
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT – M.001/18

**Hierarquia e naturalidade, uma visão completa do problema e suas
possíveis soluções**

Caique Meira Ronqui

Orientador

Ricardo D’Elia Matheus

Janeiro de 2018

À minha amada Marina pela confiança e suporte.

Ao Prof. Dr. Ricardo D'Elia Matheus pela grata amizade e competência de sua orientação.

À minha mãe, Denize, e ao meu irmão, Ariel, pela paciência e compreensão.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro: processo nº 2015/19572-0.

Resumo

Elaboramos uma revisão de como o problema da hierarquia aparece na teoria Eletrofraca, pois entendemos que esse assunto ganhou importância e merece atenção especial. Apesar disso, notamos que muitos conceitos necessários para compreender a origem do problema encontram-se espalhados em diferentes livros e artigos, dificultando o acesso à informação. Por isso, apresentamos neste trabalho esses principais conceitos de maneira consolidada.

Evidenciamos como o problema da hierarquia aparece em dois tipos de regularização: *cutoff* e *regularização dimensional*. Partimos da Lagrangiana com simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ e promovemos a quebra espontânea dessa simetria. A partir da Lagrangiana espontaneamente quebrada obtivemos as regras de Feynman e calculamos todos os diagramas a *1-loop* da auto-energia do bóson de Higgs, que corresponde à primeira correção ao propagador escalar e, a partir do qual, encontramos a primeira correção à massa dessa partícula.

A regularização por *cutoff* gera uma correção à massa do Higgs proporcional ao quadrado do *cutoff*, deixando explícito o problema da hierarquia, mas para verificar a existência do problema na regularização dimensional calculamos as funções β_λ e γ_m definidas na equação de Callan-Symanzik e resolvemos numericamente um sistema de equações diferenciais acopladas para obter o *running* da massa do Higgs e o *running* dos acoplamentos das interações eletrofracas. Com isso, foi possível analisar sob quais condições de contorno a massa do Higgs corria para o valor em torno de 125 GeV medido pelos detectores do ATLAS e CMS no LHC. Essas condições estabeleceram uma previsão para a escala de energia na qual esperamos observar física além do Modelo Padrão.

Por fim, discutimos como o modelo supersimétrico mais simples resolveria o problema da hierarquia e como a falta de evidência de partículas supersimétricas na faixa de energia procurada pelo LHC afeta essa proposta de solução.

Palavras Chaves: Problema da Hierarquia; Naturalidade; Bóson de Higgs; Divergência Quadrática; Física Além do Modelo Padrão; *Running Couplings*; Supersimetria

Áreas do conhecimento: Teoria de Campos; Física de Partículas

Abstract

We develop a review on how the hierarchy problem appears in the Electroweak theory. Nowadays we think that this problem is greater in importance than it was in the past, so it deserves special attention, but we noticed several concepts needed to understand the problem are scattered in different books and papers, which hinders full access to information. Therefore, we intend to present the key subjects in a single document, because we didn't find similar work in previous studies.

Additionally, we show how the hierarchy problem appears in two regularization schemes: cutoff and dimensional regularization. Starting from the Lagrangian with $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ symmetry, we perform the spontaneous symmetry breaking. From the spontaneously broken Lagrangian we get the Feynman rules and we calculate all *1-loop* diagrams of the Higgs self-energy, which corresponds to the first correction to the scalar propagator and from which we found the first correction to the mass.

The cutoff regularization results in a correction proportional to the square of the cutoff. In order to verify the hierarchy problem in dimensional regularization we find the β_λ and γ_m functions defined in the Callan-Symanzik equation and numerically solve a system of coupled differential equations to obtain the running Higgs mass and the running electroweak couplings. That allows us to analyze under which boundary conditions the Higgs mass runs to a value around the 125 GeV measured by the ATLAS and CMS detectors at LHC. These conditions establish a prediction for the energy scale where we expect to observe physics beyond the Standard Model.

Finally, we discuss how the minimal supersymmetric model solves the hierarchy problem and how the lack of evidence for supersymmetric particles in the range of energy sought by the LHC affects this proposed solution.

Keywords: Hierarchy Problem; Naturalness; Higgs Boson; Quadratic Divergences; Beyond Standard Model; Running Couplings; Supersymmetry

Knowledge Areas: Quantum Field Theory; Particle Physics

Lista de Figuras

2.1. Relações entre as constantes de acoplamento da teoria eletrofraca (e, g_1, g_2) e o ângulo de Weinberg, θ_w	14
4.1. Diagramas a 1-loop da função de Green de dois pontos do campo de Higgs, onde h é o campo de Higgs; ϕ 's são os bósons de Goldstone; f representa os férmions; η 's os ghosts de Faddeev-Popov; W e Z os bósons de gauge físicos da teoria eletrofraca.	30
4.2. Tadpoles do campo de Higgs.	31
6.1. Diagramas 1PI de quatro pontos do campo de Higgs utilizados na obtenção do valor de β_λ (Machacek e Vaughn, 1985).	72
6.2. Diagramas de quatro pontos mais relevantes para a correção do vértice do acoplamento quártico.	72
6.3. Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa do Higgs e das constantes de acoplamento do MP a 1-loop, renormalizados pelo esquema $\overline{MS}$. Em especial, promovemos a seguinte mudança: $g_1 \rightarrow \sqrt{5/3}g_1$. Isso foi feito porque em teorias unificadas costuma-se adotar a normalização $g_1^U = \sqrt{5/3}g_1$. As regiões em cinza correspondem às escalas de energia de Planck e da Grande Unificação.	75
6.4. Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa e do acoplamento quártico do Higgs a 1-loop. Esquerda: Apesar da escala de energia mudar várias ordens de grandeza, a massa se mantém na mesma ordem. Direita: A previsão do cálculo a 1-loop é de $\lambda < 0$ para $\mu \gtrsim 10^7$ GeV.	76
6.5. Esquerda: Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa e dos acoplamentos do MP a 2-loops, renormalizados pelo esquema $\overline{MS}$. A principal diferença entre esse resultado e o da figura 6.3 está no fluxo de y_t e λ . Direita: A previsão do cálculo a 2-loops é de $\lambda < 0$ para $\mu \gtrsim 10^{10}$ GeV.	77
6.6. Esquerda: Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa do Higgs a 2-loops considerando $m_t = 173.34 \pm 3\sigma_t$ GeV, onde $\sigma_t = 0.76$ GeV. Direita: Fluxo do grupo de renormalização do acoplamento quártico do Higgs a 2-loops considerando alterações de $\pm 3\sigma$ na massa do quark top, na massa do Higgs e na constante de acoplamento forte.	78

6.7.	<i>Fluxo do grupo de renormalização do acoplamento quártico do Higgs a 2-loops. Esquerda: Alterações no fluxo de λ em função de $m_h^{\text{físico}}$. Direita: Considerando $\lambda(\Lambda_{\text{Planck}}) = 0$ como condição inicial teremos que a curva gerada pelo fluxo de λ é compatível com $m_h^{\text{físico}} = 130 \text{ GeV}$.</i>	79
6.8.	<i>Alteração no fluxo do grupo de renormalização de λ e de y_t em função da massa física do Higgs. Os outros acoplamentos praticamente não se alteram, por isso os omitimos neste gráfico.</i>	80
6.9.	<i>Limites teóricos para a massa do bóson de Higgs do MP como função da escala Λ onde aparece nova física. O limite superior evita o polo de Landau até a escala Λ, já o limite inferior preserva a estabilidade do vácuo. As linhas tracejadas mostram que para $m_h \sim 125 \text{ GeV}$ teremos $\Lambda \sim 10^{10} \text{ GeV}$.</i>	82
7.1.	<i>Diagramas triangulares que podem gerar anomalias no Modelo Padrão, desconsiderando a gravidade.</i>	87
7.2.	<i>Diagramas a 1-loop da auto-energia do Higgs a partir da interação com stops.</i>	89

Sumário

Resumo	v
Abstract	vii
Lista de Figuras	ix
Notações e Convenções	xiii
1. Introdução	1
2. O bóson de Higgs na teoria eletrofraca	3
2.1. Teorema de Goldstone	5
2.2. A massa dos bósons de gauge: o mecanismo de Higgs	7
2.3. A teoria GWS das interações fracas	9
2.4. O gauge R_ξ	16
3. Naturalidade	23
3.1. Naturalidade Estrutural	23
3.2. Naturalidade Técnica	24
3.3. Ajuste Fino	26
4. Regularização por <i>cutoff</i>	29
4.1. Cálculo dos diagramas de 2 pontos	31
4.1.1. Diagramas 1PR com <i>tadpoles</i>	31
4.1.2. Diagramas 1PI	37
5. Regularização dimensional	51
5.1. Dimensão dos campos	52
5.2. Cálculo dos diagramas de 2 pontos	53
5.2.1. Diagramas 1PR com <i>tadpoles</i>	53
5.2.2. Diagramas 1PI	58
6. Equações do Grupo de Renormalização	67
6.1. Grupo de renormalização Wilsoniano	68
6.2. Grupo de renormalização contínuo	69
6.2.1. Grupo de renormalização a partir de contratermos	69

6.3. Resultados do running dos parâmetros	74
6.3.1. Limites para a massa do Higgs	75
7. SUSY, a Supersimetria	83
7.1. MSSM, a teoria Supersimétrica Mínima do Modelo Padrão	86
7.2. Correção à massa do Higgs	88
8. Conclusão	91
A. Cálculo de $m^2\delta_{m^2}$ de um campo escalar a <i>1-loop</i> fermiônico com interação de Yukawa	93
B. Simetria Quiral na QED	97
C. Cálculo do termo $-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2\xi}G^2$ no gauge R_ξ	101
D. Massa física das partículas do MP	103
E. Identificando a renormalização da massa do Higgs a <i>1-loop</i>	105
F. Expressões úteis para calcular <i>loops</i> em regularização dimensional e por <i>cutoff</i>	109
G. Cálculo da dimensão anômala do campo de Higgs a <i>1-loop</i>: $\gamma_{m^2}^{(1)}$	111
H. EGR das constantes de acoplamento do MP e do parâmetro de massa do Higgs a <i>2-loops</i>	113
Referências Bibliográficas	115

Notações e Convenções

Trabalhamos em unidades naturais

$$\hbar = c = 1,$$

segundo as quais,

$$[\text{comprimento}] = [\text{tempo}] = [\text{energia}]^{-1} = [\text{massa}]^{-1}.$$

Adotamos a métrica

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e usamos o tensor de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ definido como: $\epsilon^{0123} = 1$.

Assumimos a seguinte base quirial:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde

$$\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$$

E para o valor esperado do vácuo: $v \sim 246 \text{ GeV}$.

1

Introdução

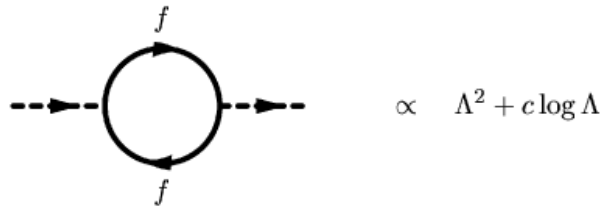
Os bons modelos teóricos são aqueles que, com um número relativamente pequeno de parâmetros, exibem excelentes níveis de concordância entre suas previsões e as medidas experimentais. Para fenômenos envolvendo interações entre partículas o Modelo Padrão (MP) aparece como a principal opção na descrição da física das pequenas escalas. A base conceitual do MP assume que a invariância de gauge seja uma manifestação fundamental da natureza, mas ao mesmo tempo que essa premissa tenha gerado importantes avanços teóricos, a mesma invariância local que descrevia a interação eletrofraca proibia os termos de massa dos férmions das Lagrangianas de modelos bem consolidados, como a QED e, adicionalmente, não gerava massa para os bósons Z e W, contradizendo as evidências experimentais.

À medida que a QED e a QCD se firmavam como pilares de uma teoria quântica de campos também crescia a necessidade de incorporar ao Modelo Padrão um mecanismo pelo qual as partículas adquiriam seus termos de massa. Foi nesse contexto que teorias de quebra espontânea de simetria ganharam espaço no cenário científico, pois elas descrevem mecanismos pelos quais partículas “restauram” suas massas originalmente proibidas pela simetria da Lagrangiana. Foi assim que na década de sessenta Peter Higgs, François Englert e Robert Brout, explorando a invariância de gauge da teoria e considerando uma quebra espontânea de simetria, propuseram o *mecanismo de Higgs*, um processo gerado por um bóson (o bóson de Higgs) e responsável por conferir massa aos bósons de gauge. Essa ideia foi logo implementada à interação eletrofraca por Glashow, Weinberg e Salam. Também é devido ao acoplamento do Higgs com os férmions que estes últimos ganham massa.

O bóson de Higgs é fundamental para resolver o problema da geração da massa das partículas elementares, e a confirmação da existência da partícula em 2012 no CERN,

além de finalizar o quebra-cabeça do MP com a última partícula que o modelo previa, confirmou a presença de um escalar possivelmente fundamental no MP. Visto que o bóson de Higgs é uma partícula escalar, há uma dificuldade teórica de entender como sua massa, m_h , pode estar muito abaixo da escala de Planck ou de Grande Unificação, o que explicaremos melhor adiante. Mas não é novidade que o MP seja incapaz de explicar todos os fenômenos das pequenas escalas: a impossibilidade de justificar as diferenças tão grandes nas intensidades das massas dos férmions e a verificação experimental de massa não nula dos neutrinos são exemplos que demonstram as limitações do MP e sugerem física além dele.

O problema com a massa do Higgs está associado ao fato dele ser um escalar fundamental. Partículas escalares recebem correções radiativas enormes já a 1-loop (apêndice A). Essas correções $m^2\delta_{m^2}$ divergem quadraticamente com o cutoff.



O termo Λ corresponde ao valor máximo do momento que pode correr dentro do loop e preservar a validade do MP. Em princípio imaginou-se que Λ estaria próximo à *escala de Planck*, pois nessa energia os efeitos gravitacionais devem ser levados em conta, e como o MP não descreve a gravidade, então $\Lambda_{Planck} \sim 10^{19}$ GeV seria obviamente a maior escala possível até onde o MP poderia valer. Outro candidato ao *cutoff* seria a *escala da grande unificação*, $\Lambda_{GUT} \sim 10^{16}$ GeV. Em outras palavras, o *cutoff* manifesta nossa ignorância quanto aos fenômenos físicos envolvidos a altíssimas energias e, por isso, corresponde à fronteira onde deveríamos ver nova física, comumente chamada de *física além do MP*.

De qualquer forma, os candidatos óbvios ao cutoff têm energias muito altas, então dizemos que é *natural* esperar que o bóson de Higgs não seja leve. Porém, o valor medido para a massa dessa partícula aponta para $m_h \sim 125$ GeV [1], um valor muito menor que as escalas de Planck e da grande unificação. Esse é o *Problema da Naturalidade* ou *Problema da Hierarquia de Massa* que se manifesta no MP.

Há anos os físicos teóricos têm desenvolvido modelos para explicar o motivo da massa do Higgs ser tão menor que o “naturalmente” esperado. Somente o LHC poderá nos dizer qual desses modelos será bem sucedido; muitos já foram excluídos, outros continuam na fila da expectativa de serem eleitos pela natureza.

2

O bóson de Higgs na teoria eletrofraca

Começaremos com uma breve visão geral do Modelo Padrão.

O MP apresenta campos físicos (*férmions*, *bósons de gauge*, *bóson de Higgs*) e campos não-físicos (*bósons de goldstone* e *fantasmas de Faddeev-Popov*). É uma teoria invariante por transformações de gauge, mas a aparição de campos não-físicos depende do gauge escolhido: optando pelo *gauge unitário* preservamos apenas os graus de liberdade físicos da teoria; ainda assim, muitas vezes é viável escolher um gauge diferente para facilitar a resolução de certos cálculos, principalmente cálculos em loops, mesmo que apareçam graus de liberdade não-físicos.

Fazendo os devidos ajustes entre as previsões teóricas e as verificações experimentais chega-se ao grupo de simetria do Modelo Padrão:

$$G_{MP} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (2.1)$$

onde a existência de um escalar fundamental, o bóson de Higgs, foi prevista dentro do MP ao promover-se a *quebra espontânea da simetria eletrofraca*, $SU(2)_L \times U(1)_Y$, gerando a simetria do eletromagnetismo, $U(1)_{em}$.

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\text{quebra espontânea de simetria}} U(1)_{em} \quad (2.2)$$

Quanto ao conteúdo fermiônico da teoria existem três gerações de férmions organizados

segundo suas transformações sobre os grupos de simetria (2.1) da seguinte maneira:

$$\psi = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \nu_L \\ l_L \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \nu_{eL} \\ e_L \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{array} \right) \rightarrow \text{léptons de mão esquerda} \\ l_R = e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R \rightarrow \text{léptons de mão direita} \\ \left(\begin{array}{c} U_L \\ D_L \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} u_L \\ d_L \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} c_L \\ s_L \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} t_L \\ b_L \end{array} \right) \rightarrow \text{quarks de mão esquerda} \\ U_R = u_R, \quad c_R, \quad t_R \\ D_R = d_R, \quad s_R, \quad b_R \rightarrow \text{quarks de mão direita} \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Estes férmions possuem massa, m_f e cargas associadas às simetrias $U(1)_Y$ e $U(1)_{em}$ (que resta após a quebra da simetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$) mostradas na tabela abaixo. Os férmions de mão-direita não se transformam (são singletos) por $SU(2)_L$, ao passo que os de mão-esquerda se transformam como dubletos e o autovalor do gerador $t^{(3)}$ também está na tabela. Os léptons são singletos de $SU(3)$ e os quarks são tripletos de $SU(3)$, mas como essa simetria não é quebrada, não escrevemos estes tripletos explicitamente.

	$t^{(3)}$	Y	Q
l_R	0	-1	-1
U_R	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
D_R	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
ν_L	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
l_L	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
U_L	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
D_L	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$

Tabela 2.1.: Carga elétrica Q , hipercarga Y e projeção do isospin no eixo- z , $t^{(3)}$, para léptons e quarks.

sendo possível identificar

$$Q_f = t_f^{(3)} + Y_f \quad (2.4)$$

onde o índice f representa o férmion específico.

Além dos férmions, a teoria também apresenta campos físicos bosônicos de spin 0 ou spin 1 (p. ex. Higgs e bósons de gauge, respectivamente). Estes últimos aparecem como mediadores das interações entre as partículas ao exigirmos a invariância da ação por transformações locais. Assim, glúons são os mediadores das interações fortes; $W^\pm$ e Z das interações fracas e fótons os responsáveis pelas forças eletromagnéticas¹. O Higgs é um campo escalar (spin 0) que apresenta valor esperado do vácuo, VEV, não-nulo e ao ser incorporado na Lagrangiana do MP provoca uma quebra-espontânea da simetria que essa Lagrangiana satisfazia antes da inclusão do Higgs. Esse mecanismo é responsável por conferir massa aos bósons de gauge e veremos adiante como o bóson de Higgs participa da quebra espontânea de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ e de que modo a escolha do gauge pode modificar a quantidade de graus de liberdade não-físicos. Para isso, devemos analisar um importante teorema que será essencial para futuras discussões: o *teorema de Goldstone*.

2.1. Teorema de Goldstone

Suponha uma Lagrangiana composta por N campos escalares reais² que tenha a seguinte estrutura:

$$\mathcal{L} = (\text{termos derivativos}) - V(\phi) \quad (2.5)$$

onde $\phi = \{\phi_i\}$ é um multipletto contendo os N campos escalares, e seja $\mathcal{L}$ invariante por um grupo de simetria contínuo G sob o qual ϕ se transforma de um modo que especificaremos adiante. Suponha que esse potencial também admita um ϕ_0 que o minimiza

$$\left. \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^i} \right|_{\phi=\phi_0} = 0 \quad (2.6)$$

o que nos permite escrever a expansão de $V(\phi)$, em torno do mínimo, sem os termos derivativos de primeira ordem:

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \right)_{\phi_0} (\phi - \phi_0)^i (\phi - \phi_0)^j + \mathcal{O}((\phi - \phi_0)^3) \quad (2.7)$$

onde $\left(\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \right)$ corresponde à matriz Hessiana.

Com isso, comparando a Lagrangiana (2.5) com a já conhecida:

$$\mathcal{L} = (\text{termos derivativos}) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - (\text{termos de interação}) \quad (2.8)$$

onde m é a matriz que contém a informação sobre o espectro de massa dessa teoria, uma

¹O MP não descreve a força gravitacional.

²Sempre é possível escrevermos n campos complexos como $2n$ campos reais.

vez que a Lagrangiana seja quantizada, fica claro que

$$m_{ij}^2 = \left(\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \right)_{\phi_0} \geq 0, \quad (2.9)$$

onde a desigualdade é assegurada pelo fato de $V(\phi_0)$ ser um mínimo de (2.7). Além disso, m_{ij}^2 acompanha campos escalares deslocados por ϕ_0 , os quais definiremos como

$$\phi(x) - \phi_0 \equiv \chi'(x). \quad (2.10)$$

Ao diagonalizarmos m_{ij}^2 encontraremos os autoestados de massa, χ , com seus respectivos autovalores.

Agora faremos uso da invariância de $V(\phi)$ por transformações de G . Se $g \in G$ e $R(g)$ é uma matriz de transformação de G , então:

$$V(\phi) = V(R(g)\phi), \quad (2.11)$$

e transformações infinitesimais de simetrias contínuas têm a forma geral:

$$\phi_i \longrightarrow (1 + i\epsilon^a t^a)_{ij} \phi_j = \phi_i + i\epsilon^a t_{ij}^a \phi_j, \quad (2.12)$$

onde t^a são as matrizes de representação do grupo de simetria e ϵ^a são as componentes infinitesimais que geram a perturbação da identidade. Mas por estarmos escrevendo ϕ como campos reais, as matrizes t^a devem ser puramente imaginárias e, por serem Hermiteanas, também serão antissimétricas. Assim, definimos

$$T^a = it^a, \quad (2.13)$$

onde T^a são matrizes reais e antissimétricas. Desse modo,

$$V(\phi) = V(\phi + \epsilon^a T^a \phi) = V(\phi) + \epsilon^a \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_i} T_{ij}^a \phi_j + \mathcal{O}((\epsilon^a T^a \phi)^2), \quad (2.14)$$

e a soma sobre os índices repetidos está implícita.

Consequentemente,

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi^i} (\epsilon^a T^a \phi)_i = 0. \quad (2.15)$$

Portanto, ao diferenciarmos com respeito a ϕ_j e impormos $\phi = \phi_0$, ficaremos com:

$$\left(\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi_0} (\epsilon^a T^a \phi_0)_i + \left(\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi_i} \right)_{\phi_0} \left(\frac{\partial (\epsilon^a T^a \phi)_i}{\partial \phi_j} \right)_{\phi_0} = 0 \quad (2.16)$$

e de acordo com (2.6) o segundo termo da equação acima é nulo, de modo que

$$\left(\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right)_{\phi_0} (\epsilon^a T^a \phi_0)_i = m_{ij}^2 (\epsilon^a T^a \phi_0)_i = 0. \quad (2.17)$$

Conclusão: se o vácuo ϕ_0 for invariante por alguma transformação $R(g)$ dada por (2.12) então $\epsilon^a T^a \phi_0 = 0$ e a equação (2.17) é trivialmente satisfeita. Porém, se existir algum $g \in G$ cuja transformação $R(g)$ modifique o vácuo ϕ_0 , então $\epsilon^a T^a \phi_0 \neq 0$ e a equação (2.17) nos diz que o autovalor de massa do vetor $(\epsilon^a T^a \phi_0)$ deve ser nulo, portanto, ao diagonalizarmos a matriz de massa, m_{ij}^2 , já teremos ao menos um escalar χ^a sem massa. A generalização direta deste resultado nos diz que para cada transformação contínua de G que não mantém ϕ_0 invariante surge um escalar sem massa na teoria, o qual chamamos de bóson de Goldstone. A diagonalização de m_{ij}^2 também gera pelo menos um autovalor não-nulo, significando que alguns escalares χ^b apresentam massa positiva; esse é o caso do Higgs. Veremos adiante que o bóson de Higgs aparece como um escalar massivo de uma teoria com simetria $SU(2) \times U(1)$ espontaneamente quebrada para $U(1)$.

Agora já somos capazes de enunciar o Teorema de Goldstone em toda a sua glória: *para cada simetria contínua espontaneamente quebrada, a teoria deve conter um escalar sem massa.*

Perceba que a prova desse teorema é geral e aplica-se, inclusive, a teorias que não sofrem quebra espontânea de simetria: se o vácuo assumir um único valor possível, ou seja, se qualquer transformação por G o mantiver invariante (não degenerado), não aparecerão bósons de Goldstone.

Embora a dedução acima seja clássica, é possível usar o potencial efetivo, V_{eff} , para mostrar que a nível quântico o teorema de Goldstone ainda é válido, ou seja, as correções quânticas não geram massa para os bósons de Goldstone. Isso está feito no capítulo 11 da referência [2].

2.2. A massa dos bósons de gauge: o mecanismo de Higgs

Ainda considerando a transformação (2.12), se exigirmos que a Lagrangiana apresente simetria local, ou seja, $\epsilon \rightarrow \epsilon(x_\mu)$ somos obrigados a trocar as derivadas por derivadas covariantes que assumem a forma:

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu^a t^a) \phi = (\partial_\mu - g A_\mu^a T^a) \phi, \quad (2.18)$$

onde g é a constante de acoplamento e A_μ^a são os bósons de gauge associados às simetrias da Lagrangiana. O termo da energia cinética fica:

$$\frac{1}{2}(D_\mu\phi_i)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_i)^2 - gA_\mu^a\left(\partial_\mu\phi_i T_{ij}^a\phi_j\right) + \frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{b\mu}(T^a\phi)_i(T^b\phi)_i. \quad (2.19)$$

E se os campos ϕ 's admitirem um VEV ϕ_0 não nulo, podemos reescrever a igualdade acima em termos dos campos deslocados χ' definidos em (2.10). Com isso, o último termo de (2.19) vai gerar uma série de novas estruturas, dentre as quais teremos:

$$\frac{1}{2}g^2 A_\mu^a A^{b\mu}(T^a\phi_0)_i(T^b\phi_0)_i \quad (2.20)$$

onde podemos ver que

$$M_{ab}^2 = g^2(T^a\phi_0)_i(T^b\phi_0)_i, \quad (2.21)$$

é a matriz de massa dos bósons de gauge, cujos elementos da diagonal ficam

$$M_{aa}^2 = g^2(T^a\phi_0)^2 \geq 0 \quad (\text{não há soma implícita}). \quad (2.22)$$

Se alguma transformação de (2.12) mantiver o vácuo invariante, significa que:

$$\epsilon^a T^a \phi_0 = 0. \quad (2.23)$$

Para melhor compreender a implicação dessa condição vamos imaginar o caso específico no qual as componentes de ϵ são todas nulas, exceto por uma posição a , onde $\epsilon^a = \delta$. Neste caso

$$T^a \phi_0 = 0, \quad (2.24)$$

fazendo a matriz (2.21) ter elementos nulos em uma coluna (ou linha) inteira, ou seja, apresentando ao menos um autovalor zero e deixando o correspondente bóson de gauge sem massa. Então o caso geral (2.23) significa que existe uma certa combinação de geradores ao qual podemos associar um bóson de gauge (redefinido como uma combinação linear dos primeiros bósons de gauge A_μ^a) que não terá massa. Esse é o caso do fóton, como veremos adiante.

É importante notar que (2.9) e (2.21) não são a mesma matriz; a primeira foi obtida analisando o *termo potencial* do campo escalar da Lagrangiana, e isso nos permitiu determinar se os *escalares da teoria* ganhavam massa, identificando-os por bósons de Goldstone (para massa zero) ou escalares massivos. Nesta seção, a matriz de massa foi obtida a partir do *termo cinético* da Lagrangiana, nos permitindo identificar a massa dos *bósons de gauge* que apareceram na teoria invariante local.

Esse procedimento de gerar a massa dos bósons de gauge por meio da quebra espontânea de simetrias locais contínuas, com aparição de um escalar massivo e de bósons de Goldstone (graus de liberdade não-físicos), é denominado *mecanismo de Higgs*.

É importante notar que toda vez que $T^a \phi_0 \neq 0$ consequentemente aparecerá um bóson de Goldstone na teoria e, ao mesmo tempo, um bóson de gauge ganhará massa. Por isso é comum dizermos que para cada escalar sem massa existe um bóson de gauge que “engole” o grau de liberdade não-físico desse escalar e adquire uma polarização longitudinal (grau de liberdade físico).

2.3. A teoria GWS das interações fracas

Agora podemos aplicar os conceitos anteriores para investigar a aquisição de massa pelos bósons de gauge $W^\pm$ e Z^0 e a ausência de massa para o fóton. Como não existe uma maneira simples e direta de se obter a Lagrangiana que modela as interações fracas, o método consiste na análise por tentativa e erro. Dentre as diversas possibilidades é possível verificar que em uma teoria cuja simetria interna seja apenas $SU(2)$ local o acréscimo de um escalar complexo que se transforma como dubleto de $SU(2)$ e adquire VEV não-nulo gera apenas bósons de gauge massivos³, impossibilitando a descrição do fóton através desse modelo de quebra espontânea de $SU(2)$ por escalares. Outra tentativa é adicionar uma simetria $U(1)$ local, de modo que o grupo de gauge seja $SU(2) \times U(1)$. Uma possível Lagrangiana que apresenta essa simetria interna e descreve a interação entre férmions, bósons de gauge e escalares é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (i\bar{\psi}\not{D}\psi + h.c.) + (-\bar{\psi}iy_{ij}\psi_j\phi + h.c.) + (|D_\mu\phi|^2 - V(\phi)) \quad (2.25)$$

e para ser compatível com as evidências experimentais os férmions devem se transformar segundo o grupo de simetria $U(1)$ apresentando as hipercargas da Tabela 2.1; quanto às transformações $SU(2)$: ψ_L deve ser dubleto e ψ_R singleto, justificando a ausência do termo $-m_0\bar{\psi}\psi$ na Lagrangiana (2.25), que deve ser invariante por transformações $SU(2)_L$ ⁴. Assim, para os léptons da primeira geração, e considerando a carga de isospin da tabela 2.1, a transformação por $SU(2)$ fica

$$SU(2) : \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot \alpha(x)} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

onde σ^a é a matriz de Pauli, ou seja, $e^{i\frac{\sigma}{2} \cdot \alpha(x)}$ é a matriz de rotação no espaço de isospin em torno de um eixo $\alpha(x)$.

Já a transformação por $U(1)$ fica

$$U(1) : \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} e^{-i\beta(x)/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta(x)/2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\beta(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \\ e_R \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

³Ver demonstração na pg.694 da referência [2].

⁴Se $\psi = \psi_L + \psi_R$, então $\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_R\psi_L + \bar{\psi}_L\psi_R$. Sob transformações do grupo $SU(2)_L$ claramente esse termo não é invariante.

sendo β a fase da transformação $U(1)$.

Feito isso, associamos ao dubleto de isospin escalar, $\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$, uma carga (neste caso a hipercarga) relacionada à simetria $U(1)$, $Y = 1/2$, de modo que a transformação completa desse escalar ϕ seja:

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha^a(x)\frac{\sigma^a}{2}} e^{iY\beta(x)} \phi(x) = e^{i\alpha^a(x)\frac{\sigma^a}{2}} e^{i\frac{1}{2}\beta(x)} \phi(x) \quad (2.28)$$

A existência de dois grupos de simetria, $U(1)$ e $SU(2)$, estão relacionadas a diferentes conservações. Isso nos obriga a diferenciar as constantes de acoplamento associadas a cada simetria, de modo que a derivada covariante exibe a forma:

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - ig_2 A_\mu^a t^a - i\frac{1}{2} g_1 B_\mu \right) \phi \quad (2.29)$$

com $t^a = \sigma^a/2$. A_μ^a e B_μ são os bósons de gauge de $SU(2)$ e $U(1)$, respectivamente, assim como g_2 e g_1 são as constantes de acoplamento desses respectivos grupos de simetria.

Como a Lagrangiana obedece a simetria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ o potencial mais genérico que podemos escrever para $V(\phi)$ em (2.25) é:

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (2.30)$$

sendo λ o acoplamento quártico e μ^2 o termo de massa do campo ϕ .

O potencial (2.30) será minimizado em $\phi \neq 0$ quando $\mu^2 < 0$:

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial |\phi|^2} = 0 \Rightarrow |\phi(x)|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \equiv v^2. \quad (2.31)$$

Se o campo ϕ admitir VEV não-nulo, $v \neq 0$, teremos a liberdade de escolher a “direção” do campo que minimiza o potencial, e faremos a seguinte escolha:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Consequentemente, a transformação que mantém o vácuo invariante é aquela em que

$$\alpha^1 = \alpha^2 = 0, \quad \alpha^3 = \beta, \quad (2.33)$$

pois de acordo com (2.28) essa transformação seria

$$\phi_0 \rightarrow e^{i\frac{\beta}{2}(1+\sigma^3)}\phi_0 = \begin{pmatrix} e^{i\beta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \phi_0 \quad (2.34)$$

e corresponderia à seguinte combinação de geradores: $(t^3 + Y)$. Esse é o caso descrito em (2.23), ou seja, para essa específica combinação podemos associar um bóson de gauge sem massa (candidato a ser o fóton). Os outros três bósons de gauge ganham massa pelo mecanismo de Higgs. Isso torna essa teoria uma forte candidata a descrever as interações fracas.

A massa dos bósons de gauge na teoria GWS

Para verificarmos explicitamente as massas dos bósons de gauge precisaremos calcular o termo de energia cinética $|D_\mu\phi|^2$ e facilitamos essa tarefa eliminando os graus de liberdade não-físicos

campo escalar ϕ do seguinte modo,

$$\phi(x) = U(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

onde $U(x)$ é uma transformação geral de $SU(2)$, v é o VEV e $h(x)$ é um campo escalar real que representa as flutuações em torno do VEV, de modo que $\langle h \rangle = 0$.

Qualquer que seja $\phi(x)$ é sempre possível utilizar a invariância por $SU(2)$ para transformar esse campo escalar segundo a inversa de $U(x)$. Como a transformação é unitária, $U^{-1}U = UU^{-1} = \mathbb{1}$, o resultado será o valor de ϕ no chamado gauge unitário:

$$\phi(x) \rightarrow U^{-1}(x)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Substituindo (2.36) em (2.29) teremos,

$$D_\mu\phi = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}g_2\left(1 + \frac{h}{v}\right)(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ \frac{1}{v}\partial_\mu h + \frac{i}{2}\left(1 + \frac{h}{v}\right)(g_2A_\mu^3 - g_1B_\mu) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |D_\mu\phi|^2 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{4}\left[g_2^2(A_\mu^1)^2 + g_2^2(A_\mu^2)^2 + (g_2A_\mu^3 - g_1B_\mu)^2\right]\left(1 + \frac{h}{v}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu h)^2 + \left(\frac{g_2v}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8}\begin{pmatrix} A_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2g_1 \\ -g_2g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}\right]\left(1 + \frac{h}{v}\right)^2, \end{aligned} \quad (2.38)$$

onde definimos

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2). \quad (2.39)$$

Comparando o segundo termo de (2.38) com o termo de massa esperado para um bóson carregado, $m_W^2 W^+ W^-$, percebemos que

$$m_W = \frac{g_2 v}{2}. \quad (2.40)$$

Os autovalores e autovetores da matriz 2×2 em (2.38) são

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0 & \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 = g_1^2 + g_2^2 & \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \begin{pmatrix} g_2 \\ -g_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Com isso, concluímos que os campos físicos A_μ e Z_μ devem ser identificados por

$$A_\mu = \frac{g_1 A_\mu^3 + g_2 B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad m_A = 0 \quad (2.42)$$

$$Z_\mu = \frac{g_2 A_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \quad m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \quad (2.43)$$

A partir dos autovetores (2.41) construímos a matriz de transformação da base (A_μ^3, B_μ) para a base (Z_μ, A_μ) :

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} & -\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \\ \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} & \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Explorando a ortogonalidade de A_μ e Z_μ podemos definir um ângulo de mistura θ_w , conhecido como *ângulo de Weinberg*, que aparecerá na matriz de mudança da base (A_μ^3, B_μ) para a (Z_μ, A_μ) :

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

e comparando com (2.44), concluímos que

$$\cos \theta_w = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad \sin \theta_w = \frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \quad (2.46)$$

ou seja,

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_w \quad (2.47)$$

revelando que a diferença entre as massas dos bósons de gauge Z_μ e $W^\pm$ deve-se à forma como os campos A_μ^3 e B_μ se misturam. Esse resultado é de extrema importância, pois trata-se de uma previsão do modelo GWS que pode ser testada experimentalmente. Se o modelo apresentasse qualquer outro grupo de simetria ou padrão de quebra da simetria, a relação entre as massas seria distinta de (2.47).

Com isso, verificamos que uma teoria $SU(2) \otimes U(1)$ espontaneamente quebrada por um escalar que se transforma como dubleto de $SU(2)$ pode reproduzir as massas dos bósons físicos Z_μ , $W^\pm$ e A_μ .

O termo da Lagrangiana (2.25) que reproduziu essas massas foi o $|D_\mu \phi|^2$, mas para investigar o acoplamento dos férmions com esses candidatos a bósons de gauge físicos devemos estudar o termo $(i\bar{\psi}\not{D}\psi)$ e escrever a derivada covariante (2.29) substituindo A_μ^i e B_μ pelos campos Z_μ , $W^\pm$ e A_μ , além de considerar uma hipercarga Y qualquer.

Começando pela derivada covariante, após efetuarmos algumas simplificações teremos:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_2}{\sqrt{2}}(W_\mu^+ t^+ + W_\mu^- t^-) - i\frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}Z_\mu(g_2^2 t^3 - g_1^2 Y) - i\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}A_\mu(t^3 + Y) \quad (2.48)$$

onde $t^\pm = (t^1 \pm it^2)$.⁵

O último termo da equação (2.48) reforça o que já tínhamos concluído: o bóson de gauge sem massa, A_μ , está associado à combinação específica de geradores, $(t^3 + Y)$.

Já sabemos, pela QED, que o acoplamento de fótons a férmions é mediado pela carga elétrica, e . Por isso, identificamos a combinação de geradores anterior como sendo o operador carga elétrica, Q :

$$Q = t^3 + Y, \quad (2.50)$$

onde

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (2.51)$$

Juntando os resultados (2.46) e (2.51) construímos o triângulo da figura 2.1.

⁵Note que:

$$t^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

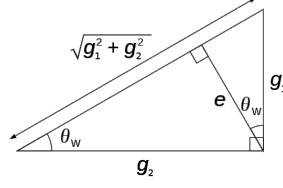


Figura 2.1.: Relações entre as constantes de acoplamento da teoria eletrofraca (e , g_1 , g_2) e o ângulo de Weinberg, θ_w .

Reescrevendo (2.48) em termos de θ_w resulta:

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ t^+ + W_\mu^- t^-) - i \frac{g_2}{\cos \theta_w} Z_\mu (t^3 - \sin^2 \theta_w Q) - ie A_\mu Q. \quad (2.52)$$

E agora basta substituir esse resultado em $i\bar{\psi}\not{D}\psi$ para obtermos a interação entre férmions e bósons de gauge.

Considerando a quiralidade dos férmions reescrevemos $i\bar{\psi}\not{D}\psi$ convenientemente como

$$i\bar{\psi}\not{D}\psi = i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R, \quad (2.53)$$

onde vamos considerar apenas a interação com os léptons, pois os quarks têm uma simetria adicional $SU(3)$ que não está incluída na derivada covariante⁶. Utilizando a notação definida em (2.3), onde chamaremos $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix}$, e substituindo em (2.53) teremos:

$$\begin{aligned} & i\bar{l}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{g_2}{\cos \theta_w} Z_\mu \sin^2 \theta_w Q - ie A_\mu Q \right) l_R \\ & + i\bar{L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i \frac{g_2}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ t^+ + W_\mu^- t^-) - i \frac{g_2}{\cos \theta_w} Z_\mu (t^3 - \sin^2 \theta_w Q) - ie A_\mu Q \right) L \\ & = i\bar{l} \gamma^\mu \partial_\mu l + i\bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - e\bar{l} \gamma^\mu l A_\mu \\ & + \frac{g_2}{\cos \theta_w} Z_\mu \left(\sin^2 \theta_w \bar{l}_R \gamma^\mu l_R - \frac{1}{2} \cos 2\theta_w \bar{l}_L \gamma^\mu l_L + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L \right) \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L W_\mu^+ + h.c.). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Por aqui vemos que A_μ não se acopla aos neutrinos, mas interage com os outros léptons de ambas as quiralidades com a mesma intensidade, exatamente como ocorre

⁶Caso considerássemos a simetria $SU(3)$, apareceriam outros bósons de gauge na derivada covariante. Esses novos campos seriam os glúons, partículas mediadoras das interações fortes.

com o fóton. O bóson Z_μ interage com todos os léptons, mas a quiralidade influencia na intensidade do acoplamento. Por fim, o $W_\mu^\pm$ interage com os léptons de mão-esquerda e gera uma mudança de sabor. Todas essas previsões teóricas coincidem com as evidências experimentais.

A massa dos férmions na teoria GWS

Para consagrar o sucesso da teoria GWS na descrição das interações fracas é preciso que a quebra espontânea da simetria reproduza a massa experimentalmente verificada dos férmions, com exceção dos neutrinos. O termo da Lagrangiana (2.25) que fará esse papel será o $(-\bar{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi)$. Para isso, vamos reescrevê-lo levando em conta a quiralidade dos férmions:

$$-\bar{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi = -\bar{\psi}_L^i \cdot \phi y_{ij} \psi_R^j. \quad (2.55)$$

Os índices $i, j = 1, 2, 3$ representam as gerações dos férmions e y_{ij} é uma matriz complexa onde cada elemento corresponde a um *acoplamento de yukawa*.

Note que esse termo é invariante por transformações $SU(2)_L \times U(1)_Y$: a soma das hipercargas sempre se anulam, e a transformação $SU(2)$ de $\phi(x)$ é compensado pela transformação $SU(2)$ de $\bar{\psi}_L$.

Adotando a parametrização (2.36) e considerando apenas os léptons, (2.55) assume a forma:

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} y_{ij} v \left(1 + \frac{h(x)}{v} \right) \bar{l}_L^i l_R^j. \quad (2.56)$$

Comparando o resultado acima com o termo de massa esperado para os férmions, $-m_f \bar{\psi}_L \psi_R$, concluímos que

$$(m_f)_{ij} = \frac{v}{\sqrt{2}} y_{ij}, \quad (2.57)$$

e após diagonalizar essa matriz obteremos a massa dos férmions físicos, e os neutrinos sempre terão massa nula uma vez que não há mistura entre neutrinos de mão-esquerda e mão-direita.

Agora estamos seguros de que a teoria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ⁷ descreve a natureza das interações fracas com bastante precisão.

⁷Os índices L e Y em $SU(2)_L \times U(1)_Y$ indicam que apenas os férmions de mão-esquerda (*left*) se transformam sobre $SU(2)$, enquanto a simetria $U(1)$ é decorrente da hipercarga Y .

O bóson de Higgs

Nesta seção investigaremos a manifestação do campo escalar real $h(x)$ descrito em (2.36). Se estamos assumindo que o campo $\phi(x)$ possui um VEV não-nulo, podemos escrever a seguinte Lagrangiana invariante por $SU(2) \times U(1)$:

$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu \phi|^2 + \underbrace{\mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2}_{-V(\phi)}. \quad (2.58)$$

onde a diferença entre os sinais de $V(\phi)$ na equação acima e em (2.31) ocorre porque agora definimos que $\mu^2 > 0$, ou seja, o mínimo do potencial será em

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(\phi)}{\partial |\phi|^2} = 0 &\Rightarrow |\phi(x)|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \phi_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\ v &= \left(\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Adotando o gauge unitário (2.36) já vimos que o termo cinético $|D_\mu \phi|^2$ gera a massa dos bósons de gauge, faltando apenas analisar o termo potencial da Lagrangiana escalar, que fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V &= \frac{\mu^2 v^2}{2} \left(1 + \frac{h(x)}{v} \right)^2 - \frac{\lambda v^4}{4} \left(1 + \frac{h(x)}{v} \right)^4 \\ &= \frac{\mu^2 v^2}{4} - \mu^2 h^2 - \lambda v h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4 \\ &= \frac{m_h^2 v^2}{8} - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 - \sqrt{\frac{\lambda}{2}} m_h h^3 - \frac{1}{4} \lambda h^4, \end{aligned} \quad (2.60)$$

identificando

$$m_h = \sqrt{2} \mu = \sqrt{2\lambda} v. \quad (2.61)$$

Esta partícula é conhecida como o bóson de Higgs e, assim como os férmions têm a magnitude da massa controlada pelos acoplamentos de yukawa, o bóson de Higgs tem sua massa controlada pelo acoplamento quártico λ .

2.4. O gauge R_ξ

Até agora utilizamos o gauge unitário porque ele nos garante resultados que apresentam graus de liberdade físicos apenas, tornando a análise mais simples e clara. No entanto

esse gauge nem sempre é o mais apropriado para a execução de certos cálculos, em parte porque nesse gauge os propagadores vetoriais, $\Delta_{\mu\nu}(k)$, apresentam divergências difíceis de serem contornadas pelos métodos de regularização atuais,

$$\Delta^{\mu\nu}(k) = \langle A^\mu(k) A^\nu(-k) \rangle = -\frac{i}{k^2 - m_A^2} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{m_A^2} \right). \quad (2.62)$$

De fato, a regularização dos diagramas da auto-energia do Higgs é mais simples de se calcular em outro gauge, diferente do unitário, tal como veremos no capítulo 4. Portanto será útil analisarmos a Lagrangiana do Modelo Padrão com todos os graus de liberdade – físicos e não-físicos – após a quebra espontânea da simetria eletrofraca. Isso nos permitirá obter as regras de Feynman de todas as interações possíveis.

Começamos retomando o resultado obtido em (2.21),

$$M_{ab}^2 = g^2 (T^a \phi_0)_i (T^b \phi_0)_i, \quad (2.63)$$

onde consideramos que os campos ϕ_i são todos reais (lembre-se que isso sempre é possível).

Agora aplicamos esse resultado na teoria GWS. Primeiro reparametrizamos o escalar de $SU(2)$:

$$\phi = \phi_0 + \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(\phi^1 - i\phi^2) \\ v + (h + i\phi^3) \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}\phi^+ \\ v + (h + i\phi^Z) \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

e, convenientemente, consideramos na igualdade acima que

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i(\phi^1 - i\phi^2) \\ h + i\phi^3 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

sendo ϕ^i os bósons de Goldstone e h o Higgs massivo.

Para verificar que ϕ^i são os bósons de Goldstone basta calcular $T^a \phi_0$, pois correspondem às direções do subespaço formado por esses bósons, e para isso identificamos as matrizes de representação, T^a , com $a = 1, 2, 3, Y$:

$$T^i = i\frac{\sigma^i}{2}, \quad T^Y = i\frac{1}{2}. \quad (2.66)$$

Assim,

$$-T^1\phi_0 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -\frac{v}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \hat{\phi}^1 \quad (2.67)$$

$$-T^2\phi_0 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -\frac{v}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \hat{\phi}^2 \quad (2.68)$$

$$-T^3\phi_0 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{v}{2} \hat{\phi}^3 \quad (2.69)$$

$$-T^Y\phi_0 = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = -\frac{v}{2} \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{v}{2} \hat{\phi}^3 \quad (2.70)$$

E definindo

$$F^a \equiv -T^a\phi_0, \quad (2.71)$$

reescrevemos a equação (2.63) como

$$M_{ab}^2 = g^2 F_i^a F_i^b, \quad (2.72)$$

Mantendo o VEV como em (2.32) e utilizando os resultados (2.67) a (2.70) teremos para a teoria GWS:

$$gF_i^a = \frac{v}{2} \begin{pmatrix} g_2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & -g_1 \end{pmatrix}. \quad (2.73)$$

sendo uma linha para cada gerador e uma coluna para cada componente real de ϕ (h não foi representado por ser ortogonal a todos os vetores $T^a\phi_0$).

Substituindo (2.64) na Lagrangiana do Modelo Padrão (2.25), um dos termos gerados por $\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2$ será

$$\partial^\mu \chi_i A_\mu^a g F_i^a, \quad (2.74)$$

que é justamente o termo de mistura entre bósons de gauge e bósons de Goldstone que não havia no gauge unitário.

Usando a procedimento de Fadeev-Popov para fixação do gauge, eliminamos (2.74) ao acrescentarmos na Lagrangiana do MP o seguinte termo:

$$-\frac{1}{2\xi}(G^a)^2 \equiv -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^{a\mu} - \xi g F_i^a \chi_i)^2. \quad (2.75)$$

Esse termo determina a fixação do gauge no momento da escolha do valor de ξ . Esses

gauges, chamados de gauges R_ξ , são:

- $\xi = 0 \iff$ gauge de Landau;
- $\xi = 1 \iff$ gauge de Feynman-'t Hooft;
- $\xi = \infty \iff$ gauge unitário.

Analisando a parte $\left(-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2\right)$ da Lagrangiana do MP e acrescentando o termo de fixação do gauge, encontraremos que os termos quadráticos são:⁸

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & -\frac{1}{2}A_\mu^a \left(\left[-g^{\mu\nu}\partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu \right] \delta^{ab} - g^2 F_i^a F_i^b g^{\mu\nu} \right) A_\nu^b \\ & + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi_i)^2 - \frac{1}{2}\xi g^2 F_i^a F_j^a \chi_i \chi_j. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Por esse resultado podemos ver os termos de massa dos bósons de gauge e dos bósons de Goldstone:

$$M_{ab}^2 = g^2 F_i^a F_i^b = g^2 (F F^T)^{ab} \quad (2.77)$$

$$(m_G^2)_{ij} = \xi g^2 F_i^a F_j^a = \xi g^2 (F^T F)_{ij}. \quad (2.78)$$

Explicitamente, por (2.73):

$$g^2 F F^T = \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_2^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^2 & -g_2 g_1 \\ 0 & 0 & -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix}, \quad \xi g^2 F^T F = \xi \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} g_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^2 + g_1^2 \end{pmatrix}. \quad (2.79)$$

A diagonalização da primeira matriz acima gera, exatamente, as massas dos bósons A_μ , $W^\pm$ e Z_μ ,

$$\frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_1^2 + g_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

A segunda matriz de (2.79) mostra que a massa dos bósons de Goldstone dependem da escolha do gauge e fica claro que no gauge unitário essas massas vão ao infinito, removendo tais partículas do espectro e mantendo apenas os graus de liberdade físicos.

⁸Contas detalhadas no apêndice C.

Inserindo esse resultado em (2.86) nos dá a Lagrangiana dos ghosts:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ghost} &= \bar{\eta}^a \left[-(\partial_\mu D^\mu)^{ab} - \xi g^2 (T^a \phi_0) \cdot T^b (\phi_0 + \chi) \right] \eta^b \\ &= \bar{\eta}^a \left[-(\partial_\mu D^\mu)^{ab} - \xi g^2 F_i^a F_j^b - \xi g^2 T^a \phi_0 \cdot T^b \chi \right] \eta^b,\end{aligned}\quad (2.91)$$

de onde tiramos o propagador

$$\text{-----}\overset{k}{\longleftarrow}\text{-----} = \frac{i}{k^2 - \xi m^2}, \quad m = 0, m_W, m_Z \quad (2.92)$$

e vemos que são quatro ghosts.

O próximo passo, após promover a quebra espontânea da simetria eletrofraca, é calcular todos os termos de interação e para isso devemos escrever a derivada covariante, D_μ , em função de todos os bósons de gauge físicos.

Nas excelentes referências [3] e [4] todas essas contas estão feitas; utilizaremos seus resultados.

Com isso, a Lagrangiana completa do Modelo Padrão é obtida fazendo

$$\mathcal{L}_{MP} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermion} + \mathcal{L}_{yukawa} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{fixação\ gauge} + \mathcal{L}_{ghost}, \quad (2.93)$$

sendo que cada um dos termos acima, no gauge R_ξ , é:⁹

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ghost} &= \frac{i}{\xi} g_2 \cos \theta_w W_\mu^+ \left[(\partial_\mu \bar{\eta}^Z) \eta^- - (\partial_\mu \bar{\eta}^+) \eta^Z \right] + \frac{i}{\xi} g_2 \cos \theta_w W_\mu^- \left[(\partial_\mu \bar{\eta}^-) \eta^Z - (\partial_\mu \bar{\eta}^Z) \eta^+ \right] \\ &+ \frac{i}{\xi} g_2 \sin \theta_w W_\mu^+ \left[(\partial_\mu \bar{\eta}^A) \eta^- - (\partial_\mu \bar{\eta}^+) \eta^A \right] + \frac{i}{\xi} g_2 \sin \theta_w W_\mu^- \left[(\partial_\mu \bar{\eta}^-) \eta^A - (\partial_\mu \bar{\eta}^A) \eta^+ \right] \\ &+ \frac{i}{\xi} g_2 \cos \theta_w Z_\mu \left(\partial_\mu \bar{\eta}^+ \eta^+ - \partial_\mu \bar{\eta}^- \eta^- \right) + \frac{i}{\xi} g_2 \sin \theta_w A_\mu \left(\partial_\mu \bar{\eta}^+ \eta^+ - \partial_\mu \bar{\eta}^- \eta^- \right) \\ &- \frac{\xi}{2} g_2 h \left(m_W \bar{\eta}^+ \eta^+ + m_W \bar{\eta}^- \eta^- + \frac{m_Z}{\cos \theta_w} \bar{\eta}^Z \eta^Z \right) \\ &- i g_2 \xi m_Z \cos(2\theta_w) \left(\bar{\eta}^+ \eta^Z \phi^+ - \bar{\eta}^- \eta^Z \phi^- \right) + i g_2 \frac{\xi}{2} m_Z \left(\bar{\eta}^Z \eta^- \phi^+ - \bar{\eta}^Z \eta^+ \phi^- \right) \\ &+ i g_2 \xi m_W \sin \theta_w \left(\bar{\eta}^- \eta^A \phi^- - \bar{\eta}^+ \eta^A \phi^+ \right) + \frac{i}{2} g_2 \xi m_W \left(\bar{\eta}^+ \eta^+ \phi^Z - \bar{\eta}^- \eta^- \phi^Z \right).\end{aligned}\quad (2.94)$$

⁹Desconsiderando a simetria $SU(3)$ dos quarks e considerando apenas léptons.

$$\mathcal{L}_{fixação\ gauge} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu} - \xi g F_i^a \chi_i)^2. \quad (2.95)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Higgs} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{m_h^2}{2} + 3\lambda v^2 \right) h^2 + \left[\left(\frac{g_2 v}{2} \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{v^2}{8} (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \right] \left(1 + \frac{h}{v} \right)^2 \\ & - \lambda v h^3 - \lambda \left[\frac{h^4}{4} + (\phi^+ \phi^-)^2 + \frac{\phi_Z^4}{4} + \phi^+ \phi^- \phi_Z^2 + v \left(2 + \frac{h}{v} \right) \left(\phi^+ \phi^- h + \frac{1}{2} \phi_Z^2 h \right) \right] \\ & - v \left(-\frac{m_h^2}{2} + \lambda v^2 \right) h + \frac{g_2}{2} \left[W^{+\mu} (\phi^- \partial_\mu h - h \partial_\mu \phi^-) - W^{-\mu} (\phi^+ \partial_\mu h - h \partial_\mu \phi^+) \right] \\ & + \frac{g_2}{2 \cos \theta_w} Z^\mu (\phi^Z \partial_\mu h - h \partial_\mu \phi^Z) - \frac{v^2}{4} (-m_h^2 + \lambda v^2) + \dots \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fermion} = & i \bar{l} \gamma^\mu \partial_\mu l + i \bar{\nu}_L \gamma^\mu \partial_\mu \nu_L - e \bar{l} \gamma^\mu l A_\mu \\ & + \frac{g_2}{\cos \theta_w} Z_\mu \left(\sin^2 \theta_w \bar{l}_R \gamma^\mu l_R - \frac{1}{2} \cos 2\theta_w \bar{l}_L \gamma^\mu l_L + \frac{1}{2} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L \right) \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L W_\mu^+ + h.c. \right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$(2.98)$$

$$\mathcal{L}_{yukawa} = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_{ij} v \left(1 + \frac{h(x)}{v} \right) \bar{l}_L^i l_R^j + h.c. + \dots \quad (2.99)$$

3

Naturalidade

Quando falamos sobre “naturalidade” muitas definições podem aparecer e isso acontece porque diferentes áreas da ciência definem o que é natural da maneira que melhor as convêm. Nas ciências ambientais seria uma maneira de identificar aspectos da natureza em regiões livres da interferência humana. Em linguística seria um modo do comunicador expressar-se de maneira segura e seguindo sua própria identidade cultural. Na psicologia seria a maneira intuitiva como um indivíduo utiliza o pensamento para agir ou julgar situações a partir de conceitos considerados fundamentais pela cultura na qual ele se insere. Já na física existem duas definições: a *naturalidade estrutural* e a *naturalidade técnica*.

3.1. Naturalidade Estrutural

Historicamente a naturalidade estrutural surgiu primeiro e trata-se de um critério estético para formular uma teoria física [5]. Na realidade não há suporte científico que sustente a naturalidade estrutural; ela é apenas uma ideia que os físicos costumam seguir por ter sido uma fórmula de sucesso no processo de avanço do conhecimento. Alguns físicos costumam dizer que “*a natureza sempre escolhe a teoria mais simples*” e a simplicidade está intimamente ligada com a *beleza* na visão desses cientistas. Quando resgatamos o pensamento geocêntrico do passado e o comparamos com o modelo heliocêntrico percebemos que este último, além de ser indiscutivelmente mais simples, permitiu importantes avanços na compreensão de fenômenos astronômicos que dificilmente seriam explicados de modo acessível pela descrição geocêntrica. Apesar disso, adotar a Terra como referencial é igualmente válido, mesmo que a visão contemporânea descreva o Sistema Solar mais naturalmente segundo o heliocentrismo. Os avanços científicos alcançados pela prática de se escolher a descrição mais simples incentivou a utilização da naturalidade

estrutural como um guia, muito embora não seja útil para validar nem refutar uma teoria. Ainda assim, ela exerceu muita influência na confiança de alguns teóricos. Ao formular a Relatividade Geral, Einstein apostou que ela seria a teoria realizável na natureza porque se enquadrava no critério da naturalidade estrutural. Quando foi perguntado sobre o que teria feito caso as observações de Eddington do eclipse de 1919 tivessem refutado a Relatividade Geral, Einstein respondeu que “*teria tido pena do Senhor*” [6], numa clara alusão ao fato que alguma teoria mais complicada deveria ser formulada para substituir a dele.

3.2. Naturalidade Técnica

A naturalidade técnica, ou naturalidade à la ’t Hooft, é quantitativa e está intimamente ligada a dois conceitos fundamentais da física moderna: simetrias e teorias efetivas.

Se elaborarmos uma teoria física válida até uma escala de energia Λ , qualquer parâmetro livre, c , da Lagrangiana efetiva pode ser escrito como o produto entre um coeficiente adimensional, a , e uma potência de Λ :

$$c = a\Lambda^p \quad (3.1)$$

onde $p \in \mathbb{Z}$.

Pelo critério de naturalidade técnica, *o valor de todos esses fatores adimensionais deve ser de ordem 1 na Lagrangiana efetiva, ou, se a simetria da Lagrangiana aumentar quando o parâmetro livre for nulo, então o coeficiente adimensional desse parâmetro pode ser muito menor que 1 na Lagrangiana efetiva.* [7]

Nesse sentido, a QED corresponde a uma teoria natural: a massa dos férmions é pequena porque aproximando-se do valor zero restaura-se a *simetria quiral* da Lagrangiana¹. Se a simetria quiral fosse exata, a massa dos férmions seria nula e nem mesmo as correções radiativas alterariam esse valor, uma vez que a correção à massa de um férmion é proporcional à massa do próprio férmion². Mas a existência de massa fermiônica na natureza (pequena se comparada com a escala de energia eletrofraca ~ 100 GeV)³ mostra que a quiralidade sofre uma pequena *quebra explícita de simetria* e usualmente diz-se que o pequeno valor da massa dos férmions ocorre porque a simetria quiral “protege” esses termos.

¹Uma teoria apresenta simetria quiral quando os férmions de “mão-direita” têm transformações completamente independentes dos férmions de “mão-esquerda”. Ver apêndice B.

²Isso só é verdade quando a correção quântica não depende da massa de outras partículas. A correção à massa dos bósons de Gauge Z e W , por exemplo, também depende da massa dos férmions.

³Com exceção do *top quark*, cuja massa está na mesma escala de energia da escala eletrofraca, todos os outros férmions têm massa muito menor que 10^2 GeV. O segundo férmion mais pesado é o *bottom quark* com $m_b = 4.18$ GeV.

Diagramas da auto-energia do elétron a 1-loop (ordem α) corrigem sua massa em: [2]

$$m\delta_m = \frac{3\alpha}{4\pi}m_0 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right). \quad (3.2)$$

Experimentalmente verifica-se que o elétron tem massa não nula, mas a simetria quiral é responsável por fazer com que a correção à essa massa seja logarítmica, e isso é muito menor que a correção quadrática dos escalares.

Escrevemos a lagrangiana da QED como:⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_R - m_0 \bar{\psi}_R \psi_L - m_0 \bar{\psi}_L \psi_R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ou seja, se a simetria quiral fosse exata, $m_0 = 0$, não existiria acoplamento entre os elétrons de mão esquerda e os de mão direita, logo as correções radiativas não poderiam gerar massa, $m\delta_m = 0$, e esse resultado se manifesta na linearidade de $m\delta_m$ com m_0 na eq.(3.2).

No Modelo Padrão não há simetria que proteja a massa de escalares fundamentais, tal como o bóson de Higgs, por isso os valores das massas fundamentais dessas partículas sempre ficam próximos à escala do limite de validade da teoria.⁵ Como as medições do LHC apontam para um Higgs com $m_h \sim 125$ GeV, 17 ordens de grandeza inferior à massa de Planck, o critério de naturalidade técnica classificaria o MP como uma teoria não-natural se o limite da teoria fosse, de fato, a escala de Planck.

Algumas tentativas de resolução do problema da hierarquia baseiam-se em encontrar simetrias que protejam a massa do bóson de Higgs tornando o pequeno valor efetivo da massa um resultado tecnicamente natural. A *supersimetria* é uma candidata a resolver o problema, porém nenhuma partícula nova prevista por modelos supersimétricos foi detectada, e o LHC já excluiu diversas regiões de massa onde se esperaria observar pares supersimétricos. [8] Por isso, uma tentativa mais recente para solucionar o problema da naturalidade do MP postulou a existência de um campo escalar, o **relaxion**, que evoluiu no período da inflação cosmológica e alterou dinamicamente o valor do VEV do Higgs até que este atingisse um ponto de equilíbrio estável em $v = 246$ GeV [9]. Como o VEV está intimamente ligado ao valor da massa do Higgs, essa solução consistiu em encontrar um mecanismo simples que explicasse o porque do VEV ter o valor atual acrescentando apenas uma nova partícula, o relaxion, que interage com todas as partículas do MP mais fracamente que a gravidade. Além disso, o relaxion é muito mais leve que os neutrinos,

⁴A demonstração está no apêndice B.

⁵Isso está demonstrado no apêndice A.

tornando-o indetectável em quaisquer aceleradores de partículas que operem até a escala TeV. Apesar disso, a teoria é elevada ao status de natural.

Enquanto não encontrarmos uma solução definitiva para este problema podemos nos perguntar se ele realmente existe, ou se nossa definição de naturalidade está correta. Temos motivos para acreditar que argumentos baseados no conceito de naturalidade técnica funcionam, pois através deles foi possível estimar o valor da massa do *quark charm* com excelente correspondência entre a previsão e o experimento. Para ter uma melhor noção do quão estranho seria um valor “não-natural” para a massa do Higgs por mero acaso da natureza devemos entender o que é o *ajuste fino* (do inglês *fine-tuning*).

3.3. Ajuste Fino

No capítulo 4 veremos que a correção radiativa para a massa ao quadrado do Higgs a 1-loop é

$$\delta_{m^2}^{(1)} m_h^2 \approx \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} \left(m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - 4 \sum_f m_f^2 \right) + \dots \quad (3.4)$$

Seria surpreendente se o limite de validade do MP estivesse próximo da escala de Planck (10^{19} GeV) ou da grande unificação (10^{16} GeV), pois isso implicaria em não verificarmos física nova até essas escalas. Considerando que, por alguma razão desconhecida, o *cutoff* fosse da ordem de $\Lambda = 10^5$ TeV (10^{11} ordens de grandeza menor que a escala de Planck), os valores listados em (3.4) seriam (olhar apêndice D)

$$\begin{aligned} \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} m_h^2 &\sim 9.8 \times 10^{13} \text{ GeV}^2, & \frac{12\Lambda^2}{(4\pi v)^2} M_W^2 &\sim 8 \times 10^{13} \text{ GeV}^2, \\ \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} M_Z^2 &\sim 5.2 \times 10^{13} \text{ GeV}^2, & \frac{24\Lambda^2}{(4\pi v)^2} m_t^2 &\sim 75 \times 10^{13} \text{ GeV}^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

de modo que a correção à massa ao quadrado do Higgs ficaria

$$m_h^2 = m_0^2 + m_h^2 \delta_{m_h^2} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} m_h^2 &\approx m_0^2 + [9.8 + 8 + 5.2 - 75] \times 10^{13} \text{ GeV}^2 \\ (125 \text{ GeV})^2 &\approx m_0^2 - 52 \times 10^{13} \text{ GeV}^2 \\ (125 \text{ GeV})^2 &\approx m_0^2 - \underbrace{3.3 \times 10^{10}}_{\delta_{m_h^2}} \underbrace{(125 \text{ GeV})^2}_{m_h^2} \end{aligned}$$

Isso significa que mesmo considerando um *cutoff* 11 ordens de grandeza menor que a escala de Planck, ainda existe um cancelamento excepcional entre a massa nua, m_0 , e as correções quânticas. De fato, no exemplo dado as correções quânticas são da ordem de 10^{14} GeV^2 , enquanto a massa física é da ordem de 10^4 GeV^2 , ou seja, m_0^2 e $m_h^2 \delta_{m_h^2}$ diferem de 1 parte em 10 bilhões. Chamamos esse cancelamento de *ajuste fino* (do inglês

fine-tuning) e é difícil acreditar que esse ajuste seja um acaso do universo. Para se ter uma ideia, nesse mesmo exemplo a chance da natureza ter escolhido ao acaso os valores dos parâmetros que fixam a massa do Higgs em 125 GeV é a mesma de arremessarmos um lápis de cem metros de comprimento em uma superfície lisa e rígida e esperarmos que ele caia equilibrado sobre sua ponta de um milímetro de espessura. Se hoje verificamos que $m_h \sim 125$ GeV, somos inclinados a pensar que isso acontece porque existe algum fenômeno que força esse resultado, assim como esperamos que um lápis de cem metros se equilibre sobre sua ponta de um milímetro de espessura se algo interferir no experimento ajustando as condições para que esse equilíbrio seja viável.

É justamente nesse ponto que o *Princípio Antrópico* entra na discussão. Existem várias versões desse princípio e talvez a mais comum seja a versão conhecida como *Princípio Antrópico Final*, na qual afirma-se que o Universo tem como finalidade gerar a espécie humana. Claramente essa versão é criacionista, na qual um Deus interferiu na evolução do Universo e escolheu os valores dos parâmetros livres exatamente como medimos hoje. Em ciência não é essa versão que se utiliza nas discussões, mas sim aquelas conhecidas como *Princípio Antrópico Forte* e *Princípio Antrópico Fraco*.

O Princípio Antrópico Forte afirma que qualquer teoria deve tomar o cuidado de descrever um Universo em cuja evolução exista a possibilidade do desenvolvimento de observadores em alguma região. Essa possibilidade deve existir, ainda que seja remota, tal qual nosso exemplo do lápis.

O Princípio Antrópico Fraco diz que qualquer parâmetro livre que medirmos na natureza deve ter um valor compatível com a nossa existência (vida baseada em carbono), afinal nós estamos aqui observando o Universo. Em outras palavras, o Universo evoluiu de maneira a possibilitar nossa existência. Isso é bem óbvio.

É importante perceber que as versões forte e fraca do princípio *não explicam* os valores dos parâmetros livres, tratam-se de conceitos fundamentalmente *observacionais* que devem ser usados, no máximo, como um recurso auxiliar em discussões sobre parâmetros ainda não explicados enquanto ainda buscamos uma teoria mais fundamental que permita derivar todos os parâmetros a partir de primeiros princípios.⁶

Agora, se observássemos um *cutoff* do MP na escala $\Lambda = 1$ TeV, teríamos

$$\begin{aligned} m_h^2 &\approx m_0^2 + [9.8 + 8 + 5.2 - 75] \times 10^3 \text{ GeV}^2 \\ (125 \text{ GeV})^2 &\approx m_0^2 - 52 \times 10^3 \text{ GeV}^2 \\ (125 \text{ GeV})^2 &\approx m_0^2 - \underbrace{3.3}_{\delta m_h^2} \underbrace{(125 \text{ GeV})^2}_{m_h^2} \end{aligned}$$

e tanto as correções quânticas quanto a massa física estariam na mesma escala energética

⁶A *Teoria de Cordas* historicamente surgiu como uma tentativa para ser essa teoria fundamental.

e, por isso, não haveria ajuste fino. Portanto, se o ajuste fino não existir, espera-se que o limite da teoria do Modelo Padrão esteja na escala 1 TeV.

Em seu *run 2* o LHC já atingiu 13 TeV de energia no CM do feixe das colisões de prótons, porém nenhuma novidade física foi detectada até a escala de 1 TeV e isso gera certa tensão na comunidade científica [10], pois se nada for encontrado em escalas maiores que 1 TeV a única explicação teórica que restará para justificar o pequeno valor da massa do Higgs será o incômodo ajuste fino.

Está claro que o atual cenário revela uma necessidade urgente de solucionar o Problema da Hierarquia e, justamente por isso, abordaremos esse assunto em detalhes neste trabalho.⁷

⁷Para uma discussão detalhada sobre o critério de naturalidade na física, ver referência [11]

4

Regularização por *cutoff*

Em cursos de Teoria Quântica de Campos aprendemos que a função de correlação de dois pontos pode ser representada pela seguinte igualdade:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \exp[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t)] \} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \{ \exp[-i \int_{-T}^T dt H_{int}(t)] \} | 0 \rangle} \quad (4.1)$$

Sabemos que o papel do denominador é eliminar os diagramas não-conectados (as bolhas de vácuo) e isso nos permite utilizar a expressão do numerador para calcular apenas os diagramas conectados e obter as primeiras correções ao propagador.

Fazer um tratamento perturbativo da Teoria Quântica de Campos nos permite expandir a exponencial do numerador de (4.1) em série de Taylor:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) + \phi(x) \phi(y) \left[-i \int d^4 z \mathcal{L}_{int} \right] + \dots \} | 0 \rangle. \quad (4.2)$$

O $\langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle$ corresponde ao propagador livre, enquanto o termo seguinte é a correção em primeira ordem.

Esse resultado está no espaço das posições, mas temos interesse pelo espaço dos momentos, portanto fazemos a transformada de Fourier. A correção em primeira ordem no espaço dos momentos passa a ser representada como

$$\langle \vec{p} | T \{ -i \int d^4 z \mathcal{L}_{int} \} | \vec{q} \rangle \quad (4.3)$$

De posse desse resultado e por meio da Lagrangiana (2.93) utilizamos os termos interagentes convenientes para obter as expressões dos diagramas da figura 4.1.

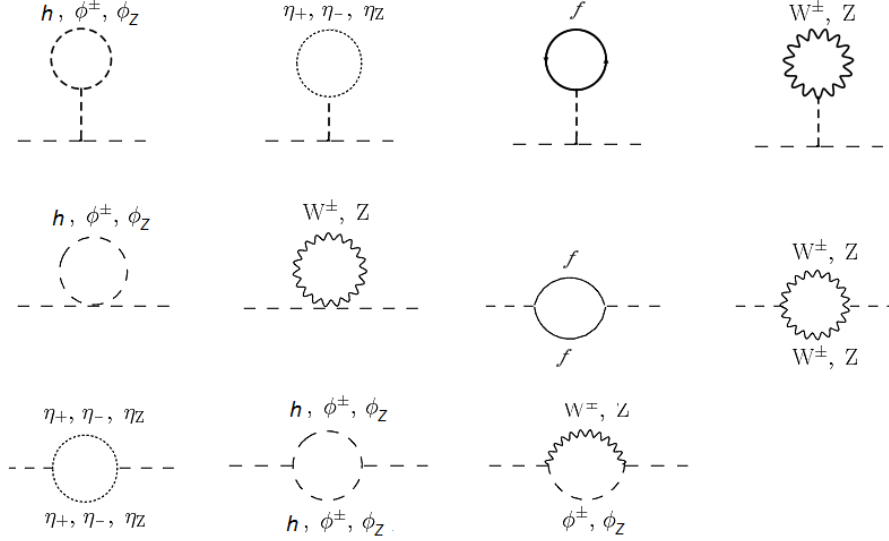


Figura 4.1.: Diagramas a 1-loop da função de Green de dois pontos do campo de Higgs, onde h é o campo de Higgs; ϕ 's são os bósons de Goldstone; f representa os férmions; η 's os ghosts de Faddeev-Popov; W e Z os bósons de gauge físicos da teoria eletrofraca.

Neste capítulo calcularemos a correção a 1-loop do propagador do bóson de Higgs pelo método da regularização por *cutoff* em quatro dimensões; e uma integral que será bastante recorrente no cálculo dos diagramas de Feynman por esse método, e de extrema importância para nossa discussão sobre o problema da hierarquia, está destacada abaixo¹:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} &= -i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_E^2 + m^2} = -i \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{k_E^2 + m^2} \\
 &= -i \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{k_E^2 + m^2} = -i \frac{2}{16\pi^2} \left(\frac{k_E^2}{2} - \frac{1}{2} m^2 \log(m^2 + k_E^2) \right) \Big|_0^\Lambda \\
 &= -\frac{i}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \log \left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{m^2} \right) \right] \\
 &\approx -\frac{i}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right]. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

O resultado dessa integral é muito relevante para futuras discussões, sobretudo porque apresenta uma *divergência quadrática*.

¹Na primeira linha de (4.4) executei uma rotação de Wick ao redefinir $k^0 = ik_E^0$, sendo k_E um quadrvetor do espaço Euclidiano.

4.1. Cálculo dos diagramas de 2 pontos

4.1.1. Diagramas 1PR com *tadpoles*

Além de definir o método de regularização, outro passo é decidir o esquema de renormalização. Apesar de ser uma escolha absolutamente arbitrária, o esquema de renormalização mais indicado é aquele que simplificará os cálculos advindos do método de regularização, por exemplo: para a *regularização dimensional* é apropriado utilizar o esquema de renormalização $\overline{MS}$, tal como veremos no próximo capítulo. Já para a regularização por cutoff o esquema $\overline{MS}$ não é o mais adequado.

As condições de renormalização indicadas para o cutoff são:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagrama 1PI} = 0; \\
 & \frac{d}{dp^2} \left(\text{Diagrama 1PI com momento } \vec{p} \right) \Big|_{p^2=m_h^2} = 0; \\
 & i\text{Im} \left(\text{Diagrama de 2 pontos} \right)_{\text{amp}} = -6i\lambda \quad \text{em } s = 4m_h^2, t = u = 0.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Diferentemente da QED, onde os diagramas *tadpoles* automaticamente se anulam pela invariância de Lorentz, aqui não há simetria proibindo a aparição de uma amplitude não-nula para os diagramas de um-ponto do Higgs e, pelo fato de tais diagramas não dependerem do momento externo, é absolutamente aceitável adotar a primeira condição de renormalização acima. Essa condição nos permite calcular o propagador renormalizado sem considerar os efeitos dos diagramas 1PR esquematizados na primeira linha da figura 4.1. O que de fato estamos fazendo é assumindo que $\langle h \rangle = 0$ a todas as ordens de correções quânticas, i.e., o VEV permanece inalterado.

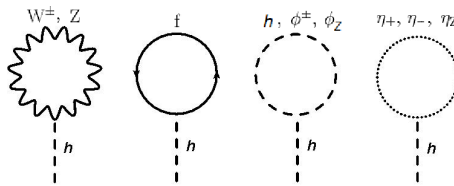


Figura 4.2.: *Tadpoles do campo de Higgs.*

Com esses *tadpoles* construímos os diagramas 1PR da auto-energia do bóson de Higgs a *1-loop*. A seguir estão os cálculos de cada um deles, utilizando como referência as Lagrangianas (2.94) a (2.99).

Escalares

$$\equiv -i\Pi_{tad}^h \quad (4.6)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \vec{q} | \frac{1}{2} \left(i \frac{m_h^2}{2v} \right)^2 \int d^4 z \, h(z) h(z) h(z) \underbrace{\int d^4 w \, h(w) h(w) h(w)}_{\substack{\text{Permutações Equivalentes} \\ 3 \times 2 \times 3 \times 2}} | \vec{p} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} 3! 3! \left(i \frac{m_h^2}{2v} \right)^2 \int d^4 z \, d^4 w \, \langle 0 | e^{-iq \cdot z} \overline{h(z) h(w) h(w) h(w)} e^{ip \cdot z} | 0 \rangle \\
 &= \frac{1}{2} 3! 3! \left(i \frac{m_h^2}{2v} \right)^2 \int d^4 z \, d^4 w \, \Delta(z, w) \Delta(w, w) e^{-i(q-p) \cdot z} \\
 &= \frac{1}{2} \left(3i \frac{m_h^2}{v} \right)^2 (2\pi)^4 \delta^4(p-q) \frac{i}{((p-q)^2 - m_h^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_h^2}
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Onde, na penúltima linha, utilizei que

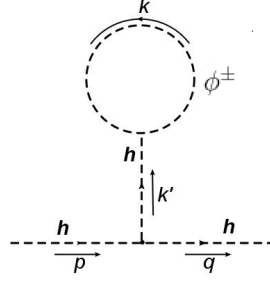
$$\begin{aligned}
 &\int d^4 z \, d^4 w \, \Delta(z, w) \Delta(w, w) e^{-i(q-p) \cdot z} \\
 &= \int d^4 z \, d^4 w \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik' \cdot (z-w)}}{k'^2 - m_h^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ik \cdot (w-w)}}{k^2 - m_h^2} e^{-i(q-p) \cdot z} \\
 &= \int d^4 w \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_h^2} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} e^{ik' \cdot w} \underbrace{\int d^4 z \, e^{i(p-q-k') \cdot z}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p-q-k')} \frac{i}{(k'^2 - m_h^2)} \\
 &= \underbrace{\int d^4 w \, e^{i(p-q) \cdot w}}_{(2\pi)^4 \delta^4(p-q)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_h^2} \frac{i}{((p-q)^2 - m_h^2)} \\
 &= (2\pi)^4 \delta^4(p-q) \frac{i}{((p-q)^2 - m_h^2)} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_h^2}
 \end{aligned}$$

O termo $(2\pi)^4 \delta^4(p - q)$ garante a conservação do 4-momento, como era de se esperar. Adiante, procederei da maneira usualmente feita na literatura e definirei o diagrama a menos desse termo; a conservação estará explícita, pois assumirei $p = q$.

Portanto,

$$-i\Pi_{tad}^h = \frac{1}{2} \left(3i \frac{m_h^2}{v} \right)^2 \frac{i}{-m_h^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_h^2} = \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-9m_h^2}{8(k^2 - m_h^2)} \right)} \quad (4.8)$$

.....

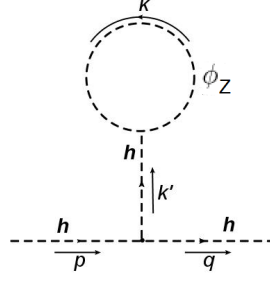


$$\equiv -i\Pi_{tad}^{\phi^\pm} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{\phi^+\phi^-h} = -\frac{m_h^2}{v} \phi^+ \phi^- h \quad \mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3$$

$$\begin{aligned} & \overbrace{\langle \vec{q} | \left(i \frac{m_h^2}{2v} \right) \int d^4 z \, h(z) h(z) h(z) \left(i \frac{m_h^2}{v} \right) \int d^4 w \, h(w) \phi^+(w) \phi^-(w) | \vec{p} \rangle}^{\text{Permutações Equivalentes } 3 \times 2} \\ & -i\Pi_{tad}^{\phi^\pm} = \left(-3i \frac{m_h^2}{v} \right) \left(-i \frac{m_h^2}{v} \right) \frac{i}{-m_h^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \xi M_W^2} \\ & = \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-3m_h^2}{4(k^2 - \xi M_W^2)} \right)} \quad (4.10) \end{aligned}$$

Analogamente,

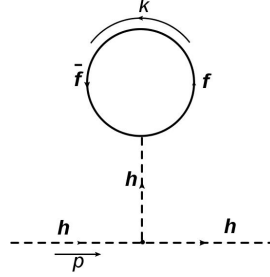


$$\equiv -i\Pi_{tad}^{\phi_Z} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{\phi_Z \phi_Z h} = -\frac{m_h^2}{2v} \phi_Z \phi_Z h \quad \mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3$$

$$\boxed{-i\Pi_{tad}^{\phi_Z} = \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-3m_h^2}{8(k^2 - \xi M_Z^2)} \right)} \quad (4.12)$$

Férmions



$$\equiv -i\Pi_{tad}^f \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{\bar{\psi}\psi h} = -\frac{m_f}{v} \bar{\psi}\psi h \quad \mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3$$

$$\langle \vec{p} | \left(i\frac{m_h^2}{2v} \right) \int d^4z \, h(z)h(z)h(z) \left(i\frac{m_f}{v} \right) \int d^4w \, h(w)\bar{\psi}(w)\psi(w) | \vec{p} \rangle \times \underbrace{\text{Permutações Equivalentes}}_{3 \times 2} \times N_c$$

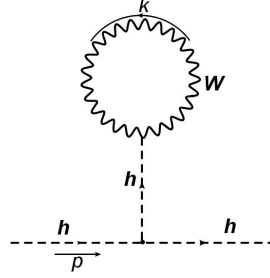
$$\begin{aligned} -i\Pi_{tad}^f &= - \left(3i\frac{m_h^2}{v} \right) \left(i\frac{m_f}{v} \right) N_c \frac{i}{-m_h^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{iTr\{\not{k} + m_f\}}{k^2 - m_f^2} \\ &= 4 \times 3N_c \frac{m_f^2}{v^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_f^2} = \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{3N_c m_f^2}{k^2 - m_f^2} \right)} \quad (4.14) \end{aligned}$$

onde usei que

$$Tr\{\not{k} + m_f\} = Tr\{\not{k}\} + Tr\{m_f\} = k_\mu Tr\{\gamma^\mu\} + m_f Tr\{\mathbb{1}_{4 \times 4}\} = 4m_f$$

Bósons de Gauge

Seguindo o mesmo procedimento de *contrair campos e multiplicar pelas permutações equivalentes* e pelos *fatores da Lagrangiana interagente* obtém-se:



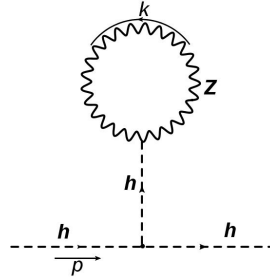
$$\equiv -i\Pi_{tad}^{W^\pm} \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{W^+W^-h} = 2\frac{M_W^2}{v}W^{\mu+}W_{\mu}^-h \quad \mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v}h^3$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{tad}^{W^\pm} &= -\left(3i\frac{m_h^2}{v}\right)\left(2i\frac{M_W^2}{v}\right)\frac{i}{-m_h^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2-M_W^2}\left(g_{\mu\nu}-(1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2-\xi M_W^2}\right) \\ &= -\frac{6M_W^2}{v^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(g_{\mu}^{\mu}-(1-\xi)\frac{k^2}{k^2-\xi M_W^2}\right)\frac{1}{k^2-M_W^2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{6}{4}\frac{g_2^2}{M_W^2}M_W^2\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{4}{k^2-M_W^2}-\frac{1}{k^2-M_W^2}+\frac{\xi}{k^2-\xi M_W^2}\right) \\ &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{-9M_W^2}{2(k^2-M_W^2)}-\frac{3}{2}\frac{\xi M_W^2}{k^2-\xi M_W^2}\right)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Analogamente,

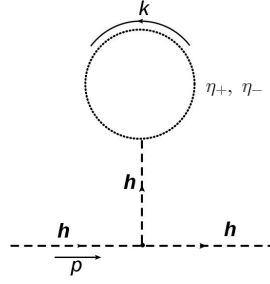


$$\equiv -i\Pi_{tad}^Z \quad (4.18)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{ZZh} = \frac{M_Z^2}{v}Z^\mu Z_\mu h \quad \mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v}h^3$$

$$\boxed{-i\Pi_{tad}^Z = \frac{g_2^2}{M_Z^2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{-9M_Z^2}{4(k^2-M_Z^2)}-\frac{3}{4}\frac{\xi M_Z^2}{k^2-\xi M_Z^2}\right)} \quad (4.19)$$

Ghosts

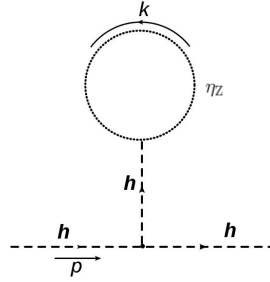


$$\equiv -i\Pi_{tad}^{\eta^+, \eta^-} \quad (4.20)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{\bar{\eta}^\pm \eta^\pm h} = -\frac{g_2}{2} \xi M_W \bar{\eta}^\pm \eta^\pm h \quad \mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{tad}^{\eta^+, \eta^-} &= -\left(-3i\frac{m_h^2}{v}\right) \left(-i\frac{g_2}{2} \xi M_W\right) \frac{i}{-m_h^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \xi M_W^2} \\ &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{3M_W^2 \xi}{4(k^2 - \xi M_W^2)} \right)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Lembrando que *ghosts*, apesar do spin inteiro, apresentam estatística de Fermi-Dirac e geram um sinal negativo para cada *loop* de *ghosts*, tal qual ocorre com os férmions.



$$\equiv -i\Pi_{tad}^{\eta^z} \quad (4.22)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{\bar{\eta}_Z \eta_Z h} = -\frac{g_2}{2 \cos \theta_w} \xi M_Z \bar{\eta}_Z \eta_Z h \quad \mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{tad}^{\eta^z} &= -\left(-3i\frac{m_h^2}{v}\right) \left(-i\frac{g_2}{2 \cos \theta_w} \xi M_Z\right) \frac{i}{-m_h^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \xi M_Z^2} \\ &= \boxed{\frac{g^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{3M_Z^2 \xi}{4(k^2 - \xi M_Z^2)} \right)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

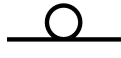
Dessa forma, a contribuição dos *tadpoles* para a auto-energia do Higgs é

$$-i\Pi_{tad} = -i\Pi_{tad}^h - i \sum_f \Pi_{tad}^f - i\Pi_{tad}^{W^\pm} - i\Pi_{tad}^Z - i\Pi_{tad}^{\phi^\pm} - i\Pi_{tad}^{\phi^Z} - i\Pi_{tad}^{\eta^+} - i\Pi_{tad}^{\eta^-} - i\Pi_{tad}^{\eta^z}$$

$$\boxed{-i\Pi_{tad} = \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{9m_h^2}{8(k^2 - m_h^2)} + \sum_f \frac{3N_c m_f^2}{k^2 - m_f^2} - \frac{9M_W^2}{2(k^2 - M_W^2)} \right.} \\
 \left. - \frac{9M_Z^2}{4(k^2 - M_Z^2)} - \frac{3m_h^2}{4(k^2 - \xi M_W^2)} - \frac{3m_h^2}{8(k^2 - \xi M_Z^2)} \right) \quad (4.24)$$

Concordando com o resultado apresentado em [12].

4.1.2. Diagramas 1PI

Topologia 

$$\text{Diagram} \equiv -i\Pi_{\text{1PI}}^{W,1}(p^2) \quad (4.25)$$

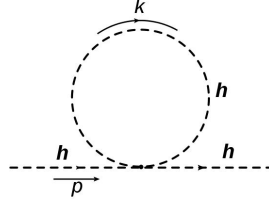
$$\mathcal{L}_{int}^{W^+W^-hh} = \frac{M_W^2}{v^2} W^{\mu+} W_{\mu}^- h^2$$

$$= \langle \vec{p} | \left(-i \frac{M_W^2}{v^2} \right) \int d^4z \underbrace{h(z)h(z)W^{\mu+}(z)W_{\mu}^-(z)}_{\text{Permutações Equivalentes}} | \vec{p} \rangle \times \underbrace{2}_{\text{Permutações Equivalentes}}$$

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{\text{1PI}}^{W,1}(p^2) &= 2i \frac{M_W^2}{v^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - M_W^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k_{\mu}k_{\nu}}{k^2 - \xi M_W^2} \right) \\
 &= 2i \frac{M_W^2}{v^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-i) \left(\frac{4}{k^2 - M_W^2} - \frac{1}{k^2 - M_W^2} + \frac{\xi}{k^2 - \xi M_W^2} \right) \\
 &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{3M_W^2}{2(k^2 - M_W^2)} + \frac{\xi M_W^2}{2(k^2 - \xi M_W^2)} \right)} \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Executando as mesmas contas, mas com $\mathcal{L}_{int} = \frac{M_Z^2}{2v^2} Z^{\mu} Z_{\mu} h^2$ teremos

$$\boxed{-i\Pi_{\text{1PI}}^{Z,1}(p^2) = \frac{g^2}{M_Z^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{3M_Z^2}{4(k^2 - M_Z^2)} + \frac{\xi M_Z^2}{4(k^2 - \xi M_Z^2)} \right)} \quad (4.27)$$



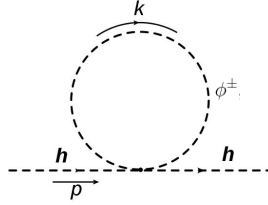
$$\equiv -i\Pi_{\text{IPI}}^{h,1}(p^2) \quad (4.28)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{hhhh} = -\frac{\lambda}{4}h^4$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{IPI}}^{h,1}(p^2) &= \frac{-6i\lambda}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_h^2} \\ &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{3m_h^2}{8(k^2 - m_h^2)} \right)} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Onde utilizei

$$\lambda = \frac{\mu^2}{v^2} = \frac{m_h^2}{2v^2} = \frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{m_h^2}{8}$$



$$\equiv -i\Pi_{\text{IPI}}^{\phi^\pm,1}(p^2) \quad (4.30)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{\phi^+\phi^-hh} = -\frac{g_2^2}{8} \frac{m_h^2}{M_W^2} \phi^+\phi^-h^2$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{IPI}}^{\phi^\pm,1}(p^2) &= -i\frac{g_2^2}{4} \frac{m_h^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \xi M_W^2} \\ &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{m_h^2}{4(k^2 - \xi M_W^2)} \right)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Portanto, usando $\mathcal{L}_{int}^{\phi_Z\phi_Zhh} = -\frac{g_2^2}{16} \frac{m_h^2}{M_Z^2} \phi_Z\phi_Zhh$ e fazendo as mesmas contas do diagrama anterior

$$\boxed{-i\Pi_{\text{IPI}}^{\phi_Z,1}(p^2) = \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{m_h^2}{8(k^2 - \xi M_Z^2)} \right)} \quad (4.32)$$

Topologia

Para viabilizar os cálculos dos próximos diagramas aproveitaremos que eles são funções do momento p^2 e vamos desenvolvê-los em série de Taylor ao redor de $p^2 = 0$

$$\text{---} \xrightarrow{\vec{p}} \text{---} \bigcirc \text{---} \xrightarrow{\vec{p}} \text{---} = A_0 + A_1 p^2 + \dots \quad (4.33)$$

onde

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dp^2} \left(\text{---} \xrightarrow{\vec{p}} \text{---} \bigcirc \text{---} \xrightarrow{\vec{p}} \text{---} \right) \Big|_{p^2=0} \quad (4.34)$$

Com isso, teremos

$$\text{---} \xrightarrow{\vec{p}} \text{---} \bigcirc \text{---} \xrightarrow{\vec{p}} \text{---} \equiv -i\Pi_{\text{1PI}}^f(p^2) \quad (4.35)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}^{\bar{\psi}\psi h} = -\frac{m_f}{v} \bar{\psi}\psi h$$

$$\langle \vec{p} | \frac{1}{2} \left(i \frac{m_f}{v} \right)^2 \int d^4 z \, h(z) \bar{\psi}(z) \psi(z) \int d^4 w \, h(w) \bar{\psi}(w) \psi(w) | \vec{p} \rangle \times \underbrace{\text{Permutações Equivalentes}}_2 \times N_c$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{1PI}}^f(p^2) &= -N_c \left(\frac{-im_f}{v} \right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} i^2 \frac{\text{Tr}\{(\not{k} + \not{p} + m_f)(\not{k} + m_f)\}}{(k^2 - m_f^2)((k+p)^2 - m_f^2)} \\ &= -4N_c \frac{m_f^2}{v^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(k^2) + m_f^2 + k \cdot p}{(k^2 - m_f^2)((k+p)^2 - m_f^2)} \\ &= -4N_c \frac{m_f^2}{v^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k^2 + m_f^2 + k \cdot p}{((k+px)^2 - \Delta_f^2)^2} \quad , \quad \Delta_f^2 \equiv -p^2 x(1-x) + m_f^2 \end{aligned}$$

Na passagem para a última linha utilizamos um método muito útil chamado *parametrização de Feynman* permitindo escrevermos um denominador de múltiplos fatores como um único fator elevado a uma certa potência, ao custo da introdução de integrais sobre parâmetros de Feynman. No caso mais geral:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = \int_0^1 dx_1 \cdots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[\sum x_i A_i]^n} \quad (4.36)$$

Nosso interesse é para o caso de apenas dois denominadores,

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (4.37)$$

Voltando ao resultado obtido para $-i\Pi_{\text{1PI}}^f$ adotaremos a nova variável $k \rightarrow k + px$ e eliminaremos os termos lineares em k^μ , pois eles geram uma integral ímpar. Assim,

$$-i\Pi_{\text{1PI}}^f(p^2) = -4N_c \frac{m_f^2}{v^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{k^2 + \Delta_f^2}{(k^2 - \Delta_f^2)^2} \quad (4.38)$$

Desenvolvendo o termo $\frac{k^2 + \Delta_f^2}{(k^2 - \Delta_f^2)^2}$ em série de Taylor onde p^2 é a variável ficaremos com

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{1PI}}^f(p^2) &= \frac{g_2^2}{M_W^2} (-N_c m_f^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left[\frac{k^2 + m_f^2}{(k^2 - m_f^2)^2} + \frac{p^2(x^2 - x)(3k^2 + m_f^2)}{(k^2 - m_f^2)^3} + \dots \right] \\ &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-N_c \frac{(k^2 m_f^2 + m_f^4)}{(k^2 - m_f^2)^2} + \frac{p^2}{6} N_c m_f^2 \underbrace{\frac{(3k^2 + m_f^2)}{(k^2 - m_f^2)^3}}_{\frac{(3k^2 + m_f^2)}{(k^2 - m_f^2)^3} + \frac{(4m_f^2 - 4m_f^2)}{(k^2 - m_f^2)^3}} + \dots \right] \\ &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-N_c \frac{(k^2 m_f^2 + m_f^4)}{(k^2 - m_f^2)^2} + \frac{p^2}{6} N_c m_f^2 \frac{3}{(k^2 - m_f^2)^2} \right] + \text{termos finitos} \end{aligned}$$

$$\boxed{-i\Pi_{\text{1PI}}^f(p^2) = \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{N_c m_f^2}{k^2 - m_f^2} - \frac{2N_c m_f^4}{(k^2 - m_f^2)^2} + p^2 \frac{N_c m_f^2}{2(k^2 - m_f^2)^2} \right] + \text{termos finitos}} \quad (4.39)$$

.....

$$\mathcal{L}_{int}^{\phi^+ \phi^- h} = -2\lambda v \phi^+ \phi^- h = -\frac{g_2}{2} \frac{m_h^2}{M_W} \phi^+ \phi^- h \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{1PI}}^{\phi^\pm, 2}(p^2) &= \left(-i \frac{g_2}{2} \frac{m_h^2}{M_W} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \xi M_W^2} \frac{i}{(k+p)^2 - \xi M_W^2} \\ &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{m_h^4}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - \Delta_W^2]^2} \quad , \quad \Delta_W^2 \equiv -p^2 x(1-x) + \xi M_W^2 \end{aligned}$$

Desenvolvendo o termo $\frac{1}{[k^2 - \Delta_W^2]^2}$ em série de Taylor onde p^2 é a variável teremos

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{1\text{PI}}^{\phi^\pm, 2}(p^2) &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{m_h^4}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{(k^2 - \xi M_W^2)^2} + \underbrace{\frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - \xi M_W^2)^3} + \dots}_{\text{termos finitos}} \right) \\
 &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{m_h^4}{4(k^2 - \xi M_W^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

Utilizando $\mathcal{L}_{int}^{\phi_Z \phi_Z h} = -\frac{g_2}{4} \frac{m_h^2}{M_Z} (\phi^Z)^2 h$ e fazendo as mesmas contas do diagrama anterior

$$\boxed{-i\Pi_{1\text{PI}}^{\phi_Z, 2}(p^2) = \frac{g_2^2}{M_Z^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{m_h^4}{8(k^2 - \xi M_Z^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.42)$$

.....

$$\text{Diagram} \equiv -i\Pi_{1\text{PI}}^{h,2}(p^2) \quad (4.43)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3$$

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{1\text{PI}}^{h,2}(p^2) &= \frac{1}{2} \frac{3!}{3!} \left(\frac{m_h^2}{2v} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - \Delta_h^2]^2} \quad , \quad \Delta_h^2 \equiv -p^2 x(1-x) + m_h^2 \\
 &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{9}{8} m_h^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{(k^2 - m_h^2)^2} + \underbrace{\frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - m_h^2)^3} + \dots}_{\text{termos finitos}} \right) \\
 &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{9m_h^4}{8(k^2 - m_h^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.44)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } h \text{ (dashed line, } p \text{)} \rightarrow \text{Loop } (\eta_Z) \rightarrow h \text{ (dashed line, } p \text{)} \\
 \text{Loop labels: } k, k+p, \eta_Z \\
 \equiv -i\Pi_{1\text{PI}}^{\eta_Z}(p^2)
 \end{array} \quad (4.45)$$

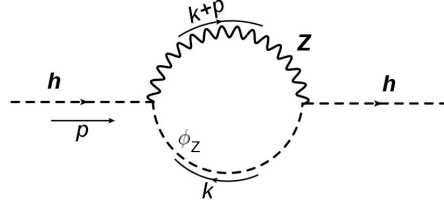
$$\mathcal{L}_{int}^{\eta_Z \eta_Z h} = \frac{g_2}{2 \cos \theta_w} \xi M_Z \bar{\eta}_Z \eta_Z h$$

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{1\text{PI}}^{\eta_Z}(p^2) &= -\left(\frac{ig_2}{2 \cos \theta_w} \xi M_Z\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \xi M_Z^2} \frac{i}{(k+p)^2 - \xi M_Z^2} \\
 &= -\frac{g_2^2}{4} \xi^2 \frac{M_Z^2}{\cos^2 \theta_w} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - \Delta_Z^2]^2} \quad , \quad \Delta_Z^2 \equiv -p^2 x(1-x) + \xi M_Z^2 \\
 &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \xi^2 \frac{M_Z^4}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{(k^2 - \xi M_Z^2)^2} + \underbrace{\frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - \xi M_Z^2)^3} + \dots}_{\text{termos finitos}} \right) \\
 &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\xi^2 M_Z^4}{4(k^2 - \xi M_Z^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.46)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{Diagram: } h \text{ (dashed line, } p \text{)} \rightarrow \text{Loop } (\eta_{\pm}) \rightarrow h \text{ (dashed line, } p \text{)} \\
 \text{Loop labels: } k, k+p, \eta_{\pm} \\
 \equiv -i\Pi_{1\text{PI}}^{\eta^+, \eta^-}(p^2)
 \end{array} \quad (4.47)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{\eta^{\pm} \eta^{\pm} h} = \frac{g_2}{2} \xi M_W \bar{\eta}^{\pm} \eta^{\pm} h$$

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{1\text{PI}}^{\eta^+, \eta^-}(p^2) &= -\left(\frac{ig_2}{2} \xi M_W\right)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \xi M_W^2} \frac{i}{(k+p)^2 - \xi M_W^2} \\
 &= -\frac{g_2^2}{4} \xi^2 M_W^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - \Delta_W^2]^2} \quad , \quad \Delta_W^2 \equiv -p^2 x(1-x) + \xi M_W^2 \\
 &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \xi^2 \frac{M_W^4}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{(k^2 - \xi M_W^2)^2} + \underbrace{\frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - \xi M_W^2)^3} + \dots}_{\text{termos finitos}} \right) \\
 &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-\xi^2 M_W^4}{4(k^2 - \xi M_W^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.48)
 \end{aligned}$$



$$\equiv -i\Pi_{1PI}^{Z\phi_Z}(p^2) \quad (4.49)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{Z\phi_Z h} = \frac{g_2}{2 \cos \theta_w} Z^\mu (\partial_\mu h \phi_Z - h \partial_\mu \phi_Z)$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{1PI}^{Z\phi_Z}(p^2) &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(i \frac{g_2}{2 \cos \theta_w} (k-p)^\mu \right) \left(i \frac{g_2}{2 \cos \theta_w} (k-p)^\nu \right) \frac{i}{k^2 - \xi M_Z^2} \frac{-i}{(k+p)^2 - M_Z^2} \\ &\quad \times \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)(k+p)_\mu (k+p)_\nu}{(k+p)^2 - \xi M_Z^2} \right) \\ &= -\frac{g_2^2}{4 \cos^2 \theta_w} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \xi M_Z^2} \left[\frac{(k-p)^2}{(k+p)^2 - M_Z^2} - \frac{(1-\xi)((k-p)^\mu (k+p)_\mu)^2}{[(k+p)^2 - \xi M_Z^2][(k+p)^2 - M_Z^2]} \right] \end{aligned}$$

Adotando o *gauge de Feynman-'t Hooft*, $\xi = 1$, simplificamos enormemente o resultado acima

$$\begin{aligned} -i\Pi_{1PI}^{Z\phi_Z}(p^2) &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{M_Z^2}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(k^2 + p^2(x^2 + 2x + 1) \right) \underbrace{\frac{1}{(k^2 - \Delta_Z^2)^2}}_{\frac{1}{(k^2 - M_Z^2)^2} + \frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_Z^2)^3} + \dots} \\ &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{M_Z^2}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{k^2}{(k^2 - M_Z^2)^2} + \frac{k^2 2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_Z^2)^3} + \frac{p^2(x^2 + 2x + 1)}{(k^2 - M_Z^2)^2} \right) + \dots \\ &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{M_Z^2}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{k^2 - M_Z^2} + \frac{M_Z^2}{(k^2 - M_Z^2)^2} + \frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_Z^2)^2} + \frac{M_Z^2 2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_Z^2)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2(x^2 + 2x + 1)}{(k^2 - M_Z^2)^2} \right) + \dots \\ &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-M_Z^2}{4(k^2 - M_Z^2)} + \frac{-M_Z^4}{4(k^2 - M_Z^2)^2} - p^2 \frac{M_Z^2}{2(k^2 - M_Z^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.50) \end{aligned}$$

$$\text{Diagram} \equiv -i\Pi_{\text{1PI}}^{W^+\phi^-}(p^2) \quad (4.51)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{W^+\phi^-h} = \frac{g_2}{2} W^{+\mu} (\partial_\mu h \phi^- - h \partial_\mu \phi^-)$$

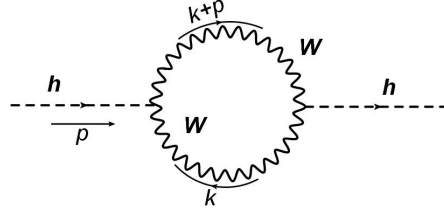
$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{1PI}}^{W^+\phi^-}(p^2) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{ig_2}{2} (k-p)^\mu \right) \left(\frac{ig_2}{2} (k-p)^\nu \right) \frac{i}{k^2 - \xi M_W^2} \frac{-i}{(k+p)^2 - M_W^2} \\ &\quad \times \left(g_{\mu\nu} - \frac{(1-\xi)(k+p)_\mu (k+p)_\nu}{(k+p)^2 - \xi M_W^2} \right) \\ &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{M_W^2}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \xi M_W^2} \left[\frac{(k-p)^2}{(k+p)^2 - M_W^2} - \frac{(1-\xi)((k-p)^\mu (k+p)_\mu)^2}{[(k+p)^2 - \xi M_W^2][(k+p)^2 - M_W^2]} \right] \end{aligned}$$

Novamente adotando $\xi = 1$ teremos,

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{1PI}}^{W^+\phi^-}(p^2) &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{M_W^2}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(k^2 + p^2(x^2 + 2x + 1) \right) \underbrace{\frac{1}{(k^2 - \Delta_W^2)^2}}_{\frac{1}{(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_W^2)^3} + \dots} \\ &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{M_W^2}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{k^2}{(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{k^2 2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_W^2)^3} + \frac{p^2(x^2 + 2x + 1)}{(k^2 - M_W^2)^2} \right) + \dots \\ &= -\frac{g_2^2}{M_W^2} \frac{M_W^2}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \left(\frac{1}{k^2 - M_W^2} + \frac{M_W^2}{(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{M_W^2 2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_W^2)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^2(x^2 + 2x + 1)}{(k^2 - M_W^2)^2} \right) + \dots \\ &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-M_W^2}{4(k^2 - M_W^2)} + \frac{-M_W^4}{4(k^2 - M_W^2)^2} - p^2 \frac{M_W^2}{2(k^2 - M_W^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.52) \end{aligned}$$

Assumindo $\mathcal{L}_{int}^{W^-\phi^+h} = -\frac{g_2}{2} W^{-\mu} (\partial_\mu h \phi^+ - h \partial_\mu \phi^+)$ e efetuando os mesmos cálculos do diagrama anterior, encontraremos

$$\boxed{-i\Pi_{\text{1PI}}^{W^-\phi^+}(p^2) = \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-M_W^2}{4(k^2 - M_W^2)} + \frac{-M_W^4}{4(k^2 - M_W^2)^2} - p^2 \frac{M_W^2}{2(k^2 - M_W^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.53)$$



$$\equiv -i\Pi_{1PI}^{W,2}(p^2) \quad (4.54)$$

$$\mathcal{L}_{int}^{W^+W^-h} = 2 \frac{M_W^2}{v} g^{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- h$$

$$\begin{aligned} -i\Pi_{1PI}^{W,2}(p^2) &= \left(\frac{2iM_W^2}{v} \right)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig^{\mu\alpha}}{k^2 - M_W^2} \frac{-ig^{\nu\beta}}{(k+p)^2 - M_W^2} \left(g_{\mu\nu} - (1-\xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi M_W^2} \right) \\ &\quad \times \left(g_{\alpha\beta} - (1-\xi) \frac{(k+p)_\alpha (k+p)_\beta}{(k+p)^2 - \xi M_W^2} \right) \end{aligned}$$

Mais uma vez o *gauge de Feynman-'t Hooft* facilita o cálculo. Então, adotando $\xi = 1$ ficaremos com

$$\begin{aligned} -i\Pi_{1PI}^{W,2}(p^2) &= \frac{g_2^2}{M_W^2} M_W^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{g_\mu^\mu}{(k^2 - M_W^2)((k+p)^2 - M_W^2)} \right) \\ &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g_\mu^\mu M_W^4 \int_0^1 dx \frac{1}{(k^2 - \Delta_W^2)^2} \\ &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g_\mu^\mu M_W^4 \int_0^1 dx \left(\frac{1}{(k^2 - M_W^2)^2} + \underbrace{\frac{2p^2(x^2 - x)}{(k^2 - M_W^2)^3} + \dots}_{\text{termos finitos}} \right) \\ &= \boxed{\frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{4M_W^4}{(k^2 - M_W^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.55) \end{aligned}$$

onde $g_\mu^\mu = 4$, pois a integral está definida em $d = 4$.

Adotando $\mathcal{L}_{int}^{ZZh} = \frac{M_Z^2}{v} Z^\mu Z_\mu h$ teremos

$$\boxed{-i\Pi_{1PI}^{Z,2}(p^2) = \frac{g_2^2}{M_Z^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{2M_Z^4}{(k^2 - M_Z^2)^2} \right) + \text{termos finitos}} \quad (4.56)$$

Dessa forma, a contribuição dos diagramas 1PI para a auto-energia do Higgs, no *gauge de Feynman-'t Hooft* ($\xi = 1$), é

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{1\text{PI}}(p^2) &= -i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{W},1}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{W},2}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{Z},1}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{Z},2}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{h},1}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{h},2}(p^2) \\
 &\quad - i\Pi_{1\text{PI}}^{\phi^\pm,1}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\phi^\pm,2}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\phi_Z,1}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\phi_Z,2}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\eta_Z}(p^2) - i \sum_f \Pi_{1\text{PI}}^f(p^2) \\
 &\quad - i\Pi_{1\text{PI}}^{\eta^+}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\eta^-}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{Z}\phi_Z}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{W}^+\phi^+}(p^2) - i\Pi_{1\text{PI}}^{\text{W}^-\phi^-}(p^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{1\text{PI}}(p^2) &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\left(\frac{3m_h^2}{8(k^2 - m_h^2)} + \frac{3M_W^2}{2(k^2 - M_W^2)} + \frac{m_h^2}{4(k^2 - M_W^2)} + \frac{3M_Z^2}{4(k^2 - M_Z^2)} \right. \right. \\
 &\quad + \frac{m_h^2}{8(k^2 - M_Z^2)} - \sum_f \frac{N_c m_f^2}{k^2 - m_f^2} + \frac{9m_h^4}{8(k^2 - m_h^2)^2} + \frac{3M_W^4}{(k^2 - M_W^2)^2} \\
 &\quad + \frac{m_h^4}{4(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{3M_Z^4}{2(k^2 - M_Z^2)^2} + \frac{m_h^4}{8(k^2 - M_Z^2)^2} - \sum_f \frac{2N_c m_f^4}{(k^2 - m_f^2)^2} \Big) \\
 &\quad \left. - p^2 \left(\frac{M_W^2}{(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{M_Z^2}{2(k^2 - M_Z^2)^2} - \sum_f \frac{N_c m_f^2}{2(k^2 - m_f^2)^2} \right) \right] + \text{termos finitos}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Agora usaremos as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
 h^0 &= \sqrt{Z_H} h, & (m_h^0)^2 &= Z_{m^2} m_h^2, & \lambda^0 &= Z_\lambda \lambda \\
 Z_H &= 1 + \delta_H, & Z_{m^2} &= 1 + \delta_{m^2}, & Z_\lambda &= 1 + \delta_\lambda
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

e aplicaremos essas definições no termo linear e quadrático da Lagrangiana (2.96) para acrescentar *contratermos* às expressões (4.24) e (4.57). Efetuando essas mudanças e utilizando as condições de renormalização (4.5) chegaremos que o resultado a *1-loop* é:

$$\begin{array}{c} \otimes \\ \vdots \end{array} = iv \left(\frac{1}{2} m_h^2 \delta_{m^2} - \lambda \delta_\lambda v^2 \right); \tag{4.59}$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \otimes \text{---} \\ \overleftarrow{p} \end{array} = i \left[(p^2 - m_h^2) \delta_H + \frac{1}{2} m_h^2 \delta_{m^2} - 3 \lambda \delta_\lambda v^2 \right]. \tag{4.60}$$

E a primeira expressão acima implica no seguinte resultado:

$$\begin{array}{c} \otimes \\ \vdots \\ \text{---} \\ \overleftarrow{p} \end{array} = \left(-\frac{3}{v} \right) iv \left(\frac{1}{2} m_h^2 \delta_{m^2} - \lambda \delta_\lambda v^2 \right); \tag{4.61}$$

Portando, a primeira condição de renormalização nos mostra que

$$-i\Pi_{tad} = 3i \left(\frac{1}{2} m_h^2 \delta_{m^2} - \lambda \delta_\lambda v^2 \right). \quad (4.62)$$

O propagador completo, $-i\Pi(p^2)$, será representado como uma série de diagramas 1PI², pois a primeira condição de renormalização em (4.5) elimina os diagramas 1PR. Portanto,

$$\begin{aligned} -i\Pi(p^2) &= -i\Pi_{1PI}(p^2) + i \left[(p^2 - m_h^2) \delta_H + \frac{1}{2} m_h^2 \delta_{m^2} - 3\lambda \delta_\lambda v^2 \right] \\ &= -i\Pi_{1PI}(p^2) + i \left(p^2 - m_h^2 \right) \delta_H - i m_h^2 \delta_{m^2} + \underbrace{3i \left(\frac{1}{2} m_h^2 \delta_{m^2} - \lambda \delta_\lambda v^2 \right)}_{-i\Pi_{tad}} \\ &= -i\Pi_{1PI}(p^2) - i\Pi_{tad} + i(p^2 - m_h^2) \delta_H - i m_h^2 \delta_{m^2} \\ &\stackrel{\xi=1}{=} \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-3m_h^2}{4(k^2 - m_h^2)} - \frac{3M_W^2}{k^2 - M_W^2} + \sum_f \frac{2N_c m_f^2}{k^2 - m_f^2} - \frac{3M_Z^2}{2(k^2 - M_Z^2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_h^2}{2(k^2 - M_W^2)} - \frac{m_h^2}{4(k^2 - M_Z^2)} + \frac{9m_h^4}{8(k^2 - m_h^2)^2} + \frac{3M_W^4}{(k^2 - M_W^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_h^4}{4(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{3M_Z^4}{2(k^2 - M_Z^2)^2} + \frac{m_h^4}{8(k^2 - M_Z^2)^2} - \sum_f \frac{2N_c m_f^4}{(k^2 - m_f^2)^2} \right) \\ &\quad - p^2 \left(\frac{M_W^2}{(k^2 - M_W^2)^2} + \frac{M_Z^2}{2(k^2 - M_Z^2)^2} - \sum_f \frac{N_c m_f^2}{2(k^2 - m_f^2)^2} \right) \\ &\quad + i(p^2 - m_h^2) \delta_H - i m_h^2 \delta_{m^2} + \text{termos finitos} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Os seis primeiros termos do resultado (4.63) correspondem a divergências quadráticas e logarítmicas, de acordo com (4.4). Os termos restantes representam somente divergências logarítmicas, conforme demonstrado no próximo cálculo:

²Veja apêndice E.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} &= i \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^2} = i \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + m^2)^2} \\
 &= i \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + m^2)^2} \\
 &= i \frac{2}{16\pi^2} \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{k_E^2 + m^2} + \log(k_E^2 + m^2) \right) \Big|_0^\Lambda \\
 &= \frac{i}{16\pi^2} \left[\log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \right] \\
 &\approx \frac{i}{16\pi^2} \log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right)
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Agora basta usar (4.4) e (4.64) para encontrarmos o resultado explícito de (4.63):

$$\begin{aligned}
 \Pi(m_h^2) &= -\frac{3g_2^2\Lambda^2}{32\pi^2 M_W^2} \left(m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - \frac{4}{3} \sum_f N_c m_f^2 \right) \\
 &\quad - \frac{3g_2^2 m_h^2}{64\pi^2 M_W^2} \left[\frac{1}{2} m_h^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_h^2}\right) + \frac{1}{3} m_h^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{M_W^2}\right) + \frac{1}{6} m_h^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{M_Z^2}\right) \right. \\
 &\quad \left. - 2M_W^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{M_W^2}\right) - M_Z^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{M_Z^2}\right) + 2m_t^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m_t^2}\right) \right] \\
 &\quad + m_h^2 \delta_{m_h^2} + \text{termos finitos}
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

Apesar de termos fixado o gauge para simplificar os cálculos dos diagramas, era possível executar as contas integralmente no gauge R_ξ . Isso foi feito em [12], onde o autor mostrou que a soma $\Pi(m_h^2) = \Pi_{lad} + \Pi_{\text{PI}}(m_h^2)$ é independente de gauge, como deveria ser, já que a massa do bóson de Higgs é um observável físico³.

Quaisquer que sejam as condições de renormalização utilizadas, o resultado final deve ser (4.65), e para mantê-lo finito é suficiente que

³Lembre-se que a massa física é definida como o polo do propagador completo, cujo denominador é $p^2 - m_0^2 - \Pi(p^2)$. Se $p^2 = m_h^2$, a massa física, então o denominador deve ser nulo: $m_h^2 = m_0^2 + \Pi(m_h^2)$. Portanto, $\Pi(m_h^2)$ não pode ser dependente de gauge.

$$\begin{aligned}
 \delta_{m^2}^{(1)} m_h^2 &= \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} \left(m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - \frac{4}{3} \sum_f N_c m_f^2 \right) \\
 &+ \frac{3m_h^2}{(4\pi v)^2} \left[\frac{1}{2} m_h^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_h^2} \right) + \frac{1}{3} m_h^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_W^2} \right) + \frac{1}{6} m_h^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_Z^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - 2M_W^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_W^2} \right) - M_Z^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_Z^2} \right) + 2m_t^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\delta_{m^2}^{(1)} m_h^2 \approx \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} \left(m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - \frac{4}{3} \sum_f N_c m_f^2 \right) + \dots \tag{4.67}$$

Esse resultado é extremamente importante, pois mostra explicitamente o problema da hierarquia existente na correção à massa do bóson de Higgs. De acordo com o resultado (4.67) a interação do Higgs com as outras partículas do Modelo Padrão gera uma correção de ordem Λ^2 à sua massa ao quadrado (m_h^2), por isso, de acordo com o critério de naturalidade técnica, esperava-se que o bóson de Higgs tivesse uma massa física enorme, da ordem do *cutoff* da teoria, mas o problema tornava-se cada vez mais importante à medida que estudos apontavam limites inferiores e superiores da ordem de centenas de GeV para a massa do Higgs [13] e nenhuma evidência de fenomenologia além do Modelo Padrão era verificada até a escala TeV nos aceleradores, estimulando ainda mais a discussão do *fine tuning* apresentada no capítulo 3.

Seria possível que a própria teoria eliminasse a divergência quadrática sem acrescentar novas partículas, para isso bastaria que o coeficiente de Λ^2 na equação (4.67) fosse nulo⁴. Essa prática consiste em uma previsão da teoria natural originalmente proposta por Veltman [14]. Ele usou o argumento da naturalidade para prever a massa do férmion *top*, até então não medido.

Para obter a previsão de Veltman devemos fazer $N_c = 3$ ao fator de cor e, além disso, como a massa do *top* é muito maior que a massa dos outros férmions, utilizaremos, com boa aproximação, somente o valor de m_t no cálculo de (4.67). Assim,

$$\delta_{m^2}^{(1)} m_h^2 = \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} (m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - 4m_t^2) + \dots \tag{4.68}$$

⁴Isso é uma condição necessária, mas não suficiente. De fato, o coeficiente da divergência quadrática deveria ser nulo a todas as ordens: 1-loop, 2-loops e etc.

onde fica claro a previsão de Veltman

$$4m_t^2 \simeq m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 \quad (4.69)$$

Mas utilizando os valores atualmente medidos para a massa dessas partículas⁵ verifica-se que o argumento de naturalidade de Veltman já não funciona a 1-loop.

$$4m_t^2 \simeq 4 \times 173.21^2 \text{ GeV}^2 \simeq 120 \times 10^3 \text{ GeV}^2$$

$$m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 \simeq (125.09^2 + 2 \times 80.385^2 + 91.1876^2) \text{ GeV}^2 \simeq 36.89 \times 10^3 \text{ GeV}^2$$

Isso significa que o problema da hierarquia ainda persiste e necessita criticamente de uma solução, a menos que aceitemos a proposta de *fine tuning*.

⁵Ver apêndice D.

5

Regularização dimensional

É possível obter um resultado para $\Pi(p^2)$ seguindo outro método de regularização. Nesse capítulo vamos calcular este valor pela *regularização dimensional* e comparar com o resultado obtido em (4.67). Essa comparação é importante porque os resultados serão diferentes. Em particular a regularização dimensional não gera divergências quadráticas, mas isso não significa que o problema da hierarquia não esteja presente. Mostraremos que mesmo sem a aparição explícita da divergência quadrática, a correção à massa do Higgs será muito sensível a um conjunto de condições iniciais e poderá divergir dependendo da escolha dessas condições.

Para verificarmos que os cálculos geram somente divergências logarítmicas teremos que usar um conjunto de identidades matemáticas e no capítulo sete da referência [2] encontramos a demonstração de duas delas:

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (5.1)$$

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{k_E^2}{(k_E^2 + \Delta^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{d}{2} \right) \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (5.2)$$

onde k_E é um vetor d -dimensional no espaço Euclideano e $n \in \mathbb{N}$.

Essas identidades serão frequentemente utilizadas no cálculo dos *loops* dos diagramas da figura 4.1.

O apêndice B da referência [15] contém outra demonstração do nosso atual interesse

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (5.3)$$

onde γ_E é a constante de Euler-Mascheroni, $\gamma_E \approx 0.577$.

Utilizando essas expressões e adotando o esquema $\overline{MS}$ calcularemos os diagramas da auto-energia do Higgs a 1 -loop em d dimensões e depois assumiremos o limite $d \rightarrow 4$

5.1. Dimensão dos campos

Quando trabalhamos em dimensão arbitrária, d , devemos reanalisar as *dimensões de energia* dos campos interagentes. Já sabemos que a ação $S = \int d^d x \mathcal{L}$ é adimensional, $[S] = 0$, e como explicitiei no capítulo “Notações e Convenções”, trabalhando em unidades naturais a dimensão de comprimento é igual ao inverso da dimensão de energia, assim $[d^d x] = -d$. Portanto, para garantir $[S] = 0$ é necessário que $[\mathcal{L}] = d$, ou seja, cada termo da lagrangiana apresenta dimensão d .

Considere a lagrangiana da QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu. \quad (5.4)$$

Sabendo que $[m] = 1$, $[\partial_\mu] = 1$ e exigindo que cada termo tenha dimensão d teremos

$$[A_\mu] = \frac{d-2}{2}, \quad [\psi] = \frac{d-1}{2}, \quad [e] = \frac{4-d}{2} \quad (5.5)$$

Quanto aos campos escalares:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + m^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 \quad (5.6)$$

$$[\phi] = \frac{d-2}{2}, \quad [\lambda] = 4-d \quad (5.7)$$

Note que tanto o acoplamento e quanto λ apresentam dimensões de energia para $d \neq 4$ e não há problema em assumir essas dimensões, mas é conveniente manter os acoplamentos com as mesmas dimensões que teriam em $d = 4$. Para isso, fazemos

$$e \longrightarrow \mu^{\frac{4-d}{2}} e, \quad \lambda \longrightarrow \mu^{4-d} \lambda \quad (5.8)$$

onde μ é uma escala de energia arbitrária que “absorve” a variação da dimensão dos acoplamentos, i.e, $[\mu^\alpha] = \alpha$. Com isso $[\lambda] = 0$, $[e] = 0$ para qualquer d .

Quando não adotamos essa prática somos obrigados a lidar com termos que não apresentam interpretação física: os logaritmos dimensionais. Utilizar (5.8) é conveniente

porque garante que os termos logaritmos sejam adimensionais. Logaritmos dimensionais aparecem quando calculamos as integrais dos *loops* segundo a equação (5.1) e expandimos os termos em $d \rightarrow 4$. Isso ficará claro adiante, pois apresentarei os cálculos.

Por ser uma escala arbitrária, qualquer observável físico não pode depender de μ . Não devemos confundir essa escala com o Λ da regularização por cutoff. Em momento algum faremos $\mu \rightarrow \infty$. Essa escala arbitrária está aqui apenas pela conveniência de ajustar o termo logaritmo espúrio tornando-o adimensional, por isso, é recomendável imaginar $\mu = 1 \text{ GeV}$ para não gerar confusão.

Seguir o procedimento (5.8) não é unanimidade entre os físicos. Essa prática é adotada e ensinada nas referências [16] e [17], mas outros autores como [2] preferem inserir a escala μ apenas no fim das contas para ajustar o logaritmo espúrio e, nesse caso, não há necessidade de assumir (5.8) de antemão. Ambos os procedimentos são válidos e, em essência, equivalentes.

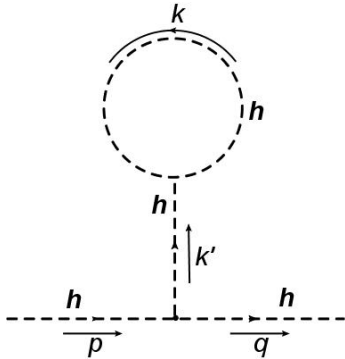
5.2. Cálculo dos diagramas de 2 pontos

Na capítulo 4 calculamos os diagramas fazendo a regularização por *cutoff* e adotando o gauge R_ξ para, em seguida, fazer $\xi = 1$ quando foi conveniente. Na regularização dimensional faremos uso do *gauge unitário*, ou seja, $\xi \rightarrow \infty$. A escolha do gauge, apesar de arbitrária, pode ser adequadamente realizada com o propósito de facilitar os cálculos. Adotando o gauge unitário os diagramas que envolvem linhas internas de ghosts e bósons de goldstone se anulam. Em outras palavras, somente os diagramas com graus de liberdade físicos são considerados. É fácil ver pelas expressões (2.82) e (2.92) que os propagadores dos ghosts e dos bósons de goldstone se anulam nesse gauge.

$$\frac{i}{k^2 - \xi m^2} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} 0 \quad (5.9)$$

5.2.1. Diagramas 1PR com *tadpoles*

Resgatando as expressões obtidas no capítulo anterior para os diagramas de Feynman e generalizando para d dimensões teremos



$$-i\Pi_{tad}^h = \frac{1}{2} \left(3i \frac{m_h^2}{v} \right)^2 \frac{i}{-m_h^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m_h^2}$$

Mas essa expressão ainda não fez uso de (5.8). Analisando a Lagrangiana interagente segue que

$$\mathcal{L}_{int}^{hhh} = -\frac{m_h^2}{2v} h^3 \implies \underbrace{[\mathcal{L}_{int}^{hhh}]_d} = \left[\frac{m_h^2}{v} \right] + 3 [h] = \left[\frac{1}{v} \right] + 2 + 3 \left(\frac{d-2}{2} \right) \implies \left[\frac{1}{v} \right] = \frac{4-d}{2} - 1$$

portanto, definiremos

$$\frac{1}{v} \rightarrow \mu^{\frac{4-d}{2}} \frac{1}{v} \quad (5.10)$$

para manter $\left[\frac{1}{v} \right] = 1$, tal como é em $d = 4$. Dessa maneira,

$$-i\Pi_{tad}^h = \frac{1}{2} \left(3i \frac{m_h^2}{v} \right)^2 \frac{i}{-m_h^2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m_h^2}. \quad (5.11)$$

A partir daqui as identidades (5.1), (5.2) e (5.3) tornam-se importantes. Se analisarmos os últimos fatores da expressão $-i\Pi_{tad}^h$ veremos que

$$\begin{aligned} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m_h^2} &= \mu^{4-d} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_E^2 + m_h^2} \stackrel{(5.1)}{=} \mu^{4-d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(1)} \left(\frac{1}{m_h^2} \right)^{1 - \frac{d}{2}} \\ &= \mu^{4-d} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}-2}} \frac{1}{1 - d/2} \Gamma(2 - d/2) \left(\frac{1}{m_h^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{m_h^2} \right)^{2-d/2} \end{aligned} \quad (5.12)$$

onde utilizei na última linha a propriedade da função gamma

$$n\Gamma(n) = \Gamma(n+1). \quad (5.13)$$

Agora usaremos a seguinte definição

$$\epsilon \equiv 4 - d, \quad (5.14)$$

e no limite $d \rightarrow 4$ a expressão (5.12) fica

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu^\epsilon \frac{1}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\epsilon/2} \frac{1}{\frac{\epsilon}{2} - 1} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) m_h^2 m_h^{-\epsilon} \\ = \frac{1}{(4\pi)^2} \underbrace{(1 + \epsilon \log \mu)}_{\sim \mu^\epsilon} \underbrace{\left(1 + \frac{\epsilon}{2} \log(4\pi)\right)}_{\sim (4\pi)^{\epsilon/2}} \underbrace{\left(-1 - \frac{\epsilon}{2}\right)}_{\sim (\frac{\epsilon}{2}-1)^{-1}} \underbrace{\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right)}_{\sim \Gamma(\epsilon/2)} m_h^2 \underbrace{(1 - \epsilon \log(m_h))}_{\sim m_h^{-\epsilon}} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ = -\frac{m_h^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) + 1 - \log\left(\frac{m_h^2}{\mu^2}\right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Em resumo,

$$\lim_{d \rightarrow 4} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m_h^2} = i \frac{m_h^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) + 1 - \log\left(\frac{m_h^2}{\mu^2}\right) \right]. \quad (5.16)$$

Substituindo esse resultado em (5.11):

$$\Pi_{tad}^h = \frac{9}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) + 1 - \log\left(\frac{m_h^2}{\mu^2}\right) \right]. \quad (5.17)$$

Agora faremos a renormalização da teoria. Ao adotarmos condições de renormalização implicitamente estamos definindo o valor que os contratermos devem apresentar para anular as divergências dos loops, mas nem sempre os contratermos apresentarão somente valores divergentes, pois dependendo das condições de renormalização impostas, eles também incluirão expressões finitas. O esquema $\overline{MS}$ representa uma das possíveis escolhas para esses valores finitos e o adotaremos para o restante do capítulo. A divergência de (5.17) está em $\frac{2}{\epsilon}$, então os contratermos precisam necessariamente eliminá-lo, mas como o termo finito $\log(4\pi e^{-\gamma_E})$ também aparece nos próximos cálculos, torna-se conveniente acrescentá-lo aos contratermos de modo que, efetivamente, a expressão (5.17) sofrerá um corte (subtração) nos dois primeiros termos. Sendo assim, vamos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\Pi_{tad}^h = \Pi_{tad,\epsilon}^h + \Pi_{tad,f}^h \quad (5.18)$$

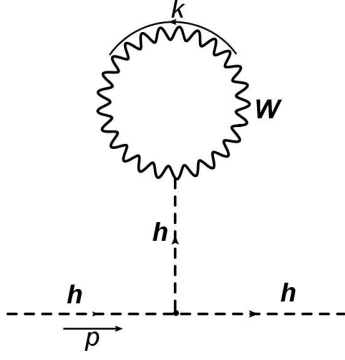
$$= \overbrace{\frac{9}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}} + \overbrace{\frac{9}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2} \left[1 - \log\left(\frac{m_h^2}{\mu^2}\right) \right]} \quad (5.19)$$

onde definimos

$$\frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \equiv \frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) \quad (5.20)$$

e o índice 4 é apenas para lembrar que esse resultado é válido para $d \rightarrow 4$.

O próximo diagrama que tem somente graus de liberdade físicos corresponde ao *tadpole* dos bósons de gauge. Usando a expressão (4.16), generalizando para d dimensões e escolhendo o gauge unitário, $\xi \rightarrow \infty$, ficamos com



$$-i\Pi_{tad}^{W^\pm} = -\frac{6M_W^2}{v^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(d - \frac{k^2}{M_W^2} \right) \frac{1}{k^2 - M_W^2}$$

Analisando a Lagrangiana interagente $\mathcal{L}_{int}^{W^+W^-h} = 2\frac{M_W^2}{v}W^{\mu+}W_\mu^-h$ teremos novamente

$$\left[\frac{1}{v} \right] = \frac{4-d}{2} - 1 \implies \frac{1}{v} \rightarrow \mu^{\frac{4-d}{2}} \frac{1}{v}$$

ou seja

$$-i\Pi_{tad}^{W^\pm} = -\frac{6M_W^2}{v^2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left(d - \frac{k^2}{M_W^2} \right) \frac{1}{k^2 - M_W^2}. \quad (5.21)$$

O primeiro termo da integral é resolvido da mesma forma que (5.16). Quanto ao segundo termo, precisaremos utilizar (5.2):

$$\begin{aligned} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{k^2 - M_W^2} &= i \mu^{4-d} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{k_E^2}{k_E^2 + M_W^2} \stackrel{(5.2)}{=} i \mu^{4-d} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{d}{2} \right) \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{\Gamma(1)} \left(\frac{1}{M_W^2} \right)^{-\frac{d}{2}} \\ &= i \mu^{4-d} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}-2}} \left(\frac{d}{2} \right) \frac{1}{-\frac{d}{2}(1-\frac{d}{2})} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{1}{M_W^2} \right)^{-1} \left(\frac{1}{M_W^2} \right)^{2-d/2} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Agora o procedimento fica idêntico ao que fizemos anteriormente. Tomando o limite $d \rightarrow 4$ teremos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \mu^\epsilon \frac{1}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\epsilon/2} \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{2}} \Gamma(\epsilon/2) M_W^4 M_W^{-\epsilon} = \frac{i}{(4\pi)^2} M_W^4 \left[\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) + 1 - \log\left(\frac{M_W^2}{\mu^2}\right) \right]. \quad (5.23)$$

Resumindo,

$$\lim_{d \rightarrow 4} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{k^2 - M_W^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} M_W^4 \left[\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) + 1 - \log\left(\frac{M_W^2}{\mu^2}\right) \right]. \quad (5.24)$$

Separando a solução $-i\Pi_{tad}^{W^\pm}$ em duas partes, $-i\Pi_{tad,\epsilon}^{W^\pm}$ e $-i\Pi_{tad,f}^{W^\pm}$, a primeira fica

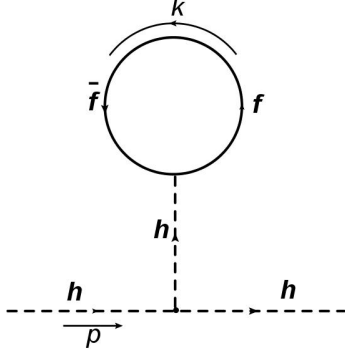
$$-i\Pi_{tad,\epsilon}^{W^\pm} = -\frac{6M_W^2}{v^2} \left(4 \frac{i}{(4\pi)^2} M_W^2 \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} - \frac{1}{M_W^2} \frac{i}{(4\pi)^2} M_W^4 \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \right)$$

$$\Pi_{tad,\epsilon}^{W^\pm} = 18 \frac{M_W^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (5.25)$$

Para o bóson Z o procedimento é análogo,

$$\Pi_{tad,\epsilon}^Z = 9 \frac{M_Z^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (5.26)$$

O próximo diagrama contém um tadpole fermiônico. Utilizando o resultado de (4.14) e generalizando para d dimensões teremos:



$$-i\Pi_{tad}^f = 12N_c \frac{m_f^2}{v^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m_f^2}$$

E mais uma vez, ao analisarmos a Lagrangiana interagente $\mathcal{L}_{int}^{\bar{\psi}\psi h} = -\frac{m_f}{v} \bar{\psi}\psi h$ encontramos que

$$\left[\frac{1}{v}\right] = \frac{4-d}{2} - 1 \implies \frac{1}{v} \rightarrow \mu^{\frac{4-d}{2}} \frac{1}{v}$$

mantendo a consistência com os resultados anteriores. Assim,

$$-i\Pi_{tad}^f = 12N_c \mu^{4-d} \frac{m_f^2}{v^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - m_f^2}. \quad (5.27)$$

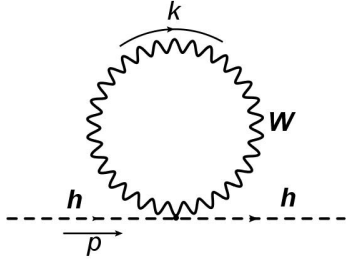
Utilizando (5.16) é imediato que

$$\Pi_{tad,\epsilon}^f = -12N_c \frac{m_f^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (5.28)$$

5.2.2. Diagramas 1PI

Topologia

Ainda utilizando os resultados obtidos no capítulo 4, mas agora lembrando que estamos no gauge unitário, $\xi \rightarrow \infty$, o próximo diagrama fica



$$-i\Pi_{\text{1PI}}^{\text{W},1}(p^2) = 2i \frac{M_W^2}{v^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - M_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2} \right)$$

E novamente usaremos (5.10) para reescrever a expressão acima:

$$-i\Pi_{\text{1PI}}^{\text{W},1}(p^2) = 2 \mu^{4-d} \frac{M_W^2}{v^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 - M_W^2} \left(d - \frac{k^2}{M_W^2} \right). \quad (5.29)$$

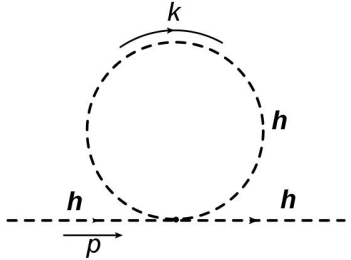
A partir de (5.16) e (5.24) o primeiro e segundo termos da integral acima, respectivamente, são:

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{1PI},\epsilon}^{\text{W},1}(p^2) &= 2 \frac{M_W^2}{v^2} \left[4 \frac{i}{(4\pi)^2} M_W^2 \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} - \frac{1}{M_W^2} M_W^4 \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \right] \\ \Pi_{\text{1PI},\epsilon}^{\text{W},1}(p^2) &= -\frac{6M_W^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Os mesmos cálculos se aplicam ao bóson Z, acrescentando apenas um fator numérico. Assim:

$$\Pi_{\text{1PI},\epsilon}^{\text{Z},1}(p^2) = -\frac{3M_Z^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (5.31)$$

Quanto ao diagrama do loop de Higgs teremos:



$$-i\Pi_{\text{1PI}}^{\text{h},1}(p^2) = -\frac{3i}{2} \frac{m_h^2}{v^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m_h^2}$$

Após a redefinição (5.10):

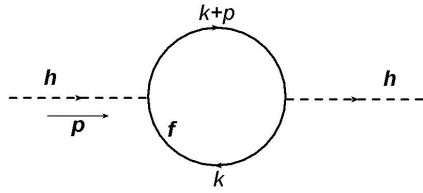
$$-i\Pi_{1\text{PI}}^{h,1}(p^2) = -\frac{3i}{2} \mu^{4-d} \frac{m_h^2}{v^2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - m_h^2} \quad (5.32)$$

e resolvemos essa integral imediatamente usando (5.16):

$$\Pi_{1\text{PI},\epsilon}^{h,1}(p^2) = -\frac{3}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2 \hat{\epsilon}_4}. \quad (5.33)$$

Topologia

Começamos analisando o loop fermiônico.



$$-i\Pi_{1\text{PI}}^f(p^2) = -4N_c \frac{m_f^2}{v^2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{k^2 + \Delta_f^2}{(k^2 - \Delta_f^2)^2}$$

onde resgatamos o resultado (4.38) e (5.10) para escrever a expressão acima.

Primeiro vamos resolver essa integral em $d^d k$ e, para isso, teremos que usar as expressões (5.1) e (5.2), mas agora com $n = 2$:

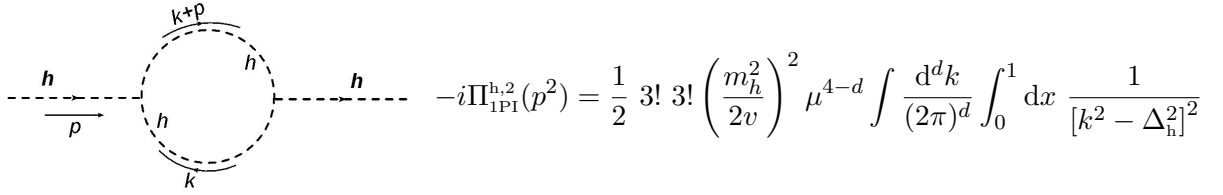
$$\begin{aligned} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta_f^2)^2} &= i \mu^{4-d} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_f^2)^2} \stackrel{(5.1)}{=} \frac{i\mu^\epsilon}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} \Gamma(\epsilon/2) \Delta_f^{-\epsilon} \\ &\approx \frac{i}{(4\pi)^2} (1 + \epsilon \log \mu) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \log(4\pi)\right) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right) (1 - \epsilon \Delta_f) \\ &\approx \frac{i}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{\gamma_E}) - \log\left(\frac{\Delta_f^2}{\mu^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\begin{aligned} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta_f^2)^2} &= i \mu^{4-d} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{-k_E^2}{(k_E^2 + \Delta_f^2)^2} \stackrel{(5.2)}{=} \frac{-i\mu^\epsilon}{(4\pi)^2} (4\pi)^{\frac{\epsilon}{2}} \left(\frac{d}{2}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{d}{2}\right)} \Gamma(\epsilon/2) \Delta_f^{-\epsilon} \Delta_f^2 \\ &\approx \frac{-i(1 + \epsilon \log \mu)}{(4\pi)^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \log(4\pi)\right) \left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{1}{\left(-1 + \frac{\epsilon}{2}\right)} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E\right) (1 - \epsilon \log \Delta_f) \Delta_f^2 \\ &\approx i \frac{\Delta_f^2}{(4\pi)^2} \left[2 \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E})\right) - 1 - 2 \log\left(\frac{\Delta_f^2}{\mu^2}\right)\right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por esses dois resultados é fácil ver que

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{IPI},\epsilon}^f(p^2) &= 4N_c \frac{m_f^2}{(4\pi v)^2} \int_0^1 dx \frac{3\Delta_f^2}{\hat{\epsilon}_4} = 12 \frac{m_f^2}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \int_0^1 dx [-p^2 x(1-x) + m_f^2] \\ &= 12N_c \frac{m_f^2}{(4\pi v)^2} \left[m_f^2 - \frac{p^2}{6} \right] \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}\end{aligned}\quad (5.36)$$

O próximo diagrama corresponde ao loop do Higgs

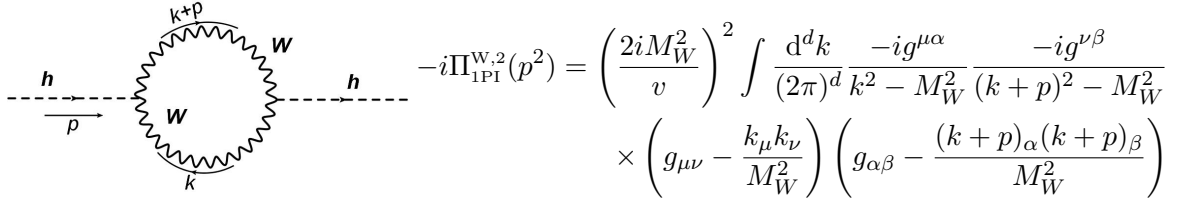


$$-i\Pi_{\text{IPI}}^{h,2}(p^2) = \frac{1}{2} 3! 3! \left(\frac{m_h^2}{2v}\right)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - \Delta_h^2]^2}$$

Essa expressão é facilmente resolvida utilizando (5.34):

$$\Pi_{\text{IPI},\epsilon}^{h,2}(p^2) = -\frac{9}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \quad (5.37)$$

E finalmente o último diagrama com graus de liberdade físicos que nos interessa corresponde ao loop de bósons de gauge.



$$\begin{aligned}-i\Pi_{\text{IPI}}^{W,2}(p^2) &= \left(\frac{2iM_W^2}{v}\right)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-ig^{\mu\alpha}}{k^2 - M_W^2} \frac{-ig^{\nu\beta}}{(k+p)^2 - M_W^2} \\ &\quad \times \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}\right) \left(g_{\alpha\beta} - \frac{(k+p)_\alpha (k+p)_\beta}{M_W^2}\right)\end{aligned}$$

Usando (5.10) podemos reescrever

$$\begin{aligned}-i\Pi_{\text{IPI}}^{W,2}(p^2) &= \left(\frac{2iM_W^2}{v}\right)^2 \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{k^2 - M_W^2} \frac{i}{(k+p)^2 - M_W^2} \\ &\quad \times \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}\right) \left(-g^{\mu\nu} + \frac{(k+p)^\mu (k+p)^\nu}{M_W^2}\right) \\ &= \frac{4}{v^2} \mu^{4-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2 + kp)^2 - M_W^2(2k^2 + p^2 + 2kp) + dM_W^4}{(k^2 - M_W^2) [(k+p)^2 - M_W^2]}\end{aligned}$$

Pelo procedimento usual faremos a parametrização de Feynman e completaremos

quadrado no denominador para obter

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{\text{IPI}}^{\text{W},2}(p^2) &= \frac{4}{v^2} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2 + kp)^2 - M_W^2(2k^2 + p^2 + 2kp) + dM_W^4}{[(k + px)^2 - \Delta_W^2]^2} \\
 &\stackrel{k \rightarrow k+px}{=} \frac{4}{v^2} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - \Delta_W^2]^2} \left[(k^2)^2 + (p^2)^2 x^2 (x-1)^2 + 2k^2 p^2 x(x-1) \right. \\
 &\quad \left. + (1-2x)^2 (k \cdot p)^2 - 2M_W^2 k^2 - M_W^2 p^2 (2x^2 - 2x + 1) + dM_W^4 \right]
 \end{aligned}$$

sendo $\Delta_W^2 = -p^2 x(1-x) + M_W^2$.

O termo mais problemático trata-se do $k \cdot p$, pois escrito dessa forma não conseguimos resolver a integral em k , por isso faremos uma alteração conveniente:

$$(k \cdot p)^2 = k^\mu k^\nu p_\mu p_\nu \rightarrow \frac{g^{\mu\nu}}{d} k^2 p_\mu p_\nu = \frac{k^2 p^2}{d} \quad (5.38)$$

Promovendo essa mudança finalmente chegaremos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned}
 -i\Pi_{\text{IPI}}^{\text{W},2}(p^2) &= \frac{4}{v^2} \mu^{4-d} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - \Delta_W^2]^2} \left[k^2 \left(2p^2 x(x-1) + \frac{p^2}{d} (1-2x)^2 - 2M_W^2 \right) \right. \\
 &\quad \left. + (k^2)^2 + (p^2)^2 x^2 (x-1)^2 - M_W^2 p^2 (2x^2 - 2x + 1) + dM_W^4 \right] \quad (5.39)
 \end{aligned}$$

Primeiro faremos a integral em k : analisando a primeira linha da expressão anterior está claro que (5.35) resolve a integral. A segunda linha tem um problema: o termo $(k^2)^2$, mas felizmente esse revés é contornável. Para mostrar o truque precisamos de outra identidade:

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{(k_E^2)^2}{(k_E^2 + \Delta^2)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \quad (5.40)$$

Agora faremos $n = 2$ em (5.1) e (5.40), e vamos comparar os resultados:

$$A = \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{2 - \frac{d}{2}} \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
 B &= \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{(k_E^2)^2}{(k_E^2 + \Delta^2)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{-\frac{d}{2}} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{d/2(d/2 - 1)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{-\frac{d}{2}} \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$B = A \left(\frac{d+2}{d-2} \right) \Delta^2 \quad (5.43)$$

Com isso somos capazes de integrar a segunda linha de (5.39), pois teremos que usar apenas o resultado (5.34). Então,

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{IPI},\epsilon}^{\text{W},2}(p^2) &= \frac{4}{v^2} \mu^\epsilon \int_0^1 dx \left[i \frac{\Delta_{\text{W}}^2}{(4\pi)^2} \frac{2}{\hat{\epsilon}_4} \left(2p^2 x(x-1) + \frac{p^2}{4} \left(1 + \frac{\epsilon}{4} \right) (1-2x)^2 - 2M_W^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \left((p^2)^2 x^2 (x-1)^2 - M_W^2 p^2 (2x^2 - 2x + 1) + (4-\epsilon)M_W^4 + \underbrace{(3+\epsilon)}_{\frac{d+2}{d-2}} \Delta_{\text{W}}^4 \right) \right] \quad (5.44) \end{aligned}$$

Agora a única tarefa é integrar em x . O cálculo resulta em

$$\Pi_{\text{IPI},\epsilon}^{\text{W},2}(p^2) = \frac{1}{(4\pi v)^2} \left(6p^2 M_W^2 - 12M_W^4 - (p^2)^2 \right) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (5.45)$$

Para o bóson Z acrescentamos um fator numérico, mas os cálculos são os mesmos efetuados anteriormente, ou seja,

$$\Pi_{\text{IPI},\epsilon}^{\text{Z},2}(p^2) = \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(4\pi v)^2} \left(6p^2 M_Z^4 - 12M_Z^4 - (p^2)^2 \right) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (5.46)$$

Por fim, chegamos aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{tad},\epsilon}^{\text{W}^\pm} &= 18 \frac{M_W^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} & \Pi_{\text{tad},\epsilon}^h &= \frac{9}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2} \left[1 - \log \left(\frac{m_h^2}{\mu^2} \right) \right] \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \\ \Pi_{\text{tad},\epsilon}^Z &= 9 \frac{M_Z^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} & \Pi_{\text{tad},\epsilon}^f &= -12N_c \frac{m_f^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \\ \Pi_{\text{IPI},\epsilon}^{\text{W},1}(p^2) &= -\frac{6M_W^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} & \Pi_{\text{IPI},\epsilon}^{\text{Z},1}(p^2) &= -\frac{3M_Z^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \\ \Pi_{\text{IPI},\epsilon}^{\text{h},1}(p^2) &= -\frac{3}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} & \Pi_{\text{IPI},\epsilon}^f(p^2) &= 12N_c \frac{m_f^2}{(4\pi v)^2} \left[m_f^2 - \frac{p^2}{6} \right] \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Pi_{1\text{PI},\epsilon}^{\text{h},2}(p^2) &= -\frac{9}{2} \frac{m_h^4}{(4\pi v)^2} \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \\
 \Pi_{1\text{PI},\epsilon}^{\text{W},2}(p^2) &= \frac{1}{(4\pi v)^2} \left(6p^2 M_W^2 - 12M_W^4 - (p^2)^2 \right) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \\
 \Pi_{1\text{PI},\epsilon}^{\text{Z},2}(p^2) &= \left(\frac{1}{2} \right) \frac{1}{(4\pi v)^2} \left(6p^2 M_Z^4 - 12M_Z^4 - (p^2)^2 \right) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}
 \end{aligned}$$

Somando tudo teremos:

$$\begin{aligned}
 \Pi_\epsilon(p^2) &= \frac{1}{(4\pi v)^2} \left(6p^2 M_W^2 + 3p^2 M_Z^2 - 2 \sum_f N_c m_f^2 p^2 - \frac{3}{2} m_h^4 - \frac{3}{2} (p^2)^2 \right) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \\
 &= (p^2 - m_h^2) \frac{1}{(4\pi v)^2} \left(-2 \sum_f N_c m_f^2 + 6M_W^2 + 3M_Z^2 - \frac{3}{2} p^2 - \frac{3}{2} m_h^2 \right) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \\
 &\quad - m_h^2 \frac{1}{(4\pi v)^2} \left(2 \sum_f N_c m_f^2 - 6M_W^2 - 3M_Z^2 + 3m_h^2 \right) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4} \quad (5.47)
 \end{aligned}$$

A expressão $\Pi_\epsilon(p^2)$ permite determinar $m_h^2 \delta_{m^2}^{(1)}$ da massa do Higgs. Para encontrar essa a correção à massa calculada a *1-loop* adicionamos ao resultado (5.47) os contratermos (4.60) - (4.61) e exigimos que o propagador seja finito, ou seja, $\Pi_\epsilon = 0$. Feito isso, teremos o resultado da regularização dimensional:

$$m_h^2 \delta_{m^2}^{(1)} = \frac{m_h^2}{(4\pi v)^2} \left[2 \sum_f N_c m_f^2 - 6M_W^2 - 3M_Z^2 + 3m_h^2 \right] \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}.$$

Substituindo o fator de cor, $N_c = 3$, e considerando apenas a massa do quark *top*, por ser a mais relevante dentre as massas fermiônicas, finalmente chegaremos em

$$m_h^2 \delta_{m^2}^{(1)} \approx \frac{3m_h^2}{(4\pi v)^2} \left[m_t^2 - 2M_W^2 - M_Z^2 + 2m_t^2 \right] \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (5.48)$$

O resultado obtido na regularização por cutoff foi:

$$\begin{aligned}
 m_h^2 \delta_{m^2}^{(1)} = & \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} \left(m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - \frac{4}{3} \sum_f N_c m_f^2 \right) \\
 & + \frac{3m_h^2}{(4\pi v)^2} \left[\frac{1}{2} m_h^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_h^2} \right) + \frac{1}{3} m_h^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_W^2} \right) + \frac{1}{6} m_h^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_Z^2} \right) \right. \\
 & \left. - 2M_W^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_W^2} \right) - M_Z^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{M_Z^2} \right) + 2m_t^2 \log \left(\frac{\Lambda^2}{m_t^2} \right) \right]. \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

Se os fatores $\log \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right)$ fossem todos iguais (ou muito próximos) poderíamos reescrever (5.49) como

$$\begin{aligned}
 m_h^2 \delta_{m^2}^{(1)} \approx & \frac{6\Lambda^2}{(4\pi v)^2} \left(m_h^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - \frac{4}{3} \sum_f N_c m_f^2 \right) \\
 & + \frac{3m_h^2}{(4\pi v)^2} (m_h^2 - 2M_W^2 - M_Z^2 + 2m_t^2) \log \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

e o termo da divergência logarítmica seria basicamente o mesmo obtido na regularização dimensional. Esse fato evidencia que a divergência associada ao $\frac{1}{\epsilon_4}$ corresponde a um infinito logarítmico¹.

Justamente pela divergência quadrática não aparecer na regularização dimensional é comum atribuírem o Problema da Hierarquia à escolha do esquema de regularização por *cutoff*. No entanto, se (5.48) for a correção final (a 1-loop) então o MP aceitará m_h pequeno até a escala de Planck, sendo desnecessário incluir novas partículas na teoria, ou seja, não teríamos novidades entre a escala 1 TeV e 10^{19} TeV. Por outro lado, se alguma partícula existir entre essas escalas, a interação com o Higgs acrescentará um novo termo em (5.48) proporcional à massa da nova partícula ao quadrado, M^2 , e consequentemente, $m_h^2 \delta_{m^2}$ terá divergência quadrática, pois M estará na escala UV e corresponderá ao cutoff físico do MP.

$$m_h^2 \delta_{m^2}^{(1)} \approx \frac{3m_h^2}{(4\pi v)^2} (m_h^2 - 2M_W^2 - M_Z^2 + 2m_t^2 + cM^2) \log \left(\frac{M^2}{m^2} \right) \quad (5.51)$$

$$m_h^2 \delta_{m^2}^{(1)} \approx \frac{3m_h^2}{(4\pi v)^2} (m_h^2 - 2M_W^2 - M_Z^2 + 2m_t^2 + c\Lambda^2) \log \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \quad (5.52)$$

¹Não é a única maneira de ver que o termo $1/\epsilon$ corresponde a uma divergência logarítmica. Adotando a regularização por *Pauli-Villars* chega-se na mesma conclusão.

Portanto, o problema da Hierarquia não é exclusividade da regularização por *cutoff*.

No próximo capítulo veremos quais são os limites superiores e inferiores estimados para a massa do Higgs a partir do resultado (5.48) e considerando que não existam outras partículas no MP. Em seguida, discutiremos quais seriam as consequências físicas para os possíveis cenários de valores dessa massa.

6

Equações do Grupo de Renormalização

No último capítulo realizamos os cálculos dos diagramas da auto-energia do Higgs e convenientemente utilizamos o esquema de renormalização $\overline{MS}$. Caso adotássemos outro esquema teríamos alterações na definição de certas quantidades físicas, mas ao final das contas o resultado dos observáveis físicos seria o mesmo. Colocando de maneira mais clara: *os observáveis físicos independem da escolha do ponto (da escala) onde renormalizamos a teoria*. Promovendo transformações entre diferentes pontos de renormalização infinitesimalmente próximos é possível traçar uma trajetória no espaço das quantidades renormalizadas, como funções de Green (propagadores), constantes de acoplamento e operadores locais. Essa técnica é extremamente útil para dar *insights* a respeito do comportamento assintótico da teoria. Ao conjunto de transformações que conectam os pontos dessa trajetória damos o nome de grupo de renormalização.

Neste capítulo calcularemos o grupo de renormalização para a massa do Higgs e também mostraremos as trajetórias das constantes de acoplamento do MP em função da escala de energia onde a teoria é renormalizada. A partir desse gráfico, chamado *running dos acoplamentos*, também será possível visualizar o problema da hierarquia e, como o resultado independe do método de regularização, teremos mais uma evidência de que a hierarquia da massa do Higgs não é exclusividade da regularização por cutoff.

Apesar do nome, o grupo de renormalização não satisfaz todos os critérios para enquadrar-se na definição matemática de grupo, mas a referência se manteve por razões históricas. Stueckelberg e Peterman (1953) desenvolveram as técnicas para obter o grupo de renormalização, mas Gell-Mann e Low (1954) foram os primeiros a utilizar essas técnicas no contexto da teoria quântica de campos enquanto estudavam o comportamento assintótico das funções de Green na QED. Porém, foi após o trabalho de Wilson (1969) aplicando as mesmas técnicas no estudo de domínios de spin em sólidos, na área da

matéria condensada, que cresceu o interesse em utilizar o grupo de renormalização em teoria quântica de campos.

Tipicamente os sistemas estudados em teoria quântica de campos apresentam infinitos graus de liberdade e cada parâmetro físico é definido na escala de energia mais conveniente. Assim, quando inter-relacionamos quantidades físicas definidas em escalas distintas devemos transformar essas quantidades, levando-as a uma mesma escala. Para isso é importante mapear o comportamento desses parâmetros conforme alteramos a escala e essa é a utilidade prática do grupo de renormalização no estudo do MP.

Existem duas versões do grupo de renormalização utilizadas em teoria quântica de campos: *grupo de renormalização Wilsoniano* e *grupo de renormalização contínuo*.

6.1. Grupo de renormalização Wilsoniano

Como já adiantamos, esse conceito foi introduzido por Kenneth Wilson em um estudo de 1969. Aplicando as técnicas de teoria de campos em física da matéria condensada, Wilson percebeu que algumas propriedades do sólido, como a resistividade, não dependiam do valor exato do espaçamento atômico entre os átomos na rede do sólido. Wilson sabia que o cutoff da teoria que descrevia o material como contínuo era o espaçamento atômico, Λ^{-1} , que poderia ser interpretado como um limite da teoria na escala ultravioleta.

A vantagem de usarmos a teoria efetiva é que não precisamos conhecer todos os graus de liberdade do sistema. Ao lidar com o spin do material, por exemplo, basta conhecermos sítios de domínios do spin e calcularmos a média sobre sítios próximos. Essa técnica tem o efeito de substituir uma rede de blocos de spin por outra efetiva equivalente, ou seja, altera-se a escala de comprimento da rede e, portanto, a escala de energia da teoria. Com isso, Wilson pensou que deveria existir uma transformação cujo efeito era substituir graus de liberdade próximos por um único grau de liberdade efetivo e, para compensar, os parâmetros da teoria também se transformariam, deixando o observável físico (resistividade, por exemplo) inalterado. Essa técnica é chamada de regularização block-spin e, por meio dela, Wilson pensou que a física que descrevia o sólido a longas distâncias ($E \ll \Lambda$) não podia depender do valor exato de Λ e ao promover essa análise para o caso contínuo¹ obteve uma equação diferencial, a equação do grupo de renormalização.

Resumindo: *Em uma teoria finita com cutoff Λ na escala UV, a física em energias $E \ll \Lambda$ independe do valor exato de Λ . Alterar Λ muda os acoplamentos da teoria mantendo os observáveis inalterados.*

¹O caso contínuo é necessário, pois torna-se aplicável em teoria quântica de campos.

6.2. Grupo de renormalização contínuo

O conceito que utilizaremos neste trabalho é o de grupo de renormalização contínuo, segundo o qual *observáveis físicos independem da escala de renormalização adotada na definição das quantidades físicas. Isso é válido após eliminarmos o cutoff² da teoria já renormalizada.* Em particular, já vimos que na regularização dimensional com esquema $\overline{MS}$ a escala é representada pelo μ ; nesse caso o grupo de renormalização contínuo gera resultados independentes de μ .

Apesar de conceitualmente diferentes, a equação do grupo de renormalização é a mesma tanto na versão wilsoniana quanto na contínua. Em ambos os casos, dizer que os observáveis da teoria são invariantes por algo significa que podemos encontrar equações diferenciais como $\frac{d}{d\Lambda}\mathcal{O} = 0$ ou $\frac{d}{d\mu}\mathcal{O} = 0$, onde $\mathcal{O}$ é o observável. Resolver essas equações nos darão as trajetórias de $\mathcal{O}$ no espaço das teorias. Essa evolução do grupo de renormalização representa o fluxo ao longo de teorias equivalentes.

6.2.1. Grupo de renormalização a partir de contratermos

Nessa seção vamos obter a equação do grupo de renormalização para a massa do Higgs a partir dos contratermos da Lagrangiana do MP após a quebra espontânea de simetria; para tanto, focaremos apenas nos termos que nos interessam. Após a quebra espontânea, a parte da Lagrangiana nua que contém o campo do Higgs é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h^0 = & \frac{1}{2}(\partial_\mu h^0)^2 - \frac{1}{2}(m_h^0)^2(h^0)^2 - \lambda^0 v^0(h^0)^3 - \frac{1}{4}\lambda^0(h^0)^4 \\ & + \frac{(g_2^0 v^0)^2}{4} W_\mu^{0\dagger} W^{0\mu} h^0 + \frac{(g_2^0 v^0)^2}{4 \cos^2 \theta_w} Z_\mu^0 Z^{0\mu} h^0 - \sum_f \frac{y_f^0}{\sqrt{2}} h^0 \bar{\psi}^0 \psi^0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Agora vamos relacionar os parâmetros nus com os renormalizados definindo as constantes de renormalização como

$$\begin{aligned} h^0 &= Z_h^{1/2} h, & (m_h^0)^2 &= Z_{m^2} m_h^2, & \lambda^0 &= \mu^\epsilon Z_\lambda \lambda, \\ g_{1,2}^0 &= \mu^{\epsilon/2} Z_{g_{1,2}}^{1/2} g_{1,2}, & y_f^0 &= \mu^{\epsilon/2} Z_f^{1/2} y_f. \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde os termos μ^ϵ e $\mu^{\epsilon/2}$ advêm da definição adotada em (5.8) quando utilizamos a regularização dimensional.

²Eliminar o cutoff significa fazer $\Lambda = \infty$ ($d = 4$ na regularização dimensional).

Sabe-se que os parâmetros nus não dependem da escala de renormalização μ :

$$\frac{d}{d\mu}(m_h^0)^2 = 0, \quad \frac{d}{d\mu}\lambda^0 = 0, \quad \frac{d}{d\mu}g_{1,2}^0 = 0, \quad \frac{d}{d\mu}y_f^0 = 0, \quad (6.3)$$

então podemos usar (6.2) e (6.3) para obter várias equações diferenciais. Já pela primeira equação de (6.3) teremos

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu}(Z_{m^2} m_h^2) = 0 & \Rightarrow \mu \left(\frac{dZ_{m^2}}{d\mu} m_h^2 + Z_{m^2} \frac{dm_h^2}{d\mu} \right) = 0 \\ Z_{m^2} m_h^2 \left(\frac{\mu}{Z_{m^2}} \frac{dZ_{m^2}}{d\mu} + \frac{\mu}{m_h^2} \frac{dm_h^2}{d\mu} \right) & = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

pela qual definimos a *função gama* (também chamada de *dimensão anômala*):

$$\gamma_{m^2} \equiv \frac{\mu}{m_h^2} \frac{dm_h^2}{d\mu} = - \frac{\mu}{Z_{m^2}} \frac{dZ_{m^2}}{d\mu}. \quad (6.5)$$

Pela segunda equação de (6.3),

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu}(\mu^\epsilon Z_\lambda \lambda) = 0 & \Rightarrow \mu \left(\epsilon \mu^{\epsilon-1} Z_\lambda \lambda + \mu^\epsilon \frac{dZ_\lambda}{d\mu} \lambda + \mu^\epsilon Z_\lambda \frac{d\lambda}{d\mu} \right) = 0 \\ Z_\lambda \mu^\epsilon \left(\epsilon \lambda + \frac{\mu}{Z_\lambda} \frac{dZ_\lambda}{d\mu} \lambda + \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \right) & = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde definimos a *função beta*:

$$\beta(\lambda, \epsilon) \equiv \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = -\epsilon \lambda - \frac{\mu}{Z_\lambda} \frac{dZ_\lambda}{d\mu} \lambda. \quad (6.7)$$

E pela terceira e quarta equações de (6.3):

$$\begin{aligned} \mu \frac{d}{d\mu}(\mu^{\epsilon/2} Z_{g_{1,2}}^{1/2g} g_{1,2}) = 0 & \Rightarrow Z_{g_{1,2}}^{1/2} \mu^{\epsilon/2} \left(\frac{\epsilon}{2} g_{1,2} + \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_{g_{1,2}}} \frac{dZ_{g_{1,2}}}{d\mu} g_{1,2} + \mu \frac{dg_{1,2}}{d\mu} \right) = 0 \\ \beta(g_{1,2}, \epsilon) \equiv \mu \frac{dg_{1,2}}{d\mu} & = -\frac{\epsilon}{2} g_{1,2} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_{g_{1,2}}} \frac{dZ_{g_{1,2}}}{d\mu} g_{1,2} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\beta(y_f, \epsilon) \equiv \mu \frac{dy_f}{d\mu} = -\frac{\epsilon}{2} y_f - \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_{y_f}} \frac{dZ_{y_f}}{d\mu} y_f \quad (6.9)$$

Perceba que as expressões (6.7), (6.8) e (6.9) apresentam ϵ para o caso de trabalharmos em dimensão $d \rightarrow 4$.

Veremos adiante que γ_{m^2} , β_λ , β_{y_f} e $\beta_{g_{1,2}}$ formam um sistema de equações diferenciais acopladas impossível de se resolver analiticamente, então as soluções serão obtidas numericamente e truncadas à ordem 1-loop e 2-loops, para efeito de comparação.

Lembrando que $\delta_{m^2} = Z_{m^2} - 1$ e usando o resultado (5.48) teremos:

$$Z_{m^2}^{(1)} = 1 + \frac{3}{(4\pi v)^2} (m_h^2 - 2M_W^2 - M_Z^2 + 2m_t^2) \frac{1}{\hat{\epsilon}_4}. \quad (6.10)$$

Mas nosso interesse é expressar tudo em termos de constantes de acoplamento e para isso usaremos

$$\begin{aligned} m_h &= \sqrt{2\lambda}v, & M_W &= \frac{g_2 v}{2}, & M_Z &= \frac{g_2 v}{2 \cos \theta_w}, \\ m_t &= \frac{y_t v}{\sqrt{2}}, & \cos \theta_w &= \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Assim,

$$Z_{m^2}^{(1)} = 1 + \frac{1}{(4\pi)^2} \left(6\lambda + 3y_t^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - \frac{3}{4}g_1^2 \right) \cdot \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) \right). \quad (6.12)$$

E substituindo esse resultado na (6.5) chegaremos na expressão de γ_{m^2} .

$$\begin{aligned} \gamma_{m^2} &= -\frac{\mu}{Z_{m^2}} \frac{d}{d\mu} Z_{m^2}(\lambda, y_t, g_1, g_2) \\ &= -\frac{1}{Z_{m^2}} \left(\frac{\partial Z_{m^2}}{\partial \lambda} \mu \frac{d\lambda}{d\mu} + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial y_t} \mu \frac{dy_t}{d\mu} + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial g_1} \mu \frac{dg_1}{d\mu} + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial g_2} \mu \frac{dg_2}{d\mu} \right) \\ &= -\frac{1}{Z_{m^2}} \left(\frac{\partial Z_{m^2}}{\partial \lambda} \beta(\lambda, \epsilon) + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial y_t} \beta(y_t, \epsilon) + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial g_1} \beta(g_1, \epsilon) + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial g_2} \beta(g_2, \epsilon) \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

onde concluímos que³:

$$\gamma_{m^2}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left(12\lambda + 6y_t^2 - \frac{9}{2}g_2^2 - \frac{3}{2}g_1^2 \right). \quad (6.14)$$

Para tanto foi necessário encontrar as expressões das funções β presentes em (6.13). Fazemos isso do mesmo modo procedido até aqui na obtenção de $\gamma_{m^2}^{(1)}$; por exemplo, para encontrar $\beta_\lambda^{(1)}$ devemos calcular os diagramas de quatro pontos do campo de Higgs a

³Contas mais detalhadas no apêndice G

1-loop, obter $Z_\lambda^{(1)}$ e aplicar (6.7). Os cálculos são igualmente longos, mas o procedimento é análogo ao que já foi feito, por isso não vamos desenvolvê-los neste trabalho, apenas usar o resultado já obtido em [18–20]. A saber, os diagramas utilizados na obtenção de β_λ estão na figura 6.1.

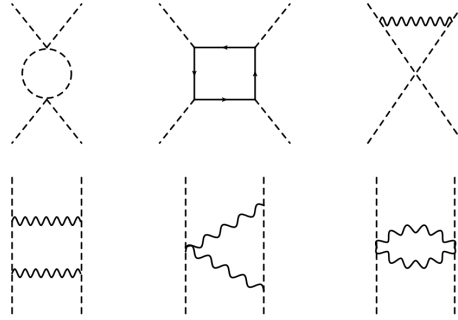


Figura 6.1.: Diagramas 1PI de quatro pontos do campo de Higgs utilizados na obtenção do valor de β_λ (Machacek e Vaughn, 1985).

As contribuições mais relevantes para corrigir o vértice do acoplamento quártico vêm do loop de Higgs e do loop em caixa do *top quark*, pois são as partículas mais massivas.

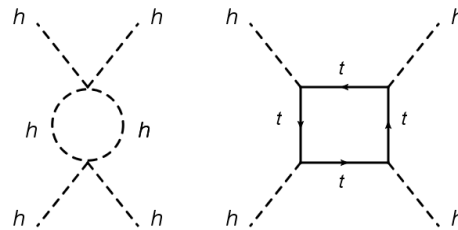


Figura 6.2.: Diagramas de quatro pontos mais relevantes para a correção do vértice do acoplamento quártico.

A lista de funções γ e β em $d = 4$ ($\epsilon = 0$) a 1-loop segue abaixo.

$$\beta_\lambda^{(1)} = \frac{d\lambda}{d\log\mu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\lambda(-9g_2^2 - 3g_1^2 + 12y_t^2) + 24\lambda^2 + \frac{3}{4}g_2^4 + \frac{3}{8}(g_1^2 + g_2^2)^2 - 6y_t^4 \right], \quad (6.15)$$

$$\beta_{y_t}^{(1)} = \frac{dy_t}{d\log\mu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{9}{2}y_t^3 + y_t \left(-\frac{17}{12}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2 \right) \right], \quad (6.16)$$

$$\beta_{g_1}^{(1)} = \frac{dg_1}{d\log\mu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{41}{6}g_1^3 \right], \quad (6.17)$$

$$\beta_{g_2}^{(1)} = \frac{dg_2}{d\log\mu} = \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{19}{6}g_2^3 \right], \quad (6.18)$$

$$\beta_{g_3}^{(1)} = \frac{dg_3}{d\log\mu} = \frac{1}{16\pi^2} [-7g_3^3], \quad (6.19)$$

$$m_h^2 \gamma_{m^2}^{(1)} = \frac{dm_h^2}{d\log\mu} = \frac{m_h^2}{16\pi^2} \left(12\lambda + 6y_t^2 - \frac{9}{2}g_2^2 - \frac{3}{2}g_1^2 \right). \quad (6.20)$$

Como podemos ver, parte dessas expressões forma um sistema de equações diferenciais acopladas. A resolução desse sistema é feita numericamente⁴ e, para isso, precisamos de condições iniciais para cada acoplamento. Uma alternativa é escolher os valores desses acoplamentos na escala m_t , porém as funções β foram obtidas no esquema $\overline{MS}$, enquanto as massas do *top* e do Higgs foram determinadas on-shell experimentalmente. Nesse caso, precisamos relacionar as massas físicas com as renormalizadas no esquema $\overline{MS}$. Essa relação é chamada de *matching*.

O matching entre y_t renormalizado no esquema $\overline{MS}$ e a massa física do *top* é dado por: [21]

$$y_t(m_t) = \frac{\sqrt{2}m_t}{v} (1 + \delta_t(m_t)), \quad (6.21)$$

onde $\delta_t(m_t)$ pode ser dividido em três partes:

$$\delta_t(\mu) = \delta_t^{QCD}(\mu) + \delta_t^{QED}(\mu) + \delta_t^{EW}(\mu), \quad (6.22)$$

correspondendo a correções da QCD, QED e fenômenos da escala eletrofraca.

Da mesma forma, o *matching* entre o acoplamento quártico no esquema $\overline{MS}$ e a massa física do Higgs é

$$\lambda(m_t) = \frac{(m_h^{físico})^2}{2v^2} (1 + \delta_h(m_t)). \quad (6.23)$$

⁴No cálculo a 1-loop é possível obter as soluções analíticas de $g_{1,2,3}$, pois nessa ordem as funções β desses parâmetros estão desacopladas. A partir de cálculos a 2-loops as expressões (6.15) a (6.20) ficam todas acopladas entre si (apêndice H).

A expressão completa para $\delta_h(m_t)$ pode ser vista na referência [21].

Diversos trabalhos já calcularam essas relações de *matching* até ordem *3-loops* [22, 23], por isso vamos utilizar os resultados encontrados nessas referências para estabelecer as condições iniciais.

$\mu = m_t$	λ	y_t	g_1	g_2	g_3	m_h [GeV]
LO	0.12917	0.99561	0.34972	0.65294	1.22	125.15
NLO	0.12774	0.95113	0.35940	0.64754	1.1667	132.37
NNLO	0.12604	0.94018	0.35830	0.64779	1.1666	131.55

Tabela 6.1.: Valores dos parâmetros fundamentais do MP a nível árvore, a 1-loop e a 2-loops renormalizados na escala $\mu = m_t$ pelo esquema $\overline{MS}$. Esses valores foram retirados de [23] com $m_t = 173.34$ GeV.

6.3. Resultados do running dos parâmetros

Resolvemos as EDO's (6.17)-(6.19) analiticamente,

$$g_i(\mu) = \frac{g_i(m_t)}{1 - \frac{C_i}{8\pi^2} g_i(m_t) \log\left(\frac{\mu}{m_t}\right)}, \quad (6.24)$$

onde $C_1 = 41/6$, $C_2 = -19/6$ e $C_3 = -7$.

Para as outras EDO's utilizamos o método numérico de Runge-Kutta com as condições iniciais da tabela 6.1 e $m_t = 173.34$ GeV [24].

Resgatando o enunciado do critério de naturalidade técnica⁵ verificamos pela figura 6.3 que, à exceção da massa do Higgs e do acoplamento quártico, as outras constantes de acoplamento do MP (adimensionais) são de ordem 1 entre a escala eletrofraca e a escala de Planck, ou seja, enquadram-se na definição de parâmetros naturais. Por sua vez, a massa do Higgs tem dimensão de energia e praticamente não varia com a mudança de μ , mantendo-se sempre com valores em torno de centenas de GeV, então ao escrevermos a Lagrangiana efetiva do MP em uma escala μ na faixa do UV já teremos um valor para m_h muito menor que a própria escala onde a teoria foi renormalizada, evidenciando o problema da hierarquia ao não satisfazer o critério de naturalidade técnica.

A figura 6.3 traz outro resultado interessante, sobretudo quanto ao comportamento do acoplamento quártico λ : ele fica negativo a partir de uma certa escala de energia

⁵Ver capítulo 3.

menor que a escala de Planck. A partir dos resultados dessa figura podemos fazer uma importante discussão a respeito da estabilidade do vácuo e a relação disso com a massa do Higgs.

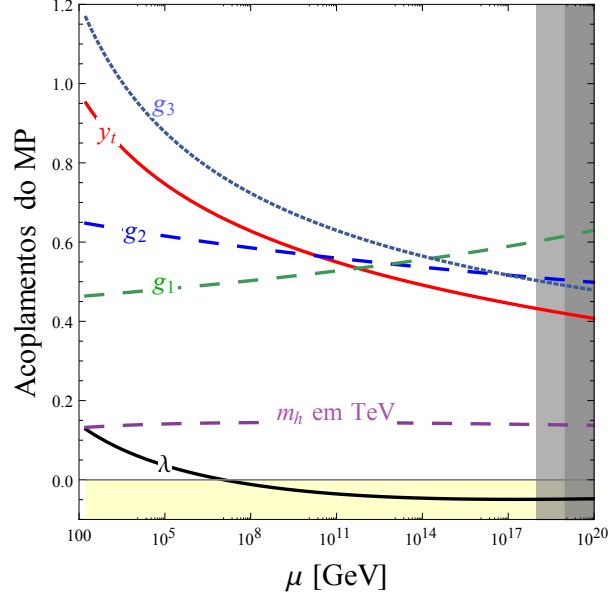


Figura 6.3.: Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa do Higgs e das constantes de acoplamento do MP a 1-loop, renormalizados pelo esquema $\overline{MS}$. Em especial, promovemos a seguinte mudança: $g_1 \rightarrow \sqrt{5/3}g_1$. Isso foi feito porque em teorias unificadas costuma-se adotar a normalização $g_1^U = \sqrt{5/3}g_1$. As regiões em cinza correspondem às escalas de energia de Planck e da Grande Unificação.

6.3.1. Limites para a massa do Higgs

Estabilidade do vácuo

O problema de se ter um m_h leve está no fato de isso tornar o vácuo da teoria instável.

Analisando a figura 6.3 percebemos que a massa renormalizada do Higgs não se altera muito com a mudança de escala energética, ficando sempre abaixo de 200 GeV . Em contrapartida, o acoplamento quártico decresce para valores negativos a partir de alguma escala de energia.

Nesse cenário em que m_h é leve e não varia muito com a mudança de escala ($m_h \ll \mu$) é válido adotar a seguinte aproximação quando o campo de Higgs assume um valor muito

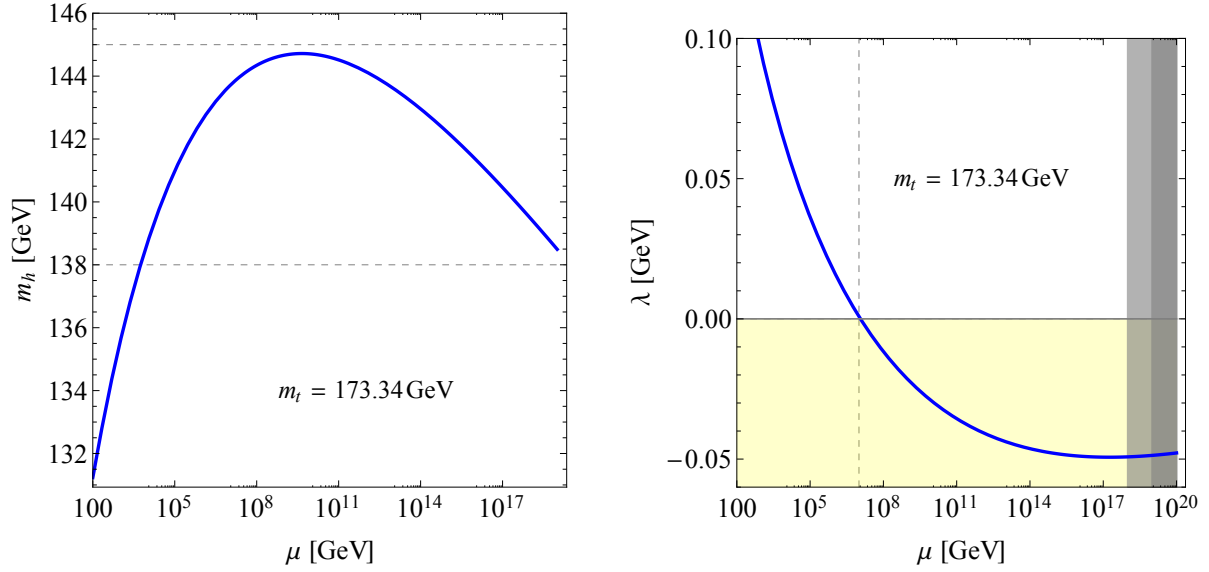


Figura 6.4.: Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa e do acoplamento quártico do Higgs a 1-loop. **Esquerda:** Apesar da escala de energia mudar várias ordens de grandeza, a massa se mantém na mesma ordem. **Direita:** A previsão do cálculo a 1-loop é de $\lambda < 0$ para $\mu \gtrsim 10^7$ GeV.

grande ($h \gg v$):

$$V_{eff}(h) = -\frac{m_h^2(h)}{2}h^2 + \frac{\lambda(h)}{4}h^4 \approx \frac{\lambda(h)}{4}h^4 \quad (6.25)$$

e, caso $\lambda(\mu)$ assuma um valor negativo em alguma escala de energia μ , a teoria será *unbounded from below*⁶, i.e, não apresentará um valor limitante mínimo de energia, tornando o vácuo instável.

Dependendo do valor de m_h e de m_t a solução completa para o *running* λ será tal que o fluxo desse acoplamento será sempre sobre valores positivos, deixando o vácuo estável até a escala de Planck. Isso significa que as medições atuais ($m_h^{físico} \sim 125$ GeV, $m_t \sim 173$ GeV) apontam para a existência de um vácuo fora da região de estabilidade, conforme mostra a figura 6.4, e a pergunta imediata que podemos fazer seria “por que o vácuo onde vivemos ainda não decaiu?”. Este é mais uma questão que só aumenta a expectativa de observarmos nova física em alguma escala de energia onde ainda temos $\lambda > 0$.

Antes de prosseguirmos, é útil compararmos esses resultados obtidos em ordem 1-loop com o que obteríamos a 2-loops, para nos certificarmos que $\lambda < 0$ não é um problema relacionado com o nível da correção. A lista das funções β e γ a 2-loops foram extraídas de [21] e encontram-se no apêndice H. Por se tratar de um sistema de EDO's

⁶Em tradução livre: *não limitada por baixo*

acopladas, todas as soluções foram obtidas numericamente pelo método de Runge-Kutta. As condições iniciais estão na tabela 6.1.

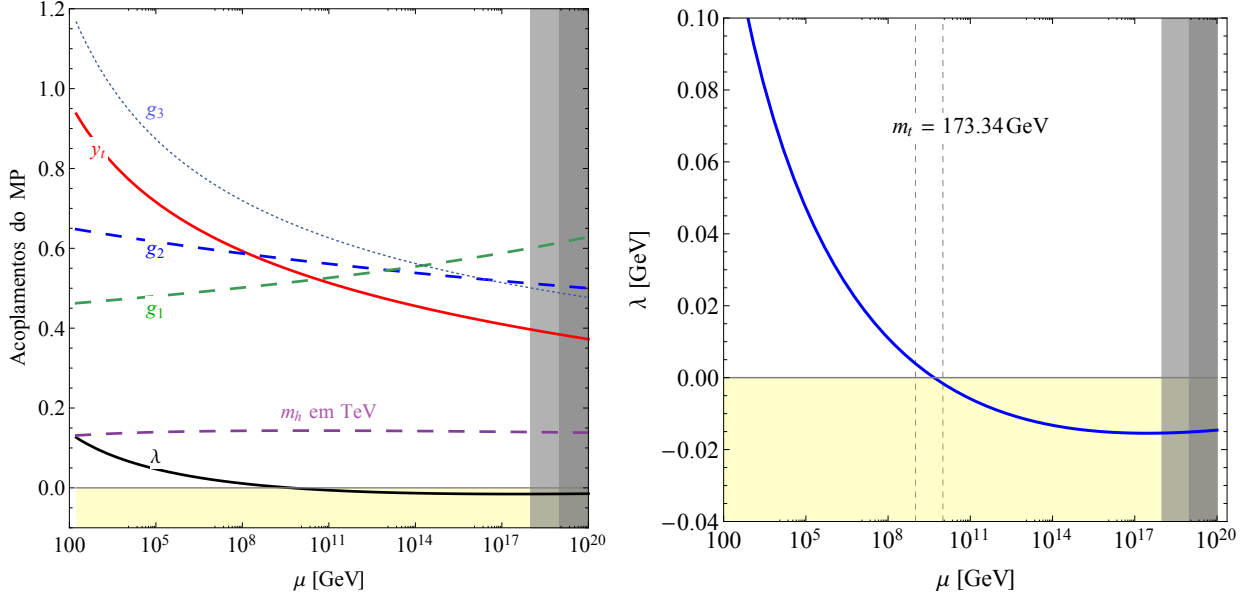


Figura 6.5.: Esquerda: Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa e dos acoplamentos do MP a 2-loops, renormalizados pelo esquema $\overline{MS}$. A principal diferença entre esse resultado e o da figura 6.3 está no fluxo de y_t e λ . **Direita:** A previsão do cálculo a 2-loops é de $\lambda < 0$ para $\mu \gtrsim 10^{10}$ GeV.

A figura 6.5 deixa claro que $\lambda < 0$ não é exclusividade do cálculo a 1-loop, ainda que a ordem de grandeza da escala μ onde o vácuo deixaria de ser estável seja corrigida para 10^{10} GeV no procedimento a 2-loops, uma diferença considerável. A partir de 3-loops os resultados são levemente alterados, como apontado em [25], por isso vamos nos limitar a 2-loops.

Mas ainda é preciso aprimorar os dados apresentados, afinal as medidas experimentais contêm incertezas que podem alterar significativamente o fluxo dos parâmetros. Em especial, a incerteza na massa do quark top é a maior dentre as medidas experimentais e, por esse motivo, é a que mais altera os resultados quando incorporamos $\pm\sigma_t$ ao valor central de $m_t = 173.34$ GeV. Não somente a massa do quark top como também as incertezas na massa do próprio Higgs e da constante de acoplamento forte geram mudanças importantes no running. A figura 6.6 apresenta as variações no running devido à inclusão das incertezas experimentais.

A imagem esquerda da Fig.6.6 mostra que mesmo após considerarmos $3\sigma_t$ de incerteza

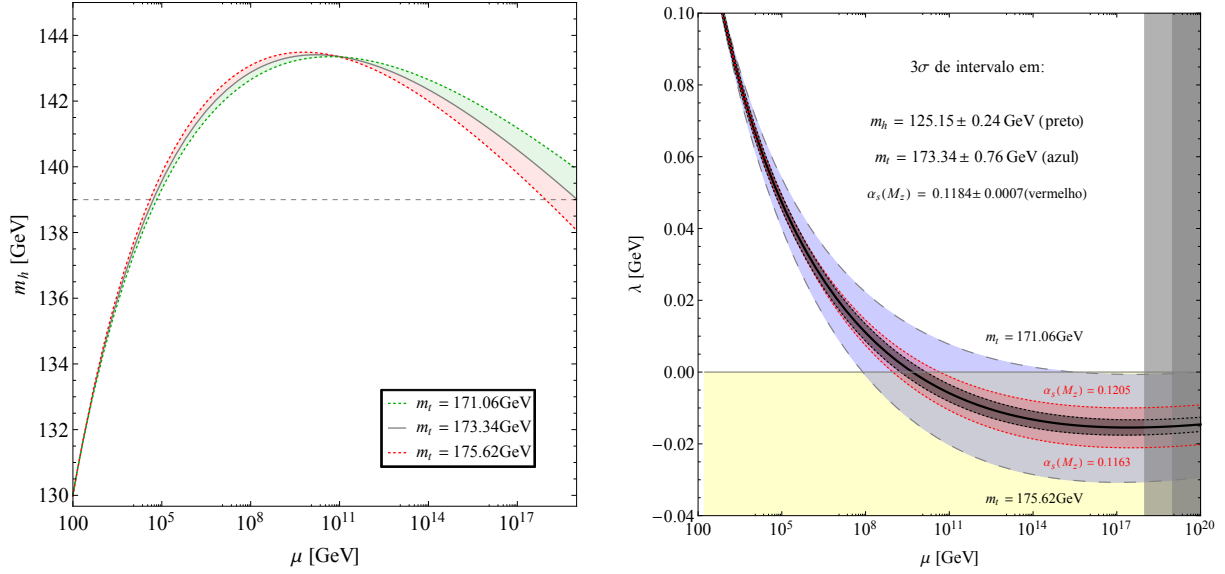


Figura 6.6.: *Esquerda:* Fluxo do grupo de renormalização do parâmetro de massa do Higgs a 2-loops considerando $m_t = 173.34 \pm 3\sigma_t$ GeV, onde $\sigma_t = 0.76$ GeV. *Direita:* Fluxo do grupo de renormalização do acoplamento quártico do Higgs a 2-loops considerando alterações de $\pm 3\sigma$ na massa do quark top, na massa do Higgs e na constante de acoplamento forte.

na massa do top⁷ o valor renormalizado de m_h continua variando pouco comparado com a escala de energia, ou seja, a aproximação (6.25) ainda é aplicável e, consequentemente, a estabilidade do vácuo ainda dependerá do sinal de $\lambda(\mu)$.

Na figura da direita percebe-se que λ ainda fica negativo em alguma escala de energia (variando de 10^8 GeV a 10^{16} GeV), mesmo considerando 3σ 's de incertezas experimentais.

A questão da estabilidade do vácuo pode ser entendida de três maneiras: ou nós vivemos em uma região do Universo onde o vácuo não é estável e, a qualquer momento, poderá decair; ou vivemos em um vácuo metaestável, cujo tempo de decaimento é maior que a própria idade do Universo; ou nosso vácuo é realmente estável e, mais uma vez, o Modelo Padrão não tem as ferramentas suficientes para explicar a razão dessa estabilidade. Pelos gráficos seguintes bastaria que a massa física do bóson de Higgs fosse de, no mínimo, 130 GeV para que o vácuo fosse estável até a escala de Planck.

Na Fig.6.7, a imagem esquerda mostra que valores pequenos de m_h implicam em $y_t(\mu) > \lambda(\mu)$ em qualquer escala μ entre m_t e Λ_{Planck} , então podemos estimar o limite inferior de m_h considerando (no cálculo a 1-loop) que λ é pequeno em (6.15) e mantendo

⁷Ao considerarmos $\pm 3\sigma$ temos 99.7% de chance de que a massa física do quark top esteja dentro da região analisada.

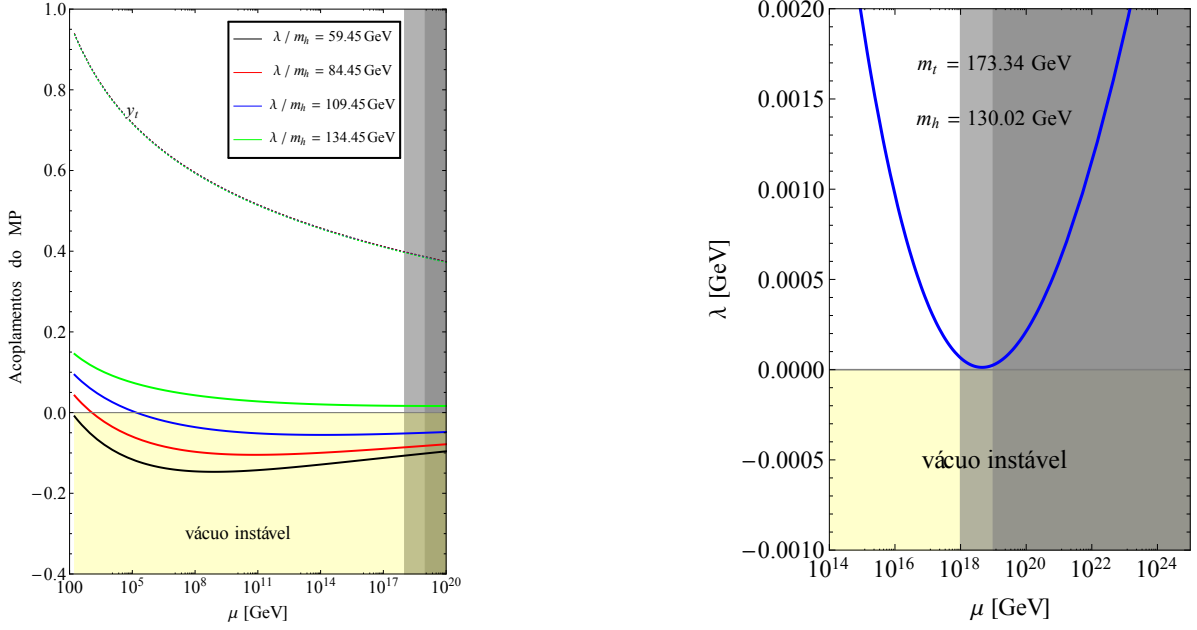


Figura 6.7.: Fluxo do grupo de renormalização do acoplamento quártico do Higgs a 2-loops. **Esquerda:** Alterações no fluxo de λ em função de $m_h^{físico}$. **Direita:** Considerando $\lambda(\Lambda_{Planck}) = 0$ como condição inicial teremos que a curva gerada pelo fluxo de λ é compatível com $m_h^{físico} = 130$ GeV.

apenas o termo dominante. Também assumiremos y_t constante [26], assim teremos:

$$\frac{d\lambda}{d\log\mu} = \frac{1}{16\pi^2} (-6y_t^4) \quad \Rightarrow \quad \lambda(\mu) = \lambda(\mu_0) - \frac{3}{8\pi^2} y_t^4 \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) \quad (6.26)$$

que fica positivo quando

$$\lambda(\mu_0) > \frac{3}{8\pi^2} y_t^4 \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right). \quad (6.27)$$

Se relacionarmos $m_h^2 = 2\lambda v^2$ com $M_W^2 = g_2^2 v^2/4$ encontraremos:

$$\lambda = \frac{g_2^2 m_h^2}{8M_W^2}, \quad (6.28)$$

e se a escala de energia for pequena o suficiente será possível utilizar a constante de Fermi $G_F = \sqrt{2}g_2^2/8M_W^2 \sim 1.2 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ para escrever

$$\lambda(\mu_0) = \frac{G_F m_h^2(\mu_0)}{\sqrt{2}}, \quad \mu_0 \text{ na escala eletrofraca} \quad (6.29)$$

tomando o devido cuidado de lembrar que esse resultado só é válido quando a escala de energia avaliada é próxima à da eletrofraca. Nesse caso, substituindo (6.29) em (6.27)

encontraremos o limite inferior para a massa do Higgs:

$$m_h(\mu_0) > \left[\frac{3}{4\sqrt{2}\pi^2 G_F} y_t^4 \log \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right) \right]^{1/2}. \quad (6.30)$$

Mas se μ for muito maior que a escala eletrofraca, não poderemos mais desprezar o running de y_t , invalidando o resultado (6.30).

Polo de Landau

Na última seção utilizamos a estabilidade do vácuo para estimar o limite inferior que se esperaria obter para a massa do bóson de Higgs. Agora vamos analisar qual seria o limite superior. Toda essa discussão é de enorme importância, pois antes de se medir a massa física do Higgs, tudo o que os físicos tinham eram os valores estimados para os limites da massa desse escalar fundamental, assim os experimentais sabiam onde procurar.

Caso $m_h^{físico}$ fosse muito maior que os 125 GeV medidos no LHC, teríamos um dos possíveis cenários apresentados pela figura 6.8, mostrando que para $m_h \geq 300$ GeV o vácuo sempre seria estável, afinal o fluxo de λ seria crescente.

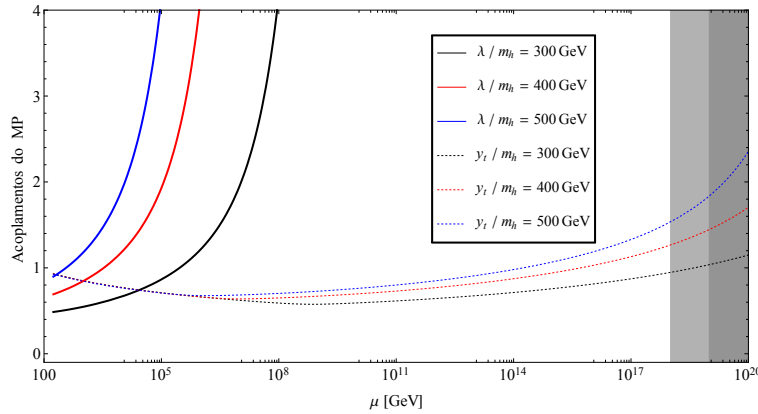


Figura 6.8.: Alteração no fluxo do grupo de renormalização de λ e de y_t em função da massa física do Higgs. Os outros acoplamentos praticamente não se alteram, por isso os omitimos neste gráfico.

A figura 6.8 mostra que existem valores para $m_h^{físico}$ acima dos quais $\lambda(\mu)$ prevalecerá sobre os outros acoplamentos a partir de uma determinada escala μ . Nesse cenário, para estimar o limite superior de m_h , é útil manter apenas o λ como termo dominante em (6.15). A solução analítica desse problema é fácil de obter:

$$\frac{d\lambda}{d \log \mu} = 24\lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\mu) = \frac{\lambda(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda(\mu_0)}{2\pi^2} \log \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)} \quad (6.31)$$

Esse valor diverge no chamado *polo de Landau*,

$$\mu_{PL} = \mu_0 e^{2\pi^2/3\lambda(\mu_0)}, \quad (6.32)$$

e é claro que antes de chegarmos nessa escala energética o valor de λ já estará tão grande que não será mais válido estudar teoria quântica de campos perturbativamente. Logicamente não faz sentido λ divergir dentro do limite de validade da teoria, por isso, assumiremos que $\mu_{PL} > \Lambda$.⁸ Ou seja,

$$\lambda(\mu_0) < \frac{2\pi^2}{3 \log\left(\frac{\Lambda}{\mu_0}\right)}. \quad (6.33)$$

Substituindo (6.29) em (6.33) teremos:

$$m_h(\mu_0) < \left(\frac{2\sqrt{2}\pi^2}{3G_F \log(\Lambda/\mu_0)} \right)^{1/2}, \quad (6.34)$$

e mostramos na discussão do ajuste fino (seção 3.3) que ao assumir $\Lambda \sim 1 \text{ TeV}$ para o MP, a teoria torna-se natural, então podemos usar a inequação acima para estimar o limite superior de $m_h(\mu_0)$. Também é possível analisar esse limite para $\Lambda \sim \Lambda_{Plank}$ apenas para ter uma estimativa bastante grosseira, afinal quando λ assume valores muito altos a teoria de perturbação deixa de valer. Adotando $\mu_0 = v = 246 \text{ GeV}$,

$$m_h(v) < \left(\frac{2\sqrt{2}\pi^2}{3G_F \log(\Lambda/v)} \right)^{1/2} \sim \begin{cases} \mathcal{O}(140) \text{ GeV}, & \Lambda \sim \Lambda_{Plank} \\ \mathcal{O}(740) \text{ GeV}, & \Lambda \sim 1 \text{ TeV} \end{cases} \quad (6.35)$$

Esse resultado mostra que quanto mais pesado fosse o m_h detectado, menor seria a escala de energia onde poderia aparecer física além do MP. O valor medido no LHC de $m_h \sim 125 \text{ GeV}$ deixa o cenário de possibilidades para Λ em aberto sendo que, até o momento, o LHC já conseguiu observar eventos em escalas de até 1 TeV, mas ainda não encontrou novidade física.

Para melhor visualização dos resultados anteriores é possível usar as inequações (6.30) e (6.34) – desde que Λ seja pequeno – para gerar um gráfico das regiões proibidas para a massa renormalizada do Higgs na escala eletrofraca em função de Λ . Para gerar esses limites com Λ em escalas quaisquer precisamos de soluções numéricas considerando o running de todos os parâmetros.

O gráfico da figura 6.9 foi obtido a partir da solução numérica das EDO's do apêndice H, e a partir dele tiramos a seguinte conclusão: a regularização dimensional nos permite encontrar as equações do grupo de renormalização e, a partir delas, estimarmos valores para a massa do Higgs. Esses valores não são tão grandes quanto as correções quadráticas da regularização por cutoff, no entanto, estimar um valor menor para m_h

⁸Podemos evitar o Polo de Landau trivialmente requerendo $\lambda(\mu_0) = 0$ em (6.31), mas isso resultaria em uma teoria não-interagente e, portanto, sem quebra espontânea de simetria.

não torna a teoria automaticamente natural, pois, se alguma partícula existir na escala UV, a interação com o Higgs será proporcional à massa ao quadrado da nova partícula, gerando assim uma divergência quadrática. E caso nenhuma novidade exista até a escala de Planck a figura 6.9 nos mostra que para termos $\Lambda \sim 10^{19} \text{ GeV}$, a massa do Higgs deveria apresentar algum valor entre $130 \text{ GeV} < m_h < 144 \text{ GeV}$, sendo muito pequeno comparado com a escala Λ , ou seja, o bóson de Higgs não teria simetria protegendo sua massa e, ainda assim, ela seria pequena. Se os detectores do LHC tivessem encontrado um $m_h \geq 700 \text{ GeV}$ a figura 6.9 mostra que Λ estaria na mesma escala da massa e, assim, o MP seria natural.

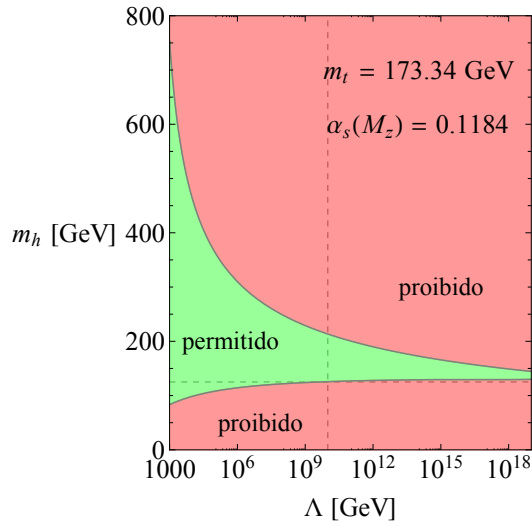


Figura 6.9.: Limites teóricos para a massa do bóson de Higgs do MP como função da escala Λ onde aparece nova física. O limite superior evita o polo de Landau até a escala Λ , já o limite inferior preserva a estabilidade do vácuo. As linhas tracejadas mostram que para $m_h \sim 125 \text{ GeV}$ teremos $\Lambda \sim 10^{10} \text{ GeV}$.

Mas a realidade é mais desafiadora. Com $m_h \sim 125 \text{ GeV}$ muitas perguntas continuam sem respostas e, sobretudo, o problema da naturalidade persiste. No próximo capítulo veremos como a introdução de uma simetria na Lagrangiana do MP poderia resolver a hierarquia da massa do Higgs.

7

SUSY, a Supersimetria

Neste capítulo discutiremos brevemente uma das propostas de resolução do problema da hierarquia conhecida como Supersimetria. Apresentaremos apenas a ideia geral, e para aqueles que tiverem maior interesse no assunto indico as referências [27, 28].

Nos capítulos anteriores vimos que a massa “naturalmente” esperada para o bóson de Higgs fundamental parece estar muito mais próxima da escala de Planck que do valor experimentalmente verificado. De acordo com o resultado (4.67) as correções quânticas à massa desse escalar são sensíveis tanto às massas das partículas que interagem com o campo de Higgs quanto ao cutoff da teoria do MP.

Também discutimos que a massa dos férmions (exceto neutrinos) não apresentam divergências quadráticas por estarem protegidas pela simetria quiral. Quanto aos bósons de gauge, as divergências quadráticas não aparecem porque o método de regularização por cutoff é incompatível com a invariância de gauge, pois gera termos de massa proibidos pela simetria da Lagrangiana e, justamente por isso, é justificável adotar outro método de regularização (dimensional, por exemplo) onde a divergência Λ^2 não aparece. No caso escalar, não há razão para se refutar a regularização por cutoff e para que a pequena massa física do Higgs seja um resultado naturalmente esperado imagina-se que exista alguma simetria impedindo o crescimento descontrolado de sua massa por correções quânticas, sendo que a tática para descrever essa nova simetria é simples de entender: se voltarmos ao resultado (4.67) notaremos que *a correção à massa gerada pelos bósons tem sinal oposto à correção gerada pelos férmions*. Portanto, conseguiríamos eliminar a divergência quadrática se **para cada férmion existisse um bóson apresentando os mesmos números quânticos – com exceção do spin – e vice-versa**. Essa simetria relacionando férmions e bósons é denominada supersimetria.

Com isso, em extensões supersimétricas do MP cada partícula pertence a um multipletto (denominado supermultipletto) onde os elementos se relacionam por transformações supersimétricas. Sendo Q o gerador dessas transformações, teremos

$$Q|boson\rangle = |fermion\rangle, \quad Q|fermion\rangle = |boson\rangle \quad (7.1)$$

Os componentes de um mesmo supermultipletto denominam-se superparceiros (ou parceiros supersimétricos) e devem diferir por $1/2$ spin. Para entender as consequências dessa fenomenologia precisamos identificar cada um dos parceiros supersimétricos das partículas conhecidas do MP e nomeá-las adequadamente, sendo importante verificar se alguma partícula conhecida é a superparceira de outra já encontrada. Poderíamos nos perguntar se o fóton (spin-1) compõe um supermultipletto com o neutrino (spin-1/2) e a resposta é que eles não são parceiros supersimétricos porque o neutrino é um dubleto por transformações $SU(2)_L$ enquanto o fóton é um singlete. Com exceção do spin, todos os outros números quânticos devem coincidir. Pelo mesmo argumento, férmions de mão-esquerda, por apresentarem transformações de gauge diferentes dos férmions de mão-direita, terão parceiros supersimétricos distintos. Aos parceiros de spin-0 dos férmions convencionou-se denominá-los por *sfermions*, uma forma abreviada de “scalar-fermion”. Pela mesma lógica, parceiros de quarks são *squarks* e dos leptons são os *sleptons*. Multiplettos contendo férmions e sfermions denominam-se **supermultiplettos quirais**. O Higgs¹, por ser uma partícula de spin-0, também constitui um supermultipletto quiral com seu parceiro fermiônico denominado *Higgsino*. Outros supermultiplettos possíveis, referidos como **supermultiplettos de gauge**, constituem-se por bósons de gauge (spin-1) e seus respectivos parceiros supersimétricos fermiônicos (spin 1/2), os *gauginos*. A principal diferença entre os férmions do MP e os gauginos está no fato desses últimos apresentarem a mesma transformação de gauge independente da quiralidade, pois assim como os bósons de gauge, devem se transformar na representação adjunta do grupo de simetria. Como a representação adjunta de um grupo de gauge é sempre sua própria conjugada, os gauginos de mão-direita se transformarão igualmente aos de mão-esquerda, portanto terão o mesmo bóson de gauge como parceiro supersimétrico.

Simbolicamente, os parceiros supersimétricos das partículas do MP são representados pelas mesmas letras dessas últimas com a adição do ($\tilde{}$), ou seja, o *selectron* de mão-direita seria escrito $\tilde{e}_R$. Lembre-se que apenas férmions apresentam distinções entre quiralidade, portanto a denominação $\tilde{e}_R$ é apenas para fazer referência ao seu superparceiro e não tem relação alguma com a helicidade da partícula escalar.

As interações de gauge dos componentes de um supermultipletto também são as mesmas,

¹Estamos chamando de Higgs o dubleto escalar antes da quebra espontânea de simetria evidenciado em (2.64). Ou seja,

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\sqrt{2}\phi^+ \\ v + (h + i\phi^Z) \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

assim $\tilde{u}_L$ e $\tilde{d}_L$ se acoplam ao bóson $W^\pm$, enquanto $\tilde{u}_R$ e $\tilde{d}_R$ não². Apesar da sistemática construtiva da teoria supersimétrica parecer simples, se não for feita com cuidado problemas graves aparecerão, como por exemplo o surgimento de termos anômalos para a simetria eletrofraca. A maneira mais simples de construir uma teoria supersimétrica consistente resultou na MSSM (*Minimal Supersymmetric Standard Model*).

Nomes		spin 0	spin 1/2	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
squarks, quarks ($\times 3$ famílias)	Q	$(\tilde{u}_L \ \tilde{d}_L)$	$(u_L \ d_L)$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	$\bar{u}$	$\tilde{u}_R^*$	$u_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	$\bar{d}$	$\tilde{d}_R^*$	$d_R^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
sleptons, leptons ($\times 3$ famílias)	L	$(\tilde{\nu} \ \tilde{e}_L)$	$(\nu \ e_L)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	$\bar{e}$	$\tilde{e}_R^*$	$e_R^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgs, Higgsinos	H_u	$(H_u^+ \ H_u^0)$	$(\tilde{H}_u^+ \ \tilde{H}_u^0)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$
	H_d	$(H_d^0 \ H_d^-)$	$(\tilde{H}_d^0 \ \tilde{H}_d^-)$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Tabela 7.1.: *Supermultipletos quirais no MSSM. As partículas de spin-0 são escalares complexos.*

Nomes	spin 1/2	spin 1	$SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
gluino, gluon	$\tilde{g}$	g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
winos, W bosons	$\tilde{W}^\pm \ \tilde{W}^0$	$W^\pm \ W^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
bino, B bosons	$\tilde{B}^0$	B^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabela 7.2.: *Supermultipletos de gauge no MSSM.*

²Isto está explícito na equação (2.97).

7.1. MSSM, a teoria Supersimétrica Mínima do Modelo Padrão

Diferentemente do MP, apenas um dubleto de Higgs não é suficiente para sustentar a Supersimetria; é necessário adicionar um segundo dubleto de Higgs, de modo a termos:

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}, \quad H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

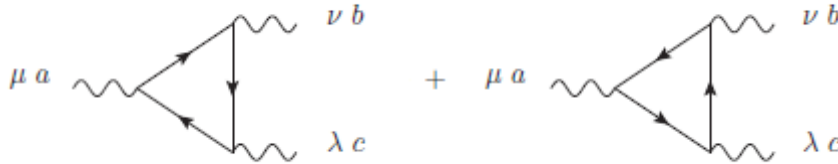
Precisa-se, pelo menos, de dois dubletos de Higgs para evitar que a simetria eletrofraca tenha anomalia de gauge, o que a tornaria inconsistente como teoria quântica.

Para que o Modelo Padrão seja uma teoria livre de anomalia devemos verificar que os diagramas triangulares envolvendo a simetria $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ cancelam os termos anômalos.

O termo anômalo de um diagrama triangular com três bósons de gauge $A_\mu^a, A_\nu^b, A_\lambda^c$ é proporcional a [2]

$$\text{Tr} [\gamma^5 t^a \{t^b, t^c\}] = \text{Tr} [t^a \{t^b, t^c\}]_R - \text{Tr} [t^a \{t^b, t^c\}]_L \quad (7.4)$$

onde t^i são os geradores da simetria e o traço é calculado sobre todos os férmions envolvidos (R para mão-direita e L para mão-esquerda). O anticomutador vem da soma de dois diagramas triangulares com os férmions circulando em sentidos opostos.



O fator γ^5 registra que a anomalia está associada às correntes quirais, e pela convenção que estamos utilizando³ esse fator atribui (-1) aos férmions de mão-esquerda e $(+1)$ aos de mão-direita. Nesse sentido, não apresentarão anomalias as simetrias em que bósons de gauge se acoplam igualmente a férmions de quiralidade distintas, como é o caso da QCD e QED, $SU(3)_C$ e $U(1)_{em}$. Portanto, devemos investigar o comportamento da anomalia na simetria eletrofraca, $SU(2)_L \times U(1)_Y$, para entender como a existência de um único dubleto de Higgs comprometeria a teoria supersimétrica.

Para diagramas triangulares do tipo $SU(2)_L^3$ podemos usar a propriedade das matrizes de Pauli, $\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta^{ab}\mathbb{1}$, implicando que o traço de (7.4) é proporcional a

³Ver capítulo “Notações e Convenções”.

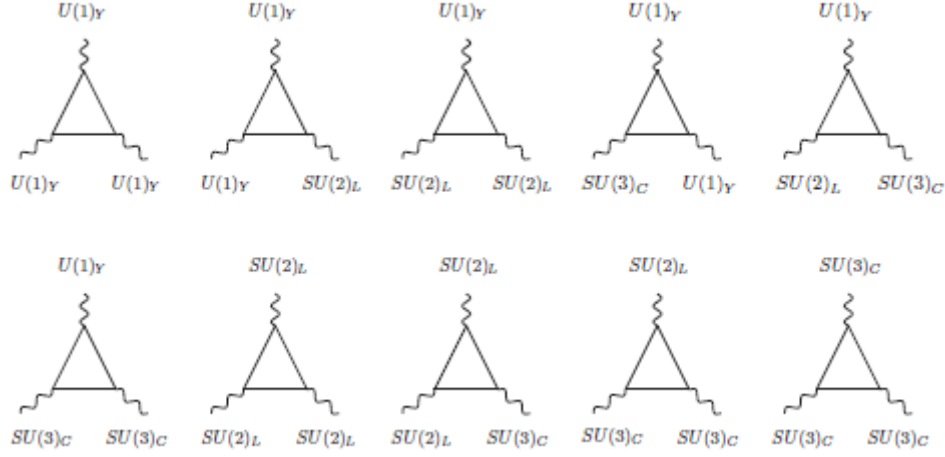


Figura 7.1.: Diagramas triangulares que podem gerar anomalias no Modelo Padrão, desconsiderando a gravidade.

$\frac{1}{4}\text{Tr}[\sigma^a]\delta^{bc} = 0$, ou seja, não existe anomalia $SU(2)^3$ em qualquer teoria quântica. A princípio poderia existir anomalia $SU(3)_C^3$, mas como a QCD apresenta simetria direita-esquerda a expressão (7.4) se anulará.

Agora vamos analisar as anomalias mistas. Toda anomalia do tipo $SU(N)U(1)_Y^2$ apresenta termos proporcionais a $Y_f^2\text{Tr}[t^a\{\mathbb{1}, \mathbb{1}\}] = 2Y_f^2\text{Tr}[t^a] = 0$, onde Y_f é a hipercarga do férmion. Portanto, anomalias do tipo $SU(N)U(1)^2$ sempre se anulam. As anomalias contendo apenas um bóson $SU(3)_C$ ou $SU(2)_L$ serão proporcionais a

$$\text{Tr}[\sigma^a] = 0 \quad \text{ou} \quad \text{Tr}[\lambda^a] = 0 \quad (7.5)$$

Com isso, resta-nos analisar as anomalias $SU(3)_C^2U(1)_Y$, $SU(2)_L^2U(1)_Y$ e $U(1)_Y^3$. Para o primeiro caso apenas os quarks participam das interações e a eq.(7.4) fica

$$\text{Tr}[\gamma^5 t^a \{t^b, Y\}] = 2\text{Tr}[\gamma^5 t^a t^b Y] = \delta^{ab} \sum_q (Y_{q_R} - Y_{q_L}) \quad (7.6)$$

onde usamos que $\text{Tr}[t^a t^b] = \frac{1}{2}\delta^{ab}$. Substituindo os valores das hipercargas apresentadas em (2.1) teremos

$$\begin{aligned} \delta^{ab} \sum_{q_R, q_L} (Y_{q_R} - Y_{q_L}) &= \delta^{ab} [3(Y_{U_R} + Y_{D_R}) - 3(Y_{U_L} + Y_{D_L})] \\ &= \delta^{ab} \left[3^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) - 3^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

o fator 3^2 deve-se às 3 gerações de famílias e às 3 possíveis cores associadas aos quarks.

Similarmente, a anomalia $SU(2)_L^2 U(1)_Y$ terá apenas férmions de mão-esquerda participando das interações e será proporcional a

$$\begin{aligned}
 -\text{Tr} \left[t^a \{t^b, Y\} \right]_L &= -2\text{Tr} \left[t^a t^b Y \right]_L = -\delta^{ab} \sum_{f_L} Y_{f_L} \\
 &= -\delta^{ab} 3 \left[3(Y_{U_L} + Y_{D_L}) + (Y_{l_L} + Y_{\nu_L}) \right] \\
 &= -3\delta^{ab} \left[3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Quanto à anomalia $U(1)_Y^3$, o termo anômalo ficaria

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} [Y \{Y, Y\}]_R - \text{Tr} [Y \{Y, Y\}]_L &= 2 \sum_{f_R} Y_{f_R}^3 - 2 \sum_{f_L} Y_{f_L}^3 \\
 &= 2 \left(3Y_{l_R}^3 + 3^2 Y_{U_R}^3 + 3^2 Y_{D_R}^3 \right) - 2 \left(3Y_{\nu_L}^3 + 3Y_{l_L}^3 + 3^2 Y_{U_L}^3 + 3^2 Y_{D_L}^3 \right) \\
 &= 6 \left[3 \left(Y_{U_R}^3 + Y_{D_R}^3 - Y_{U_L}^3 - Y_{D_L}^3 \right) + \left(Y_{l_R}^3 - Y_{\nu_L}^3 - Y_{l_L}^3 \right) \right] \\
 &= 6 \left\{ 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^3 + \left(-\frac{1}{3} \right)^3 - 2 \left(\frac{1}{6} \right)^3 \right] + \left[(-1)^3 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right)^3 \right] \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

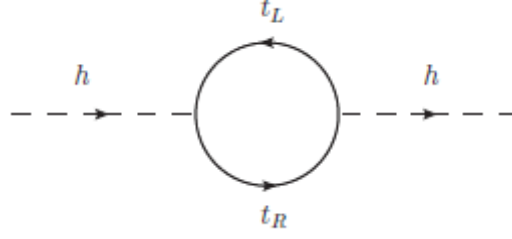
Ou seja, todos os termos anômalos se anulam no Modelo Padrão.

O ponto importante de se destacar nessa discussão sobre anomalias recai na condição para o cancelamento das anomalias $SU(2)_L^2 U(1)_Y$ e $U(1)_Y^3$ ligadas à simetria eletrofraca. Note que as expressões (7.8) e (7.9) se anularam somente porque o número de gerações dos léptons é igual ao dos quarks. Isso significa que durante a construção da extensão supersimétrica do MP, se considerássemos a existência de um único dubleto de Higgs incluiríamos apenas um dubleto fermiônico (Higgsino) como parceiro supersimétrico. Esse Higgsino teria a mesma hipercarga do Higgs e, por ser um férmion, deveríamos incluí-lo nos cálculos das anomalias anteriores. O resultado é que apenas as expressões (7.8) e (7.9) não se anulariam, pois não haveria mais simetria de gerações. A solução mais simples para retomar o comportamento livre de anomalia da supersimetria é incluir um segundo dubleto de Higgs com hipercarga contrária ao do primeiro dubleto, tal como apresentado na Tabela 7.1. O Higgs neutro, h , do Modelo Padrão será uma combinação linear de H_u^0 e H_d^0 .

7.2. Correção à massa do Higgs

Vimos no capítulo 4 que o Higgs físico recebe correções quadraticamente divergentes em sua massa ao quadrado, m_h^2 . Agora vamos analisar as consequências da adição dos parceiros supersimétricos para a correção dessa massa. Adotando as mesmas condições

de renormalização usadas no capítulo 4 teremos que a contribuição mais relevante para a correção da massa do Higgs provém do loop do quark top.



Já calculamos esse diagrama anteriormente, e sua parte divergente é

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\text{1PI}}^t(p^2) &= \frac{g_2^2}{M_W^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{N_c m_t^2}{k^2 - m_t^2} - \frac{2N_c m_t^4}{(k^2 - m_t^2)^2} + p^2 \frac{N_c m_t^2}{2(k^2 - m_t^2)^2} \right] \\ &= 2y_t^2 N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[-\frac{1}{k^2 - m_t^2} - \frac{2m_t^2}{(k^2 - m_t^2)^2} + p^2 \frac{1}{2(k^2 - m_t^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (7.10)$$

Agora devemos considerar a interação do Higgs com os dois *stops* que aparecem na teoria estendida. Escrevemos a Lagrangiana da seguinte forma

$$\mathcal{L}_{\tilde{t}h} = -\lambda_{s_i} h^2 \tilde{t}_i^\dagger \tilde{t}_i - \kappa_{s_i} h t_i^\dagger \tilde{t}_i - \tilde{m}_{t_i}^2 \tilde{t}_i^\dagger \tilde{t}_i \quad (7.11)$$

onde $i = L, R$ diferencia os parceiros supersimétricos do top de mão-direita e esquerda. Essa Lagrangiana acrescenta quatro novos diagramas.

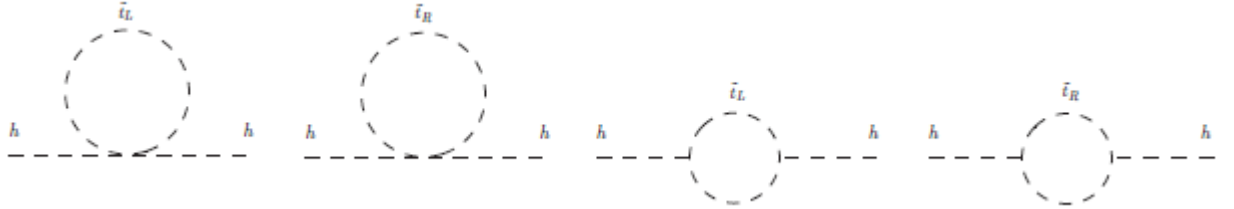


Figura 7.2.: Diagramas a 1-loop da auto-energia do Higgs a partir da interação com *stops*.

Os dois primeiros diagramas da figura 7.2 são facilmente calculados:

$$-i\Pi_{\text{1PI}}^{\tilde{t}_i} = \frac{1}{2}(-2i\lambda_{s_i})N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - \tilde{m}_{t_i}^2} = \lambda_{s_i} N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \tilde{m}_{t_i}^2} \quad (7.12)$$

O 1/2 que aparece no início da conta corresponde ao fator de simetria.

Como a interação de Higgs independe da quiralidade, teremos que $\lambda_{s_R} = \lambda_{s_L}$. Além disso, a supersimetria exige que $m_t = \tilde{m}_{t_i}$ e $\lambda_{s_i} = y_t^2$. Substituindo esses valores em (7.12) verificamos que a soma desses dois primeiros diagramas cancela o primeiro termo de (7.10), que corresponde justamente à divergência quadrática. Portanto, a inclusão dos parceiros supersimétricos já garante o desaparecimento da divergência quadrática, uma vez que esse cancelamento ocorre para todas as partículas.

Os dois últimos diagramas da Fig.7.2 apresentam a seguinte expressão:

$$-i\Pi_{\text{IPI}}^{\tilde{t}_i,2}(p^2) = \frac{1}{2}(-i\kappa_{s_i})^2 N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{[k^2 - \tilde{m}_{t_i}^2]} \frac{i}{[(k+p)^2 - \tilde{m}_{t_i}^2]} \quad (7.13)$$

Mas também vimos no capítulo 4 que, para esses diagramas, não existem divergências proporcionais ao momento externo⁴, portanto simplificamos a última expressão executando a integral da seguinte forma,

$$-i\Pi_{\text{IPI}}^{\tilde{t}_i,2}(p^2) = \frac{1}{2}\kappa_{s_i}^2 N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \tilde{m}_{t_i}^2)^2} + \text{termos finitos} \quad (7.14)$$

Pelo mesmo argumento anterior, $\kappa_{s_R} = \kappa_{s_L}$. E a supersimetria exige que $m_t = \tilde{m}_{t_i}$ e $\kappa_{s_i}^2 = 4y_t^2 m_t^2$. Com isso, o termo divergente proveniente da soma dos dois últimos diagramas da Fig.7.2 cancela exatamente o segundo termo de (7.10), que correspondia a uma divergência logarítmica proporcional à massa ao quadrado da partícula. O cancelamento desse termo é de fundamental importância, pois já vimos na eq.(5.51) que se a massa da partícula estivesse na escala UV a divergência quadrática seria restaurada.

O último termo de (7.10) não é cancelado, mas também não representa um problema dado que sua divergência logarítmica não é proporcional a termos de massa ao quadrado.

Ou seja, se a supersimetria fosse exata ela eliminaria as divergências responsáveis pelo problema da hierarquia, mas já é certo que essa simetria, se existir, está quebrada na escala eletrofraca, pois nenhuma partícula supersimétrica ainda foi encontrada e seria muito fácil detectar partículas como o *selectron* e o *photino* (partículas leves). O problema não está no fato da simetria estar quebrada, mas sim na escala onde ela se quebra. Mesmo apresentando massas distintas, somente por existirem parceiros supersimétricos para cada partícula da natureza já garante o cancelamento do primeiro termo de (7.10), porém como o segundo termo é proporcional ao quadrado da massa, quanto maiores forem as massas das partículas supersimétricas, maior será a correção à massa do Higgs e novamente recairemos no problema da hierarquia. Como o LHC já excluiu uma enorme faixa de energia onde se esperaria observar partículas supersimétricas, a supersimetria já não bastará para resolver totalmente a problemática em torno do valor da massa do Higgs.

⁴Verificamos isso escrevendo o integrando em série de Taylor onde p^2 é a variável. Ao fazer isso, fica claro que os termos que acompanham as potências de p^2 são finitos.

8

Conclusão

O sucesso do Modelo Padrão é consequência da incrível correspondência entre suas previsões teóricas e os resultados experimentais. Ainda assim, sabe-se que se trata de uma teoria efetiva que precisa ser estendida para comportar fenômenos carentes de explicação teórica como a gravidade quântica, a natureza da matéria escura e o valor da massa do Higgs. O problema da hierarquia vincula-se a este último, e uma extensão do Modelo Padrão que propõe uma solução para esse problema é a Supersimetria.

A raiz do problema da hierarquia está na dificuldade em justificar o pequeno valor medido experimentalmente para a massa do bóson de Higgs, uma vez que no MP essa massa é extremamente sensível à escala de energia ultravioleta. De fato, já é intrigante que o Higgs seja a única partícula escalar fundamental, pois a característica das partículas escalares é justamente possuírem massas com valores de energia próximos ao limite de validade da teoria. Essa característica decorre da inexistência, no MP, de simetrias de gauge que protejam a massa dos escalares. Assim, quanto maior for o cutoff do MP, maior será a evidência da não-naturalidade técnica dessa teoria, mas podemos garantir sua naturalidade contanto que o limite do cutoff físico esteja na escala TeV, e, se assim o for, esperamos observar evidências de nova física nas escalas de energia já exploradas pelos aceleradores modernos, mas até agora nenhuma novidade foi observada, sugerindo que o MP seja não-natural.

A falta de evidências experimentais que comprovem, refutem ou deem pistas de teorias estendidas do Modelo Padrão permite adotarmos um ajuste fino como medida apelativa para trazer a massa do Higgs à escala eletrofraca. Outra medida radical que poderia eliminar o problema da hierarquia seria assumir que a divergência quadrática da regularização por *cutoff* não tem interpretação física, visto que ela não aparece na regularização dimensional, mas isso só resolve o problema se partirmos da premissa que não existam

novas partículas até a escala de Planck, caso contrário a eq.(5.51) nos mostra que a interação do Higgs com uma nova partícula, cuja massa (cutoff físico) esteja na escala UV, acrescenta correções quadráticas dessa mesma escala à massa ao quadrado do Higgs, mesmo na regularização dimensional.

A SUSY, por sua vez, é uma tentativa de tornar o MP uma teoria natural incorporando uma simetria adicional que protege a massa do bóson de Higgs, caracterizando-se como uma das principais candidatas a resolver o problema da hierarquia. No entanto, apesar de se tratar de uma teoria bastante elegante, a supersimetria ainda não foi confirmada experimentalmente e, mesmo que seja, sua quebra explícita será tão grande que a escala do cutoff físico poderá manter o problema da hierarquia.

O Modelo Padrão está marcado pelo sucesso na descrição dos fenômenos das pequenas escalas de comprimento e os esforços atuais concentram-se na elaboração de modelos estendidos que compartilhem desse mesmo sucesso e explorem questões sem respostas dentro do MP. Para isso é fundamental que apareçam novidades experimentais, pois serão essas evidências que fornecerão os meios pelos quais os físicos teóricos se apoiarão na elaboração dos novos modelos e teorias. Por ora, o cenário atual sugere que não existe fenomenologia inédita até quase 1 TeV, aumentando gradativamente o limite inferior para o cutoff físico do MP.

A

Cálculo de $m^2\delta_{m^2}$ de um campo escalar a *1-loop* fermiônico com interação de Yukawa

Considere uma teoria em que um campo escalar interage somente com férmions por meio de acoplamentos de yukawa e apresenta a seguinte Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu\phi_0|^2 - \underbrace{V(\phi_0)}_{m_0^2\phi_0^\dagger\phi_0+\dots} + y_0\bar{\psi}_0\psi_0\phi_0, \quad (\text{A.1})$$

onde o índice “0” significa que os parâmetros e campos não estão renormalizados.

Para escrever essa Lagrangiana em termos de campos e parâmetros renormalizados podemos adotar a seguinte definição:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= Z_\phi^{\frac{1}{2}}\phi, & m_0^2 &= Z_{m^2}m^2, \\ Z_\phi &= 1 + \delta_\phi, & Z_{m^2} &= 1 + \delta_{m^2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Assim,

$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu\phi|^2 - m^2\phi^\dagger\phi + \underbrace{\delta_\phi|D_\mu\phi|^2 - (\delta_\phi + \delta_{m^2})m^2\phi^\dagger\phi}_{\text{contratermos}} + \dots \quad (\text{A.3})$$

onde m e ϕ são a massa e o campo escalar renormalizados.

Portanto,

$$\delta_{m^2} m^2 \propto \Lambda^2. \quad (\text{A.8})$$

- $m^2 \delta_{m^2}$ apresenta divergência quadrática.

Conclusão: sempre ocorrerão divergências quadráticas corrigindo a massa de escalares fundamentais na interação de yukawa.

B

Simetria Quiral na QED

Partindo da Lagrangiana da QED e assumindo que todos os termos são permitidos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QED}} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)i\gamma^\mu D_\mu(\psi_L + \psi_R) - m_0\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_R + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_R \\ &\quad - m_0\bar{\psi}_L\psi_L - m_0\bar{\psi}_L\psi_R - m_0\bar{\psi}_R\psi_L - m_0\bar{\psi}_R\psi_R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{B.1}$$

A partir da base quiral

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{B.2}$$

escrevemos os seguintes operadores de projeção

$$P_L = \left(\frac{1 - \gamma^5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_R = \left(\frac{1 + \gamma^5}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tag{B.3}$$

Com isso,

$$P_L P_R = P_R P_L = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\gamma^\mu P_{L,R} = P_{R,L} \gamma^\mu \quad (\text{B.6})$$

Essas relações nos permitem identificar as seguintes igualdades:

$$\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma^0 = (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_R = \bar{\psi} P_R \quad (\text{B.7})$$

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma^0 = (P_R \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_R \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 P_L = \bar{\psi} P_L \quad (\text{B.8})$$

- $\bar{\psi}_L \psi_L = \bar{\psi} P_R P_L \psi = 0$
- $\bar{\psi}_R \psi_R = \bar{\psi} P_L P_R \psi = 0$
- $\bar{\psi}_L \psi_R = \bar{\psi} P_R P_R \psi = \bar{\psi} \psi_R$
- $\bar{\psi}_R \psi_L = \bar{\psi} P_L P_L \psi = \bar{\psi} \psi_L$

Ou seja, dentre os termos de massa somente $\bar{\psi}_R \psi_L$ e $\bar{\psi}_L \psi_R$ não se anulam em (B.1). Isso significa que se os férmions de mão direita se transformarem diferentemente dos férmions de mão esquerda, a Lagrangiana não será invariante por transformações de gauge correspondentes à simetria quiral. Costuma-se dizer que a simetria quiral proíbe a massa dos férmions.

Agora vamos analisar outro termo,

$$\begin{aligned} \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi &= (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu D_\mu (\psi_L + \psi_R) \\ &= \bar{\psi} (P_R + P_L) \gamma^\mu D_\mu (P_L + P_R) \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu (P_L + P_R) (P_L + P_R) \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu (P_L P_L + P_R P_R) \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu P_L \psi_L + \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu P_R \psi_R \\ &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi} P_L \gamma^\mu D_\mu \psi_R \\ &= \bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Portanto não há termos de mistura de quiralidade.

A Lagrangiana com simetria quiral fica, então

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}_L i\gamma^\mu D_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu D_\mu \psi_R - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{B.10})$$

onde os férmions de mão esquerda são completamente distintos dos de mão direita.

C

Cálculo do termo no gauge R_ξ

$$-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2\xi}G^2$$

Na teoria GWS com quebra espontânea de simetria, podemos escrever:

$$\begin{aligned} D_\mu\phi_i &= \partial_\mu\phi_i + gA_\mu^a T_{ij}^a \phi_j = \partial_\mu(\phi_{0i} + \chi_i) + gA_\mu^a T_{ij}^a (\phi_{0j} + \chi_j) \\ &= \partial_\mu\chi_i + gA_\mu^a T_{ij}^a \chi_j + gA_\mu^a F_i^a. \end{aligned} \quad (C.1)$$

Logo,

$$\begin{aligned} (D_\mu\phi_i)^2 &= (\partial_\mu\chi_i + gA_\mu^a T_{ij}^a \chi_j + gA_\mu^a F_i^a) (\partial^\mu\chi_i + gA^\mu{}^b T_{in}^b \chi_n + gA^\mu{}^{b\mu} F_i^b) \\ &= (\partial_\mu\chi_i)^2 + gA^{b\mu}\partial_\mu\chi_i T_{in}^b \chi_n + gA^{b\mu} F_i^b \partial_\mu\chi_i + gA_\mu^a \partial^\mu\chi_i T_{ij}^a \chi_j \\ &\quad + g^2 A_\mu^a A^{b\mu} T_{ij}^a T_{in}^b \chi_j \chi_n + g^2 A_\mu^a A^{b\mu} F_i^b T_{ij}^a \chi_j + gA_\mu^a F_i^a \partial^\mu\chi_i \\ &\quad + g^2 A_\mu^a A^{b\mu} F_i^a T_{ij}^b \chi_j + g^2 A_\mu^a A^{b\mu} F_i^a F_i^b. \end{aligned} \quad (C.2)$$

E mantendo apenas os termos quadráticos, veremos

$$\frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi_i)^2 + gA^{b\mu}F_i^b\partial_\mu\chi_i + \underbrace{g^2 F_i^a F_i^b}_{M_{ab}^2} A_\mu^a A^{b\mu}. \quad (C.3)$$

Quanto ao termo cinético da Lagrangiana dos bósons de gauge, vale lembrar que

$$F_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (C.4)$$

Então,

$$\begin{aligned}
 (F_{\mu\nu}^a)^2 &= \left[(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \right] \left[(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + g f^{amn} A^{m\mu} A^{n\nu} \right] \\
 &= \partial^2 A_\nu^a A^{a\nu} - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu^a A^{a\mu} + \partial_\mu A_\nu^a g f^{amn} A^{m\mu} A^{n\nu} - \partial_\nu \partial^\mu A_\mu^a A^{a\nu} \\
 &\quad + \partial^2 A_\mu^a A^{a\mu} - \partial_\nu A_\mu^a g f^{amn} A^{m\mu} A^{n\nu} + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{a\nu} \\
 &\quad - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\nu A^{a\mu} + g^2 f^{abc} f^{amn} A_\mu^b A_\nu^c A^{m\mu} A^{n\nu}.
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

E novamente mantendo apenas os termos quadráticos, teremos

$$-\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 = -\frac{1}{2}A_\mu^a \left(-g^{\mu\nu} \partial^2 + \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a. \tag{C.6}$$

Quanto ao termo de fixação de gauge,

$$(G^a)^2 = (\partial_\mu A^{a\mu})^2 - 2\xi g F_i^a \chi_i \partial_\mu A^{a\mu} + \xi^2 g^2 F_i^a F_j^a \chi_i \chi_j \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\xi}(G^a)^2 &= \underbrace{-\frac{1}{2\xi} \partial_\mu A^{a\mu} \partial_\nu A^{a\nu}}_{\frac{1}{2} A^{a\mu} \left(\frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \right) A_\nu^a} + g \partial_\mu A^{a\mu} F_i^a \chi_i - \frac{1}{2} \xi g^2 F_i^a F_j^a \chi_i \chi_j.
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Portanto, somando os resultados (C.3), (C.6) e (C.8) chega-se em:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}(D_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2\xi}G^2 \\
 &= -\frac{1}{2}A_\mu^a \left(\left[-g^{\mu\nu} \partial^2 + \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta^{ab} - g^2 F_i^a F_j^b g^{\mu\nu} \right) A_\nu^b \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_i)^2 - \frac{1}{2} \xi g^2 F_i^a F_j^a \chi_i \chi_j.
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

D

Massa física das partículas do MP

Segundo as medições mais atuais [1]:

$$m_h = 125.09 \pm 0.24 \text{ GeV}$$

$$M_W = 80.385(15) \text{ GeV}$$

$$M_Z = 91.1876(21) \text{ GeV}$$

$$m_e = 0.5109989461(31) \text{ MeV}$$

$$m_\mu = 105.6583745(24) \text{ MeV}$$

$$m_\tau = 1776.86(12) \text{ MeV}$$

$$m_u = 2.2^{+0.6}_{-0.4} \text{ MeV}$$

$$m_d = 4.7^{+0.5}_{-0.4} \text{ MeV}$$

$$m_s = 96^{+8}_{-4} \text{ MeV}$$

$$m_c = 1.27(3) \text{ GeV}$$

$$m_b(\overline{MS}) = 4.18^{+0.04}_{-0.03} \text{ GeV}$$

$$m_t = 173.21 \pm 0.52 \pm 0.71 \text{ GeV}$$

D

Em uma teoria não renormalizada definimos

$$\text{---}\overrightarrow{p}\text{---}\text{---}1PI\text{---}\text{---} = -i\Pi_{1PI}(p^2). \quad (\text{E.1})$$

O propagador nu do bóson de higgs, G^{bare} , pode ser relacionado com o propagador renormalizado, G^R , pela seguinte expressão

$$G^{bare} = Z_H G^R, \quad (\text{E.2})$$

e lembre-se:

$$\begin{array}{ll} G^{bare} & \rightarrow \text{infinito}, \\ G^R & \rightarrow \text{finito}, \end{array}$$

o que significa que a divergência do lado direito da equação (E.2) está contida no fator de renormalização Z_H .

Se os *tadpoles* forem iguais a zero (ou se a soma deles se anular)¹, o propagador

¹Para o higgs é possível adotar uma condição de renormalização em que a função completa de 1-ponto é nula, tal como fizemos no capítulo 4.

completo é obtido pela série de Dayson dos diagramas 1PI.

$$G^{bare} = Z_H G^R$$

$$\frac{i}{p^2 - (m_h^0)^2 - \Pi_{1PI}(p^2)} = Z_H \frac{i}{p^2 - m_{h,R}^2 - \Pi_{1PI,R}(p^2)} \quad (E.3)$$

onde m_h^0 é a massa nua e $m_{h,R}$ é a massa renormalizada. Ainda pela expressão acima, segue:

$$Z_H p^2 - Z_H \underbrace{(m_h^0)^2}_{Z_{m^2} m_{h,R}^2} - Z_H \Pi_{1PI}(p^2) = p^2 - m_{h,R}^2 - \Pi_{1PI,R}(p^2)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{1PI,R}(p^2) &= Z_H \Pi_{1PI}(p^2) + (1 - Z_H)p^2 + (Z_H Z_{m^2} - 1)m_{h,R}^2 \\ &= (1 + \delta_H)\Pi_{1PI}(p^2) - \delta_H p^2 + [(1 + \delta_H)(1 + \delta_{m^2}) - 1]m_{h,R}^2 \\ &= \underbrace{\Pi_{1PI}(p^2)}_{\Pi_\epsilon(p^2) + \Pi_f(p^2)} - \delta_H p^2 + (\delta_H + \delta_{m^2})m_{h,R}^2 + \dots \end{aligned} \quad (E.4)$$

onde explicitamos somente os termos não-nulos a ordem *1-loop*, sendo $\Pi_\epsilon(p^2)$ a parte que contém a divergência e $\Pi_f(p^2)$ a parte finita do propagador não-renormalizado. Em resumo, temos:

$$\Pi_{1PI,R}(p^2) \approx \Pi_\epsilon(p^2) + \Pi_f(p^2) - (p^2 - m_{h,R}^2)\delta_H^{(1)} + \delta_{m^2}^{(1)}m_{h,R}^2 \quad (E.5)$$

e os índices em $\delta_H^{(1)}$ e $\delta_{m^2}^{(1)}$ significam que esses valores estão calculados a *1-loop*.

Vamos truncar o resultado em ordem *1-loop* e como os termos $\delta_{m^2}^{(1)}$ e $\delta_H^{(1)}$ já começam nessa ordem podemos assumir $m_{h,R}^2 = (m_h^0)^2$, afinal

$$\delta_{m^2}^{(1)} m_{h,R}^2 = \delta_{m^2}^{(1)}((m_h^0)^2 + \dots) = \delta_{m^2}^{(1)}(m_h^0)^2 + \text{ordens maiores} \quad (E.6)$$

portanto, nos cálculos seguintes assumiremos $(m_h^0)^2 = m_{h,R}^2 \equiv m_h^2$.

Como $\Pi_{1PI,R}(p^2)$ é finito, o termo divergente $\Pi_\epsilon(p^2)$ em (E.5) deve cancelar as divergências de $-(p^2 - m_h^2)\delta_H^{(1)} + \delta_{m^2}^{(1)}m_h^2$; por isso fica conveniente definir $\Pi_\epsilon(p^2)$ da seguinte maneira,

$$\Pi_\epsilon(p^2) \equiv (p^2 - m_h^2)\Pi_\epsilon^A(p^2) + m_h^2 \Pi_\epsilon^B. \quad (E.7)$$

Reinserindo em (E.5)

$$\Pi_{1PI,R}(p^2) \approx \Pi_f(p^2) + (p^2 - m_h^2)(\Pi_\epsilon^A(p^2) - \delta_H^{(1)}) + (\Pi_\epsilon^B + \delta_{m^2}^{(1)})m_h^2. \quad (E.8)$$

Onde fica claro que eliminamos as divergências assumindo

$$\delta_H^{(1)} = \Pi_\epsilon^A(p^2) + \text{termos finitos}, \quad \delta_{m^2}^{(1)} = -\Pi_\epsilon^B + \text{termos finitos}. \quad (\text{E.9})$$

Além disso, analisando (E.5) também é possível verificar o seguinte:

$$\Pi_{\text{IPI},R}(m_h^2) \approx \Pi_\epsilon(m_h^2) + \Pi_f(m_h^2) + \delta_{m^2}^{(1)} m_h^2, \quad (\text{E.10})$$

ou seja, para manter $\Pi_{\text{IPI},R}(m_h^2)$ finito é necessário que

$$\delta_{m^2}^{(1)} m_h^2 = -\Pi_\epsilon(m_h^2) + \text{termos finitos}. \quad (\text{E.11})$$

Os termos finitos mudam de acordo com o esquema de renormalização utilizado.

F

Expressões úteis para calcular *loops* em regularização dimensional e por *cutoff*

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} = -\frac{i}{16\pi^2} \left[\Lambda^2 - m^2 \log \left(\frac{m^2 + \Lambda^2}{m^2} \right) \right] \quad (\text{F.1})$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} = \frac{i}{16\pi^2} \left[\log \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \right] \quad (\text{F.2})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta^2)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{n - \frac{d}{2}} \quad (\text{F.3})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta^2)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{d}{2} \right) \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{n - \frac{d}{2} - 1} \quad (\text{F.4})$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - \Delta^2)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d(d+2)}{4} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^{n - \frac{d}{2} - 2} \quad (\text{F.5})$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \quad \gamma_E \approx 0.577 \quad (\text{F.6})$$

$$\left(\frac{1}{\Delta^2} \right)^\epsilon = 1 - \epsilon \log \Delta^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (\text{F.7})$$

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} \quad (\text{F.8})$$

$$\lim_{d \rightarrow 4} \mu^{4-d} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta^2}\right)^{2 - \frac{d}{2}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{4-d} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) - \log\left(\frac{\Delta^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \quad (\text{F.9})$$

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g^\mu{}_\mu = d \quad (\text{F.10})$$

G

Cálculo da dimensão anômala do campo de Higgs a 1-*loop*: $\gamma_{m^2}^{(1)}$

Resgatando as expressões obtidas para as funções β em (6.7), (6.8) e (6.9):

$$\beta(\lambda, \epsilon) = -\epsilon\lambda - \frac{\mu}{Z_\lambda} \frac{dZ_\lambda}{d\mu} \lambda = -\epsilon\lambda + \beta_\lambda \quad (\text{G.1})$$

$$\beta(g_{1,2}, \epsilon) = -\frac{\epsilon}{2}g_{1,2} - \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_{g_{1,2}}} \frac{dZ_{g_{1,2}}}{d\mu} g_{1,2} = -\frac{\epsilon}{2}g_{1,2} + \beta_{g_{1,2}} \quad (\text{G.2})$$

$$\beta(y_f, \epsilon) = -\frac{\epsilon}{2}y_f - \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_{y_f}} \frac{dZ_{y_f}}{d\mu} y_f = -\frac{\epsilon}{2}y_f + \beta_{y_t} \quad (\text{G.3})$$

E relembrando que

$$Z_{m^2}^{(1)} = 1 + \frac{1}{(4\pi)^2} \left(6\lambda + 3y_t^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - \frac{3}{4}g_1^2 \right) \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) \right) \quad (\text{G.4})$$

$$\gamma_{m^2} = -\frac{1}{Z_{m^2}} \left(\frac{\partial Z_{m^2}}{\partial \lambda} \beta(\lambda, \epsilon) + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial y_t} \beta(y_t, \epsilon) + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial g_1} \beta(g_1, \epsilon) + \frac{\partial Z_{m^2}}{\partial g_2} \beta(g_2, \epsilon) \right) \quad (\text{G.5})$$

é imediato calcular o valor de γ_{m^2} .

$$\gamma_{m^2}^{(1)} = -\frac{1}{1 + \delta_{m^2}^{(1)}} \left[6(-\epsilon\lambda + \beta_\lambda^{(1)}) + 6y_t \left(-\frac{\epsilon}{2}y_t + \beta_{y_t}^{(1)} \right) - \frac{3}{2}g_1 \left(-\frac{\epsilon}{2}g_1 + \beta_{g_1} \right) - \frac{9}{2}g_2 \left(-\frac{\epsilon}{2}g_2 + \beta_{g_2} \right) \right] \times \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) \right) \quad (\text{G.6})$$

A lista de funções β em $d = 4$ ($\epsilon = 0$) a 1-loop segue abaixo [18–20]:

$$\beta_\lambda^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\lambda(-9g_2^2 - 3g_1^2 + 12y_t^2) + 24\lambda^2 + \frac{3}{4}g_2^4 + \frac{3}{8}(g_1^2 + g_2^2)^2 - 6y_t^4 \right], \quad (\text{G.7})$$

$$\beta_{y_t}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{9}{2}y_t^3 + y_t \left(-\frac{17}{12}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_3^2 \right) \right], \quad (\text{G.8})$$

$$\beta_{g_1}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{41}{6}g_1^3 \right], \quad \beta_{g_2}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[-\frac{19}{6}g_2^3 \right], \quad \beta_{g_3}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left[-7g_3^3 \right] \quad (\text{G.9})$$

Com isso, expressaremos o resultando de (G.6) em leading-order:

$$\gamma_{m^2}^{(1)} \approx \left(1 - \delta_{m^2}^{(1)} \right) \left(12\lambda + 6y_t^2 - \frac{9}{2}g_2^2 - \frac{3}{2}g_1^2 \right) \frac{1}{16\pi^2} \quad (\text{G.10})$$

E podemos eliminar o termo $\delta_{m^2}^{(1)}$, pois ao efetuar a distributiva teremos contribuições de ordens maiores, pois sabemos por (6.12) que

$$\delta_{m^2}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(6\lambda + 3y_t^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - \frac{3}{4}g_1^2 \right) \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi e^{-\gamma_E}) \right) \quad (\text{G.11})$$

Assim, finalmente teremos

$$\gamma_{m^2}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2} \left(12\lambda + 6y_t^2 - \frac{9}{2}g_2^2 - \frac{3}{2}g_1^2 \right) \quad (\text{G.12})$$

H

EGR das constantes de acoplamento do MP e do parâmetro de massa do Higgs a *2-loops*

$$\begin{aligned}\beta_{\lambda}^{(2)} = & \frac{1}{(16\pi^2)^2} \left[-312\lambda^3 - 144\lambda^2 y_t^2 + 36\lambda^2 (g_1^2 + 3g_2^2) - 3\lambda y_t^4 + \lambda y_t^2 \left(80g_3^2 + \frac{45}{2}g_2^2 + \frac{85}{6}g_1^2 \right) \right. \\ & - \frac{73}{8}\lambda g_2^4 + \frac{39}{4}\lambda g_2^2 g_1^2 + \frac{629}{24}\lambda g_1^4 + 30y_t^6 - 32g_3^2 y_t^4 - \frac{8}{3}g_1^2 y_t^4 - \frac{9}{4}g_2^4 y_t^2 \\ & \left. + \frac{21}{2}g_2^2 g_1^2 y_t^2 - \frac{19}{4}g_1^4 y_t^2 + \frac{305}{16}g_2^6 - \frac{289}{48}g_2^4 g_1^2 - \frac{559}{48}g_2^2 g_1^4 - \frac{379}{48}g_1^6 \right] \quad (\text{H.1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_{y_t}^{(2)} = & \frac{y_t}{(16\pi^2)^2} \left[-12y_t^4 + y_t^2 \left(\frac{131}{16}g_1^2 + \frac{225}{16}g_2^2 + 36g_3^2 - 12\lambda \right) + \frac{1187}{216}g_1^4 \right. \\ & \left. - \frac{3}{4}g_1^2 g_2^2 + \frac{19}{9}g_1^2 g_3^2 - \frac{23}{4}g_2^4 + 9g_2^2 g_3^2 - 108g_3^4 + 6\lambda^2 \right] \quad (\text{H.2})\end{aligned}$$

$$\beta_{g_1}^{(2)} = \frac{g_1^3}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{199}{18}g_1^2 + \frac{9}{2}g_2^2 + \frac{44}{3}g_3^2 - \frac{17}{6}y_t^2 \right) \quad (\text{H.3})$$

$$\beta_{g_2}^{(2)} = \frac{g_2^3}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{3}{2}g_1^2 + \frac{35}{6}g_2^2 + 12g_3^2 - \frac{3}{2}y_t^2 \right) \quad (\text{H.4})$$

$$\beta_{g_3}^{(2)} = \frac{g_3^3}{(16\pi^2)^2} \left(\frac{11}{6}g_1^2 + \frac{9}{2}g_2^2 - 26g_3^2 - 2y_t^2 \right) \quad (\text{H.5})$$

$$\begin{aligned} \gamma_{m_h^2}^{(2)} = \frac{2}{(16\pi^2)^2} & \left[-30\lambda^2 - 36\lambda y_t^2 + 12\lambda (g_1^2 + 3g_2^2) - \frac{27}{4}y_t^4 + 20g_3^2 y_t^2 \right. \\ & \left. + \frac{45}{8}g_2^2 y_t^2 + \frac{85}{24}g_1^2 y_t^2 - \frac{145}{32}g_2^4 + \frac{15}{16}g_1^2 g_2^2 + \frac{157}{96}g_1^4 \right] \quad (\text{H.6}) \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] C. Patrignani *et al.*, *Particle Physics Booklet* (Chinese Physics C, 2016).
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).
- [3] D. Bardin, *Field theory and the standard model*, 1999.
- [4] J. C. Romão, *Advanced Quantum Field Theory* (IST, 2015).
- [5] P. Nelson, *Naturalness in Theoretical Physics*, Am.Sci. **73**, 60 (1985).
- [6] A. Einstein, as quoted in I. Rosenthal-Schneider, *Reality and Scientific Truth: Discussions with Einstein, von Laue, and Planck*, Wayne State University Press (1980).
- [7] G. 't Hooft, *Recent Developments in Gauge Theories*, Plenum Press , 135 (1980).
- [8] ATLAS, Mass reach of atlas searches for supersymmetry, <https://atlas.web.cern.ch/Atlas/GROUPS/PHYSICS/CombinedSummaryPlots/SUSY/>, 2016, [Online; accessed 9-November-2016].
- [9] P. W. Graham, D. E. Kaplan, and S. Rajendran, *Cosmological Relaxation of the Electroweak Scale*, Phys. Rev. Lett. **115**, 221801 (2015), arXiv:1504.07551.
- [10] D. S. Hajdukovic, *The signatures of new physics, astrophysics and cosmology?*, Modern Physics Letters A **28**, 1350124 (2013), arXiv:1308.4768v1.
- [11] G. F. Giudice, *Naturally Speaking: The Naturalness Criterion and Physics at the LHC*, (2008), arXiv:08012562v2.
- [12] E. Ma, *Possible Finiteness of the Higgs-Boson Mass Renormalization*, Phys.Rev. D47 , 2143 (1992), arXiv:9209221v2.
- [13] T. Hambye and K. Riesselmann, *Matching conditions and Higgs mass upper bounds revisited*, Phys.Rev. D55 , 7255 (1997), arXiv:9610272.
- [14] M. Veltman, *The infrared-ultraviolet connection*, Acta Physica Polonica **B12**, 437 (1981).
- [15] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory* (Cambridge University Press, 1996).

- [16] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model* (Cambridge University Press, 2016).
- [17] T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Clarendon Press, 1988).
- [18] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nuclear Physics **B222**, 83 (1983).
- [19] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nuclear Physics **B236**, 221 (1984).
- [20] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nuclear Physics **B249**, 70 (1985).
- [21] M. Holthausen, K. S. Lim, and M. Lindner, *Planck Scale Boundary Conditions and the Higgs Mass*, JHEP **1202**, 37 (2012), arXiv:1112.2415v2.
- [22] M. Zoller, *Beta-function for the Higgs self-interaction in the Standard Model at three-loop level*, (2013), arXiv:1311.5085v1.
- [23] D. Buttazzo *et al.*, (2013), arXiv:1307.3536v4.
- [24] The ATLAS, CDF, CMS, D0 Collaborations, *First combination of Tevatron and LHC measurements of the top-quark mass*, (2014), arXiv:1403.4427.
- [25] M. Zoller, *Vacuum stability in the SM and the three-loop beta-function for the Higgs self-interaction*, (2013), arXiv:1209.5609v5.
- [26] Y. Tang, *Vacuum Stability in the Standard Model*, (2013), arXiv:1301.5812v2.
- [27] S. P. Martin, *A Supersymmetry Primer*, (2011), arXiv:9709356v6.
- [28] P. Langacker, *The Standard Model and Beyond* (CRC Press, 2010).