

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**Crises de fronteira e estruturas
complexas no espaço de parâmetros
em um mapeamento dissipativo
bidimensional**

MATHEUS HANSEN FRANCISCO

Rio Claro (SP)

2013

MATHEUS HANSEN FRANCISCO

**Crises de fronteira e estruturas
complexas no espaço de parâmetros
em um mapeamento dissipativo
bidimensional**

Trabalho de Conclusão de Curso - TCC - apresentado ao Instituto
de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual
Paulista - Campus de Rio Claro, como parte dos requisitos
para obtenção do grau de Bacharel em Física.

Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Makoto Yoshida

UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Roberto E. Lagos Mônaco

UNESP - Rio Claro

Rio Claro (SP)

04 de novembro de 2013

RESUMO

Estudaremos algumas propriedades dinâmicas de uma partícula em um pacote de ondas se movendo em um campo elétrico. Utilizaremos um mapeamento não linear bidimensional obtido pelo Hamiltoniano do sistema que descreve o movimento da partícula, levando em consideração aproximações relativísticas. O espaço de fases apresentado é misto, portanto áreas regulares e caóticas coexistem. Quando introduzimos a dissipação, a área do espaço de fases não é mais preservada e há o surgimento de atratores. Mostraremos que podemos obter ajustes em leis de potência para o transiente analisando a crise de fronteira. Mostraremos também que ao introduzir dissipação no sistema é possível encontrar estruturas periódicas do tipo *shrimp* no espaço de parâmetros. Finalizaremos este estudo apresentando informações de que podem existir estruturas tridimensionais do tipo shrimp no sistema.

ABSTRACT

Some dynamical properties for a classical charged particle moving under by the influence of an electric field of wave packet are studied. The dynamics is described by the use of a two-dimensional and non-linear mapping with three relevant control parameters. The first controls the non-linearity of the model, second controls dissipation and the third one describes the transition from a relativistic to non relativistic. When dissipation is taken into account, we prove the existence of attractors of two types in the system: (i) sinks and; (ii) chaotic. We show that variation of control parameters may lead to a sudden destruction of a chaotic attractor. Such destruction is due to a boundary crisis. After that a chaotic attractor is replaced by a chaotic transient which is characterized by a power law of exponent -1 . The parameter space is also investigated. We show the existence of complicated structures of shrimp-like form and give so far a clear evidence of a $3 - D$ shrimp in the parameter space.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais por terem tornado todo esse sonho possível, pois sem eles, nada disso teria acontecido.

Aos meus familiares, que sempre me apoiaram de alguma forma.

Ao meu amigo e orientador Prof. Edson Denis Leonel, por ter confiado em mim e dado-me a oportunidade de trabalhar com ele.

Ao meu grande amigo Diogo Ricardo da Costa, por ter tido paciência e sempre estar pronto para me ajudar quando necessário.

Aos amigos do laboratório liderado pelo Prof. Edson Denis Leonel.

Aos meus amigos em geral, por terem tornado esse caminho mais divertido.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro durante o período de construção deste trabalho.

A todos o meu profundo e sincero agradecimento.

Conteúdo

1	Introdução	7
2	O modelo, o mapeamento discreto e a estrutura do espaço de fases	9
2.1	Modelo	9
2.2	Espaço de fases	10
2.3	Expoentes de Lyapunov	11
3	Crise de fronteira	16
3.1	Pontos fixos	16
3.2	Crise de fronteira	19
3.3	Transiente caótico	22
4	Estruturas Shrimp	25
4.1	Estruturas Shrimp no modelo	25
4.2	Trajetória da estrutura Shrimp no espaço de parâmetros	28
5	Conclusões	30

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos descritos por mapeamentos discretos tem sido amplamente estudados durante vários anos [1,2]. O par (p, q) , que corresponde ao *momentum* e a posição, definem 1 grau de liberdade. Quando aparece a dependência explícita do tempo é dito ter 1/2 grau de liberdade. Em particular, para sistemas com 1 grau e 1/2 de liberdade, correspondem por exemplo a perturbações temporais em um sistema de um grau de liberdade, a descrição de sistemas Hamiltonianos conduz muitas vezes a mapeamentos discretos bidimensionais e que preservam a área no espaço de fases. Pode ser observado, em particular no estudo de plasmas (por exemplo tokamaks) [3,4,5,6], guia de ondas [7,8,9,10], aceleração de Fermi [11], bilhares clássicos [12,13,14] e muitas outras generalizações [15,16].

Definimos espaço de fases o conjunto de todos os estados acessíveis do sistema. Ao evoluir uma condição no seu estado inicial, o sistema passa por pontos no espaço de fases. O conjunto de pontos percorridos no espaço de fases é definido como sendo a órbita da condição analisada. Desta forma o espaço de fases é formado por todas as órbitas possíveis do sistema. É bem conhecido na literatura que a estrutura dos espaço de fases depende de propriedades individuais e que são características de cada sistema. Basicamente os sistemas podem ser classificados em três diferentes grupos: (i) integráveis; (ii) ergódicos e (iii) mistos. No caso (i) o espaço de fases consiste num conjunto de curvas invariantes e um exemplo típico é o bilhar circular [17], cuja integrabilidade vem da conservação do momento angular e da energia. No caso (ii), os sistemas ergódicos tem apenas uma componente caótica e que preenche todo o espaço de fases acessível. Tal estrutura pode ser vista por exemplo no bilhar estádio de Bunimovich [18] e no gás de Lorentz [19]. Finalmente, o caso (iii) corresponde a maioria dos casos. Uma propriedade importante de sistemas mistos é a existência de um mar de caos que geralmente envolve um conjunto de ilhas de estabilidade e ainda está confinado por curvas invariantes do tipo *spanning*. Essas curvas tem como função separar regiões caóticas no espaço de fases e são

invariantes por iterada. Pesquisas intensas tem sido realizadas nesta área considerando ambas aproximações clássicas e quânticas [20,21,22,23,24]. Entretanto a introdução de dissipação muda completamente a estrutura do espaço de fases de forma que pontos fixos elípticos bifurcam em atratores de ponto fixo assintoticamente estáveis, também conhecidos como *sinks* e mares de caos podem ser substituídos por atratores caóticos.

Neste trabalho consideraremos o problema de uma partícula carregada em um campo elétrico criado por um pacote de ondas [25]. O movimento da partícula é totalmente descrito pelas equações de movimento clássico sendo que a partícula não experimenta crescimento ilimitado de energia devido a existência de curvas invariantes do tipo *spanning* que limitam a extensão do mar de caos. Assumindo que a aceleração da partícula é muito grande, as equações clássicas de Newton do movimento não valem mais, portanto, aproximações relativísticas devem ser feitas. Tendo essas informações, mostraremos que o modelo com aproximações relativísticas pode ser descrito por um mapeamento discreto, bidimensional. Desta forma a introdução da dissipação neste sistema muda a estrutura do espaço de fases, de forma que o mar de caos pode se transformar em um atrator caótico e os pontos fixos elípticos se transformam em *sinks*. Mostraremos que o aumento da dissipação faz com que a bacia de atração de um *sink* cruze com o a bacia de atração do atrator caótico. Desta forma ocasionando o fenômeno de crise fronteira [26,27]. Mostraremos que com a introdução da dissipação e a mudança dos parâmetros de controle, é possível encontrar estruturas periódicas do tipo *shrimp* [28].

Este trabalho será dividido da seguinte forma: no capítulo 2 trataremos do espaço de fases, desta forma discutiremos as equações da dinâmica para a construção do mapa e os expoentes de Lyapunov. No capítulo 3 analisaremos o evento de crise de fronteira e suas consequências. No capítulo 4 abordaremos as estruturas do tipo *shrimp* obtidas neste mapeamento e por fim no capítulo 5 apresentamos a conclusão deste trabalho.

Capítulo 2

O modelo, o mapeamento discreto e a estrutura do espaço de fases

2.1 Modelo

O sistema que consideramos consiste de uma partícula clássica eletricamente carregada se movendo em um pacote de ondas que foi introduzido por Zaslavsky et al [25], onde o campo elétrico $E(x, t)$ é escrito como

$$E(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n \sin(\kappa_n x - \omega_n t), \quad (2.1)$$

onde E_n é a amplitude da n -ésima componente de Fourier do campo elétrico. Considerando que o pacote de ondas tem um amplo espectro, assumimos que $E_n = E_0$ e $\omega_n = n\omega$, portanto

$$E(x, t) = E_0 \sin(\kappa_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega t). \quad (2.2)$$

Usando a decomposição de Fourier da função Delta de Dirac, temos

$$E(x, t) = E_0 T \sin(\kappa_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.3)$$

onde $T = 2\pi/\omega$.

Assumindo o que movimento de um elétron com massa m_0 e carga $-e$ em um campo elétrico é dado pela Eq.(2.3), o Hamiltoniano pode ser descrito por

$$H(x, p, t) = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} - e\varphi(x, t). \quad (2.4)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula, $p = m_0 c / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ é o *momentum* da partícula, c é a velocidade da luz e $\varphi(x, t)$ é o potencial. Este potencial pode ser descrito por

$$\varphi(x, t) = \frac{E_0 T}{\kappa_0} \cos(\kappa_0 x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT).$$

Entre os impactos da função Delta, temos o movimento livre e a dinâmica é dado pela solução das EDO's de do tipo $\dot{x}$ e $\dot{p}$, obtidas pela Eq.(2.4), essas equações são

$$\dot{x} = \frac{pc^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4}}. \quad (2.5)$$

$$\dot{p} = -eE_0 T \sin \kappa_0 x \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (2.6)$$

Definindo $\theta = \kappa_0 x$ e introduzindo as variáveis auxiliares $\beta = \omega / \kappa c$, $I = \kappa_0 p / m_0 \omega$ e assumindo que (I_n, θ_n) são os valores da variável imediatamente após o n -ésimo impacto, (I_{n+1}, θ_{n+1}) representa seus valores após o choque $(n+1)$ e introduzindo a dissipação via parâmetro δ , o mapeamento discreto conhecido como mapa *standard* relativístico, é dado por [29,30]

$$P : \begin{cases} I_{n+1} = (1 - \delta)I_n + K \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{I_{n+1}}{\sqrt{1 + (\beta I_{n+1})^2}} \right] \text{ Mod } (2\pi) \end{cases}, \quad (2.7)$$

onde as variáveis I, θ representam a energia e o tempo respectivamente da partícula, K é o parâmetro que controla a integrabilidade ($K = 0$) para a não integrabilidade ($K \neq 0$). β é o parâmetro que controla a aproximação relativístico do mapa, ou seja, se $(\beta \rightarrow 0)$ o mapeamento encontra-se no limite Newtoniano, onde a partícula é descrita pelas leis de Newton, se $(\beta \neq 0)$ significa que a partícula está em regime relativístico e as correções relativísticas devem ser tomadas, e $\delta \in [0, 1]$ é o parâmetro de dissipação.

Com isso montamos o modelo do problema de uma partícula clássica eletricamente carregada se movendo em um potencial elétrico do tipo pacote de ondas em termos de um mapa discreto bidimensional.

2.2 Espaço de fases

Nesta seção discutiremos algumas propriedades do espaço de fases. O espaço de fases, para o mapa *standard* relativístico dado pela Eq.(2.7) para os parâmetros $K = 3, 5$, $\beta = 0, 2$ e $\delta = 0$ é mostrado na Fig.2.1(a).

Podemos observar na Fig.2.1(a) que o espaço de fases é misto, com a existência de um mar de caos que é limitado por curvas invariantes do tipo *spanning*, além de ilhas de estabilidade que geralmente envolvem pontos fixos elípticos.

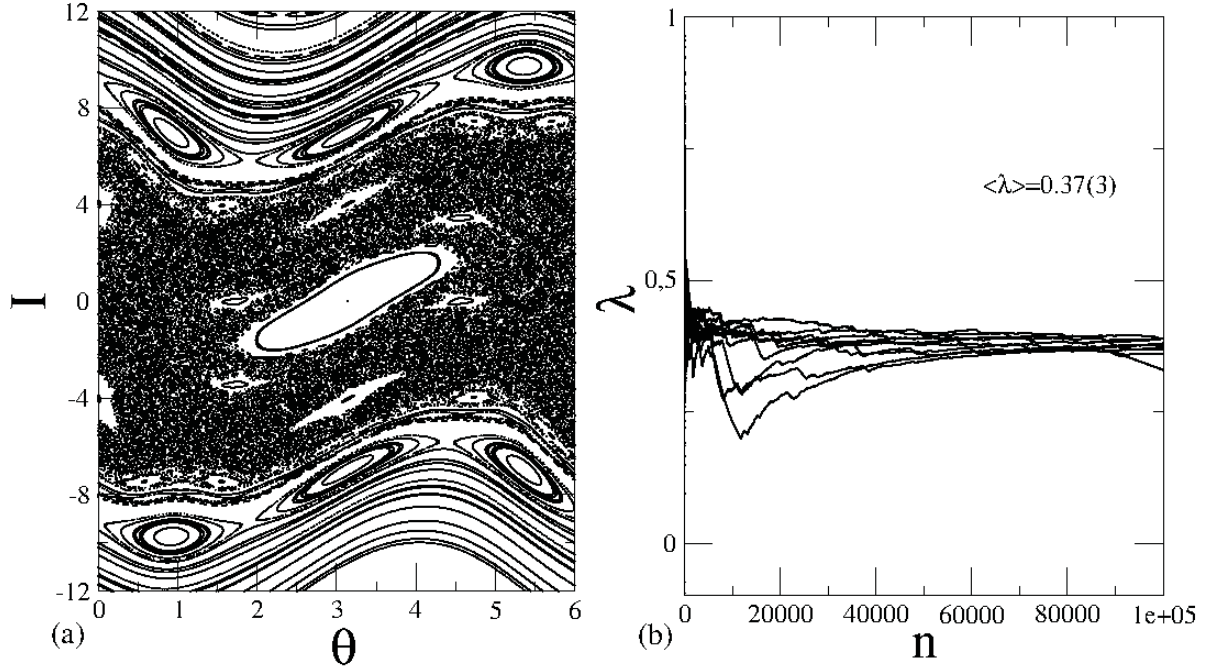


Figura 2.1: (a) Espaço de fases gerado pela Eq.(2.7) com parâmetros $K = 3, 5, \beta = 0, 2$ e $\delta = 0$; (b) Convergência dos expoentes de Lyapunov para os mesmos parâmetros mostrados em (a).

2.3 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são utilizados como indicadores de caos. Eles mostram se uma órbita é sensível ou não às condições iniciais, ou seja, se duas órbitas com condições iniciais próximas divergem ou não com o passar do tempo.

A idéia do expoente de Lyapunov é medir o afastamento entre duas órbitas próximas. Se a distância entre as órbitas sofrer uma divergência exponencial, isso é suficiente para caracterizar caos. Caso as órbitas permanecerem próximas ou divergirem de forma linear, dizemos que as órbitas são regulares.

Nosso objetivo é utilizar o expoente de Lyapunov para caracterizar o comportamento caótico ou não de uma órbita. Para compreender o funcionamento do expoente de Lyapunov, vamos demonstrar primeiramente para o caso unidimensional e em seguida para o caso bidimensional.

Para o modelo unidimensional, onde x é a variável dinâmica, vamos supor um mapa dado por

$$x_{n+1} = G(x_n), \quad (2.8)$$

onde x_0 é uma condição inicial e G é uma função não linear qualquer. Mediremos a distância d entre duas condições iniciais na n -ésima iteração, tal que uma seja x_0 e a

outra $x_0 + \xi$, sendo ξ uma pequena variação, ou seja

$$d = |G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)|. \quad (2.9)$$

Tomando a Eq.(2.9) e dividindo por ξ , encontramos a distância relativa,

$$\frac{d}{\xi} = \left| \frac{G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)}{\xi} \right|, \quad (2.10)$$

considerando o limite em que $\xi \rightarrow 0$

$$\frac{d}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{G^{(n)}(x_0 + \xi) - G^{(n)}(x_0)}{\xi} \right|, \quad (2.11)$$

podemos observar que a expressão da Eq.(2.11) corresponde a própria definição de derivada. Vamos agora por hipótese supor que

$$|G'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}. \quad (2.12)$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \ln e^{\lambda n} &= \ln |G'^{(n)}(x_0)|, \\ \lambda n &= \ln |G'^{(n)}(x_0)|, \\ \lambda &= \frac{1}{n} \ln |G'^{(n)}(x_0)|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Considerando o limite em que $n \rightarrow \infty$, temos

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |G'^{(n)}(x_0)|. \quad (2.14)$$

Desta forma, a Eq.(2.14) fornece o expoente de Lyapunov para o caso unidimensional.

Para o caso bidimensional, a expressão para os expoentes de Lyapunov é dado por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i|, \quad j = 1, 2; \quad (2.15)$$

onde o termo Λ_j^i corresponde aos autovalores da matriz M, sendo ela igual a $M = \prod_{i=1}^n J_i(I_i, \theta_i)$ e J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento na órbita (I_i, θ_i) .

A matriz Jacobiana é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} &= 1 - \delta, \\ \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} &= k \cos(\theta_n), \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\beta I_{n+1})^2}} - \frac{(\beta I_{n+1})^2}{[1 + (\beta I_{n+1})]^{\frac{3}{2}}} \right), \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\beta I_{n+1})^2}} - \frac{(\beta I_{n+1})^2}{[1 + (\beta I_{n+1})]^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilizaremos o algoritmo de triangularização proposto em [31]. Este método consiste em escrever a matriz Jacobiana a partir do produto de uma matriz ortogonal O por uma matriz triangular superior T , portanto

$$J = OT. \quad (2.18)$$

Sabemos por propriedades de matriz que uma matriz é ortogonal quando sua transposta é igual a sua inversa, ou seja

$$O^{-1} = O^t. \quad (2.19)$$

Desta forma, podemos escrever a matriz triangular como

$$T = O^{-1}J. \quad (2.20)$$

A matriz M é escrita pelo produto

$$M = J_n J_{n-1} \dots J_2 J_1. \quad (2.21)$$

Vamos introduzir nessa matriz uma identidade da forma $O_1 O_1^{-1}$, desta forma teremos

$$M = J_n J_{n-1} \dots J_2 O_1 O_1^{-1} J_1. \quad (2.22)$$

Como vimos na Eq.(2.20) o termo $O_1^{-1} J_1$ corresponde a matriz triangular T_1 e o termo $O_1 J_2$ é reescrito como J'_2 , portanto

$$M = J_n J_{n-1} \dots J'_2 T_1. \quad (2.23)$$

Aplicando mais uma vez a identidade, porém, sendo ela agora $O_2 O_2^{-1}$, temos

$$M = J_n J_{n-1} \dots J_3 O_2 O_2^{-1} J'_2 T_1,$$

$$M = J_n J_{n-1} \dots J'_3 T_2 T_1.$$

Realizando este processo, teremos o produto de matrizes triangulares que resulta em uma nova matriz triangular, portanto, encontramos os autovalores como sendo os elementos T_{11} e T_{22} da diagonal principal da matriz triangular T .

Para encontrar os valores da diagonal principal da matriz T , ou seja, T_{11} e T_{22} , escolheremos a matriz ortogonal O como

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

$$O^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

A matriz triangular superior T representada por

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

Como vimos na Eq.(2.20), podemos escrever a matriz T como sendo

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

aplicando o produto da matriz O^{-1} por J temos,

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{11} \cos(\alpha) + j_{21} \sin(\alpha) & j_{12} \cos(\alpha) + j_{22} \sin(\alpha) \\ -j_{11} \sin(\alpha) + j_{21} \cos(\alpha) & -j_{12} \sin(\alpha) + j_{22} \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Abrindo essas equações temos

$$T_{11} = j_{11} \cos(\alpha) + j_{21} \sin(\alpha), \quad (2.29)$$

$$T_{12} = j_{12} \cos(\alpha) + j_{22} \sin(\alpha), \quad (2.30)$$

$$0 = -j_{11} \sin(\alpha) + j_{21} \cos(\alpha), \quad (2.31)$$

$$T_{22} = -j_{12} \sin(\alpha) + j_{22} \cos(\alpha). \quad (2.32)$$

A partir da Eq.(2.31), encontramos

$$0 = -j_{11} \sin(\alpha) + j_{21} \cos(\alpha), \quad (2.33)$$

$$j_{11} \sin(\alpha) = j_{21} \cos(\alpha), \quad (2.34)$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{j_{21}}{j_{11}}. \quad (2.35)$$

Podemos representar a Eq.(2.31) através de vetores, mostramos isso na Fig.2.2.

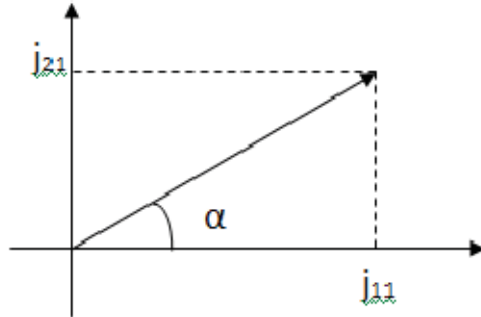


Figura 2.2: Ilustração esquemática para os eixos de j_{11} e j_{22}

Vemos que da Fig.2.2 que o módulo do vetor é

$$h = \sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}. \quad (2.36)$$

Desta forma sabemos que

$$\sin(\alpha) = \frac{j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{j_{11}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.37)$$

Transportando a expressão da Eq.(2.36) para as Eq.(2.29) e (2.32), os elementos da diagonal da matriz, são

$$T_{11} = \frac{j_{11}^2 + j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}, \quad (2.38)$$

$$T_{22} = \frac{j_{22}j_{21} - j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2 + j_{21}^2}}. \quad (2.39)$$

Desta forma uma expressão para os expoente de Lyapunov é

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |T_{jj}^n|, \quad j = 1, 2, \quad (2.40)$$

onde T_{jj} é o elemento da diagonal da matriz triangular superior T^n .

Uma informação importante é que para sistemas conservativos, os expoentes de Lyapunov aparecem aos pares, porém, com sinais contrários. Portanto, quando somamos os expoentes correspondentes a um par, obtemos zero. No caso dissipativo, os expoentes de Lyapunov também aparecem aos pares com sinais trocados, porém, ao somar os elementos de cada par, obtemos um valor negativo.

Tendo essas informações sobre os expoentes de Lyapunov podemos caracterizar se uma órbita é caótica. Para confirmar nossa afirmação da existência de um mar de caos que foi abordado no estudo do espaço de fases utilizaremos condições iniciais que estão dentro do mar de caos, seguiremos suas órbitas analisando os expoentes de Lyapunov. Para realizar esta tarefa primeiro vamos tomar as condições dentro da região escolhida, no nosso caso adotamos θ variando de 0 a 0,5 e I sendo igual a 0.

O determinante da matriz Jacobiana é $\det(J) = 1 - \delta$, vale a pena lembrar que se δ é nulo, ocorre a preservação de área no espaço de fases do mapeamento.

A partir dessas informações, construímos dez curvas para os expoentes de Lyapunov para a região escolhida, e depois de 10^5 iterações para cada curva, conseguimos um expoente equivalente a $\langle \lambda \rangle = 0,37(3)$. Esse resultado corresponde a comportamento caótico, ou seja, confirmando a existência de caos no espaço de fases. As curvas dos expoentes de Lyapunov e o valor do expoente médio estão apresentadas na Fig.2.1(b).

Capítulo 3

Crise de fronteira

3.1 Pontos fixos

Começaremos esse capítulo determinando os pontos fixos do mapa. A condição para se obter pontos fixos de período um é

$$I_{n+1} = I_n, \quad (3.1)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2m\pi, \quad (3.2)$$

onde $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Deve-se lembrar que a equação em θ do mapeamento é modulada em 2π , portanto, devemos acrescentar o termo $2m\pi$ na Eq.(3.2).

Começaremos trabalhando na Eq.(3.2), que fica como

$$I_{n+1} = (1 - \delta)I_n + K \sin(\theta_n). \quad (3.3)$$

Sabendo que no ponto fixo, o ponto I_{n+1} e I_n são iguais, podemos dizer que $I = I_{n+1} = I_n$, desta forma podemos reescrever a Eq.(3.3) como sendo

$$I = (1 - \delta)I + K \sin(\theta). \quad (3.4)$$

Fazendo uma manipulação algébrica, podemos encontrar a expressão para θ , aqui vamos adotar a nomenclatura θ para a Eq.(3.2), pelos mesmos motivos apresentados para a equação em I , logo

$$I = I - I\delta + K \sin(\theta), \quad (3.5)$$

$$I - I + I\delta = K \sin(\theta), \quad (3.6)$$

$$I\delta = K \sin(\theta), \quad (3.7)$$

$$\sin(\theta) = \frac{I\delta}{K}, \quad (3.8)$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{I\delta}{K}\right). \quad (3.9)$$

Para o caso em que $m > 0$, a seguinte transformação deve ser feita $\theta \rightarrow \pi - \theta$ e no caso de $m < 0$, $\theta \rightarrow \pi + \theta$.

Para a Eq.(3.2), faremos o mesmo procedimento:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{I_n}{\sqrt{1 + (\beta I_{n+1})^2}}, \quad (3.10)$$

$$\theta_n + 2m\pi = \theta_n + \frac{I_n}{\sqrt{1 + (\beta I_{n+1})^2}}, \quad (3.11)$$

$$\theta + 2m\pi = \theta + \frac{I}{\sqrt{1 + (\beta I)^2}}. \quad (3.12)$$

Fazendo uma manipulação algébrica, temos

$$2m\pi = \theta - \theta + \frac{I}{\sqrt{1 + (\beta I)^2}}. \quad (3.13)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da Eq.(3.13) temos

$$\left(\frac{I}{\sqrt{1 + (\beta I)^2}}\right)^2 = (2m\pi)^2, \quad (3.14)$$

$$\left(\frac{I^2}{1 + \beta^2 I^2}\right) = 4m^2 \pi^2, \quad (3.15)$$

$$I^2 = 4m^2 \pi^2 + 4m^2 \pi^2 \beta^2 I^2. \quad (3.16)$$

Desta forma, podemos isolar I , o que leva a

$$I^2(1 - (\beta 2m\pi)^2) = 4m^2 \pi^2, \quad (3.17)$$

$$I = \frac{2m\pi}{\sqrt{1 - (2m\beta)^2}}, \quad (3.18)$$

essa vem a ser a equação para ponto fixo na variável I .

Desta forma podemos representar as equações para os pontos fixos do mapa, como sendo

$$I = \frac{2m\pi}{\sqrt{1 - (2m\beta)^2}}, \quad \theta = \arcsin\left(\frac{I\delta}{K}\right), \quad (3.19)$$

com $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. É importante mencionar que para que os pontos fixos sejam reais, β deve ser $< 2m\pi$, para o caso de $\beta = (2m\pi)^{-1}$, os pontos fixos não são definidos [32].

A classificação dos pontos fixos, será feita pelos autovalores da matriz Jacobiana. Para determiná-los partiremos de um mapeamento bidimensional. Vamos supor o seguinte mapeamento bidimensional

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = G(X_n, Y_n) \end{cases} . \quad (3.20)$$

Vamos supor que os pontos fixos desse mapeamento seja dado por

$$\begin{cases} X^* = F(X^*, Y^*) \\ Y^* = G(X^*, Y^*) \end{cases} . \quad (3.21)$$

O procedimento consiste em perturbar o ponto fixo com uma condição inicial próxima, tal que $X_n = X^* + \xi_n$ e $Y_n = Y^* + \epsilon_n$ onde ξ_n e ϵ_n são pequenas perturbações. Aplicando esses pontos no mapa dado pela Eq.(3.20) temos

$$\begin{cases} X^* + \xi_{n+1} = F(X^* + \xi_n, Y^* + \epsilon_n) \\ Y^* + \epsilon_{n+1} = G(X^* + \xi_n, Y^* + \epsilon_n) \end{cases} . \quad (3.22)$$

Realizando uma expansão de Taylor em torno do ponto fixo na Eq.(3.22) temos

$$\begin{cases} X^* + \xi_{n+1} = F(X^*, Y^*) + \frac{\partial F}{\partial X}\xi_n + \frac{\partial F}{\partial Y}\epsilon_n + \dots + \\ Y^* + \epsilon_{n+1} = G(X^*, Y^*) + \frac{\partial G}{\partial X}\xi_n + \frac{\partial G}{\partial Y}\epsilon_n + \dots + \end{cases} . \quad (3.23)$$

Desconsiderarmos os termos de ordem superior, podemos escrever essa expansão da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ \epsilon_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_n \\ \epsilon_n \end{pmatrix} , \quad (3.24)$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} \end{pmatrix} ,$$

é a matriz Jacobiana do mapeamento. Resolvendo $\det(J - \lambda I) = 0$ onde I é a matriz identidade temos

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial X} - \lambda & \frac{\partial F}{\partial Y} \\ \frac{\partial G}{\partial X} & \frac{\partial G}{\partial Y} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (3.25)$$

Chamando

$$\frac{\partial F}{\partial X} = j_{11}, \quad \frac{\partial F}{\partial Y} = j_{12}, \quad \frac{\partial G}{\partial X} = j_{21}, \quad \frac{\partial G}{\partial Y} = j_{22},$$

e resolvendo a Eq.(3.25) temos que

$$(j_{11} - \lambda)(j_{22} - \lambda) - j_{12}j_{21} = 0,$$

$$\lambda^2 - \lambda(j_{11} + j_{22}) + (j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}) = 0. \quad (3.26)$$

A Eq.(3.26) é chamada de equação característica e sua solução é dada por

$$\lambda_{\pm} = \frac{(j_{11} + j_{22}) \pm \sqrt{(j_{11}j_{22})^2 - 4(j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21})}}{2}. \quad (3.27)$$

Chamando $(j_{11} + j_{22}) = TrJ$ onde TrJ é o traço da matriz Jacobiana e $(j_{11}j_{22} - j_{12}j_{21}) = det(J)$ sendo $det(J)$ o determinante da matriz Jacobiana, podemos reescrever a Eq.(3.27) com sendo

$$\lambda_{\pm} = \frac{(TrJ) \pm \sqrt{(TrJ)^2 - 4(det(J))}}{2}. \quad (3.28)$$

A solução da Eq.(3.26) fornece duas expressões que caracterizam o ponto fixo. A condição para obter pontos fixos do tipo sela é

$$(TrJ)^2 - 4(det(J)) \geq 0,$$

sendo

$$|\lambda_+| > 1, \quad |\lambda_-| < 1. \quad (3.29)$$

No caso de termos autovalores do tipo

$$|\lambda_+| < 1, \quad |\lambda_-| < 1, \quad (3.30)$$

temos um ponto fixo assintoticamente estável, também chamado de sink, este ponto pode ser comparado a um sorvedouro.

3.2 Crise de fronteira

Agora que temos informações sobre os pontos fixos do mapa e os tipos de pontos fixos podemos discutir o fenômeno de crise fronteira. Quando introduzimos dissipação no mapeamento, vimos que o mar de caos é destruído sendo substituído por um atrator caótico e que os pontos fixos elípticos se transformam em sinks. Através dos autovetores das variedades instáveis e estáveis do ponto de sela, podemos construir as fronteiras das bacias de atração dos pontos fixos, ou seja, saber o limite em que um ponto fixo exerce atração sobre as órbitas daquela região. A variação da dissipação faz com que a bacia de atração do atrator caótico se aproxime da bacia de atração do ponto de sela. É importante mencionar que enquanto as bacias não se tocam, as condições permanecem presas dentro de cada bacia, por exemplo, uma condição dentro da bacia do atrator permanece sempre dentro do mesmo. Conforme a dissipação vai sendo variada, as bacias vão se aproximando, quando elas se tocam, a bacia do atrator caótico é destruída. Isso significa que uma condição inicial dentro do atrator caótico não permanece mais dentro dele. Depois de um transiente, a órbita evolui para um dos sinks. Essa situação é conhecida como crise de fronteira [26,27].

Vamos agora discutir o procedimento para construir as variedades do ponto fixo de sela. Existem dois tipo de variedades, uma delas é a variedade instável. Partindo de um conjunto de condições iniciais suficientemente próximas do ponto de sela mas ao longo do autovetor cujo o autovalor é maior que 1 em módulo, a evolução da dinâmica leva as órbitas que se afastam do ponto de sela. As variedades instáveis são contruídas pela a iteração do mapeamento dado pela Eq.(2.7). Por outro lado as variedades estáveis são construídas pela iteração do mapeamento inverso. As condições iniciais são escolhidas ao longo do autovetor construído pelo autovalor menor do que 1 em módulo. Em nosso trabalho, o mapa inverso é dado por

$$P^{-1} : \begin{cases} I_n = \frac{I_{n+1} - K \sin(\theta_n)}{(1-\delta)} \\ \theta_n = \theta_{n+1} - \frac{I_{n+1}}{\sqrt{1+(\beta I_{n+1})^2}} \end{cases} . \quad (3.31)$$

Desenvolvemos nosso estudo no caso em que $m = \pm 1$.

Com essas informações, quando reduzimos o parâmetro δ acabamos aproximando a bacia de atração do atrator caótico com a bacia de atração do ponto fixo. Quando as bacias se tocam, observamos o evento da crise de fronteira, esse fenômeno é apresentado na Fig.3.1.

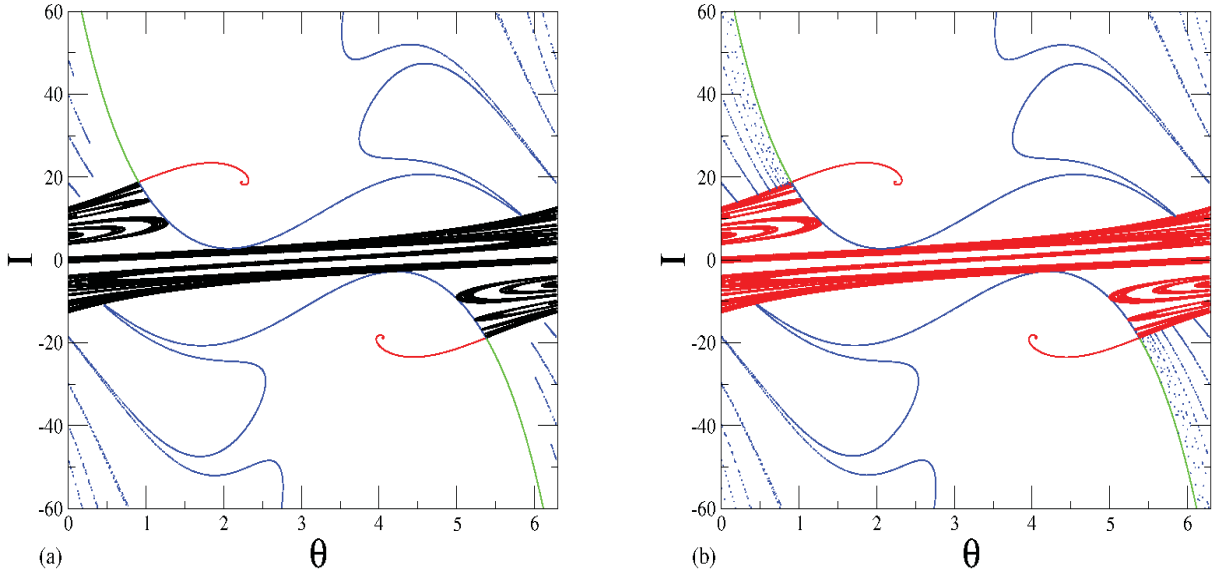


Figura 3.1: Caracterização da crise de fronteira, os parâmetros usados foram $K = 9$ e $\beta = 0,15$; (a) antes da crise com $\delta = 0,3765$; (b) depois da crise para $\delta = 0,3755$. A variedade instável do ponto de sela é representada nas cores preta e vermelha, enquanto a variedade estável é mostrada na cor azul e verde.

Podemos ver nas cores vermelha e preta a representação da variedade instável e nas cores azul e verde a variedade estável antes da crise na Fig.3.1(a) e na Fig.3.1(b) temos

depois da crise, a variedade estável representada nas cores vermelha e a variedade instável em azul e verde. É interessante observar a transformação da estrutura do espaço de fases apresentada na Fig.3.1 em relação à Fig.2.1(a), podemos ver que devido a introdução a dissipação, as curvas invariantes do tipo spanning são destruídas e o mar de caos é substituído por um atrator caótico.

Ao desenvolver esse estudo, observamos que a crise também acontece quando existe a variação dos outros parâmetros de controle. Conseguimos caracterizar a crise de fronteira acontecendo variando separadamente os parâmetros δ , β e K . Vamos apresentar a crise acontecendo quando fixamos os valores de δ e K e variamos o parâmetro β e que quando fixamos δ e β e variando o valor de K também é possível observar esse evento. A Fig.3.2 e a Fig.3.3 demonstram essa ocorrência para as crises provocadas pela variação adequada dos parâmetros β e K respectivamente.

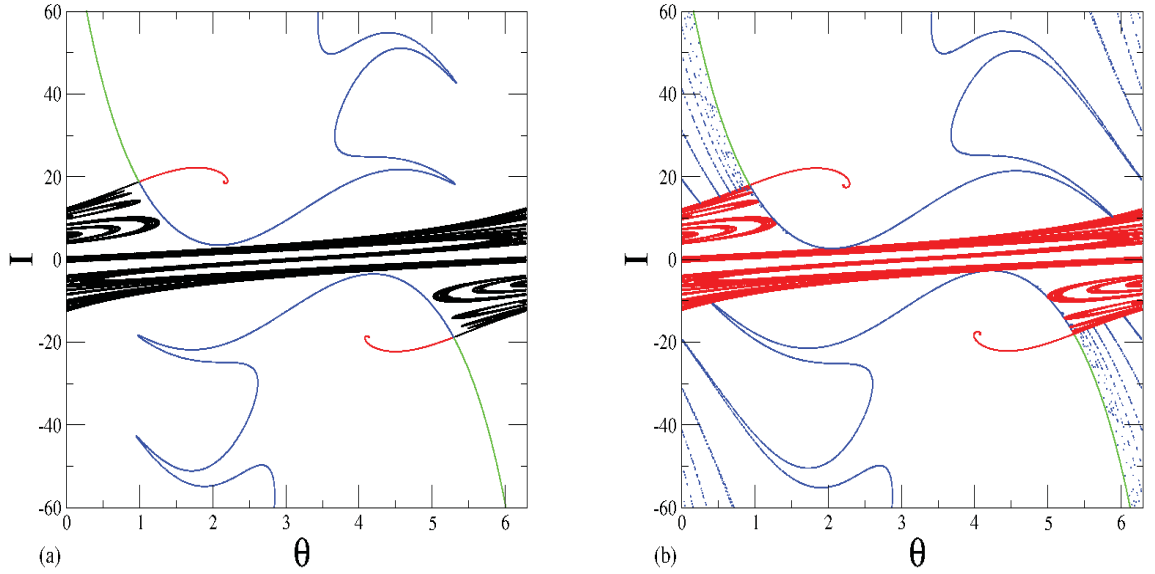


Figura 3.2: Caracterização da crise de fronteira, os parâmetros usados foram $K = 9$ e $\delta = 0,4$; (a) antes da crise com $\beta = 0,15$; (b) depois da crise para $\beta = 0,1491$. A variedade instável do ponto de sela é representada nas cores preta e vermelha, enquanto a variedade estável é mostrada nas cores azul e verde.

As figuras que apresentamos representam muito bem o que a crise de fronteira faz. Percebemos que antes de ocorrer esse evento, uma condição dentro da bacia do atrator, que é representado pela cor preta, permanece nessa bacia independente do tempo que iterarmos o mapa. Porém, quando ocorre a crise, vemos claramente que a bacia do atrator muda para a coloração vermelha, que é a mesma cor da bacia de atração dos sinks, ou seja, um condição dentro da bacia do atrator pode permanecer lá durante um intervalo

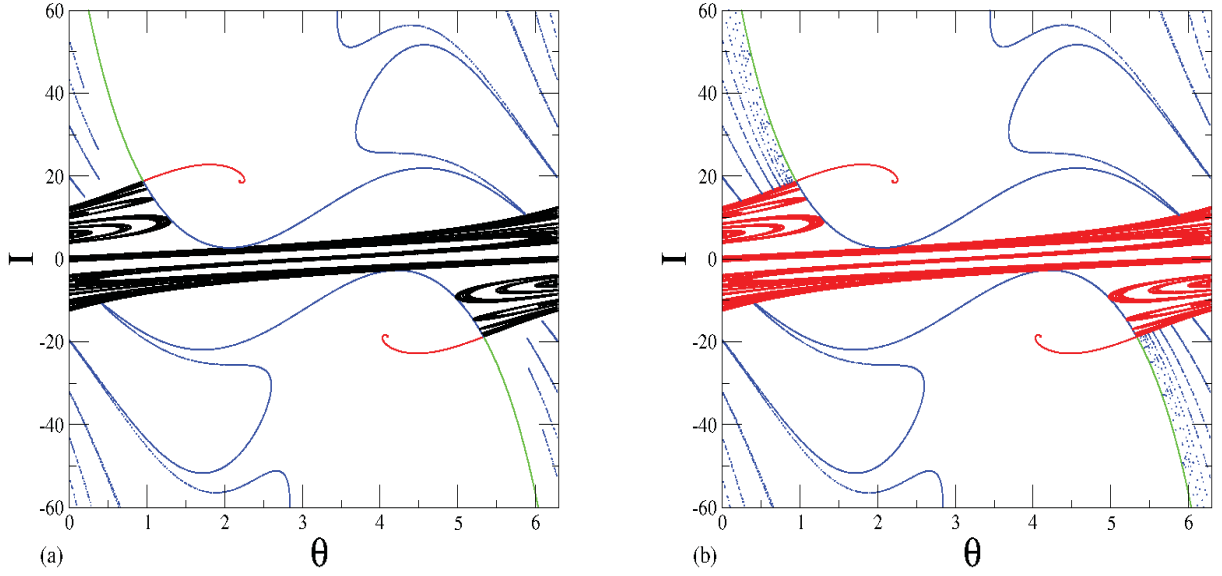


Figura 3.3: Caracterização da crise de fronteira, os parâmetros usados foram $\delta = 0,4$ e $\beta = 0,15$; (a) antes da crise com $K = 9,2502$; (b) depois da crise para $K = 9,256228$. A variedade instável do ponto de sela é representada nas cores preta e vermelha, enquanto a variedade estável é mostrada nas cores azul e verde.

de tempo, mas em algum momento ela fatalmente irá ser atraída pelos sinks. Uma vez capturada pelos sinks a órbita nunca mais escapa.

3.3 Transiente caótico

Agora que temos o conhecimento dos eventos que levam a ocorrência da crise de fronteira, podemos discutir sobre uma consequência do evento de crise de fronteira, o transiente caótico. Como foi abordado anteriormente, quando acontece a crise de fronteira, a bacia de atração de um atrator é destruída, ou seja, uma condição dentro dessa bacia não permanece mais na mesma região após um certo tempo, a órbita então é atraída por um dos sinks. O transiente caótico corresponde ao tempo que a órbita que se encontra dentro do atrator leva para abandonar a região do antigo atrator caótico e ser atraída por um dos sinks.

O transiente caótico pode ser descrito por uma lei de potência do tipo

$$n_t = \mu_j^{\rho_j} \quad j = 1, 2, 3 \quad (3.32)$$

onde μ pode ser descrito em três casos, sendo eles: (1) $|\delta - \delta_c|$ com β e K constantes; (2) $|\beta - \beta_c|$ com δ e K constantes; (3) $|K - K_c|$ com δ e β constantes.

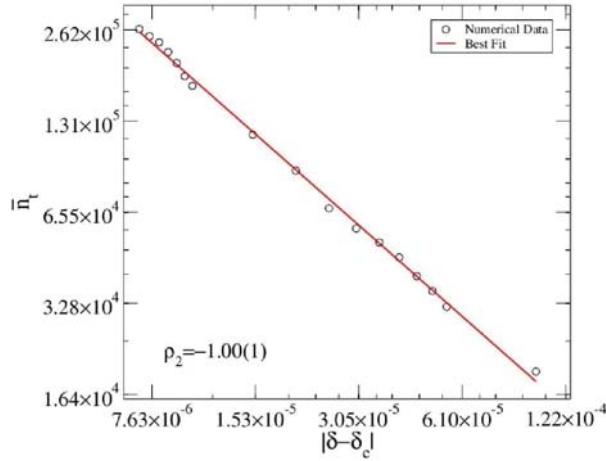


Figura 3.4: A figura mostra o comportamento de μ vs $\langle n_t \rangle$, onde $\beta = 0,15$, $K = 9$ e $\mu = |\delta - \delta_c|$.

Para continuar devemos entender o significado de δ_c , β_c e K_c . Esses parâmetros correspondem aos valores dos parâmetros críticos do mapeamento imediatamente antes que ocorra a crise de fronteira. O valor crítico é encontrado estudando-se o comportamento das variedades estáveis e instáveis imediatamente antes do cruzamento das mesmas. No modelo deste trabalho e após uma extensa busca numérica encontramos os seguintes valores críticos

$$\delta_c = 0,375598132,$$

$$\beta_c = 0,149128654,$$

$$K_c = 9,256228541.$$

Agora que temos os valores críticos de cada parâmetro, vamos analisar o transiente caótico médio. Faremos um *ensemble* de condições iniciais e mediremos os transientes obtendo no final uma média. A expressão para o transiente é dado por

$$\langle n_t \rangle = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^B n_t^i. \quad (3.33)$$

onde i denota cada parcela do ensemble e B é o número de condições iniciais diferentes, em nossas simulações utilizamos $B = 2 \times 10^4$.

O transiente foi observado fixando um valor de I como sendo $I_0 = 1 \times 10^{-4}$ e θ_0 foi distribuído aleatoriamente no intervalo de $[0, 2\pi]$. O resultado obtido para quando o parâmetro crítico adotado é δ_c é apresentado na Fig. 3.4.

Para o caso do parâmetro crítico δ_c encontramos através de um ajuste de lei de potência o seguinte expoente $\rho = -1,0(1)$. Ampliando nosso estudo para os demais casos,

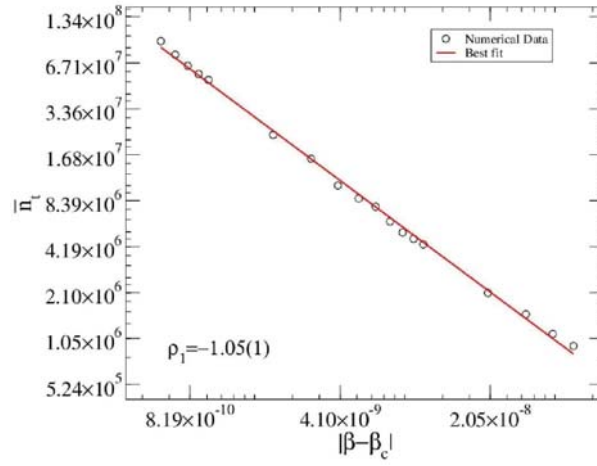


Figura 3.5: A figura mostra o comportamento de μ vs $\langle n_t \rangle$, onde (a) $\delta = 0,4$, $K = 9$ e $\mu = |\beta - \beta_c|$.

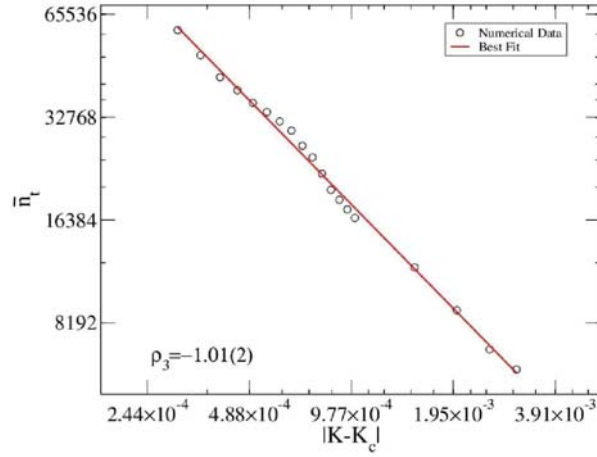


Figura 3.6: A figura mostra o comportamento de μ vs $\langle n_t \rangle$, onde $\delta = 0,4$, $\beta = 0,15$ e $\mu = |K - K_c|$.

onde repetindo o mesmo procedimento agora para os parâmetros críticos que podem ser iguais a β_c ou K_c obtemos os seguinte resultados apresentados na Fig. 3.5 e Fig. 3.6 respectivamente.

Os expoentes obtidos para todos os parâmetros críticos são semelhantes, podemos observar isso abaixo

$$\mu_1 = |\beta - \beta_c| \Rightarrow \rho_1 = -1,05(1),$$

$$\mu_2 = |\delta - \delta_c| \Rightarrow \rho_2 = -1,0(1),$$

$$\mu_3 = |K - K_c| \Rightarrow \rho_3 = -1,01(2).$$

Desta forma podemos dizer que os expoentes do transiente para o mapeamento são da ordem de $\rho \simeq -1$.

Capítulo 4

Estruturas Shrimp

4.1 Estruturas Shrimp no modelo

Como foi apresentando no capítulo 3, a introdução de dissipação no mapeamento, ocasiona grandes mudanças no espaço de fases. Em particular vimos que o mar de caos se transforma em atrator caótico e pontos fixos elípticos viram sinks. Observamos que a dissipação também leva a eventos de crise de fronteira. Nesta situação, temos a destruição do atrator caótico, sendo esse substituído por um transiente caótico. Por sua vez o transiente é descrito por uma lei de potência. Vamos agora analisar mais uma consequência da dissipação no mapeamento. Ao variarmos a dissipação assim como outros parâmetros de controle e com auxílio dos expoentes de Lyapunov, podemos estudar a estrutura do espaço de parâmetros.

Uma estrutura comumente observada no espaço de parâmetros é denominada de shrimp [28]. Shrimps são estruturas complexas periódicas embutidas em regiões caóticas. São construídas entorno do cruzamento de duas órbitas super estáveis, ou seja, órbitas onde os expoentes de Lyapunov tendem a menos infinito. Na Fig.4.1(a), apresentamos várias estruturas shrimps que encontramos no espaço parâmetros formado a partir da variação dos parâmetros δ , K e fixando um valor para β .

Podemos ver na Fig.4.1(a) que cada centro de shrimp é caracterizado por um período principal k . A escala de cores é feita a partir dos expoentes de Lyapunov, sendo verde-azul (expoentes positivos) para vermelho-amarelo (expoentes negativos).

As estruturas do tipo shrimp podem ser observadas em diferentes planos de parâmetros. A Fig.4.1(a) mostra o plano (K, δ) onde várias estruturas shrimps podem ser observadas. A figura foi construída dividindo o espaço de parâmetros em janelas de 2000 partes cada, gerando um total de 4×10^6 condições iniciais diferentes. Seguimos a condição

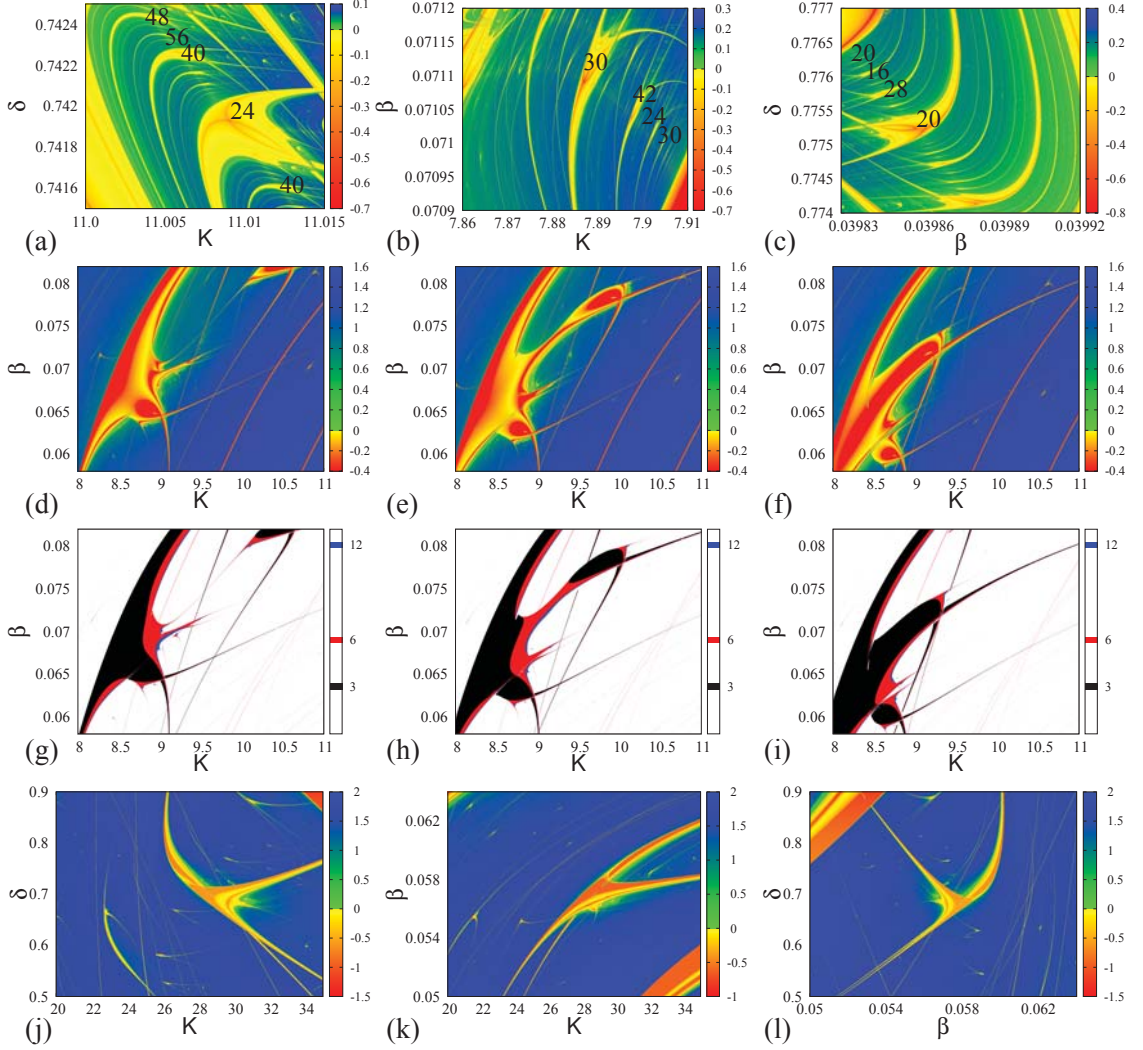


Figura 4.1: Estruturas shrimps nos planos (a)(K, δ), (b)(K, δ) e (c)(K, δ). As Fig.(d,e,f) mostram a união de shrimps para uma variação do parâmetro δ , as Fig.(g,h,i) apresentam a mesma análise, porém, utilizando o observável período como escala de cores. As Fig.(j,k,l) mostram o mesmo shrimp em diferentes ângulos, indicando estruturas tridimensionais.

$I_0 = \theta_0 = 0, 1$. Em nossas simulações consideramos um transiente de $n = 10^6$ iterações e o expoente de Lyapunov foi considerado para as próximas $n = 10^6$ iterações. De forma análoga nas Figs.4.1(b,c) apresentamos os planos (K, β) e (β, δ) considerando δ e K constantes respectivamente.

O período principal de cada shrimp é mostrado nas Figs.4.1(a,b,c). Podemos notar que cada estrutura shrimp está imerso em uma região de caos. Podemos observar também uma outra propriedade importante, as estruturas shrimps podem ser obtidas também a partir do período da estrutura. As Figs.4.1(d,e,f,g,h,i) mostra uma comparação para os shrimps obtidos a partir dos expoentes de Lyapunov e dos shrimps obtidos do espaço de parâmetros para o período. Notamos que ocorre uma sequência de bifurcação de períodos.

A estrutura principal período $k = 3$ que se bifurca em 6 e depois em 12 obedecendo à regra $k \times 2^n$ para a duplicação de períodos.

As estruturas shrimp também evoluem no espaço de parâmetros. Para ilustrar tal evolução mostramos nas Figs.4.1(d,e,f) diferentes instantes para o plano de parâmetros (K, β) variando δ a cada instante. Notamos que em um determinado instante diferentes shrimps se fundem. As Figs.4.1(d,e,f) mostram uma sequência de instantes que confirmam o momento dessa união utilizando os expoentes de Lyapunov como escala de cor, enquanto que nas Figs.4.1(g,h,i) é mostrado a mesma sequência do shrimp, porém, com escala de cor feita a partir o período.

Podemos observar que a união ocorre por períodos, ou seja, os shrimps se conectam por períodos assim gerando uma estrutura maior, porém, com o mesmo período principal. Desta forma apresentamos algumas estruturas shrimp encontradas no modelo, mostramos algumas propriedades que essas estruturas apresentam e suas particularidades dentro no sistema.

Como foi apresentado anteriormente, o mapeamento conduz a um espaço de parâmetros que exhibe estruturas do tipo shrimp. Mostramos que é possível encontrar shrimps para diferentes combinações dos parâmetros existentes no mapa. Essa informação nos leva a crer na existência de uma estrutura shrimp tridimensional. Desta forma realizamos um estudo para encontrar semelhanças de shrimps dentro dos planos (K, δ) , (K, β) e (β, δ) . Como resultado não encontramos apenas semelhanças entre shrimps, mas sim que um shrimp existe nos três planos. Desta forma implicando que os shrimps obtidos neste modelo são de fato tridimensionais. As Figs.4.1(j,k,l) apresenta o mesmo shrimp, porém, encontrado em planos diferentes.

Infelizmente não conseguimos juntar as Figs.4.1(j,k,l) em apenas uma, para mostrar o shrimp de uma forma tridimensional completa. Porém, ao estudar o período dos shrimps nesses planos, encontramos que os três shrimps tem um período $k = 4$. Munidos desta informação e a da evidente semelhança dos shrimps em questão, é notável que o shrimp é o mesmo nos três planos apresentados e que nossa afirmação sobre sua dimensão procede.

Podemos fazer a seguinte conjectura diante destes fatos, a dimensão de um shrimp é dado pela quantidade de parâmetros existentes no mapeamento em questão, em nosso caso, temos três parâmetros o que indica um dimensão 3, generalizando podemos dizer que shrimps são estruturas N dimensionais, sendo N igual ao número de parâmetros do sistema.

4.2 Trajetória da estrutura Shrimp no espaço de parâmetros

Finalizaremos nosso estudo na parte de shrimps, descrevendo a trajetória que um shrimp faz no espaço de parâmetros. Trabalharemos na descrição do movimento do shrimp tridimensional que comentamos na seção anterior. O procedimento consiste em escolher um shrimp e anotar a posição do seu centro (cabeça do shrimp). Com isso variamos um parâmetro e determinamos a nova posição do centro do shrimp. Repetindo esse processo por diversas vezes, conseguimos descrever sua trajetória. O shrimp que escolhemos para analisar pertence ao plano (K, δ) , foi apresentado na Fig.4.1(a), e cujo período principal é $k = 24$. Após uma série de variações de parâmetros, conseguimos descrever a trajetória do shrimp como $X(\delta, K, \beta) = (1, 1995 - 2, 29\beta)\hat{i} + (57, 743 - 587, 37\beta + 1768, 3\beta^2)\hat{j} + \beta\hat{k}$, onde $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são os versores de δ , K e β respectivamente. Apresentamos esse resultado na Fig.4.2 onde podemos ver a trajetória em função de β .

Desta forma concluímos nosso estudo sobre os shrimps no modelo descrito nesta monografia. Neste capítulo estudamos algumas propriedades dos shrimps e vimos como construir essas estruturas. Estudamos algumas particularidades dos shrimps, como a periodicidade e a relação que eles obedecem para a duplicação de períodos e estudamos o comportamento do período para essas estruturas antes e após a união delas. Mostramos que a dimensão dos shrimps é diretamente proporcional ao número de parâmetros que o mapa tem, em nosso caso temos três parâmetros o que nos leva a shrimps tridimensionais. Finalizamos esse capítulo apresentando a trajetória do shrimp tridimensional em função do parâmetro β .

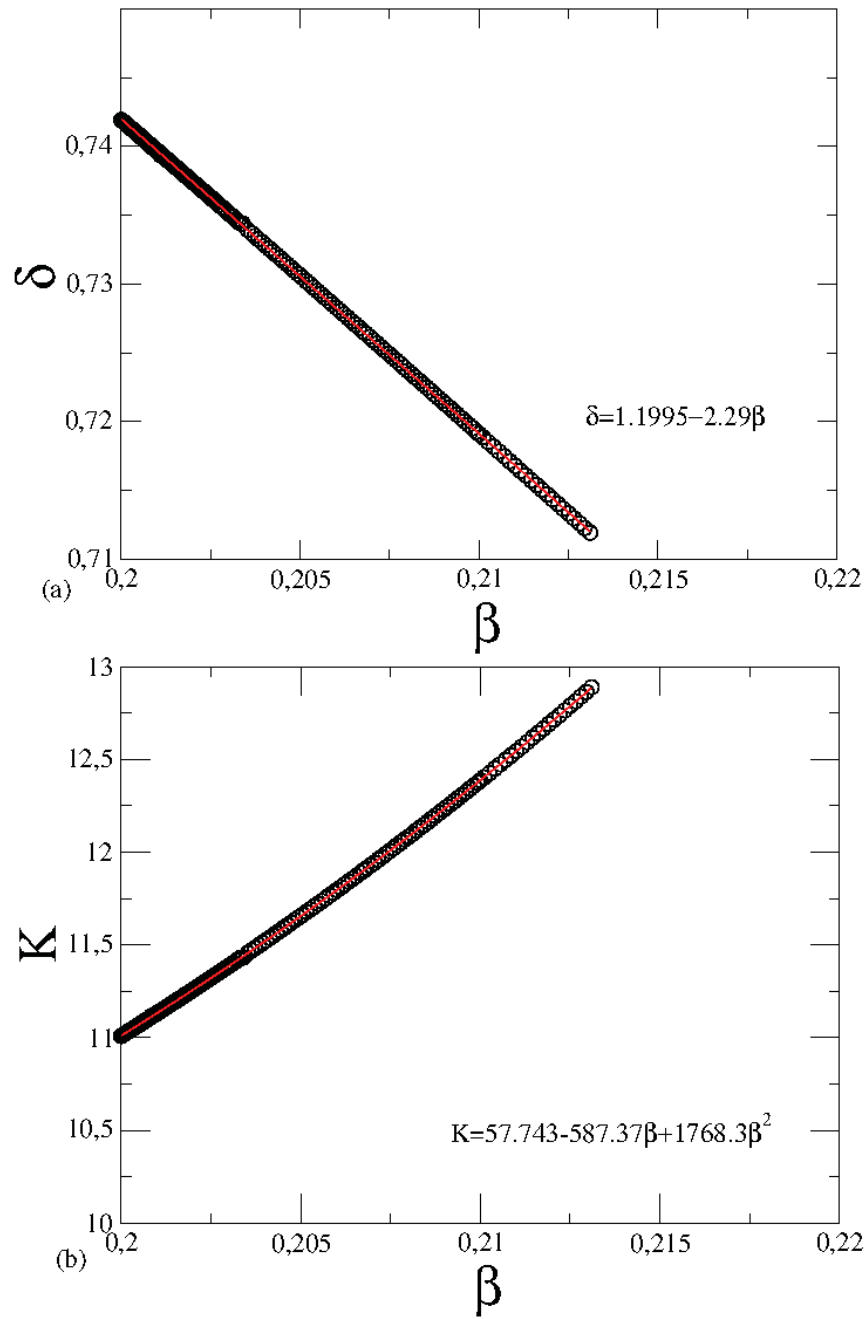


Figura 4.2: (a) A variação de δ em relação a β , $\delta = 1,1995 - 2,29\beta$; (b) A variação de K em relação a β , $K = 57,743 - 587,37\beta + 1768,3\beta^2$.

Capítulo 5

Conclusões

Estudamos o problema de uma partícula eletricamente carregada em um campo elétrico de um pacote de ondas. O modelo é descrito por um mapeamento não linear bidimensional com três parâmetros de controle. Para o sistema conservativo, o espaço de fases é misto, onde ilhas KAM e curvas invariantes do tipo spanning são observadas coexistindo com um mar de caos. Ao introduzir a dissipação no mapa, a preservação da área no espaço de fases é destruída e o sistema apresenta atratores periódicos e caóticos. Estudamos os pontos fixos do mapa e determinamos sua classificação. Observamos que no mapa dissipativo temos pontos fixos do tipo sela, onde existem variedades estáveis e instáveis. Construímos as variedades a partir do mapa P e P^{-1} para encontrar as bacias de atração do atrator caótico e dos sinks.

Observamos que variando os parâmetros δ , β e K de forma adequada podemos fazer com que a variedade instável toque a variedade estável de um mesmo ponto de sela, desta forma, observamos um evento de crise de fronteira. Confirmamos que após um evento de crise de fronteira o atrator caótico é destruído sendo substituído por um transiente caótico. O transiente caótico por sua vez é descrito por uma lei de potência que tem seu expoente dado por $\rho \simeq -1$.

Mostramos que estruturas do tipo shrimp são observadas no espaço de parâmetros. Essas estruturas são encontradas imersas em regiões caóticas no espaço de parâmetros. Encontramos no plano (K, β) uma união entre dois shrimps. Procuramos encontrar se existe alguma relação entre os shrimps dos três planos que montamos para gerar o espaço de parâmetros, e descobrimos que os shrimps determinados no modelo correspondem a estruturas tridimensionais. Finalizamos nosso trabalho descrevendo a trajetória de um shrimp tridimensional.

Bibliografia

- [1] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*, Appl. Math. Sci. **38**, Springer-Verlag, New York. (1992).
- [2] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics* (Oxford, 2006).
- [3] K. Ullmann, I. L. Caldas, Chaos, Solitons and Fractals, **11**, 2129 (2000).
- [4] I. L. Caldas, J. M. Pereira, K. Ullmann, R. L. Viana, Chaos, Solitons and Fractals, **7**, 991 (1996).
- [5] S. S. Abdullaev, G. M. Zaslavsky, Phys. Plasmas, **3**, 516 (1996).
- [6] A. Punjabi, H. Ali, A. Boozer, Phys. Plasmas, **4**, 337 (1997).
- [7] E. D. Leonel, Phys. Rev. Lett. **98**, 114102 (2007).
- [8] A. L. Virovlyansky, G. M. Zaslavsky, Chaos, **10**, 211 (2000).
- [9] I. P. Smirnov, A. L. Virovlyansky and G. M. Zaslavsky, Phys. Rev. E, **64**, 036221 (2001).
- [10] A. Iomin, Yu. Bliokh, Comm. Non. Sci. and Num. Simul. **8**, 389 (2003).
- [11] D. G. Ladeira, J. K. L. da Silva, J. Phys. A: Math. Theor. **40** 11467 (2007).
- [12] M. V. Berry, Eur. J. Phys. **2**, 91 (1981).
- [13] M. Robnik, J. Phys. A: Math. Gen. **16**, 3971 (1983).
- [14] L. A. Bunimovich, Commun. Math. Phys. **65**, 295 (1979).
- [15] J. E. Howard, A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, R. H. Cohen, Physica D, **20**, 259 (1986).
- [16] F. R. N. Kock, F. Lenz, C. Petri, F. K. Diakonov, P. Schmelcher, Phys. Rev. E, **78**, 056204 (2008).

- [17] S. O. Kamphorst, S. P. de Carvalho, *Nonlinearity*, **12**, 1363 (1999).
- [18] L. A. Bunimovich, *Commun. Math. Phys.* **65**, 295 (1979).
- [19] D. F. M. Oliveira, J. Vollmer, E. D. Leonel, *Physica D*, **240**, 389 (2011).
- [20] M. V. Berry, *Eur. J. Phys.* **2**, 91 (1981).
- [21] T. Prosen, M. Robnik, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 1863 (1999).
- [22] D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, *Physica A*, **389** 1009 (2010).
- [23] V. Lopac, I. Mrkonjić, D. Radić, *Phys. Rev. E*, **66**, 036202 (2001).
- [24] E. D. Leonel, P.V. E. McClintock, *J. Phys. A*, **38**, 823 (2005).
- [25] G. M. Zaslavsky, R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, A. A. Chernikov, *Weak Chaos and Quasi-Regular Patterns* (Cambridge Nonlinear Science Series) Cambridge University Press 1991).
- [26] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1507 (1982).
- [27] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Physica D*, **7**, 181 (1983).
- [28] J.A.C. Gallas, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2714 (1993).
- [29] C. Ciubotariu, L. Badelita, V. Stancu, *Chaos, Solitons & Fractals*, **13**, 1253 (2002).
- [30] B.L. Lan, C. Yapp, *Chaos, Solitons & Fractals*, **37**, 1300 (2008).
- [31] J.-P. Eckmann, D. Ruelle, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 617 (1985).
- [32] A. A. Chernikov, T. Tél, G. Vattay, G. M. Zaslavsky, *Phys. Rev. A*, **40**, 4072 (1989).