais e esportivos que viessem a ocorrer para que, dessa forma, pudessem todas as aulas e demais atividades pedagógicas serem planejadas e realizadas sem interrupções.

Para que um projeto idealizado tenha sucesso em sua aplicação é necessário que os professores estejam organizados e firmes em seus propósitos. Da mesma forma, necessita-se do apoio de direção e coordenação da instituição onde o trabalho será desenvolvido. Devo considerar que um mesmo projeto, se for aplicado em um outro momento e com outros participantes, dificilmente terá as mesmas características e resultados do primeiro, pois sua aplicação dependerá da criatividade do professor, dos estudantes em questão e das condições oferecidas pela instituição.

Os alunos da 5ª série do Ensino Fundamental, entre 10 e 11 anos de idade, nessa ocasião, passam por um período de transição em suas vidas que provoca alterações em seus modos de agir e de pensar. Além disso, o que se pode notar, muitas vezes, nas escolas, é uma falta de normas estabelecidas serem cumpridas, tanto por professores quanto pela equipe de gestão da instituição. Então, a popular frase: “tudo o que é tratado não é caro” deve servir como dica para se obter melhora na situação disciplinar das salas de aula, pois o que se observa em geral é que falta um parâmetro comportamental para os alunos, o que provoca, às vezes, desordem e descontrole dentro das escolas.

Posso afirmar também que, se o professor deixa claro o que quer e cobra as regras estabelecidas para o trabalho em sala de aula, os alunos aprendem a conviver com elas e sentem-se na obrigação de segui-las. Mas, eles ‘dançam’ conforme a música, e como há sempre aquele professor que nada exige e nada cumpre, os alunos podem ter comportamentos diferentes diante de cada professor, o que provoca possíveis alterações em seu comportamento.

Desse modo, para os alunos pesquisados, o Termo de Compromisso, votado e assinado por professor e alunos, mostrou-se como um elemento importante para a implantação de uma nova dinâmica de trabalho em sala de aula, onde foram explicitadas normas de disciplina, de avaliação e de condução de aulas. Com isso, os alunos puderam se sentir mais motivados e, de certa forma, tranqüilos, sabendo como seriam avaliados.

Em reuniões e até durante os recreios, alguns professores reclamavam da mudança de comportamento dos alunos pesquisados, dizendo que suas atitudes, no final da 5ª série, eram bem diferentes daquelas que mostravam no início dessa série. Posso dizer que tais mudanças não eram percebidas tão nitidamente durante as aulas de Matemática. Acredito que o trabalho diferenciado em sala de aula, usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, partindo de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos, apoiado em um Termo de Compromisso, favoreceu o bom andamento dos trabalhos em minha sala de aula.

❖ *A metodologia de trabalho em sala de aula*

Essa forma diferenciada para o trabalho de sala de aula não é uma tarefa fácil, exige dedicação e persistência por parte do professor e, com relação aos alunos, nota-se uma certa resistência inicial que diminui com o decorrer do trabalho, surgindo, inclusive, um maior interesse pela Matemática. Essa resistência talvez não tivesse fortemente ocorrido se, ao se mudar a forma de ensino, houvesse mudado também o professor da sala pesquisada.

Posso observar que, ao trabalhar com a metodologia adotada para o trabalho em sala de aula, houve um aumento na motivação tanto da professora ao ensinar quanto dos alunos em aprender. Muitas vezes aconteceu que os alunos pediam para continuar a aula, pois nem eles nem a professora haviam sentido o tempo passar. Fato esse não usual com relação ao histórico da disciplina Matemática. Ainda, com relação à utilização dessa metodologia, posso afirmar que não foi fácil o trabalho de início. Mas, com o tempo, notei uma melhora pois professora e alunos passaram a se envolver de tal maneira com ele que a metodologia foi se tornando familiar. Acredito que, se esse Projeto fosse aplicado hoje, algumas modificações poderiam ocorrer, pois é verdade que a experiência aprimora a metodologia.

Quando dúvidas conceituais ou procedimentais importantes surgiam, ou porque os alunos nunca haviam trabalhado essas idéias, ou porque, se já as haviam visto, não se lembravam mais, elas eram trabalhadas como problemas secundários. Ao invés de fazer uma grande revisão sobre o assunto, optei por encarar a dificuldade de frente como aconteceu em diferentes ocasiões, com vários alunos, por exemplo, no caso da divisão de um número por outro de dois algarismos.

Com a entrega da atividade aos grupos, foi feita a exigência de os alunos apresentarem suas respostas por escrito. Muitas vezes, no início, em suas resoluções não havia clareza sobre o que haviam pensado e o que tinham realizado. O fato da permanência dessa exigência, aos poucos foi obrigando os alunos a colocarem no papel o seu pensar e, com mais cuidado, ir à busca das soluções.

❖ ***Os alunos perante a metodologia de trabalho em sala de aula***

Ao dar início à aplicação do Projeto em sala de aula, os alunos ainda não estavam acostumados a trabalhar bem em grupos, num trabalho colaborativo. Essa forma diferenciada de trabalho chocou alguns alunos. Muitos, apesar de estarem juntos com seus pares, desenvolviam suas atividades individualmente. Houve, inclusive, desavenças entre os membros de alguns grupos pois, ainda, não possuíam espírito de equipe.

Houve, também, resistência, por parte dos alunos, em aceitar a mudança, com a mesma professora, de um trabalho tradicional (embora dentro de um trabalho colaborativo e sustentado por um Termo de Compromisso) para um trabalho diferenciado em sala de aula, ao ser adotada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, uma metodologia alternativa.

Aos grupos foram apresentadas atividades, que deveriam ser lidas e exploradas por eles. Deixou-se tempo para que fossem em busca da solução, através da resolução do problema dado. Como os alunos estavam acostumados a sempre receber respostas dos professores, nas muitas dúvidas que enfrentavam ao resolver um problema, tiveram, inicialmente, dificuldade em enfrentar seu caminho de resolução sem minha ajuda. Mas não foi necessário muito tempo para que essa situação se modificasse, como pode ser visto em diálogos ocorridos diante da resolução de vários problemas. Apesar disso tudo, confesso que, inicialmente, em meus questionamentos, não dei, muitas vezes, oportunidade aos alunos de pensarem por si mesmos, levantando questões que podiam dirigir os alunos à solução pretendida. De início, sinto que houve muita interferência minha que chegou a provocar, nos alunos, uma “corrida” em apagar o que já haviam escrito e anotar o que havia sido dito, buscando apresentar um resultado parecido com aquele defendido por mim. Ao longo da aplicação, com mais cuidado, procurei fazer questionamentos que davam chance aos alunos de pensarem por si mesmos. E pensar é uma qualidade exigida pela metodologia assumida.

No trabalho dos grupos, os alunos mostravam-se preocupados em sempre apresentar corretamente seus resultados, pois acreditavam que se estivessem certos poderiam obter melhores notas. Isso pôde ser percebido quando alguns grupos manifestaram forte interesse em conhecer o trabalho de grupos vizinhos, ao resolver um mesmo problema. Insegurança?

Muitas vezes, os alunos queriam fazer uso imediato dos números apresentados no problema e operar com eles de alguma forma que possibilitasse chegar a uma resposta, obtendo, às vezes, resultados até absurdos, principalmente por não estarem habituados a voltar ao enunciado do problema original e ver se a resposta encontrada respondia corretamente ao problema.

Durante a plenária, pude perceber quão proveitosos foram os diálogos entre professora e alunos. No início, sem muita participação dos alunos, a professora fazia perguntas que dirigiam as ações dos alunos e que, conseqüentemente, interferiam na busca da solução do problema. Ao dar-me conta disso, passei a ouvir mais os alunos e a responder suas perguntas com outras perguntas.

É sabido que saber Matemática é saber relacionar. Dentro de certas limitações, pude observar, muitas vezes, os alunos, nos grupos, relacionando conteúdos trabalhados num problema com tópicos matemáticos já vistos anteriormente, para poder resolver outros problemas dados. Isso foi, para mim, importante.

Iniciado o trabalho da unidade temática divisibilidade e sabendo que divisibilidade é a qualidade do que é divisível, procurei construir, através de problemas, com os alunos, os importantes conceitos de múltiplos e divisores de um número. Ao trabalhar múltiplos e divisores os alunos puderam perceber o significado das palavras e as interessantes relações matemáticas que há entre esses conceitos e suas diversas ligações com situações do dia-a-dia. Além disso, procurei lhes mostrar que a divisibilidade não é apenas mais um tópico do programa escolar mas, sim, uma ferramenta útil para abreviar o trabalho da divisão e, com isso, ganhar tempo, principalmente ao trabalhar com números grandes. Os critérios de divisibilidade são regras simples que permitem responder imediatamente quando um número é, ou não, divisível por outro número sem a necessidade de se efetuar a divisão. Como dizem Taboas & Ribeiro (1985, p. 21-24) *um critério de divisibilidade só é útil quando for mais* *simples do que a própria divisão.* A participação dos alunos na construção desses conceitos foi satisfatória.

Quanto ao trabalho com números racionais, no 3º ciclo, posso dizer que foram trabalhadas, em sala de aula com os estudantes, algumas diferentes personalidades do número racional. Vimos, com os alunos, o número racional como divisão e como fração, embora pudéssemos ter trabalhado, também, o número racional como operador e como um ponto na reta numerada.

Na divisão, os alunos viram a barra fracionária com o significado de divisão, isto é, $\frac{a}{b} = \frac{a \div b}{b \div b} = \frac{a \div b}{1} = a \div b$, onde **a** é o dividendo e **b** é o divisor e o número racional é dado pelo quociente.

O número racional visto como uma fração representa uma relação da parte com o todo. A notação $\frac{a}{b}$, expressa essa relação considerando **a** o numerador e **b** o denominador da fração. O denominador diz em quantas partes iguais o todo foi dividido e dá nome à parte. O numerador diz quantas dessas partes iguais são tomadas.

O número racional, como um operador, define uma estrutura multiplicativa de números racionais. Assim, o operador funciona como um multiplicador, ao dizer quantas vezes deve-se tomar, como parcela, o multiplicando. O operador, visto como uma outra personalidade do número racional, dá sentido à operação de se obter partes das partes de um total considerado.

O número racional visto como um ponto na reta numerada atende às condições $\{\frac{a}{b}, a, b \in N, b \neq 0\}$.

Num trabalho com os números racionais os professores devem ajudar os alunos a compreender profundamente o que são números racionais apresentando-lhes variados problemas que possam levar a identificar as diferentes personalidades que esse tipo de número pode assumir. Nesse 3º ciclo, os estudantes deveriam aprender a gerar e a reconhecer formas equivalentes de frações pelo menos em casos simples. Depois, construir e estender esta experiência para tornarem-se familiarizados com o uso de frações.

O trabalho com os tópicos Divisibilidade e Números Racionais mostrou-se importante por constituir-se, para os alunos, como conhecimento novo construído na 5ª série do Ensino Fundamental.

Os problemas propostos como atividade aos alunos devem sempre ser vistos e considerados como problema para o aluno.

Há três características que devem ser observadas, num problema, quando apresentado a grupos de alunos, quando se tem em mente o aprendizado de Matemática:

- ✓ O problema precisa começar a partir da Matemática que eles conhecem, pois eles devem ver o problema como algo que faça sentido.
- ✓ Os problemas devem ser propostos de modo a engajar os estudantes no grupo, durante a construção de novas idéias matemáticas que se quer que eles aprendam.
- ✓ O problema deve pedir aos alunos que justifiquem e expliquem as respostas obtidas, isto é, eles deveriam explicar e justificar os caminhos assumidos na busca da solução.

É importante compreender que a Matemática que se pretende ensinar deve ser trabalhada através da resolução de um problema dado, dentro de atividades que se mostrem como o meio pelo qual os conteúdos programáticos sejam desenvolvidos.

Bons problemas devem integrar múltiplos tópicos e envolver partes significativas da Matemática.

Problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos, apresentados como desafios e colocados como ponto de partida para a construção de novas idéias matemáticas, devem estimular os alunos na busca de suas soluções.

Foi muito importante o papel de professor como observador dos grupos, onde foi possível fazer uma avaliação dos grupos em geral e de cada aluno em particular, por ter possibilitado uma relação mais próxima entre professora e alunos. Também, num segundo momento, a professora como mediadora, ouve os alunos, responde as perguntas feitas por eles com outras indagações, sugerindo pistas e levando-os a continuar na busca da solução.

5.3 – Antecipar as Ações de Outros

Em 1999, participei de um Curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática, em São José do Rio Preto, onde entrei em contato com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. No início de 2000, passei a fazer parte, como membro do Grupo de Trabalho e Estudos sobre Resolução de Problemas (GTERP), da UNESP de Rio Claro, passando a aprofundar meus conhecimentos nessa metodologia.

No segundo semestre de 2000, iniciei como professora efetiva de Matemática da Escola Estadual Professor Nelson Stroili, em Rio Claro. Essa instituição é uma escola da periferia que tem, em sua clientela, alunos carentes.

Em 2002, ingressei, como aluna regular, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro, e vi-me como pesquisadora em Educação Matemática dentro da Comunidade de Resolução de Problemas.

Para Romberg (1992, p. 53), os membros de uma comunidade de pesquisa discutem suas idéias uns com os outros, confrontam idéias de uns com as de outros e sugerem novos passos, modificações de estudos prévios, elaborações de procedimentos e assim por diante. Os pesquisadores tentam situar cada um de seus estudos numa cadeia de investigação.

A metodologia de pesquisa adotada neste trabalho foi a Metodologia de Romberg, que apresenta dez atividades que os pesquisadores utilizam para desenvolver suas pesquisas. As quatro primeiras atividades levaram à identificação do problema que, em meu caso, se expressa pela pergunta: *Qual é a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina de Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos?*

O objetivo desta pesquisa é o de que os resultados nela obtidos possam ser divulgados à Comunidade Científica, à Secretaria da Educação e, principalmente, aos professores da Rede Pública Estadual de Ensino como um caminho alternativo de trabalho em sala de aula e para que possa ser apreciado, abrindo caminhos para novas pesquisas em Ensino-Aprendizagem de Matemática no 3º ciclo do Ensino Fundamental através da Resolução de Problemas.

Para desenvolver a pesquisa foi escolhida uma classe de 5ª série do Ensino Fundamental, onde foi aplicado um trabalho diferenciado apoiado na Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Seguindo idéias de Van de Walle (2001, p. 40-61), posso dizer que ensinar através da resolução de problemas não é simplesmente apresentar um problema, sentar e esperar que algo "mágico" aconteça. O professor é responsável pela atmosfera do ambiente de resolução de problemas em sala de aula e pelo trabalho conjunto, professor e alunos, a ser desenvolvido. Cabe ao professor, ao preparar uma aula, desenvolver seu trabalho em três partes importantes: antes, durante e depois. Cada uma destas partes requer ações do professor necessárias para tornar uma aula eficiente.

Na fase “antes”, o professor deve fazer com que os alunos estejam mentalmente preparados para trabalhar sobre o problema proposto, além de estar seguro de que os dados que levem à realização do problema estejam claros.

Na fase “durante”, enquanto os grupos trabalham, o professor deve lhes dar a chance de trabalharem sozinhos. O professor deve observar atentamente a classe, dando oportunidade aos alunos de usar suas idéias e não, simplesmente, seguir suas diretrizes. Num segundo momento, o professor deve ouvir os alunos quanto às idéias que eles estão usando na busca da solução e, sempre que possível, responder as perguntas feitas com outras perguntas colocadas como possíveis pistas.

Na fase “depois”, o professor deve engajar a classe toda, numa plenária, visando ajudar os alunos a trabalhar num espírito de comunidade. Os estudantes devem contribuir participando de todas as discussões conduzidas pelo professor. O pensar não pára com a solução do problema, muitas vezes depois da solução encontrada, muita reflexão deve ser feita e a proposição de novos problemas, a partir desse, pode ocorrer.

Após a plenária, depois de consenso sobre a solução encontrada, o professor, na lousa, formaliza os novos conceitos criados, sintetizando o que se objetivava aprender a partir do problema dado. São colocadas, quando necessário, as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações, usando a terminologia e a notação corretas relativas ao tópico trabalhado.

Ao surgirem as primeiras idéias, em 1989, de ver a resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o documento Everybody Counts: A report to the Nation on the Future of Mathematics Education, do National Research Council, referindo-se aos papéis dos professores em relação ao engajamento dos estudantes no processo de ensino, diz que:

> Os papéis dos professores deveriam incluir aqueles de consultor, moderador e interlocutor, não só o de apresentador e autoridade. As atividades de sala de aula deveriam encorajar os estudantes a expressar suas abordagens, tanto oralmente quanto por escrito; os estudantes deveriam engajar a Matemática como uma atividade humana; eles deveriam aprender a trabalhar cooperativamente em pequenos grupos para resolver problemas, assim como a saber argumentar convincentemente sua abordagem entre idéias e estatégias conflitantes.

O próprio NCTM, em 2003, 24 anos depois, a partir de muita reforma e muita pesquisa, no artigo: The teacher’s Role in Teaching Mathematics through Problem Solving, de Grouws (2003, p. 129-141), diz que

> as decisões, que um professor toma quando está planejando e implementando uma abordagem de resolução de problemas para o ensino de Matemática, têm um forte impacto sobre o progresso que os alunos

> fazem ao adquirir competência matemática. Se os estudantes estão caminhando para realizar seu potencial matemático, em toda aula seus professores devem ser muito mais que guias ao lado deles; eles precisam ser ativos e atentos tomadores de decisão antes do ensino, enquanto ensinam e depois de ensinar.

Aceitando essas idéias do NCTM, como resultado de minha aplicação, acredito que o professor deve trabalhar a auto-estima do aluno, valorizando seus acertos e os diferentes caminhos escolhidos para a resolução de um problema, além de saber fazer do erro uma oportunidade de aprender. Deve-se tirar do aluno a idéia errônea de que fazer Matemática é apenas fazer contas. Devem ser aplicadas muitas e variadas situações-problema de modo a criar, nos alunos, hábitos de trabalho para raciocinar e enfrentar com segurança a busca da solução do problema.

Cada problema escolhido deve ser gerador de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos e, em cada aula, é importante que se deixe tarefa para casa, onde algumas servirão para um trabalho, individual e independente, de fixação de conceitos trabalhados e, outras, com situações que apresentem alguma idéia nova, possivelmente, não atingida pela maioria dos alunos e que deverá ser trabalhada na aula seguinte. Ainda, os problemas propostos para os alunos podem ser tirados de livros texto adotados para o trabalho em sala de aula. Às vezes, podem-se fazer adaptações visando situações do dia-a-dia dos alunos. Também, estes problemas podem ser extraídos de revistas de Matemática, de artigos lidos ou trabalhados em encontros de Matemática, etc. O que se pretende com os problemas apresentados é trabalhar pela aprendizagem dos estudantes através de um ensino centrado em problemas e desenvolvido através da resolução de problemas.

A metodologia adotada em minha sala de aula contribuiu para uma melhora no ensino-aprendizagem de Matemática. Fez com que os alunos, em geral, pudessem pensar, refletir e até gostar de fazer Matemática, relacionando conceitos novos com conteúdos construídos anteriormente e até ver a Matemática como algo que pudesse ser utilizado ao interpretar problemas do cotidiano, sociais e de trabalho. Essa metodologia permitiu que fossem trabalhadas as dificuldades enfrentadas pelos alunos, vistas como problemas secundários, ao invés de se fazer revisões cansativas e desinteressantes. A dúvida do aluno pôde ser trabalhada quando surgiu pois, se não fosse removida, a resolução do problema não poderia ser levada adiante.

Todos esses fatos relatados, que estão retratados em minha aplicação em sala de aula, reforçam a importância desse trabalho. Foi a primeira vez que o apliquei, mas tenho certeza de que, em outra oportunidade, essa dinâmica deverá apresentar melhores resultados, pois a prática, seguramente, aprimora a metodologia.

Respondendo à minha pergunta de pesquisa, face a todas as considerações colocadas, quero afirmar com segurança que a contribuição da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas para a disciplina Matemática, no 3º ciclo do Ensino Fundamental, a partir de problemas geradores de novos conceitos e novos conteúdos matemáticos foi relevante.

Referências

ALVES, R. A. **Conversas com quem gosta de ensinar.** São Paulo: Cortez; Autores Associados, 1984. (Polêmicas de Nosso Tempo)

ARTZT, A. F., NEWMAN, C. M. **How to use Cooperative Learning in the Mathematics Class.** Reston: NCTM, 1991.

AZEVEDO, E. Q. **Ensino-aprendizagem das equações algébricas através da resolução de problemas.** 2002. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática. Brasília, 1997. 142p.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática – Brasília, 1998. 148p.

CAMPOS, T. M. M.; PIRES, C. M. C.; CURY, E. (Coord.). **Transformando a prática das aulas de matemática:** 5ª série. São Paulo: PREM, 2001.

______. **Transformando a prática das aulas de matemática**: 6ª série. São Paulo: PREM, 2001.

CATUNDA, O. et al. **Ensino Atualizado da Matemática:** Curso Ginasial. 2. ed. São Paulo: EDART, 1971. v.1.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto & Aplicações:** Ensino Médio. Manual do Professor. São Paulo: Ática, 1999.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática:** 5ª série. São Paulo: Ática, 2003.

FACCIO, L.; GUIMARÃES, A. Viva a lição de casa. **Nova Escola**, São Paulo, v. 17, n. 162, p. 60-61, maio 2003.

GROUWS, D. A. The Teacher's Role in Teaching Mathematics through Problem Solving. In: SCHOEN, H. L. (Ed.) **Teaching Mathematics through Problem Solving**: Grades 6-12. Reston: NCTM, 2003, p. 129-141.

HOLDAN, G. Tornando as tarefas de casa de álgebra mais eficazes. In: COXFORD, A. F. (Org.). **As idéias da álgebra**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994, p. 278-284.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa.** Rio de Janeiro: Objetiva, 2001.

IEZZI, G. et al. **Matemática e Realidade:** 5ª série. São Paulo: Atual, 1984.

________. **Matemática e Realidade**: 5ª série. São Paulo: Atual, 1997.

IMENES, L. M. P.; LELLIS, M. **Matemática:** 5ª série. São Paulo: Scipione, 1997.

________. **Matemática:** 8ª série. São Paulo: Scipione, 1999.

JOVER, A. Indisciplina: Como lidar com ela? **Nova Escola**, São Paulo, v. 13, n. 113, p. 34-38, jun. 1998.

KROLL, K. L.; MILLER, T. Insights from Research on Mathematical Problem Solving in the Middle Grades. In: OWENS, D. T. (Ed.). **Research Ideas for the Classroom – Middle Grades Mathematics.** Reston: NCTM, 1993. p. 58-77.

LIMEIRA: Diretoria Regional de Ensino. Equipe Pedagógica. **Proposta pedagógica da escola.** Limeira, 1998.

MENDONÇA, M. C. D. Resolução de Problemas Pede (Re) Formulação. In: ABRANTES, P. et al. (Org.). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo.** Lisboa: APM, 1999. p. 15-33.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Para Aprender Matemática:** 5ª série. 4. ed. São Paulo: Saraiva, 1991.

______. **Matemática**: idéias e desafios: 5ª série. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 1997.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS – NCTM. **An Agenda for Action:** Recommendations for School Mathematics of the 1980's. Reston, 1980.

______. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston: Library of Congress Cataloguing, 2000. 402 p.

NATIONAL COUNCIL OF SUPERVISOR OF MATHEMATICS – NCSM. A Matemática essencial para o século XXI. **Educação e Matemática,** Lisboa, n. 14, p. 23-35, 1990.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (NRC). **Everybody Counts**: A report to the Nation on the Future of Mathematics Education. Washington: National Academy of Sciences, 1989.

OHLSSON, S. Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Ed.). **Number Concepts and Operations in the Middle Grades.** Reston: NCTM, 1991. v. 2, p. 53-92.

ONUCHIC, L. R. **Roteiro de Atividades**. Programa de Educação Continuada (P.E.C.) da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE). São Carlos: UFSCAR, 1998.

______. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. (Seminários & Debates)

ONUCHIC, L. R.; BOTTA, L. S. Uma Nova Visão sobre o Ensino e a Aprendizagem dos Números Racionais. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 5, n. 3, p. 5-8, 1997.

______. Reconceitualizando as quatro operações fundamentais. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 4, p. 19-26, p. 1998.

PEREIRA, M. O Currículo de Matemática na Visão do NCTM. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2002, Campinas. **Anais...** Campinas, SP: Gráfica FE, 2002. p. 615-619.

PIRONEL, M. **A Avaliação integrada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.** 2002. 193 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um enfoque do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

QUINTELA, A. **Matemática para a Primeira Série Ginasial.** 52. ed. São Paulo: Nacional, 1958.

ROMBERG, T. A. Perspectives on Scholarship and Research Methods. In: GROUWS, D. A. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.** New York: Macmillan, 1992. p. 49-64.

SANGIORGI, O. **Matemática**: para a Primeira Série Ginasial. 91. ed. rev. ampl. São Paulo: Nacional, 1960.

SANGIORGI, O. Mesa-Redonda sobre Introdução da Matemática Moderna no Ensino de Qualquer Grau. **Didática**, Marília, n. 1, p. 125-140, 1964.

SANGIORGI, O. **Matemática**: curso moderno para os ginásios. 12. ed. rev. ampl. São Paulo: Nacional, 1969. v.1.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Centro de Recursos Humanos e Pesquisas Educacionais "Prof. Laerte Ramos de Carvalho" – CERHUPE. **Guias Curriculares Propostos para as matérias do Núcleo Comum do Ensino do 1º Grau**. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado, 1975.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de matemática:** ensino fundamental. 5. ed. São Paulo, 1997. 181 p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências matemáticas**: 5ª série. São Paulo, 1997. 409 p. 2ª Versão Preliminar.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Subsídios para a Implementação do guia curricular de Matemática**: Álgebra para o primeiro grau – 5ª a 8ª séries. São Paulo, 1978. 156 p.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o ensino de matemática:** 1º Grau. São Paulo, 1986. Versão Preliminar.

SCHROEDER, T. L.; LESTER Jr., F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

SIERPINSKA, A. **Understanding in Mathematics.** London: Falmer, 1994.

SOWDER, J. T. Mathematics in the Middle Grades: **Linking Research and Practice**. CRMSE: Center for Research in Mathematics and Science Education, San Diego, 2000. Disponível em:<http://www.sci.sdsu.edu/CRMSE/RP_JTS.html>. Acesso em: 28/09/03

STÁVALE, J. **Elementos de Matemática**: para a Primeira Série do Curso Ginasial. 47. ed. São Paulo: Nacional, 1956. v. 1.

TÁBOAS, C. M. G.; RIBEIRO, H. S. Sobre critérios de divisibilidade. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 6, p. 21-24, 1985.

TORQUATO, C. R. **As atitudes dos alunos de 1ª a 4ª séries em Relação à Matemática, da escola municipal Olavo Vilas Boas – Guaranésia – MG.** 2002. 55 f. Monografia (Especialização Lato Sensu em Educação Matemática) – Universidade de Franca, Franca, 2002.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and Middle School Mathematics:** teaching developmentally. 4. ed. New York: Longman, 2001.

VIKTOR, M. Abaixo de Zero. **Educação**, São Paulo, v. 6, n. 65, p. 28-32, 2002.

Anexos

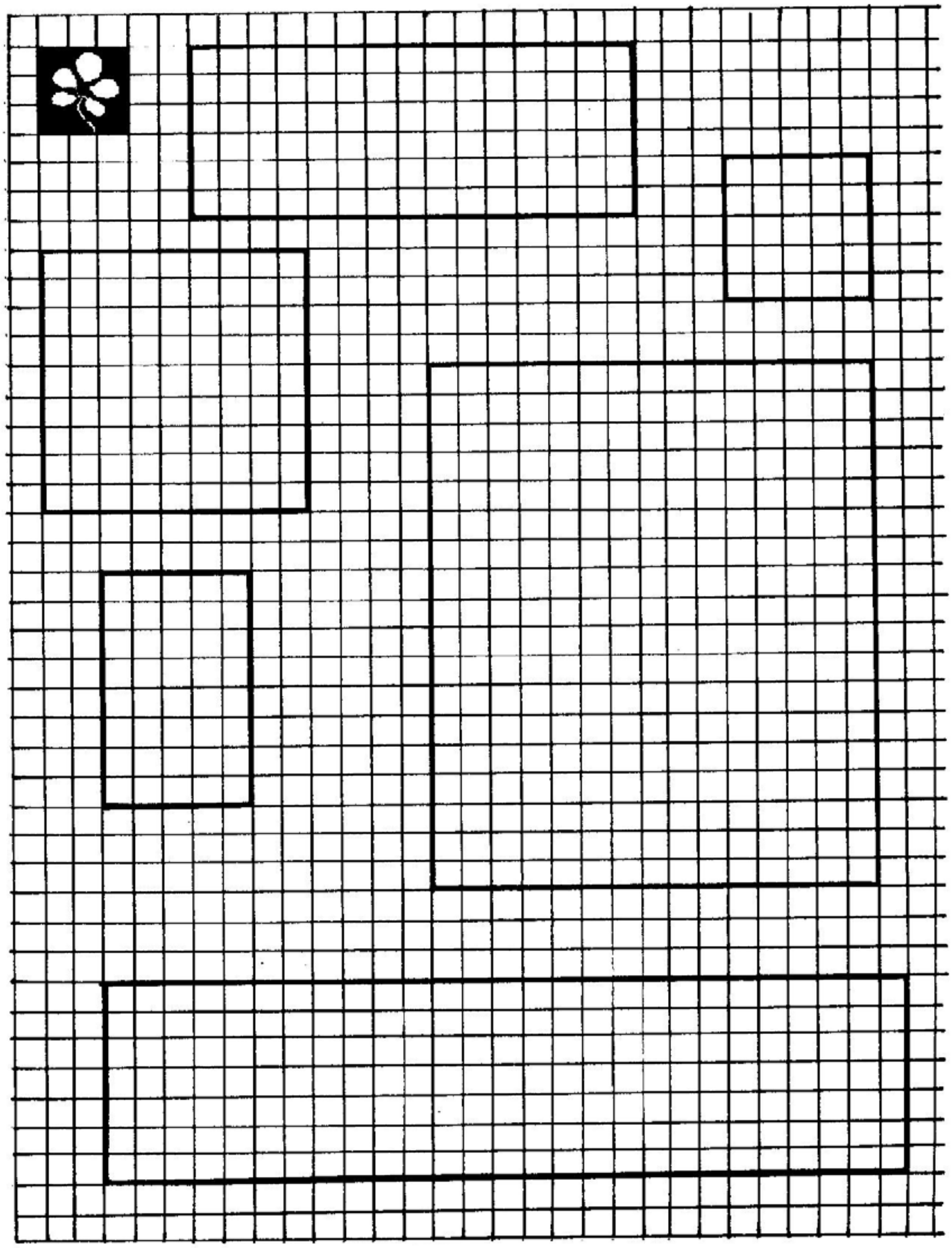
Anexo 1: Folha I

Anexo 2: Folha II

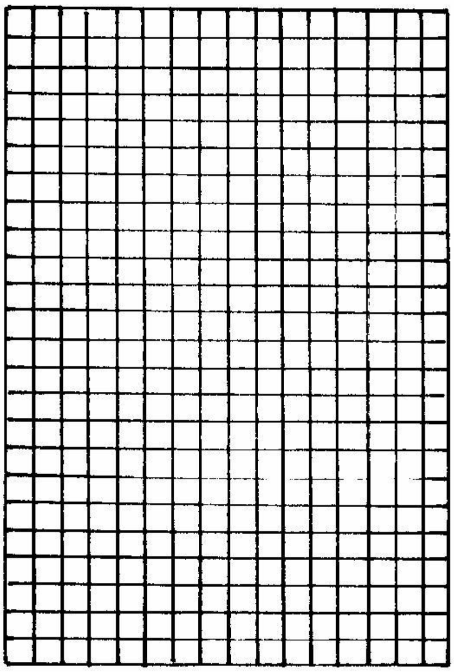
Anexo 3: Folha III

Anexo 4: Atividades de Planejamento – Ano Letivo de 2002 – Escola Estadual Professor Nelson Stroili.

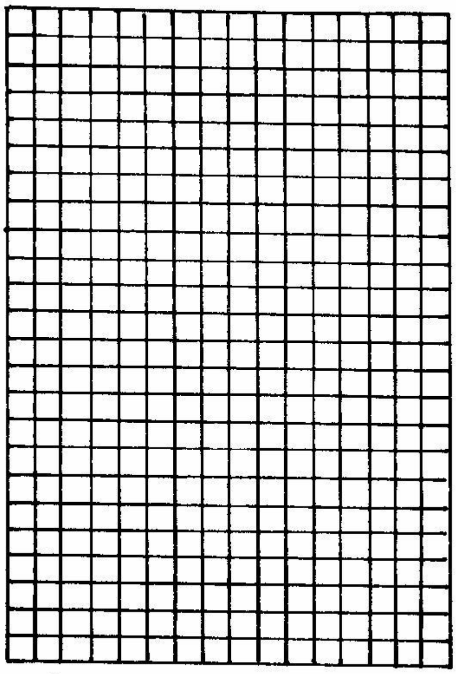
Anexo 1: Folha I



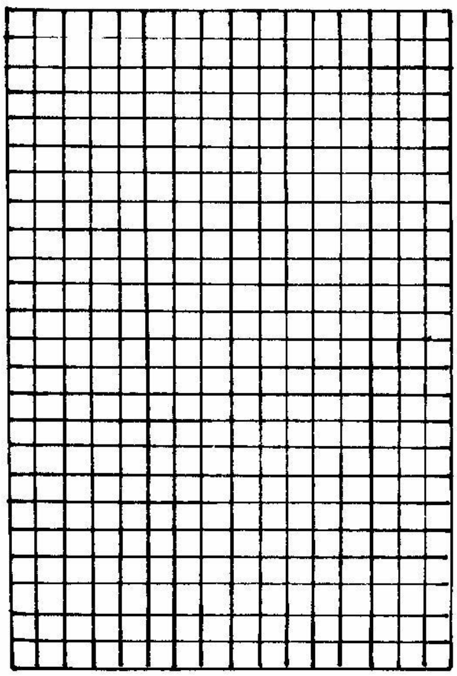
Anexo 2: Folha II



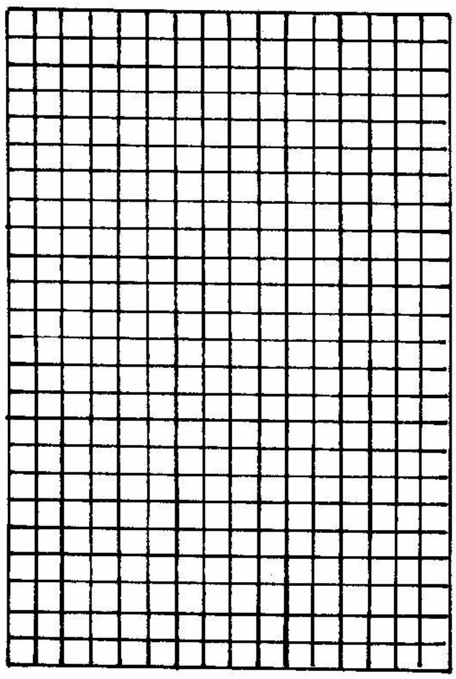
(I)



(II)



(III)



(IV)

Anexo 3: Folha III

À PROCURA DO MAIOR DIVISOR COMUM

Divisores de 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Divisores de 6	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Divisores de 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Divisores comuns de 4, 6 e 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Maior Divisor comum de 4, 6 e 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Divisores de 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Divisores de 16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Divisores comuns de 0 e 16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Maior Divisor comum de 0 e 16	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Divisores de 9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Divisores de 18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Divisores comuns de 9 e 18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Maior Divisor comum de 9 e 18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Divisores de 12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Divisores de 25	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Divisores comuns de 12 e 25	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Maior Divisor comum de 12 e 25	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25