

**ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE
SISTEMAS DINÂMICOS PERIÓDICOS
USANDO A TEORIA DE SINHA**

Amábile Jeovana Neiris Mesquita

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Análise da estabilidade de sistemas dinâmicos periódicos usando a Teoria de Sinha

Amábile Jeovana Neiris Mesquita

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

São José do Rio Preto

Junho de 2007

*Aos meus pais e à minha doce filha Camila,
dedico.*

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

Aos meus pais Mesquita e Jenir que sempre me apoiaram, incentivaram e acreditaram em mim. Agradeço também pelos almoços deliciosos diários que ofereceram ao meu companheiro, à minha filha e a mim pelo simples fato de poupar meu tempo tão escasso. Agradeço por levarem e buscarem minha filha aos seus compromissos de criança. Agradeço pelo “mutirão de limpeza” que realizaram todos os finais de semana para que, com isso, estudasse tranqüila sem me preocupar com os serviços de casa. Fizeram tudo isso com a maior boa vontade e sem cobrar nada em troca, somente desejando que alcançasse os meus objetivos.

Agradeço à minha filha Camila simplesmente por ela existir em minha vida, proporcionando-me os momentos mais felizes. Agradeço-a por compreender que não podia acompanhá-la em todos os passeios.

Agradeço ao meu companheiro Rafael pelo carinho, paciência e compreensão.

Aos meus amigos pós-graduandos Adriana, Daniel, Orestes, Eduardo, Rildo, Daniele, José Renato, José Maricato, Fernando Rafaeli, Fábio, Altamir, Danilo, Gabriela, pelas amizades sinceras, pelos momentos de descontração, pela paciência que tiveram em me fazer relembrar vários conceitos básicos de Álgebra Linear e Cálculo (após 10 anos de formada e sem o contato com a matéria não foi fácil...) e, principalmente, pelas horas de discussões que foram fundamentais para a realização deste trabalho. Adriana e Gabi, muito obrigada!!!

Agradeço ao professor Dr. Masayoshi Tsuchida, pela orientação e paciência (e quanta paciência) na elaboração deste trabalho.

Aos professores Dr. Ranga e Dr^a. Cleonice pela disposição em tirar minhas dúvidas e por emprestar livros sobre polinômios ortogonais.

Ao Getúlio pela sua simpatia.

Ao pessoal da Diretoria de Ensino de São José do Rio Preto, pela maneira como fui

recebida.

A todos da escola E.E. Leonor da Silva Carramona e E. E. Maria de Lourdes mas principalmente à coordenadora Lúcia, pela confiança que teve em mim e pelo acolhimento.

Aos professores do Projeto Recuperação que acreditaram que juntos poderíamos realizar um ótimo trabalho, e realizamos!!!

À Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo auxílio financeiro.

“A persistência é o caminho do êxito.”

Charles Chaplin

Resumo

Neste trabalho estuda-se alguns sistemas dinâmicos utilizando um novo método para aproximar a matriz de transição de estados (STM) para sistemas periódicos no tempo. Este método é baseado na transformação de Lyapunov-Floquet (L-F), e utiliza a expansão polinomial de Chebyshev para aproximar o termo periódico. O método iterativo de Picard é usado para aproximar a STM. Os multiplicadores de Floquet, determinados através deste método, permitem construir o diagrama de estabilidade do sistema dinâmico. Esta técnica é aplicada para analisar a estabilidade e os pontos de bifurcação do sistema dinâmico formado por um pêndulo elástico com excitação vertical periódica no suporte. Além dessa aplicação, é analisada também a equação de Mathieu e a estabilidade do sistema dinâmico constituído por partículas carregadas e imersas em um campo magnético perturbado.

Palavras-chave: Transformação de Lyapunov-Floquet, Polinômio de Chebyshev, Iteração de Picard, Pêndulo elástico, Estabilidade e Bifurcação.

Abstract

In this work some dynamic systems are studied using a new method to approach state transition matrix (STM) for time-periodic systems. This method is based on Lyapunov-Floquet transformation (transformation L-F) and uses the Chebyshev polynomial expansion to approach the periodical term. The Picard iterative method is used to approach the STM. The Floquet multipliers determined through this method, allow to draw the stability diagram of the dynamic system. This technique is applied to analyze the stability and bifurcation points of the dynamic system formed by an elastic pendulum with periodic vertical excitation on support. Besides this application, the Mathieu equation is analyzed and also the stability of the dynamical system constituted by charged particle in a perturbed magnetic field is discussed.

Keywords: Lyapunov-Floquet Transformation, Chebyshev Polynomial, Picard Iteration, Stability, Bifurcation.

Lista de Figuras

1.1	Organograma representando um resumo da teoria de Sinha.	4
2.1	Composição do operador evolução.	8
2.2	Órbitas de um sistema contínuo.	9
2.3	Órbita periódica de tempo contínuo.	10
3.1	Polinômio de Legendre de grau 9.	23
3.2	Polinômio de Chebyshev de grau 9.	24
3.3	Aproximação da função cosseno usando polinômios alterados de Chebyshev	27
3.4	Cenários representando como os multiplicadores de Floquet deixam o círculo unitário e suas respectivas bifurcações locais: (a) Bifurcação fold; (b) bifurcação flip-duplicação de período; e (c) bifurcação de Hopf.	34
3.5	Bifurcação fold.	35
3.6	Bifurcação fold no espaço fase-parâmetro.	35
3.7	Bifurcação flip (a)supercrítica e (b)subcrítica.	36
3.8	Bifurcação de Hopf supercrítica.	37
3.9	Bifurcação de Hopf supercrítica no espaço (x_1, x_2, α)	38
3.10	Bifurcação de Hopf subcrítica.	38
3.11	Bifurcação de Hopf subcrítica no espaço (x_1, x_2, α)	39
3.12	Bifurcação de Hopf em um sistema linear.	40
4.1	Diagrama de estabilidade para $0 < p < 3$ e $0.5 < \omega < 2.5$	42
4.2	Ilustração do pêndulo elástico excitado parametricamente.	43
4.3	Diagrama de estabilidade do sistema pêndulo elástico.	46
4.4	Diagrama de Bifurcação do pêndulo, para $P = 1$	48
4.5	Diagrama de Bifurcação da mola, para $P = 1$	48
4.6	Histórico no tempo do pêndulo para $\Omega = 1.22$	49

4.7	Histórico no tempo do pêndulo para $\Omega = 1.62$	49
4.8	Histórico no tempo da mola para $\Omega = 1.22$	50
4.9	Histórico no tempo da mola para $\Omega = 1.62$	50
4.10	Espectro de frequência da mola para $\Omega = 1.22$	51
4.11	Espectro de frequência da mola para $\Omega = 1.62$	51
4.12	Espaço de fases da mola para $\Omega = 1.22$	52
4.13	Espaço de fases da mola para $\Omega = 1.62$	52
4.14	Diagrama de estabilidade.	55
4.15	Fronteiras de estabilidade da equação de Mathieu no plano $a - b$.	56
4.16	Ilustração de uma partícula carregada em um campo magnético.	57

Sumário

1	Introdução	1
2	Sistemas Dinâmicos: Conceitos Preliminares	5
2.1	Espaço de estados	5
2.2	Tempo	6
2.3	Operador evolução	6
2.4	Definição de um sistema dinâmico	8
2.5	Sistemas dinâmicos determinísticos	8
2.6	Caos	8
2.7	Órbitas e retrato de fases	8
2.8	Equações diferenciais e sistemas dinâmicos	10
2.9	Diferença entre variável e parâmetro	10
2.10	Sistema linear	11
2.10.1	Diferença entre parâmetros fixos e variáveis	12
2.10.2	Equações homogêneas e não-homogêneas	12
2.10.3	Sistemas autônomos e não autônomos	12
2.10.4	Solução de um sistema linear homogêneo autônomo	12
2.10.5	Ponto de equilíbrio e estabilidade	14
2.11	Sistema não-linear	15
2.11.1	Linearização	15
2.11.2	Equivalência Topológica	16
2.11.3	Teorema de Hartman-Grobman	17
3	Matriz de Transição de Estados para Sistemas Periódicos	18
3.1	Sistemas lineares com coeficientes periódicos - Teoria de Floquet	18

3.2	Aproximações de funções	21
3.3	Polinômios Ortogonais	22
3.3.1	Polinômios de Chebyshev	24
3.3.2	Polinômios alterados de Chebyshev	25
3.3.3	Propriedades dos polinômios alterados de Chebyshev	26
3.3.4	Matriz Operacional de Integração	27
3.3.5	Matriz Operacional do Produto	28
3.4	Método iterativo de Picard	29
3.5	Bifurcação	32
3.5.1	Bifurcação fold	34
3.5.2	Bifurcação Flip	35
3.5.3	Bifurcação Hopf	36
4	Dinâmica de Sistemas com Coeficientes Periódicos	41
4.1	Análise da Estabilidade Estrutural	41
4.2	Pêndulo Excitado Parametricamente	42
4.3	Pêndulo Elástico com Excitação Vertical no Suporte	43
4.3.1	Equações Adimensionais	44
4.3.2	Soluções Estacionárias	44
4.4	Equação de Mathieu	54
4.5	Partícula carregada em um campo magnético perturbado	57
5	Conclusão	61
5.1	Pesquisas futuras	62
A	Divisores Elementares	64
B	Produto de Kronecker	66
C	Programa	67
	Referências Bibliográficas	76

Capítulo 1

Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos governados por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, lineares ou não lineares, e com coeficientes periódicos sempre teve uma grande importância em diversos ramos da ciência e engenharia. A análise da estabilidade, bifurcação e da resposta sob vários tipos de excitações são motivos de uma vasta quantidade de trabalhos na literatura clássica e atual. Numerosas aplicações práticas podem ser encontradas nas áreas de mecânica quântica, dinâmica estrutural, dinâmica de sistemas rotacionais, entre tantas outras. Para a análise da estabilidade, primeiro é preciso linearizar as equações do movimento em torno de uma posição de equilíbrio. A estabilidade e a condição de bifurcação são determinadas pelos autovalores da matriz fundamental (STM) do sistema linearizado calculada no final do período principal, e que é conhecida como *Matriz de Transição de Floquet* (FTM). É bem conhecido que soluções exatas de sistemas com coeficientes periódicos são possíveis somente em um número limitado de casos e, em geral tais soluções são obtidas apenas aproximadamente. Vários métodos são usados para investigar a estabilidade de sistemas com coeficientes periódicos, como o método da perturbação, o método de Hill e a teoria de Floquet.

O método da perturbação é aplicado somente se o parâmetro que multiplica os termos periódicos é pequeno. O método requer mais conhecimento do comportamento do sistema e cada região do sistema requer uma análise separada. O método da média é também restrito a sistemas com parâmetros pequenos.

O método do determinante infinito de Hill é um dos métodos mais antigos, usado para calcular a curva de transição ou de fronteira. Ele determina a fronteira entre a região estável e instável no espaço de parâmetros, sem calcular de fato o vetor resposta. Para conseguir a combinação dos valores dos parâmetros que correspondem aos pontos de transição, a solução é

expandida na forma de séries de Fourier e substituídas nas equações dinâmicas. Igualando os coeficientes de cada termo trigonométrico a zero, um número infinito de equações algébricas lineares homogêneas é obtido. O determinante da matriz dos coeficientes é zero somente nos pontos de transição. A solução precisa do determinante infinito produzirá os pontos de transição. Entretanto, na prática, usa-se uma série de Fourier finita e então o ponto de transição é determinado. Aumentando o número de termos, encontra-se um novo ponto de transição. Este procedimento é repetido várias vezes para encontrar o ponto limite da série, e o ponto limite corresponde ao ponto de transição. Este processo consome muito tempo de computação, e não produz o vetor resposta para um ponto qualquer arbitrário no espaço de parâmetros. Ademais, o método de Hill não é muito conveniente para computação digital se o sistema possuir muitos graus de liberdade.

A teoria de Floquet é a mais geral delas. No passado recente não se tinha eficiência computacional para calcular a matriz de transição de estados (STM) e, portanto, o seu uso ficou reduzido a uma classe de problemas, a classe dos sistemas comutativos.

Recentemente surgiram novas técnicas computacionais onde a matriz do sistema periódico e o vetor estado são expandidos em termos de polinômios alterados de Chebyshev. A idéia de resolver equações diferenciais em termos de polinômios ortogonais não é nova. Uma excelente referência deste assunto é o livro de Fox e Parker [12], dentre numerosos artigos na literatura. Contudo, as primeiras investigações foram restritas somente às equações escalares com coeficientes constantes. Muitos autores, como Chang (1986) [5], Chou e Horng (1985) [6, 8, 7] e outros, têm usado polinômios ortogonais para resolver problemas provenientes no campo de sistemas e controle. A primeira aplicação de polinômios ortogonais para equações diferenciais com coeficientes periódicos foi relatada por Sinha e Chou (1976) [25] e Sinha (1979) [26]. Estas aplicações foram limitadas simplesmente às equações escalares de segunda ordem. Com o desenvolvimento da teoria de várias matrizes operacionais [2, 5] associado com polinômios ortogonais foi possível aplicar esta técnica a vários sistemas periódicos. Em um estudo posterior de Sinha e Wu (1990) [27] foi apresentado um esquema para obter uma aproximação para a matriz fundamental (STM), em uma forma fechada, para um sistema de equações de segunda ordem. A aproximação foi baseada na idéia de que o vetor estado e a matriz do sistema periódico podem ser expandidos em termos de polinômios de Chebyshev sobre o período principal. Aplicando as *matrizes operacionais de integração e do produto* associadas com os polinômios, esta expansão reduz o problema original a um conjunto de equações

algébricas, cujas soluções são obtidas no intervalo de um período. Entretanto, os coeficientes de Chebyshev da solução deveriam ser obtidos usando a regra de Cramer, matriz inversa, etc., e portanto, esta aproximação é impraticável para sistemas de dimensão superior. Em 1997 [24], Sinha e Butcher desenvolveram um algoritmo para calcular explicitamente a matriz solução fundamental (STM) para sistemas dinâmicos periódicos no tempo de qualquer dimensão, em função de seus parâmetros e do tempo, onde se aplica tanto a iteração de Picard como a expansão em termos de polinômios alterados de Chebyshev. Este algoritmo envolve somente operações de adição e multiplicação de matrizes, e é facilmente executado usando softwares simbólicos como o Matlab®. Como este método não é baseado na expansão em termos de um parâmetro pequeno, pode ser aplicado em sistemas que não possuam parâmetros pequenos. Como nos outros estudos, as matrizes operacionais de integração e de produto associadas com os polinômios alterados de Chebyshev são aplicadas. Entretanto, a necessidade de resolver algebricamente os coeficientes de Chebyshev é completamente evitada pelas iterações de Picard (seqüência de aproximações). Por fim, calcula-se facilmente a matriz de transição de Floquet (FTM) e é feito o estudo da estabilidade e bifurcação do sistema através de seus autovalores.

O objetivo deste trabalho é a análise da estabilidade do pêndulo elástico excitado parametricamente e de uma partícula carregada em campo magnético dependente do tempo aplicando essa nova teoria (conforme Figura 1.1) . O trabalho foi dividido em 5 capítulos. No capítulo 2 apresenta-se uma introdução à teoria de sistemas dinâmicos.

No capítulo 3 é desenvolvida a técnica para aproximar a matriz de transição de estados para sistemas periódicos no tempo. Para esse fim, apresenta-se a teoria de Floquet, a teoria dos polinômios ortogonais (em particular o polinômio de Chebyshev), as matrizes operacionais e o método iterativo de Picard.

No capítulo 4 aplica-se a técnica desenvolvida no capítulo 3 em dois sistemas com coeficientes periódicos no tempo: no pêndulo elástico excitado parametricamente e em uma partícula carregada em um campo magnético dependente do tempo.

No capítulo 5 contém conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

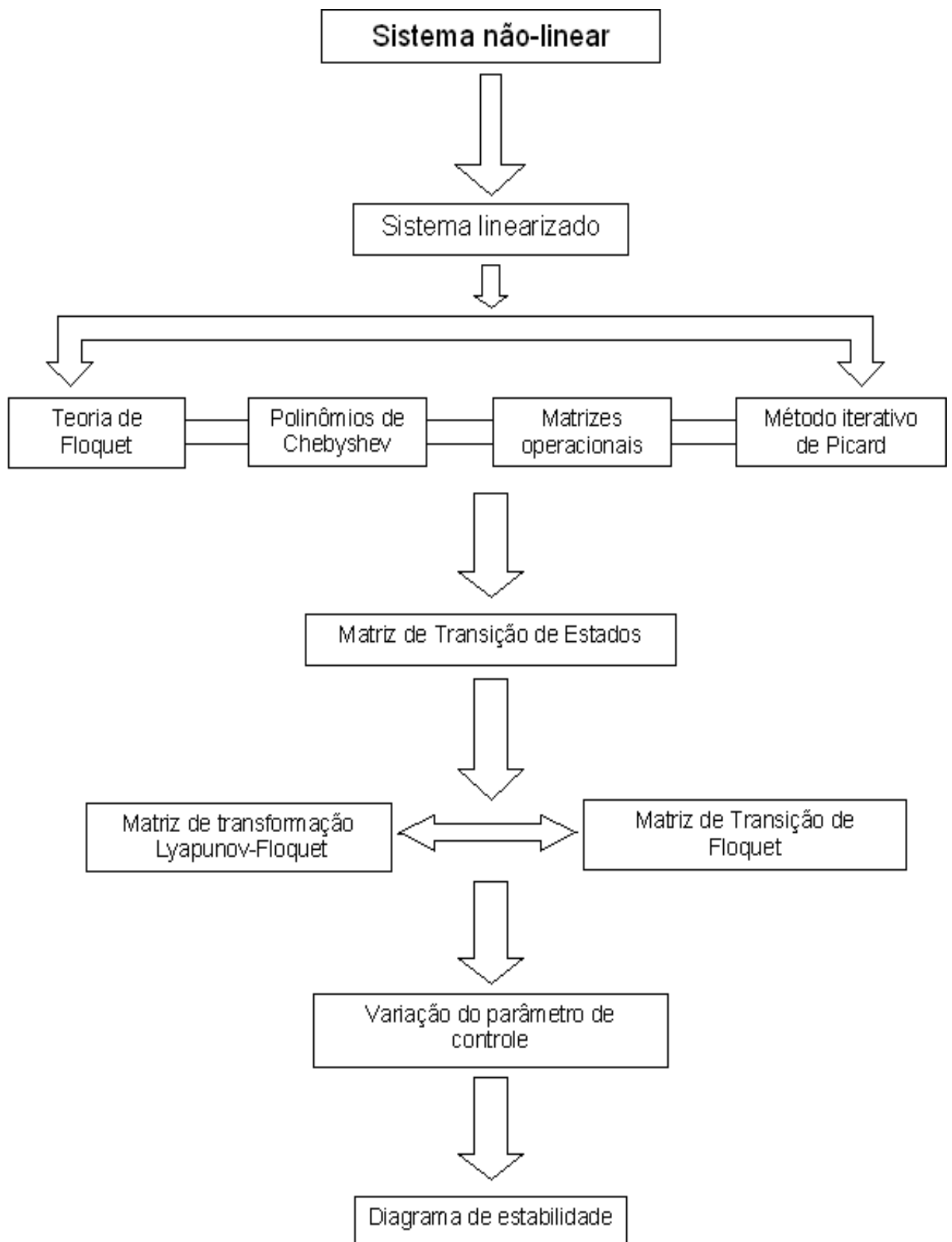


Figura 1.1: Organograma representando um resumo da teoria de Sinha.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos: Conceitos Preliminares

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto. Um sistema é dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Leibniz foi o primeiro a usar a palavra dinâmica nesse contexto. A posição no futuro e no passado de muitos sistemas físicos, químicos, biológicos, econômicos e sociais podem ser previstos até certo ponto, pelo conhecimento de sua posição no presente e as leis que governam sua evolução. Com a condição de que suas leis não mudem no decorrer do tempo, o comportamento é tal que um sistema pode ser considerado como completamente definido por sua posição inicial. Deste modo, a noção de sistema dinâmico inclui o conjunto de suas possíveis posições e uma lei de evolução da posição no tempo [14]. Neste Capítulo é apresentado, de forma introdutória, alguns conceitos de sistemas dinâmicos que são utilizados nesta Dissertação.

2.1 Espaço de estados

Todas as possíveis posições de um sistema são caracterizadas pelos pontos de algum conjunto X . Este conjunto é denominado o espaço de estados do sistema. A especificação de um ponto $x \in X$ deve ser suficiente não somente para descrever a presente “posição” do sistema, mas também determinar sua evolução. Frequentemente o espaço de estados é denominado de espaço de fases, seguindo uma tradição vinda da mecânica clássica. A dimensão do espaço de

fases equivale ao número de equações de primeira ordem necessárias para descrever o sistema. Um plano de fases é, portanto, o espaço de fases para um sistema formado por duas equações de primeira ordem.

2.2 Tempo

A evolução de um sistema dinâmico significa a mudança de posição do sistema no decorrer do tempo $t \in T$, onde T é um conjunto numérico. Existem dois tipos de sistemas dinâmicos: aqueles com tempo contínuo ($T = \mathbb{R}$), e aqueles com tempo discreto ($T = \mathbb{Z}$). Sistemas do primeiro tipo são denominados sistemas dinâmicos de tempo contínuo, enquanto os do segundo tipo são denominados sistemas dinâmicos de tempo discreto. Neste trabalho é analisado sistemas dinâmicos de tempo contínuo.

2.3 Operador evolução

A principal componente de um sistema dinâmico é uma lei de evolução que determina a posição x_t do sistema no tempo t , contanto que sua posição inicial x_0 seja conhecida.

A maneira mais geral de especificar a evolução é assumir que para $t \in T$, uma função φ^t está definida no espaço de estados X , isto é

$$\varphi^t : X \rightarrow X,$$

a qual transforma uma posição inicial $x_0 \in X$ em alguma posição $x_t \in X$ no tempo t

$$x_t = \varphi^t x_0$$

A função φ é denominada operador evolução do sistema dinâmico e pode ser conhecido explicitamente, no entanto, em muitos casos é definido indiretamente e só pode ser calculado de forma aproximada. No caso de tempo contínuo, a família $\{\varphi^t\}_{t \in T}$ de operadores evolução é denominado um fluxo. Note que $\varphi^t x$ pode não ser definida para todo par $(x, t) \in X \times T$. Sistemas dinâmicos com operador evolução φ^t definido para todo $t \in T$ são chamados invertíveis. Em tais sistemas a condição inicial x_0 não só define completamente a posição futura do sistema, como também seu comportamento no passado. No entanto, há sistemas

dinâmicos nos quais o comportamento futuro ($t > 0$) é completamente determinado por sua posição inicial x_0 em $t = 0$, mas seu comportamento para $t < 0$ não pode ser reconstruído. Tais sistemas dinâmicos (não invertíveis) são descritos com operador evolução definido somente para $t > 0$ e são denominados semi-fluxos.

É possível ainda que $\varphi^t x_0$ esteja definida apenas localmente, por exemplo, para $0 \leq t \leq t_0$, onde t_0 depende de $x_0 \in X$. Um exemplo importante de tal comportamento é um “blow-up” quando um sistema de tempo contínuo em $X = \mathbb{R}^n$ aproxima-se do infinito com tempo finito, isto é,

$$\|\varphi^t x_0\| \rightarrow +\infty,$$

para $t \rightarrow t_0$.

O operador evolução tem duas propriedades naturais que refletem a característica determinística do comportamento dos sistemas dinâmicos. A primeira,

$$\varphi^0 = id, \tag{2.1}$$

onde id é a função identidade em X , isto é, $id\ x = x$ para todo $x \in X$. A propriedade (2.1) implica que o sistema não muda sua posição “espontaneamente”. A segunda,

$$\varphi^{s+t} = \varphi^t \circ \varphi^s, \tag{2.2}$$

ou seja,

$$\varphi^{t+s}x = \varphi^t(\varphi^s x),$$

para todo $x \in X$ e $t, s \in T$, tal que ambos lados da equação anterior estão definidos. Essencialmente, a propriedade (2.2) implica que o resultado da evolução do sistema no decorrer de $(t + s)$ unidades de tempo, partindo de um ponto $x \in X$, é o mesmo se o sistema permitir primeiro a mudança da posição de x para s unidades de tempo acima e então evoluir nas t próximas unidades de tempo à partir da posição resultante $\varphi^s x$, como mostra a Figura 2.1. Esta propriedade significa que a lei que governa o comportamento do sistema não muda no tempo: o sistema é “autônomo”.

Para sistemas invertíveis, o operador evolução φ^t satisfaz a propriedade (2.2) para t e s ambos negativos e não negativos. Em tais sistemas, o operador φ^{-t} é a inversa de φ^t , $(\varphi^t)^{-1} = \varphi^{-t}$, desde que

$$\varphi^{-t} \circ \varphi^t = id.$$

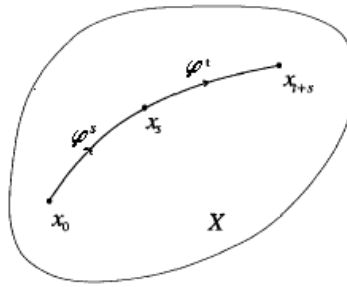


Figura 2.1: Composição do operador evolução.

2.4 Definição de um sistema dinâmico

Um sistema dinâmico é uma tripla $\{T, X, \varphi^t\}$, onde T é um conjunto de tempo, X é um espaço de estados, e $\varphi^t : X \rightarrow X$ é uma família de operadores evolução parametrizados por $t \in T$ e satisfazendo as propriedades (2.1) e (2.2).

2.5 Sistemas dinâmicos determinísticos

Sistemas dinâmicos determinísticos são aqueles onde o estado do sistema é caracterizado por variáveis com valores bem definidos, sua evolução temporal é governada por regras bem definidas, previsões são possíveis dentro de certas limitações e são matematicamente expressos por equações diferenciais (parciais ou ordinárias). Exemplos de sistemas determinísticos: movimento de um ponto material - leis de Newton do movimento junto com as leis da gravitação universal. [29]

2.6 Caos

Caos é um termo usado para definir os movimentos aparentemente irregulares de sistemas dinâmicos determinísticos. Tal comportamento é caracterizado pela dependência às condições iniciais e pela presença de uma faixa contínua de ruído no espectro de frequência. [3]

2.7 Órbitas e retrato de fases

A geometria associa ao sistema dinâmico $\{T, X, \varphi^t\}$ suas órbitas no espaço de estados e o retrato de fases exibe estas órbitas.

Uma órbita partindo de x_0 é um subconjunto ordenado do espaço de estados X ,

$$Or(x_0) = \{x \in X : x = \varphi^t x_0, \text{ para todo } t \in T \text{ tal que } \varphi^t x_0 \text{ está definido}\}.$$

Órbitas de um sistema de tempo contínuo com um operador evolução contínuo são curvas no espaço de estados X parametrizadas pelo tempo t , e orientadas para suas direções de crescimento (Figura 2.2). As órbitas mais simples são os pontos de equilíbrio.

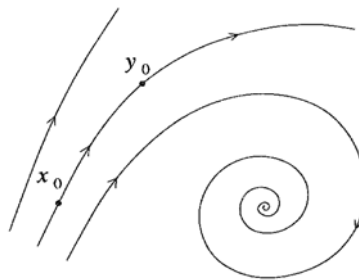


Figura 2.2: Órbitas de um sistema contínuo.

Um ponto $x^* \in X$ é denominado um ponto de equilíbrio se $\varphi^t x^* = x^*$ para todo $t \in T$. O operador evolução leva um ponto de equilíbrio nele mesmo. Equivalentemente, um sistema permanece no ponto de equilíbrio indefinidamente. Isto representa o comportamento mais simples do sistema.

Outra órbita relativamente simples é um ciclo. Um ciclo é uma órbita periódica L_0 , tal que cada ponto $x_0 \in L_0$ satisfaz $\varphi^{t+T_0} x_0 = \varphi^t x_0$ com algum $T_0 > 0$, para todo $t \in T$.

O menor T_0 que satisfaz esta propriedade é denominado o período do ciclo L_0 . Se um sistema começa sua evolução de um ponto x_0 no ciclo, ele irá retornar exatamente neste ponto após T_0 unidades de tempo, exibindo oscilações periódicas. No caso de sistema de tempo contínuo o ciclo L_0 é uma curva fechada (Figura 2.3). Um ciclo de um sistema dinâmico de tempo contínuo em que não existem outros ciclos na sua vizinhança, é denominado um *ciclo limite*.

O retrato de fases de um sistema dinâmico é uma divisão do espaço de estados em órbitas. O retrato de fases contém muitas informações do comportamento do sistema dinâmico. Analisando o retrato de fases, podemos determinar o número e os tipos de convergências para as quais o sistema tende quando $t \rightarrow \infty$ (e para $t \rightarrow -\infty$ se o sistema é invertível). No entanto, é impossível representar todas as órbitas em uma figura. Na prática, somente algumas órbitas principais são traçadas no diagrama do retrato de fases, como visto na Figura 2.2.

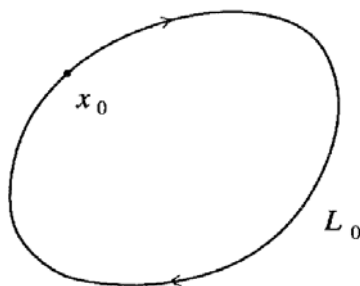


Figura 2.3: Órbita periódica de tempo contínuo.

2.8 Equações diferenciais e sistemas dinâmicos

O modo mais comum de definir um sistema dinâmico de tempo contínuo é usando equações diferenciais. Suponha que o espaço de estados do sistema é $X = \mathbb{R}^n$ com coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Frequentemente a lei de evolução do sistema é dada em termos das velocidades $\dot{x}_i$ como função das coordenadas $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n,$$

ou na forma vetorial

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.3)$$

onde o vetor função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é suposto ser diferenciável.

A função do lado direito de (2.3) é denominada um campo vetorial, pois relaciona um vetor $f(x)$ para cada ponto x . A equação (2.3) representa um sistema de n equações diferenciais ordinárias autônomas, ou simplesmente EDO.

2.9 Diferença entre variável e parâmetro

Poincaré usa o pêndulo simples para exemplificar conceitos e idéias. O pêndulo é, de fato, um sistema paradigmático no estudo de comportamentos dinâmicos. A variação da posição angular θ de um pêndulo de massa m e comprimento l , não-amortecido, e sujeito apenas à ação da gravidade g , é descrita pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta(t) = 0 \quad (2.4)$$

O ângulo θ expressa o deslocamento angular do pêndulo em relação ao eixo que é paralelo

à força gravitacional e passa pelo seu ponto de sustentação. Observe que esse sistema apresenta grandezas que podem ser classificadas em três categorias diferentes

- o tempo é uma variável que evolui livremente, pois não se pode interferir na sua velocidade. Esse tipo de variável é chamada de *variável independente*
- o ângulo θ varia com o tempo. Portanto, tal variável é denominada de *variável dependente*, já que sua evolução é função da variável independente.
- os *parâmetros* l e g são quantidades que influenciam o comportamento do sistema, mas seus valores independem da posição angular do pêndulo. Na equação, os parâmetros assumem valores constantes.

2.10 Sistema linear

A forma geral de se escrever uma equação diferencial linear para a variável dependente $x(t)$ é:

$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = F(t) \quad (2.5)$$

sendo $t \in \mathbb{R}_+$. Uma equação diferencial é linear se $x(t)$, $dx(t)/dt$, ..., $d^n x(t)/dt^n$ aparecem como termos de primeiro grau, isto é, estão elevados à primeira potência, caso contrário, é não-linear.

Para sistemas lineares valem o *princípio da aditividade* e o *princípio da proporcionalidade entre excitação e resposta*. O primeiro princípio estabelece que se para uma entrada $F_1(t)$ o sistema exibe uma resposta $x_1(t)$, e para uma entrada $F_2(t)$ o sistema exibe uma resposta $x_2(t)$, então para uma entrada $F_1(t) + F_2(t)$, a saída do sistema será $x_1(t) + x_2(t)$. O segundo princípio, também conhecido como *princípio da homogeneidade*, afirma que, se para uma entrada $F(t)$, o sistema tem uma saída $x(t)$, então para uma entrada $kF(t)$, sendo k uma constante, a saída será $kx(t)$. Em sistemas não-lineares não valem, em geral, esses princípios. Não há um método analítico geral para se obter a solução explícita dessa equação para quaisquer coeficientes $a_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) e entrada $F(t)$. Ou seja, não há um método geral para se obter a fórmula que expressa como x varia em função de t .

2.10.1 Diferença entre parâmetros fixos e variáveis

Se os coeficientes $a_j(t)$ de (2.5) são constantes tem-se um *sistema a parâmetros fixos*, assim, o tempo só pode aparecer explicitamente na função de entrada $F(t)$. Num sistema a parâmetros variáveis, um ou mais coeficientes $a_j(t)$ são funções explícitas do tempo t . Nesta dissertação estuda-se equações em que há uma única variável independente (tempo) e coeficientes que variam periodicamente no tempo.

2.10.2 Equações homogêneas e não-homogêneas

Uma equação diferencial é chamada de equação *homogênea* se a função de entrada $F(t)$ é nula. Se $F(t) \neq 0$, então a equação é chamada de *não-homogênea*.

2.10.3 Sistemas autônomos e não autônomos

Um conjunto de equações diferenciais, lineares ou não-lineares, a parâmetros constantes, sujeitas a funções de entrada que não dependem explicitamente do tempo t é chamado de *sistema autônomo*. Se o tempo aparece explicitamente em algum coeficiente e/ou em alguma função de entrada, o sistema de equações é chamado de *não-autônomo*.

2.10.4 Solução de um sistema linear homogêneo autônomo

Seja o sistema linear

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes. Uma solução do sistema (2.6) é uma função vetorial $x(x_0, t)$ que depende do tempo t e da condição inicial

$$x(0) = x_0. \quad (2.7)$$

A solução do sistema linear (2.6) é simplesmente

$$x(x_0, t) = e^{At}x_0, \quad (2.8)$$

onde e^{At} é uma matriz exponencial $n \times n$. Isso pode ser facilmente deduzido do desenvolvimento em série da matriz e^{At} , ou seja

$$e^{At} = [I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{(n)!}A^n + \cdots] \quad (2.9)$$

onde I é a matriz identidade. Derivando (2.9) termo a termo em relação a t , temos

$$\frac{d}{dt}e^{At} = [A + tA^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \cdots] = Ae^{At}. \quad (2.10)$$

Portanto, pode-se usar (2.9) e (2.10) para mostrar que (2.8) é solução de (2.6) e (2.7).

A solução geral do sistema linear é a superposição de n soluções linearmente independentes $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t),$$

onde as n constantes c_j são determinadas pela condição inicial.

Se os autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de A forem reais e distintos, então A tem n autovetores linearmente independentes $\{v_1, \dots, v_n\}$. Além disso, podemos diagonalizar A por meio de uma transformação linear. A partir de (2.9), é fácil ver que a matriz e^{At} também será diagonal com autovalores $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$. Deste modo, a solução de cada $x^j(t)$ será

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v_j.$$

No caso em que A tem autovalores complexos conjugados $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j$ e autovetores $v_j = v_j^{Re} \pm i v_j^{Im}$, temos as soluções

$$\begin{aligned} x_{Re}^j &= e^{\alpha_j t} (v_j^{Re} \cos \beta_j t - v_j^{Im} \sin \beta_j t), \\ x_{Im}^j &= e^{\alpha_j t} (v_j^{Re} \sin \beta_j t + v_j^{Im} \cos \beta_j t), \end{aligned}$$

onde x_{Re}^j e x_{Im}^j são, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de $x^j(t)$.

De maneira simplificada escrevemos

$$x^j(t) = e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} e^{i\operatorname{Im}(\lambda_j)t} v_j.$$

Como $e^{i\operatorname{Im}(\lambda_j)t}$ é uma função limitada, a estabilidade de $x^j(t)$ vai depender essencialmente de $\operatorname{Re}(\lambda_j)$. Se $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, $e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t}$ cresce continuamente com o tempo e $x^j(t) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Isso significa que as trajetórias $x^j(t)$ deixam a vizinhança de um ponto de equilíbrio x^* . Inversamente, se $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, $x^j(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow \infty$ e nesse caso o ponto de equilíbrio é estável.

As diferentes possibilidades de combinação dos autovalores, que podem ser reais, imaginários puros, todos com parte real positiva, etc..., vão definir não só a estabilidade do ponto de equilíbrio mas também a forma das soluções em sua vizinhança. Desta forma, os pontos de equilíbrio são classificados de acordo com a sua natureza.

2.10.5 Ponto de equilíbrio e estabilidade

É apresentado, agora, apenas o conceito de estabilidade de uma solução estacionária representada por um ponto de equilíbrio no espaço de fases, segundo a definição de Lyapunov.

Seja x^* a posição de equilíbrio de um sistema dinâmico. Define-se x^* como um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se, após uma perturbação na condição inicial $x(0) = x^*$, então a trajetória $x(t) \rightarrow x^*$ quando $t \rightarrow \infty$. Um ponto assintoticamente estável atrai todas as trajetórias contidas em uma “esfera” com centro em x^* , conforme o tempo passa. Se essa esfera possui raio finito, x^* é o ponto de equilíbrio *localmente* assintoticamente estável. Se essa esfera tem raio infinito, ou seja, abrange todo espaço de fases, o ponto de equilíbrio é *globalmente* assintoticamente estável. Em ambos os casos, tal ponto é classificado como um atrator. O conjunto de todas as condições iniciais que convergem para um mesmo atrator formam sua bacia de atração.

Define-se x^* como um ponto de equilíbrio *neutramente estável* se, após uma perturbação na condição inicial $x(0) = x^*$, então $x(t)$ permanece dentro de uma esfera centrada em x^* , conforme o tempo passa. Nesse caso porém, $x(t)$ não tende para x^* quando $t \rightarrow \infty$.

Define-se x^* como um ponto *instável* se, após alguma perturbação na condição inicial $x(0) = x^*$, então $x(t)$ deixa a esfera centrada em x^* num tempo finito. A palavra esfera é usada se o sistema for tridimensional, se fosse unidimensional seria um segmento de reta. No caso bidimensional um círculo, e para dimensão maior que três é usado o termo hiper-esfera.

A estabilidade de um ponto no sentido de Lyapunov é definida em termos do comportamento das trajetórias que partem de uma condição inicial localizada na vizinhança desse ponto. A existência de um ponto instável implica que, conforme o tempo passa, a magnitude das variáveis pode aumentar de maneira ilimitada, distando-se do ponto em questão. Num sistema físico real, isso corresponde a elementos mecânicos que se deformam ou rompem, ou a elementos elétricos que saturam ou queimam [11].

Considere o sistema de n equações diferenciais lineares (2.6). O polinômio característico é obtido através de $\det(A - \lambda I) = 0$. Quando todos os autovalores da matriz A tiverem a parte real diferente de zero, o ponto de equilíbrio x^* é chamado de *hiperbólico*, independente do valor da parte imaginária. Quando pelo menos um autovalor tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é denominado de *não-hiperbólico*.

Os pontos de equilíbrio hiperbólicos podem ser classificados de três formas quanto à estabilidade: *atratores*, *repulsores*, e *selas*.

- Se todos os autovalores de A têm a parte real negativa, o ponto de equilíbrio é chamado de atrator, sendo que neste caso o equilíbrio é assintoticamente estável. Se todos os autovalores de A são complexos, então o atrator é chamado de *foco estável*, e se todos os autovalores de A são reais, o atrator é chamado de *nó estável*.
- Se todos os autovalores da matriz A têm a parte real positiva o ponto de equilíbrio é chamado de repulsor ou *fonte*. Se os autovalores são complexos, então a fonte é chamada de *foco instável* e, se todos os autovalores de A são reais, a fonte é chamada de *nó instável*.
- Quando alguns autovalores (mas não todos) têm a parte real positiva e o restante tem a parte real negativa, então o ponto de equilíbrio é chamado de sela.

Quanto à estabilidade de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos, pode-se dizer que:

- Um ponto de equilíbrio não-hiperbólico é *instável* se um ou mais autovalores de A tem a parte real positiva.
- Se alguns autovalores da matriz A tem a parte real negativa, enquanto que os outros autovalores tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é chamado de *marginamente estável*.
- Se todos os autovalores da matriz A são imaginários puros e não-nulos, o ponto de equilíbrio é chamado de *centro*.

2.11 Sistema não-linear

Em geral é impossível obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não lineares. Entretanto, um sistema não linear pode ser aproximado em torno de um ponto de equilíbrio por um sistema linear. Tal procedimento é conhecido como linearização. Estudando a aproximação linear, pode-se, às vezes, prever o comportamento das soluções do sistema não linear na vizinhança do ponto de equilíbrio.

2.11.1 Linearização

Seja o sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem (2.3)

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

para o qual existe um ponto de equilíbrio $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Em torno desse ponto, as funções $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, podem ser aproximadas por equações de retas, ou seja, equações lineares. Para isso, expandem-se essas funções em série de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) &= f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}|_{x^*}(x - x_1^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}|_{x^*}(x - x_2^*) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}|_{x^*}(x - x_n^*) + \\ &\quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2}|_{x^*}(x - x_1^*)^2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2}|_{x^*}(x - x_2^*)^2 + \dots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2}|_{x^*}(x - x_n^*)^2 + \dots, \end{aligned}$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$. Retendo-se apenas a parte linear obtém-se, em notação matricial,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Jx(t), \quad (2.11)$$

sendo x o vetor coluna das variáveis de estado e J a matriz Jacobiana

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

2.11.2 Equivalência Topológica

Seja a função $g(x) = y$, $g = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, suponha g uma função bijetora. Uma função com essa propriedade é invertível, isto é, existe a função inversa $g^{-1}(y) = x$. Se g é contínua, invertível e sua inversa g^{-1} é contínua, então g é um homeomorfismo e o domínio x e imagem y são homeomorfos. Quando os retratos de fases dos sistemas dinâmicos $\dot{x} = f(x)$ e $\dot{y} = h(y)$ podem ser relacionados por um homeomorfismo $g(x) = y$ que preserva o sentido do movimento (a orientação) no espaço de fases, então esses sistemas são topologicamente orbitalmente equivalentes. Isso significa que as trajetórias de um sistema podem ser continuamente deformadas até se tornarem iguais às trajetórias do outro sistema. Deformações contínuas envolvem esticamentos e alongamentos, mas não cortes ou emendas. Dois retratos de fases que apresentam a mesma estrutura orbital são qualitativamente equivalentes, conseqüentemente eles apresentam comportamentos dinâmicos similares. Portanto,

se as trajetórias na vizinhança de um ponto fixo do sistema dinâmico não linear são qualitativamente equivalentes àsquelas do sistema linearizado, então é possível fazer um estudo local da estabilidade.

2.11.3 Teorema de Hartman-Grobman

D.M. Grobman, em 1959, e P. Hartman, em 1963, provaram independentemente que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não-linear de dimensão n apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear correspondente [18].

Portanto, o teorema de Hartman-Grobman garante que a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema em torno desse ponto, de modo que o retrato de fases, na sua vizinhança, é topologicamente orbitalmente equivalente ao retrato de fases do sistema linear associado. Dois retratos de fases são topologicamente orbitalmente equivalentes quando um é uma versão distorcida do outro. Se o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, ou seja, se há algum autovalor com parte real nula, então a linearização não permite prever sua estabilidade. Nesse caso, devem-se considerar termos de ordem superior que foram desprezados na expansão em série das funções $f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ou usar outro método para determinar a estabilidade, como o *método direto de Lyapunov* ou a *teoria da variedade central*.

Capítulo 3

Matriz de Transição de Estados para Sistemas Periódicos

3.1 Sistemas lineares com coeficientes periódicos - Teoria de Floquet

Neste capítulo são utilizados os símbolos $\{\cdot\}$ e $[\cdot]$ para designar respectivamente vetores e matrizes. Seja o sistema linear de m equações lineares de primeira ordem, escrito na forma matricial

$$\{\dot{x}\} = [A(t)]\{x\}, \quad (3.1)$$

onde x é um vetor $m \times 1$ e os elementos $A_{ij}(t)$ ($i, j = 1, 2, \dots, m$) da matriz $[A(t)]$ são funções contínuas periódicas no tempo com período T , isto é

$$[A(t + T)] = [A(t)]. \quad (3.2)$$

Esse sistema admite m soluções $x^j(t)$ $j = 1, 2, \dots, m$ linearmente independentes. Tais soluções formam um conjunto fundamental e qualquer outra solução pode ser escrita como uma combinação linear destas soluções. Uma matriz $m \times m$ $[\varphi(t)]$ cujas colunas são as soluções linearmente independentes de (3.1) é chamada *Matriz Fundamental* para o sistema homogêneo (3.1) [18]. Como qualquer solução pode ser expressa como uma combinação linear do conjunto fundamental de soluções, isto implica que qualquer solução de (3.1) pode ser escrita na forma

$$\{x(t)\} = [\varphi(t)]\{k\}, \quad (3.3)$$

onde $\{k\}$ é um vetor constante unicamente determinado, com os elementos k_i ($i = 1, 2, \dots, m$) não todos nulos.

Se $[\varphi]$ é uma matriz fundamental de (3.1) e $[C]$ é uma matriz $m \times m$ constante não-singular, então $[\varphi][C]$ também é uma matriz fundamental de (3.1). Como $\{x(0)\} = [\varphi(0)]\{k\}$, então a relação entre $\{x(t)\}$ e sua condição inicial $\{x(0)\}$ vale $\{x(t)\} = [\varphi(t)][\varphi^{-1}(0)]\{x(0)\}$. A matriz fundamental satisfaz a equação matricial

$$[\dot{\varphi}(t)] = [A(t)][\varphi(t)], \quad (3.4)$$

e em vista de (3.2), a equação (3.4) pode ser escrita como

$$[\dot{\varphi}(t+T)] = [A(t+T)][\varphi(t+T)] = [A(t)][\varphi(t+T)] \quad (3.5)$$

da qual segue que $[\varphi(t+T)]$ também é matriz fundamental do sistema (3.1).

Como ambos $[\varphi(t)]$ e $[\varphi(t+T)]$ representam soluções fundamentais, existe uma matriz constante não singular $[C]$ tal que

$$[\varphi(t+T)] = [\varphi(t)][C]. \quad (3.6)$$

A relação (3.6) pode ser vista como um mapa que leva a matriz $[\varphi]$, calculada em t , na matriz $[\varphi]$, calculada em $t+T$.

Chama-se $[C]$ de *Matriz de Monodromia* se $[\varphi(0)] = [I]$, sendo $[I]$ a matriz identidade. Os autovalores ρ_j de $[C]$ são chamados *multiplicadores característicos* ou *multiplicadores de Floquet*. Apesar da escolha de $[\varphi]$ não ser única, existe um único conjunto de multiplicadores de Floquet associado à matriz $[A]$. Note que a matriz $[C]$ é dada por

$$[C] = [\varphi^{-1}(t)][\varphi(t+T)] = [\varphi^{-1}(0)][\varphi(T)] = [\varphi(T)] \quad (3.7)$$

pois $[\varphi^{-1}(0)] = [I]$

G.Floquet (1847-1920) provou em 1883, que a matriz fundamental $[\varphi(t)]$ pode ser escrita como

$$[\varphi(t)] = [Q(t)]e^{t[R]} \quad (3.8)$$

sendo $[R]$ uma matriz formada por coeficientes constantes, e $[Q(t)] = [Q(t+T)]$ com $[Q(0)] = [I]$. Como $[\varphi(T)] = [Q(T)]e^{T[R]}$ e $[Q(T)] = [Q(0)] = [I]$, então a matriz de monodromia $[C]$ pode ser escrita como

$$[C] = e^{T[R]} \quad (3.9)$$

Uma consequência desse teorema é que um sistema linear com coeficientes periódicos pode ser transformado num sistema linear com coeficientes constantes. De fato, em 1892 Lyapunov mostrou que se a matriz periódica $[A(t)]$ é real, então existe uma matriz $[Q(t)]$, com $[Q(t+T)] = [Q(t)]$ e $[Q(0)] = [I]$, tal que a mudança de coordenadas $\{x(t)\} = [Q(t)]\{y(t)\}$ transforma o sistema 3.1 num sistema linear, homogêneo e autônomo, dado por

$$\{\dot{y}(t)\} = [R]\{y(t)\} \quad (3.10)$$

Os autovalores λ_j de $[R]$ relacionam-se com os multiplicadores característicos ρ_j através de

$$\rho_j = e^{T\lambda_j} \quad (3.11)$$

Os números λ_j são chamados de *expoentes característicos* ou *expoentes de Floquet*.

Uma vez que os multiplicadores característicos ρ_j são unicamente determinados, somente a parte real dos expoentes característicos λ_j são unicamente determinados, como pode ser visto de

$$\lambda_j = \frac{1}{T}(\ln |\rho_j| + i \arg \rho_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.12)$$

Um multiplicador característico é dito *simples* se sua multiplicidade for 1.

Os teoremas provados por Floquet e Lyapunov revelam que estudar a estabilidade do sistema autônomo (3.10) equivale a estudar a estabilidade do sistema com coeficientes periódicos (3.1)

Sobre a estabilidade do sistema (3.1), têm-se que [17]

- Se todos os expoentes característicos possuem a parte real negativa, então todas as soluções da eq. (3.1) são assintoticamente estáveis.

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.13)$$

Das eqs. (3.11) segue-se que $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ implica $|\rho_j| < 1$

- Se pelo menos um dos expoentes característicos possui a parte real positiva, o sistema (3.1) é *instável*.
- Se alguns dos expoentes característicos possuem a parte real negativa e o restante possui a parte real nula, e se os divisores elementares (Apêndice A) correspondentes aos últimos são simples, então a solução é *estável*; se estes divisores não são simples, a solução é *instável*.

- Uma solução puramente periódica é possível somente quando um dos expoentes característicos é identicamente nulo. Mostra-se que se ρ é um multiplicador característico de (3.1), então existe uma solução $\{x(t)\}$ tal que $\{x(t+T)\} = \rho\{x(t)\}$. Mostra-se também que se uma solução $\{x(t)\}$ satisfaz a relação $\{x(T)\} = \rho\{x(0)\}$, então ρ é um multiplicador característico. Portanto, o sistema (3.1) tem *solução periódica de período T* somente se algum multiplicador característico vale $+1$, pois, assim, $\{x(t+T)\} = \{x(t)\}$. Se algum multiplicador característico vale -1 , então o sistema 3.1 tem uma *solução periódica de período $2T$* , pois, neste caso, $\{x(t+2T)\} = -\{x(t+T)\} = \{x(t)\}$ [18].

A matriz de monodromia $[\varphi(T)]$, que é a matriz fundamental calculada no final do período T , é denominada também *Matriz de Transição de Floquet* (FTM), e a matriz fundamental $[\varphi(t)]$ é denominada *Matriz de Transição de Estados* (STM).

3.2 Aproximações de funções

Na introdução foi citado um novo método onde é feita a *expansão* da matriz do sistema periódico e do vetor estado em termos de polinômios alterados de Chebyshev . Primeiramente é preciso entender por que não expandir em série de Taylor, ou outra qualquer. Veja um exemplo simples: pode-se usar a expansão em série de Taylor para a função exponencial

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (3.14)$$

Esta é certamente uma fórmula precisa, mas possui infinitos termos. O que se faz, então, é reter um número finito de termos (truncar) e usar a fórmula

$$e^x \cong \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \quad (3.15)$$

Esta é uma aproximação e tem-se que considerar o erro que ocorreu através do truncamento de (3.14) para (3.15). Por exemplo, será que existe uma maneira de calcular $e^{0.2}$ mais eficientemente do que usando (3.15), com uma escolha conveniente de N ? Utilizando alguns dos princípios e métodos de análise numérica, pode-se construir uma aproximação na qual produzirá o valor desejado, necessitando de um menor número de operações aritméticas do que (3.15). Como no truncamento da série de Taylor, a maneira mais simples de aproximações são aquelas consistindo de polinômios. Um caminho para obter aproximações polinomiais é truncar a série de Taylor, e outro caminho é truncar a expansão de polinômios ortogonais.

Uma aproximação de uma dada forma é melhor do que outra forma se a norma máxima do erro associada com a primeira é menor que aquela associada com a última [28].

3.3 Polinômios Ortogonais

Uma seqüência de polinômios ortogonais $\{\pi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, onde $\pi_n(x)$ é um polinômio de grau n em x , satisfaz a seguinte relação

$$\int_a^b w(x)\pi_n(x)\pi_m(x)dx = C_n\delta_{mn} \quad (3.16)$$

onde $w(x)$ é uma função peso, C_n é uma constante e o delta de Kronecker é definido como

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (3.17)$$

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\pi_n(x) \quad (3.18)$$

então

$$a_n = \frac{1}{C_n} \int_a^b w(x)f(x)\pi_n(x)dx \quad (3.19)$$

Pode ser mostrado, de uma maneira direta, que se for minimizada a expressão

$$\int_a^b w(x)[f(x) - f^*(x)]^2 dx \quad (3.20)$$

onde

$$f^*(x) = \sum_{n=0}^N a_n\pi_n(x) \quad (3.21)$$

então os coeficientes (3.19) serão encontrados. Isto levaria ao estudo de aproximações dos mínimos quadrados.

Considere o intervalo $[-1, 1]$ e a função peso, $w(x) = 1$. Os polinômios ortogonais associados são os polinômios de Legendre, $P_n(x)$. Eles podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (3.22)$$

e satisfazem a relação de recorrência

$$P_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)xP_n(x) - \left(\frac{n}{n+1}\right)P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.23)$$

onde $P_0(x) = 1$ e $P_1(x) = x$.

Também satisfazem a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}. \quad (3.24)$$

Uma outra propriedade interessante desses polinômios é que se eles são multiplicados por uma constante b_n , de modo que o coeficiente de x^n fique unitário, ou seja, polinômio mônico, então eles têm a menor norma dos mínimos quadrados ¹ entre todos os polinômios em $[-1, 1]$ com o primeiro coeficiente unitário.

Teorema 3.1. $P_N(x)$ possui N zeros reais distintos no intervalo $[-1, 1]$ [28].

Então, $P_N(x)$ oscila em torno de zero com uma amplitude variada. De fato, a amplitude destas oscilações aumentam à medida que se afasta da origem. Este comportamento é indicado na Figura 3.1

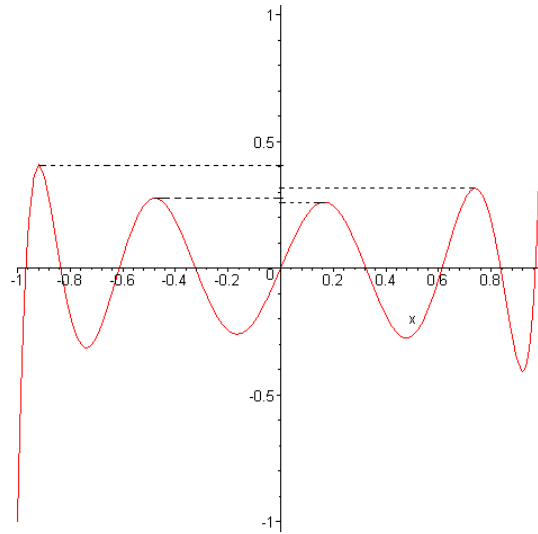


Figura 3.1: Polinômio de Legendre de grau 9.

Os polinômios de Legendre pertencem a uma classe mais geral das funções, os polinômios ultraesféricos. Eles são dados pela relação

$$P_n^\alpha = C_n(1-x^2)^{-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\alpha} \quad (-1 \leq \alpha < \infty) \quad (3.25)$$

onde C_n são constantes. Eles são ortogonais sobre $[-1, 1]$ com respeito à função peso $w(x) = (1-x^2)^\alpha$. Os polinômios de Legendre correspondem à escolha $\alpha = 0$, enquanto que a escolha

¹A norma dos mínimos quadrados da diferença de duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, sobre um intervalo $[a, b]$ é $\|f - g\|_{MQ} = \int_a^b w(x)[f(x) - g(x)]^2 dx$

$\alpha = \infty$ corresponde à série de Taylor. Pelo Teorema 3.1 tem-se que P_n^α possui n zeros distintos reais no intervalo $[-1, 1]$, e então exibe um comportamento oscilatório em todo o intervalo.

Pode ser mostrado que, para $-\frac{1}{2} < \alpha < \infty$ a amplitude dessas oscilações aumentam à medida que se afasta da origem. Por outro lado, para $-1 \leq \alpha < -\frac{1}{2}$, a amplitude da oscilação diminui quando se afasta da origem. Para $\alpha = -\frac{1}{2}$, a amplitude de oscilação permanece constante do começo ao fim do intervalo $[-1, 1]$. Os polinômios que correspondem a este valor de α são os polinômios de Chebyshev, $T_n(x)$. A Figura 3.2 ilustra o comportamento de $T_9(x)$

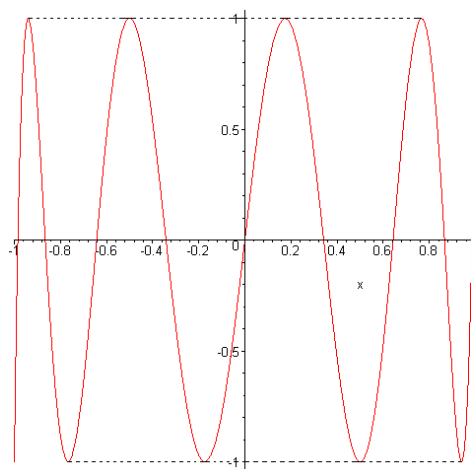


Figura 3.2: Polinômio de Chebyshev de grau 9.

Expansões em polinômios ultrasféricos apresentam convergência mais forte quando é feita a escolha $\alpha = -\frac{1}{2}$, que corresponde aos polinômios de Chebyshev.

3.3.1 Polinômios de Chebyshev

Os polinômios de Chebyshev são historicamente os mais antigos dos vários conjuntos de polinômios ortogonais. A razão disso é que eles simplesmente se relacionam com as funções trigonométricas pela fórmula

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad (3.26)$$

Então, da bem conhecida identidade trigonométrica, tem-se

$$\cos 0 = 1$$

$$\cos \theta = \cos \theta$$

$$\cos(2\theta) = 2(\cos\theta)^2 - 1$$

...

fazendo $x = \cos\theta$, conclui-se imediatamente que

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

O restante dos polinômios de Chebyshev pode ser facilmente calculado usando-se a fórmula de recorrência

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n \geq 1, \quad (3.27)$$

que segue da identidade trigonométrica correspondente.

3.3.2 Polinômios alterados de Chebyshev

Os polinômios alterados de Chebyshev $T_n^*(t)$ são definidos em termos dos polinômios de Chebyshev $T_n(t)$ pela relação

$$T_n^*(t) = T_n(2t - 1) \quad (3.28)$$

Seu domínio natural é o intervalo $[0, 1]$. Podem ser gerados a partir dos dois primeiros termos $T_0^*(t) = 1$, $T_1^*(t) = 2t - 1$ e pela lei de recorrência

$$T_{r+1}^*(t) = 2(2t - 1)T_r^*(t) - T_{r-1}^*(t), \quad r \geq 1 \quad (3.29)$$

Logo, para $r = 1, 2, 3, \dots$, tem-se

$$\begin{aligned} T_2^*(t) &= 8t^2 - 8t + 1 \\ T_3^*(t) &= 32t^3 - 48t^2 + 18t - 1 \\ T_4^*(t) &= 128t^4 - 256t^3 + 160t^2 - 32t - 1 \\ T_5^*(t) &= 512t^5 - 1280t^4 + 1120t^3 - 400t^2 + 50t - 1 \\ T_6^*(t) &= 2048t^6 - 6144t^5 + 6912t^4 - 3584t^3 + 840t^2 - 72t + 1 \\ T_7^*(t) &= 8192t^7 - 28672t^6 + 39424t^5 - 26880t^4 + 9408t^3 - 1568t^2 + 98t - 1 \\ T_8^*(t) &= 32768t^8 - 131072t^7 + 212992t^6 - 180224t^5 + 84480t^4 - 21504t^3 \\ &\quad + 2688t^2 - 128t + 1 \\ T_9^*(t) &= 131072t^9 - 589824t^8 + 1105920t^7 - 1118208t^6 + 658944t^5 - 228096t^4 \\ &\quad + 44352t^3 - 4320t^2 + 162t - 1 \\ &\dots \end{aligned}$$

3.3.3 Propriedades dos polinômios alterados de Chebyshev

As relações de ortogonalidade são dadas por

$$\int_0^1 w(t) T_n^*(t) T_m^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0; \\ \pi, & m = n = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

onde $w(t)$ é a função peso. Para os polinômios alterados de Chebyshev, $w(t) = (t - t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Geralmente, uma função contínua no tempo $f(t)$ pode ser expandida em uma série de Chebyshev como

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.31)$$

Os coeficientes de Chebyshev, a_n , podem ser obtidos de

$$a_n = \frac{1}{\delta} \int_0^1 w(\tau) f(\tau) T_n^*(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.32)$$

onde

$$\delta = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \neq 0; \\ \pi, & n = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

De acordo com o que já foi visto, esta série infinita pode ser aproximada por uma série finita com m termos, e ficará

$$f(t) = \sum_{n=0}^m a_n T_n^*(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.34)$$

Como exemplo, é feita uma expansão da função $\cos(2\pi t)$ no intervalo $[0, 1]$, com um número finito de termos, isto é,

$$\cos(2\pi t) = \sum_{n=0}^{m-1} a_n T_n^*(t) = \{a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{m-1}\} \cdot \{T_0^* \ T_1^* \ T_2^* \ \dots \ T_{m-1}^*\}^T, \quad (3.35)$$

onde $\{ \}^T$ indica vetor transposto. Os coeficientes de Chebyshev são facilmente calculados da equação (3.32). Eles estão apresentados na Tabela 3.1, onde usou-se software Maple® para a realização dos cálculos.

Na Figura 3.3, estão apresentados os gráficos da função $\cos(2\pi t)$ (linha contínua) e sua aproximação dada pela expansão em polinômios alterados de Chebyshev (pontos), com 10 termos, no intervalo $[0, 1]$

$a_0=0.30424219$	$a_1=0$
$a_2=9.7086799$	$a_3=0$
$a_4=-0.30284708$	$a_5=0$
$a_6=0.02909024$	$a_7=0$
$a_8=-0.00139122$	$a_9=0$
$a_{10}=0.00004022$	$a_{11}=0$
$a_{12}=-0.00000075$	$a_{13}=0$

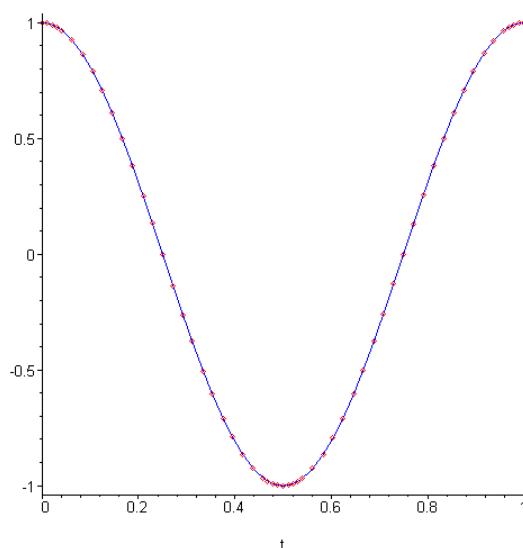
Tabela 3.1: Coeficientes de Chebyshev na expansão de $\cos(2\pi\tau)$ 

Figura 3.3: Aproximação da função cosseno usando polinômios alterados de Chebyshev .

3.3.4 Matriz Operacional de Integração

A fórmula recursiva geral para integração dos polinômios alterados de Chebyshev pode se escrita como

$$\int_0^t T_n^*(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{T_{n+1}^*(t)}{n+1} - \frac{T_{n-1}^*(t)}{n-1} \right) - \frac{(-1)^n}{2(n^2-1)}, & n = 0, 2, 3, 4, \dots \\ \frac{1}{8} \left(T_2^*(t) - T_0^*(t) \right), & n = 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

Note que $T_{-1}^* = \cos(-\theta) = \cos(\theta) = T_1^*$. Escrevendo em forma matricial temos

$\int_0^t \{T^*(\tau)\} d\tau = [G]\{T^*\}$, onde $[G]$ é a matriz operacional de integração, dada por

$$[G] = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/8 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1/6 & -1/4 & 0 & 1/12 & 0 & \dots & 0 \\ 1/16 & 0 & -1/8 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ -1/30 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1/4(m-1) \\ \frac{-(-1)^{m-1}}{2m(m-2)} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-1}{4(m-2)} & 0 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (3.37)$$

e

$$\{T^*(t)\} = \{T_0^*(t) \ T_1^*(t) \ T_2^*(t) \ \dots \ T_{m-1}^*(t)\}^T \quad (3.38)$$

é um vetor coluna dos polinômios.

3.3.5 Matriz Operacional do Produto

Considere a relação associada com os produtos destes polinômios. O produto escalar de dois polinômios alterados de Chebyshev é dado por

$$T_r^*(t)T_k^*(t) = \frac{1}{2}(T_{r+k}^*(t) + T_{|r-k|}^*(t)), \quad r, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.39)$$

enquanto que o produto vetorial de dois vetores de Chebyshev pode ser representado como

$$\{T^*(t)\}\{T^*(t)\}^T = \begin{bmatrix} T_0^* & T_1^* & T_2^* & \dots & T_{m-1}^* \\ T_1^* & \frac{1}{2}(T_0^* + T_2^*) & \frac{1}{2}(T_1^* + T_3^*) & \dots & \frac{1}{2}(T_m^* + T_{m-2}^*) \\ T_2^* & \frac{1}{2}(T_1^* + T_3^*) & \frac{1}{2}(T_0^* + T_4^*) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{m-1}^* & \frac{1}{2}(T_m^* + T_{m-2}^*) & \dots & \frac{1}{2}(T_0^* + T_{2(m-1)}^*) \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (3.40)$$

Portanto, por exemplo, se

$$f(t) = \sum_{r=0}^{m-1} a_r T_r^*, \quad g(t) = \sum_{r=0}^{m-1} b_r T_r^*, \quad (3.41)$$

então

$$f(t)g(t) = \{a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{m-1}\}\{T^*\}\{T^*\}^T\{b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{m-1}\}^T. \quad (3.42)$$

onde a_r e b_r são coeficientes de Chebyshev das funções $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente. Usando a equação (3.40), reescreve-se a equação (3.42) como

$$f(t)g(t) = \{T^*\}^T [Q_a] \{b\}, \quad (3.43)$$

onde $[Q_a]$ é a matriz operacional do produto correspondente à $f(t)$, dada por

$$[Q_a] = \begin{bmatrix} a_0 & a_1/2 & a_2/2 & \dots & a_{m-1}/2 \\ a_1 & a_0 + a_2/2 & \frac{1}{2}(a_1 + a_3) & \dots & \frac{1}{2}(a_{m-2} + a_m) \\ a_2 & \frac{1}{2}(a_1 + a_3) & a_0 + a_4/2 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1} & \frac{1}{2}(a_{m-2} + a_m) & \dots & a_0 + a_{2(m-1)}/2 \end{bmatrix}_{m \times m} \quad (3.44)$$

e $\{b\} = \{b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{m-1}\}^T$. Os coeficientes a_r com $r > m - 1$ na equação (3.44) podem ser considerados nulos.

3.4 Método iterativo de Picard

Considere um sistema de n equações diferenciais lineares periódicas no tempo

$$\{\dot{x}(t, \alpha)\} = [A(t, \alpha)]\{x(t, \alpha)\} \quad \{x(0, \alpha)\} = \{x^0\}, \quad (3.45)$$

onde $\{x(t, \alpha)\} \in \mathbb{R}^N$ é o vetor estado que depende do tempo $t \in \mathbb{R}^+$, $\{\alpha\} \in \mathbb{R}^L$ é o vetor dos parâmetros (a derivada é com respeito ao tempo), e a matriz $[A(t, \alpha)]_{n \times n}$ pode ser escrita como

$$[A(t, \alpha)] = [A_1(\alpha)]f_1(t) + [A_2(\alpha)]f_2(t) + \dots + [A_r(\alpha)]f_r(t).$$

As funções

$$f_i(t) = f_i(t + \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, r$$

são periódicas com período β_i e as matrizes constantes $[A_i(\alpha)]_{n \times n}$, $i = 1, 2, \dots, r$ contêm os coeficientes destas funções periódicas. Assumindo que as frequências sejam proporcionais, o menor número inteiro positivo T tal que $q_i \beta_i = T$, para inteiros positivos q_i , é o período principal da matriz do sistema $[A(t + T, \alpha)] = [A(t, \alpha)]$. Lembrando que a matriz solução fundamental $[\Phi(t, \alpha)]$ da equação (3.45) satisfaz

$$[\dot{\Phi}(t, \alpha)] = [A(t, \alpha)][\Phi(t, \alpha)] \quad [\Phi(0, \alpha)] = [I],$$

a solução para certa condição inicial é expressa como $\{x(t, \alpha)\} = [\Phi(t, \alpha)]\{x^0\}$. A matriz fundamental das soluções $[\Phi(t, \alpha)]$ é obtida pelas iterações de Picard, polinômios de Chebyshev e das matrizes operacionais.

Uma equivalente forma integral para (3.45) é

$$\{x(t, \alpha)\} = \{x^0\} + \int_0^t [A(\tau, \alpha)]\{x(\tau, \alpha)\}d\tau \quad (3.46)$$

Como “zero”-ésima aproximação, seja $\{x^{(0)}(t, \alpha)\} = \{x(0, \alpha)\} = \{x^0\}$. À partir de (3.46) tem-se a primeira aproximação para $\{x(t, \alpha)\}$

$$\{x^{(1)}(t, \alpha)\} = \{x^0\} + \int_0^t [A(\tau_0, \alpha)]\{x^{(0)}(\tau_0, \alpha)\}d\tau_0 = \left([I] + \int_0^t [A(\tau_0, \alpha)]d\tau_0\right)\{x^0\}, \quad (3.47)$$

onde τ_0 é uma variável auxiliar. A segunda aproximação é obtida da equação (3.46) como

$$\begin{aligned} \{x^{(2)}(t, \alpha)\} &= \{x^0\} + \int_0^t [A(\tau_1, \alpha)]\{x^{(1)}(\tau_1, \alpha)\}d\tau_1 \\ &= \left([I] + \int_0^t [A(\tau_1, \alpha)]d\tau_1 + \int_0^t [A(\tau_1, \alpha)] \int_0^{\tau_1} [A(\tau_0, \alpha)]d\tau_0d\tau_1\right)\{x^0\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde τ_1 é outra variável auxiliar. Continuando desta maneira, obtém-se a $(k+1)$ -ésima aproximação

$$\begin{aligned} \{x^{(k+1)}(t, \alpha)\} &= \{x^0\} + \int_0^t [A(\tau_k, \alpha)]\{x^{(k)}(\tau_k, \alpha)\}d\tau_k \\ &= \left([I] + \int_0^t [A(\tau_k, \alpha)]d\tau_k + \int_0^t [A(\tau_k, \alpha)] \int_0^{\tau_k} [A(\tau_{k-1}, \alpha)]d\tau_{k-1}d\tau_k \right. \\ &\quad \left. + \dots + \int_0^t [A(\tau_k, \alpha)] \dots \int_0^{\tau_1} [A(\tau_0, \alpha)]d\tau_0 \dots d\tau_k\right)\{x^0\}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$, são todas variáveis auxiliares. A série de integrais é uma aproximação para a matriz fundamental $[\phi(t, \alpha)]$, pois é truncada após um número finito de termos, enquanto que a solução exata é uma série infinita.

Infelizmente, a estimativa simbólica da matriz fundamental via equação (3.49), em geral, conduz a expressões complicadas para $\Phi(t, \alpha)$ e, somando-se a isso, não é eficiente quando $r > 1$ devido às repetidas integrações por partes. Para evitar isso, faz-se primeiro a transformação $t = T\tau$ na equação (3.45) que normaliza o período principal do sistema para um e, em seguida, multiplica-se a equação toda por T e obtém-se

$$\{dx(\tau, \alpha)/d\tau\} = [\bar{A}(\tau, \alpha)]\{x(\tau, \alpha)\}, \quad [\bar{A}(\tau + 1, \alpha)] = [\bar{A}(\tau, \alpha)], \quad \{x(0, \alpha)\} = \{x^0\}, \quad (3.50)$$

onde

$$[\bar{A}(\tau, \alpha)] = [\bar{A}_1(\alpha)]f_1(\tau) + [\bar{A}_2(\alpha)]f_2(\tau) + \dots + [\bar{A}_r(\alpha)]f_r(\tau), \quad f_i(\tau) = f_i(\tau + 1)$$

e

$$[\bar{A}_i(\alpha)] = T[A_i(\alpha)], \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Agora, as matrizes dos polinômios de Chebyshev são usadas na expansão da matriz do sistema normalizado com m polinômios alterados de Chebyshev como

$$[\bar{A}(\tau, \alpha)] = [\hat{T}(\tau)]^T [D(\alpha)] = [D'(\alpha)] [\hat{T}(\tau)], \quad (3.51)$$

onde $[\hat{T}(\tau)]_{nm \times n}$, $[\hat{I}]_{nm \times n}$ e a matriz dos coeficientes de Chebyshev $[D(\alpha)]_{nm \times n}$, $[D'(\alpha)]_{n \times nm}$ são definidas como

$$\begin{aligned} [D(\alpha)] &= \sum_{i=1}^r [\bar{A}_i(\alpha)] \otimes \{d_i\}, \\ [D'(\alpha)] &= \sum_{i=1}^r [\bar{A}_i(\alpha)] \otimes \{d_i\}^T, \\ [\hat{T}(\tau)] &= [I]_n \otimes \{T^*(\tau)\}, \\ [\hat{I}] &= [I]_n \otimes \{1 \underbrace{0 \dots 0}_{m-1}\}^T. \end{aligned} \quad (3.52)$$

onde $\otimes$ é produto de Kronecker (definido no Apêndice B).

Os vetores coluna $\{d_i\}$ $m \times 1$ ($\{d_i\}^T$ $1 \times m$) contêm os coeficientes na expansão de Chebyshev de funções 1-periódicas como

$$\begin{aligned} f_i(\tau) &= \sum_{j=0}^{m-1} d_{ij} T_j^*(\tau) = \{T^*(\tau)\}^T \{d_i\} = \{d_i\}^T \{T^*(\tau)\}, \\ \{d_i\} &= \{d_{i0} \ d_{i1} \ \dots \ d_{im-1}\}^T, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde $T_j^*(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq 1$) são os polinômios de Chebyshev. Então, usando a matriz operacional de integração e a matriz identidade dos coeficientes, a equação (3.47) pode ser reescrita como

$$\{x^{(1,m)}(\tau, \alpha)\} = \left([I] + \int_0^\tau [\hat{T}]^T(\tau_0) [D(\alpha)] d\tau_0 \right) \{x^0\} = [\hat{T}(\tau)]^T \left([\hat{I}] + [\hat{G}]^T [D(\alpha)] \right) \{x^0\}, \quad (3.54)$$

onde o índice $(1, m)$ indica que a primeira iteração de Picard foi aproximada por m polinômios de Chebyshev. Além disso, usando a matriz operacional do produto, a equação (3.48) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \{x^{(2,m)}(\tau, \alpha)\} &= \left([\hat{T}(\tau)]^T ([\hat{I}] + [\hat{G}]^T [D(\alpha)]) + \int_0^\tau [D'(\alpha)] [\hat{T}(\tau_1)] [\hat{T}(\tau_1)]^T [\hat{G}]^T [D(\alpha)] d\tau_1 \right) \{x^0\} \\ &= \left([\hat{T}(\tau)]^T ([\hat{I}] + [\hat{G}]^T [D(\alpha)]) + \int_0^\tau [\hat{T}(\tau_1)]^T [\hat{Q}(\alpha)] [\hat{G}]^T [D(\alpha)] d\tau_1 \right) \{x^0\} \\ &= [\hat{T}(\tau)]^T \left([\hat{I}] + [\hat{G}]^T [D(\alpha)] + [\hat{G}]^T [\hat{Q}_D(\alpha)] [\hat{G}]^T [D(\alpha)] \right) \{x^0\}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $[\hat{Q}_D(\alpha)] = \sum_{i=1}^r [\bar{A}_i(\alpha)] \otimes [Q_{d_i}]$ é expresso em termos das matrizes $[Q_{d_i}]$ que corresponde aos coeficientes de Chebyshev das funções periódicas $f_i(t)$. Continuando nesse caminho, a aproximação para a matriz solução fundamental da equação (3.45) calculada no final do período principal pode ser escrita em termos de polinômios de Chebyshev como

$$[\Phi^{(p,m)}(\tau, \alpha)] = [\hat{T}(\tau)]^T \left[[\hat{I}] + \left(\sum_{k=1}^p [L(\alpha)]^{k-1} \right) [P(\alpha)] \right] = [\hat{T}(\tau)]^T [B(\alpha)], \quad (3.56)$$

onde $[B(\alpha)]$ contém os coeficientes de Chebyshev dos elementos de $[\Phi(\tau, \alpha)]$ e é escrita em termos de $[L(\alpha)] = [\hat{G}]^T [\hat{Q}_D(\alpha)]$ e $[P(\alpha)] = [\hat{G}]^T [D(\alpha)]$, que são $nm \times nm$ e $nm \times n$, respectivamente. Escolhendo um valor para p , i.e, o número de iterações de Picard, esta expressão truncada dá origem a uma solução aproximada para qualquer grau de precisão desejado. Enquanto isto é válido somente no intervalo $t \in [0, T]$ ou $\tau \in [0, 1]$, a solução pode ser estendida para $t > T$ (ou $\tau > 1$) utilizando a fórmula

$$[\Phi^{(p,m)}(\tau, \alpha)] = [\Phi^{(p,m)}(\eta, \alpha)] [\Phi^{(p,m)k}(1, \alpha)], \quad (3.57)$$

onde $\tau = k + \eta$, $\eta \in [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots$. A matriz $[\Phi^{(p,m)}(1, \alpha)]$ é a Matriz de Transição de Floquet (FTM) cujos autovalores (multiplicadores de Floquet) determinam a estabilidade do sistema. Enquanto estas expressões estão em termos de tempo normalizado, a substituição $\tau = t/T$ produz o resultado em tempo real. Seria bem notado que, usando a propriedade especial da operação do produto de Kronecker, $[L(\alpha)]$ e $[P(\alpha)]$ podem ser escritas em uma forma mais eficiente computacionalmente como

$$[L(\alpha)] = \sum_{i=1}^r [\bar{A}_i(\alpha)] \otimes [G]^T [Q_{d_i}], \quad [P(\alpha)] = \sum_{i=1}^r [\bar{A}_i(\alpha)] \otimes [G]^T \{d_i\},$$

nas quais o esforço computacional gasto em multiplicações de matrizes é minimizado.

Assim, têm-se a aproximação para a matriz fundamental em termos de polinômios alterados de Chebyshev, incluindo um número finito p de iterações de Picard e um apropriado número m de polinômios de Chebyshev (que determina o tamanho das várias matrizes). A expansão de Chebyshev da matriz periódica $[\bar{A}(\tau, \alpha)]$ não somente produz a eficiente aproximação simbólica da matriz fundamental, mas também mostra um resultado mais compacto do que se as integrações na equação (3.49) tivessem sido feitas de fato [24].

3.5 Bifurcação

Um sistema dinâmico que descreve um sistema físico real depende de um ou mais parâmetros. No caso de um sistema de tempo contínuo e autônomo podemos representá-lo

por

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (3.58)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}^m$ representam as variáveis e os parâmetros, respectivamente. Conforme um ou mais parâmetros variam, o retrato de fases também varia. Nesse caso existem duas possibilidades: o sistema permanecer topologicamente equivalente ao original, ou a sua topologia mudar drasticamente.

O aparecimento de um retrato de fases topologicamente não equivalente sob a variação dos parâmetros é chamado bifurcação [14].

Um sistema dinâmico é dito *estruturalmente estável* se para qualquer perturbação suficientemente pequena das equações que o define, o fluxo resultante é topologicamente equivalente àquele associado ao sistema inicial sem a perturbação. Logo, uma bifurcação é uma mudança na topologia do sistema conforme os parâmetros passam através de valores críticos (ponto de bifurcação), e esses parâmetros são conhecidos como parâmetros de controle.

As bifurcações podem ser locais ou globais. Bifurcações locais são aquelas que podem ser previstas estudando-se o campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou uma órbita fechada. Normalmente esse estudo é realizado pelo cálculo de autovalores [21], [11]. Bifurcações globais são aquelas que não podem ser deduzidas a partir de uma análise local.

Seja algum valor $\alpha = \alpha_0$ no sistema (3.58), consideremos o maior conjunto de parâmetros próximos (chamado camada) contendo α_0 e composto por aqueles pontos para os quais o sistema tem um retrato de fases que é topologicamente equivalente àquele de α_0 . Tomando todas as camadas tais que estejam no espaço de parâmetros $\mathbb{R}^m$, obtemos o retrato paramétrico do sistema, que junto com seu retrato de fases característico constituem um *diagrama de bifurcação*.

Um diagrama de bifurcação de um sistema dinâmico é uma estratificação de seu espaço de parâmetros induzida pela equivalência topológica, junto com o representativo retrato de fases para cada camada. [14]

Obtém-se o diagrama de bifurcação como um resultado da análise qualitativa de um sistema dinâmico. Este classifica de maneira condensada todos os possíveis modos de comportamento do sistema e transições entre eles (bifurcações) sob a variação do parâmetro de controle. O diagrama de bifurcações depende, em geral, da região do espaço de fases considerada. Uma bifurcação que necessita de pelo menos m parâmetros de controle para ocorrer é chamada bifurcação de codimensão m .

No caso de sistemas periódicos no tempo, o tipo de bifurcação depende de como os multiplicadores de Floquet, ρ_j , cruzam o círculo unitário em $+1$ ou -1 , e pela existência de um par de números complexos de módulo 1 [4]. As três bifurcações de codimensão um que podem ocorrer, nesse caso, são

- bifurcação *fold*, se $\rho_j = 1$ para algum $j = 1, 2, \dots, n$;
- bifurcação *flip*, se $\rho_j = -1$ para algum $j = 1, 2, \dots, n$;
- bifurcação *de Hopf secundária*, se $|\rho_j| = |\bar{\rho}_j| = 1$ para algum $j = 1, 2, \dots, n$

e estão ilustradas na Figura 3.4.

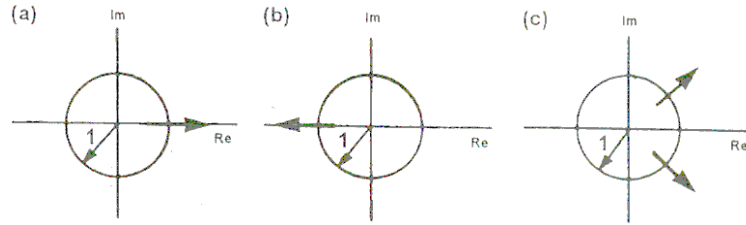


Figura 3.4: Cenários representando como os multiplicadores de Floquet deixam o círculo unitário e suas respectivas bifurcações locais: (a) Bifurcação fold; (b) bifurcação flip-duplicação de período; e (c) bifurcação de Hopf.

3.5.1 Bifurcação fold

É o mecanismo básico pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias é criado ou destruído [18]. Considere o seguinte sistema dinâmico com uma dimensão dependente de um parâmetro

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha) \quad (3.59)$$

Em $\alpha = 0$ este sistema tem um ponto de equilíbrio não hiperbólico $x_0 = 0$ com autovalor $\mu = f_x(0, 0) = 0$. Para $\alpha < 0$ existem dois pontos de equilíbrio $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$, sendo x_1 instável e x_2 estável. Para $\alpha > 0$ não existe ponto de equilíbrio. Enquanto α passa de valores negativos para positivos, os dois pontos de equilíbrio (estável e instável), “se coalecem”, formando em $\alpha = 0$ um ponto de equilíbrio com ($\mu = 0$), e desaparece (Figuras 3.5 e 3.6) [14].

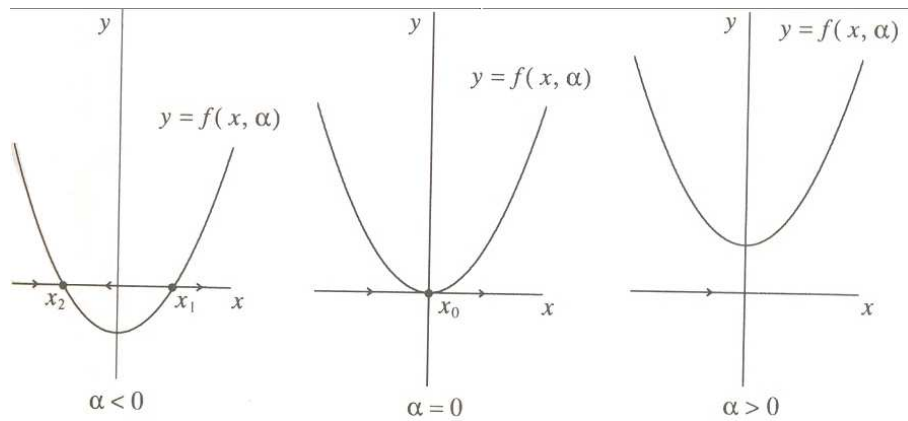


Figura 3.5: Bifurcação fold.

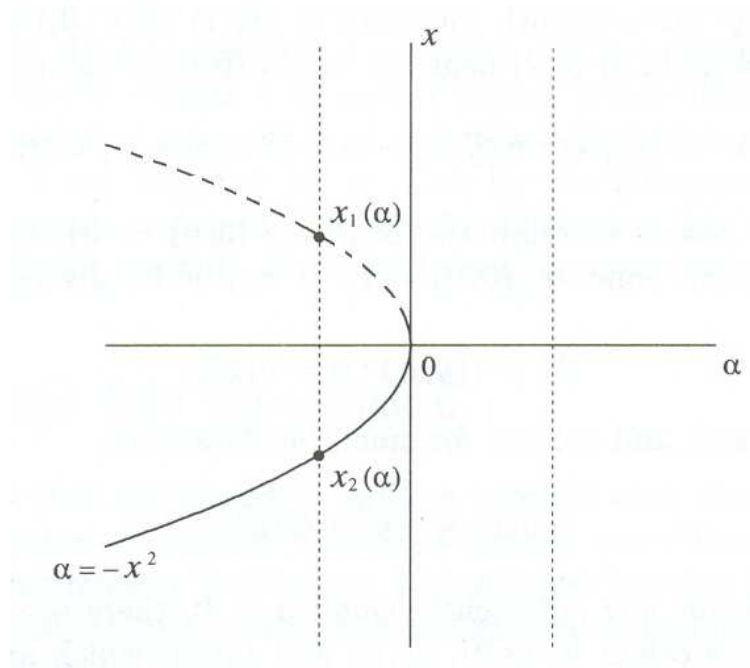


Figura 3.6: Bifurcação fold no espaço fase-parâmetro.

3.5.2 Bifurcação Flip

Quando um multiplicador de Floquet atravessa o círculo unitário em -1 , uma bifurcação de duplicação de período ocorre e a ramificação da solução periódica estável que existe antes da bifurcação (i.e. $\alpha < \alpha_c$) continua como um ramo instável da solução periódica após a bifurcação ($\alpha = \alpha_c$). Um ramo de soluções estáveis com período duplicado é criado se a bifurcação é supercrítica (Figura 3.7 a), enquanto um ramo de soluções instáveis com período duplicado é destruído se a bifurcação é subcrítica (Figura 3.7 b). Considerações locais são suficientes para compreender as consequências de uma bifurcação supercrítica, que é uma bifurcação contínua, enquanto considerações globais são necessárias para entender as consequências de

uma bifurcação subcrítica, que é uma bifurcação catastrófica.

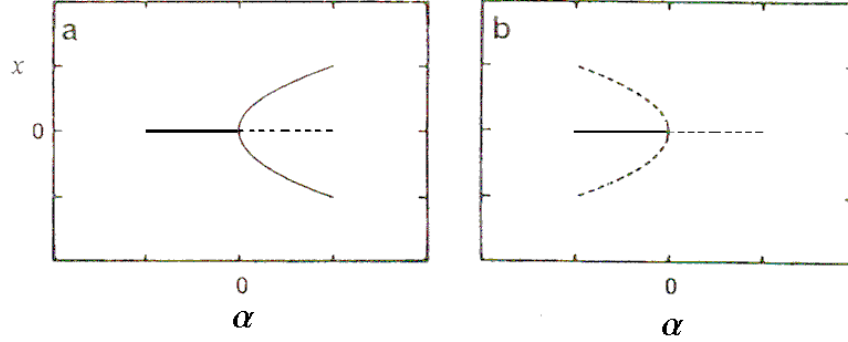


Figura 3.7: Bifurcação flip (a)supercrítica e (b)subcrítica.

3.5.3 Bifurcação Hopf

Essa bifurcação é caracterizada pela existência de um par de multiplicadores de Floquet complexos conjugados que saem do círculo unitário pelo semi-plano que contém o eixo real positivo. Considere o seguinte sistema de duas equações dependentes de um parâmetro

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (3.60)$$

Este sistema possui o ponto de equilíbrio $x_1 = x_2 = 0$ para todo α , e a matriz Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

possui auto valores $\mu_{1,2} = \alpha \pm i$. Introduzindo as variáveis complexas $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$, com $|z|^2 = z\bar{z} = x_1^2 + x_2^2$, elas satisfazem a equação diferencial

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2), \quad (3.61)$$

e reescrevendo o sistema (3.60) na forma complexa, obtém-se

$$\dot{z} = (\alpha + i)z - z|z|^2.$$

Finalmente, usando a representação $z = \rho e^{i\varphi}$, obtém-se

$$\dot{z} = \dot{\rho}e^{i\varphi} + \rho i\dot{\varphi}e^{i\varphi},$$

ou

$$\dot{\rho}e^{i\varphi} + i\rho\dot{\varphi}e^{i\varphi} = \rho e^{i\varphi}(\alpha + i - \rho^2),$$

e chega-se à forma polar do sistema (3.60)

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases} \quad (3.62)$$

Usando coordenadas polares, o sistema torna-se mais fácil de ser analisado pois as equações para ρ e φ são desacopladas. A primeira equação (considerando somente $\rho \geq 0$) tem ponto de equilíbrio $\rho = 0$ para todo valor de α . O equilíbrio é linearmente estável se $\alpha < 0$ e não linearmente estável em $\alpha = 0$; para $\alpha > 0$ o equilíbrio torna-se linearmente instável e, além disso, existe mais um ponto de equilíbrio $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$. A segunda equação descreve uma rotação com velocidade constante. Então, por superposição dos movimentos definidos pelas duas equações de (3.62), obtém-se o seguinte diagrama de bifurcação para o sistema bidimensional original (3.60) (Figura 3.8)

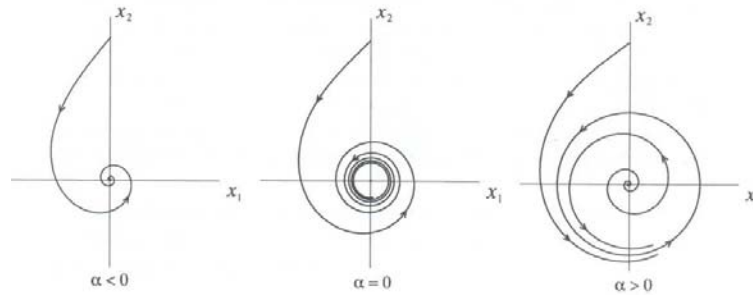


Figura 3.8: Bifurcação de Hopf supercrítica.

O sistema sempre tem um equilíbrio na origem. Este equilíbrio é um foco estável para $\alpha < 0$ e um foco instável para $\alpha > 0$. No valor crítico do parâmetro $\alpha = 0$ o equilíbrio é não linearmente estável e topologicamente equivalente ao foco. É também chamado de foco fracamente de atração. Para $\alpha > 0$, este equilíbrio é cercado por uma órbita isolada fechada (*ciclo limite*) que é única e estável. O ciclo é um círculo de raio $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$. Todas as órbitas começando fora ou dentro do ciclo, exceto na origem, tendem ao ciclo com $t \rightarrow +\infty$. Esta é uma bifurcação de Andronov-Hopf. Em 1942, E. Hopf estabeleceu as condições para a ocorrência de tal bifurcação num sistema n -dimensional. Entretanto, esse tipo de bifurcação já havia sido sugerido por Poincaré, em 1892, e estudado por Andronov, em 1929, para um sistema bidimensional. Por isso, às vezes, ela é chamada de bifurcação de Poincaré-Andronov-

Hopf. Esta bifurcação também pode ser apresentada no espaço (x_1, x_2, α) (Figura 3.9). As α -famílias de ciclos limites formam uma superfície *parabolólica*.

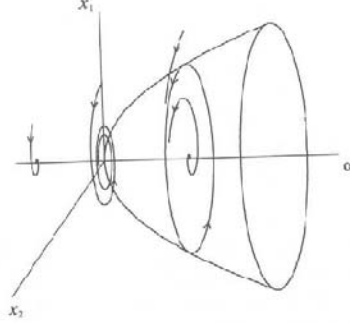


Figura 3.9: Bifurcação de Hopf supercrítica no espaço (x_1, x_2, α) .

Um sistema com termos não lineares com sinais opostos,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{cases} \quad (3.63)$$

que possuem a seguinte forma complexa

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + z|z|^2,$$

pode ser analisado da mesma maneira (Figuras 3.10 e 3.11). O sistema sofre uma bifurcação de Hopf-Andronov em $\alpha = 0$. Ao contrário do que aconteceu no sistema (3.60), existe um ciclo limite *instável* em (3.63), que desaparece quando α passa de valores negativos para positivos. Para $\alpha \neq 0$, o equilíbrio na origem tem a mesma estabilidade que o sistema (3.60): é estável para $\alpha < 0$ e instável para $\alpha > 0$. A estabilidade no valor do parâmetro crítico é oposto ao que aconteceu em (3.60), i.e., é não linearmente instável em $\alpha = 0$.

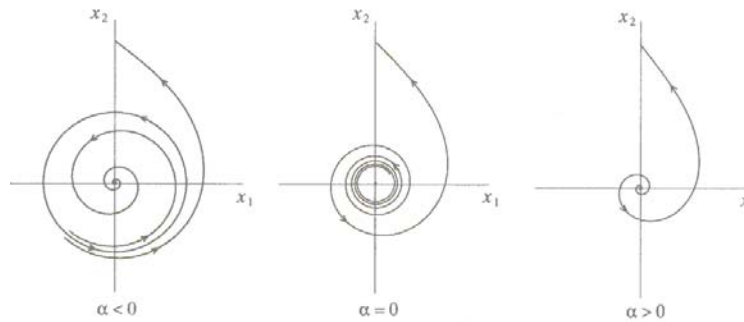


Figura 3.10: Bifurcação de Hopf subcrítica.

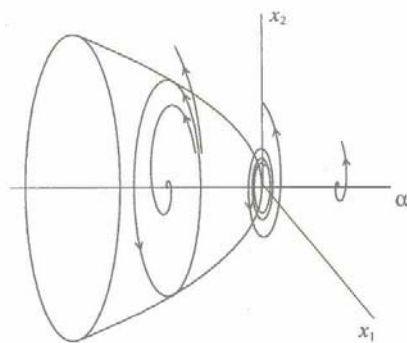


Figura 3.11: Bifurcação de Hopf subcrítica no espaço (x_1, x_2, α) .

Observações:

(1) Foi visto que existem dois tipos de bifurcações de Hopf-Andronov. A bifurcação no sistema (3.60) é freqüentemente chamada de *supercrítica*, pois o ciclo existe para valores positivos do parâmetro α (“após” a bifurcação). A bifurcação no sistema (3.63) é chamada de *subcrítica* pois o ciclo está presente “antes” da bifurcação.

(2) Em ambos os casos têm-se uma perda de estabilidade no equilíbrio para $\alpha = 0$ com o aumento do parâmetro. No primeiro caso (com “-” na frente dos termos cúbicos), o equilíbrio estável é trocado por um ciclo limite estável de pequena amplitude. Portanto o sistema “permanece” em uma vizinhança de equilíbrio e tem-se uma perda de estabilidade amena (“soft”) ou *não catastrófica*. No segundo caso (com “+” na frente dos termos cúbicos), a região de atração do ponto de equilíbrio é limitada por um ciclo instável, que vai se contraindo conforme os parâmetros se aproximam dos valores críticos e desaparece. Então o sistema é “empurrado para fora” da vizinhança do equilíbrio, ocasionando uma perda de estabilidade brusca (“sharp”) ou *catastrófica*. Se o sistema perde a estabilidade não catastroficamente ele é bem controlável: se o parâmetro for tomado negativo novamente, o sistema retorna ao seu estado de equilíbrio. Caso contrário, se o sistema perde a estabilidade catastroficamente, retomando um valor negativo para o parâmetro, o sistema pode não voltar ao seu estado de equilíbrio, pois pode ter a sua região de atração ao lado esquerdo. O tipo de bifurcação de Hopf-Andronov é determinada pela estabilidade do equilíbrio no valor crítico do parâmetro.

(3) Ambas interpretações de bifurcações super e subcritica são consideradas com cuidado. Se é considerado α com uma lenta variação e adicioná-la ao sistema (3.60), a terceira equação torna-se

$$\dot{\alpha} = \epsilon,$$

com ϵ pequeno mas positivo, então o resultado da série temporal $(x(t), y(t), \alpha(t))$ demonstrará alguns graus de “catástrofe”. Se a solução começa em algum ponto inicial (x_0, y_0, α_0) com $(\alpha_0 < 0)$, ele então convergerá para a origem não demonstrando nenhuma oscilação. Somente quando α alcança alguns valores positivos a solução deixará o equilíbrio “catastroficamente” e começará a oscilar com um amplitude relativamente grande.

(4) Finalmente, considere um sistema sem termos não lineares

$$\dot{z} = (\alpha + i)z.$$

Este sistema também tem órbitas periódicas com amplitudes que aumentam, mas todas elas são apresentadas em $\alpha = 0$ quando o sistema possui um centro na origem (Figura 3.12). Pode ser dito que, neste caso, o ciclo limite parabolóico “degenera” no plano $\alpha = 0$ no espaço (x_1, x_2, α) [14].

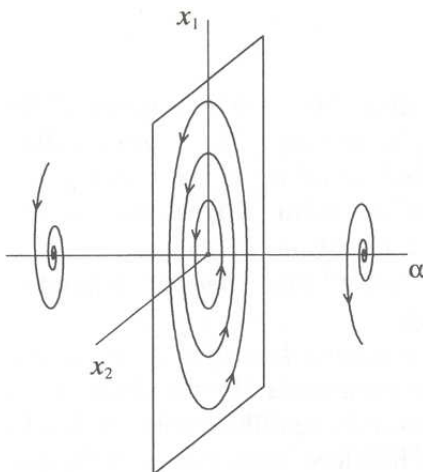


Figura 3.12: Bifurcação de Hopf em um sistema linear.

Capítulo 4

Dinâmica de Sistemas com Coeficientes Periódicos

A teoria apresentada nos capítulos anteriores foi aplicada por Peruzzi [22] no estudo da dinâmica e controle de sistemas vibrantes. Neste capítulo, essa teoria é aplicada ao sistema dinâmico formado por um pêndulo elástico com excitação periódica vertical, o qual foi estudado por Oliveira [20] através de simulações numéricas.

O modelo simplificado, onde o pêndulo não possui haste elástica, tem sido objeto de inúmeros estudos e já constitui um exemplo clássico de sistemas dinâmicos. Inicialmente, a técnica de análise através da matriz de transição de estados (STM) é aplicada a esse sistema, com o objetivo de assegurar a correta implementação do programa utilizando o software Matlab®.

4.1 Análise da Estabilidade Estrutural

Um dos primeiros passos dados na direção da análise da estabilidade estrutural é encontrar os valores dos parâmetros que tornam o sistema com coeficientes periódicos crítico, isto é, os valores para os quais se têm multiplicadores de Floquet 1 ou -1.

O gráfico obtido com a variação de um dos parâmetros, de modo que os multiplicadores de Floquet tenham valor absoluto 1, é chamado de Diagrama de Estabilidade. Nele é possível observar o comportamento do sistema e os tipos de bifurcações. Neste estudo, são utilizados pontos vermelhos para indicar a ocorrência de bifurcação flip, pretos para bifurcação fold e azuis para bifurcação de Hopf. Na aproximação, o grau do polinômio de Chebyshev alterado

utilizado é $m = 20$, e o número de iterações de Picard é $p = 40$.

4.2 Pêndulo Excitado Parametricamente

Nesta seção é apresentado o estudo do sistema constituído pelo pêndulo excitado parametricamente, o qual foi analisado por Peruzzi [22]. Neste problema, um pêndulo amortecido oscila num plano, e cujo pivô vibra verticalmente devido a uma força periódica. A equação do movimento é dada por

$$\ddot{\theta} = -\beta\dot{\theta} - (1 + p\cos(\omega t))\sin\theta \quad (4.1)$$

onde θ é a medida do deslocamento angular, $p\cos(\omega t)$ a força externa aplicada ao pivô e β é o coeficiente de amortecimento. O termo periódico é aproximado pela série de polinômios de Chebyshev, e a matriz de transição de Floquet é determinada com o método iterativo de Picard. A Figura 4.1 mostra o diagrama de estabilidade, e este resultado está perfeitamente de acordo com o resultado obtido por Peruzzi [22] (Figura 4.2, página 53). Essa concordância atesta a correta implementação do programa, e então o mesmo é utilizado para estudar o sistema de pêndulo elástico.

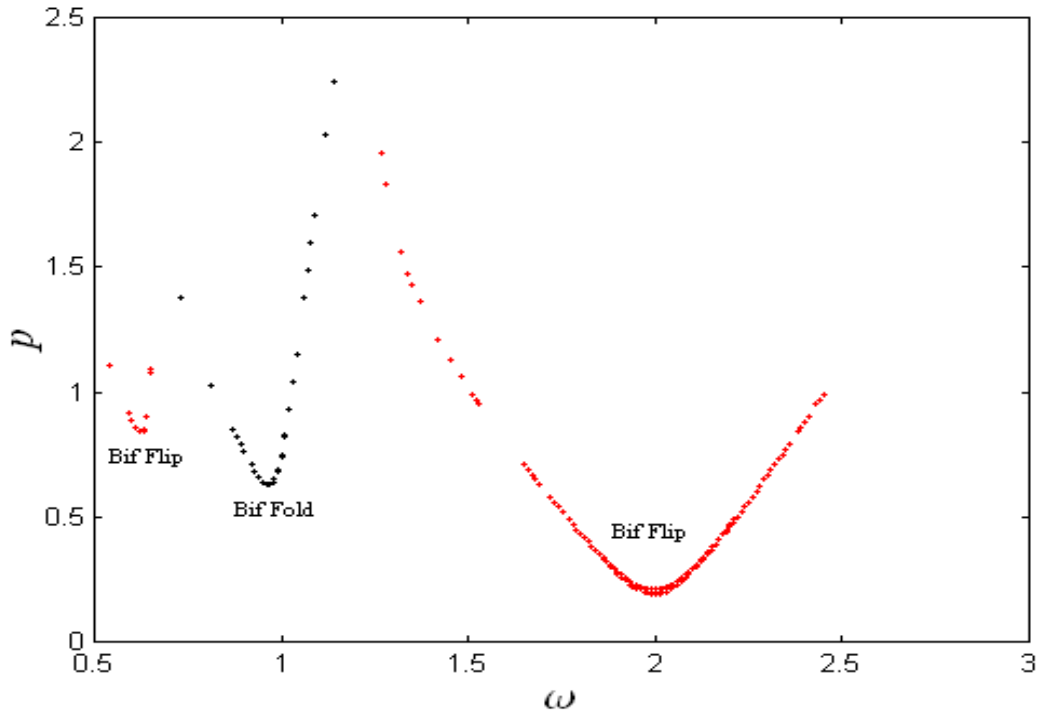


Figura 4.1: Diagrama de estabilidade para $0 < p < 3$ e $0.5 < \omega < 2.5$.

4.3 Pêndulo Elástico com Excitação Vertical no Suporte

Um grau de complexidade pode ser acrescentado ao sistema dinâmico analisado na seção anterior, se considerar que a haste do pêndulo é elástica, conforme está mostrado na Figura 4.2. Essa consideração aumenta um grau de liberdade, e os detalhes da sua modelagem podem ser encontrados em [1] e [20].

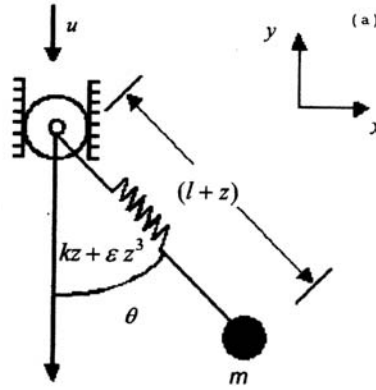


Figura 4.2: Ilustração do pêndulo elástico excitado parametricamente.

Utilizando o formalismo Lagrangiano obtém-se as equações de movimento

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{z}\dot{\theta}}{(l+z)} + \frac{Aw^2 \sin(wt) \sin\theta}{(l+z)} + g \frac{\sin\theta}{(l+z)} = \frac{-c_1}{m(l+z)^2} \dot{\theta} \quad (4.2)$$

$$\ddot{z} - Aw^2 \sin(wt) \cos\theta - (l+z)\dot{\theta}^2 - g \cos(\theta) - \frac{k}{m}z - \frac{\epsilon}{m}z^3 = \frac{-c_2}{m} \dot{z} \quad (4.3)$$

onde os parâmetros estão descritos na Tabela 4.1

l : comprimento da mola em repouso

m : massa do pêndulo

z : deformação da mola

k : coeficiente linear da mola

ϵ : coeficiente não linear da mola

c_1 : amortecedor angular

c_2 : amortecedor radial

A : amplitude da excitação externa

w : frequência da excitação externa

Tabela 4.1: Parâmetros físicos do sistema

4.3.1 Equações Adimensionais

Introduzindo as relações $\bar{\tau} = \sqrt{\frac{g}{l}}t = \nu t$ e $Z = lz$, obtêm-se as equações de movimento na forma adimensional como

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{2\dot{Z}}{1+Z} + \frac{\eta}{(1+Z)^2} \right) \dot{\theta} + (\alpha\Omega^2 \text{sen}(\Omega\bar{\tau}) + 1) \frac{\text{sen}\theta}{1+Z} = 0 \quad (4.4)$$

$$\ddot{Z} + \psi\dot{Z} - (1+Z)\dot{\theta}^2 - (\alpha\Omega^2 \text{sen}(\Omega\bar{\tau}) + 1)\cos\theta - \kappa Z - \lambda Z^3 = 0 \quad (4.5)$$

com $\alpha = \frac{A}{l}$, $\Omega = \omega\nu^{-1}$, $\eta = \frac{c_1}{ml^2}\nu^{-1}$, $\psi = \frac{c_2}{m}\nu^{-1}$, $\lambda = \epsilon^2 l^2 \nu^{-2} = \frac{\epsilon}{m} \frac{l^2}{\nu^2}$ e $\kappa = \omega_0^2 \nu^{-2}$, com $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $\epsilon = \sqrt{\frac{\epsilon}{m}}$. A derivada, agora, é em relação a $\bar{\tau}$

4.3.2 Soluções Estacionárias

O ponto de equilíbrio, também chamado de ponto fixo, é uma solução estacionária do sistema. Na determinação dessas soluções, as equações (4.4) e (4.5) são escritas como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em termos das variáveis de estado

$$\theta = x_1 \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$Z = x_3 \Rightarrow \dot{Z} = \dot{x}_3 = x_4,$$

isto é, $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\theta, \dot{\theta}, Z, \dot{Z})$. Assim, o sistema é reescrito como

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{(P\text{sen}\Omega\bar{\tau} + 1)\text{sen}x_1}{1+x_3} - \left[\frac{2x_4}{1+x_3} + \frac{\eta}{(1+x_3)^2} \right] x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = (P\text{sen}\Omega\bar{\tau} + 1)\cos x_1 + (1+x_3)x_2^2 + \kappa x_3 + \lambda x_3^3 - \psi x_4 \end{cases} \quad (4.6)$$

com $P = \alpha\Omega^2$.

Fazendo $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{x}_4) = (0, 0, 0, 0)$ em (4.6), os pontos de equilíbrio P_1^* e P_2^* são determinados.

$$P_1^* = \begin{cases} x_{11}^* = 0 \\ x_{21}^* = 0 \\ x_{31}^* = 2\sqrt[3]{-(\frac{1}{2\lambda})} \\ x_{41}^* = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

e

$$P_2^* = \begin{cases} x_{12}^* = \pi \\ x_{22}^* = 0 \\ x_{32}^* = 2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)} \\ x_{42}^* = 0 \end{cases} \quad (4.8)$$

A mola não linear é considerada macia se $\lambda < 0$, e a relação existente entre os coeficientes linear (κ) e não linear (λ) da mola é

$$\kappa = -3\lambda\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2}.$$

Linearizando as equações (4.6) em torno do ponto de equilíbrio P_1^{*1} , têm-se a matriz Jacobiana

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{(Psen\Omega\bar{\tau} + 1)}{1 + x_3^*} & -\frac{\eta}{(1 + x_3^*)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \kappa + 3\lambda(x_3^*)^2 & -\psi \end{bmatrix}$$

O sistema linear associado tem período $\frac{2\pi}{\Omega}$, e fazendo a transformação $\tau = \frac{2\pi}{\Omega}\bar{\tau}$, o sistema é normalizado. Portanto escreve-se o sistema linear como

$$\dot{X} = JX \quad (4.9)$$

com

$$J = A_1 f_1(\tau) + A_2 f_2(\tau) \quad (4.10)$$

onde

$$A_1 = \frac{2\pi}{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{1 + x_3^*} & -\frac{\eta}{(1 + x_3^*)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \kappa + 3\lambda(x_3^*)^2 & -\psi \end{bmatrix}, \quad A_2 = \frac{2\pi}{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{P}{1 + x_3^*} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$f_1(\tau) = 1 \quad \text{e} \quad f_2(\tau) = sen(2\pi\tau)$$

¹nota: uma vez escolhido o ponto P_1^* para a linearização, suprimimos o índice 1 de x_{31}^*

A estabilidade é analisada pelos autovalores (ρ_j) da matriz de transição de Floquet, que é aproximada a partir da equação (3.56). A Figura 4.3 ilustra o diagrama de estabilidade no plano de parâmetros P e Ω , nota-se uma boa semelhança com o caso não elástico mostrado na Figura 4.1. De acordo com a seção 4.1, as bifurcações são distingüidas pela cor, sendo vermelha para a bifurcação flip, preta para fold e azul para a bifurcação de Hopf.

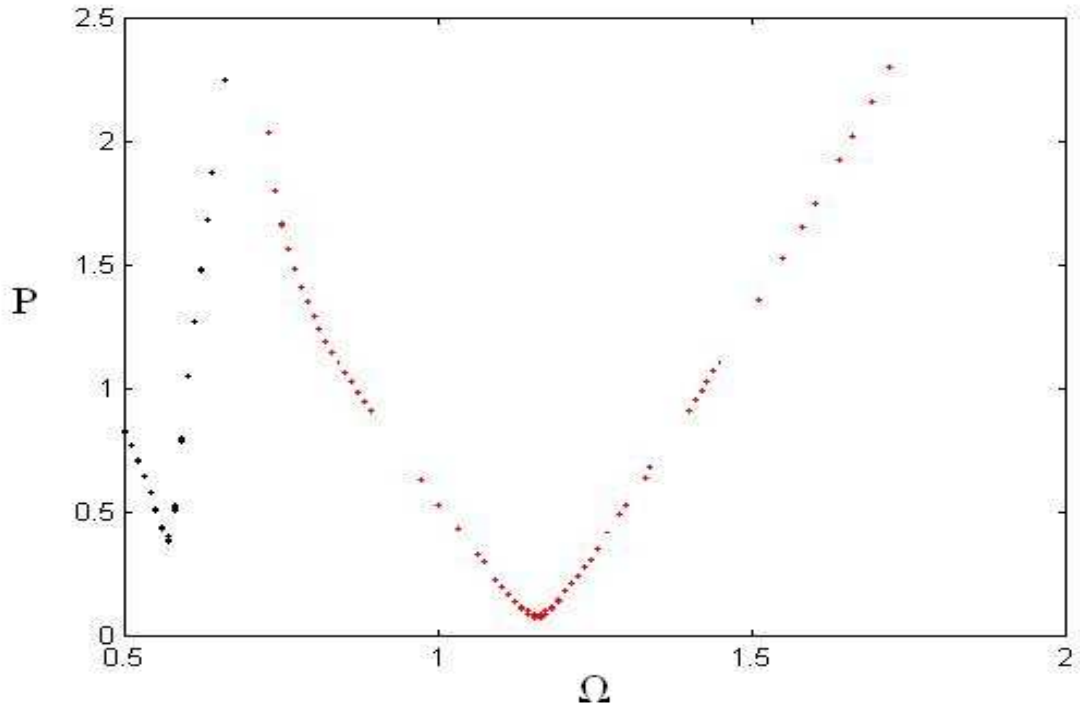


Figura 4.3: Diagrama de estabilidade do sistema pêndulo elástico.

Os valores utilizados para os demais parâmetros foram

$$\kappa = 1.5 \quad \psi = 0.8 \quad \lambda = -0.5 \quad \eta = 0.2.$$

Uma análise mais detalhada da estabilidade estrutural pode ser feita através dos diagramas de bifurcação. Uma maneira de obter tal diagrama é variar a frequência Ω e selecionar os valores máximo e mínimo locais de θ e z após a fase de transição.

A Figura 4.4 mostra o diagrama de bifurcação da amplitude de oscilação θ do pêndulo, correspondente ao intervalo $0.5 \leq \Omega \leq 1.8$, e a Figura 4.5 representa o diagrama de bifurcação da oscilação da mola. Ambas figuras foram obtidas fixando-se o valor $P = 1$.

Verifica-se a correspondência existente entre a Figura 4.3 e as Figuras 4.4 e 4.5. De fato, imagine a reta $P = 1$ na Figura 4.3, de modo que as intersecções desta reta com as fronteiras de estabilidade indicam os pontos de bifurcações. Para $\Omega = 0.598$ ocorre a bifurcação fold, e

para $\Omega = 0.866$ e $\Omega = 1.4221$ a bifurcação flip. A Tabela 4.2 indica as regiões de estabilidade para $P = 1$

0.5	$< \Omega <$	0.598	instável
0.598	$< \Omega <$	0.866	estável
0.866	$< \Omega <$	1.4221	instável
1.4221	$< \Omega$		estável

Tabela 4.2: Valores de Ω e estabilidade do sistema

Estas regiões de estabilidade podem ser melhor ilustradas através dos gráficos de histórico no tempo escolhendo-se uma frequência na região instável e outra na região estável. Para estas simulações utilizou-se o sistema de coordenadas com a origem sobre o ponto de equilíbrio estático P_1^* . O número de períodos envolvidos na oscilação da mola pode ser determinado através do espectro de frequências, bem como pelas curvas no espaço de fases.

Na Figura 4.6, a qual foi obtida fazendo $\Omega = 1.22$, verifica-se que o pêndulo oscila em torno da origem, e na Figura 4.7 o pêndulo tende para sua posição de equilíbrio. Nesta região instável, a mola oscila com duas amplitudes, porém não é em torno da origem (Figura 4.8). O espectro de frequência (Figura 4.10) mostra claramente o movimento biperiódico.

Na região estável ($\Omega = 1.62$), a mola oscila em torno da origem com apenas uma amplitude (Figura 4.9) e o espectro de frequência na Figura 4.11 indica a presença de apenas uma frequência.

Este comportamento da mola pode ser confirmado pelas curvas no espaço de fases. Na Figura 4.12 está representado o estado estacionário da mola para $\Omega = 1.22$, e na Figura 4.13 para $\Omega = 1.62$.

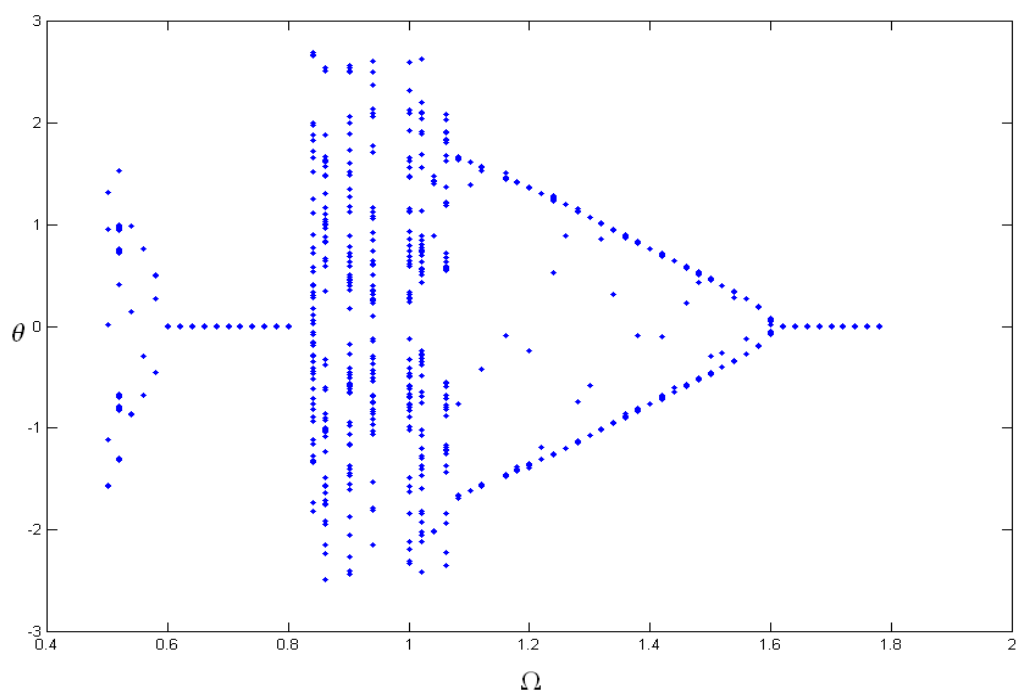


Figura 4.4: Diagrama de Bifurcação do pêndulo, para $P = 1$.

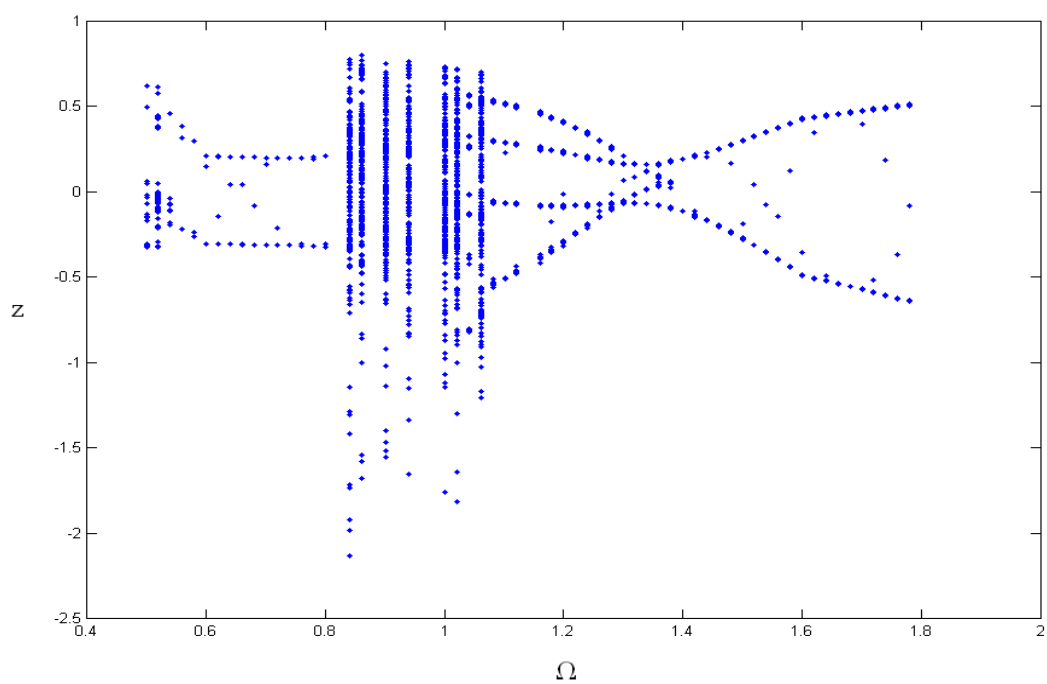
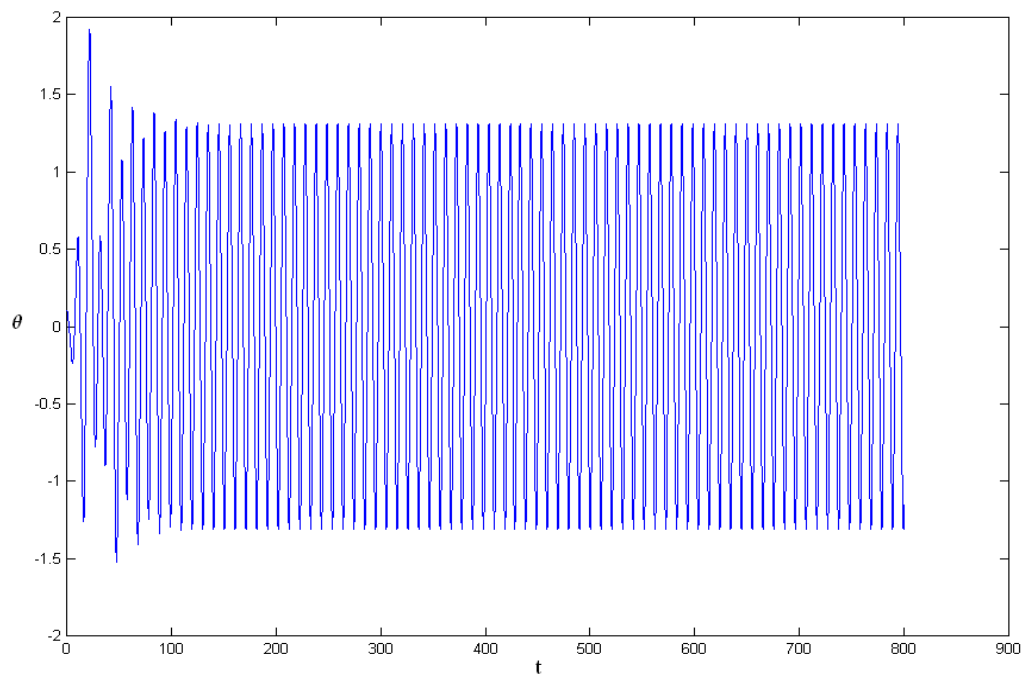
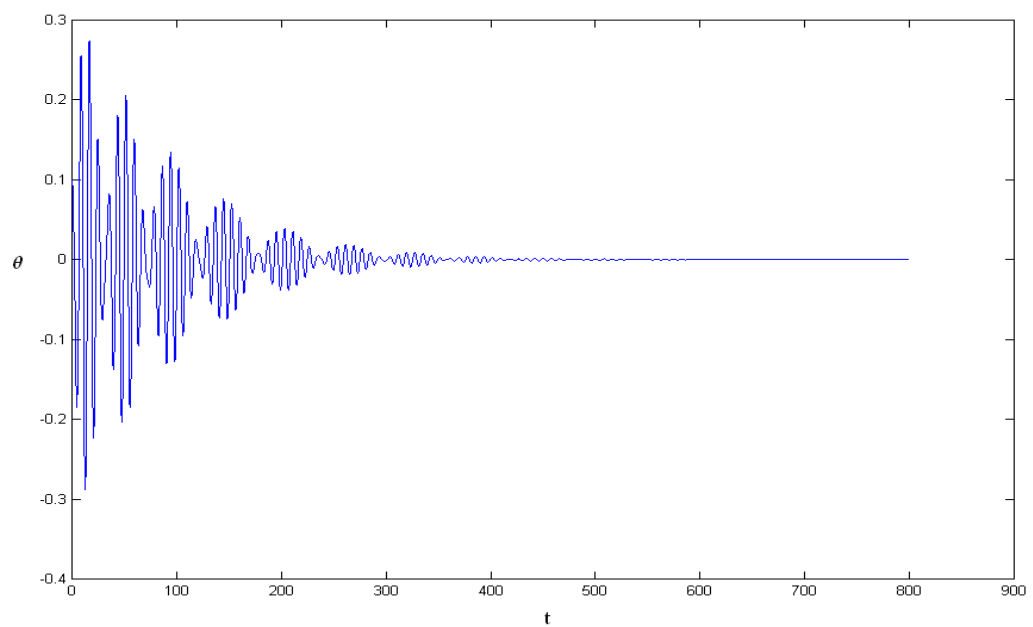
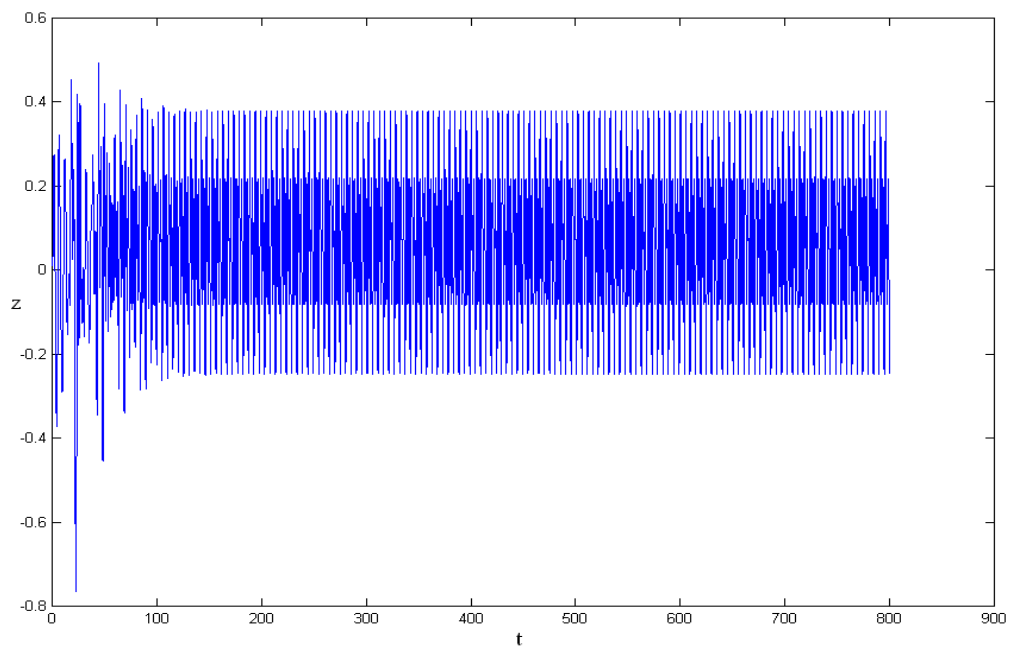
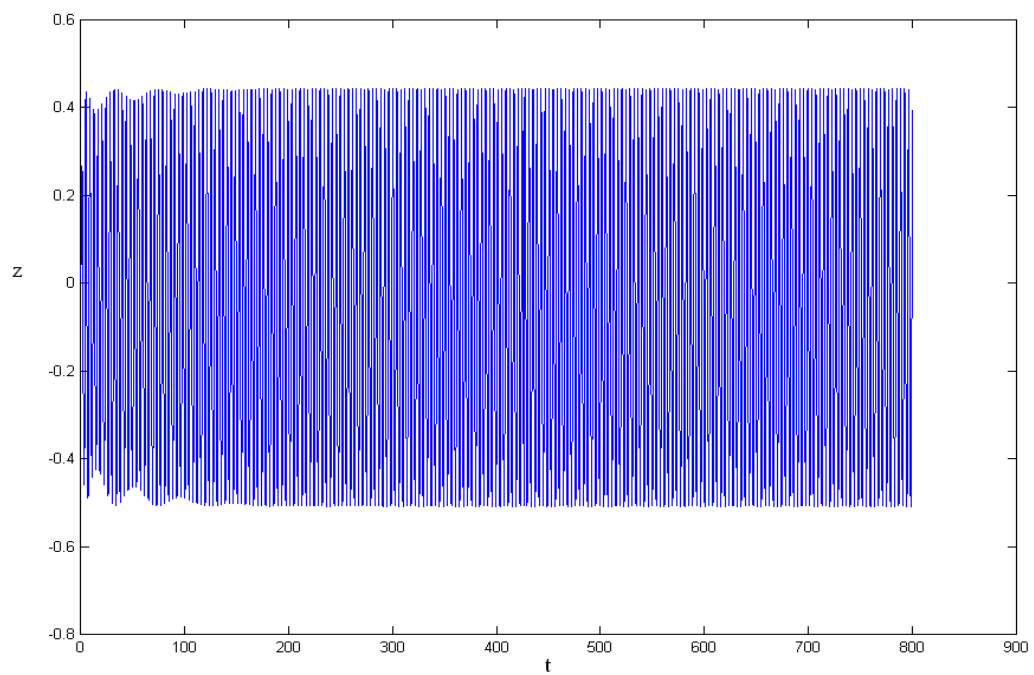
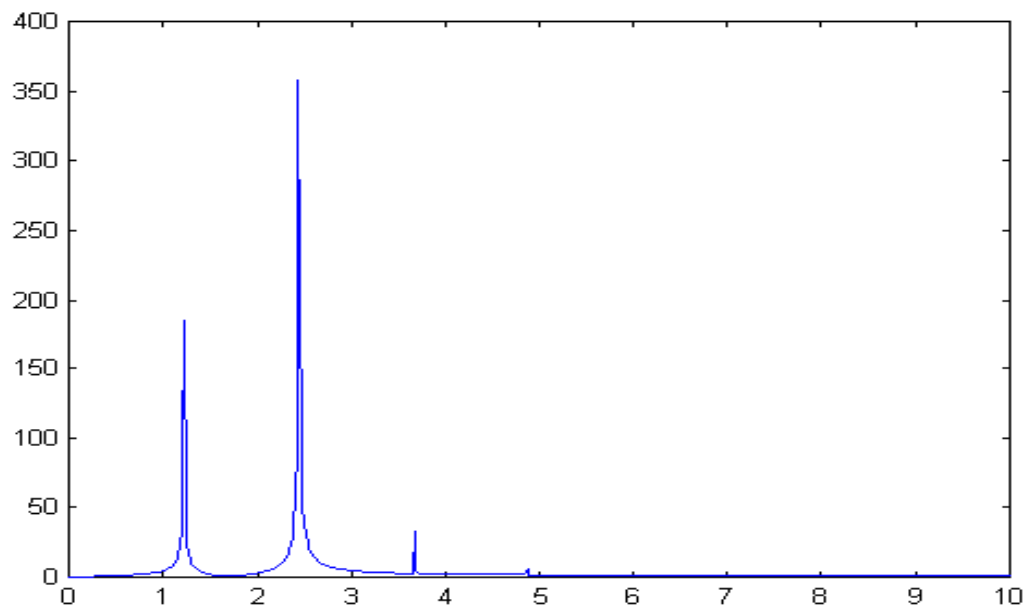
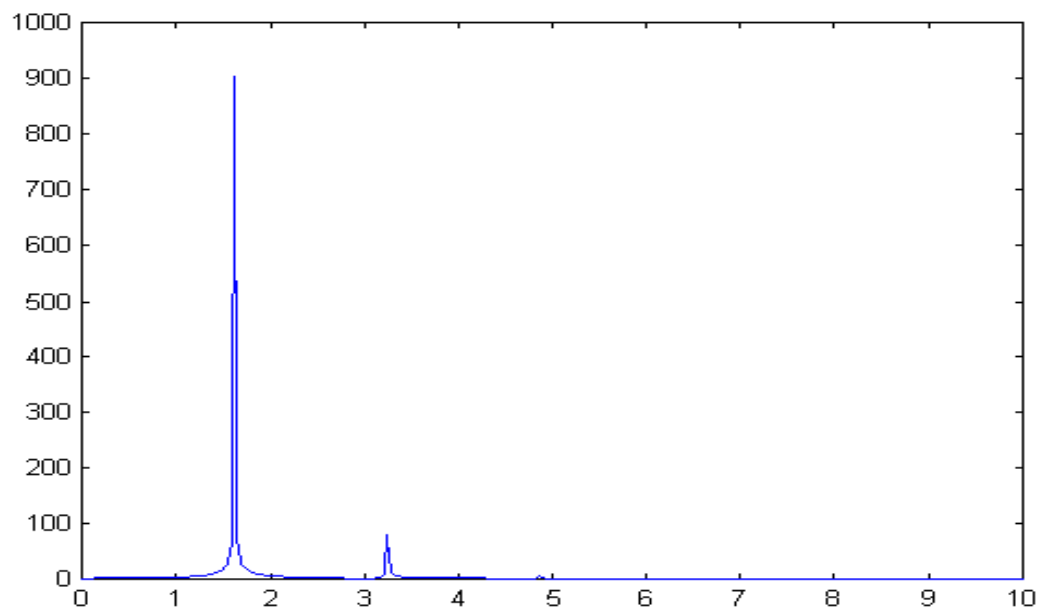
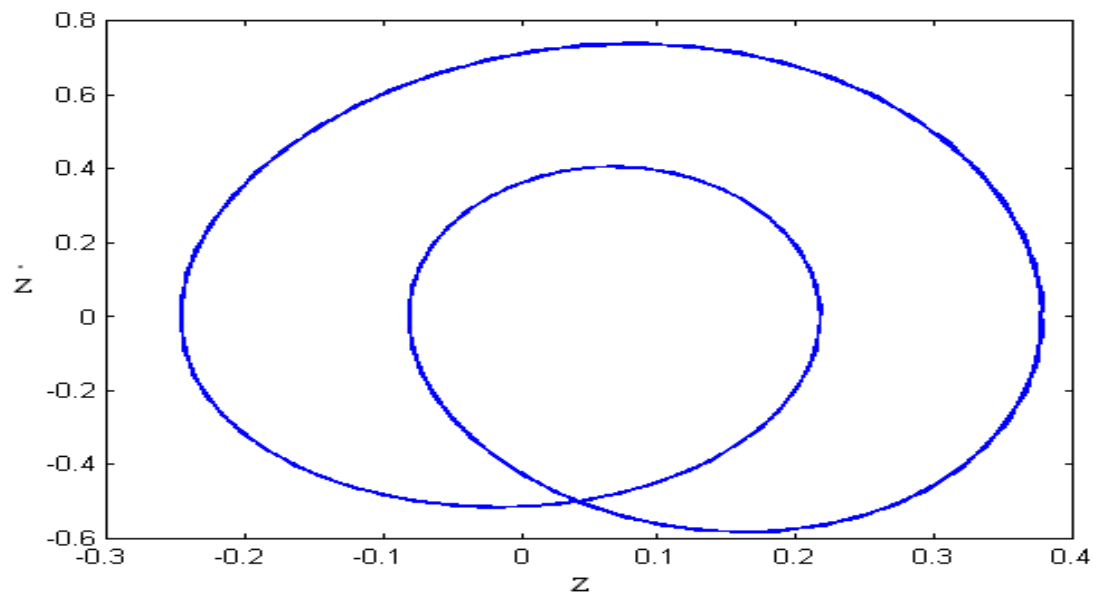
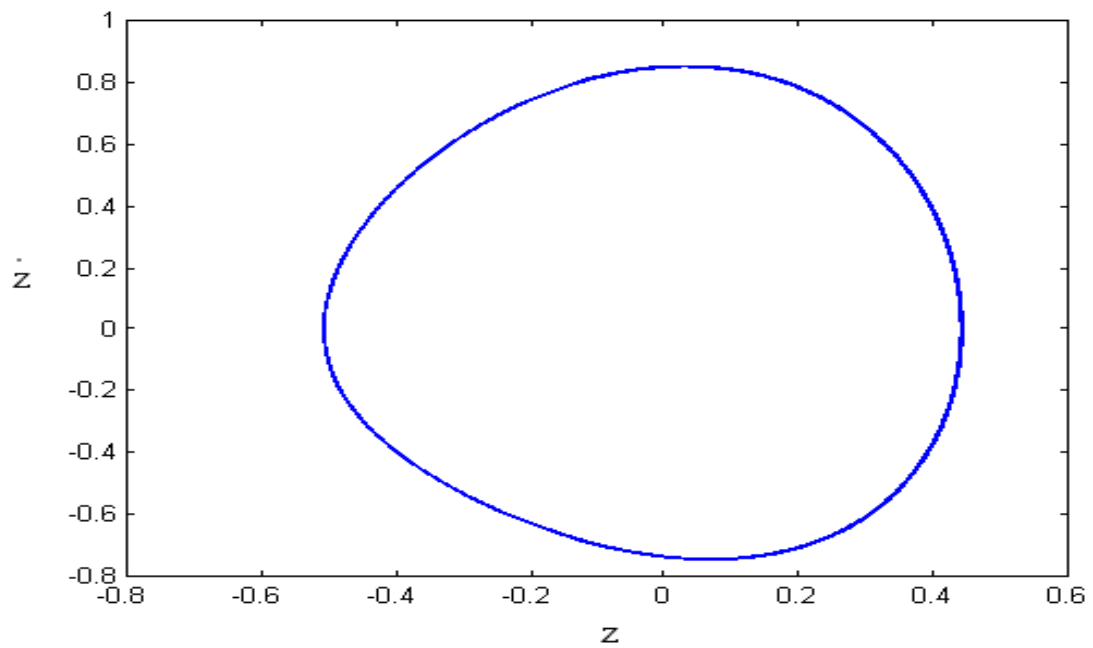


Figura 4.5: Diagrama de Bifurcação da mola, para $P = 1$.

Figura 4.6: Histórico no tempo do pêndulo para $\Omega = 1.22$ Figura 4.7: Histórico no tempo do pêndulo para $\Omega = 1.62$

Figura 4.8: Histórico no tempo da mola para $\Omega = 1.22$ Figura 4.9: Histórico no tempo da mola para $\Omega = 1.62$

Figura 4.10: Espectro de frequência da mola para $\Omega = 1.22$ Figura 4.11: Espectro de frequência da mola para $\Omega = 1.62$

Figura 4.12: Espaço de fases da mola para $\Omega = 1.22$ Figura 4.13: Espaço de fases da mola para $\Omega = 1.62$

Para $\Omega = 1.22$ tem-se a FTM

$$\varphi^{40,20}(1) = \begin{pmatrix} -1.8821 & -0.0457 & 0 & 0 \\ -0.3455 & -0.4822 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0753 & -0.0352 \\ 0 & 0 & 0.215 & 0.1111 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

que possui multiplicadores de Floquet

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -1.89 \\ \rho_2 &= -0.47 \\ \rho_3 &= 0.087 + 0.081i \\ \rho_4 &= 0.087 - 0.081i \end{aligned} \quad (4.13)$$

A presença de $|\rho_1| > 1$ indica a instabilidade do sistema. É feita a transformação L-F (3.10), para converter o sistema periódico e variante no tempo (4.9) na forma invariante no tempo, dinamicamente equivalente

$$[\dot{y}(t)] = [R][y(t)]$$

onde

$$R = \begin{pmatrix} 0.6273 & 0.0447 & 0 & 0 \\ 0.3379 & -0.7418 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.2241 & -0.3063 \\ 0 & 0 & 1.8683 & -1.9134 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Os autovalores de R (expoentes característicos) são

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.6383 \\ \lambda_2 &= -0.7527 \\ \lambda_3 &= -2.068 + 0.7404i \\ \lambda_4 &= -2.068 - 0.7404i \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como $\lambda_1 > 0$, tem-se a instabilidade do sistema.

Para $\Omega = 1.62$, tem-se a FTM

$$\varphi^{40,20}(1) = \begin{pmatrix} -1.2291 & 1.2069 & 0 & 0 \\ -0.5823 & -0.1745 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1624 & 0.0477 \\ 0 & 0 & -0.2582 & -0.2006 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

que possui multiplicadores de Floquet

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -0.7018 + 0.6518i \\ \rho_2 &= -0.7018 - 0.6518i \\ \rho_3 &= -0.1815 + 0.1094i \\ \rho_4 &= -0.1815 - 0.1094i \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde verifica-se a estabilidade do sistema pois $|\rho_j| < 1$ para $j = 1, 2, 3, 4$.

Aplicando a transformação L-F, encontra-se a matriz invariante no tempo

$$R = \begin{pmatrix} 0.5623 & -1.3859 & 0 & 0 \\ 0.6687 & -0.6485 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.6461 & -0.2368 \\ 0 & 0 & 1.2802 & -1.4566 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

que possui expoentes característicos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.043 + 0.7484i \\ \lambda_2 &= -0.043 - 0.7484i \\ \lambda_3 &= -1.5514 + 0.5424i \\ \lambda_4 &= -1.5514 - 0.5424i \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como $Re(\lambda_j) < 0$ para $j = 1, 2, 3, 4$, têm-se a estabilidade do sistema.

4.4 Equação de Mathieu

Uma importante equação diferencial e freqüentemente encontrada em física matemática é a equação de Mathieu, que consiste em um oscilador com sua freqüência natural variando harmonicamente com o tempo [17]. A equação diferencial do oscilador é

$$\ddot{y} + (a + b \cos t)y = 0 \quad (4.20)$$

sendo a e b os parâmetros. Normalizando o tempo, encontra-se a sua forma em coordenadas de estado

$$\dot{X} = [\bar{A}_1(a) + \bar{A}_2(b)\cos 2\pi\tau]X, \quad (4.21)$$

com

$$\bar{A}_1(a) = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_2(b) = 2\pi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

onde $X^T = (x_1 \ x_2) = (y \ \dot{y})$, e as derivadas são com respeito à τ . Variando o parâmetro a no intervalo $-0.75 < a < 1.5$ e b no intervalo $0 < b < 1.6$, obtém-se o diagrama de estabilidade mostrado na Figura 4.14. É interessante comparar essa figura com a Figura 4.15 obtida por Sinha e Butcher [24]

O diagrama da Figura 4.15 fornece as fronteiras de estabilidade, e na Figura 4.14, além de fornecer a fronteira de estabilidade, tem-se também que no interior destas fronteiras (região totalmente preenchida) aparecem pontos que caracterizam bifurcações de Hopf. Portanto, esta região será considerada estável e fora, instável.

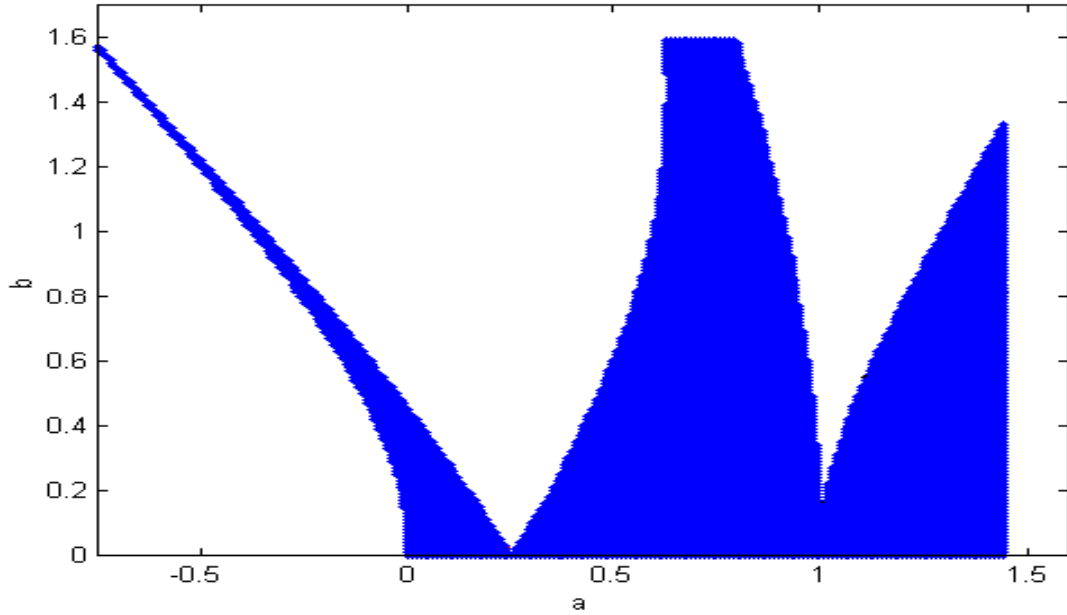


Figura 4.14: Diagrama de estabilidade.

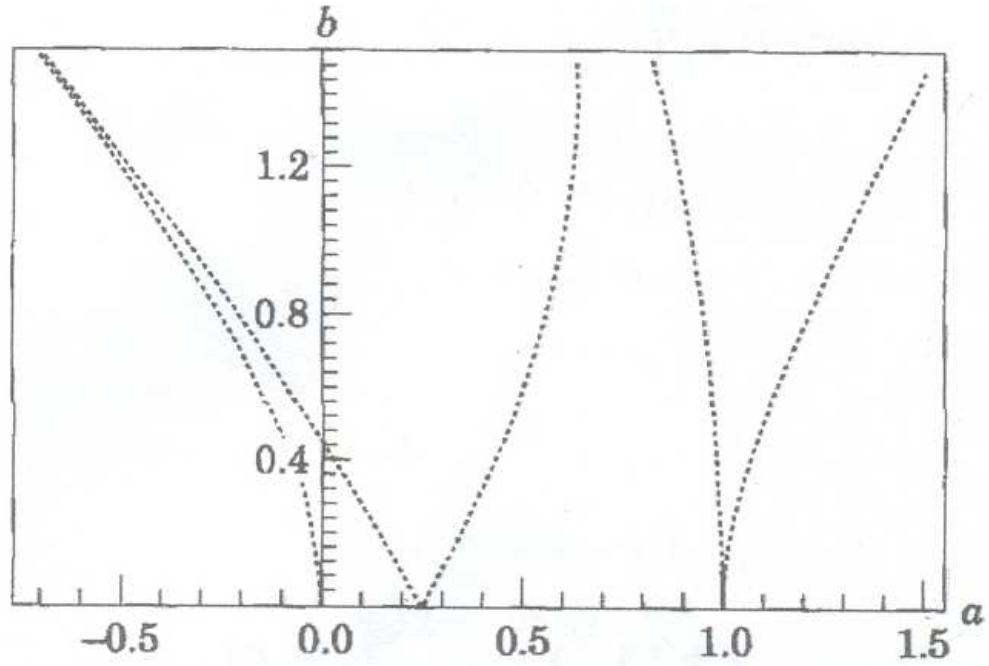


Figura 4.15: Fronteiras de estabilidade da equação de Mathieu no plano $a - b$.

Para $a = -0.5$ e $b = 0.4$ têm-se a FTM

$$\varphi^{(40,20)}(1) = \begin{pmatrix} 37.5209 & 74.2058 \\ 18.9583 & 37.5209 \end{pmatrix}$$

cujos multiplicadores de Floquet são

$$\rho_1 = 0.0133 \text{ e } \rho_2 = 75.028$$

onde verifica-se que $|\rho_2| > 1$, caracterizando a instabilidade do sistema. Fazendo a transformação Lyapunov-Floquet, obtém-se a matriz constante

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 8.5425 \\ 2.1824 & 0 \end{pmatrix}$$

com expoentes característicos $\lambda_1 = -4.3178$ e $\lambda_2 = 4.3178$. Como $\lambda_2 > 0$ o sistema é instável para esse conjunto de parâmetros.

Para $a = 0.5$ e $b = 0.2$ encontra-se a FTM

$$\varphi^{(40,20)}(1) = \begin{pmatrix} -0.3512 & -0.8428 \\ 1.0400 & -0.3512 \end{pmatrix}$$

que possui os multiplicadores de Floquet

$$\rho_1 = -0.3512 + 0.9362i \text{ e } \rho_2 = -0.3512 - 0.9362i$$

onde têm-se $|\rho_i| = 0.999$, para $i = 1, 2$. Fazendo a transformação de Lyapunov-Floquet encontra-se a matriz constante

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1.090 \\ -1.3462 & 0 \end{pmatrix}$$

cujos expoentes característicos são $\lambda_1 = 1.2113i$ e $\lambda_2 = -1.2113i$, que possuem $Re(\lambda) = 0$, caracterizando a presença de solução periódica e bifurcação de Hopf.

4.5 Partícula carregada em um campo magnético perturbado

Este problema, representado na Figura 4.16, propõe estudar a dinâmica de uma partícula carregada e imersa em um campo magnético constante, o qual é orientado na direção do eixo coordenado z e perturbado por um campo periódico na direção x .

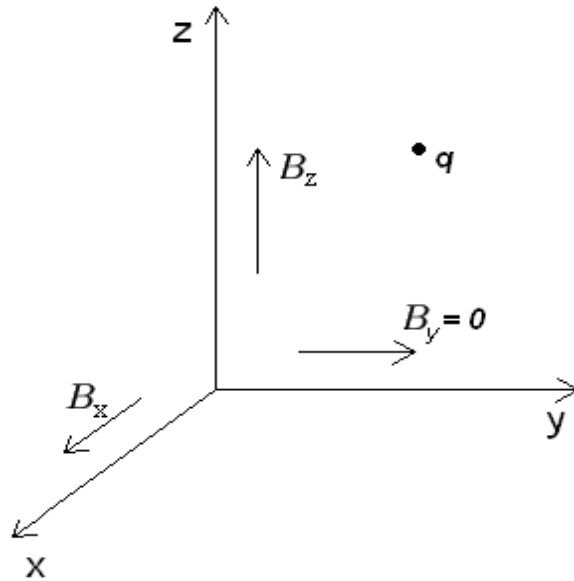


Figura 4.16: Ilustração de uma partícula carregada em um campo magnético.

Da definição de força de Lorenz são obtidas as equações do movimento da partícula carregada, que são dadas por [15] e [16]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q(B_z\dot{y} - B_y\dot{z}), \\ m\ddot{y} &= q(B_x\dot{z} - B_z\dot{x}), \\ m\ddot{z} &= q(B_y\dot{x} - B_x\dot{y}), \end{aligned} \tag{4.23}$$

onde B_x, B_y , e B_z são as componentes do campo nos eixos coordenados x, y e z , e a carga e a massa da partícula são q e m respectivamente. As componentes do campo são dadas por

$$B_x = B_1 \sin(\omega_p t), \quad B_y = 0, \quad B_z = B_0, \quad (4.24)$$

onde é assumido que B_1 é muito menor do que B_0 . Substituindo (4.24) em (4.23), as equações do movimento são agora

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= q(B_0\dot{y}), \\ m\ddot{y} &= q(B_1 \sin(\omega_p t)\dot{z} - B_0\dot{x}), \\ m\ddot{z} &= q(-B_1 \sin(\omega_p t)\dot{y}). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Como os valores de B_1 e B_0 são constantes, são definidas duas frequências de acordo com as relações

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m} \quad \text{e} \quad \omega_f = \frac{qB_1}{m}. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25) vem

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \omega_c \dot{y}, \\ \ddot{y} &= \omega_f \sin(\omega_p t)\dot{z} - \omega_c \dot{x}, \\ \ddot{z} &= -\omega_f \sin(\omega_p t)\dot{y}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Escrevendo as equações (4.27) em termos das variáveis de estado, são obtidas as equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \omega_c x_4 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \omega_f \sin(\omega_p t)x_6 - \omega_c x_2 \\ \dot{x}_5 &= x_6 \\ \dot{x}_6 &= -\omega_f \sin(\omega_p t)x_4 \end{aligned} \quad (4.28)$$

com $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6) = (x \ \dot{x} \ y \ \dot{y} \ z \ \dot{z})$

Observa-se nas equações (4.28) que a posição de equilíbrio só depende das velocidades. Se a velocidade for nula, a partícula permanecerá parada em qualquer posição. Fazendo a mudança de variável $t = \frac{2\pi\tau}{\omega_p}$ o tempo é normalizado e encontra-se

$$\dot{X} = [\bar{A}_1(\omega_c) + \bar{A}_2(\omega_f)\sin(2\pi\tau)]X \quad (4.29)$$

com

$$\bar{A}_1(\omega_c, \omega_p) = \frac{2\pi}{\omega_p} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{A}_2(\omega_f, \omega_p) = \frac{2\pi}{\omega_p} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_f & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

O diagrama de estabilidade foi construído no plano de parâmetros $\omega_p - \omega_f$. Considerou-se os seguintes valores para as frequências

$$\omega_c = 1215 \quad 10 \leq \omega_f \leq 100 \quad 1200 \leq \omega_p \leq 1230.$$

Para quaisquer valores de frequências, foram obtidas bifurcação de Hopf e bifurcação fold, portanto, houve um preenchimento total do diagrama. Como na equação de Mathieu, onde apareciam pontos preenchendo a região interior à fronteira de estabilidade, o sistema (equações 4.27) será considerado estável para quaisquer valores de frequências.

Para $\omega_f = 10$ e $\omega_p = 1200$, encontra-se a FTM

$$\varphi^{40,20}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9966 & 0 & 0.0785 & 0 & -0.0260 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0785 & 0 & 0 & 0 & 0.0010 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 1 & 0.0052 \\ 0 & 0.0260 & 0 & 0 & 0 & 0.9997 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

com multiplicadores de Floquet

$$\begin{aligned} \rho_i &= 1 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \\ \rho_5 &= 0.9966 + 0.0827i \\ \rho_6 &= 0.9966 - 0.0827i \end{aligned} \quad (4.32)$$

onde $|\rho_i| = 1 \quad i = 1, 2, \dots, 6$

Fazendo a transformação L-F

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0786 & 0 & -0.0260 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0786 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00520 \\ 0 & 0.0260 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

com expoentes característicos

$$\begin{aligned} \lambda_i &= 0 \text{ para } i = 1, 2, 3, 4 \\ \lambda_5 &= 0.0828i \\ \lambda_6 &= -0.0828i \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde $Re(\lambda_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, 6$ o que indica bifurcação fold e bifurcação de Hopf.

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho estudou-se sistemas dinâmicos periódicos no tempo aplicando-se uma nova técnica numérica (desenvolvida por Sinha) para aproximar a matriz de transição de estados (STM). Esta técnica consiste em aproximar os coeficientes periódicos da parte linear usando os polinômios ortogonais de Chebyshev e o processo iterativo de Picard.

Os coeficientes periódicos foram aproximados utilizando-se uma série de 20 termos de polinômios alterados de Chebyshev, e efetuando-se 40 iterações no método de Picard.

Obtida a STM, essa matriz é calculada no final do período principal para determinar a matriz de transição de Floquet (FTM). A partir dos autovalores dessa matriz, elabora-se o diagrama de estabilidade do sistema dinâmico analisado.

Fazendo a transformação de Lyapunov-Floquet (L-F) obtida através da STM, converteu-se os sistemas periódicos no tempo em sistemas dinamicamente equivalentes porém invariantes no tempo. A matriz constante fornece os expoentes característicos.

O diagrama de estabilidade do pêndulo excitado parametricamente foi obtido para verificar a eficácia do programa implementado. O principal objetivo do trabalho foi a aplicação do método ao sistema do pêndulo elástico com excitação vertical no suporte. Além desse sistema, o método foi aplicado à equação de Mathieu e ao sistema dinâmico formado por partículas carregadas em um campo magnético com perturbação dependente do tempo.

Para o pêndulo elástico com excitação vertical no suporte, a STM foi obtida a partir da aproximação da função $\sin(\omega t)$. Construiu-se o diagrama de estabilidade onde determinou-se as regiões estáveis e não estáveis do sistema. Foram construídos os diagramas de bifurcação do pêndulo e da mola e comparados com o diagrama de estabilidade verificou-se, assim, uma correspondência entre eles. Foram escolhidos duas frequências, uma na região estável e outra

na região instável. A construção dos históricos no tempo da mola e do pêndulo, juntamente com os espectros de frequência serviram para comprovar a estabilidade e instabilidade do sistema. Na região estável, o pêndulo tende à sua posição de equilíbrio estática e a mola oscila com apenas uma amplitude em torno da origem. Na região instável, o pêndulo oscila em torno da origem com apenas uma amplitude e a mola oscila com duas amplitudes e não é em torno da origem.

Para a equação de Mathieu, a STM foi obtida através da aproximação da função *cost*. O diagrama de estabilidade obtido apresentou uma região instável e outra região em que todos os pontos obtidos correspondiam a multiplicadores com $|\rho| = 1$. Em [24] esta região foi considerada estável e isso serviu de suporte para definir a estabilidade do próximo exemplo.

No estudo de partícula carregada em um campo magnético dependente do tempo, a STM foi obtida à partir da aproximação da função $\text{sen}\omega_p t$. Verificou-se que esse sistema não depende da posição inicial e sim das velocidades iniciais. O diagrama de estabilidade foi totalmente preenchido indicando que em todos os pontos tem-se $|\rho| = 1$. Conforme analisado na equação de Mathieu, conclui-se que este sistema é estável para quaisquer valores de parâmetros.

5.1 Pesquisas futuras

Dentro do Grupo de Pesquisa Problemas não Lineares e Sistemas Complexos do DCCE/IBILCE/UNESP, Campus de São José do Rio Preto, vários sistemas dinâmicos não ideais estão sendo estudados. Dentre eles, dois estão relacionados com o pêndulo mecânico, isto é, um pêndulo é acoplado a uma estrutura que vibra devido a uma excitação. Essa excitação é provocada pela rotação de uma massa desbalanceada por um motor cuja fonte de energia é limitada. Em um desses sistemas a excitação é horizontal, e os estudos desenvolvidos foram aqueles básicos, ou seja, obtenção das equações de movimento, determinação dos pontos de equilíbrio, linearização e análise do comportamento dinâmico com ressonâncias internas [9]. O outro pêndulo mecânico possui excitação vertical, e também foram desenvolvidos os estudos básicos [10].

Para efetuar estudos mais detalhados sobre esses sistemas dinâmicos seria interessante aplicar o método apresentado neste trabalho, com o objetivo de identificar os parâmetros de controle mais interessantes e descobrir as bifurcações mais importantes.

Além disso, o controle de sistemas dinâmicos constitui uma área de pesquisa muito

importante, então o sistema de pêndulo elástico, bem como os pêndulos mecânicos não ideais podem ser estudados do ponto de vista de controle, utilizando a técnica apresentada por Peruzzi [22] e Peruzzi e colaboradores [23].

Apêndice A

Divisores Elementares

Teorema A.1. (*Decomposição de Jordan*) Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Então, existe uma matriz não-singular $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que

$$X^{-1}AX = J_A = \text{diag}(J_{m_1}(\lambda_1), \dots, J_{m_l}(\lambda_l)),$$

onde

$$J_{m_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

é quadrada e de ordem m_i e $m_1 + m_2 + \dots + m_l = n$ com $l \leq n$.

Demonstração: Veja Golub [13], página 197.

A matriz J_A é chamada forma canônica de Jordan de A e as matrizes J_{m_i} são chamadas de blocos de Jordan. O número e a dimensão dos blocos de Jordan associados a cada autovalor são únicos, porém a ordem em que eles aparecem na diagonal principal pode se alterar. Como exemplo, seja A uma matriz com seis autovalores, sendo $\lambda_1 = \dots = \lambda_5 \neq \lambda_6$, e C sua forma canônica de Jordan, onde

$$C = \begin{pmatrix} J_2(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_1) & & \\ & & J_1(\lambda_1) & \\ & & & J_1(\lambda_6) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Agora, em geral, a matriz $(C - \lambda I)$ é formada pelos blocos da forma $J_r(\lambda_i - \lambda)$. Os determinantes das sub-matrizes da forma canônica $(C - \lambda I)$ são chamados divisores elementares

da matriz A . Assim, os divisores elementares de qualquer matriz similar à C são

$$(\lambda_1 - \lambda)^2, (\lambda_1 - \lambda)^2, (\lambda_1 - \lambda)e(\lambda_6 - \lambda).$$

Podemos observar que o produto dos divisores elementares de uma matriz é igual ao seu polinômio característico. Quando a forma canônica de Jordan é diagonal, então seus divisores elementares são

$$(\lambda_1 - \lambda), (\lambda_2 - \lambda), \dots, (\lambda_n - \lambda)$$

ou seja, são lineares (simples). Uma matriz com autovalores distintos sempre possui divisores elementares lineares, mas, como vimos, se uma matriz possui dois ou mais autovalores iguais, então não podemos afirmar se ela possui, ou não, divisores elementares lineares.

Se uma matriz possui um ou mais divisores elementares não-lineares, então a forma canônica de Jordan desta matriz possui pelo menos um bloco com dimensão maior que 1 e, além disso, m autovetores linearmente independente, onde $m < n$. Tais matrizes são chamadas defectivas.

Apêndice B

Produto de Kronecker

O produto de Kronecker, ou produto tensorial, é útil para resolver equações lineares em que a incógnita é uma matriz.

Definição B.1. (*Produto de Kronecker*). Dadas duas matrizes $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$, o produto de Kronecker de A por B , denotado por $A \otimes B$, é dado por

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Veja que a dimensão de $A \otimes B$ é $mp \times nq$, e que o produto de Kronecker é definido para matrizes A e B de quaisquer dimensões [19].

Apêndice C

Programa

Como exemplo de implementação no Matlab[®], apresenta-se o programa para obtenção da FTM e do Diagrama de Estabilidade da equação de Mathieu

```
format long;
conth=1;
contfp=1;
contfd=1;
sinal1=0;
sinal2=0;
sinal3=0;
a1=(-0.75:0.01:1.5);
b=(0:0.01:1.6);
for i=1:226
for s=1:161
T=2*pi;
Y1=[0 1 ; -a1(i) 0];
Abar1=T*Y1;
Y2=[0 0 ; -b(s) 0] ;
Abar2=T*Y2; %termo relativo a cos(2*t)
Ich=[1 0 ; zeros(19,2) ; 0 1 ; zeros(19,2)];
Qd1=eye(20);
%coeficientes do cos(2*pi*t) j=1:2:37;
```

$a(j)=0;$

$$\begin{aligned}
 a(0) &= 0.30424217764409; & a(20) &= -6.111364188334749e - 015; \\
 a(2) &= 0.97086786526302; & a(22) &= 3.297657841343460e - 017; \\
 a(4) &= -0.30284915526270; & a(24) &= -1.486813423673221e - 019; \\
 a(6) &= 0.02909193396501; & a(26) &= 5.685578136847147e - 022; \\
 a(8) &= -0.00139224399118; & a(28) &= -1.867420621047668e - 024; \\
 a(10) &= 4.018994451075495e - 005; & a(30) &= 5.325446783539806e - 027; \\
 a(12) &= -7.782767011815312e - 007; & a(32) &= -1.331025651671212e - 029; \\
 a(14) &= 1.082653034185827e - 008; & a(34) &= 2.939643213493515e - 032; \\
 a(16) &= -1.135109177911508e - 010; & a(36) &= -5.778609710394926e - 035; \\
 a(18) &= 9.295296632678742e - 013; & a(38) &= 1.017575641669066e - 037;
 \end{aligned}$$

%matriz operacional do produto

Qd2=[a0 a(1)/2 a(2)/2 a(3)/2 a(4)/2 a(5)/2 a(6)/2 a(7)/2 a(8)/2 a(9)/2 a(10)/2 a(11)/2
a(12)/2 a(13)/2 a(14)/2 a(15)/2 a(16)/2 a(17)/2 a(18)/2 a(19)/2;

a(1) a0+a(2)/2 (a(1)+a(3))/2 (a(2)+a(4))/2 (a(3)+a(5))/2 (a(4)+a(6))/2 (a(5)+
a(7))/2 (a(6)+a(8))/2 (a(7)+a(9))/2 (a(8)+a(10))/2 (a(9)+a(11))/2 (a(10)+
a(12))/2 (a(11)+a(13))/2 (a(12)+a(14))/2 (a(13)+a(15))/2 (a(14)+a(16))/2 (a(15)+
a(17))/2 (a(16)+a(18))/2 (a(17)+a(19))/2 (a(18)+a(20))/2;

a(2) (a(1)+a(3))/2 a0+a(4)/2 (a(1)+a(5))/2 (a(2)+a(6))/2 (a(3)+a(7))/2 (a(4)+
a(8))/2 (a(5)+a(9))/2 (a(6)+a(10))/2 (a(7)+a(11))/2 (a(8)+a(12))/2 (a(9)+
a(13))/2 (a(10)+a(14))/2 (a(11)+a(15))/2 (a(12)+a(16))/2 (a(13)+a(17))/2 (a(14)+
a(18))/2 (a(15)+a(19))/2 (a(16)+a(20))/2 (a(17)+a(21))/2;

a(3) (a(2)+a(4))/2 (a(1)+a(5))/2 a0+a(6)/2 (a(1)+a(7))/2 (a(2)+a(8))/2 (a(3)+
a(9))/2 (a(4)+a(10))/2 (a(5)+a(11))/2 (a(6)+a(12))/2 (a(7)+a(13))/2 (a(8)+
a(14))/2 (a(9)+a(15))/2 (a(10)+a(16))/2 (a(11)+a(17))/2 (a(12)+a(18))/2 (a(13)+
a(19))/2 (a(14)+a(20))/2 (a(15)+a(21))/2 (a(16)+a(22))/2;

a(4) (a(3)+a(5))/2 (a(2)+a(6))/2 (a(1)+a(7))/2 a0+a(8)/2 (a(1)+a(9))/2 (a(2)+
a(10))/2 (a(3)+a(11))/2 (a(4)+a(12))/2 (a(5)+a(13))/2 (a(6)+a(14))/2 (a(7)+
a(15))/2 (a(8)+a(16))/2 (a(9)+a(17))/2 (a(10)+a(18))/2 (a(11)+a(19))/2 (a(12)+
a(20))/2 (a(13)+a(21))/2 (a(14)+a(22))/2 (a(15)+a(23))/2;

a(5) (a(4)+a(6))/2 (a(3)+a(7))/2 (a(2)+a(8))/2 (a(1)+a(9))/2 a0+a(10)/2 (a(1)+

$$a(11))/2 \quad (a(2) + a(12))/2 \quad (a(3) + a(13))/2 \quad (a(4) + a(14))/2 \quad (a(5) + a(15))/2 \quad (a(6) + a(16))/2 \quad (a(7) + a(17))/2 \quad (a(8) + a(18))/2 \quad (a(9) + a(19))/2 \quad (a(10) + a(20))/2 \quad (a(11) + a(21))/2 \quad (a(12) + a(22))/2 \quad (a(13) + a(23))/2 \quad (a(14) + a(24))/2;$$

$$a(6) \quad (a(5)+a(7))/2 \quad (a(4)+a(8))/2 \quad (a(3)+a(9))/2 \quad (a(2)+a(10))/2 \quad (a(1)+a(11))/2 \quad a_0 + a(12)/2 \quad (a(1) + a(13))/2 \quad (a(2) + a(14))/2 \quad (a(3) + a(15))/2 \quad (a(4) + a(16))/2 \quad (a(5) + a(17))/2 \quad (a(6) + a(18))/2 \quad (a(7) + a(19))/2 \quad (a(8) + a(20))/2 \quad (a(9) + a(21))/2 \quad (a(10) + a(22))/2 \quad (a(11) + a(23))/2 \quad (a(12) + a(24))/2 \quad (a(13) + a(25))/2;$$

$$a(7) \quad (a(6) + a(8))/2 \quad (a(5) + a(9))/2 \quad (a(4) + a(10))/2 \quad (a(3) + a(11))/2 \quad (a(2) + a(12))/2 \quad (a(1)+a(13))/2 \quad a_0+a(14)/2 \quad (a(1)+a(15))/2 \quad (a(2)+a(16))/2 \quad (a(3)+a(17))/2 \quad (a(4)+a(18))/2 \quad (a(5) + a(19))/2 \quad (a(6) + a(20))/2 \quad (a(7) + a(21))/2 \quad (a(8) + a(22))/2 \quad (a(9) + a(23))/2 \quad (a(10) + a(24))/2 \quad (a(11) + a(25))/2 \quad (a(12) + a(26))/2;$$

$$a(8) \quad (a(7) + a(9))/2 \quad (a(6) + a(10))/2 \quad (a(5) + a(11))/2 \quad (a(4) + a(12))/2 \quad (a(3) + a(13))/2 \quad (a(2)+a(14))/2 \quad (a(1)+a(15))/2 \quad a_0+a(16)/2 \quad (a(1)+a(17))/2 \quad (a(2)+a(18))/2 \quad (a(3)+a(19))/2 \quad (a(4) + a(20))/2 \quad (a(5) + a(21))/2 \quad (a(6) + a(22))/2 \quad (a(7) + a(23))/2 \quad (a(8) + a(24))/2 \quad (a(9) + a(25))/2 \quad (a(10) + a(26))/2 \quad (a(11) + a(27))/2;$$

$$a(9) \quad (a(8) + a(10))/2 \quad (a(7) + a(11))/2 \quad (a(6) + a(12))/2 \quad (a(5) + a(13))/2 \quad (a(4) + a(14))/2 \quad (a(3)+a(15))/2 \quad (a(2)+a(16))/2 \quad (a(1)+a(17))/2 \quad a_0+a(18)/2 \quad (a(1)+a(19))/2 \quad (a(2)+a(20))/2 \quad (a(3) + a(21))/2 \quad (a(4) + a(22))/2 \quad (a(5) + a(23))/2 \quad (a(6) + a(24))/2 \quad (a(7) + a(25))/2 \quad (a(8) + a(26))/2 \quad (a(9) + a(27))/2 \quad (a(10) + a(28))/2;$$

$$a(10) \quad (a(9) + a(11))/2 \quad (a(8) + a(12))/2 \quad (a(7) + a(13))/2 \quad (a(6) + a(14))/2 \quad (a(5) + a(15))/2 \quad (a(4) + a(16))/2 \quad (a(3) + a(17))/2 \quad (a(2) + a(18))/2 \quad (a(1) + a(19))/2 \quad a_0 + a(20)/2 \quad (a(1) + a(21))/2 \quad (a(2) + a(22))/2 \quad (a(3) + a(23))/2 \quad (a(4) + a(24))/2 \quad (a(5) + a(25))/2 \quad (a(6) + a(26))/2 \quad (a(7) + a(27))/2 \quad (a(8) + a(28))/2 \quad (a(9) + a(29))/2;$$

$$a(11) \quad (a(10) + a(12))/2 \quad (a(9) + a(13))/2 \quad (a(8) + a(14))/2 \quad (a(7) + a(15))/2 \quad (a(6) + a(16))/2 \quad (a(5) + a(17))/2 \quad (a(4) + a(18))/2 \quad (a(3) + a(19))/2 \quad (a(2) + a(20))/2 \quad (a(1) + a(21))/2 \quad a_0+a(22)/2 \quad (a(1)+a(23))/2 \quad (a(2)+a(24))/2 \quad (a(3)+a(25))/2 \quad (a(4)+a(26))/2 \quad (a(5)+a(27))/2 \quad (a(6) + a(28))/2 \quad (a(7) + a(29))/2 \quad (a(8) + a(30))/2;$$

$$a(12) \quad (a(11) + a(13))/2 \quad (a(10) + a(14))/2 \quad (a(9) + a(15))/2 \quad (a(8) + a(16))/2 \quad (a(7) + a(17))/2 \quad (a(6) + a(18))/2 \quad (a(5) + a(19))/2 \quad (a(4) + a(20))/2 \quad (a(3) + a(21))/2 \quad (a(2) + a(22))/2 \quad (a(1)+a(23))/2 \quad a_0+a(24)/2 \quad (a(1)+a(25))/2 \quad (a(2)+a(26))/2 \quad (a(3)+a(27))/2 \quad (a(4)+a(28))/2 \quad (a(5) + a(29))/2 \quad (a(6) + a(30))/2 \quad (a(7) + a(31))/2;$$

$$a(13) \quad (a(12) + a(14))/2 \quad (a(11) + a(15))/2 \quad (a(10) + a(16))/2 \quad (a(9) + a(17))/2 \quad (a(8) +$$

$$a(18))/2 \ (a(7) + a(19))/2 \ (a(6) + a(20))/2 \ (a(5) + a(21))/2 \ (a(4) + a(22))/2 \ (a(3) + a(23))/2 \ (a(2) + a(24))/2 \ (a(1) + a(25))/2 \ a0 + a(26))/2 \ (a(1) + a(27))/2 \ (a(2) + a(28))/2 \ (a(3) + a(29))/2 \ (a(4) + a(30))/2 \ (a(5) + a(31))/2 \ (a(6) + a(32))/2;$$

$$a(14) \ (a(13) + a(15))/2 \ (a(12) + a(16))/2 \ (a(11) + a(17))/2 \ (a(10) + a(18))/2 \ (a(9) + a(19))/2 \ (a(8) + a(20))/2 \ (a(7) + a(21))/2 \ (a(6) + a(22))/2 \ (a(5) + a(23))/2 \ (a(4) + a(24))/2 \ (a(3) + a(25))/2 \ (a(2) + a(26))/2 \ (a(1) + a(27))/2 \ a0 + a(28))/2 \ (a(1) + a(29))/2 \ (a(2) + a(30))/2 \ (a(3) + a(31))/2 \ (a(4) + a(32))/2 \ (a(5) + a(33))/2;$$

$$a(15) \ (a(14) + a(16))/2 \ (a(13) + a(17))/2 \ (a(12) + a(18))/2 \ (a(11) + a(19))/2 \ (a(10) + a(20))/2 \ (a(9) + a(21))/2 \ (a(8) + a(22))/2 \ (a(7) + a(23))/2 \ (a(6) + a(24))/2 \ (a(5) + a(25))/2 \ (a(4) + a(26))/2 \ (a(3) + a(27))/2 \ (a(2) + a(28))/2 \ (a(1) + a(29))/2 \ a0 + a(30))/2 \ (a(1) + a(31))/2 \ (a(2) + a(32))/2 \ (a(3) + a(33))/2 \ (a(4) + a(34))/2;$$

$$a(16) \ (a(15) + a(17))/2 \ (a(14) + a(18))/2 \ (a(13) + a(19))/2 \ (a(12) + a(20))/2 \ (a(11) + a(21))/2 \ (a(10) + a(22))/2 \ (a(9) + a(23))/2 \ (a(8) + a(24))/2 \ (a(7) + a(25))/2 \ (a(6) + a(26))/2 \ (a(5) + a(27))/2 \ (a(4) + a(28))/2 \ (a(3) + a(29))/2 \ (a(2) + a(30))/2 \ (a(1) + a(31))/2 \ a0 + a(32))/2 \ (a(1) + a(33))/2 \ (a(2) + a(34))/2 \ (a(3) + a(35))/2;$$

$$a(17) \ (a(16) + a(18))/2 \ (a(15) + a(19))/2 \ (a(14) + a(20))/2 \ (a(13) + a(21))/2 \ (a(12) + a(22))/2 \ (a(11) + a(23))/2 \ (a(10) + a(24))/2 \ (a(9) + a(25))/2 \ (a(8) + a(26))/2 \ (a(7) + a(27))/2 \ (a(6) + a(28))/2 \ (a(5) + a(29))/2 \ (a(4) + a(30))/2 \ (a(3) + a(31))/2 \ (a(2) + a(32))/2 \ (a(1) + a(33))/2 \ a0 + a(34))/2 \ (a(1) + a(35))/2 \ (a(2) + a(36))/2;$$

$$a(18) \ (a(17) + a(19))/2 \ (a(16) + a(20))/2 \ (a(15) + a(21))/2 \ (a(14) + a(22))/2 \ (a(13) + a(23))/2 \ (a(12) + a(24))/2 \ (a(11) + a(25))/2 \ (a(10) + a(26))/2 \ (a(9) + a(27))/2 \ (a(8) + a(28))/2 \ (a(7) + a(29))/2 \ (a(6) + a(30))/2 \ (a(5) + a(31))/2 \ (a(4) + a(32))/2 \ (a(3) + a(33))/2 \ (a(2) + a(34))/2 \ (a(1) + a(35))/2 \ a0 + a(36))/2 \ (a(1) + a(37))/2;$$

$$a(19) \ (a(18) + a(20))/2 \ (a(17) + a(21))/2 \ (a(16) + a(22))/2 \ (a(15) + a(23))/2 \ (a(14) + a(24))/2 \ (a(13) + a(25))/2 \ (a(12) + a(26))/2 \ (a(11) + a(27))/2 \ (a(10) + a(28))/2 \ (a(9) + a(29))/2 \ (a(8) + a(30))/2 \ (a(7) + a(31))/2 \ (a(6) + a(32))/2 \ (a(5) + a(33))/2 \ (a(4) + a(34))/2 \ (a(3) + a(35))/2 \ (a(2) + a(36))/2 \ (a(1) + a(37))/2 \ a0 + a(38))/2];$$

G=CHEBY_G(20); % Matriz operacional de integração. Esta matriz foi feita separadamente e está definida logo abaixo.

$$Gt=G';$$

$$GxQd1=Gt*Qd1;$$

%Cálculo de L1

$L1 = [Abar1(1,1)*GxQd1 \ Abar1(1,2)*GxQd1 \ ; \ Abar1(2,1)*GxQd1 \ Abar1(2,2)*GxQd1 \]$;

%Cálculo de L2

$GxQd2 = Gt*Qd2$;

$L2 = [Abar2(1,1)*GxQd2 \ Abar2(1,2)*GxQd2 \ ; \ Abar2(2,1)*GxQd2 \ Abar2(2,2)*GxQd2 \]$;

$L = L1 + L2$;

%Cálculo de $P(alfa) = Abar1 \times [Gt*d1] + Abar2 \times [Gt*d2] = P1 + P2$

$d1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]'$;

$d2 = [a0 \ a(1) \ a(2) \ a(3) \ a(4) \ a(5) \ a(6) \ a(7) \ a(8) \ a(9) \ a(10) \ a(11) \ a(12) \ a(13) \ a(14) \ a(15) \ a(16) \ a(17) \ a(18) \ a(19)]'$;

%Cálculo de P1 $Gtd1 = Gt*d1$;

$P1 = [Abar1(1,1)*Gtd1 \ Abar1(1,2)*Gtd1 \ ;$

$Abar1(2,1)*Gtd1 \ Abar1(2,2)*Gtd1]$;

%Cálculo de P2 $Gtd2 = Gt*d2$;

$P2 = [Abar2(1,1)*Gtd2 \ Abar2(1,2)*Gtd2 \ ; \ Abar2(2,1)*Gtd2 \ Abar2(2,2)*Gtd2]$;

$P = P1 + P2$;

%Cálculo da Matriz de Transição de Floquet (FTM)

$LL = eye(40) + L + L^2 + L^3 + L^4 + L^5 + L^6 + L^7 + L^8 + L^9 + L^{10} + L^{11} + L^{12} + L^{13} +$
 $L^{14} + L^{15} + L^{16} + L^{17} + L^{18} + L^{19} + L^{20} + L^{21} + L^{22} + L^{23} + L^{24} + L^{25} + L^{26} + L^{27} +$
 $L^{28} + L^{29} + L^{30} + L^{31} + L^{32} + L^{33} + L^{34} + L^{35} + L^{36} + L^{37} + L^{38} + L^{39}$;

$tt = 1$;

$pp1 = 2*tt - 1$;

$pp2 = 2*(2*tt - 1)^2 - 1$;

$pp3 = 4*(2*tt - 1)^3 - 6*tt + 3$;

$pp4 = 8*(2*tt - 1)^4 - 8*(2*tt - 1)^2 + 1$;

$pp5 = 16*(2*tt - 1)^5 - 20*(2*tt - 1)^3 + 10*tt - 5$;

$pp6 = 32*(2*tt - 1)^6 - 48*(2*tt - 1)^4 + 18*(2*tt - 1)^2 - 1$;

$pp7 = 64*(2*tt - 1)^7 - 112*(2*tt - 1)^5 + 56*(2*tt - 1)^3 - 14*tt + 7$;

$pp8 = 128*(2*tt - 1)^8 - 256*(2*tt - 1)^6 + 160*(2*tt - 1)^4 - 32*(2*tt - 1)^2 + 1$;

$pp9 = 256*(2*tt - 1)^9 - 576*(2*tt - 1)^7 + 432*(2*tt - 1)^5 - 120*(2*tt - 1)^3 + 18*tt - 9$;

$pp10 = 512*(2*tt - 1)^{10} - 1280*(2*tt - 1)^8 + 1120*(2*tt - 1)^6 - 400*(2*tt - 1)^4 + 50*(2*tt - 1)^2 - 1$;

$pp11 = 1024*(2*tt - 1)^{11} - 2816*(2*tt - 1)^9 + 2816*(2*tt - 1)^7 - 1232*(2*tt - 1)^5 + 220*(2*tt - 1)^3 -$

```

22*tt+11;
pp12=2048*(2*tt-1)^12-6144*(2*tt-1)^10+6912*(2*tt-1)^8-3584*(2*tt-1)^6+840*(2*tt-1)^4-
72*(2*tt-1)^2+1;
pp13=4096*(2*tt-1)^13-13312*(2*tt-1)^11+16640*(2*tt-1)^9-9984*(2*tt-1)^7+2912*(2*tt-1)^5-
364*(2*tt-1)^3+26*tt-13;
pp14=8192*(2*tt-1)^14-28672*(2*tt-1)^12+39424*(2*tt-1)^10-26880*(2*tt-1)^8+9408*(2*tt-
1)^6-1568*(2*tt-1)^4+98*(2*tt-1)^2-1;
pp15=16384*(2*tt-1)^15-61440*(2*tt-1)^13+92160*(2*tt-1)^11-70400*(2*tt-1)^9+28800*(2*tt-
1)^7-6048*(2*tt-1)^5+560*(2*tt-1)^3-30*tt+15;
pp16=1-128*(2*tt-1)^2+2688*(2*tt-1)^4+84480*(2*tt-1)^8-21504*(2*tt-1)^6+32768*(2*tt-
1)^16-131072*(2*tt-1)^14+212992*(2*tt-1)^12-180224*(2*tt-1)^10;
pp17=34*tt-17-816*(2*tt-1)^3+11424*(2*tt-1)^5+239360*(2*tt-1)^9-71808*(2*tt-1)^7+65536*
(2*tt-1)^17-278528*(2*tt-1)^15+487424*(2*tt-1)^13-452608*(2*tt-1)^11;
pp18=162*(2*tt-1)^2-4320*(2*tt-1)^4+131072*(2*tt-1)^18-589824*(2*tt-1)^16+1105920*(2*tt-
1)^14+1118208*(2*tt-1)^12+658944*(2*tt-1)^10-228096*(2*tt-1)^8+44352*(2*tt-1)^6-
1;
pp19=-38*tt+19+1140*(2*tt-1)^3-20064*(2*tt-1)^5+262144*(2*tt-1)^19-695552*(2*tt-1)^9+
160512*(2*tt-1)^7-1245184*(2*tt-1)^17+2490368*(2*tt-1)^15-2723840*(2*tt-1)^13+
1770496*(2*tt-1)^11;

Tcht=[pp zeros(1,20);zeros(1,20) pp]; % matriz T chapéu
Fi= Tcht*(Ich +LL*P)
amplitude=b(s)
magnitude=a1(i)
MF= eig(Fi)
MF_abs= abs(MF)
R=(1/2)*logm(Fi)^2
EC=eig(R)
%Diagrama de Estabilidade
mf=1;
while mf<3
MFi=MF(mf,:);

```

```

if isreal(MFi) % MF complexo
    if abs(1-abs(MF(mf)))<0.008 % bifurcação Hopf
        conth=conth+1;
        xH(conth)=a1(i); % valor de a
        yH(conth)=b(s); %valor de b
        mf=mf+1;
        sinal1=1;
    end

else %MF real
    if abs(1+MFi)<0.01 %bifurcação flip
        contfp=contfp+1;
        xFp(contfp)=a1(i); % valor de a
        yFp(contfp)=b(s); %valor de b
        mf=mf+1;
        sinal2=1;
    else
        if abs(1-MFi)<0.008 %bifurcação fold
            xFd(contfd)=a1(i); % valor de a
            yFd(contfd)=b(s); %valor de b
            contfd=contfd+1;
            mf=mf+1;
            sinal3=1;
        end
    end
end

end

mf=mf+1;
end
end
end

%Plotagem dos gráficos

```

```

figure(1);
title('Diagrama de Estabilidade')
axis([-0.75 1.6 0 1.7])
xlabel('a');
ylabel('b');
if sinal2>=1 plot(xFp,yFp,'r.');
```

% marca os pontos vermelhos

```

title('Diagrama de Estabilidade')
axis([-0.75 1.6 0 1.7])
xlabel('a');
ylabel('b');
hold on end
if sinal3>=1
plot(xFd,yFd,'k.');
```

% marca os pontos pretos

```

title('Diagrama de Estabilidade')
axis([-0.75 1.6 0 1.7])
xlabel('a');
ylabel('b');
hold on end
if sinal1>=1
plot(xH,yH,'b.');
```

% marca os pontos azuis

```

title('Diagrama de Estabilidade')
axis([-0.75 1.6 0 1.7])
xlabel('a');
ylabel('b');
end
```

Função CHEBY_G(20)

```

function t = cheby_g(m)
%matriz operacional de Integração
%format rat
t(1:m,1:m)=0.0;
```

```
t(1,1)=1/2;  
t(1,2)=1/2;  
t(2,1)=-1/8;  
t(2,3)=1/8;  
for i=2:m-1  
    t(i+1,1)=-((-1)^i)/(2*(i^2-1));  
end  
for i=2:m-1  
    t(i+1,i)=(-1/4)*(1/(i-1));  
end for i=2:m-2  
    t(i+1,i+2)=(1/4)*(1/(1+i));  
end
```

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, V. S., OLIVEIRA, V. A., PERUZZI, N. J., E BALTHAZAR, J. M. Modelagem de um sistema dinâmico do tipo pendular. Série Arquimedes volume 2, Anais do DINCON, São José dos Campos, Agosto 2003. 2º Congresso Temático de Aplicações de Dinâmica e Controle da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC).
- [2] BARNETT, S. Multiplication of generalized polynomials with application to classical orthogonal polynomials. *SIAM Journal on Algebraic and Discret Methods* v. 5 (1984), 457–162.
- [3] BELATO, D. Não-linearidade do eletro-pêndulo. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica, 1998.
- [4] BUTCHER, E. A., E SINHA, S. C. Symbolic computational of local stability and bifurcation surfaces for nonlinear time-periodic systems. *Nonlinear Dyanmics* vl. 17 (1998).
- [5] CHANG, P. Y., YANG, S.-Y., E WANG, M.-L. Solution of linear dynamic systems by generalized orthogonal polynomials. *International Journal of Systems Science* v. 17 (1986), 1727–1740.
- [6] CHOU, J. H., E HORNG, I. R. Chebyshev series analysis an identification of scaled systems. *International Journal of Systems Science* v. 16 (1985), 1157–1162.
- [7] CHOU, J. H., E HORNG, I. R. Double-shifted Chebyshev series for convolution and integral equations. *International Journal of Systems Science* v. 42 (1985), 225–232.
- [8] CHOU, J. H., E HORNG, I. R. Shifted Legendre series analysis and identification of scaled systems. *International Journal of Systems Science* v. 16 (1985), 863–867.

- [9] DIAS, A. O. Estudo de um sistema mecânico com pêndulo sob excitação não ideal. Dissertação de Mestrado, Unesp - São José do Rio Preto, 2006.
- [10] FERREIRA, M. C. Análise de um sistema dinâmico não ideal com excitação vertical e horizontal. Dissertação de Mestrado, Unesp - São José do Rio Preto, 2007.
- [11] FIEDLER-FERRARA, N., E DO PRADO, C. P. C. *Caos: Uma Introdução*. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 1995.
- [12] FOX, L., E PARKER, I. B. *Chebyshev polynomials in numerical analysis*. Oxford University Press.
- [13] GOLUB, G., E LOAN, C. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
- [14] KUZNETSOV, Y. A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, segunda ed. Editora Springer-Verlag, 1998.
- [15] MACHADO, J. M., E TSUCHIDA, M. An application of integrodifferential equations to the study of charged particle dynamics in oscillating magnetic fields. *DINCON* (2002).
- [16] MACHADO, J. M., E TSUCHIDA, M. Solutions for a class of integro-differential equations with time periodic coefficients. *Applied Mathematics E-Notes* (2002), 66–71.
- [17] MEIROVITCH, L. *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [18] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2002.
- [19] NASCIMENTO, V. H. O produto de Kronecker, maio 2004. Disponível em http://www.-lps.usp.br/~vitor/cursos/matrizes/aula_Kronecker.pdf. Último acesso: 22/05/2007.
- [20] OLIVEIRA, E. Análise da dinâmica de um pêndulo elástico com excitação vertical no suporte. Dissertação de Mestrado, Unesp - São José do Rio Preto, 2006.
- [21] PARKER, T. S., E CUA, L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [22] PERUZZI, N. J. *Dinâmica não linear e controle de sistemas ideais e não-ideais periódicos*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2005.

- [23] PERUZZI, N. J., PONTES, B. R., M., B. J., E BRASIL, R. M. L. R. F. Nonlinear dynamics and control of an ideal/nonideal load transportation systems with periodic coefficients. *ASME* (2006).
- [24] SINHA, S. C., E BUTCHER, E. A. Symbolic computation of fundamental solution matrices for linear time-periodic dynamical systems. *Journal of Sound and Vibration v.206(1)*, (1997), 61–85.
- [25] SINHA, S. C., E CHOU, C. C. An approximate analysis of transient response of time-dependent linear systems by orthogonal polynomials. *Journal of Sound and Vibration v.49*, (1976), 309–326.
- [26] SINHA, S. C., CHOU, C. C., E DENMAN, H. H. Stability analysis of systems with periodic coefficients: an approximate approach. *Journal of Sound and Vibration v. 64* (1979), 515–527.
- [27] SINHA, S. C., E WU, D.-H. An efficient computational scheme for the analysis of periodic systems. *Journal of Sound and Vibration v.151(1)*, (1991), 91–117.
- [28] SNYDER, M. A. *Chebyshev Methods in Numerical Approximation*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
- [29] VIANA, R. Tópicos especiais de física teórica. Análise de séries temporais caóticas. Departamento de física, Universidade Federal do Paraná. aula 1.