



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Investigação da Estabilidade de Escoamentos de Jatos Viscoelásticos

Rafael de Lima Sterza

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Analice Costacurta Brandi

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Setembro de 2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Investigação da Estabilidade de Escoamentos de Jatos Viscoelásticos

Rafael de Lima Sterza

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Analice Costacurta Brandi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Setembro de 2020

S839i

Sterza, Rafael de Lima

Investigação da estabilidade de escoamentos de jatos viscoelásticos / Rafael de Lima Sterza. -- Presidente Prudente, 2020

108 f. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente

Orientadora: Analice Costacurta Brandi

1. Escoamento de jato. 2. Instabilidade de Kelvin-Helmholtz. 3. Teoria de estabilidade linear. 4. Fluido Oldroyd-B. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Investigação da Estabilidade de Escoamentos de Jatos Viscoelásticos

AUTOR: RAFAEL DE LIMA STERZA

ORIENTADORA: ANALICE COSTACURTA BRANDI

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. ANALICE COSTACURTA BRANDI

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Analice Costacurta Brandi

Profa. Dra. GILCILENE SANCHEZ DE PAULO

Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

VIDEOCONFERÊNCIA

Prof. Dr. JOSUEL KRUPPA ROGENSKI

Faculdade de Matemática / Universidade Federal de Uberlândia

VIDEOCONFERÊNCIA

Presidente Prudente, 28 de setembro de 2020

*À minha família.
A minha vitória também é de vocês.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me abençoado ao longo de todo o desenvolvimento desse projeto, dando-me forças e saúde para caminhar nessa trilha.

Aos meus pais, Antonio e Angela, obrigado pelo amor incondicional e lanchinhos preparados com carinho. À minha irmã, Beatriz, que me incentivou, apoiou e que sempre esteve ao meu lado durante o meu percurso acadêmico. Vocês foram e são essenciais para mim!

À minha orientadora, Professora Dr^a. Analice Costacurta Brandi, que está ao meu lado desde o início de minha trajetória acadêmica, agradeço pelo empenho, incentivo e por sempre indicar a direção correta que eu devia tomar.

Ao Professor Dr. Márcio Teixeira de Mendonça pela cordialidade com que sempre me recebeu, disposição, tempo e imensa colaboração no desenvolvimento dessa dissertação.

Aos docentes e servidores do Departamento de Matemática e Computação da FCT - Unesp, em especial, a Professora Dr^a. Gilcilene Sanchez de Paulo e ao Professor Dr. Messias Meneguette Júnior, que fizeram parte da banca de qualificação, dando sugestões para finalização do trabalho.

À Beatriz e Leticia, amigas de longa data, obrigado pelas contribuições, ajuda, disponibilidade e, também, por fazer esse processo ser um pouco mais descontraído.

Aos meus amigos Daniel, Giuliana, Jefferson e Mateus pelos conselhos, apoio e torcida.

E a todos que contribuíram, de modo direto ou indireto, para o sucesso desse.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Somos todos geniais.
Mas se você julgar um peixe por sua capacidade de subir em árvores,
ele passará sua vida inteira acreditando ser estúpido”.*
Albert Einstein

Resumo

O estudo do escoamento de jato é relevante devido à sua importância em aplicações industriais, tais como, sistemas de propulsão, troca de calor e massa e estabilização de tiras, placas e blocos durante o tratamento térmico por convecção. Diante disso, a instabilidade é investigada no presente trabalho para escoamentos bidimensionais de jatos incompressíveis, sendo o modelo Oldroyd-B adotado para o fluido viscoelástico. A Teoria de Estabilidade Linear é empregada para analisar o comportamento do escoamento de jato e, em particular, investigar os diferentes modos de instabilidade de Kelvin-Helmholtz. Para estudar a estabilidade do escoamento, é necessário conhecer o escoamento base, todavia há dificuldades em determiná-lo analiticamente para o problema de jato viscoelástico e, diante disso, utilizou o *software* OpenFOAM para simular o escoamento numericamente, com o objetivo de estudar o comportamento do jato laminar em termos de como evolui a jusante, a fim de confirmar a hipótese de escoamento paralelo e validar a utilização de uma aproximação canônica para o perfil de velocidade base. Com a finalidade de avaliar as taxas de amplificação máxima e as curvas neutras de estabilidade, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando os parâmetros adimensionais para o escoamento de jato viscoelástico e comparando com os resultados de estabilidade de jato viscoso e de não viscoso.

Palavras-Chave: *Escoamento de Jato, Instabilidade de Kelvin-Helmholtz, Teoria de Estabilidade Linear, Fluido Oldroyd-B.*

Abstract

The study of jet flow is relevant due to its importance in industrial applications such as propulsion systems, heat and mass exchange and stabilization of strips, plates and blocks during convection heat treatment. Therefore, instability is investigated in the present work for two-dimensional incompressible jet flows, and the Oldroyd-B model was adopted for viscoelastic fluid. The Linear Stability Theory is employed to analyze the jet flow behavior and, in particular, to investigate the different Kelvin-Helmholtz instability modes. In order to study the flow stability, it is necessary to know the base flow, however there are difficulties in determining it analytically for the viscoelastic jet problem and, therefore, OpenFOAM software was used to simulate the flow numerically in order to study the behavior of the laminar jet in terms of how it evolves downstream in order to confirm the hypothesis of parallel flow and validate the use of a canonical approach for the base velocity profile. In order to evaluate the maximum amplification rates and the neutral stability curves, different numerical simulations were performed varying the dimensionless parameters for viscoelastic jet flow and comparing with the results of viscous and non-viscous jet flow stability.

Keywords: *Jet Flow, Kelvin-Helmholtz Instability, Linear Stability Theory, Oldroyd-B Fluid.*

Lista de Figuras

3.1	Exemplo de estrutura dos diretórios e arquivos no OpenFOAM.	48
4.1	Norma do erro relativo em (a) u , (b) T^{xx} e (c) T^{xy} no fim do canal para $Re = 1$ e 50 , $Wi = 0.1$ e diferentes valores de β	53
4.2	Norma do erro absoluto em T^{yy} no fim do canal para $Re = 1$ e 50 , $Wi = 0.1$ e diferentes valores de β	54
4.3	Domínio computacional para o escoamento do jato.	54
4.4	Comparação do tensor T_{foam}^{xx} e $T^{xx}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi	55
4.5	Comparação do tensor T_{foam}^{xx} e $T^{xx}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi	56
4.6	Comparação do tensor T_{foam}^{xy} e $T^{xy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi	57
4.7	Comparação do tensor T_{foam}^{xy} e $T^{xy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi	58
4.8	Comparação do tensor T_{foam}^{yy} e $T^{yy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi	59
4.9	Comparação do tensor T_{foam}^{yy} e $T^{yy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi	60
4.10	Comparação das velocidades $U(y)$ em diferentes casos.	61
4.11	Variação das taxas de amplificação com a frequência angular para modos (a) sinuoso e (b) varicoso, considerando $Re = 8400$	62
4.12	Comparação da curva neutra de estabilidade do presente trabalho e de Zhang (2012) [73].	62
4.13	Comparação da curva neutra de estabilidade do presente trabalho e de Kaplan (1964) [28].	63
4.14	Perfil de velocidade u utilizado no escoamento base.	64
4.15	Taxa de amplificação <i>versus</i> frequência angular para o modo sinuoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$	65
4.16	Taxa de amplificação <i>versus</i> frequência angular para o modo varicoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$	66
4.17	Taxa de amplificação <i>versus</i> frequência angular para o modo sinuoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$	67
4.18	Taxa de amplificação <i>versus</i> frequência angular para o modo varicoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$	68
4.19	Variação da taxa de amplificação <i>versus</i> frequência angular para os modos sinuoso e varicoso para (a) $\beta = 0.7$ e $Re = 250$ e (b) $\beta = 0.9$ e $Re = 50$	69
4.20	Variação da taxa de amplificação em relação ao número de Reynolds para o modo sinuoso para (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$	70
4.21	Variação da taxa de amplificação em relação ao número de Reynolds para o modo varicoso para (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$	71
4.22	Número de onda <i>versus</i> frequência angular para o modo sinuoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$	72
4.23	Número de onda <i>versus</i> frequência angular para o modo varicoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$	73

4.24	Número de onda <i>versus</i> frequência angular para o modo sinuoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$	74
4.25	Número de onda <i>versus</i> frequência angular para o modo varicoso considerando para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$	75
4.26	Velocidade de fase <i>versus</i> frequência angular para o modo sinuoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$. . .	76
4.27	Velocidade de fase <i>versus</i> frequência angular para o modo varicoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$. . .	77
4.28	Velocidade de fase <i>versus</i> frequência angular para o modo sinuoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$	78
4.29	Velocidade de fase <i>versus</i> frequência angular para o modo varicoso considerando para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$	79
4.30	Variação da taxa de amplificação máxima com β para $Re = 250$ e diferentes números de Weissenberg para o modo (a) sinuoso e (b) varicoso.	80
4.31	Variação da taxa de amplificação máxima com número de Weissenberg para $Re = 250$ e diferentes valores de β para o modo (a) sinuoso e (b) varicoso.	80
4.32	Curvas neutras para o modo sinuoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.3$ e (b) $\beta = 0.5$	81
4.33	Curvas neutras para o modo sinuoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.7$ e (b) $\beta = 0.9$	82
4.34	Análise de modos para diferentes parâmetros adimensionais.	83
4.35	Análise de modos para diferentes parâmetros adimensionais.	84
4.36	Curvas neutras para o modo varicoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.3$ e (b) $\beta = 0.5$	85
4.37	Curvas neutras para o modo varicoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.7$ e (b) $\beta = 0.9$	86
87	figure.4.38	
87	figure.4.39	
A.1	Volume de controle e sua vizinhança.	98
A.2	Um campo de pressão: “tabuleiro de damas”.	100
A.3	Disposição dos pontos nodais.	100
A.4	Um volume de controle u e suas componentes de velocidade vizinhos.	102
A.5	Um volume de controle v e suas componentes de velocidade vizinhos.	102
A.6	O volume de controle escalar usado para a discretização da equação de continuidade.	104
A.7	O algoritmo SIMPLE.	105
A.8	O algoritmo PISO.	108

Lista de Tabelas

3.1	Classificação de instabilidades.	47
4.1	Malhas computacionais utilizadas no OpenFOAM na simulação do escoamento de Poiseuille.	52
4.2	Valores da frequência angular $\omega_{r_{max}}$ no modo sinuoso para $Re = 4000$. . .	70
4.3	Valores da frequência angular $\omega_{r_{max}}$ no modo varicoso para $Re = 4000$. . .	71
4.4	Reynolds crítico aproximado para o fluido Newtoniano considerando os dois modos de instabilidade.	88

Lista de Siglas

CFD: Dinâmica dos Fluidos Computacional.

EDO: Equação Diferencial Ordinária.

LST: Teoria de Estabilidade Linear.

OpenFOAM: Open source Field Operation And Manipulation.

Sumário

Resumo	7
Abstract	9
Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	12
Lista de Siglas	15
1 Introdução	19
2 Formulação Matemática	23
2.1 Equações Governantes	23
2.1.1 Modelo Newtoniano	23
2.1.2 Modelo Não-Newtoniano	24
2.2 Modelo Oldroyd-B	26
2.3 Adimensionalização	26
2.4 Teoria de Estabilidade Linear	29
2.5 Escoamento Base	38
3 Formulação Numérica	41
3.1 Teoria de Estabilidade Linear	41
3.1.1 Solução Numérica da Equação de Orr-Sommerfeld	41
3.2 Análise Espacial e Temporal de Instabilidades	47
3.3 <i>Software</i> OpenFOAM	47
3.3.1 Escoamento de Jato no OpenFOAM	49
4 Resultados	51
4.1 Estudo do Escoamento Base Laminar	51
4.1.1 Verificação da Metodologia	51
4.1.2 Investigação do Comportamento do Jato	53
4.2 Verificação do Código de Análise de Estabilidade	61
4.3 Análise de Estabilidade utilizando LST	63
4.3.1 Análise das Taxas de Amplificação, Números de Onda e Velocidades de Fase	64
4.3.2 Curvas Neutras	80
5 Conclusão	89
Referências	90

A	Software OpenFOAM	97
A.1	Método de Volumes Finitos	97
A.1.1	Interpolação e Solução das Equações	98
A.1.2	Acoplamento Pressão-Velocidade	98

Introdução

O uso de produtos de origem polimérica pela sociedade moderna tem aumentado consideravelmente e a tendência é que sua utilização cresça ainda mais, porque os polímeros sintéticos estão cada vez mais substituindo materiais convencionais como metais e madeira, devido, principalmente, ao seu baixo custo, facilidade de processamento e propriedades físicas e mecânicas adequadas. Com isso, uma grande quantidade de aplicações industriais envolve escoamentos de fluidos não-Newtonianos e, em específico, fluidos viscoelásticos. Os fluidos viscoelásticos representam um tipo de fluido não-Newtoniano formado por um componente viscoso e um elástico, isto é, a mistura de um solvente e algum polímero. Algumas aplicações podem ser citadas: fundição e modelagem de polímeros, procedimentos de extrusão de modo generalizado e extração de combustíveis fósseis, isto é, há inúmeros problemas a serem investigados nessa área [19, 51].

Desse modo, o estudo numérico desses problemas tem grande importância acadêmica, como no desenvolvimento de procedimentos numéricos capazes de prever, com exatidão, o comportamento do escoamento; e industrial, devido às inúmeras aplicações envolvendo este tipo de escoamento de fluido viscoelástico [15]. Contudo, para representar um fluido viscoelástico é necessário o uso de expressões matemáticas complexas, as equações constitutivas.

Há inúmeras equações constitutivas que buscam descrever o comportamento reológico dos fluidos poliméricos. Estas equações podem ser classificadas em diferentes grupos, de acordo com a sua forma, sua natureza matemática e sua capacidade de predição de funções materiais. Na literatura encontra-se muitos artigos que tratam dos modelos constitutivos de fluidos viscoelásticos, tais como os diferenciais de Maxwell [3, 41], Oldroyd-B [7, 41, 47, 48], White-Metzner [69], Giesekus [20], Leonov [33], FENE-P [4], FENE-CR [8], PTT [46, 48] e outros decorrentes ao modelo Pom Pom [31] e seus resultantes; e os modelos integrais: Maxwell [29] e K-BKZ [34, 35]. O modelo de Maxwell foi um dos pioneiros a tentar investigar o efeito da viscoelasticidade de um determinado fluido [19].

A transição laminar-turbulenta trata do processo em que um escoamento laminar torna-se turbulento [55]. Para qualquer tipo de escoamento, a transição laminar-turbulenta pode ser generalizada como sendo a consequência do crescimento de perturbações inseridas nos escoamentos por diversas fontes. O aspecto físico do desenvolvimento de instabilidade a partir de uma perturbação vai depender do tipo de escoamento. As pequenas perturbações sempre podem afetar os escoamentos laminares devido a diversas causas, sejam por pequenos tremores na estrutura, rugosidade na superfície, ruído, turbulência no exterior, dentre outras razões. Se não são amortecidas, as perturbações podem interferir no regime do escoamento, sofrendo uma transição, mas não obrigatoriamente para o regime turbulento [58].

A teoria de estabilidade hidrodinâmica explora este estudo sobre as perturbações, analisando como as perturbações são amplificadas, amortecidas ou mantêm-se neutras. A relação entre a perturbação e o processo de transição para o regime turbulento de um escoamento também faz parte da investigação dessa teoria [74]. Caso não haja efeitos viscosos dissipativos, as forças inerciais e o campo de pressão em discordância pode gerar instabilidades e, também, a viscosidade pode gerar instabilidades devido à produção de vorticidade e difusão de quantidade de movimento.

Entre as primeiras investigações sobre estabilidade de escoamentos não-Newtonianos, pode-se constatar o trabalho de Porteous e Denn [50] e Ho e Denn [24] sobre o escoamento de Poiseuille viscoelástico e Renardy e Renardy [53] sobre o escoamento de Couette. Porteous e Denn [50] estudaram a estabilidade do escoamento de Poiseuille plano sujeito a perturbações infinitesimais para os modelos reológicos de segunda ordem e fluido de Maxwell e os resultados sugerem que a elasticidade do fluido é desestabilizadora no escoamento paralelo. O trabalho de Ho e Denn [24] trata-se do mecanismo de instabilidade de extrusão de baixo número de Reynolds conhecido como “*melt fracture*” e os resultados mostram que o escoamento totalmente desenvolvido de um líquido Maxwell é estável a perturbações infinitesimais em números de Reynolds baixos. E Renardy e Renardy [53] investigaram a estabilidade linear do fluxo de Couette plano de um fluido de Maxwell convectado e a elasticidade apresentou um efeito desestabilizante, mas não levou à instabilidade.

A teoria da estabilidade hidrodinâmica concentra grande parte de seus estudos na questão de saber se um escoamento é estável ou não ao ser submetido a perturbações infinitesimais. Levando em conta essa restrição, a teoria tem sido bem sucedida em indicar as características de estabilidade de vários escoamentos laminares típicos, e seus resultados foram comprovados por experimentos. A utilização desta teoria, no entanto, tem sido até agora restringida a escoamentos com um limite sólido pelo menos, e pouco se sabe sobre a estabilidade de escoamentos não-Newtoniano sem fronteiras, tais como jatos laminares, esteiras e regiões de mistura entre escoamentos paralelos [61].

Em 2019, Brandi, Mendonça e Souza [5] investigaram a estabilidade de um escoamento entre duas placas paralelas de um fluido viscoelástico Oldroyd-B através da Teoria de Estabilidade Linear (LST) e Simulação Numérica Direta (DNS). Os resultados mostraram que à medida que a quantidade da concentração de polímero no fluido diminui, o escoamento se torna mais estável, uma vez que o número crítico de Reynolds aumenta e a faixa de frequências instáveis diminui.

O estudo de escoamentos de jatos laminares de fluidos viscosos é de relevância básica na mistura de polímeros, extrusão, moldagem por injeção e redução de arrasto. Vale destacar que o escoamento de jato para tal fluido foi estudado teoricamente e experimentalmente por Schlichting [54]. Entretanto, as soluções de polímeros exibem efeitos elásticos, além do comportamento não-Newtoniano. Dessa forma, um estudo completo deve incluir essas diferenças normais de tensão [64].

A dinâmica de jatos envolve grandes características físicas, por exemplo: tensão superficial, viscosidade ou reologia não-Newtoniana; os jatos são sensíveis a flutuações térmicas, em escalas muito pequenas e, em escalas muito grandes, quando as interações gravitacionais são importantes. Além disso, o regime do escoamento base pode ser laminar ou turbulento; o fluido pode ser eletricamente carregado ou magnético. Em outras palavras, quase toda a física clássica está presente no estudo de jatos, e articular sobre essas propriedades diversificadas é um exercício desafiador [10].

Squire (1953) [59] e Hagerty e Shea (1955) [21] analisaram a instabilidade de Kelvin-Helmholtz de um jato plano movendo-se em um meio gasoso e verificaram que havia dois

modos instáveis independentes, conhecidos como o modo em fase (sinuoso) e o modo fora de fase (varicoso), respectivamente.

Rallison e Hinch [52] consideraram o jato elástico submerso caracterizado por um escoamento de perfil parabólico para altos números de Reynolds e, ainda, descobriram que o modo sinuoso está totalmente estabilizado por grande elasticidade, enquanto que o modo varicoso está parcialmente estabilizado. Em sua análise de estabilidade linear, o escoamento viscoelástico foi modelado pela equação constitutiva do tipo Oldroyd-B, e apresentou-se menos instável com o aumento do efeito elástico, mas não totalmente estável.

Em 2012, Zhang [73] investigou o problema do jato viscoelástico, em que o modelo Oldroyd-B foi empregado como equação constitutiva. Nesse estudo, o resultado da análise de estabilidade modal em jatos poliméricos indicou que o efeito elástico não só afetou a instabilidade hidrodinâmica, aumentando o seu número de Reynolds crítico, mas também levou ao surgimento de um novo mecanismo de instabilidade, chamada de instabilidade elástica, para pequenos números de Reynolds.

Depois disso, Yang *et al.* [70, 71] investigaram os problemas de jatos viscoelásticos eletrificados e jatos viscoelásticos cercados por um redemoinho de ar, respectivamente. Em ambos os trabalhos a análise de estabilidade linear foi considerada: no primeiro trabalho, a taxa de crescimento da perturbação dos jatos viscoelásticos eletrificados é maior do que a dos jatos Newtonianos eletrificados para o modo axissimétrico e quase o mesmo para o modo não-axissimétrico. Já no segundo trabalho, os resultados mostraram que o jato viscoelástico tridimensional foi mais instável do que o Newtoniano, considerando o redemoinho de ar.

Mais recentemente, Ye *et al.* [72] investigaram a instabilidade axissimétrica de um jato circular com composto viscoelástico, em que o modelo Oldroyd-B foi considerado. A análise de estabilidade linear foi utilizada e verificou-se que o jato viscoelástico é mais instável do que o jato composto Newtoniano, independentemente do jato composto viscoelástico ser totalmente viscoelástico ou não.

Diante disso, este trabalho objetiva estudar numericamente a estabilidade hidrodinâmica de escoamentos de jatos viscoelásticos, em particular, escoamentos incompressíveis, bidimensionais, em que o modelo Oldroyd-B foi considerado. Quando trata-se de escoamentos de jatos viscoelásticos não se conhece o escoamento base do problema e, por este motivo, foi realizada uma análise para considerar uma aproximação canônica para o perfil de velocidade. Especificamente, foi investigada a estabilidade hidrodinâmica dos dois modos de instabilidade de Kelvin-Helmholtz através da Teoria de Estabilidade Linear, empregando-se as características de estabilidade em termos de taxa de amplificação, número de onda, velocidade de fase e curvas neutras para diferentes parâmetros não-Newtonianos adimensionais comparando com os resultados do escoamento de jato Newtoniano.

O trabalho está estruturado do seguinte modo:

- Capítulo 2: Tratando-se de escoamentos bidimensionais, incompressíveis, isotérmicos, apresenta-se as equações governantes de um fluido Newtoniano e não-Newtoniano, sendo que a equação constitutiva do tipo Oldroyd-B é a escolhida para representar o fluido viscoelástico. Todas essas equações estão apresentadas nas formas dimensional e adimensional. Além disso, utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, apresenta-se os cálculos para a dedução da equação de Orr-Sommerfeld modificada para um fluido viscoelástico e, também, a aproximação canônica que foi utilizada para o perfil base de velocidade e a dedução dos tensores base.

- Capítulo 3: Trata-se da Formulação Numérica do problema em questão, apresentando a formulação da solução numérica para a equação de Orr-Sommerfeld obtida utilizando a Teoria de Estabilidade Linear. Além disso, apresenta-se alguns conceitos referentes ao funcionamento do *software* OpenFOAM versão 7, do inglês *Open source Field Operation And Manipulation*, com aspectos relevantes para a simulação e desenvolvimento do problema.
- Capítulo 4: Inicialmente é realizada uma verificação da utilização do *software* OpenFOAM, iniciando com resultados já conhecidos na literatura, isto é, apresentando resultados numéricos do escoamento entre placas paralelas e, depois, exibindo resultados para a verificação das hipóteses impostas no problema de jato plano. Em seguida, realiza-se uma verificação do código implementado para escoamentos de jatos, comparando os resultados obtidos com os existentes na literatura. E, por fim, trabalha-se com os escoamentos de jatos incompressíveis e viscoelásticos, realizando o estudo da estabilidade em termos da taxa de amplificação, número de onda, velocidade de fase e curvas neutras.
- Capítulo 5: Para concluir o trabalho, apresentam-se as considerações finais.

Formulação Matemática

Nas leis da dinâmica dos fluidos, em especial, nos escoamentos de fluidos incompressíveis, a modelagem matemática é bem definida pelas equações de continuidade e Navier-Stokes. Diante disso, este capítulo apresenta as equações que modelam escoamentos isotérmicos e incompressíveis para fluidos Newtonianos e não-Newtonianos. Além disso, o escoamento de fluido viscoelástico considera uma equação constitutiva em sua modelagem, que neste trabalho foi utilizado o modelo Oldroyd-B. E, ainda, as formas dimensionais e adimensionais das equações são apresentadas e, para um fluido viscoelástico, a equação de Orr-Sommerfeld modificada é desenvolvida através de uma técnica de análise de estabilidade.

2.1 Equações Governantes

A modelagem matemática para escoamentos de fluidos incompressíveis e isotérmicos é convencionalizada pelas equações de conservação de massa (continuidade) e de quantidade de movimento, que são definidas, respectivamente, por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \right] = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.2)$$

sendo que \mathbf{u} é o vetor velocidade, ρ é a densidade do fluido, t é o tempo e $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor tensão total definido por

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}, \quad (2.3)$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é o tensor simétrico das tensões, p é a pressão e \mathbf{I} é o tensor identidade. Considerando um escoamento bidimensional tem-se que $\mathbf{u} = [u \ v]^T$ trata das velocidades em x e y , respectivamente. Desse modo, é possível definir o tensor simétrico das tensões

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau^{xx} & \tau^{xy} \\ \tau^{xy} & \tau^{yy} \end{bmatrix}.$$

2.1.1 Modelo Newtoniano

Há inúmeros modelos matemáticos adotados no estudo da mecânica dos fluidos, todavia as equações de Navier-Stokes podem ser consideradas as mais difundidas. Isso não

significa, no entanto, que modelam corretamente qualquer fluido sob qualquer circunstância, afinal sua gama de aplicabilidade é privada aos fluidos Newtonianos. Essa classe inclui vários líquidos comuns como a água, a maioria das soluções salinas em água, soluções aquosas, alguns óleos para motores, a maioria dos óleos minerais, gasolina e querosene [18].

Desse modo, o tensor simétrico das tensões é proporcional ao tensor taxa de deformação (essa proporção é nomeada lei de Newton para a viscosidade e por isso denomina-se “Newtonianos”), isto é,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D}, \quad (2.4)$$

onde η_s é a viscosidade dinâmica do fluido e \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação, dado por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top). \quad (2.5)$$

No caso bidimensional, a equação (2.5) é reescrita do seguinte modo

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

O divergente do tensor tensão total $\boldsymbol{\sigma}$ presente na equação (2.2) deve ser calculado e, para isso, utiliza-se o tensor tensão total apresentado na equação (2.3), então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Desse modo, as equações de conservação (2.1) e (2.2) podem ser escritas em coordenadas cartesianas bidimensionais dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.7)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], \quad (2.8)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]. \quad (2.9)$$

2.1.2 Modelo Não-Newtoniano

As equações de Navier-Stokes modelam satisfatoriamente apenas uma quantidade limitada de fluidos, enquanto, para outros, suas previsões não condizem com dados experimentais. Estes últimos incluem, por exemplo, fluidos biológicos, como sangue ou muco, e soluções poliméricas aquosas, como tintas comuns ou xampu comum. Desse modo, esses

fluidos, em contraste com aqueles modelados pelas equações (2.3) e (2.4), são chamados de não-Newtonianos e exibem uma série de características que a relação linear, descrita pelas equações (2.3) e (2.4), não é capaz de prever [18].

Alguns fluidos, como a água, possuem viscosidade que é independente da tensão ou do tempo, em outras palavras, o vínculo da tensão com a deformação é linear resultando na viscosidade constante, essa foi a suposição que Newton fez quando propôs um modelo para o estudo de fluidos. No entanto, a partir de observações físicas, notou-se que alguns fluidos exibem viscosidade variável, isto é, a relação entre a tensão e a taxa de deformação é não-linear, esses são os fluidos não-Newtonianos [36].

Em modelos de fluidos não-Newtonianos, em particular, de fluido viscoelástico, o tensor das tensões é determinado através da adição da parcela viscosa (Newtoniana) e da parcela polimérica (não-Newtoniana), isto é,

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T}, \quad (2.10)$$

onde η_s é a viscosidade do solvente viscoso, \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação definido em (2.5) e \mathbf{T} é o tensor simétrico extra-tensão que representa a parcela polimérica, sendo sua forma bidimensional dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma, o divergente do tensor tensão total $\boldsymbol{\sigma}$ presente na equação (2.2) deve ser calculado e, para isso, utiliza-se o tensor tensão total apresentado na equação (2.3), então

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{I}) = \nabla \cdot (2\eta_s \mathbf{D} + \mathbf{T} - p\mathbf{I}) = 2\eta_s \nabla \cdot \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \nabla \cdot p\mathbf{I} = \\ &= 2\eta_s \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & 2\frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{xx} & T^{xy} \\ T^{xy} & T^{yy} \end{bmatrix} + \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \end{bmatrix} = \\ &= \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y} & \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y} \end{bmatrix} + \\ &\quad - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Neste caso, pode-se reescrever as equações (2.1) e (2.2) para um fluido viscoelástico, considerando o sistema bidimensional tornam-se, respectivamente

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.11)$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.12)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.13)$$

2.2 Modelo Oldroyd-B

Há diversos modelos de equações constitutivas que modelam fluidos viscoelásticos envolvendo velocidade, tensores e viscosidade por exemplo, todavia, neste trabalho, utilizou-se o modelo Oldroyd-B [7, 9], que é escrito da seguinte forma

$$\mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} = 2\eta_p \mathbf{D}, \quad (2.14)$$

sendo que λ é o tempo de relaxação do fluido, η_p é o coeficiente de viscosidade polimérica e $\overset{\nabla}{\mathbf{T}}$ representa a derivada convectada, tal que

$$\overset{\nabla}{\mathbf{T}} = \frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}, \quad (2.15)$$

e, ainda, $\frac{D\mathbf{T}}{Dt}$ representa a derivada material de \mathbf{T} definida como

$$\frac{D\mathbf{T}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}). \quad (2.16)$$

Utilizando as equações (2.15) e (2.16), a equação (2.14) é reescrita do seguinte modo

$$\begin{aligned} \mathbf{T} + \lambda \overset{\nabla}{\mathbf{T}} &= 2\eta_p \mathbf{D}, \\ \mathbf{T} + \lambda \left[\frac{D\mathbf{T}}{Dt} - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] &= 2\eta_p \mathbf{D}, \\ \mathbf{T} + \lambda \left[\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{T}) - \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top - (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T} \right] &= 2\eta_p \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Dessa forma, após algumas manipulações algébricas, os tensores não-Newtonianos para esse modelo, em coordenadas cartesianas bidimensionais, se reduzem as equações

$$T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.17)$$

$$T^{xy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \eta_p \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.18)$$

$$T^{yy} + \lambda \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2\eta_p \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.19)$$

2.3 Adimensionalização

Em um problema de mecânica dos fluidos é comum a utilização do tratamento adimensional para as equações que o modela, com o objetivo de mostrar os efeitos físicos, desenvolver o modelo independente do sistema de unidades, delimitar os valores de variáveis e parâmetros e, principalmente, propiciar condições para se obter situações geometricamente similares. As equações adimensionais também são relevantes para análises analíticas e para determinar a relevância relativa de vários termos nas equações [14]. Dessa maneira, tendo em vista esse tratamento, considera-se alguns números adimensionais: número de Reynolds, número de Weissenberg e a constante β .

Quando se resolve um problema empregando as equações na forma adimensional, as características de um escoamento em dimensões físicas reais são conhecidas, o que difere são as grandezas e as propriedades físicas utilizadas. As variáveis adimensionais (acrescidas do sobrescrito *) são

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad \mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U}, \quad t^* = \frac{tU}{L}, \quad p^* = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \mathbf{T}^* = \frac{\mathbf{T}}{\rho U^2}, \quad (2.20)$$

onde L representa a meia largura do jato, U a velocidade referência e ρ a densidade. Aplicando as mudanças de variáveis (2.20) nas equações governantes surgem os números adimensionais:

- Número de Reynolds (Re): Governa a maior parte dos fenômenos e aponta a relevância relativa entre as forças de inércia e as viscosas. É o responsável por determinar a transição entre o regime laminar e o regime turbulento em todos os escoamentos e é definido por

$$Re = \frac{\rho U L}{\eta_0}, \quad (2.21)$$

onde η_0 é a viscosidade total do fluido, dada por $\eta_0 = \eta_s + \eta_p$, sendo que η_s é a viscosidade do solvente e η_p a viscosidade do polímero.

- Número de Weissenberg (Wi): Quantifica o nível de elasticidade em uma determinada condição de escoamento

$$Wi = \frac{\lambda U}{L}, \quad (2.22)$$

onde U/L representa a taxa de deformação característica e λ o tempo de relaxação. Desse modo, o número de Weissenberg pode ser interpretado como a razão entre as forças elásticas e as forças viscosas [37].

- Constante β : É um número entre 0 e 1 que determina a influência do solvente viscoso no fluido e é definida por

$$\beta = \frac{\eta_s}{\eta_0}. \quad (2.23)$$

Note que quando $\beta = 1$ e $Wi = 0$ o fluido é Newtoniano.

Dessa forma, é possível adimensionalizar as equações de conservação e os tensores não-Newtonianos, para isso, basta substituir as variáveis adimensionais (2.20) nas equações (2.11) – (2.13) e (2.17) – (2.19).

A seguir são apresentadas as manipulações algébricas para obtenção da equação da continuidade em sua forma adimensional

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(Uv^*)}{\partial(Ly^*)} = 0 \Rightarrow \frac{U}{L} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right] = 0.$$

Observe que $\frac{U}{L} \neq 0$, afinal ao atribuí-las nas equações (2.20), U e L estão nos denominadores, impossibilitando que sejam nulos. Então

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0. \quad (2.24)$$

Da mesma forma, realizam-se as manipulações algébricas para obter a equação da quantidade de movimento na direção x adimensionalizada

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_s \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \rho \left[\frac{\partial(Uu^*)}{\partial(\frac{L}{U}t^*)} + \frac{\partial(U^2u^*u^*)}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(U^2u^*v^*)}{\partial(Ly^*)} \right] &= -\frac{\partial(\rho U^2 p^*)}{\partial(Lx^*)} + \\ + \eta_s \left[\frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Lx^*)^2} + \frac{\partial^2(Uu^*)}{\partial(Ly^*)^2} \right] &+ \frac{\partial(\rho U^2 T^{*xx})}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(\rho U^2 T^{*xy})}{\partial(Ly^*)}. \end{aligned}$$

Note que o termo $\frac{\rho U^2}{L}$ é constante, então dividindo ambos os lados da equação, obtém-se

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^*u^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial(u^*v^*)}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \underbrace{\frac{\eta_s}{\rho UL}}_{\star} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right] + \frac{\partial T^{*xx}}{\partial x^*} + \frac{\partial T^{*xy}}{\partial y^*}.$$

O termo \star pode ser manipulado algebricamente, do seguinte modo

$$\star \frac{\eta_s}{\rho UL} = \frac{\eta_0 - \eta_p}{\rho UL} = \frac{\eta_0}{\rho UL} - \frac{\eta_p}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{\eta_0 - \eta_s}{\rho UL} = \frac{1}{Re} - \frac{1 - \frac{\eta_s}{\eta_0}}{\frac{\rho UL}{\eta_0}} = \frac{1}{Re} - \frac{1 - \beta}{Re} = \frac{\beta}{Re}.$$

A notação (\star) será omitida por questão de simplicidade, afinal os números adimensionais apresentados já indicam que a forma adimensional é a considerada na equação. É importante mencionar que a adimensionalização na direção y é deduzida de modo análogo. Então, a equação da quantidade de movimento adimensionalizada nas direções x e y , respectivamente, são dadas pelas equações abaixo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}, \quad (2.25)$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}. \quad (2.26)$$

De maneira análoga apresentam-se as equações dos tensores não-Newtonianos, realizando as mudanças de variáveis (2.20) nas equações (2.17) – (2.19) para obtê-las de modo adimensional, isto é,

$$\begin{aligned} T^{xx} + \lambda \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= 2\eta_p \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \Rightarrow \rho U^2 T^{*xx} + \lambda \left(\frac{\partial(\rho U^2 T^{*xx})}{\partial(\frac{L}{U}t^*)} + \frac{\partial(Uu^* \rho U^2 T^{*xx})}{\partial(Lx^*)} + \frac{\partial(Uv^* \rho U^2 T^{*xx})}{\partial(Ly^*)} + \right. \\ \left. - 2\rho U^2 T^{*xx} \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)} + -2\rho U^2 T^{*xy} \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Ly^*)} \right) &= 2\eta_p \frac{\partial(Uu^*)}{\partial(Lx^*)}, \\ \Rightarrow \rho U^2 T^{*xx} + \frac{\lambda \rho U^3}{L} \left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*} + \frac{u^* \partial T^{*xx}}{\partial x^*} + \frac{v^* \partial T^{*xx}}{\partial y^*} - 2T^{*xx} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - 2T^{*xy} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) &= \\ &= 2\eta_p \frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}. \end{aligned}$$

Observa-se que ρU^2 é comum em vários termos da equação, desse modo, dividindo a equação anterior por esse termo, obtém-se

$$\Rightarrow T^{*xx} + \frac{\lambda U}{L} \left(\frac{\partial T^{*xx}}{\partial t^*} + \frac{\partial(u^* T^{*xx})}{\partial x^*} + \frac{\partial(v^* T^{*xx})}{\partial y^*} - 2T^{*xx} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} - 2T^{*xy} \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) =$$

$$= 2\eta_p \frac{U}{L} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}.$$

Diante disso, pode-se obter a equação do tensor T^{xx} na sua forma adimensional. E, procedendo similarmente, são obtidas as equações dos tensores não-Newtonianos T^{xy} e T^{yy} adimensionais. Sendo assim, os tensores T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} são dados, respectivamente, por

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.27)$$

$$T^{xy} + Wi \left(\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.28)$$

$$T^{yy} + Wi \left(\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.29)$$

As equações (2.25) – (2.29) modelam um escoamento incompressível, isotérmico e bidimensional, para um fluido viscoelástico utilizando o modelo Oldroyd-B em qualquer regime do escoamento.

2.4 Teoria de Estabilidade Linear

A Teoria de Estabilidade Linear (LST - do inglês *Linear Stability Theory*) analisa o comportamento de um dado escoamento a perturbações de amplitude infinitesimal. Esta teoria se baseia nas equações da continuidade e de Navier-Stokes, adotando algumas suposições sobre o escoamento e o modo como as perturbações se desenvolverão [57]. Tratando-se de fluidos viscoelásticos, ressalta-se que a escolha do modelo constitutivo pode influenciar na análise de estabilidade [74] que, neste caso, foi utilizada a equação constitutiva Oldroyd-B.

Por conseguinte, nesta seção, apresenta-se a análise de estabilidade linear para escoamentos de fluidos viscoelásticos, utilizando o modelo Oldroyd-B, sendo que a finalidade é deduzir a equação de Orr-Sommerfeld para que seja possível estudar sua solução numérica.

Para isso, considera-se que o escoamento base é invariante na direção x , isto é,

$$\begin{aligned} u &= U(y), \\ v &= 0, \\ p &= P(x, y), \\ \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}}(y). \end{aligned}$$

Além disso, considera-se que o escoamento base é estacionário, u e v são as velocidades nas direções x e y , respectivamente, p é a pressão e \mathbf{T} o tensor não-Newtoniano. Os componentes da perturbação são muito pequenas em relação ao escoamento base e, em um regime transiente, são representadas por \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{p} e $\tilde{\mathbf{T}}$ [57], é importante mencionar que para o escoamento de jato as instabilidades são de Kelvin-Helmholtz por um mecanismo de instabilidade não-viscosa e, no caso Newtoniano, a viscosidade entra apenas com a dissipação das perturbações.

Considerando que o escoamento instantâneo pode ser decomposto em um escoamento base mais um escoamento perturbado, as variáveis dependentes podem ser decompostas da seguinte forma

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= U(y) + \tilde{u}(x, y, t), \\ v(x, y, t) &= \tilde{v}(x, y, t), \\ p(x, y, t) &= P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t), \\ \mathbf{T}(x, y, t) &= \hat{\mathbf{T}}(y) + \tilde{\mathbf{T}}(x, y, t). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Substituindo as variáveis (2.30) nas equações de continuidade, quantidade de movimento e nos tensores não-Newtonianos (2.24) – (2.29), obtém-se as equações para as perturbações. Por hipótese, o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, então as perturbações também devem satisfazer esse sistema de equações.

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0. \quad (2.31)$$

Equação da quantidade de movimento em x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial T^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{xy}}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.30) na equação da quantidade de movimento em x (2.25), tem-se

$$\begin{aligned} &\frac{\partial(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial t} + \frac{\partial((U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(U(y) + \tilde{u}(x, y, t)))}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y} = -\frac{\partial(P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t))}{\partial x} + \\ &+ \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(U(y) + \tilde{u}(x, y, t))}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \frac{\partial(\hat{T}^{xx}(y) + \tilde{T}^{xx}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{T}^{xy}(y) + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial y}. \end{aligned}$$

Desse modo, separando em escoamento base e escoamento perturbado, obtém-se

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(y)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial(U(y)U(y))}{\partial x} + \frac{\partial(U(y)\tilde{u}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}(x, y, t)U(y))}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial(\tilde{u}(x, y, t)\tilde{u}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t)U(y))}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t)\tilde{u}(x, y, t))}{\partial y} = \\ &= -\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{p}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 U(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \frac{\partial \hat{T}^{xx}(y)}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial \hat{T}^{xy}(y)}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}(x, y, t)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação da quantidade de movimento em x para as perturbações pode ser escrita como

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}. \quad (2.32)$$

Equação da quantidade de movimento em y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + \frac{\partial T^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T^{yy}}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.30) na equação da quantidade de movimento em y (2.26), tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial t} + \frac{\partial((U(y) + \tilde{u}(x, y, t))(\tilde{v}(x, y, t)))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t))(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} = \\ & = -\frac{\partial(P(x, y) + \tilde{p}(x, y, t))}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y^2} \right] + \\ & + \frac{\partial(\hat{T}^{xy}(y) + \tilde{T}^{xy}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\hat{T}^{yy}(y) + \tilde{T}^{yy}(x, y, t))}{\partial y}. \end{aligned}$$

Desse modo, separando em escoamento base e escoamento perturbado, obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\tilde{v}(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\partial(U(y)\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}(x, y, t)\tilde{v}(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(x, y, t)\tilde{v}(x, y, t))}{\partial y} = \\ & = -\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial\tilde{p}(x, y, t)}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2\tilde{v}(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}(x, y, t)}{\partial y^2} \right] + \\ & + \frac{\partial\hat{T}^{xy}(y)}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{T}^{xy}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial\hat{T}^{yy}(y)}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{T}^{yy}(x, y, t)}{\partial y}. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação da quantidade de movimento em y para as perturbações pode ser escrita como

$$\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \left[\tilde{u} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial\tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{T}^{yy}}{\partial y}. \quad (2.33)$$

Os termos entre colchetes das equações (2.32) e (2.33) são não lineares e, segundo Schlichting [54], as perturbações são pequenas no sentido de que esses termos não lineares podem ser ignorados quando comparados com os lineares.

Equação do tensor não-Newtoniano T^{xx} :

$$T^{xx} + Wi \left(\frac{\partial T^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xx})}{\partial y} - 2T^{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - 2T^{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Substituindo as variáveis (2.30) na equação do tensor não-Newtoniano (2.27) e considerando, por simplicidade de notação, que $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, t)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(x, y, t)$, $\tilde{\mathbf{T}} = \tilde{\mathbf{T}}(x, y, t)$, $U = U(y)$ e $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(y)$, tem-se

$$\begin{aligned} & (\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx})}{\partial t} + \frac{\partial((U + \tilde{u})(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}))}{\partial y} + \right. \\ & \left. - 2(\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}) \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial x} - 2(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}) \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial y} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial x}. \end{aligned}$$

Desse modo, separando em escoamento base e escoamento perturbado, obtém-se

$$\begin{aligned} & \hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx} + Wi \left[\frac{\partial\hat{T}^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial\tilde{T}^{xx}}{\partial t} + \frac{\partial(U\hat{T}^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(U\tilde{T}^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\hat{T}^{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{T}^{xx})}{\partial x} + \right. \\ & + \frac{\partial(\tilde{v}\hat{T}^{xx})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{T}^{xx})}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial U}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \\ & \left. - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação do tensor T^{xx} para a perturbação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{xy} :

$$T^{xy} + Wi \left[\frac{\partial T^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{xy})}{\partial y} - T^{xx} \frac{\partial v}{\partial x} - T^{yy} \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Substituindo as variáveis (2.30) na equação do tensor não-Newtoniano (2.28) e considerando, por simplicidade de notação, que $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, t)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(x, y, t)$, $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(x, y, t)$, $U = U(y)$ e $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(y)$, tem-se

$$\begin{aligned} (\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy})}{\partial t} + \frac{\partial((U + \tilde{u})(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}))}{\partial y} + \right. \\ \left. - (\hat{T}^{xx} + \tilde{T}^{xx}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - (\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}) \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial y} \right] = \frac{(1-\beta)}{Re} \left[\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial(U + \tilde{u})}{\partial y} \right]. \end{aligned}$$

Desse modo, separando em escoamento base e escoamento perturbado, obtém-se

$$\begin{aligned} \hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy} + Wi \left[\frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + \frac{\partial(U\hat{T}^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(U\tilde{T}^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\hat{T}^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{u}\tilde{T}^{xy})}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial(\tilde{v}\hat{T}^{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\tilde{v}\tilde{T}^{xy})}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} + \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\ \left. - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação T^{xy} perturbada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \hat{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} + \right. \\ \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y} - \tilde{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right] \right) = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Equação do tensor não-Newtoniano T^{yy} :

$$T^{yy} + Wi \left[\frac{\partial T^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial(uT^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial(vT^{yy})}{\partial y} - 2T^{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - 2T^{yy} \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Substituindo as variáveis (2.30) na equação do tensor não-Newtoniano (2.29) e considerando, por simplicidade de notação, que $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y, t)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(x, y, t)$, $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(x, y, t)$, $U = U(y)$ e $\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}(y)$, tem-se

$$\begin{aligned} (\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}) + Wi \left[\frac{\partial(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy})}{\partial t} + \frac{\partial((U + \tilde{u})(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}))}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}))}{\partial y} + \right. \\ \left. - 2(\hat{T}^{xy} + \tilde{T}^{xy}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2(\hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Desse modo, separando em escoamento base e escoamento perturbado, obtém-se

$$\begin{aligned} & \hat{T}^{yy} + \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \hat{T}^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + \frac{\partial (U\hat{T}^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (U\tilde{T}^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{u}\hat{T}^{yy})}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{u}\tilde{T}^{yy})}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial (\tilde{v}\hat{T}^{yy})}{\partial y} + \frac{\partial (\tilde{v}\tilde{T}^{yy})}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \end{aligned}$$

Utilizando a hipótese de que o escoamento base é solução das equações de Navier-Stokes, a equação do tensor T^{yy} para a perturbação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \left[\tilde{u} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\tilde{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right] \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Novamente, os termos entre colchetes das equações dos tensores (2.34), (2.35) e (2.36) são os termos não lineares e podem ser desprezados quando comparados com os termos lineares. Sendo assim, o sistema simplificado é dado por

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{\beta}{Re} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y}, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xx} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xx}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - 2\tilde{T}^{xy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \\ = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{xy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{xy}}{\partial y} - \hat{T}^{xx} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - \hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} - \tilde{T}^{yy} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\tilde{T}^{yy} + Wi \left(\frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{T}^{yy}}{\partial y} - 2\hat{T}^{xy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x} - 2\hat{T}^{yy} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}. \quad (2.42)$$

Diante disso, as equações originadas das manipulações realizadas são lineares e os seus coeficientes não dependem de x e t , então pode-se buscar soluções utilizando algum

método para este tipo de equação, como o método de separação de variáveis ou, também, solução por modos normais, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{u}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\
\tilde{v}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{v}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\
\tilde{p}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{p}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{p}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}], \\
\tilde{\mathbf{T}}(x, y, t) &= \frac{1}{2} [\bar{\mathbf{T}}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} + \bar{\mathbf{T}}(y)e^{i(\omega t - \alpha x)}],
\end{aligned} \tag{2.43}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, α o número de onda na direção x , ω a frequência com que as perturbações propagam-se, com comprimento de onda $\lambda_c = 2\pi/\alpha$ e $c = \omega/\alpha$ é a velocidade da onda. As amplitudes das perturbações são denotadas pelas seguintes notações \bar{u} , \bar{v} , \bar{p} e $\bar{\mathbf{T}}$ e pertencem ao conjunto complexo.

Observa-se que os termos entre colchetes das equações (2.43) é um número somado ao seu conjugado, isto é, resulta apenas na parte real. Dessa forma, basta resolver as equações perturbadas complexas para determinar α , ω e u , diante disso, o complexo conjugado é desprezado ao efetuar as substituições das variáveis nas equações das perturbações [19].

Utilizando a solução por modos normais tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias, que substituindo as variáveis (2.43) nas equações de Navier-Stokes para as perturbações obtém-se um novo sistema de equações. Com as considerações realizadas, nota-se que as derivadas parciais não são mais representativas, afinal os termos das equações dependem unicamente de uma variável, então simplifica-se as derivadas parciais por derivadas ordinárias [19].

Equação da continuidade perturbada (2.37):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \bar{u}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \bar{v}(y)e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] &= 0, \\
\frac{1}{2} [\bar{u}(y)i\alpha e^{i(\alpha x - \omega t)}] + \frac{1}{2} \left[\frac{d\bar{v}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] &= 0, \\
\frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \left[i\alpha \bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} \right] &= 0, \\
i\alpha \bar{u}(y) + \frac{d\bar{v}(y)}{dy} &= 0.
\end{aligned}$$

Equação da quantidade de movimento na direção x perturbada (2.38):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \left[\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] \frac{\partial U}{\partial y} = \\ & = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2} \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \bar{T}^{xx}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \bar{T}^{xy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right]. \end{aligned}$$

Derivando os termos da equação em relação a t , x e y ,

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \bar{u}(y) i \omega e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} U \bar{u}(y) i \alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \frac{dU}{dy} = \\ & = - \frac{1}{2} \bar{p}(y) i \alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{\beta}{2Re} \left[(i\alpha)^2 \bar{u}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{d^2 \bar{u}(y)}{dy^2} e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \bar{T}^{xx}(y) i \alpha e^{i(\alpha x - \omega t)} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{T}^{xy}(y)}{dy} e^{i(\alpha x - \omega t)}. \end{aligned}$$

Nota-se que $\frac{1}{2} e^{i(\alpha x - \omega t)}$ é comum dos dois lados da equação, então pode ser simplificado, obtendo

$$-i\omega \bar{u} + i\alpha \bar{u} U + \bar{v} \frac{dU}{dy} = -i\alpha \bar{p} + \frac{\beta}{Re} \left[(i\alpha)^2 \bar{u} + \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \right] + i\alpha \bar{T}^{xx} + \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy}.$$

Através de manipulações algébricas e substituindo $\omega = c\alpha$, a equação da quantidade de movimento na direção x é dada por

$$i\alpha(U - c)\bar{u} + \bar{v} \frac{dU}{dy} + i\alpha \bar{p} - i\alpha \bar{T}^{xx} - \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{u} \right).$$

Equação da quantidade de movimento na direção y perturbada (2.39):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + U \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] = - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \bar{p}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \\ & + \frac{\beta}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{2} \bar{v}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right) \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} \bar{T}^{xy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} \bar{T}^{yy}(y) e^{i(\alpha x - \omega t)} \right]. \end{aligned}$$

De modo análogo, obtém-se a equação da quantidade de movimento na direção y , dada por

$$i\alpha(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{p}}{dy} - i\alpha \bar{T}^{xy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{v} \right).$$

Por conseguinte, pode-se reescrever o sistema de equações de conservação da seguinte forma

$$i\alpha \bar{u} + \frac{d\bar{v}}{dy} = 0, \quad (2.44)$$

$$i\alpha(U - c)\bar{u} + \bar{v} \frac{dU}{dy} + i\alpha \bar{p} - i\alpha \bar{T}^{xx} - \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} - \alpha^2 \bar{u} \right), \quad (2.45)$$

$$i\alpha(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{p}}{dy} - i\alpha\bar{T}^{xy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \alpha^2\bar{v} \right). \quad (2.46)$$

Esse novo sistema escrito em função das auto-funções $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}$ e $\bar{\mathbf{T}}$ é utilizado para a dedução da equação de Orr-Sommerfeld e, para isso, realiza-se as seguintes manipulações: deriva-se a equação de quantidade de movimento na direção x (2.45) em relação a y . Em seguida, multiplica-se $i\alpha$ na equação de quantidade de movimento na direção y (2.46), obtendo

$$\begin{aligned} i\alpha(U - c)\frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha\bar{u}\frac{dU}{dy} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha\frac{d\bar{p}}{dy} - i\alpha\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} &= \\ &= \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^3\bar{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\bar{u}}{dy} \right), \\ -\alpha^2(U - c)\bar{v} + i\alpha\frac{d\bar{p}}{dy} + \alpha^2\bar{T}^{xy} - i\alpha\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} &= \frac{\beta}{Re} \left(i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - i\alpha^3\bar{v} \right). \end{aligned}$$

Na sequência, realiza-se a subtração das equações resultantes e obtém-se

$$\begin{aligned} i\alpha(U - c)\frac{d\bar{u}}{dy} + i\alpha\bar{u}\frac{dU}{dy} + \alpha^2(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha \left(\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} \right) + \\ -\alpha^2\bar{T}^{xy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{d^3\bar{u}}{dy^3} - \alpha^2\frac{d\bar{u}}{dy} - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + i\alpha^3\bar{v} \right). \end{aligned}$$

Considerando a equação da continuidade (2.44), que fornece o resultado $\bar{u} = \frac{i}{\alpha} \frac{d\bar{v}}{dy}$, tem-se

$$\begin{aligned} i\alpha(U - c)\frac{d}{dy} \left(\frac{i}{\alpha} \frac{d\bar{v}}{dy} \right) + i\alpha\frac{i}{\alpha} \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{dU}{dy} + \alpha^2(U - c)\bar{v} + \frac{d\bar{v}}{dy}\frac{dU}{dy} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha \left(\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + \right. \\ \left. - \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} \right) - \alpha^2\bar{T}^{xy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \frac{\beta}{Re} \left[\frac{d^3}{dy^3} \left(\frac{i}{\alpha} \frac{d\bar{v}}{dy} \right) - \alpha^2\frac{d}{dy} \left(\frac{i}{\alpha} \frac{d\bar{v}}{dy} \right) - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + i\alpha^3\bar{v} \right], \\ - (U - c)\frac{d\bar{v}}{dy} + \alpha^2(U - c)\bar{v} + \bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha \left(\frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} \right) - \alpha^2\bar{T}^{xy} - \frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \\ = \frac{\beta}{Re} \left(\frac{i}{\alpha} \frac{d^4\bar{v}}{dy^4} - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - i\alpha\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + i\alpha^3\bar{v} \right). \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $-\alpha$, a equação obtida é uma equação diferencial ordinária de quarta ordem para a variável dependente \bar{v} ,

$$\begin{aligned} \alpha(U - c)\frac{d\bar{v}}{dy} - \alpha^3(U - c)\bar{v} - \alpha\bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + i\alpha^2 \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) + \alpha^3\bar{T}^{xy} + \alpha\frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} = \\ = -\frac{i\beta}{Re} \left(\frac{d^4\bar{v}}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \alpha^4\bar{v} \right). \end{aligned}$$

Logo, a equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B, é dada por

$$\begin{aligned} \alpha(U - c) \left(\frac{d\bar{v}}{dy} - \alpha^2\bar{v} \right) - \alpha\bar{v}\frac{d^2U}{dy^2} + \alpha\frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + i\alpha^2 \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) + \alpha^3\bar{T}^{xy} = \\ = -\frac{i\beta}{Re} \left(\frac{d^4\bar{v}}{dy^4} - 2\alpha^2\frac{d^2\bar{v}}{dy^2} + \alpha^4\bar{v} \right). \quad (2.47) \end{aligned}$$

Como o modelo viscoelástico considerado é o Oldroyd-B, então as equações dos tensores não-Newtonianos, presentes na equação de Orr-Sommerfeld, também são obtidas substituindo as variáveis (2.43) nas equações (2.40) – (2.42) [17, 19] e, dessa forma, obtêm-se

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xx} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xx} + U i \alpha \bar{T}^{xx} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + 2\hat{T}^{xx} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2\bar{T}^{xy} \frac{dU}{dy} \right) = \\ = -2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{xy} + U i \alpha \bar{T}^{xy} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - \hat{T}^{xx} i \alpha \bar{v} - \hat{T}^{yy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \bar{T}^{yy} \frac{dU}{dy} \right) = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i \alpha \bar{v} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right), \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\bar{T}^{yy} + Wi \left(-i\omega \bar{T}^{yy} + U i \alpha \bar{T}^{yy} + \bar{v} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} i \alpha \bar{v} - 2\hat{T}^{yy} \frac{d\bar{v}}{dy} \right) = 2 \frac{(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}. \quad (2.50)$$

Além disso, as derivadas dos tensores não-Newtonianos presentes na equação (2.47) são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + Wi \left(-i\omega \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + i\alpha U \frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} + i\alpha \frac{dU}{dy} \bar{T}^{xx} + \frac{d\bar{v}}{dy} \hat{T}^{xx} + \bar{v} \frac{d^2\hat{T}^{xx}}{dy^2} + 2 \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} + \right. \\ \left. + 2\hat{T}^{xx} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2 \frac{i}{\alpha} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2 \frac{i}{\alpha} \hat{T}^{xy} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} - 2 \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \frac{dU}{dy} - 2\bar{T}^{xy} \frac{d^2U}{dy^2} \right) = \\ = -\frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + Wi \left(-i\omega \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + i\alpha \frac{dU}{dy} \bar{T}^{xy} + i\alpha U \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + \frac{d\bar{v}}{dy} \hat{T}^{xy} + \bar{v} \frac{d^2\hat{T}^{xy}}{dy^2} - i\alpha \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \bar{v} + \right. \\ \left. - i\alpha \hat{T}^{xx} \frac{d\bar{v}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \frac{dU}{dy} - \bar{T}^{yy} \frac{d^2U}{dy^2} - \frac{i}{\alpha} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - \frac{i}{\alpha} \hat{T}^{yy} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} \right) = \\ = \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha \frac{d\bar{v}}{dy} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^3\bar{v}}{dy^3} \right), \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + Wi \left(-i\omega \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + i\alpha U \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} + i\alpha \frac{dU}{dy} \bar{T}^{yy} + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} + \bar{v} \frac{d^2\hat{T}^{yy}}{dy^2} - 2i\alpha \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} \bar{v} + \right. \\ \left. - 2i\alpha \hat{T}^{xy} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2 \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2\hat{T}^{yy} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right) = \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \bar{T}^{xy}}{dy^2} + Wi \left[(i\alpha U - i\omega) \frac{d^2 \bar{T}^{xy}}{dy^2} + i\alpha \left(\frac{dU}{dy} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} + \frac{d^2 U}{dy^2} \bar{T}^{xy} + \frac{dU}{dy} \frac{d\bar{T}^{xy}}{dy} \right) + \right. \\
& + \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d^2 \hat{T}^{xy}}{dy^2} + \bar{v} \frac{d^3 \hat{T}^{xy}}{dy^3} + \frac{d\bar{v}}{dy} \frac{d^2 \hat{T}^{xy}}{dy^2} - i\alpha \left(\frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} + \frac{d^2 \hat{T}^{xx}}{dy^2} \bar{v} + \hat{T}^{xx} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} + \right. \\
& + \left. \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} \frac{d\bar{v}}{dy} \right) - \frac{d^2 \bar{T}^{yy}}{dy^2} \frac{dU}{dy} - 2 \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \frac{d^2 U}{dy^2} - \bar{T}^{yy} \frac{d^3 U}{dy^3} - \frac{i}{\alpha} \left(\frac{d^2 \hat{T}^{yy}}{dy^2} \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} + \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^3 \bar{v}}{dy^3} + \right. \\
& \left. + \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \frac{d^3 \bar{v}}{dy^3} \right) \left. \right] - \frac{(1-\beta)}{Re} i\alpha \frac{d^2 \bar{v}}{dy^2} = \left[\frac{i}{\alpha} \left(Wi \hat{T}^{yy} + \frac{(1-\beta)}{Re} \right) \right] \frac{d^4 \bar{v}}{dy^4}. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Quando trata-se de um escoamento de jato utilizando fluido viscoelástico, bidimensional (x, y) , sem forças de campo e com propriedades constantes (ρ, η) [30], as condições de contorno e auxiliares são especificadas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \tilde{v} = 0, & \text{para } y \rightarrow \pm\infty, \\
\tilde{v} &= 0, & \text{para } y = 0 \quad (\text{modo varicoso}), \\
\tilde{p} &= 0, & \text{para } y = 0 \quad (\text{modo sinuoso}).
\end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\tilde{p} = 0, \quad \text{para } y = 0 \quad (\text{modo sinuoso}). \quad (2.56)$$

Veja, desde que $\tilde{u}(y \rightarrow \pm\infty) = 0$, todas as derivadas de \tilde{u} em relação a y também devem ser zero em $y \rightarrow \pm\infty$ [30].

Uma vez calculadas essas equações junto com as condições de contorno adequadas, os resultados da análise de estabilidade linear podem ser obtidos.

2.5 Escoamento Base

Uma dificuldade na simulação numérica de problemas em dinâmica de fluidos computacional é a obtenção do escoamento base. Para escoamentos de Poiseuille, utilizando o modelo Oldroyd-B, é fácil a sua obtenção [19]; ao mudar o modelo para Giesekus, por exemplo, a dificuldade já aumenta, impossibilitando a obtenção de uma solução exata completa. Para este modelo, é possível obter soluções semi-analíticas que derivam-se da solução de equações não-lineares [17].

Para jatos Newtonianos é possível obter os resultados do escoamento base [30, 54], no entanto, para o problema em questão, escoamento de jato viscoelástico, a obtenção de tais informações é muito complicada devido a alta complexidade do assunto. Todavia, para sanar essa dificuldade, utilizou-se uma aproximação para a velocidade do escoamento base, sendo essa uma expressão canônica aproximada e, além disso, utilizou-se o OpenFOAM, que é um *software* de código aberto com diversos *solvers* aplicados em dinâmica de fluidos computacional, para estudar o comportamento do jato laminar em termos de como evolui a jusante e verificar as hipóteses impostas para o escoamento base considerado.

De modo geral, para obter a aproximação do escoamento base considera-se um escoamento bidimensional (x, y) com fluido incompressível e em regime permanente. Assume-se que todas as variáveis são dependentes apenas do eixo y , a pressão é constante e o seu gradiente é nulo, isto é, o escoamento é totalmente desenvolvido e, além disso, as condições auxiliares são dadas por

$$\begin{aligned}
U &= U_{\text{cflow}} = \text{constante}, & \text{para } y \rightarrow \pm\infty, \\
v &= 0, & \text{para } y = 0.
\end{aligned}$$

Michalke (1984) [40] propõe a discussão de quatro perfis de velocidade que são pertinentes para estudar a estabilidade de jatos cilíndricos. Um destes perfis de velocidade é

$$U(y) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{R}{4\theta} \left(\frac{R}{y} - \frac{y}{R} \right) \right] + U_{\text{coflow}}, \quad (2.57)$$

onde R denota a meia largura do jato (ou raio para jatos cilíndricos), θ a espessura da camada limite e U_{coflow} representa a velocidade quando $y \rightarrow \infty$. Segundo Michalke (1971) [39], este perfil de velocidade apresenta um bom efeito na aproximação de escoamentos paralelos e Morris (1976) [42] diz que é representativo do perfil de velocidade média na região final do núcleo potencial.

Finalmente, utilizando as hipóteses anteriores,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} = 0, \quad v = 0, \quad u = U(y), \quad p = \text{constante}, \quad \nabla p = 0, \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(y) \right),$$

nas equações (2.27) – (2.29), os perfis dos tensores não-Newtonianos são dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \hat{T}^{yy} &= 0, \\ \hat{T}^{xy} &= \frac{(1 - \beta) dU}{Re dy}, \\ \hat{T}^{xx} &= 2Wi \hat{T}^{xy} \frac{dU}{dy}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Vale destacar que utilizando a técnica LST é necessária a utilização das derivadas do perfil de velocidade e dos tensores não-Newtonianos, que através dessa abordagem é possível obtê-las derivando as equações (2.57) e (2.58).

Formulação Numérica

As equações de Navier-Stokes possuem soluções analíticas para um conjunto especial de problemas, dependendo essencialmente de sua geometria e das condições de contorno. Portanto, o uso de métodos de aproximação para a resolução desses problemas se torna imprescindível. Ao longo desse capítulo são apresentados métodos de resolução, baseados na Teoria de Estabilidade Linear, que foram empregados para resolver as equações que governam o problema. Além disso, alguns conceitos inerentes são discutidos ao utilizar o *software* OpenFOAM que foi a ferramenta aplicada para confirmar as hipóteses sobre o escoamento base do jato laminar.

3.1 Teoria de Estabilidade Linear

Após a obtenção da equação de Orr-Sommerfeld para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B, é necessária a escolha de um método para a sua resolução, bem como um algoritmo para a obtenção da solução. Além disso, é necessário reconhecer as classificações de instabilidades através da abordagem LST utilizada e, diante disso, essas abordagens são tratadas no decorrer dessa seção.

3.1.1 Solução Numérica da Equação de Orr-Sommerfeld

Inicialmente, foi realizada duas abordagens para a obtenção da solução numérica da equação de Orr-Sommerfeld, uma para fluidos Newtonianos e outra para não-Newtonianos. Em geral, escreve-se a equação (2.47) da seguinte forma

$$A(y)\bar{v}^{IV} + B(y)\bar{v}''' + C(y)\bar{v}'' + D(y)\bar{v}' + E(y)\bar{v} + F(y) = 0, \quad (3.1)$$

onde $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$, $D(y)$ e $E(y)$ representam os coeficientes dos termos \bar{v}^{IV} , \bar{v}''' , \bar{v}'' , \bar{v}' e \bar{v} , respectivamente, e o termo $F(y)$ é o termo independente. É importante destacar que, nesta seção, as derivadas presentes na equação de Orr-Sommerfeld são escritas de acordo com a notação de Lagrange quando houver necessidade de simplificar a notação.

3.1.1.1 Caso Newtoniano

Para iniciar a discussão do caso Newtoniano, é preciso evidenciar as equações que modelam o problema para um fluido Newtoniano. Logo, as equações adimensionais de conservação de massa e de quantidade de movimento nas direções x e y são dadas respec-

tivamente por

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (3.4)$$

Observa-se que o raciocínio para dedução da equação de Orr-Sommerfeld é análogo ao realizado no Capítulo 2 e, dessa forma, sua equação é semelhante a equação (2.47), porém, como trata-se de fluidos Newtonianos, não há presença dos tensores extra tensão não-Newtonianos, isto é,

$$\alpha(U - c)(\bar{v}'' - \alpha^2 \bar{v}) - U'' \alpha \bar{v} = -\frac{i}{Re} (\bar{v}^{IV} - 2\alpha^2 \bar{v}'' + \alpha^4 \bar{v}). \quad (3.5)$$

O objetivo é determinar as variáveis da equação (3.1), que são obtidas realizando manipulações algébricas na equação (3.5) considerando $\omega = \alpha c$. Ressalta-se que utilizou a notação de Lagrange nas derivadas das equações para simplificar a notação. Dessa forma, obtém-se

$$\bar{v}^{IV} + [-2\alpha^2 - iRe(\alpha U - \omega)] \bar{v}'' + [\alpha^4 + iRe\alpha(U'' - \alpha\omega + \alpha^2 U)] \bar{v} = 0,$$

então $A(y) = 1$, $B(y) = D(y) = F(y) = 0$, $C(y) = -2\alpha^2 - iRe(\alpha U - \omega)$ e $E(y) = \alpha^4 + iRe\alpha(U'' - \alpha\omega + \alpha^2 U)$. Sendo assim, pode-se escrever

$$\bar{v}^{IV} = -C(y)\bar{v}'' - E(y)\bar{v}. \quad (3.6)$$

A partir da equação (3.6) é possível resolver a equação de Orr-Sommerfeld para os parâmetros desejados, a partir dos valores das variáveis do escoamento base.

Dessa forma, deriva-se condições de contorno analíticas para resolver a equação (3.6). Para escoamento de jatos, tem-se que para $y \rightarrow \pm\infty$ então $U_\infty = U_{\text{coflow}}$ e $U' = U'' = 0$. Dessa forma, $C(y) = -2\alpha^2 - iRe(\alpha U_\infty - \omega)$ e $E(y) = \alpha^4 + iRe\alpha^2(\alpha U_\infty - \omega)$.

Reescrevendo a equação (3.6) na forma matricial $\bar{V}' = M\bar{V}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{v}' \\ \bar{v}'' \\ \bar{v}''' \\ \bar{v}^{IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -E(y) & 0 & -C(y) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{v}' \\ \bar{v}'' \\ \bar{v}''' \end{bmatrix}.$$

Busca-se soluções na forma $v(y) = \exp(\lambda_{eig} y)$ para $y \rightarrow \pm\infty$, onde λ_{eig} são os autovalores da matriz M . Achando os autovalores de M , deve-se verificar quais apresentam decaimento exponencial ao longe (do jato) e para a solução utiliza-se somente esses autovalores, pois as perturbações tendem a zero ao longe (em $y \rightarrow \pm\infty$) e, com isso, não há sentido utilizar os autovalores que apresentam crescimento exponencial.

Para encontrar os autovalores de M basta calcular,

$$|M - \lambda_{eig} I| y = 0 \quad \Rightarrow \quad |M - \lambda_{eig} I| = 0,$$

isto é,

$$\begin{vmatrix} -\lambda_{eig} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_{eig} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{eig} & 1 \\ -E(y) & 0 & -C(y) & -\lambda_{eig} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.7)$$

Utilizando o Teorema de Laplace é simples realizar o cálculo do determinante (3.7). Considerando a primeira linha, tem-se

$$\det(M_{\lambda_{eig}}) = (-\lambda_{eig})M_{\lambda_{eig11}} + M_{\lambda_{eig12}} = \lambda_{eig}^4 + C(y)\lambda_{eig}^2 + E(y) = 0.$$

Calcula-se por substituição de variáveis, $\lambda_{eig}^2 = \Lambda_{eig}$, a equação quadrática fica,

$$\Lambda_{eig}^2 + C(y)\Lambda_{eig} + E(y) = 0,$$

cujas raízes são

$$\lambda_{eig^1} = \pm\alpha, \quad (3.8)$$

e

$$\lambda_{eig^2} = \pm\sqrt{\alpha^2 - iRe\omega}. \quad (3.9)$$

Deve-se tomar a raiz, positiva ou negativa, que resulte em decaimento exponencial em $y \rightarrow \pm\infty$. A solução de v é

$$\bar{v}(y) = A \exp(\lambda_{eig^1}y) + B \exp(\lambda_{eig^2}y) = \bar{v}_I + \bar{v}_{II},$$

onde as constantes A e B podem ser determinadas a posteriori, se for necessário encontrar as autofunções. Os autovalores λ_{eig^1} e λ_{eig^2} são as raízes que satisfazem as condições de contorno de decaimento exponencial.

Encontrando os autovetores correspondentes, tem-se

$$\bar{v} = 1, \quad \bar{v}'_I = \lambda_{eig^1}, \quad \bar{v}''_{II} = \lambda_{eig^1}^2, \quad \bar{v}'''_{III} = \lambda_{eig^1}^3,$$

e

$$\bar{v} = 1, \quad \bar{v}'_I = \lambda_{eig^2}, \quad \bar{v}''_{II} = \lambda_{eig^2}^2, \quad \bar{v}'''_{III} = \lambda_{eig^2}^3.$$

3.1.1.2 Caso não-Newtoniano

Considerando um fluido viscoelástico sob a equação constitutiva Oldroyd-B, a solução da equação de Orr-Sommerfeld modificada (3.1) coincide com um problema de autovalor, cuja solução existe para alguns valores dos parâmetros α , β , ω , Wi e Re , e é consequência do perfil de velocidade do escoamento base em questão, assim como realizado para o caso Newtoniano.

O procedimento é análogo ao caso Newtoniano, basta determinar as variáveis da equação (3.1) e, para isso, realiza-se algumas manipulações algébricas na equação (2.47), obtendo

$$\begin{aligned} \bar{v}^{IV} - \left[(\alpha U - \omega) \frac{iRe}{\beta} + 2\alpha^2 \right] \bar{v}'' + \left[\alpha^4 + \frac{iRe}{\beta} \alpha^2 (\alpha U - \omega) + \frac{iRe}{\beta} \alpha U'' \right] \bar{v} + \\ + \frac{Re}{\beta} \alpha^2 (\bar{T}'^{xx} - \bar{T}'^{yy}) - \frac{iRe}{\beta} \alpha (\bar{T}''^{xy} + \alpha^2 \bar{T}^{xy}) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Partindo da equação de Orr-Sommerfeld (3.1), tem-se $A(y) = 1$, $B(y) = D(y) = 0$, $C(y) = -2\alpha^2 - \frac{iRe}{\beta}(\alpha U - \omega)$, $E(y) = \alpha^4 + \frac{iRe}{\beta}\alpha(U'' - \alpha\omega + \alpha^2U)$ e $F(y) = \frac{Re}{\beta}\alpha^2(\bar{T}'^{xx} - \bar{T}'^{yy}) - \frac{iRe}{\beta}\alpha(\bar{T}''^{xy} + \alpha^2\bar{T}^{xy})$. Sendo assim, pode-se escrever

$$\bar{v}^{IV} = -C(y)\bar{v}'' - E(y)\bar{v} - F(y), \quad (3.11)$$

desde que F não contenha termos v^{IV} . Caso contrário, escreve-se

$$(1 + F_2(y))\bar{v}^{IV} = -C(y)\bar{v}'' - E(y)\bar{v} - F_1(y),$$

ou

$$\bar{v}^{IV} = \frac{-C(y)\bar{v}'' - E(y)\bar{v} - F_1(y)}{1 + F_2(y)}. \quad (3.12)$$

Ressalta-se, novamente, que utilizou a notação de Lagrange nas derivadas das equações para simplificar a notação.

Sequência de Cálculo

Utilizando as equações (2.48) – (2.50), segue a sequência que foi implementada para o cálculo dos tensores não-Newtonianos. Dado o escoamento base e \bar{v} da equação de Orr-Sommerfeld, obtém-se \bar{T}^{yy}

$$\bar{T}^{yy} (1 - i\omega Wi + U\alpha Wi) = -Wi \left(\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \bar{v} - 2i\alpha\bar{v}\hat{T}^{xy} - 2\frac{d\bar{v}}{dy}\hat{T}^{yy} \right) + \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}.$$

Agora, dado o escoamento base, \bar{v} e \bar{T}^{yy} da equação anterior, obtém-se \bar{T}^{xy}

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xy} (1 - i\omega Wi + U\alpha Wi) &= \\ &= -Wi \left(\bar{v} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - i\alpha\bar{v}\hat{T}^{xx} - \frac{dU}{dy} \bar{T}^{yy} - \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \hat{T}^{yy} \right) + \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha\bar{v} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right). \end{aligned}$$

Seguindo a mesma estratégia, dado o escoamento base, \bar{v} , \bar{T}^{xy} e \bar{T}^{yy} das equações anteriores, obtém-se \bar{T}^{xx}

$$\begin{aligned} \bar{T}^{xx} (1 - i\omega Wi + U\alpha Wi) &= \\ &= -Wi \left(\bar{v} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + 2\hat{T}^{xx} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2\bar{T}^{xy} \frac{dU}{dy} \right) - \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}. \end{aligned}$$

Para facilitar a derivação das equações, escreve-se as equações acima como

$$\bar{T}^{yy} g = f_{yy}, \quad \bar{T}^{xy} g = f_{xy} \quad \text{e} \quad \bar{T}^{xx} g = f_{xx}, \quad (3.13)$$

onde

$$g = 1 - i\omega Wi + i\alpha U Wi, \quad (3.14)$$

$$f_{yy} = -Wi \left(\frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} \bar{v} - 2i\alpha\bar{v}\hat{T}^{xy} - 2\frac{d\bar{v}}{dy}\hat{T}^{yy} \right) + \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}, \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} f_{xy} &= -Wi \left(\bar{v} \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} - i\alpha\bar{v}\hat{T}^{xx} - \frac{dU}{dy} \bar{T}^{yy} - \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \hat{T}^{yy} \right) + \\ &+ \frac{(1-\beta)}{Re} \left(i\alpha\bar{v} + \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} \right), \quad (3.16) \end{aligned}$$

$$f_{xx} = -Wi \left(\bar{v} \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} + 2\hat{T}^{xx} \frac{d\bar{v}}{dy} - 2\hat{T}^{xy} \frac{i}{\alpha} \frac{d^2\bar{v}}{dy^2} - 2\bar{T}^{xy} \frac{dU}{dy} \right) - \frac{2(1-\beta)}{Re} \frac{d\bar{v}}{dy}. \quad (3.17)$$

As derivadas dos tensores são calculadas utilizando as regras de derivação do quociente e do produto.

Condições de Contorno da Equação de Orr-Sommerfeld

Para escoamentos de jatos, tem-se que para $y \rightarrow \pm\infty$,

$$\begin{aligned} U_\infty &= U_{\text{coflow}}, \\ \hat{T}^{xx} &= \hat{T}^{xy} = \hat{T}^{yy} = 0, \\ \frac{dU}{dy} &= \frac{d\hat{T}^{xx}}{dy} = \frac{d\hat{T}^{xy}}{dy} = \frac{d\hat{T}^{yy}}{dy} = 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

tal que os coeficientes da equação de Orr-Sommerfeld tornam-se

$$\begin{aligned} C(y) &= -2\alpha^2 - i(\alpha U_\infty - \omega) \frac{Re}{\beta}, \\ E(y) &= \alpha^4 + i \frac{Re\alpha^2}{\beta} (\alpha U_\infty - \omega), \\ F(y) &= \frac{Re}{\beta} \alpha^2 \left(\frac{d\bar{T}^{xx}}{dy} - \frac{d\bar{T}^{yy}}{dy} \right) - \frac{iRe}{\beta} \alpha \left(\frac{d^2\bar{T}^{xy}}{dy^2} + \alpha^2 \bar{T}^{xy} \right). \end{aligned}$$

Ressalta-se que os tensores não-Newtonianos e suas derivadas devem ser reescritos considerando as condições da equação (3.18) e, para isso, basta utilizar as equações (3.14) – (3.17) com as devidas considerações. Realizando tais modificações, pode-se obter a equação de Orr-Sommerfeld no contorno

$$\begin{aligned} &\underbrace{\left[1 + \frac{(1-\beta)}{\beta} \frac{1}{(1-i\omega Wi + U_\infty i\alpha Wi)} \right]}_{A_{\text{contorno}}} \bar{v}^{IV} + \\ &+ \underbrace{\left[-i(\alpha U_\infty - \omega) \frac{Re}{\beta} - 2\alpha^2 - \frac{2\alpha^2(1-\beta)}{\beta} \frac{1}{(1-i\omega Wi + U_\infty i\alpha Wi)} \right]}_{C_{\text{contorno}}} \bar{v}'' + \\ &+ \underbrace{\left[\alpha^4 \frac{(1-\beta)}{\beta} \frac{1}{(1-i\omega Wi + U_\infty i\alpha Wi)} + i \frac{Re\alpha^2}{\beta} (U_\infty \alpha - \omega) + \alpha^4 \right]}_{E_{\text{contorno}}} \bar{v} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Observa-se que a equação (3.19) refere-se a uma EDO de 4^a ordem com coeficientes constantes, cuja solução genérica é $\bar{v}(y) = Ae^{\lambda_{eig}y}$. Resolvendo-a, obtêm-se os seguintes valores para λ_{eig}

$$\lambda_{eig^1} = \pm\alpha, \quad (3.20)$$

e

$$\lambda_{eig^2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(1 + i\beta Wi(\alpha U_\infty - \omega) - ReU_\infty^2 Wi) + \alpha ReU_\infty(i + 2\omega Wi) - \omega Re(i + \omega Wi)}{1 - i\beta\omega Wi + i\alpha\beta U_\infty Wi}}. \quad (3.21)$$

Novamente, deve-se tomar a raiz, positiva ou negativa, que resulte em decaimento exponencial em $y \rightarrow \pm\infty$. A solução de v é

$$\bar{v}(y) = A \exp(\lambda_{eig^1}y) + B \exp(\lambda_{eig^2}y) = \bar{v}_I + \bar{v}_{II}, \quad (3.22)$$

onde as constantes A e B podem ser determinadas a posteriori, se for necessário encontrar as autofunções. Os autovalores λ_{eig^1} e λ_{eig^2} são as raízes que satisfazem as condições de contorno de decaimento exponencial.

Encontrando os autovetores correspondentes, tem-se

$$\bar{v} = 1, \quad \bar{v}'_I = \lambda_{eig^1}, \quad \bar{v}''_{II} = \lambda_{eig^1}^2, \quad \bar{v}'''_{III} = \lambda_{eig^1}^3,$$

e

$$\bar{v} = 1, \quad \bar{v}'_I = \lambda_{eig^2}, \quad \bar{v}''_{II} = \lambda_{eig^2}^2, \quad \bar{v}'''_{III} = \lambda_{eig^2}^3.$$

Pode-se dizer que, \bar{V}_I é a solução não viscosa e \bar{V}_{II} a solução viscosa. Dessa forma, uma combinação linear de soluções viscosa e não viscosa deve satisfazer as condições $\bar{v} = \bar{v}' = 0$, onde $\bar{V} = [\bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'', \bar{v}''']$.

Sendo assim, integra-se a equação de Orr-Sommerfeld a partir das condições de contorno $\bar{V}_I = [1, \lambda_{eig^1}, \lambda_{eig^1}^2, \lambda_{eig^1}^3]^\top$ e $\bar{V}_{II} = [1, \lambda_{eig^2}, \lambda_{eig^2}^2, \lambda_{eig^2}^3]^\top$. O resultado da integração fornece os valores \bar{V}_I e \bar{V}_{II} cuja combinação linear deve ser compatível com a condição no contorno oposto. Isto é, uma comparação é realizada pelo sistema linear gerado através da igualdade presente na equação (3.22), envolvendo duas aproximações obtidas através da integração das soluções. Para que esse sistema linear admita uma solução não trivial, faz-se necessário que seu determinante seja nulo.

A equação de Orr-Sommerfeld resulta em um sistema de equações rígido, uma vez que os dois autovalores λ_{eig^1} e λ_{eig^2} não são da mesma ordem de magnitude. Durante a integração, é necessário garantir a independência linear da solução e, para isso, utiliza-se o processo de Gram-Schmidt [38].

Computacionalmente utiliza-se uma técnica implementada por Mendonça [38]. Esse processo adota o método *Shooting* para solucionar a equação de Orr-Sommerfeld sob influência das características do fluido já descritas, com os seguintes passos [19]:

- a. Com alguns parâmetros dados (α , ω e os números adimensionais trabalhados), atribui-se valores iniciais para os autovalores;
- b. Utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, integra-se a equação de Orr-Sommerfeld de $y \rightarrow \infty$ até $y = 0$ e de $y \rightarrow -\infty$ até $y = 0$ e compara-se as duas soluções;
- c. Verifica se a restrição do determinante é satisfeita, isto é, se o determinante é nulo na comparação entre as soluções obtidas;
- d. Dependendo da análise executada (espacial ou temporal), modifica-se o valor de ω ou α , de modo que esse novo valor esteja próximo do anterior;
- e. Integra-se novamente a equação e verifica se a restrição é satisfeita;
- f. Se a condição não está sendo satisfeita, atualiza-se o valor de ω (ou α) utilizando o método da secante e as últimas duas aproximações. E, após isso, o algoritmo retorna ao item (e).

Como mencionado nos passos acima, a equação de Orr-Sommerfeld foi integrada através do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Durante a integração, os dois vetores solução devem ser linearmente independentes, dessa forma, é imprescindível a sua verificação. Isso ocorre por meio da verificação da ortogonalidade e, caso não sejam ortogonais, utiliza-se o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt [38].

3.2 Análise Espacial e Temporal de Instabilidades

A equação de \tilde{u} em (2.43) possui autofunção complexa \hat{u} e pode-se ter α ou ω complexo, ou ambos complexos. Dessa forma, a solução do sistema é dada por

$$\tilde{u}(x, y, t) = \bar{u}(y)e^{(-\alpha_i x + \omega_i t)}e^{i(\alpha_r x - \omega_r t)}, \quad (3.23)$$

em que os índices r e i indicam componentes real e imaginária, respectivamente.

Quando ω é um número real e α um número complexo, a amplitude da perturbação cresce na direção do escoamento médio x e, neste caso, a formulação é denominada formulação espacial. As componentes ω_r , α_r e α_i , representam, respectivamente, a frequência, o número de onda e a taxa de amplificação espacial. Por outro lado, quando α é um número real e ω um número complexo, a amplitude cresce no tempo, então a formulação é denominada formulação temporal. Neste caso, ω_i é a taxa de amplificação temporal. Dessa forma, a Tabela 3.1 apresenta a classificação das instabilidades, utilizando as análises espacial e temporal [38].

Tabela 3.1: Classificação de instabilidades.

Tipo de Análise	Taxa de Amplificação	Amplitude	Classificação
Análise Espacial	$\alpha_i < 0$	Crescente	Instável
	$\alpha_i = 0$	Constante	Neutro
	$\alpha_i > 0$	Decrescente	Estável
Análise Temporal	$\omega_i < 0$	Decrescente	Estável
	$\omega_i = 0$	Constante	Neutro
	$\omega_i > 0$	Crescente	Instável

Uma vez que ω aparece linearmente na equação de Orr-Sommerfeld, a análise temporal é mais fácil. Apesar disso, em muitos problemas, a física indica que as perturbações crescem ou decrescem espacialmente e não temporalmente [38].

3.3 Software OpenFOAM

O pacote CFD, do inglês *Computational Fluid Dynamics*, do OpenFOAM é uma ótima alternativa para a resolução de diversos problemas e, além disso, este pacote é ofertado gratuitamente e acompanhado de seu código fonte, permitindo um contato mais direto com o usuário. O OpenFOAM possui características particulares para solucionar numericamente as equações que modelam fenômenos da mecânica dos fluidos, em particular, as equações diferenciais parciais. Compreender a discretização realizada e solução numérica das equações de transporte e sua interpretação é indispensável para a implementação (ou extensão) dos códigos no OpenFOAM [56].

Os *solvers*¹ do OpenFOAM utilizam alguns arquivos que guardam os conteúdos necessários para se resolver um caso, essas informações são armazenadas em arquivos que seguem uma determinada estrutura de diretórios. É nestes arquivos que encontram-se as informações como detalhes da malha e da geometria do problema, as condições físicas e de contorno e os parâmetros para a aplicação de métodos numéricos. A Figura 3.1 apresenta o arranjo de diretórios, onde é representado um caso genérico (definido como <Nome do Caso>) [11].

¹Solvers são métodos desenvolvidos no OpenFOAM que resolve um determinado problema.

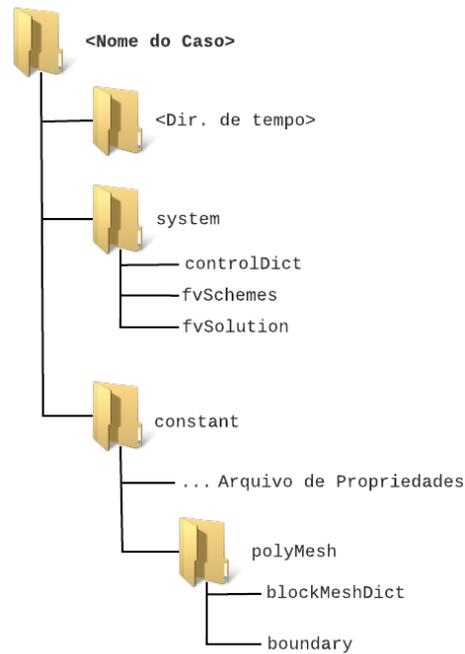


Figura 3.1: Exemplo de estrutura dos diretórios e arquivos no OpenFOAM.

Abaixo, apresenta-se uma breve descrição de cada diretório e seus arquivos.

1. **<Dir. de tempo>**: são nomeados de acordo com o tempo de execução da simulação, contém arquivos que descrevem as condições do problema, como condições de contorno e os valores para cada parâmetro. Um desses diretórios contém a condição inicial e nos demais contém os dados de saída (os critérios para salvar os dados de saída são definidos em **controlDict**).
2. **system**: os arquivos desse diretório tratam-se do modo de solução do caso.
 - **controlDict**: contém os parâmetros para a execução, como passo de tempo e configurações para a saída de dados;
 - **fvSchemes**: descreve as técnicas de discretização usadas para solucionar o caso;
 - **fvSolution**: descreve os parâmetros para os métodos que solucionarão o caso, como tolerância de erros e algoritmos necessários para a execução.
3. **constant**: os arquivos desse diretório contém as propriedades físicas referentes ao caso. Além de contar com um outro diretório para o detalhamento da geometria e da malha.
 - **Arquivo de Propriedades**: contém os parâmetros físicos do problema. Por exemplo, para o caso viscoelástico o arquivo é denominado **viscoelasticProperties** e contém os valores da densidade, da viscosidade e informações sobre a relaxação da substância;
 - **polyMesh**: trata-se de um diretório sendo que seus arquivos apresentam os detalhes referentes a geometria e a malha.
 - **blockMeshDict**: o arquivo apresenta os dados sobre o domínio do problema;
 - **boundary**: é uma lista que identifica os conjuntos de faces nos quais são aplicadas as condições de contorno.

3.3.1 Escoamento de Jato no OpenFOAM

Antes de iniciar as modificações nos diretórios para a simulação com o solver `viscoelasticFluidFoam`, foi necessário verificar as diversas informações básicas do *software* no Guia do Usuário [16]. Como já mencionado, o escoamento base para o caso Newtoniano é conhecido [30], dessa forma, utilizou-se a aproximação canônica similar da equação (2.57) para a condição de fronteira na entrada, isto é,

$$U(y) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{R}{4\theta} \left(\frac{R}{y} - \frac{y}{R} \right) \right] + U_{\text{coflow}},$$

onde R denota a meia largura do jato (ou raio para jatos cilíndricos), θ a espessura da camada limite e U_{coflow} representa a velocidade quando $y \rightarrow \infty$. Permitindo, dessa forma, que o *solver* execute a simulação até o escoamento atingir o estado estacionário obtendo a simulação do escoamento gerado numericamente pelo OpenFOAM.

O objetivo principal dessa seção é descrever algumas alterações realizadas nos arquivos descritos na Figura 3.1, como segue.

- **blockMeshDict**

O domínio construído apresenta uma região retangular sendo que o comprimento na direção x é maior do que na direção y , no entanto, foi necessária a utilização de um adensamento de malha na direção y para a convergência da simulação. As informações sobre o adensamento de malha foram encontradas no Guia do Usuário [16].

- **<Dir. de tempo>**

No arquivo referente a velocidade inicial deve-se descrever qual o tipo de condição de contorno que será utilizada.

- Para a velocidade U utilizou-se a função `fixedProfile`, onde cria-se uma tabela com os valores da função U na entrada e nas outras três fronteiras utilizou-se `zeroGradient`, isto é, o gradiente é zero, o que significa que a velocidade está totalmente desenvolvida;
- Para a pressão p utilizou um valor fixo ($p = 0$) na saída e `zeroGradient` nas demais fronteiras;
- Para os tensores utilizou um valor fixo ($\mathbf{T} = 0$) na entrada e `zeroGradient` nos outros contornos.

- **fvSchemes**

Os códigos CFD possuem métodos de discretização convenientes para cada tipo de fenômeno: convecção, difusão e processos transientes. Como, por hipótese, considera-se o regime estacionário, isto é, as derivadas no tempo são desprezadas e, para isso, utiliza-se `steadyState` em `dtSchemes`. Por outro lado, os esquemas de discretização utilizados para os termos do

- Gradiente: diferenças centrais de segunda ordem;
- Divergente: diferenças centrais de segunda ordem ou diferenças de primeira ordem (*upwind*);
- Laplaciano: diferenças centrais modificada de segunda ordem.

- **fvSolution**

Foi considerado o algoritmo PISO para a solução do acoplamento pressão-velocidade com duas correções.

Consulte o Apêndice A para mais detalhes sobre os métodos de discretização e solução utilizados pelo *software* OpenFOAM.

Resultados

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos para a análise da estabilidade de escoamentos de jatos para um fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B. Em particular, analisa-se a instabilidade de Kelvin-Helmholtz a partir de dois modos instáveis independentes, conhecidos como modo em fase (sinuoso) e modo fora de fase (varicoso), respectivamente [27]. Esses modos de Kelvin-Helmholtz encontram-se na camada de cisalhamento do jato e são discutidos no decorrer desse capítulo. A princípio, apresentam-se os resultados do estudo do comportamento do escoamento de jato laminar em termos de como evolui a jusante, utilizando o *software* OpenFOAM versão 7 e, por fim, apresenta-se o estudo da estabilidade utilizando a técnica LST.

4.1 Estudo do Escoamento Base Laminar

Antes de utilizar o pacote CFD do OpenFOAM para investigar o comportamento do escoamento de jato laminar, foi necessário estudar o *software* e verificar se os seus resultados eram coerentes para a utilização. Por este motivo, o primeiro passo foi realizar uma verificação da metodologia utilizando o escoamento de Poiseuille, já que há resultados analíticos para o escoamento base. E, finalmente, o segundo passo foi comparar os tensores não-Newtonianos obtidos através de equações simplificadas (2.58) e do *software* OpenFOAM para o escoamento de jato juntamente com a análise do perfil de velocidade.

4.1.1 Verificação da Metodologia

A verificação de uma metodologia numérica é o processo usado para quantificar o erro numérico que mede o quão bem o modelo matemático é resolvido numericamente, isto é, checar se não há erros de programação ou do método numérico [63]. Para certificar se a utilização do *software* OpenFOAM em estudar o comportamento do escoamento de jato é coerente, realizou-se uma verificação da metodologia numérica. Dessa forma, foi estabelecida a simulação numérica do escoamento em um canal formado por placas paralelas, isto é, para o escoamento bidimensional de Poiseuille, com a finalidade de encontrar um resultado numérico para o escoamento base do problema, que é conhecido na literatura (vide [19]).

Para verificar a metodologia empregada utilizou-se a estratégia de comparação, entre a solução numérica e a solução analítica do escoamento de Poiseuille para os perfis de velocidade u e dos tensores não-Newtonianos T^{xx} , T^{xy} e T^{yy} , variando os parâmetros

adimensionais Re e β , considerando o número de Weissenberg fixo, $Wi = 0.1$. Além disso, assumiu-se que na direção y o domínio compreende de $y = -1$ a $y = 1$.

Para evidenciar a eficácia do modelo matemático resolvido numericamente pelo *software*, é calculado o erro relativo para os perfis de velocidade e dos tensores não-Newtonianos. O erro numérico é igual à discrepância entre a solução analítica e a solução aproximada. Com isso, define-se o erro relativo como sendo a norma da razão entre o erro absoluto e a solução analítica, isto é,

$$\text{Erro} = \frac{\|\text{Solução numérica} - \text{Solução Analítica}\|_2}{\|\text{Solução Analítica}\|_2}.$$

A Tabela 4.1 apresenta as quatro malhas computacionais $N_x \times N_y$ utilizadas na simulação numérica no *software* OpenFOAM, onde N_x e N_y são os números de pontos nas direções x e y , respectivamente.

Tabela 4.1: Malhas computacionais utilizadas no OpenFOAM na simulação do escoamento de Poiseuille.

Malha	$N_x \times N_y$
Grossa	100×20
Intermediária Grossa	100×40
Intermediária Fina	100×80
Fina	100×160

O valor de N_x manteve-se fixo, pois foi possível observar nas simulações numéricas que refinando o espaçamento da malha na direção x aumentava demasiadamente o custo computacional e, além disso, atingiu-se independência de malha com o tamanho do volume de controle em x .

Utilizando os parâmetros adimensionais $Re = 1$ e 50 , $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ e 0.9 e $Wi = 0.1$, a Figura 4.1 apresenta a norma do erro relativo para as diferentes malhas utilizadas nas simulações numéricas aplicadas nos perfis de velocidade (Figura 4.1(a)) e nos tensores não-Newtonianos (Figura 4.1(b) e (c)). Ressalta-se, no entanto, que não houve diferença nos resultados numéricos quando se alterou o número de Reynolds.

É possível verificar na Figura 4.1 que o refinamento de malha foi favorável na obtenção de melhores resultados, isto é, apresentou menores erros. Não há resultados numéricos para o tensor T^{yy} na Figura 4.1, pois analiticamente $T^{yy} = 0$, levando a uma incoerência matemática (divisão por zero) para o cálculo do erro relativo. Dessa forma, a Figura 4.2 apresenta a norma do erro absoluto para o tensor T^{yy} . Apesar de demonstrar que o refinamento de malha não apresentou menores erros, a Figura 4.2 mostra que os maiores erros absolutos para o tensor T^{yy} estão na ordem de 10^{-6} .

Visto que as simulações numéricas para o escoamento de Poiseuille obtiveram resultados coerentes com a literatura para a obtenção do escoamento base, torna-se viável realizá-las para o escoamento de jato viscoelástico.

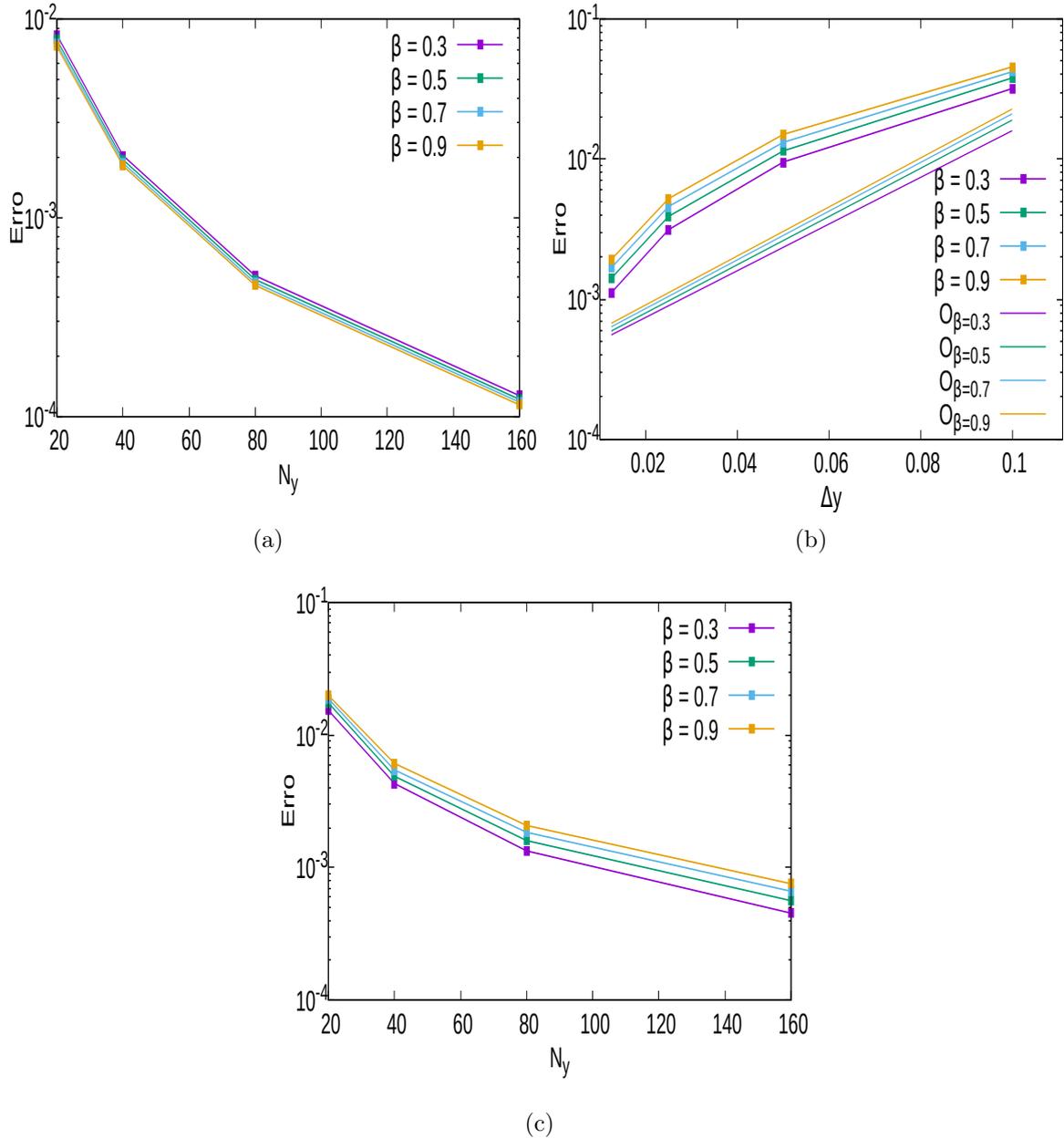


Figura 4.1: Norma do erro relativo em (a) u , (b) T^{xx} e (c) T^{xy} no fim do canal para $Re = 1$ e 50 , $Wi = 0.1$ e diferentes valores de β .

4.1.2 Investigação do Comportamento do Jato

Nesta seção apresenta-se uma investigação do comportamento do escoamento de jato laminar através da comparação entre os tensores não-Newtonianos, que foram considerados para a análise de estabilidade, e os obtidos pelo OpenFOAM com o objetivo de verificar, por exemplo, a hipótese de escoamento paralelo. É importante ressaltar que o perfil de velocidade também foi analisado para diferentes casos. A Figura 4.3 ilustra o domínio do escoamento do jato, sendo L o comprimento do escoamento e H a altura.

Por consequência, alguns parâmetros fixos são considerados: $L = 90$ e $H = 30$, além disso, a velocidade de entrada (*inlet*) é a apresentada na equação (2.57) para $R = 1$, $\theta = 0.1$ e $U_{coflow} = 0.1$, permitindo que o *software* realize a simulação até atingir o estado estacionário para os seguintes parâmetros adimensionais: $Re = 250, 500, 1000$ e 2000 , $\beta = 0.5, 0.7$ e 0.9 e $Wi = 2, 6, 10$ e 14 .

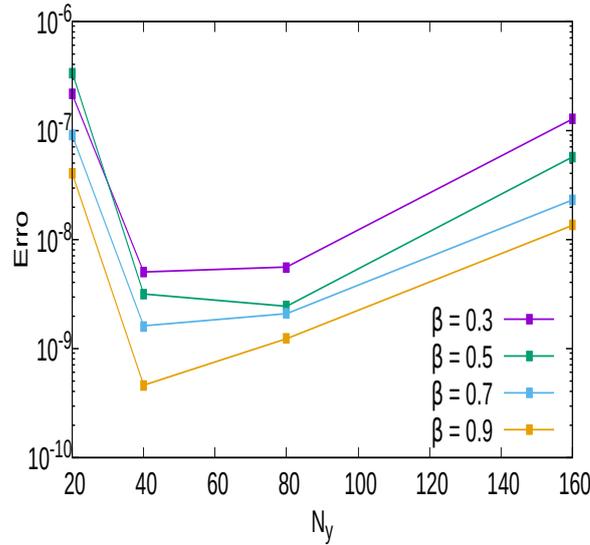


Figura 4.2: Norma do erro absoluto em T^{yy} no fim do canal para $Re = 1$ e 50 , $Wi = 0.1$ e diferentes valores de β .

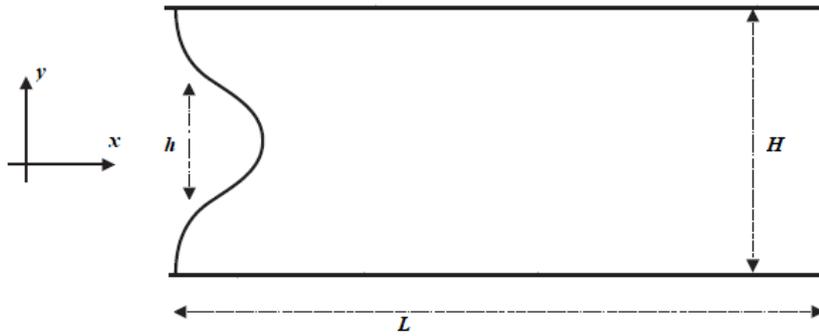


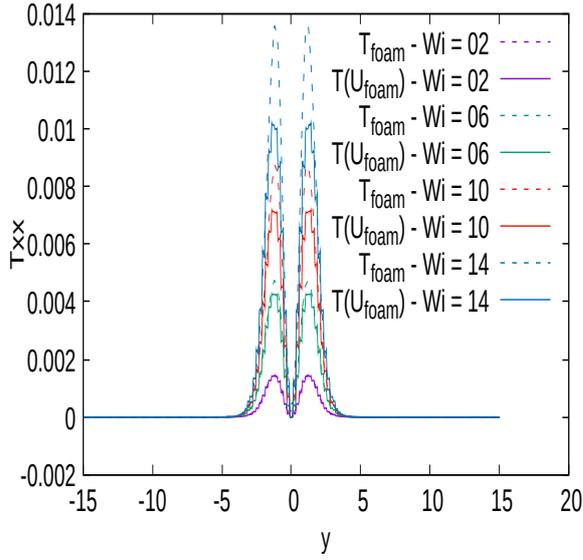
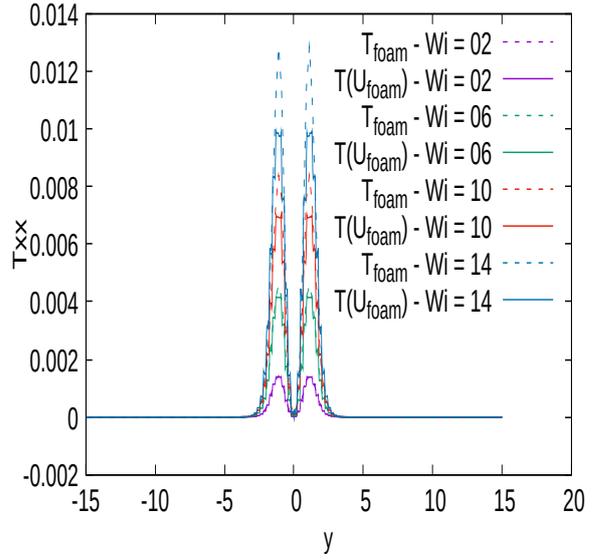
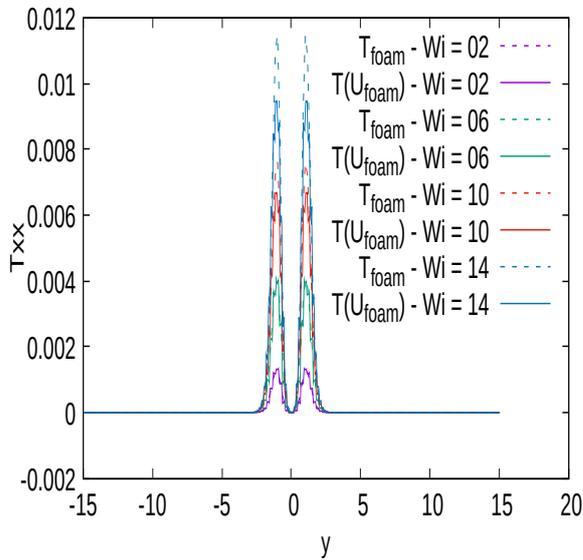
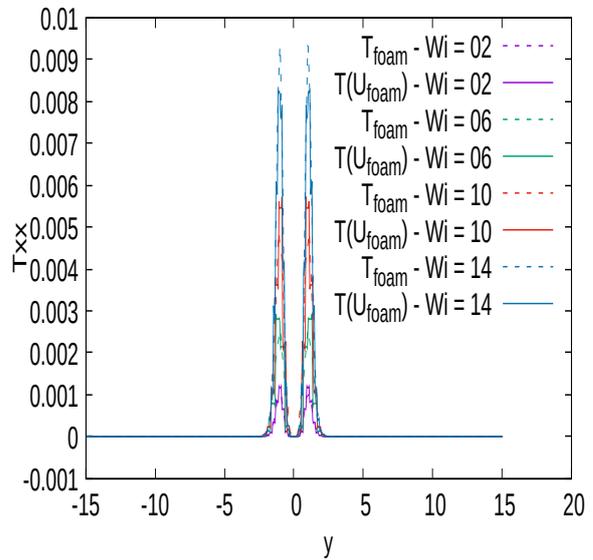
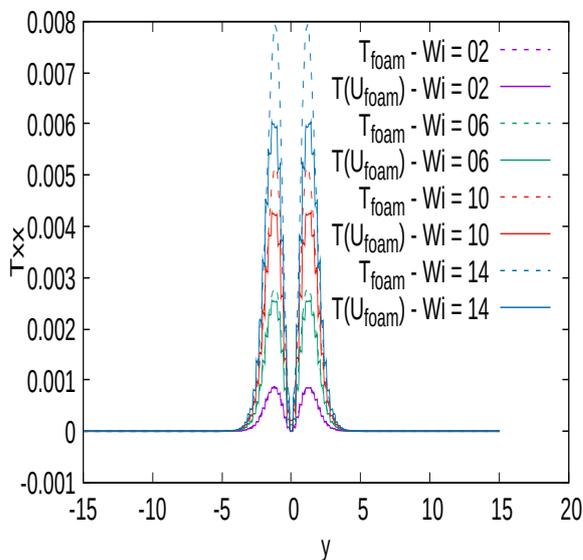
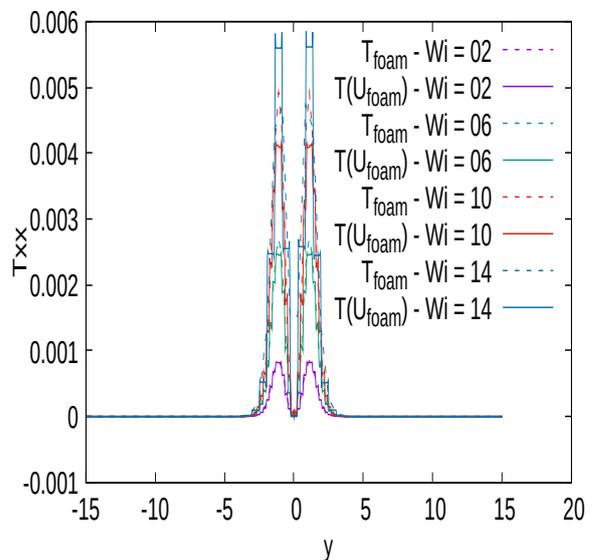
Figura 4.3: Domínio computacional para o escoamento do jato.

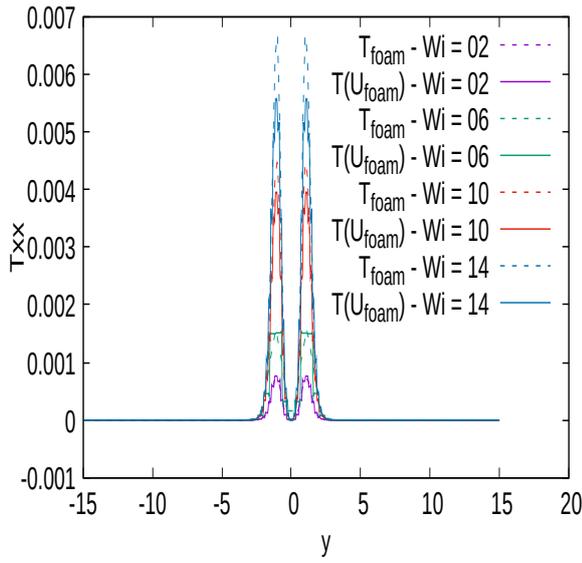
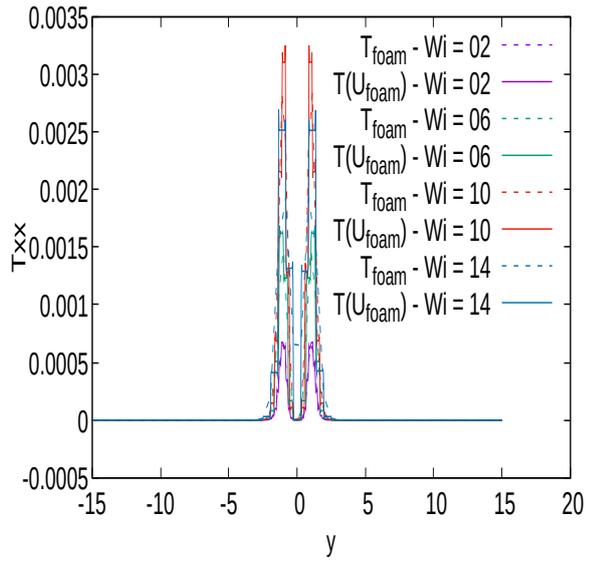
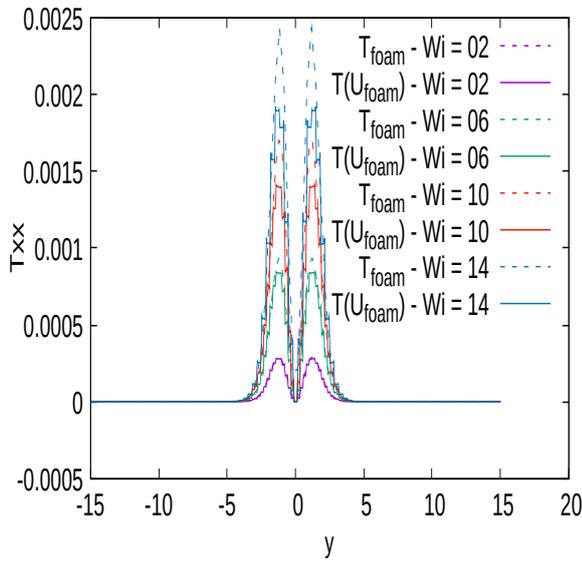
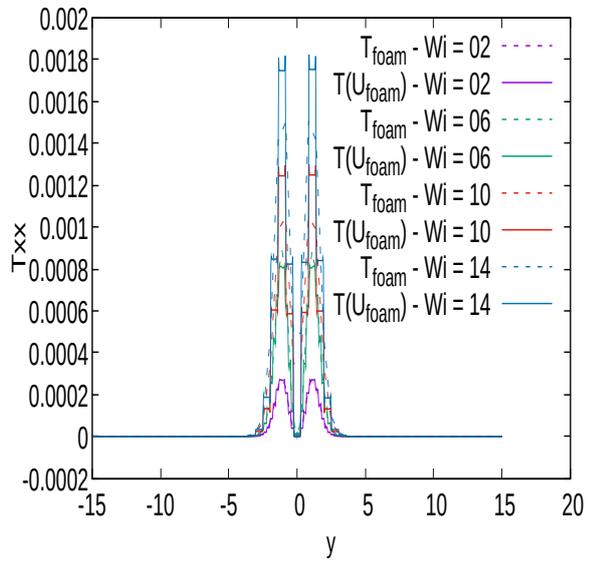
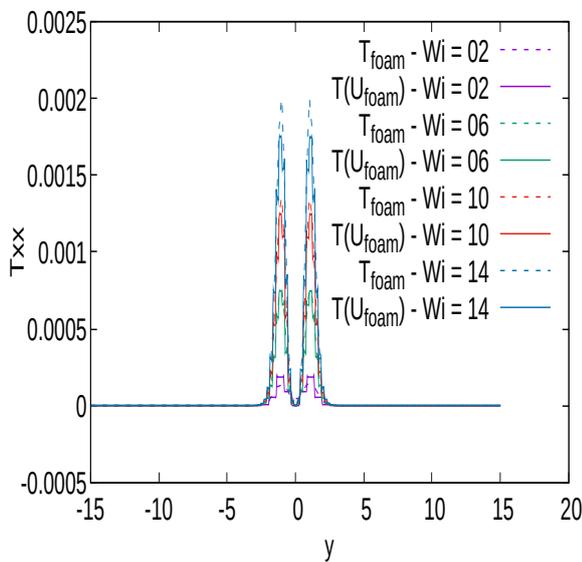
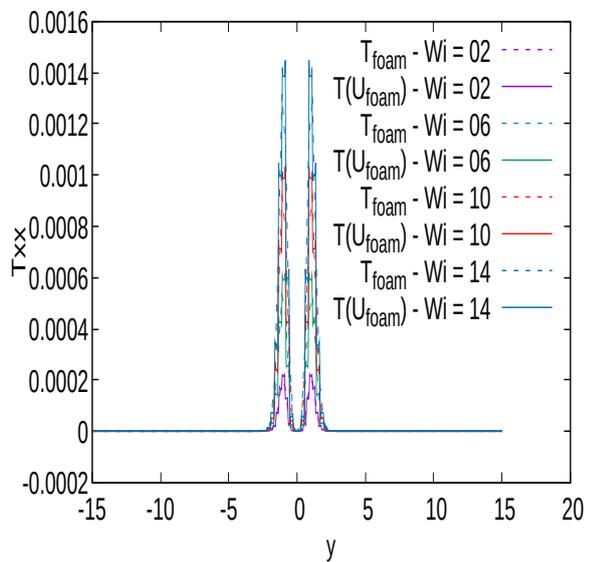
O objetivo dessa seção é realizar a comparação dos tensores T_{foam} e $T(U_{foam})$, tais que T_{foam} representam os tensores simulados do OpenFOAM enquanto $T(U_{foam})$ são os tensores calculados através das equações (2.58) onde a velocidade utilizada foi extraída da simulação realizada no *software* OpenFOAM. Vale destacar que as derivadas da velocidade foram calculadas por aproximações de quarta ordem e, além disso, os resultados do OpenFOAM foram extraídos da posição $x = 2/3L$.

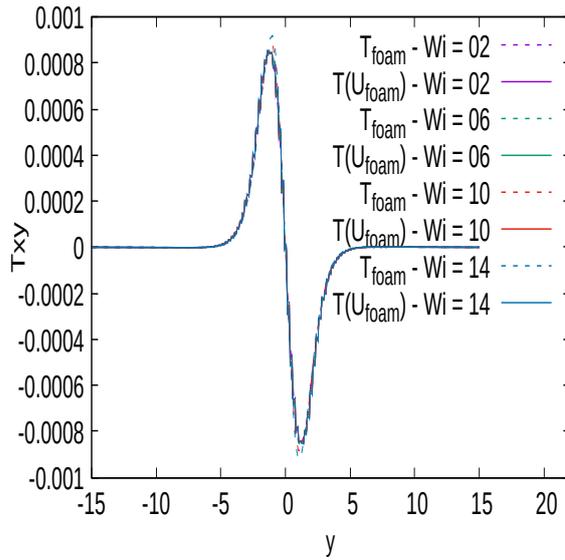
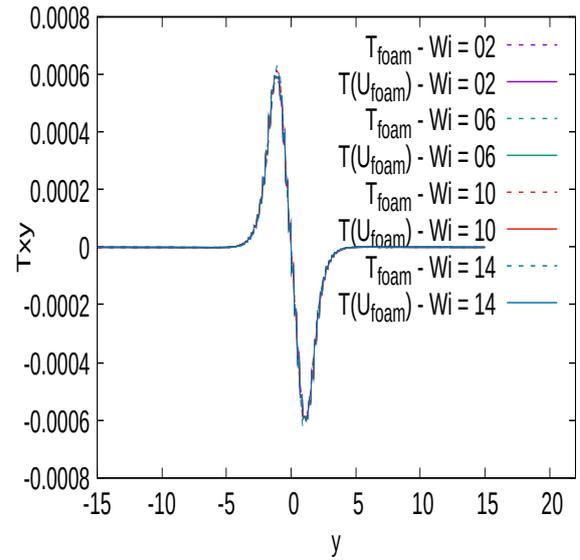
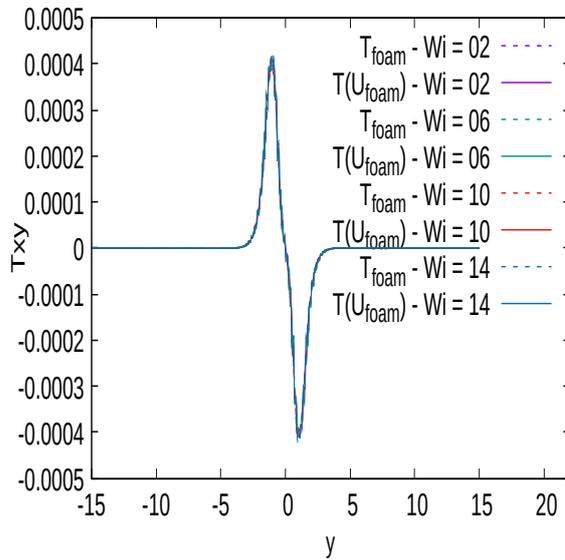
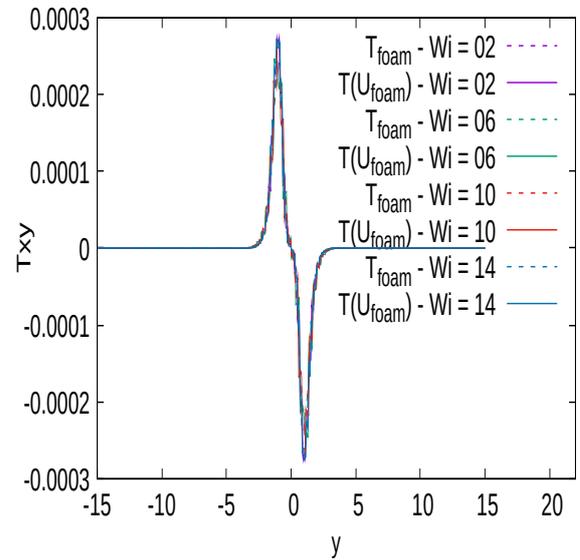
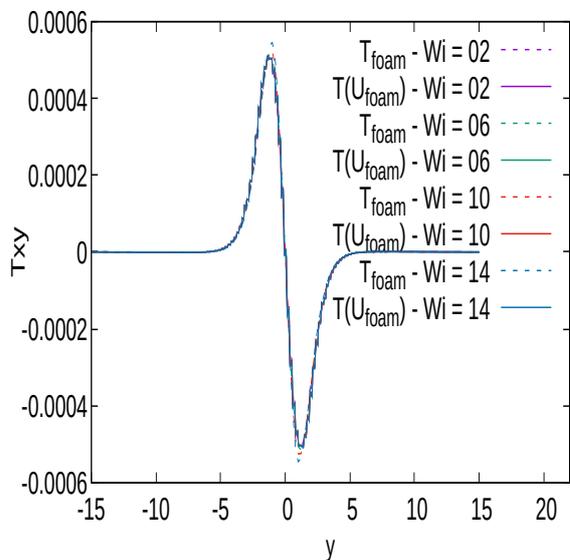
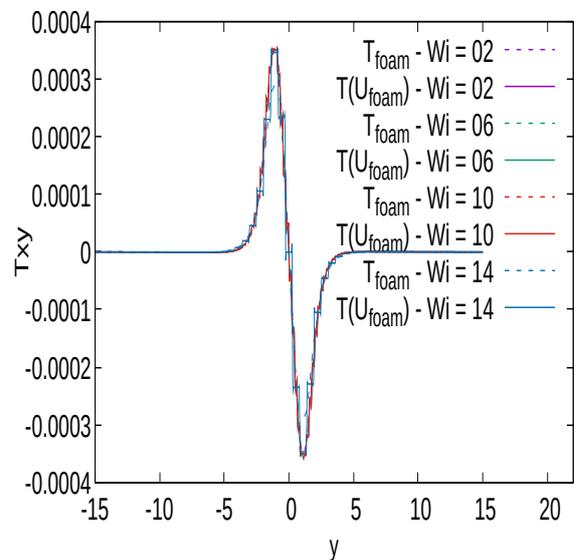
As Figuras 4.4 e 4.5 representam as comparações dos tensores T^{xx} utilizando T_{foam} e $T(U_{foam})$ para os valores de $\beta = 0.5$ (Figura 4.4(a), (b), (c) e (d)), $\beta = 0.7$ (Figura 4.4(e), (f) e Figura 4.5(a), (b)) e $\beta = 0.9$ (Figura 4.5(c), (d), (e) e (f)) considerando-se diferentes combinações de Wi e Re . Observa-se que há uma boa concordância entre os resultados dos tensores T^{xx} , em particular, para os menores valores do número de Weissenberg.

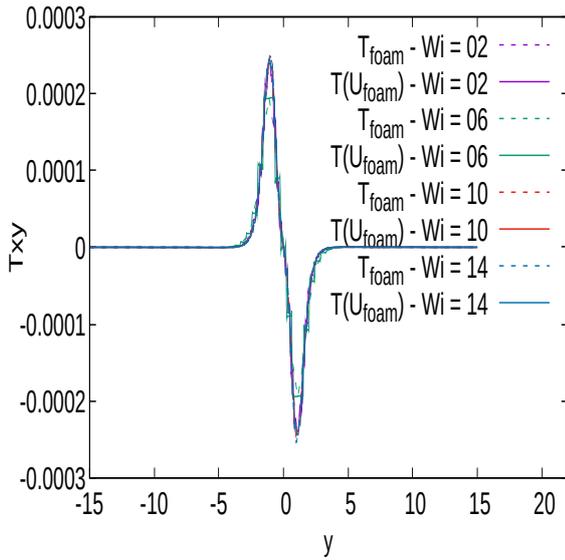
As Figuras 4.6 e 4.7 representam as comparações dos tensores T^{xy} utilizando T_{foam} e $T(U_{foam})$ para os valores de $\beta = 0.5$ (Figura 4.6(a), (b), (c) e (d)), $\beta = 0.7$ (Figura 4.6(e), (f) e Figura 4.7(a), (b)) e $\beta = 0.9$ (Figura 4.7(c), (d), (e) e (f)).

Diferentemente do tensor T^{xx} , apresentado nas Figuras 4.4 e 4.5, o tensor T^{xy} não varia com o aumento do número de Weissenberg, como é esperado observando as equações (2.58). E, ainda, os tensores T_{foam} e $T(U_{foam})$ apresentaram resultados semelhantes.

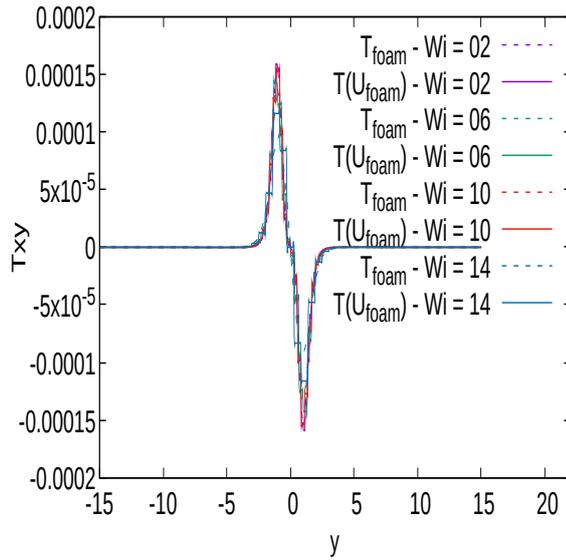
(a) $\beta = 0.5$ e $Re = 250$.(b) $\beta = 0.5$ e $Re = 500$.(c) $\beta = 0.5$ e $Re = 1000$.(d) $\beta = 0.5$ e $Re = 2000$.(e) $\beta = 0.7$ e $Re = 250$.(f) $\beta = 0.7$ e $Re = 500$.Figura 4.4: Comparação do tensor T_{foam}^{xx} e $T^{xx}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi .

(a) $\beta = 0.7$ e $Re = 1000$.(b) $\beta = 0.7$ e $Re = 2000$.(c) $\beta = 0.9$ e $Re = 250$.(d) $\beta = 0.9$ e $Re = 500$.(e) $\beta = 0.9$ e $Re = 1000$.(f) $\beta = 0.9$ e $Re = 2000$.Figura 4.5: Comparação do tensor T_{foam}^{xx} e $T^{xx}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi .

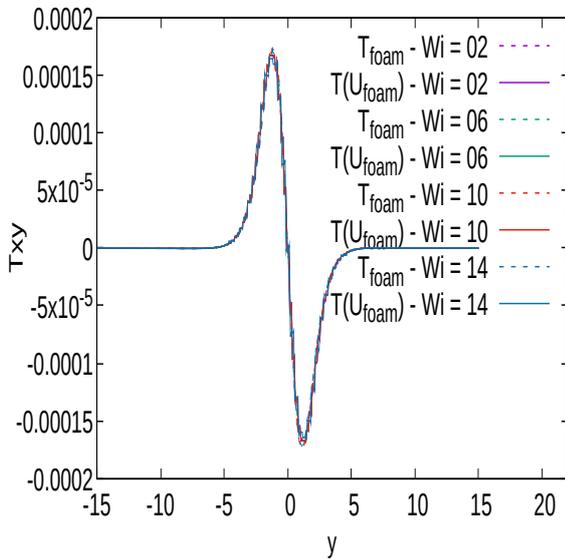
(a) $\beta = 0.5$ e $Re = 250$.(b) $\beta = 0.5$ e $Re = 500$.(c) $\beta = 0.5$ e $Re = 1000$.(d) $\beta = 0.5$ e $Re = 2000$.(e) $\beta = 0.7$ e $Re = 250$.(f) $\beta = 0.7$ e $Re = 500$.Figura 4.6: Comparação do tensor T_{foam}^{xy} e $T^{xy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi .



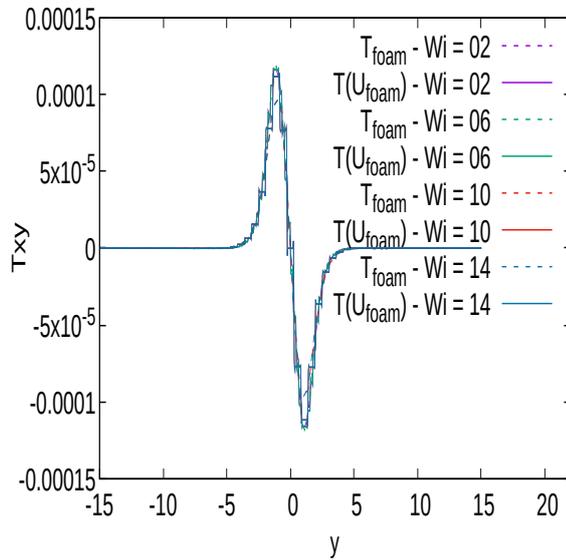
(a) $\beta = 0.7$ e $Re = 1000$.



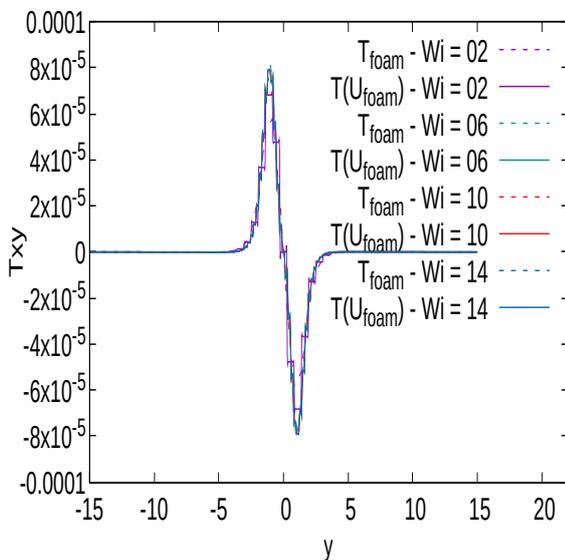
(b) $\beta = 0.7$ e $Re = 2000$.



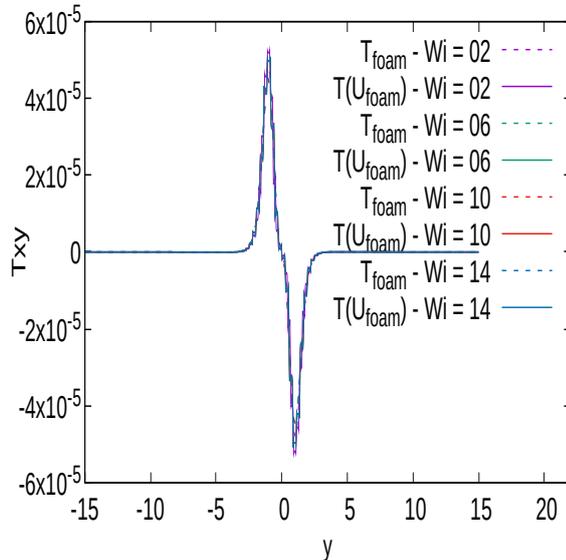
(c) $\beta = 0.9$ e $Re = 250$.



(d) $\beta = 0.9$ e $Re = 500$.



(e) $\beta = 0.9$ e $Re = 1000$.



(f) $\beta = 0.9$ e $Re = 2000$.

Figura 4.7: Comparação do tensor T_{foam}^{xy} e $T^{xy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi .

Finalmente, as Figuras 4.8 e 4.9 representam os tensores T^{yy} utilizando T_{foam} e $T(U_{foam})$ para os valores de $\beta = 0.5$ (Figura 4.8(a), (b), (c) e (d)), $\beta = 0.7$ (Figura 4.8(e), (f) e Figura 4.9(a), (b) e $\beta = 0.9$ (Figura 4.9(c), (d), (e) e (f)).

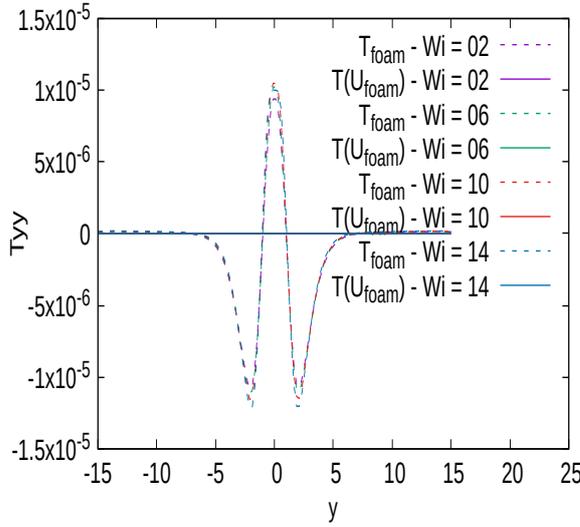
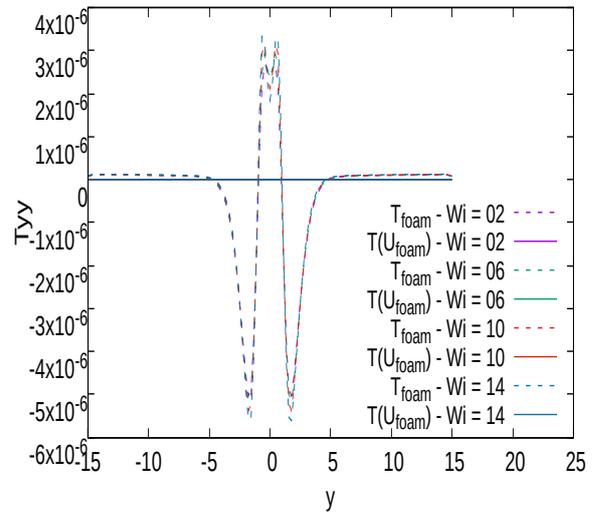
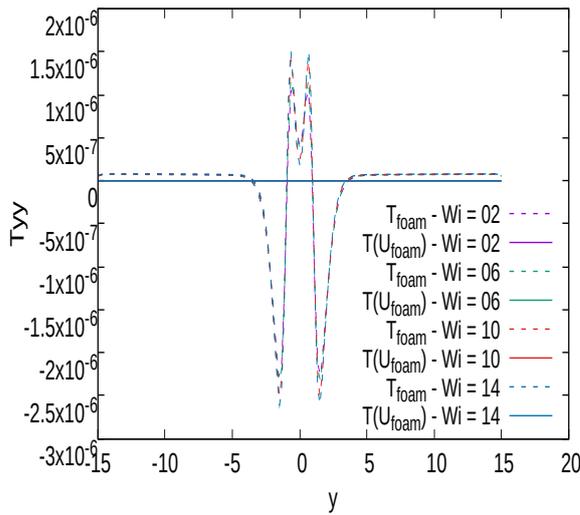
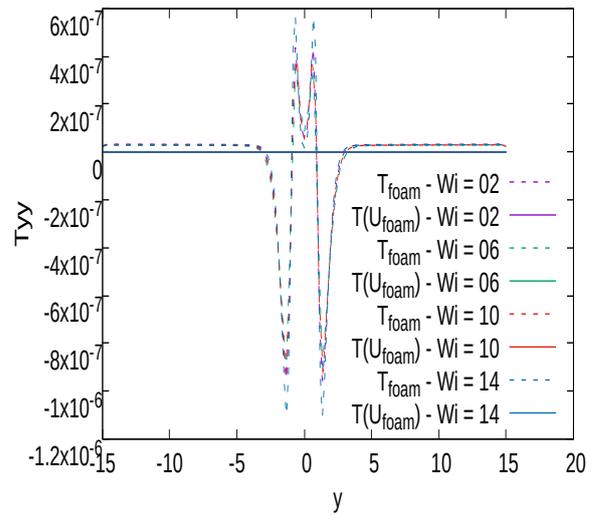
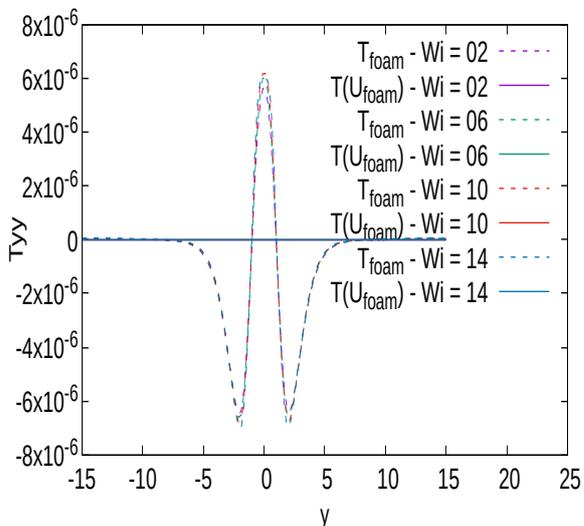
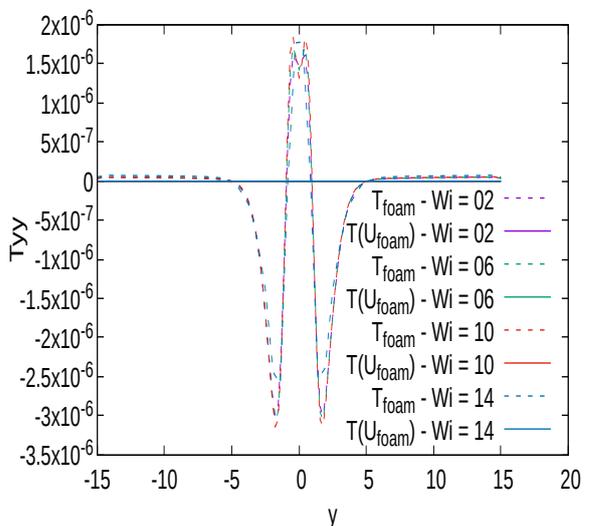
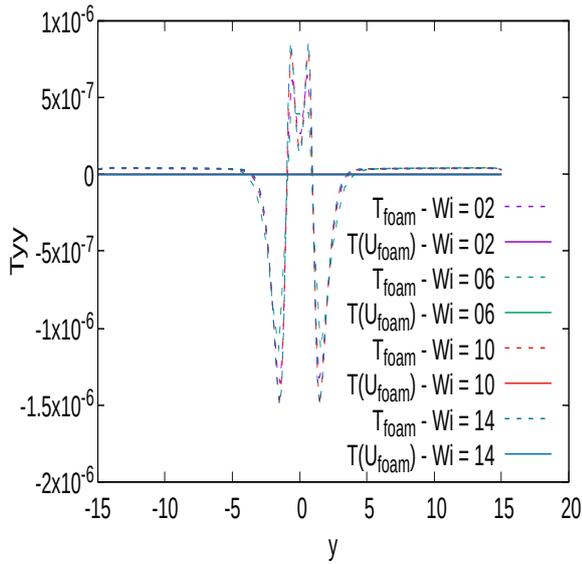
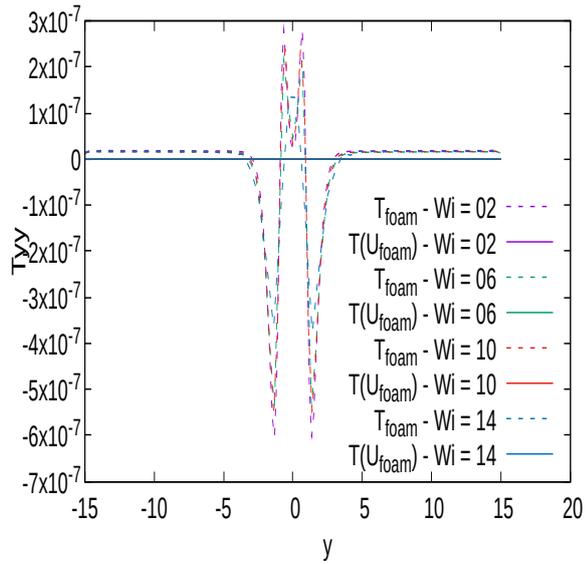
(a) $\beta = 0.5$ e $Re = 250$.(b) $\beta = 0.5$ e $Re = 500$.(c) $\beta = 0.5$ e $Re = 1000$.(d) $\beta = 0.5$ e $Re = 2000$.(e) $\beta = 0.7$ e $Re = 250$.(f) $\beta = 0.7$ e $Re = 500$.

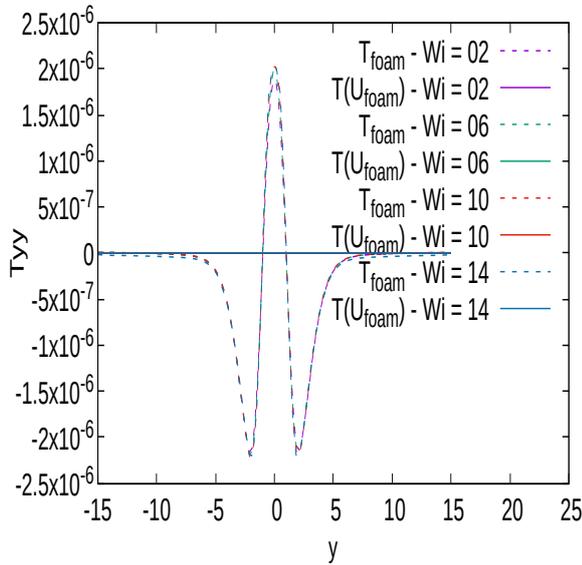
Figura 4.8: Comparação do tensor T_{foam}^{yy} e $T^{yy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi .



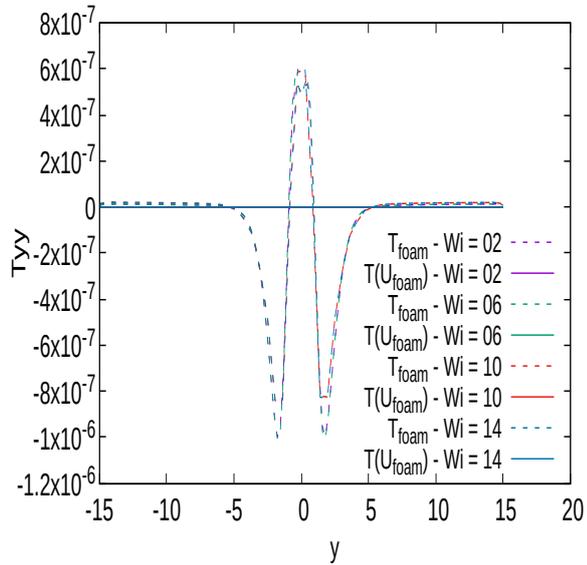
(a) $\beta = 0.7$ e $Re = 1000$.



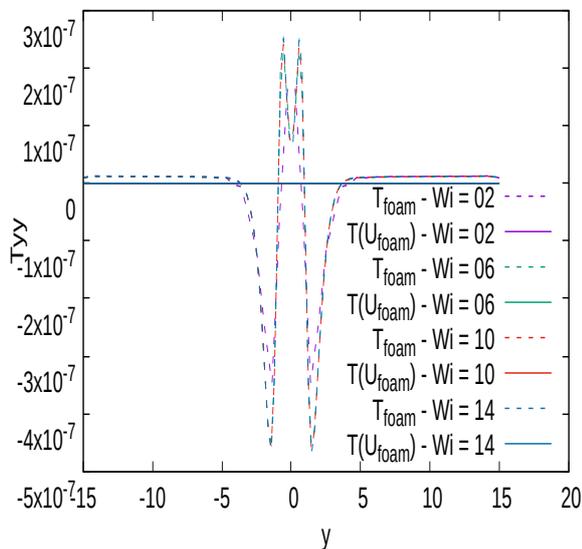
(b) $\beta = 0.7$ e $Re = 2000$.



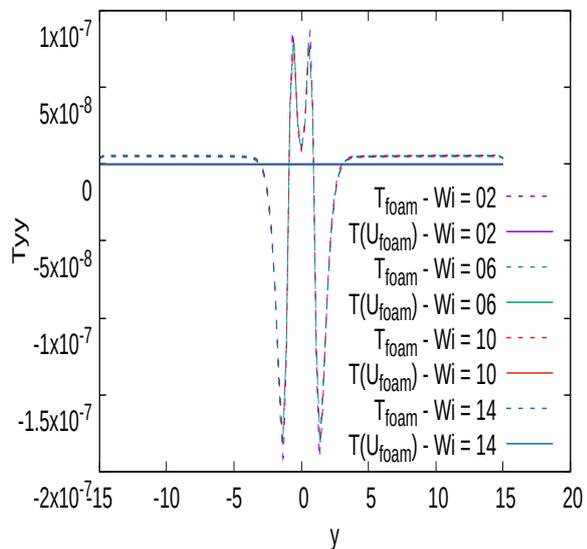
(c) $\beta = 0.9$ e $Re = 250$.



(d) $\beta = 0.9$ e $Re = 500$.



(e) $\beta = 0.9$ e $Re = 1000$.



(f) $\beta = 0.9$ e $Re = 2000$.

Figura 4.9: Comparação do tensor T_{foam}^{yy} e $T^{yy}(U_{foam})$ para diferentes valores de Wi .

Apesar dos tensores T_{foam}^{yy} e $T^{yy}(U_{foam})$ apresentarem um comportamento diferente, ressalta-se que a maior escala utilizada nos gráficos encontra-se na ordem de 10^{-5} . Observando as Figuras 4.4 – 4.9, é possível validar a hipótese de escoamento paralelo para o problema de jato plano laminar, podendo utilizar as equações (2.58) como os tensores do escoamento base.

Por fim, a Figura 4.10 apresenta a comparação entre as velocidades, sendo que U_{inlet} é a velocidade de entrada já mencionada, $U_{Newtoniano}$ é considerada como $U(y) = \text{sech}^2(y)$, pois corresponde à solução assintótica de similaridade, e U_{foam} são as velocidades para diferentes valores de Re obtidas da simulação numérica no OpenFOAM na posição $x = 2/3L$.

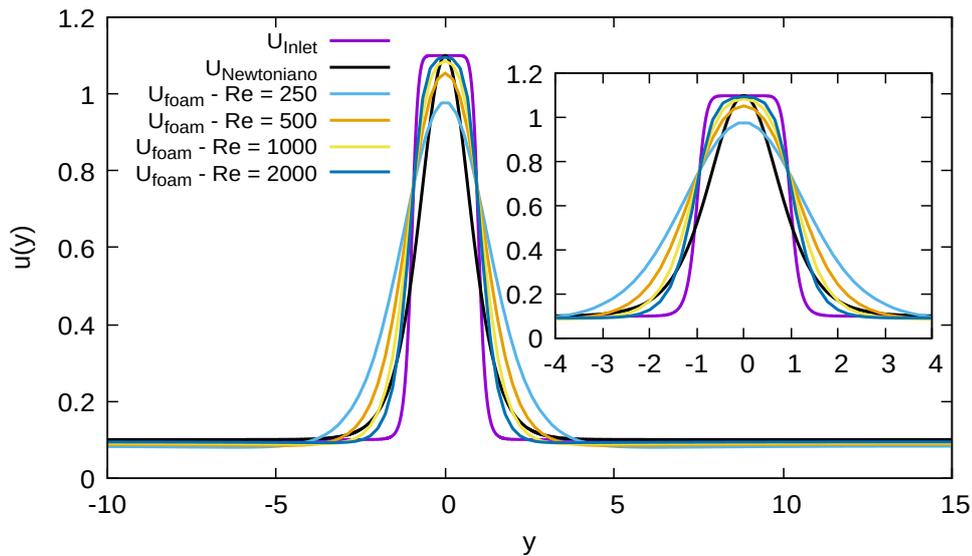


Figura 4.10: Comparação das velocidades $U(y)$ em diferentes casos.

Nota-se na Figura 4.10 que apesar de iniciar a simulação no OpenFOAM com a velocidade U_{inlet} , o retorno obtido para a velocidade é U_{foam} que assume a forma da velocidade $U_{Newtoniano}$. Além disso, à medida que diminui o número de Reynolds, a meia largura e a espessura da camada limite aumentam.

4.2 Verificação do Código de Análise de Estabilidade

Nesta seção é realizada a verificação do código de análise de estabilidade implementado para o problema de escoamento do jato plano, bidimensional, incompressível e isotérmico, utilizando o modelo de fluido viscoelástico Oldroyd-B. Inicialmente, comparou-se as taxas de amplificação obtidas através da equação de Rayleigh com os códigos Newtoniano e não-Newtoniano implementados. Em seguida, a verificação realizada compara os resultados obtidos pelo código desenvolvido com dois resultados da literatura, Zhang (2012) [73] e Kaplan (1964) [28]. Dessa forma, foram consideradas as curvas neutras presentes nesses dois trabalhos para o escoamento de jato de fluido Newtoniano, onde o perfil de velocidade utilizado foi $U(y) = \text{sech}^2(y)$ nas duas referências.

A Figura 4.3 ilustra o escoamento do jato e algumas considerações em seu domínio que também são utilizadas para a implementação desse código. Além disso, é necessário utilizar um adensamento de malha nas regiões cisalhantes [49], isto é, utiliza-se uma malha adensada nas interfaces do jato.

A Figura 4.11 apresenta uma verificação do código, comparando as taxas de amplificação de resultados não-Newtonianos, utilizando o modelo Oldroyd-B, com os resultados

Newtoniano e Rayleigh. Para isso, os parâmetros adimensionais $Re = 8400$, $\beta = 1$ e $Wi = 0$ foram considerados para os modos de estabilidade sinuoso e varicoso.

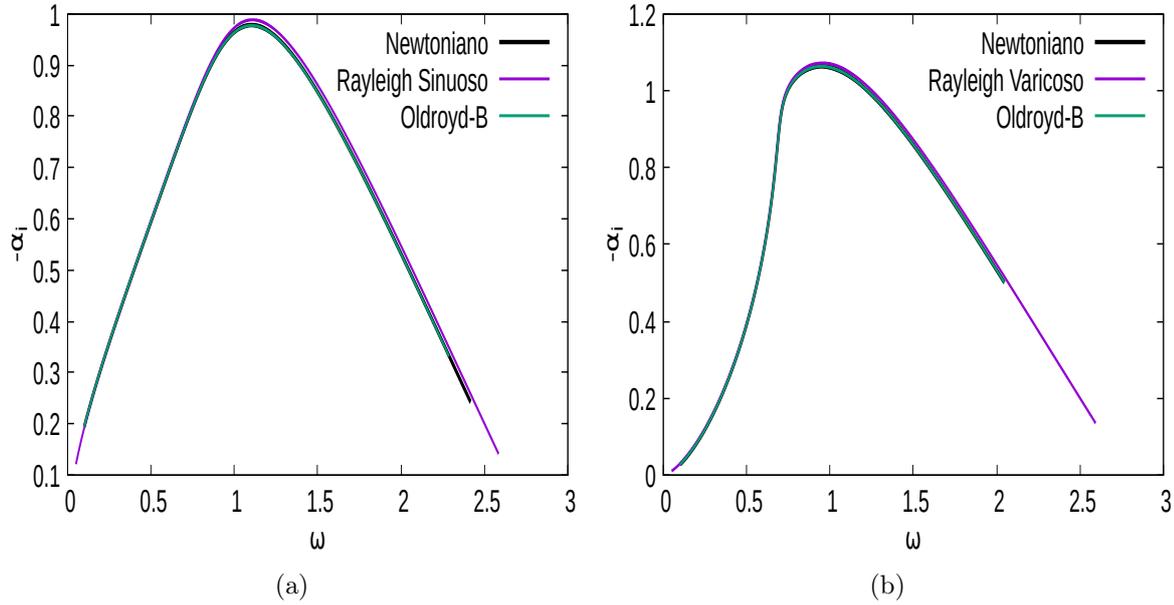


Figura 4.11: Variação das taxas de amplificação com a frequência angular para modos (a) sinuoso e (b) varicoso, considerando $Re = 8400$.

Em $Re = 8400$, os efeitos viscosos para o jato já não são relevantes, mostrando que a estabilidade é invíscida, devido a pontos de inflexão na distribuição da velocidade. Os resultados da implementação do código não-Newtoniano atual estão de acordo com os resultados da instabilidade para os casos Newtoniano e Rayleigh.

A próxima comparação é ilustrada na Figura 4.12 que apresenta as curvas neutras de estabilidade do resultado do presente trabalho e o resultado obtido por Zhang (2012) [73] para o escoamento de jato de fluido Newtoniano. Especificamente, foram considerados o domínio $y \in (-10, 10)$ e uma análise temporal da estabilidade.

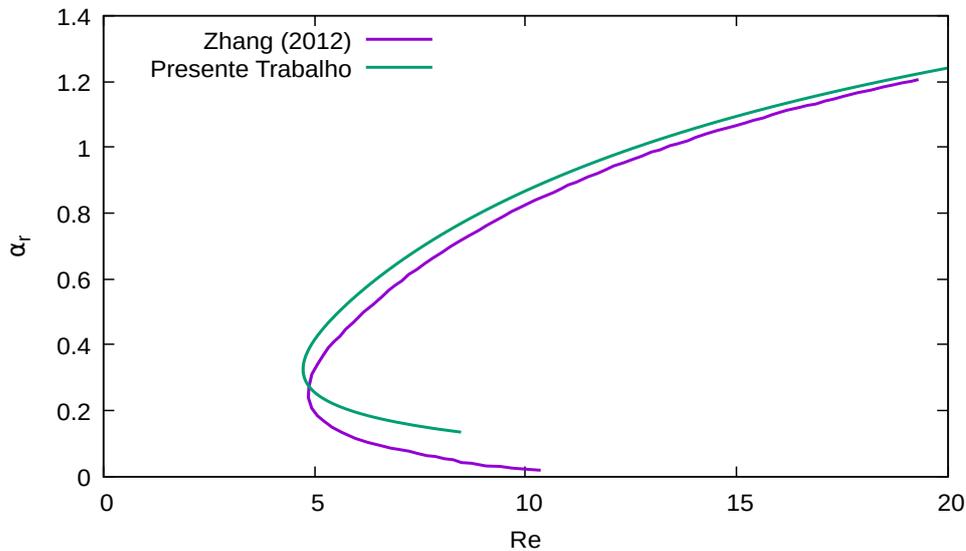


Figura 4.12: Comparação da curva neutra de estabilidade do presente trabalho e de Zhang (2012) [73].

Apesar de demonstrar resultados não tão próximos, o comportamento das curvas neutras de estabilidade, apresentadas na Figura 4.12, são semelhantes. Além disso, os valores de Reynolds crítico ficaram próximos: $Re_c \approx 4.7$ no presente trabalho e $Re_c \approx 4.8$ no trabalho de Zhang (2012).

A Figura 4.13 apresenta as curvas neutras de estabilidade comparando os resultados do presente trabalho com resultados obtidos por Kaplan (1964) [28] para o escoamento de jato de fluido Newtoniano. Como não havia informação sobre o domínio utilizado em y em seu trabalho, foi necessário realizar testes numéricos para diferentes η_{max} , que indica o comprimento de y_{max} até o centro, isto é, se $\eta_{max} = 10$, então $y \in (-10, 10)$.

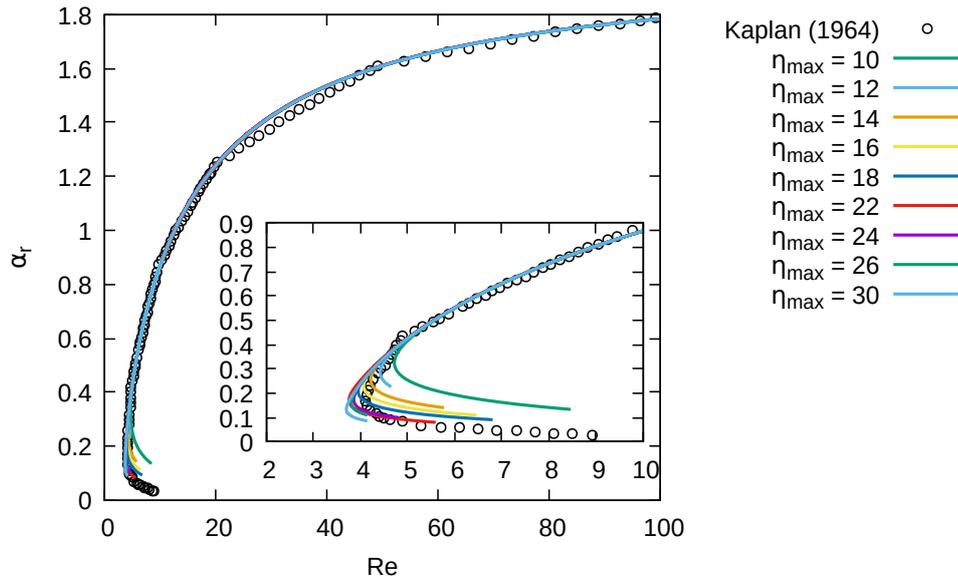


Figura 4.13: Comparação da curva neutra de estabilidade do presente trabalho e de Kaplan (1964) [28].

É possível observar na Figura 4.13 que conforme aumenta o valor de η_{max} , diminui o valor de Reynolds crítico. Além disso, considerando os maiores valores do número de Reynolds, as curvas neutras de estabilidade estão semelhantes com a apresentada por Kaplan (1964) [28]. Por fim, destaca-se a boa concordância entre os resultados para determinados valores de η_{max} .

A partir da comparação entre as taxas de amplificação e das curvas neutras de estabilidade apresentadas nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13 observa-se que os resultados encontrados estão de acordo com os resultados da literatura. Sendo assim, a verificação realizada é um indicativo de que o código implementado é capaz de simular e analisar a estabilidade de escoamentos de jato bidimensional, encorajando a resolver para o modelo viscoelástico, utilizando Oldroyd-B, com diferentes parâmetros adimensionais do modelo.

4.3 Análise de Estabilidade utilizando LST

Esta seção trata da estabilidade espacial do escoamento de jato plano viscoelástico através do código LST e, para isso, as equações do escoamento base (2.57) e (2.58) estão relacionadas à equação de Orr-Sommerfeld, que se torna um problema de autovalor, com α complexo e ω real. A estabilidade é investigada através da análise da taxa de amplificação, número de onda, velocidade de fase e curvas neutras para diferentes parâmetros adimensionais não-Newtonianos para o fluido Oldroyd-B e comparando com os resultados do escoamento de jato Newtoniano.

4.3.1 Análise das Taxas de Amplificação, Números de Onda e Velocidades de Fase

Esta subseção investiga os parâmetros α_i e α_r na análise da estabilidade espacial do escoamento de jato plano viscoelástico utilizando a Teoria de Estabilidade Linear. A parte real do autovalor α_r denota o número de onda na direção longitudinal x , enquanto a parte imaginária negativa $-\alpha_i$ indica a taxa de crescimento (ou amplificação) espacial e, por fim, a razão ω/α_r é a velocidade de fase. Tratando-se da análise de estabilidade espacial, onde $\omega \in \mathbb{R}$ é a frequência angular e considera $\omega_r > 0$ para essa discussão.

Algumas informações sobre essa análise da estabilidade devem ser evidenciadas: a velocidade utilizada para o escoamento base é dada pela equação (2.57) para $R = 1$, $\theta = 0.1$, $U_{coflow} = 0$ como apresentada na Figura 4.14 e os tensores não-Newtonianos utilizados são dados pela equação (2.58). Além disso, foi considerado o valor de $\eta_{max} = 4$, uma vez que, para o perfil de velocidade utilizado, o decaimento exponencial já está afastado do centro do jato, tornando $\frac{dU}{dy}$ praticamente nula e $U = U_{coflow}$, onde U_{coflow} não varia mais com y .

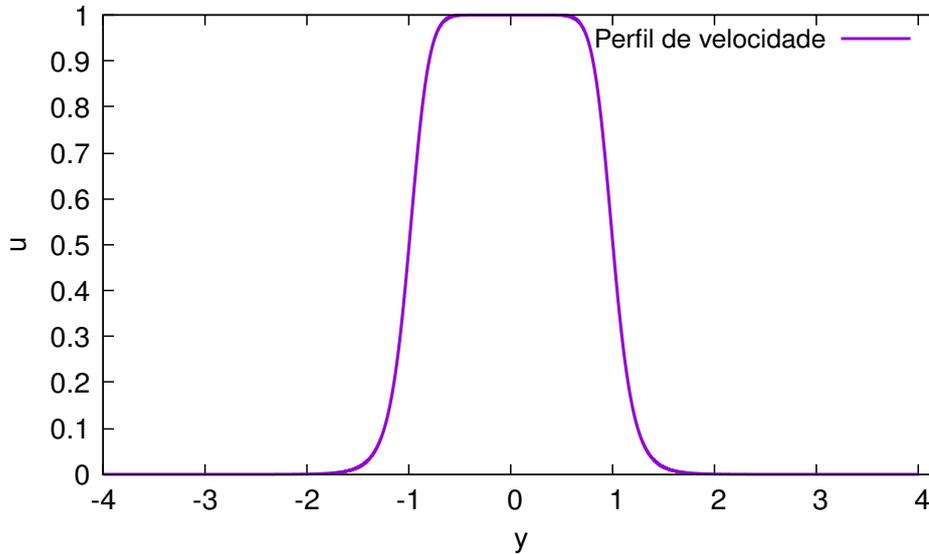


Figura 4.14: Perfil de velocidade u utilizado no escoamento base.

Inicia-se o estudo verificando a variação da taxa de amplificação $-\alpha_i$ com a frequência angular ω_r para os modos sinuoso (Figura 4.15) e varicoso (Figura 4.16), utilizando o fluido Newtoniano e, ainda, diferentes números de Weissenberg para o fluido não-Newtoniano. A Figura 4.15 mostra as taxas de crescimento no modo sinuoso para os parâmetros adimensionais $Re = 250$, $\beta = 0.5, 0.7$ e 0.9 e $Wi = 2, 6, 10, 14$ e 20 e também para o fluido Newtoniano (considerando $\beta = 1$ e $Wi = 0$).

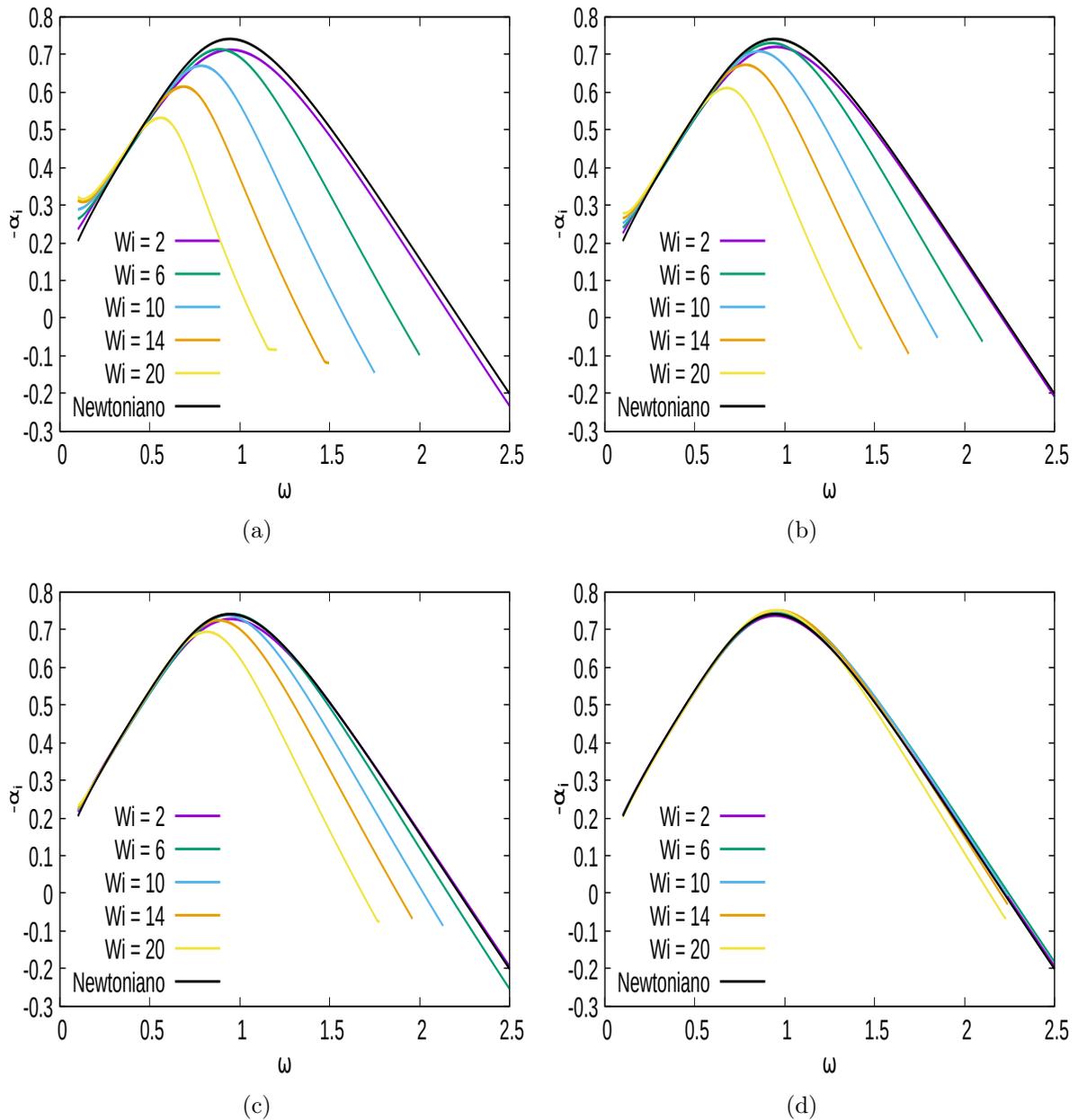


Figura 4.15: Taxa de amplificação *versus* frequência angular para o modo sinuoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$.

A Figura 4.16 mostra as taxas de amplificação para o modo varicoso utilizando os mesmos parâmetros adimensionais que os utilizados no modo sinuoso. A taxa de amplificação mais alta do modo varicoso é cerca de 10% superior à do modo sinuoso, mas suas características de estabilidade são muito semelhantes, com a mesma faixa de frequências instáveis.

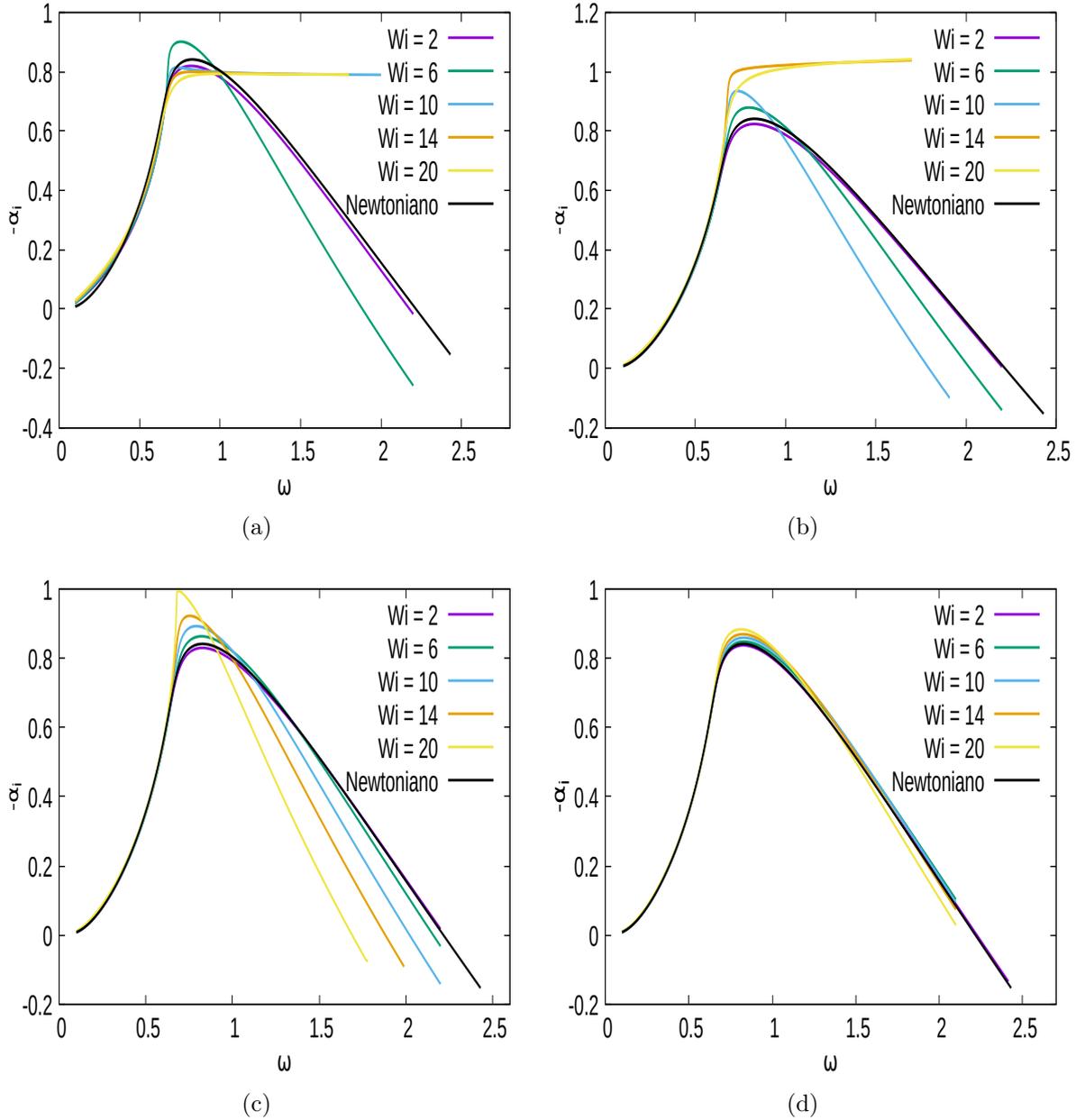


Figura 4.16: Taxa de amplificação *versus* frequência angular para o modo varicoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$.

Para o modo varicoso, em $\beta = 0.3$, $Wi = 10, 14$ e 20 e $\beta = 0.5$, $Wi = 14$ e 20 os resultados não são consistentes e podem ser espúrios. Observa-se que os efeitos não-Newtonianos são mais fortes para o modo sinuoso, onde a taxa máxima de crescimento e a faixa de frequências instáveis diminuem com o aumento de Weissenberg e com a diminuição de β , no entanto, o modo varicoso mostrou-se mais instável do que o escoamento Newtoniano próximo às taxas de máxima amplificação.

A fim de analisar o comportamento de diferentes valores de Reynolds, o parâmetro de viscosidade do solvente foi fixado em $\beta = 0.9$. As variações da taxa de amplificação $-\alpha_i$ com a frequência angular ω_r são apresentadas nas Figuras 4.17 e 4.18 para os modos sinuoso e varicoso para diferentes números de Reynolds e Weissenberg.

Nas Figuras 4.17 e 4.18, ao diminuir o número de Reynolds, a faixa de frequências instáveis diminui monotonicamente. Nota-se, também, que para altos números de Reynolds, a taxa de amplificação $-\alpha_i$ não sofre alteração com as variações no número de Weissenberg. Em geral, para baixas frequências ω_r , o gráfico do modo varicoso é de forma côncava, enquanto do sinuoso é convexo e isso significa que a taxa de crescimento espacial do modo sinuoso excede as taxas do modo varicoso [67].

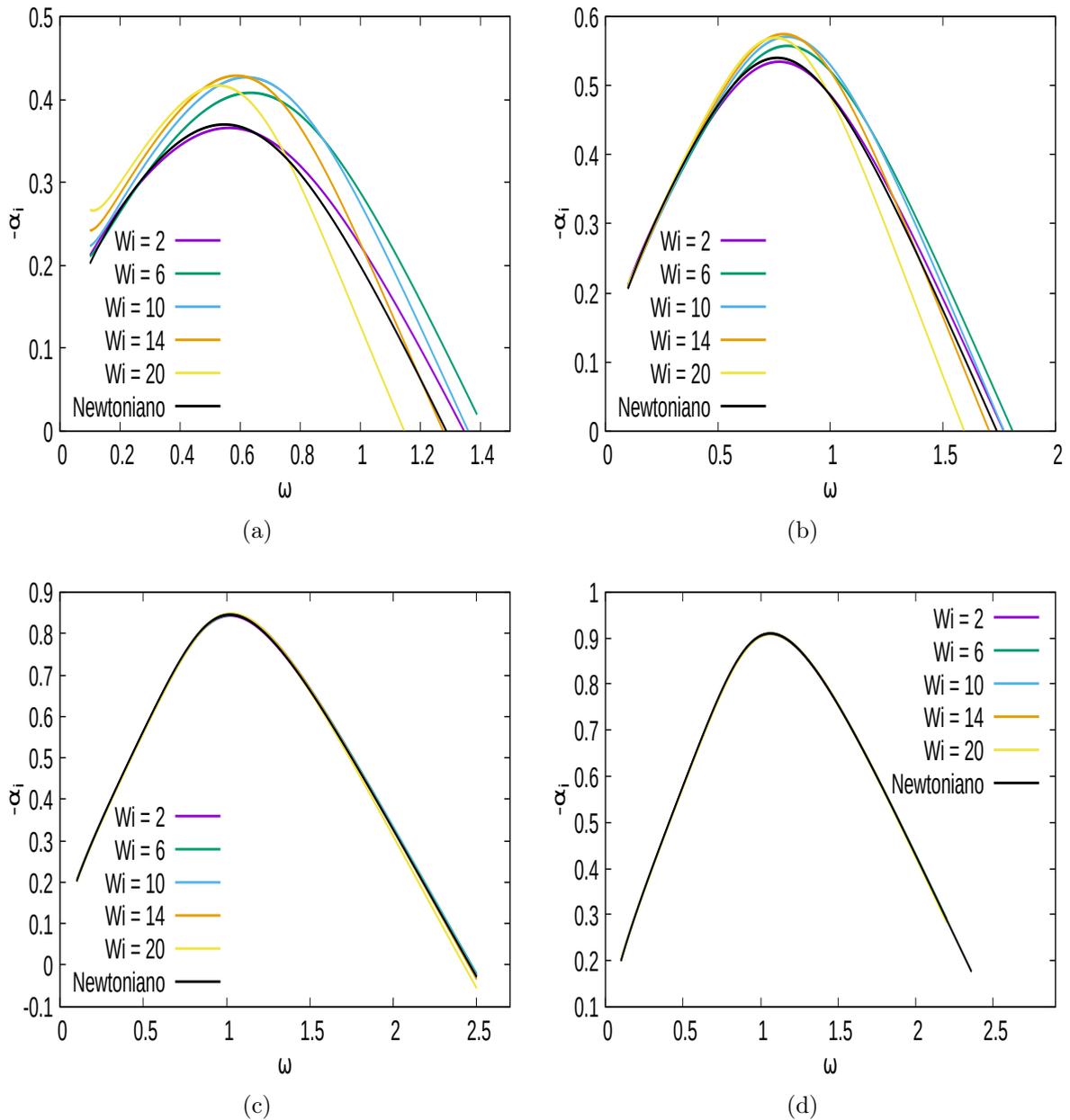


Figura 4.17: Taxa de amplificação *versus* frequência angular para o modo sinuoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$.

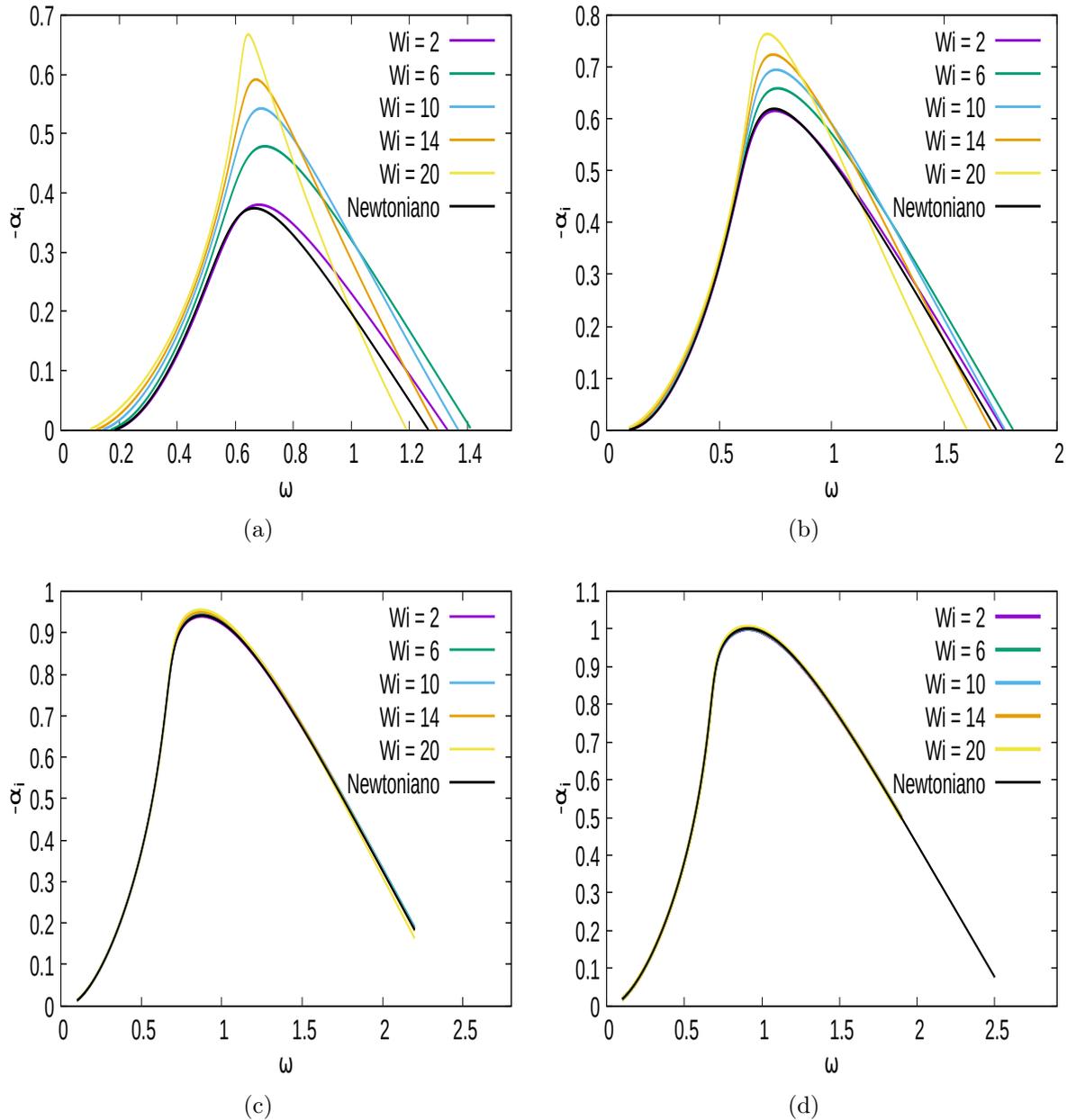


Figura 4.18: Taxa de amplificação *versus* frequência angular para o modo varicoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$.

Observa-se nas Figuras 4.17 e 4.18 que para $Re < 100$ a contribuição não-Newtoniana tem um notável efeito desestabilizador. À medida que aumenta o número de Weissenberg as taxas de máxima amplificação elevam-se, comparadas com a taxa Newtoniana, tornando o escoamento mais instável. Nota-se, também, que o modo varicoso é mais desestabilizado, em $Re = 50$ e $Wi = 20$ a taxa de amplificação máxima é quase o dobro da taxa Newtoniana.

Para melhor entendimento dos modos de instabilidade, a Figura 4.19 apresenta a variação da taxa de amplificação em relação a frequência angular comparando os dois modos de instabilidade: sinuoso e varicoso para $Re = 50$ e 250 , $Wi = 10$ e 20 e, também, apresenta-se o caso Newtoniano. É possível observar na Figura 4.19 que as taxas de amplificação máxima são maiores para o modo varicoso mesmo que os dois modos apresentam a mesma faixa de frequência instável.

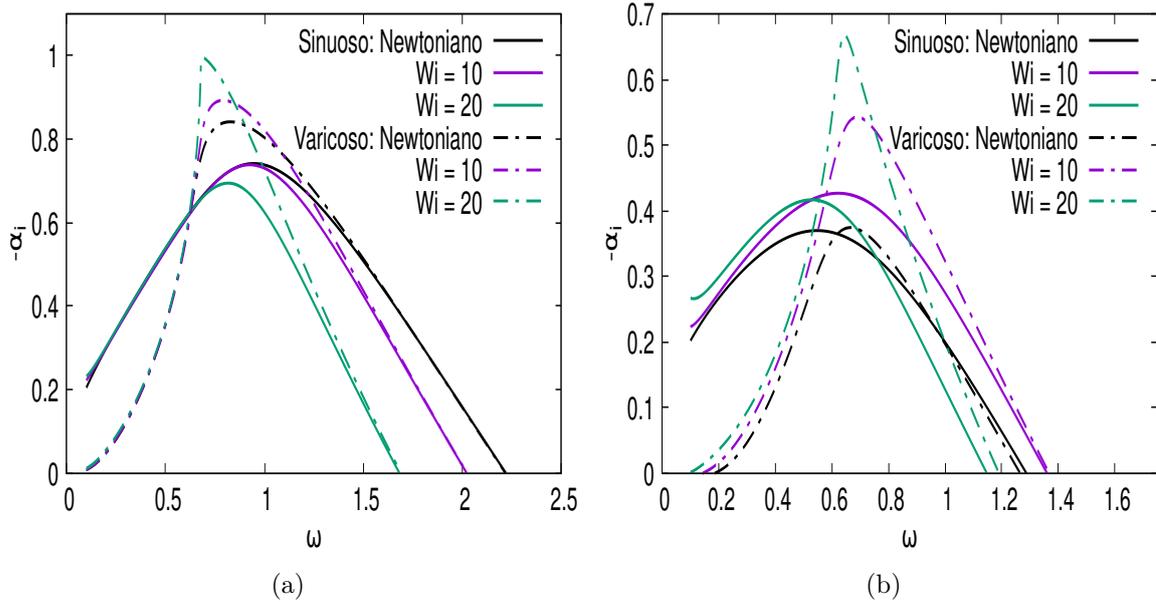


Figura 4.19: Variação da taxa de amplificação *versus* frequência angular para os modos sinuoso e varicoso para (a) $\beta = 0.7$ e $Re = 250$ e (b) $\beta = 0.9$ e $Re = 50$.

Em seguida, verifica-se a variação da taxa de amplificação máxima com a variação dos parâmetros não-Newtonianos para diferentes valores do número de Reynolds, com o objetivo de investigar em quais números de Reynolds o efeito não-Newtoniano está mais presente. As Figuras 4.20 e 4.21 ilustram a variação da taxa de amplificação $-\alpha_i$ para diferentes números de Reynolds, obtida fixando a frequência angular $\omega_{r_{max}}$ no valor correspondente a taxa de amplificação mais alta do jato em $Re = 4000$. Os parâmetros adimensionais utilizados nessa análise são $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ e 0.9 e $Wi = 2, 6, 10, 14$ e 20 . Além disso, as Figuras 4.20 e 4.21 referem-se ao modo de instabilidade sinuoso e varicoso, respectivamente.

Conforme é apresentado nas Figuras 4.20 e 4.21, à medida que o número de Reynolds aumenta, os resultados se tornam independentes do número de Weissenberg e do parâmetro de viscosidade do solvente β . O efeito dos parâmetros não-Newtonianos se torna mais relevante nos números de Reynolds abaixo de 500, onde baixos números de Weissenberg e de β apresentam mais instabilidades e, ainda, para os valores de Weissenberg mais altos a taxa de amplificação é inferior à taxa para os números de Weissenberg mais baixos, sendo o caso Newtoniano o mais instável. Observa-se, também, que o modo sinuoso é mais sensível a Wi e β devido a diferença nos valores da taxa de amplificação.

Morris (1976) [42] e Michalke (1984) [40] investigaram a estabilidade espacial do escoamento de jato paralelo axissimétrico e encontraram uma influência amortecedora da viscosidade em relação à taxa de amplificação. Nesse trabalho concluíram que acima de um certo número de Reynolds, $Re = 1000$, a influência da viscosidade na taxa de amplificação $-\alpha_i$ é pequena, este comportamento também é observado para o caso não-Newtoniano como pode ser visto nas Figuras 4.20 e 4.21.

As Tabelas 4.2 e 4.3 mostram os valores de $\omega_{r_{max}}$ utilizados para construir os gráficos de variação da taxa de amplificação em relação ao número de Reynolds nos modos sinuoso e varicoso.

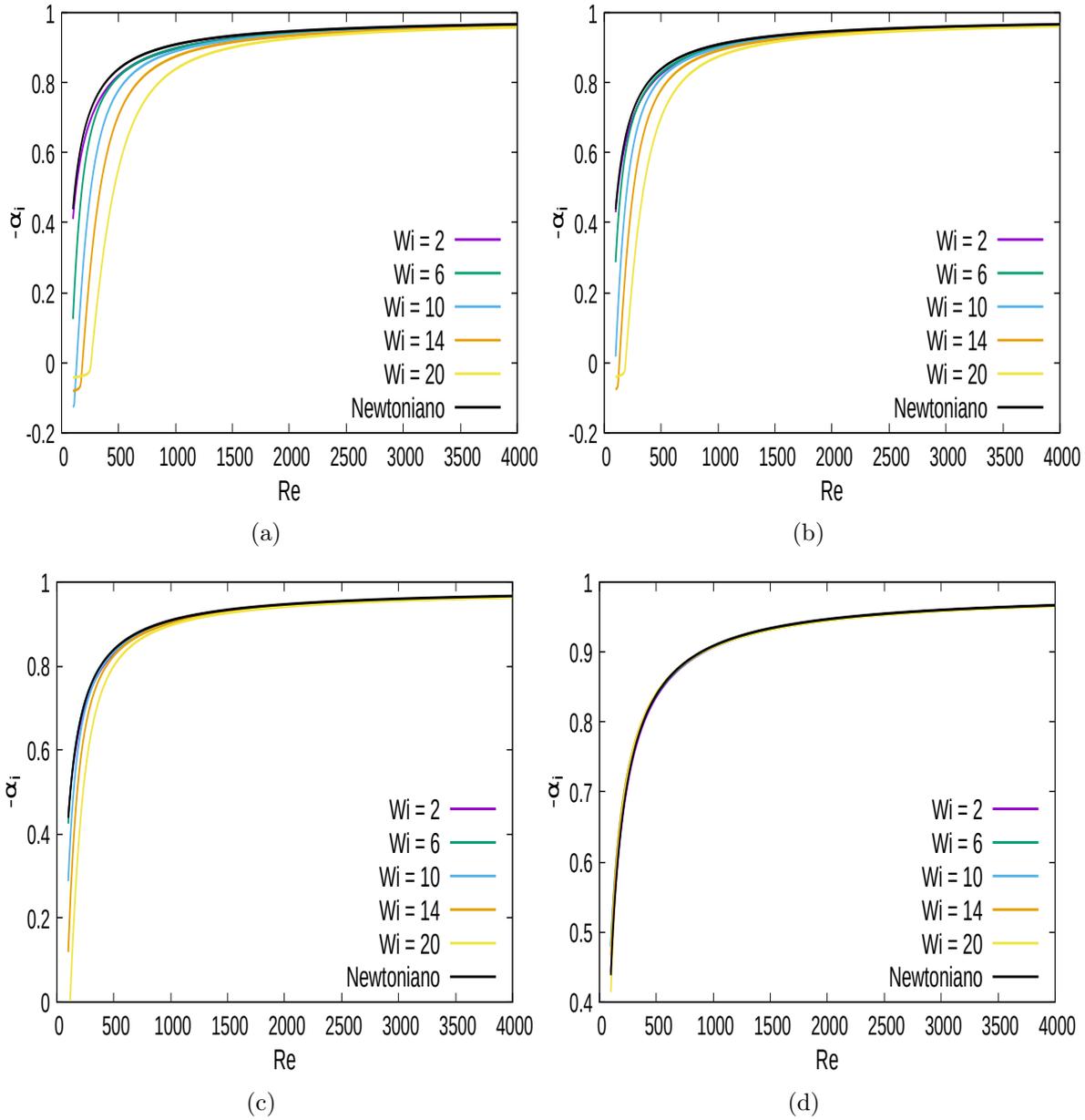


Figura 4.20: Variação da taxa de amplificação em relação ao número de Reynolds para o modo sinuoso para (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$.

Tabela 4.2: Valores da frequência angular $\omega_{r_{max}}$ no modo sinuoso para $Re = 4000$.

Wi	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.9$
2	1.0965	1.0966	1.0966	1.0970
6	1.0977	1.0974	1.0974	1.0970
10	1.0969	1.0974	1.0974	1.0974
14	1.0950	1.0966	1.0974	1.0974
20	1.0900	1.0944	1.0970	1.0974

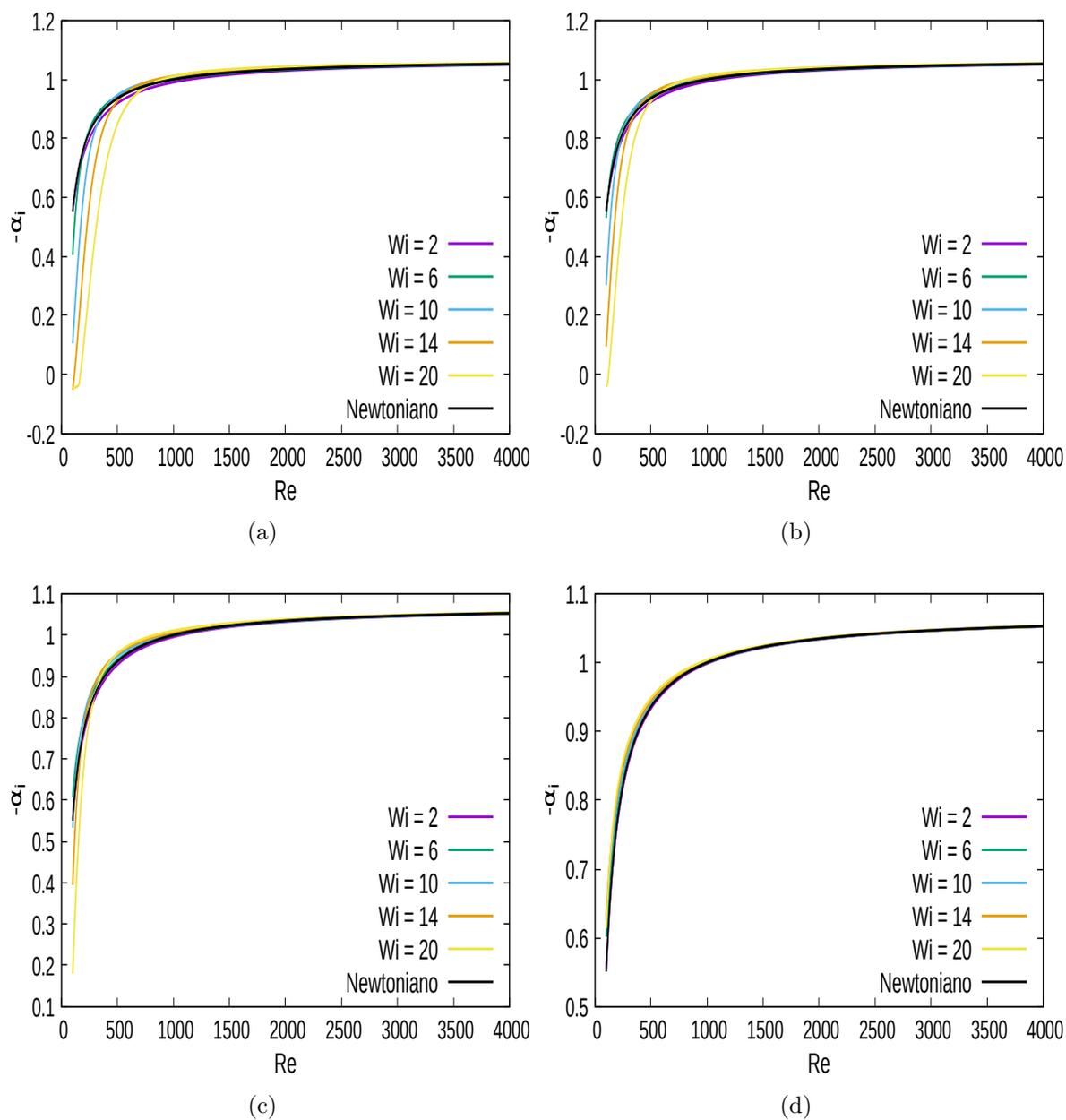


Figura 4.21: Variação da taxa de amplificação em relação ao número de Reynolds para o modo varicoso para (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$.

Tabela 4.3: Valores da frequência angular $\omega_{r_{max}}$ no modo varicoso para $Re = 4000$.

Wi	$\beta = 0.3$	$\beta = 0.5$	$\beta = 0.7$	$\beta = 0.9$
2	0.9411	0.9415	0.9422	0.9426
6	0.9396	0.9403	0.9415	0.9422
10	0.9365	0.9384	0.9403	0.9419
14	0.9323	0.9361	0.9396	0.9419
20	0.9251	0.9319	0.9373	0.9411

É possível observar nas Tabelas 4.2 e 4.3 que o valor de $\omega_{r_{max}}$ para o modo sinuoso é maior em todos os casos analisados, comparados aos valores obtidos no modo varicoso. E, além disso, ao analisar os modos de instabilidade separadamente, nota-se que não há um crescimento ou um decréscimo significativo variando a constante β ou o número de Weissenberg.

A variação do número de onda α_r com frequência angular é apresentada nas Figuras 4.22 e 4.23 para os modos sinuoso e varicoso, para diferentes números de Weissenberg, $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ e 0.9 e $Re = 250$.

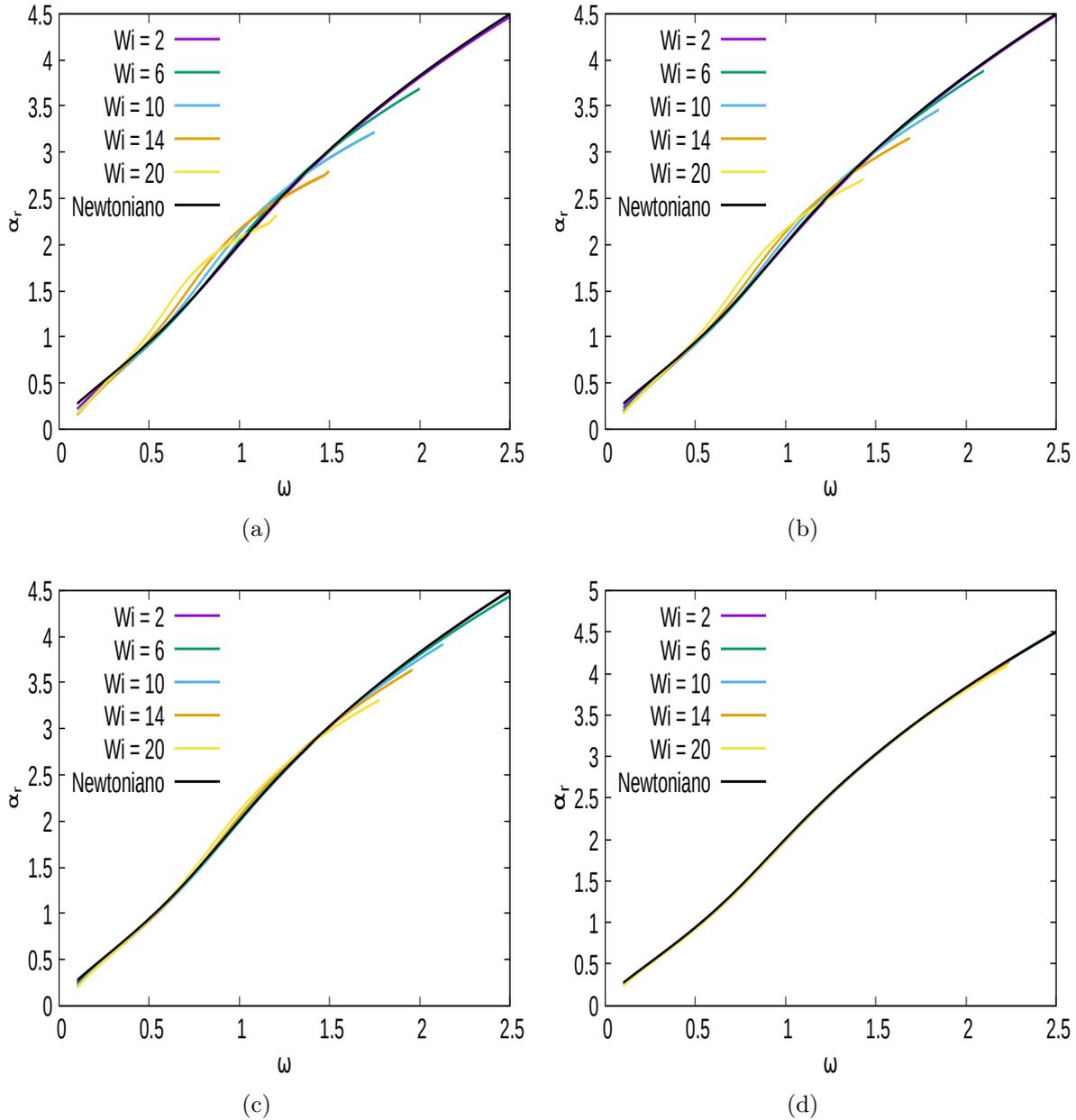


Figura 4.22: Número de onda *versus* frequência angular para o modo sinuoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$.

Vale ressaltar que para $\beta = 0.3$ e 0.5 , o modo varicoso apresentou resultados inconsistentes para alguns números de Weissenberg, que são investigados para verificar se esses são modos espúrios ou resultados relacionados à instabilidade elástica. Além disso, como pode se observar na Figura 4.23, o número de onda desses modos tem um comportamento distinto, mas esse resultado precisa ser melhor investigado.

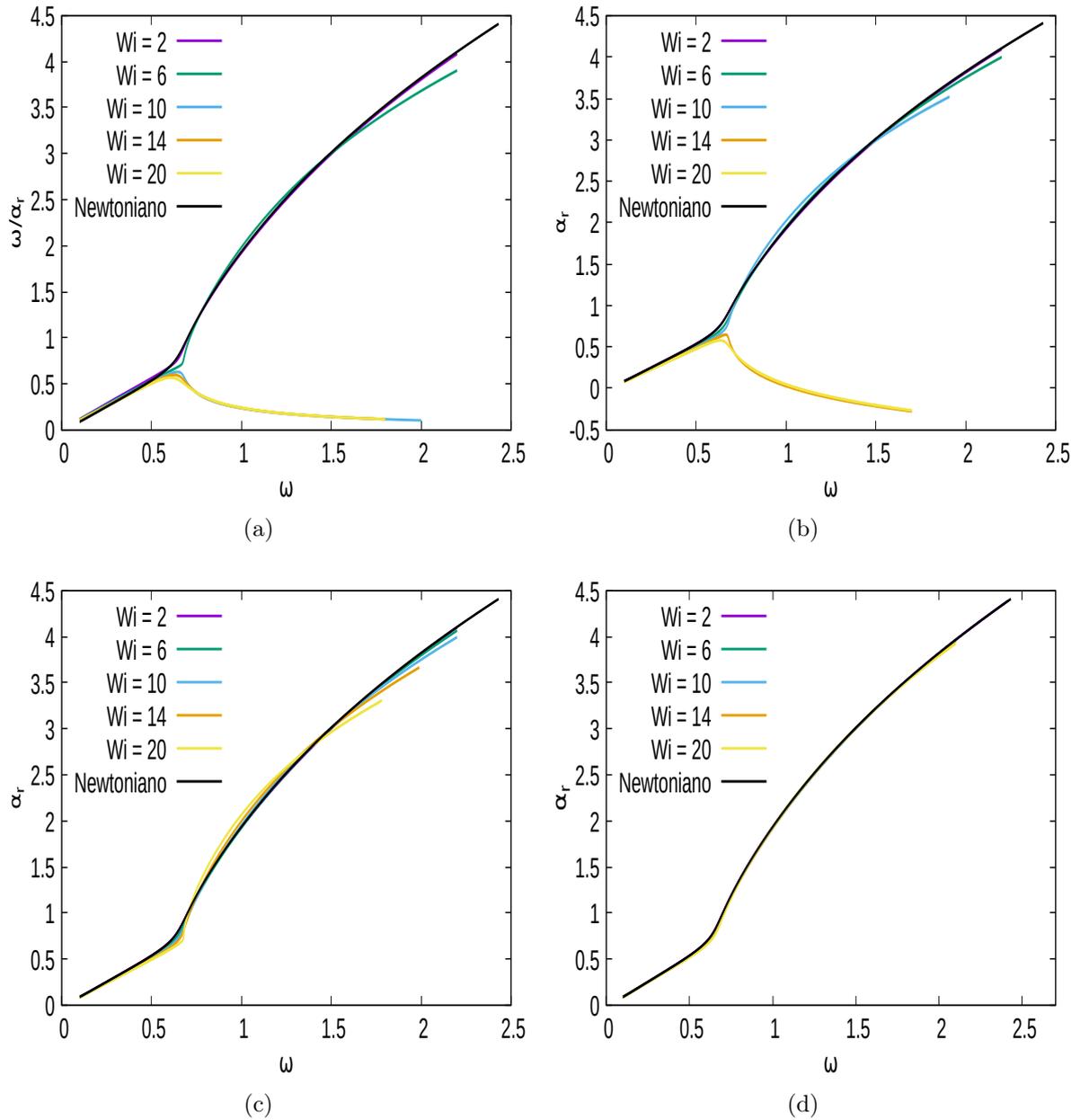


Figura 4.23: Número de onda *versus* frequência angular para o modo varicoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$.

Mais uma vez, analisa-se o comportamento das variações do número de onda α_r com a frequência angular ω_r para diferentes valores de Reynolds. As Figuras 4.24 e 4.25 apresentam esses resultados para $Re = 50, 100, 500$ e 1000 , o coeficiente de viscosidade do solvente fixado em $\beta = 0.9$ e variando o número de Weissenberg para os modos sinuoso e varicoso.

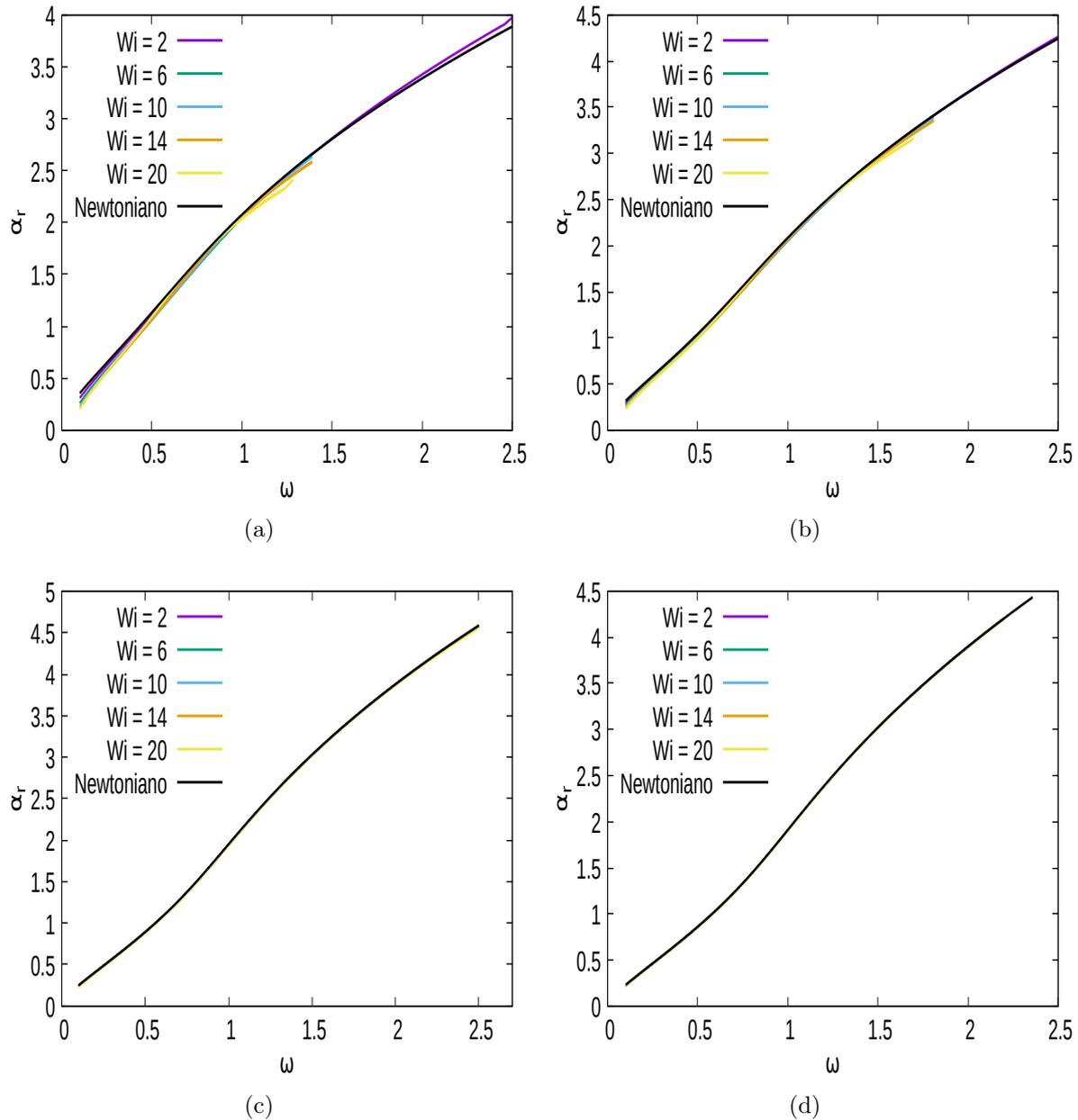


Figura 4.24: Número de onda *versus* frequência angular para o modo sinuoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$.

Os gráficos para o número de onda α_r descrevem uma linha ligeiramente curva e são semelhantes para o modo sinuoso e varicoso, pelo menos para altos números de Reynolds. Em geral, o efeito do número de Weissenberg sobre o número de onda é pequeno para valores de Reynolds maiores que 50.

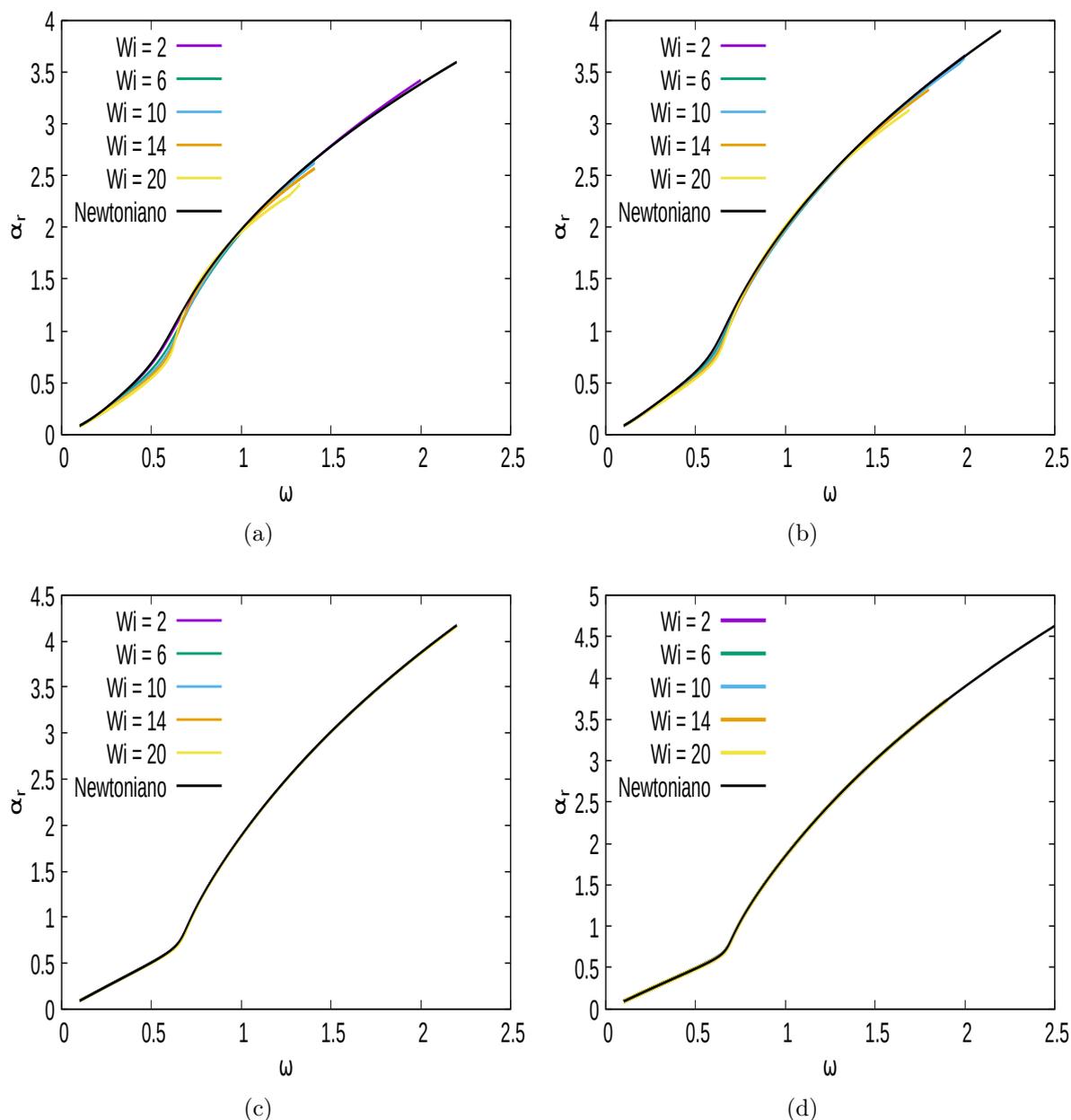


Figura 4.25: Número de onda *versus* frequência angular para o modo varicoso considerando para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$.

Finalmente, as Figuras 4.26 e 4.27 apresentam a variação da velocidade de fase da perturbação, isto é, $\frac{\omega_r}{\alpha_r}$, para diferentes números de Weissenberg, $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ e 0.9 e $Re = 250$.

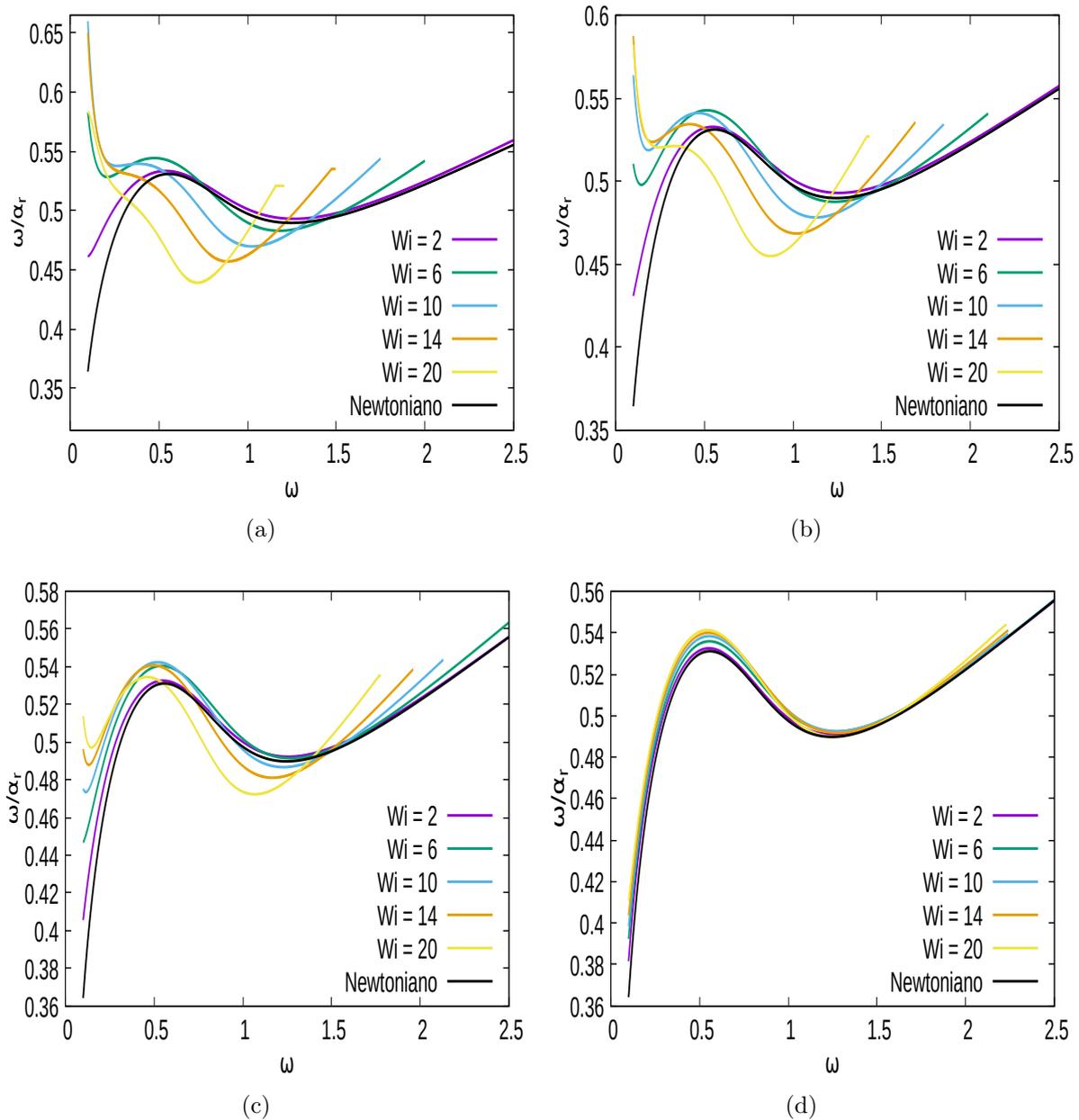


Figura 4.26: Velocidade de fase *versus* frequência angular para o modo sinuoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$.

As Figuras 4.26 e 4.27 mostram que, para os modos sinuoso e varicoso, as perturbações são dispersivas, com uma expressiva dependência da frequência para valores de baixa frequência. As velocidades de fase para o modo sinuoso são mais dependentes dos efeitos não-Newtonianos. Ressalta-se que resultados inconsistentes, que podem ser de modo espúrio, foram omitidos.

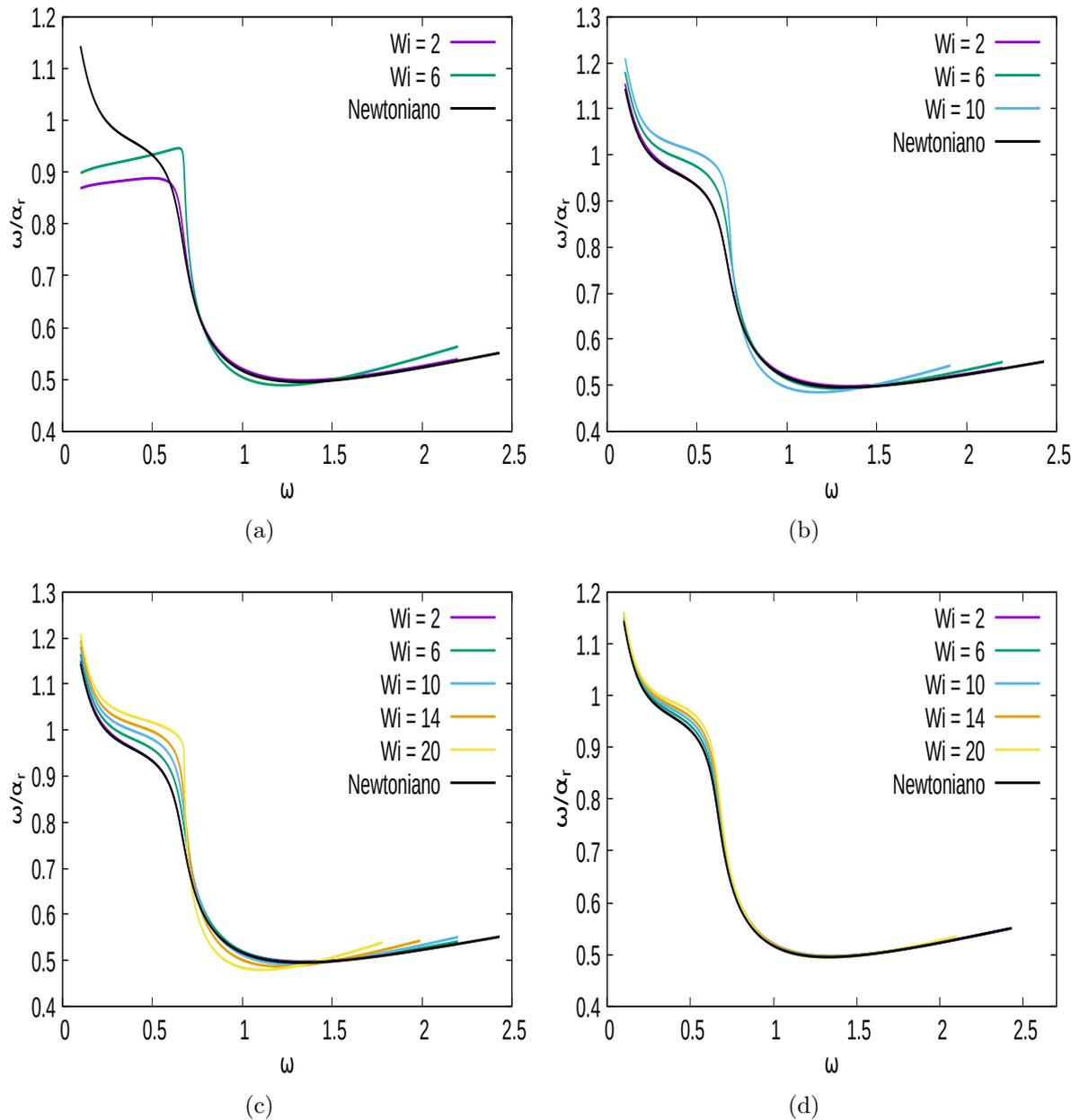


Figura 4.27: Velocidade de fase *versus* frequência angular para o modo varicoso considerando (a) $\beta = 0.3$, (b) $\beta = 0.5$, (c) $\beta = 0.7$ e (d) $\beta = 0.9$ para $Re = 250$.

Fixando $\beta = 0.9$ e variando os números de Reynolds e Weissenberg, as Figuras 4.28 e 4.29 apresentam a variação da velocidade de fase com a frequência angular, com o objetivo de analisar a influência do número de Reynolds para os modos sinuoso e varicoso. Observe-se que o caso varicoso é muito mais dispersivo do que o caso sinuoso e que as perturbações se propagam com maior velocidade do que o caso sinuoso.

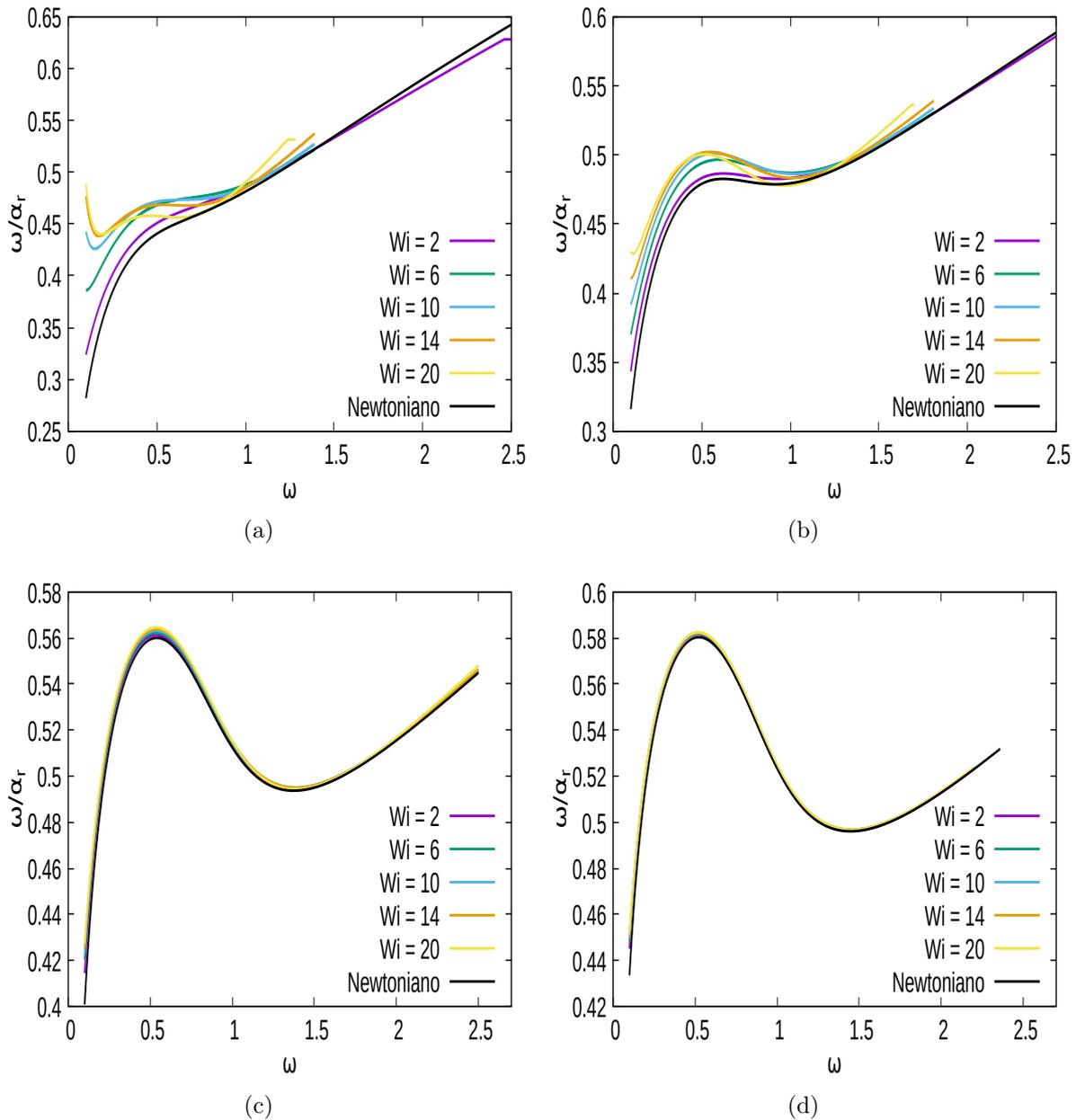


Figura 4.28: Velocidade de fase *versus* frequência angular para o modo sinuoso para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$.

Em geral, à medida que o número de Reynolds aumenta, o efeito não-Newtoniano na estabilidade é reduzido. Aumentar ainda mais o número de Reynolds resulta em efeitos não-Newtonianos ainda menores nos resultados. Isso é esperado para camadas de cisalhamento livre para as quais a estabilidade é governada pelas equações de Rayleigh para altos números de Reynolds, onde efeitos difusivos não são relevantes.

Observa-se nas Figuras 4.27 e 4.29 que para baixas frequências ω_r a velocidade de fase do caso varicoso mostra ser maior do que a velocidade do jato laminar. O mesmo não ocorre para o modo sinuoso.

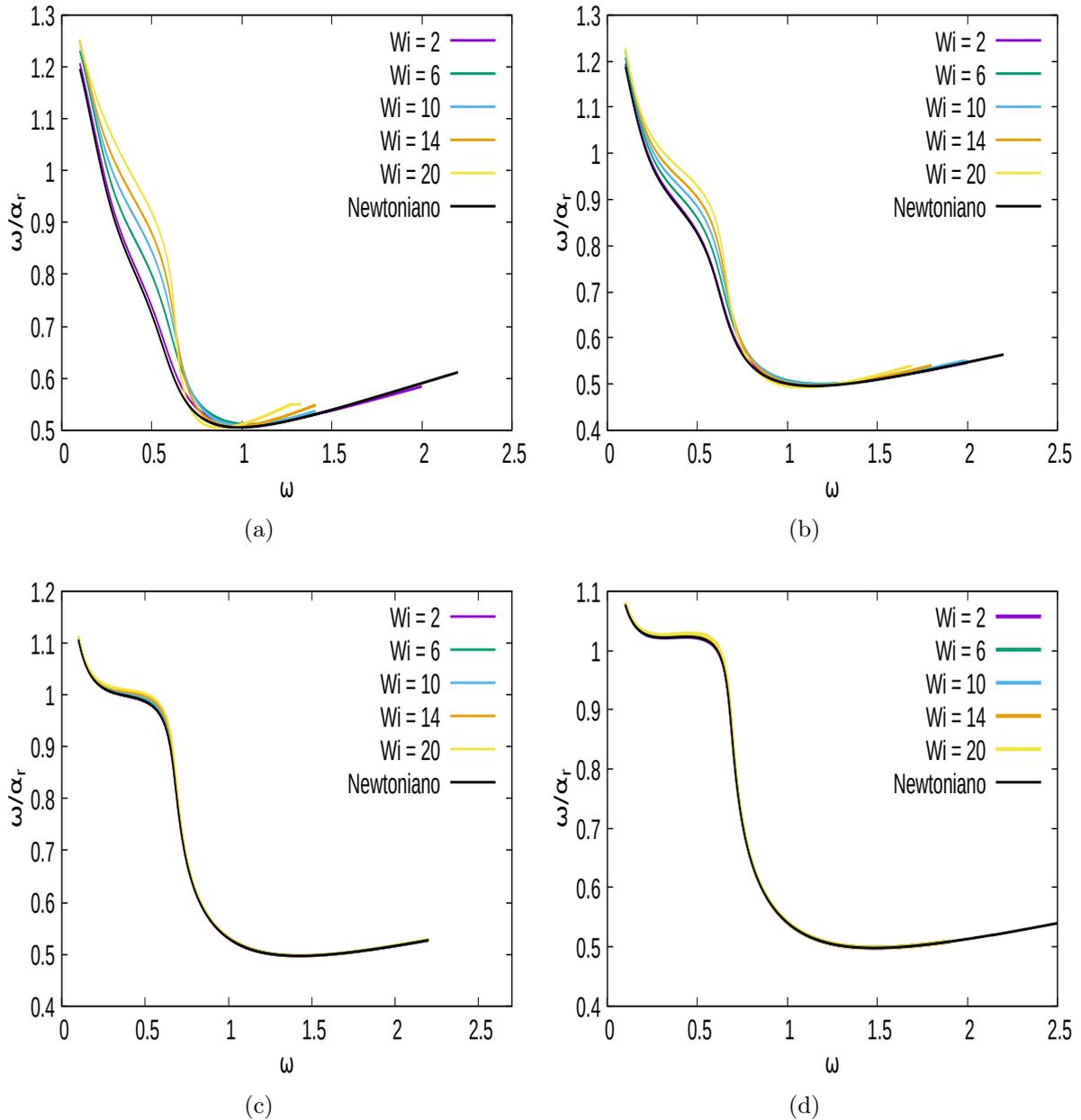


Figura 4.29: Velocidade de fase *versus* frequência angular para o modo varicoso considerando para $\beta = 0.9$ e (a) $Re = 50$, (b) $Re = 100$, (c) $Re = 500$ e (d) $Re = 1000$.

A variação da velocidade de fase com diferentes frequências é grande para o caso varicoso. Isso significa que para um escoamento onde se tem perturbações de várias frequências, cada uma vai se propagar com a sua velocidade de fase e as perturbações vão se espalhar, algumas indo mais rápido e outras mais devagar. No caso sinuoso a diferença entre a maior e a menor velocidade de fase para diferentes frequências é menos acentuada. Por exemplo, no gráfico da Figura 4.28(c), a menor velocidade de fase é 0.4 para frequência em torno de 0.1 e a maior velocidade de fase é em torno de 0.56 para $\omega_r \approx 0.5$. Perturbações com frequências diferentes, mas que se propagam com velocidades relativamente similares, e a estrutura formada por todas as perturbações de diferentes frequências não se dispersa tanto.

A Figura 4.30 mostra a variação na taxa de amplificação máxima com β para diferentes números de Weissenberg e $Re = 250$. Em geral, quando β aumenta, a taxa de amplificação aumenta para o modo sinuoso e diminui para o modo varicoso. Para altos valores de

Wi e baixos valores de β , os resultados inconsistentes são apresentados como taxas de amplificação independentes de β para o modo varicoso.

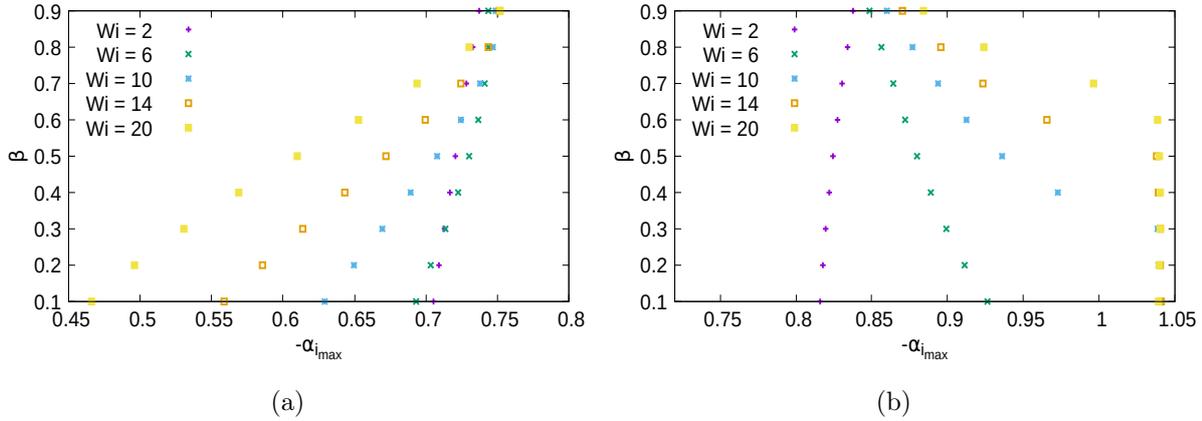


Figura 4.30: Variação da taxa de amplificação máxima com β para $Re = 250$ e diferentes números de Weissenberg para o modo (a) sinuoso e (b) varicoso.

A Figura 4.31 mostra a variação na taxa de amplificação máxima com o número de Weissenberg para diferentes β e $Re = 250$. Para o modo sinuoso, a taxa de amplificação inicialmente aumenta com o aumento de Wi , mas acima de um determinado valor começa a diminuir. Esse comportamento já foi observado para a estabilidade do escoamento não-Newtoniano de Poiseuille [5].

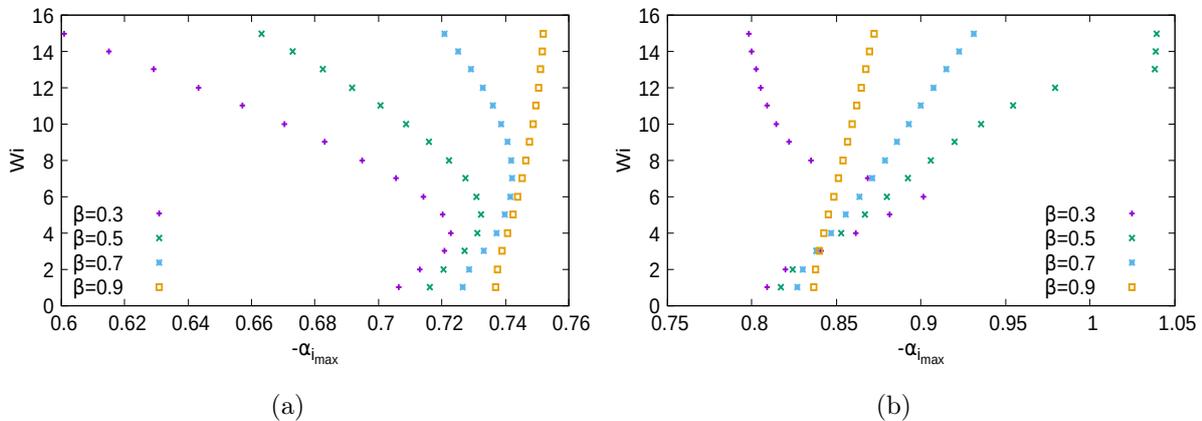


Figura 4.31: Variação da taxa de amplificação máxima com número de Weissenberg para $Re = 250$ e diferentes valores de β para o modo (a) sinuoso e (b) varicoso.

4.3.2 Curvas Neutras

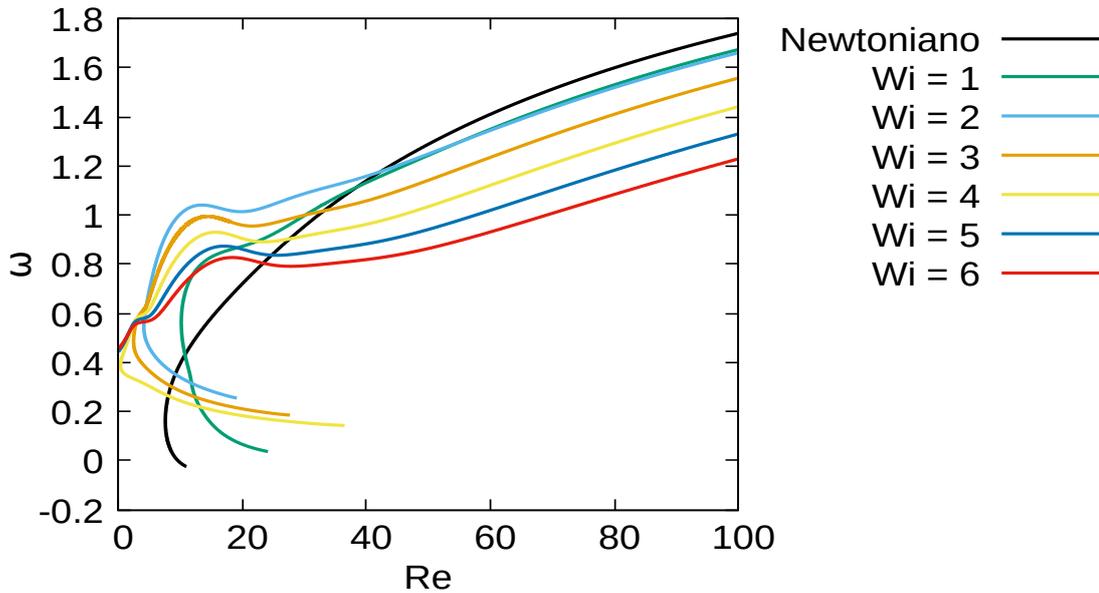
Os resultados da análise espacial utilizando o código LST são apresentados nesta subseção através das curvas neutras de estabilidade. Nesta análise considera-se ω real e α complexo, conforme Tabela 3.1. Com o objetivo de avaliar as curvas neutras de estabilidade, diferentes simulações numéricas foram realizadas variando-se os parâmetros adimensionais para o escoamento do fluido Oldroyd-B e comparando com o escoamento de fluido Newtoniano. Neste trabalho, os parâmetros estudados são o número de Reynolds (Re), o número de Weissenberg (Wi) e a constante β .

As curvas neutras separam as regiões estáveis de taxa de amplificação negativa $-\alpha_i < 0$ das regiões instáveis, de taxa de crescimento positiva $-\alpha_i > 0$. Para cada simulação

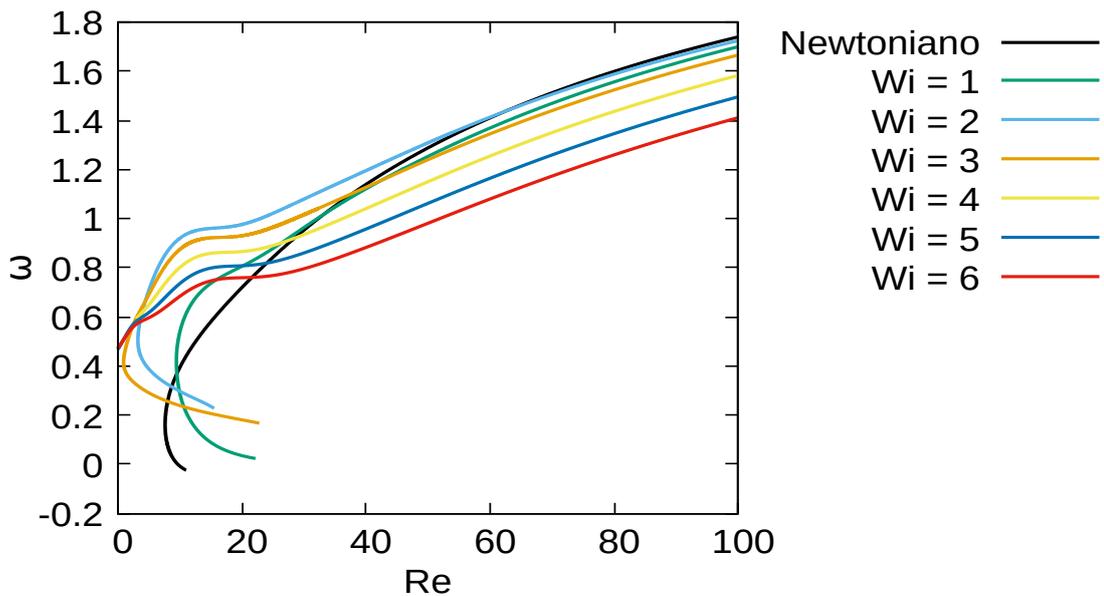
numérica é determinada uma curva neutra, ou seja, o lugar geométrico onde $\alpha_i = 0$. Para observar a influência da elasticidade na estabilidade do escoamento, são apresentadas curvas neutras no plano $Re \times \omega_r$ para β e Wi fixos. As taxas de amplificação $-\alpha_i < 0$, ou seja, a região estável, estão acima da linha neutra e, as taxas de amplificação $-\alpha_i > 0$, região instável, estão abaixo da linha neutra.

Ressalta-se que a velocidade utilizada para o escoamento base é dada pela equação (2.57) para $R = 1$ e $\theta = 0.1$, os tensores não-Newtonianos utilizados são dados pela equação (2.58) e $\eta_{max} = 4$.

Considerando o escoamento de jato plano viscoelástico, utilizando o modelo Oldroyd-B, as curvas neutras de estabilidade são avaliadas para diferentes valores dos parâmetros adimensionais desse modelo e, além disso, comparadas com a curva neutra do fluido Newtoniano.

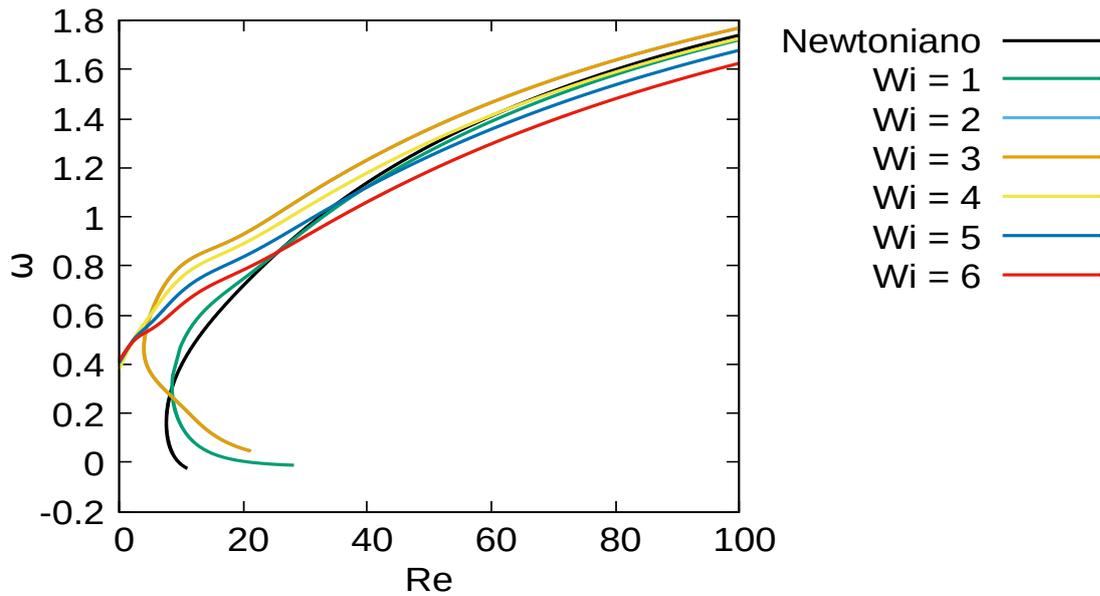


(a)

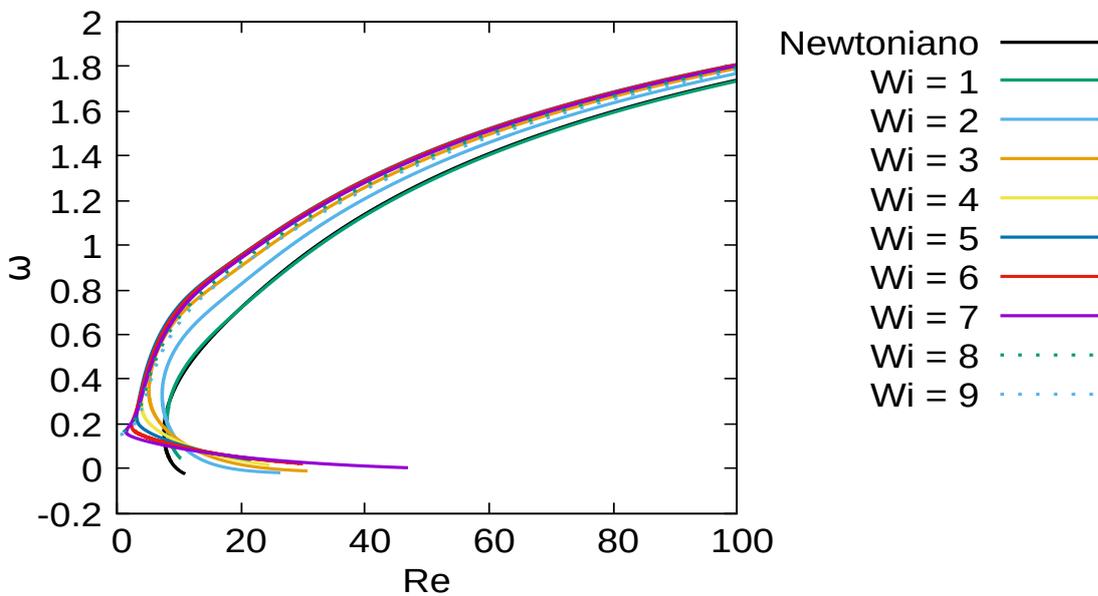


(b)

Figura 4.32: Curvas neutras para o modo sinuoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.3$ e (b) $\beta = 0.5$.



(a)



(b)

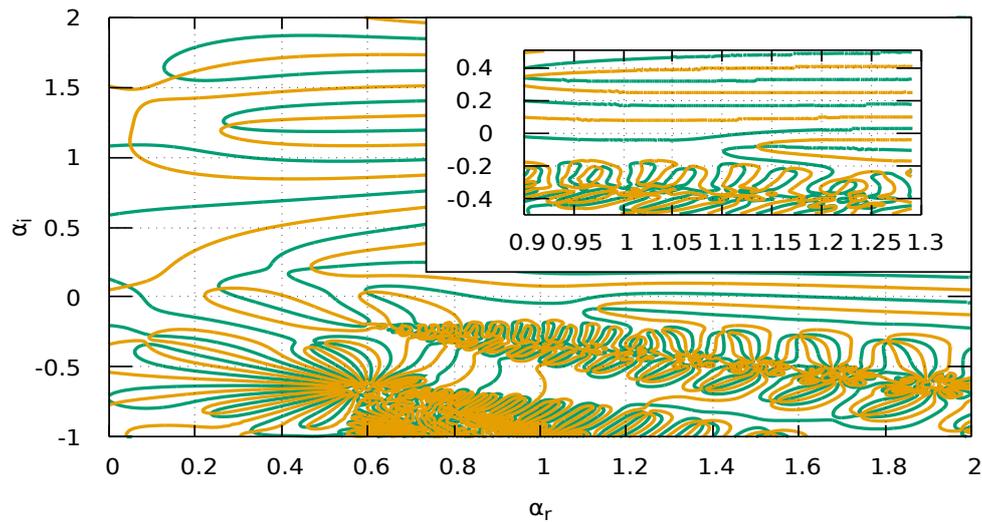
Figura 4.33: Curvas neutras para o modo sinuoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.7$ e (b) $\beta = 0.9$.

As Figuras 4.32 e 4.33 apresentam as curvas neutras de estabilidade para o modo sinuoso utilizando quatro diferentes valores de β , sendo $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ e 0.9 , variando o número de Weissenberg e, também, apresenta a curva neutra para o fluido Newtoniano em cada caso.

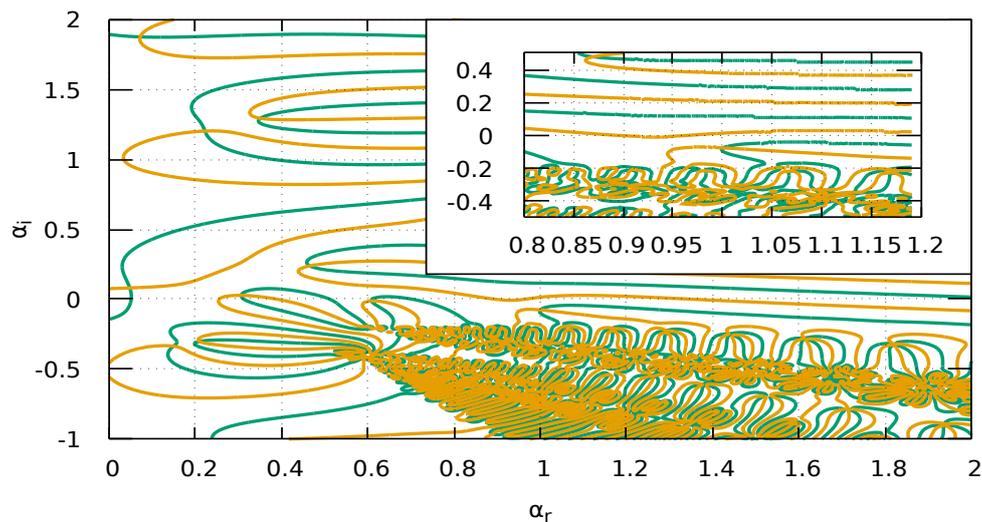
Comparando as curvas neutras dos casos viscoelásticos com o Newtoniano, observa-se que para menores valores de β , altos valores de Reynolds e conforme aumenta o número de Weissenberg, os escoamentos do fluido Oldroyd-B apresentam maiores regiões estáveis (o lado de “fora” da curva), afinal a curva neutra desloca-se para baixo reduzindo a região instável. No entanto, à medida que o número de Reynolds diminui, a região instável aumenta para o caso viscoelástico. Quando aumenta o valor de β aproximando-se de $\beta = 1$, isto é, ficando próximo ao fluido Newtoniano, as curvas neutras, para diferentes valores de Weissenberg, apresentam maiores regiões instáveis para qualquer frequência

quando comparadas a curva neutra Newtoniana. Observa-se que as curvas neutras apresentam uma variação não monotônica com o número de Weissenberg.

Nota-se, também, em todas as curvas neutras apresentadas nas Figuras 4.32 e 4.33 que o ramo inferior da curva neutra não é construído por completo e, além disso, para alguns valores de Weissenberg não é encontrado o valor do Reynolds crítico. Com intuito de avaliar o que está ocorrendo nessas regiões, uma análise dos modos é apresentada nas Figuras 4.34 e 4.35 para quatro casos particulares.



(a) $\omega \approx 0.6$, $Re \approx 6$, $Wi = 5$ e $\beta = 0.3$.



(b) $\omega \approx 0.6$, $Re \approx 4$, $Wi = 5$ e $\beta = 0.5$.

Figura 4.34: Análise de modos para diferentes parâmetros adimensionais.

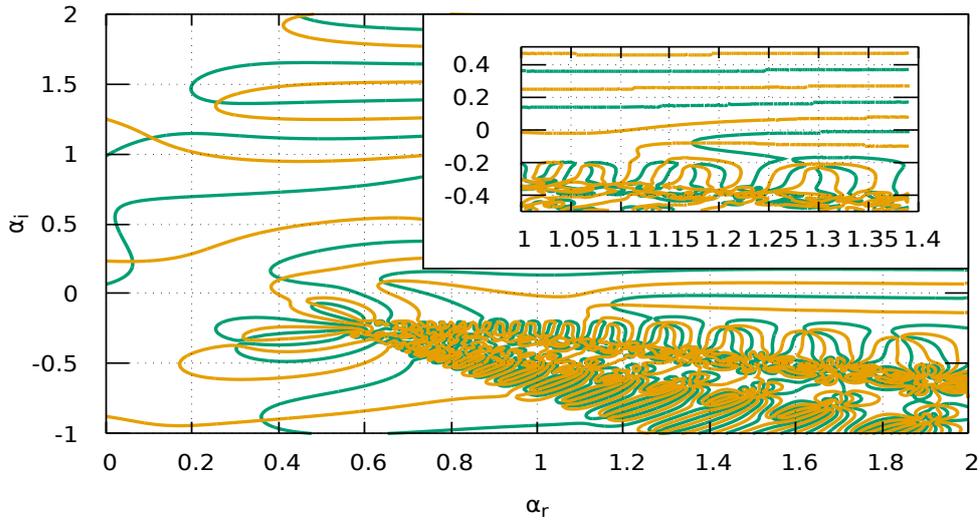
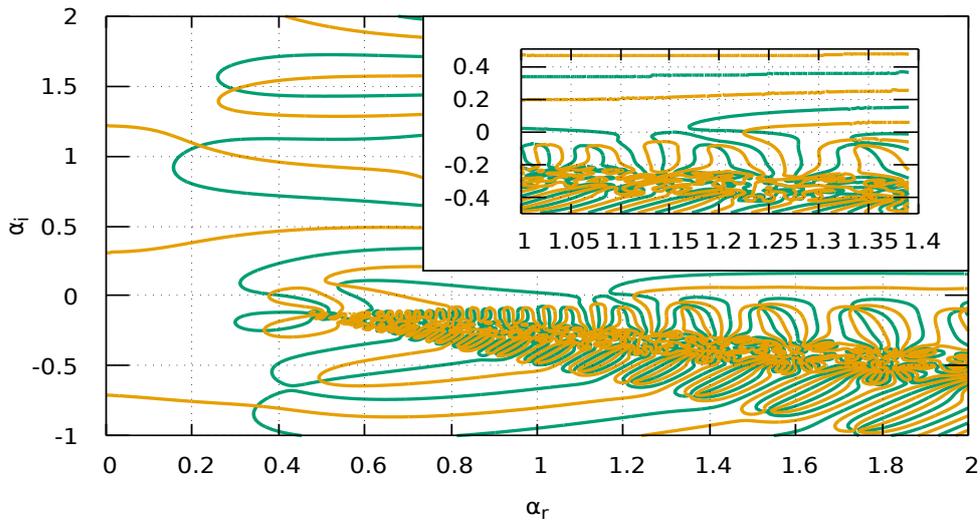
(a) $\omega \approx 0.6$, $Re \approx 6$, $Wi = 5$ e $\beta = 0.7$.(b) $\omega \approx 0.5$, $Re \approx 6$, $Wi = 8$ e $\beta = 0.9$.

Figura 4.35: Análise de modos para diferentes parâmetros adimensionais.

Os modos são analisados através de gráficos que mostram isolinhas onde o determinante é nulo. Para uma malha $\alpha_i \times \alpha_r$, onde o determinante é igual a zero representa uma possível solução da EDO. Quando a curva verde e a amarela se cruzam, significa que o determinante é zero, tanto a parte real quanto a parte imaginária para a combinação α_i e α_r . Nesses cruzamentos tem-se um autovalor da EDO. Nos lugares onde as linhas não se cruzam correspondem a combinações de α_i e α_r onde o determinante é nulo apenas na parte real ou na parte imaginária. O determinante ser nulo refere-se a verificação que é realizada em um dos passos do desenvolvimento do código LST.

Observa-se que em todos os gráficos da Figura 4.34 há uma ampliação onde encontra-se o modo sinuoso e, em todos os casos, este modo de instabilidade está próximo do espectro

contínuo. À medida que aumenta o valor de Weissenberg, para cada β considerado, o modo sinuoso acaba se aproximando cada vez mais do espectro contínuo e, com isso, o código implementado não consegue distinguir qual é o modo sinuoso e qual é o espectro contínuo, impossibilitando a construção completa da curva neutra.

As Figuras 4.36 e 4.37 apresentam as curvas neutras para o modo varicoso utilizando quatro diferentes valores de β , sendo $\beta = 0.3, 0.5, 0.7$ e 0.9 , variando o número de Weissenberg e apresenta, também, a curva neutra do fluido Newtoniano em cada caso.

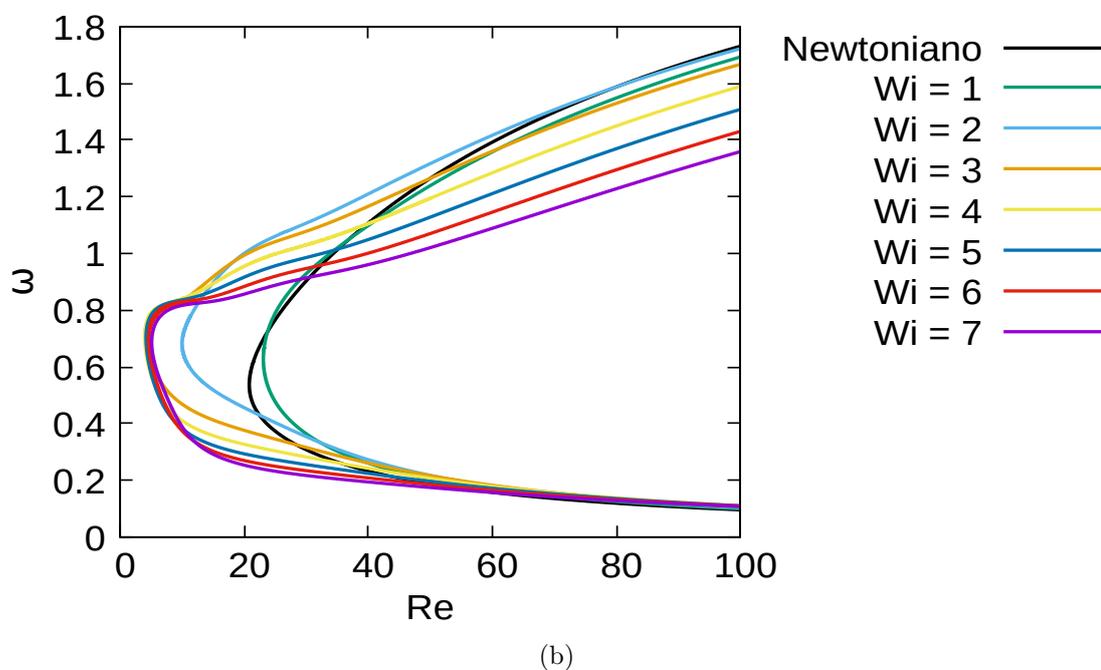
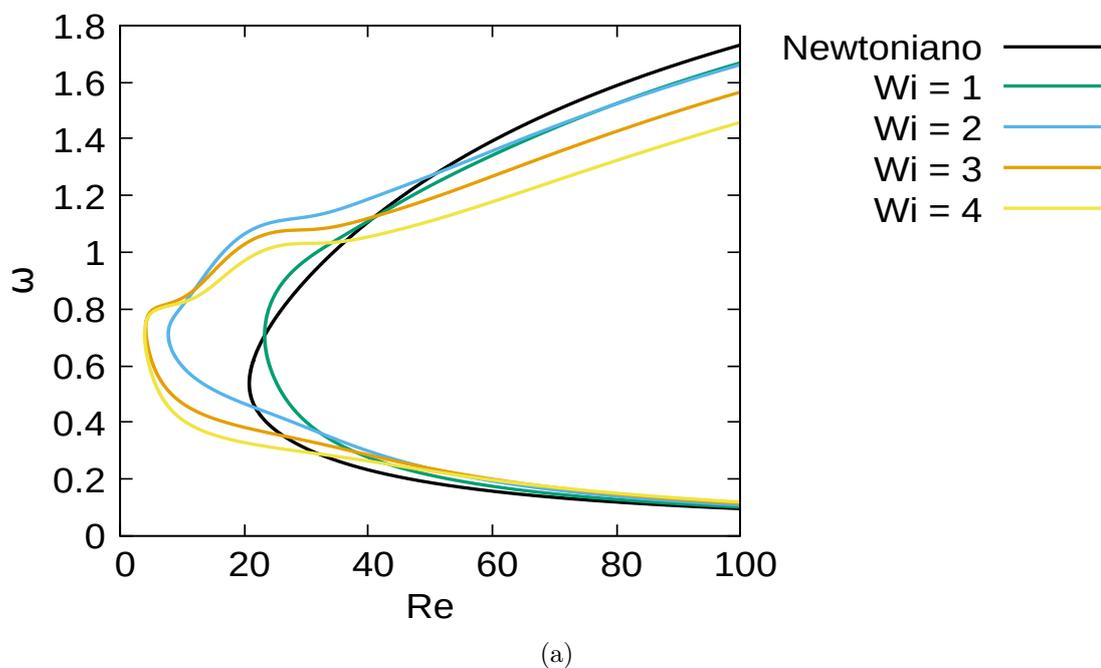
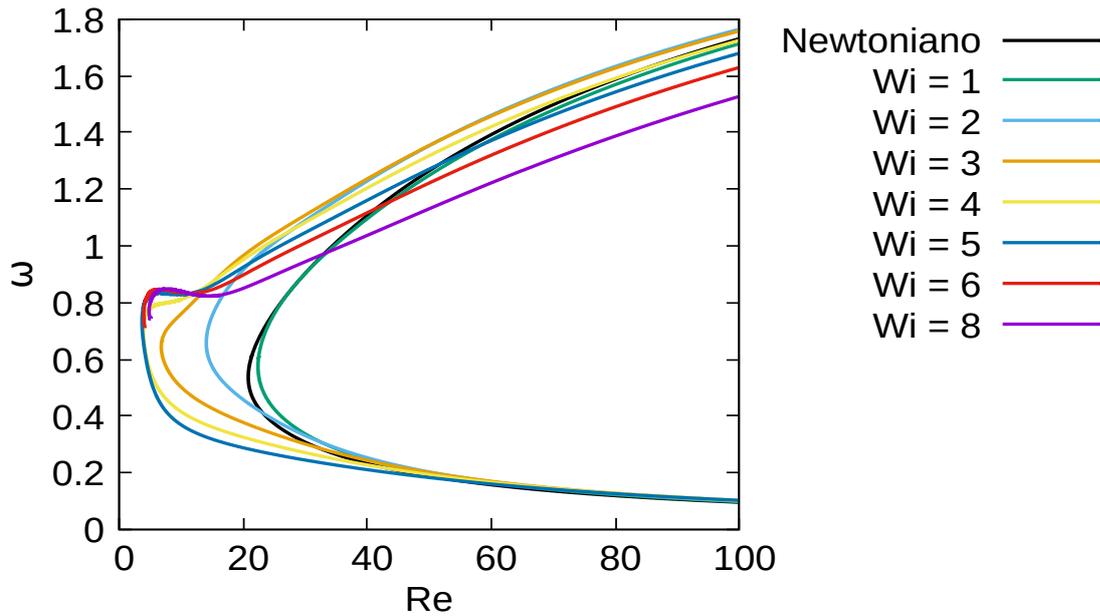
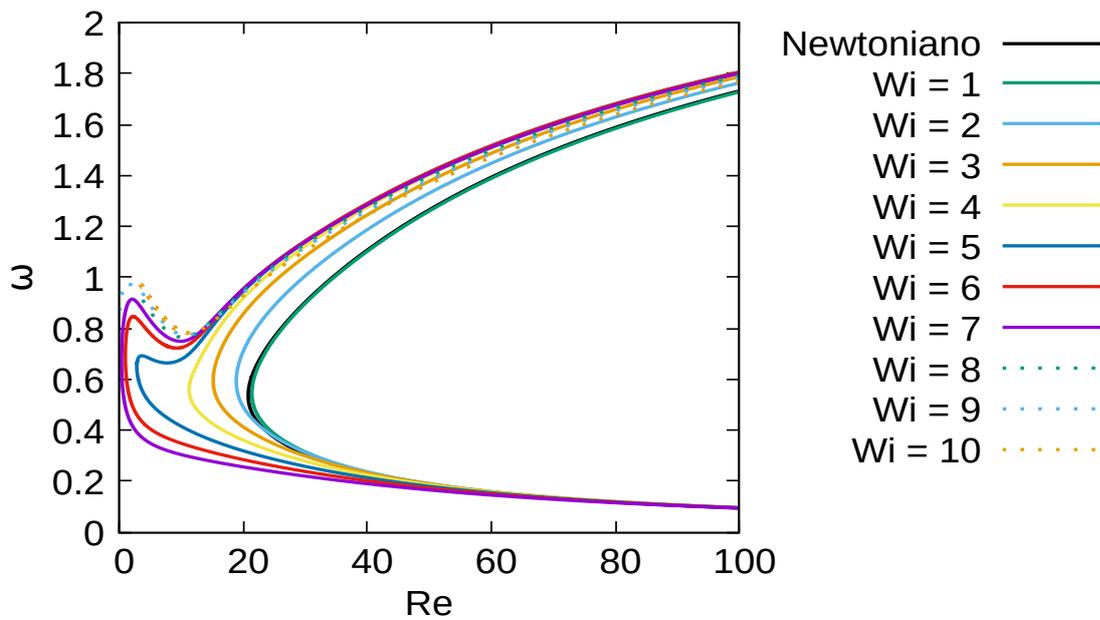


Figura 4.36: Curvas neutras para o modo varicoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.3$ e (b) $\beta = 0.5$.



(a)



(b)

Figura 4.37: Curvas neutras para o modo varicoso de Kelvin-Helmholtz para (a) $\beta = 0.7$ e (b) $\beta = 0.9$.

As observações consideradas para as curvas neutras do modo sinuoso são válidas para o modo varicoso, no entanto, para estes parâmetros, a construção da curva neutra está completa, na maioria dos casos. Nesses casos, a curva neutra apresenta um formato característico de “C”, onde as regiões instáveis são as regiões internas de “C” e as regiões estáveis são as regiões externas. Acredita-se, também, que as construções dessas curvas neutras não estão completas por apresentarem instabilidades elásticas, porém isso ainda precisa ser investigado.

Nota-se que mesmo para $\beta = 0.9$ o número de Weissenberg tem um efeito significativo na destabilização do escoamento. Na Figura 4.36(d) as frequências parecem ser incondicionalmente instáveis, ou seja, instáveis mesmo com $Re = 0$. Isso pode ser uma característica da instabilidade elástica, mas também precisa ser investigada.

O Reynolds crítico (Re_c) é o menor valor de Reynolds onde o escoamento ainda é estável a perturbações e pode ser visualizado nas Figuras 4.38 e 4.39 para diferentes valores de β e Wi para os modos sinuoso e varicoso, respectivamente.

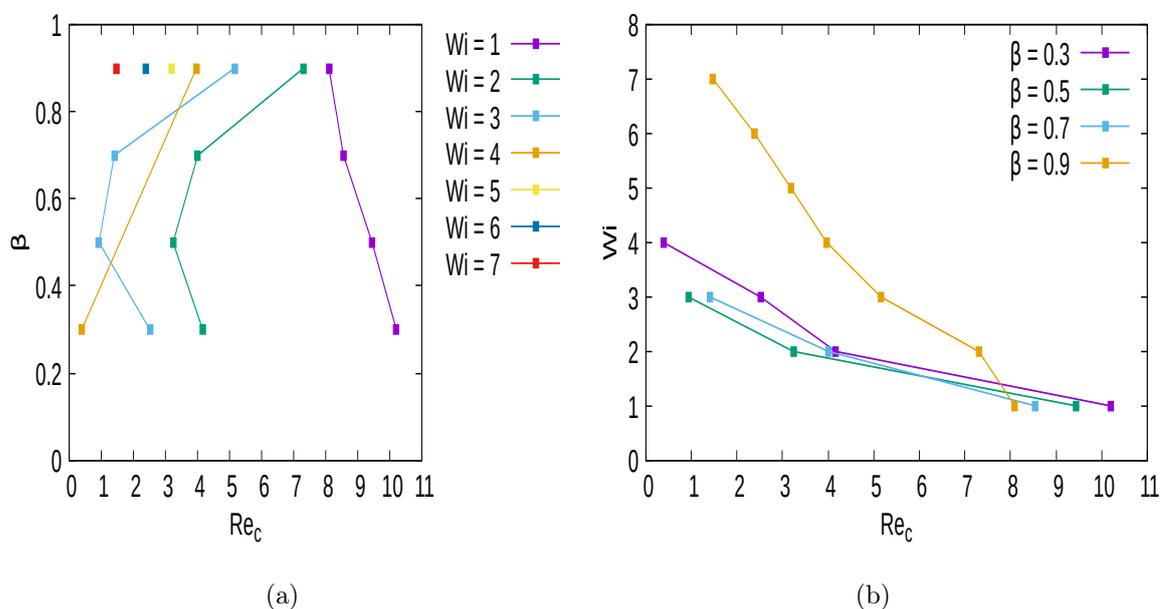


Figura 4.38: Valores de Reynolds crítico do modo sinuoso para diferentes valores de (a) β e (b) Wi .

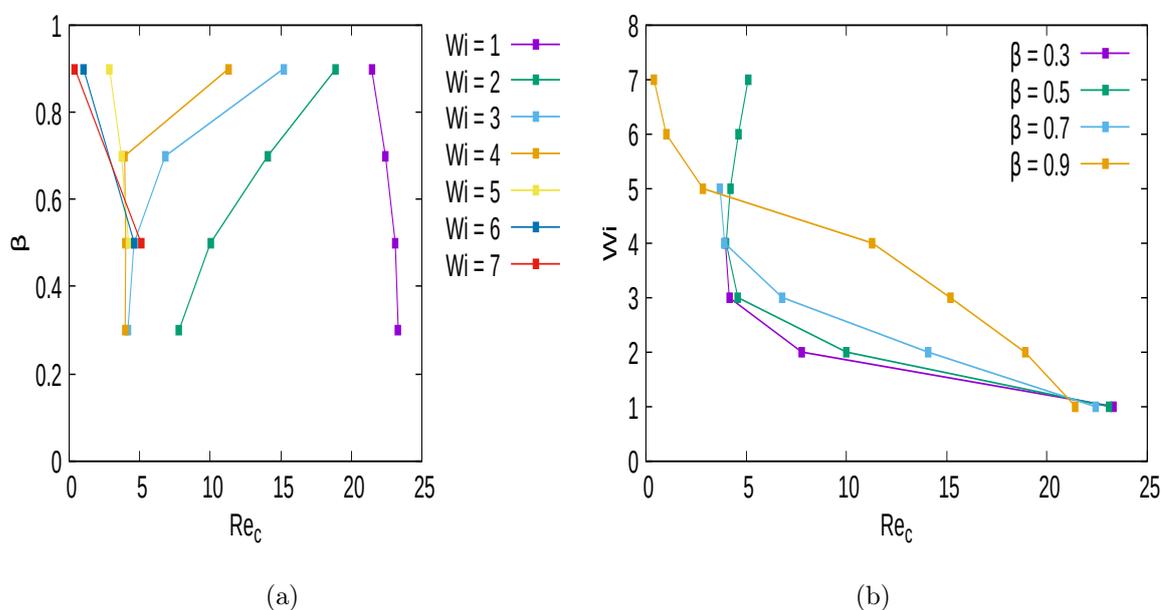


Figura 4.39: Valores de Reynolds crítico do modo varicoso para diferentes valores de (a) β e (b) Wi .

Para o modo sinuoso, o menor Reynolds crítico obtido foi $Re_c \approx 3.8864940$ ($\beta = 0.3$ e $Wi = 4$) e o maior Reynolds crítico foi $Re_c \approx 10.198708$ ($\beta = 0.3$ e $Wi = 1$) para os casos simulados e apresentados. Por outro lado, observando o modo varicoso, o menor Reynolds crítico obtido foi $Re_c \approx 0.40758374$ ($\beta = 0.9$ e $Wi = 7$) e o maior Reynolds crítico foi $Re_c \approx 23.315010$ ($\beta = 0.3$ e $Wi = 1$). Com o objetivo de comparar os valores de

Reynolds crítico de escoamentos do fluido Oldroyd-B com o fluido Newtoniano, a Tabela 4.4 apresenta os valores do Reynolds crítico para o modo sinuoso e varicoso considerando um fluido Newtoniano.

Tabela 4.4: Reynolds crítico aproximado para o fluido Newtoniano considerando os dois modos de instabilidade.

	Sinuoso	Varicoso
Re_c	7.63003063	20.8329792

Comparando os valores da Tabela 4.4 com os valores de Reynolds crítico apresentado nas Figuras 4.38 e 4.39, nota-se que os valores de Re_c para $\beta = 0.9$ e $Wi = 1$ são os que mais se aproximam do Reynolds crítico do fluido Newtoniano, o que era esperado, uma vez que este fluido é mais próximo do fluido Newtoniano.

Conclusão

Neste trabalho foram apresentadas as equações que modelam escoamentos incompressíveis, isotérmicos, bidimensionais, para um fluido não-Newtoniano do tipo viscoelástico na forma dimensional e adimensional, utilizando a equação constitutiva Oldroyd-B. A técnica de Teoria de Estabilidade Linear foi utilizada para investigar a estabilidade hidrodinâmica de Kelvin-Helmholtz do escoamento de jato plano viscoelástico através dos modos sinuoso e varicoso. A investigação do problema do jato plano é uma simplificação para facilitar a compreensão dos mecanismos fundamentais. Se vários efeitos forem suficientemente compreendidos, pode-se concentrar os estudos em um escoamento mais realista.

Considerando a Teoria de Estabilidade Linear foi apresentada, detalhadamente, a dedução da equação de Orr-Sommerfeld para o fluido viscoelástico do tipo Oldroyd-B e as equações dos tensores não-Newtonianos presentes nesta equação. A solução da equação de Orr-Sommerfeld corresponde a um problema de autovalor, que foi resolvido utilizando um método de estimativa.

O *software* OpenFOAM foi escolhido com o objetivo de simular numericamente o escoamento de jato laminar e estudar o seu comportamento em termos de como evolui a jusante para confirmar a hipótese de escoamento paralelo imposta para a escolha do escoamento base. A análise desses resultados evidenciaram que as condições colocadas foram adequadas e, dessa forma, validou-se as hipóteses que foram consideradas.

Além disso, foi realizada uma análise espacial para investigar a estabilidade de escoamentos de fluidos viscoelásticos utilizando a Teoria de Estabilidade Linear, através da análise da taxa de amplificação, número de onda, velocidade de fase e das curvas neutras de estabilidade para os modos sinuoso e varicoso.

Os resultados de estabilidade do fluido Oldroyd-B foram comparados com os resultados do fluido Newtoniano, para diferentes valores de parâmetros adimensionais desse modelo. Além disso, a influência dos parâmetros adimensionais presentes no modelo Oldroyd-B, como o número de Weissenberg (Wi) e a constante β , foram estudados considerando os seguintes valores de Reynolds, $Re = 50$ a $Re = 1000$, uma vez que a influência da viscosidade na taxa de amplificação é pequena para número de Reynolds alto.

A influência da constante β , que controla a contribuição do solvente Newtoniano no fluido, também foi estudada para analisar a estabilidade do escoamento de jato laminar. Considerou-se quatro valores para β e os resultados numéricos mostraram que a medida que o valor de β aumentava, isto é, conforme o fluido se aproximava do fluido Newtoniano, os resultados da análise de estabilidade (taxa de amplificação, número de onda, velocidade de fase e as curvas neutras) ficaram próximos dos resultados obtidos para o modelo Newtoniano, exceto para a curva neutra de estabilidade do modo varicoso apresentada na

Figura 4.37, pois em $\beta = 0.9$ houve uma redução significativa do Reynolds crítico. Além disso, os valores do número de Reynolds crítico foram analisados para observar a região de estabilidade conforme a variação do parâmetro β .

O efeito das forças elásticas, dada pelo número de Weissenberg (Wi), na estabilidade do escoamento foi verificado para diferentes valores de Weissenberg. Observou-se que os efeitos não-Newtonianos são mais relevantes para o modo sinuoso, onde a taxa máxima de amplificação e a faixa de frequências instáveis diminuem com o aumento de Weissenberg e com a diminuição de β . No entanto, seguindo as mesmas condições, o modo varicoso apresentou alguns resultados inconsistentes que podem ser espúrios.

A análise dos modos também foi apresentada, com intuito de justificar porque as curvas neutras do modo sinuoso não apresentaram o seu ramo inferior, isto é, a curva neutra não foi construída por completa. E, diante dos gráficos de modos, observou-se que o modo sinuoso encontra-se muito próximo do espectro contínuo gerando assim, problemas de convergência do método numérico. Observou-se, também, que para menores valores de β , o modo sinuoso aproxima-se do espectro contínuo para valores mais baixos de Weissenberg quando comparados aos valores mais altos de β .

O modo varicoso apresentou resultados inconsistentes, que podem ser espúrios, acreditando se tratar de um outro mecanismo de instabilidade, as instabilidades elásticas, no entanto isso ainda precisa ser investigado, uma vez que o foco desse trabalho está na análise de instabilidade hidrodinâmica.

Em geral, os resultados mostraram que efeitos não-Newtonianos são relevantes em menores valores do número de Reynolds e que à medida que a quantidade de concentração de polímero no fluido e o número de Weissenberg diminuem e o número de Reynolds é aumentado, o efeito não-Newtoniano na estabilidade é reduzido. Além disso, efeitos não-Newtonianos podem reduzir ou aumentar as taxas de crescimento e alterar a velocidade da fase quando comparados ao fluido Newtoniano.

Os resultados numéricos obtidos utilizando a Teoria de Estabilidade Linear foram satisfatórios e importantes na análise da estabilidade hidrodinâmica de escoamentos de jatos laminares, planos e de fluidos viscoelásticos, afinal não há muitos resultados na literatura. Sendo esta a principal contribuição científica deste trabalho, disponibilizando resultados atuais a partir de uma ferramenta numérica importante na verificação da estabilidade de escoamentos de jatos bidimensionais.

Referências

- [1] M. A. Ajiz and A. Jennings. A robust incomplete choleski-conjugate gradient algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(5):949–966, 1984.
- [2] R. M. Andrade. Desenvolvimento de código numérico para solucionar as equações bidimensionais de Navier-Stokes: Avaliação dos métodos SIMPLE, SIMPLEC e SIMPLER aplicados ao problema da cavidade., 2009. Monografia (Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, Brasil.
- [3] A. Beris, R. Armstrong, and R. Brown. Spectral finite-element calculations of the flow of a Maxwell fluid between eccentric rotating cylinders. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **22**:129–167, 1987.
- [4] R. B. Bird, P. J. Dotson, and N. L. Johnson. Polymer solution rheology based on a finitely extensible bead-spring chain model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 7:213–235, 1980.
- [5] A. C. Brandi, M. T. Mendonça, and L. F. Souza. DNS and LST stability analysis of Oldroyd-B fluid in a flow between two parallel plates. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 267:14 – 27, 2019.
- [6] A. Brandt. Multilevel adaptive solutions to boundary value problems. *Mathematics of Computation*, 31:333–390, 1977.
- [7] E. Brasseur, M. Fyrillas, G. Georgiou, and M. Crochet. The time-dependent extrudate-swell problem of an Oldroyd-B fluid with slip along the wall. *Journal of Rheology*, **42**:549–566, 1994.
- [8] M. D. Chilcott and J. M. Rallison. Creeping flow of dilute polymer solutions past cylinders and spheres. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 29:381–432, 1988.
- [9] M. J. Crochet, A. R. Davies, and K. Walters. *Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow*. Rheology Series 1. Academic Press, Elsevier, 1984.
- [10] J. Eggers and E. Villermaux. Physics of liquid jets. *Reports on Progress in Physics*, **71**(3), feb 2008.
- [11] J. L. Favero. Simulação de escoamentos viscoelásticos: desenvolvimento de uma metodologia de análise utilizando o software OpenFOAM e equações constitutivas diferenciais. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.
- [12] J. L. Favero. *Simulação de escoamentos multifásicos polidispersos multivariados*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Fevereiro, 2014.

-
- [13] J. L. Favero, A. R. Secchi, N. S. M. Cardozo, and H. Jasak. Viscoelastic flow analysis using the software OpenFOAM and differential constitutive equations. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(23-24):1625–1636, 2010.
- [14] J. H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1997.
- [15] R. A. Figueiredo. *Simulação numérica de escoamentos viscoelásticos multifásicos complexos*. PhD thesis, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.
- [16] The OpenFOAM Foundation. *OpenFOAM v7 User Guide*. OpenCFD Ltd.
- [17] L. J. Furlan. Análise de estabilidade de escoamentos do fluido viscoelástico Giesekus. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, Agosto, 2018.
- [18] G. P. Galdi. *Navier–Stokes Equations: A Mathematical Analysis*. Birkhäuser, 2009.
- [19] E. S. Gervazoni. Análise de estabilidade linear de escoamentos bidimensionais do fluido Oldroyd-B. Master’s thesis, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2016.
- [20] H. Giesekus. A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 11:69–109, 1982.
- [21] W. W. Hagerty and J. F. Shea. A study of the stability of plane fluid sheets. *J. App. Mech*, 22:509–514, 1955.
- [22] F. H. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids*, 8(12):2182–2189, 1965.
- [23] M. R. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of research of the National Bureau of Standards*, 49:409–436, 1952.
- [24] T. C. Ho and M. M. Denn. Stability of plane Poiseuille flow of a highly elastic liquid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 3:179–195, 1977.
- [25] R. I. Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *J. Comput. Phys.*, 62(1):40–65, January 1986.
- [26] H. Jasak. *Error analysis and estimation for the finite volume method with applications to fluid flows*. PhD thesis, University of London, Imperial College, June, 1996.
- [27] L. Jia. *The Interaction Between Flexible Plates and Fluid in Two-Dimensional Flow*. Springer Theses - Recognizing Outstanding Ph.D. Research. Springer, 7 2014.
- [28] R. Kaplan. *The Stability of Laminar Incompressible Boundary Layers in the Presence of Compliant Boundaries*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1964.
- [29] A. Kaye. *Non-Newtonian flow in incompressible flows*. College of Aeronautics, 1962.
- [30] P. Kundu and I. Cohen. *Fluid Mechanics*. Academic Press, Kidlington, 4th edition, 2010.

- [31] R. G. Larson. *Constitutive equations for polymer melts and solutions*. Butterworths, 1988.
- [32] L. Lee, J. Zhang, and C. C. Lu. Incomplete LU preconditioning for large scale dense complex linear systems from electromagnetic wave scattering problems. *Journal of Computational Physics*, 185(1):158 – 175, 2003.
- [33] A. I. Leonov. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. *Rheologica Acta*, 15:85–98, 1976.
- [34] X. L. Luo and R. I. Tanner. A streamline element scheme for solving viscoelastic flow problems part II: Integral constitutive models. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 22:61–89, 1986.
- [35] X. L. Luo and R. I. Tanner. Finite element simulation of long and short circular die extrusion experiments using integral models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 25:9–22, 1988.
- [36] J. Mak. Hydrodynamic stability of Newtonian and non-Newtonian fluids. Master’s thesis, University of Durham, Durham, April, 2009.
- [37] A. M. Martins. Análise da qualidade de tensões obtidas na simulação de escoamentos de fluidos viscoelásticos usando a formulação log-conformação. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Escola de Engenharia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, 2016.
- [38] M. T. Mendonça and M. A. F. Medeiros. *Estabilidade de Escoamentos Laminares: Teoria Linear*, volume 2. ABCM, Uberlândia, 2000.
- [39] A. Michalke. Instabilität eines kompressiblen runden Freistrahls unter Berücksichtigung des Einflusses der Strahlgrenzschichtdicke. *Progress in Aerospace Sciences*, 19:319–328, 1971. English Translation: 1977, NASA Technical Memorandum 75190.
- [40] A. Michalke. Survey on jet instability theory. *Progress in Aerospace Sciences*, 21:159–199, 1984.
- [41] G. Mompean and M. Deville. Unsteady finite volume of Oldroyd-B fluid through a three-dimensional planar contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 72:253–279, 1997.
- [42] P. J. Morris. The spatial viscous instability of axisymmetric jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 77(3):511 – 529, 1976.
- [43] S. Muzaferija. *Adaptive finite volume method for flow prediction using unstructured meshes and multigrid approach*. PhD thesis, University of London, Imperial College, March, 1994.
- [44] S. V. Patankar. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation (CRC Press, Taylor & Francis Group), 1980.
- [45] S. V. Patankar and D. B. Spalding. *A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-dimensional Parabolic Flows*. Imperial College of Science and Technology, Department of Mechanical Engineering, 1972.
- [46] N. Phan-Thien and R. I. Tanner. A new constitutive equation derived from network theory. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2:353–365, 1977.

- [47] T. N. Phillips and A. Williams. Comparison of creeping and inertial flow of an Oldroyd-B fluid through a planar and axisymmetric contraction. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **108**:25–47, 2002.
- [48] F. T. Pinho, M. A. Alves, and P. J. Oliveira. Benchmark solutions for the flow of Oldroyd-B and PTT fluids in planar contractions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **10**:45–75, 2003.
- [49] R. H. Pletcher, J. C. Tannehill, and D. Anderson. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences. Taylor & Francis, 2 edition, 1997.
- [50] K. C. Porteous and M. M. Denn. Linear stability of plane Poiseuille flow of viscoelastic liquids. *Transactions of The Society of Rheology*, **16**:295–308, 1972.
- [51] I. Pérez-Reyes, R. O. Vargas-Aguilar, S. B. Pérez-Vega, and A. S. Ortiz-Pérez. Applications of viscoelastic fluids involving hydrodynamic stability and heat transfer. In *Polymer Rheology*, chapter 2. IntechOpen, Rijeka, 2018.
- [52] J. M. Rallison and E. J. Hinch. Instability of a high-speed submerged elastic jet. *J. Fluid Mech*, pages 311–324, 1995.
- [53] M. Renardy and Y. Renardy. Linear stability of plane Couette flow of an upper convected Maxwell fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, **22**:23–33, 1986.
- [54] H. Schlichting. *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, IncH., 7th edition, 1979.
- [55] P. J. Schmid and D. S. Henningson. *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer, 2001.
- [56] L. F. L. R. Silva. *Desenvolvimento de metodologias para simulação de escoamentos polidispersos usando código livre*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Junho, 2008.
- [57] L. F. Souza, A. C. Brandi, and M. T. Mendonça. *Estabilidade de Escoamentos de Fluidos não-Newtonianos*, volume 10. ABCM, São José dos Campos, 2016.
- [58] L. F. Souza, M. T. Mendonça, and M. A. F. Medeiros. The advantages of using high-order finite differences schemes in laminar-turbulent transition studies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **48**:565–592, 2005.
- [59] H. N. Squire. Investigation of the instability of a moving liquid film. *British Journal of Applied Physics*, **4**(6):167–169, June 1953.
- [60] K. Stüben. A review of algebraic multigrid. *J. Comput. Appl. Math.*, **128**(1-2):281–309, March 2001.
- [61] T. Tatsumi and T. Kakutani. The stability of a two-dimensional laminar jet. *Journal of Fluid Mechanics*, **4**(3):261–275, 1958.
- [62] N. Trefethen, A. E. Trefethen, S. C. Reddy, and T. A. Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, **261**:578–584, 1993.
- [63] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics The Finite Volume Method*. Pearson Education, 2 edition, 2007.

- [64] J. Vlachopoulos and C. Stournaras. Laminar two-dimensional non-Newtonian jets. *AIChE Journal*, **21**(2):385–388, 1975.
- [65] H. A. Van Der Vorst. Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 13(2):631–644, 1992.
- [66] L. P. Wang and J. Yuan. Conjugate decomposition and its applications. *Journal of the Operations Research Society of China*, 1(2):199–215, Jun 2013.
- [67] M. Weder. Linear stability and acoustics of a subsonic plane jet flow. Master’s thesis, ETH Zurich, Zürich, 2012.
- [68] P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods*. An Introduction to Multigrid Methods. R.T. Edwards, 2004.
- [69] J. L. White and A. B. Metzner. Development of constitutive equations for polymeric melts and solutions. *Journal of Applied Polymer Science*, 7:1867–1889, 1963.
- [70] L. J. Yang, Y. X. Liu, and Q. F. Fu. Linear stability analysis of an electrified viscoelastic liquid jet. *Journal of Fluids Engineering*, 134:1–13, 2012.
- [71] L. J. Yang, M. X. Tong, and Q. F. Fu. Linear stability analysis of a threedimensional viscoelastic liquid jet surrounded by a swirling air stream. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 191:1–13, 2013.
- [72] H. Y. Ye, L. J. Yang, and Q. F. Fu. Instability of viscoelastic compound jets. *Physics of Fluids*, 28:043101, 2016.
- [73] M. Zhang. Linear stability analysis of viscoelastic flows. Master’s thesis, Royal Institute of Technology, May, 2012.
- [74] M. Zhang, I. Lashgari, T. A. Zaki, and L. Brandt. Linear stability analysis of channel flow of viscoelastic Oldroyd-B and FENE-P fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, **737**, December, 2013.

Software OpenFOAM

Neste apêndice é descrito, em detalhes, os métodos e procedimentos que o *software* OpenFOAM utiliza para a resolução do problema.

A.1 Método de Volumes Finitos

Ao aplicar a discretização em uma ou mais equações diferenciais parciais a finalidade é obter um sistema de equações algébricas correspondentes, sendo que a solução deste sistema produza um conjunto de valores que correspondem à solução das equações originais no espaço e no tempo. O processo de discretização pode ser dividido em duas etapas para a resolução de uma equação diferencial parcial: a discretização do domínio da solução e a discretização da equação [43]. A discretização do domínio da solução descreve, numericamente, o domínio computacional. O espaço é dividido em regiões discretas finitas, chamadas volumes ou células de controle. A discretização de equações fornece uma transformação apropriada dos termos das equações governantes em expressões algébricas [26, 43].

O método baseia-se na discretização da forma integral das equações que governam o problema sobre cada célula. As equações são resolvidas em um sistema de coordenadas cartesianas que não muda no tempo, apesar de ser aplicável ao estado estacionário e transitório. Todas as variáveis dependentes compartilham os mesmos volumes de controle, que são chamados de arranjo desencontrado ou o co-localizado das variáveis. Os sistemas de equações diferenciais parciais são resolvidos um de cada vez, com o acoplamento entre equações tratado de maneira explícita. As equações diferenciais não lineares são linearizadas antes da discretização [26].

De modo geral, o método de volumes finitos é estruturado a partir da decomposição do domínio de integração das equações em volumes de controles e pode-se dizer que sobre cada célula existe um nó situado no centro dos volumes de controle [2].

A Figura A.1 ilustra uma célula de controle e uma região próxima; o ponto P é o nó principal de um volume de controle e os pontos E, W, N e S são os pontos principais dos volumes de controle vizinhos a leste, oeste, norte e sul, respectivamente. Além disso, x e y são as distâncias entre estes pontos e P. As faces dos volumes de controle são representadas pelas linhas pontilhadas e Δx e Δy são as dimensões do volume de controle ou distâncias entre as faces. As velocidades u_e e u_w são determinadas nas faces leste e oeste, enquanto v_n e v_s são as velocidades nas faces norte e sul. As faces dos volumes de controle proporcionam o cálculo das velocidades, no mesmo momento em que os nós possibilitam o cálculo de todas as outras variáveis [2].

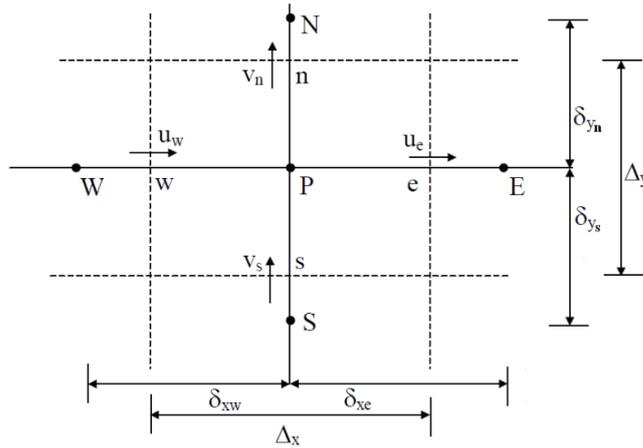


Figura A.1: Volume de controle e sua vizinhança.

A.1.1 Interpolação e Solução das Equações

As funções de interpolações utilizadas em volumes finitos são de extrema importância para a obtenção de boas soluções. Em geral, os esquemas mais utilizados são: UDS (*Upwind Differencing Scheme*), CDS (*Central Differencing Scheme*) de primeira e segunda ordem, respectivamente, ou uma mistura de ambos HDS (*Hybrid Differencing Scheme*).

A resolução de um problema utilizando o método de volumes finitos pode gerar duas abordagens sobre a solução das equações: a primeira abordagem é nomeada acoplada, onde soluciona apenas um sistema de equações formado por todas as equações que representa o modelo; por outro lado, a segunda abordagem trata-se de resolver as equações sem que haja ligação entre elas, isto é, de modo independente. Esse segundo modo de resolução é chamado segregado e acaba necessitando de uma etapa de correção ao fim da resolução. Utilizando o método de volumes finitos para a discretização, obtém-se um sistema de equações esparso e, diante disso, é indispensável considerar essa propriedade nos algoritmos de solução a fim de diminuir o esforço computacional [11, 12].

De modo geral, pode-se considerar métodos diretos: LU e Cholesky, por exemplo; ou iterativos: Gauss-Seidel, o método GMRES (*Generalized Minimal Residual*) [62], o método de CG (*Conjugate Gradient*) e seus derivados [23, 65, 66], métodos de malhas múltiplas como o GAMG (*Geometric-Algebraic Multi-Grid*) [60, 68]. Além disso, pode-se considerar alguns pré-condicionadores, por exemplo, DIC (*Diagonal incomplete-Cholesky*) [1], DILU (*Diagonal incomplete-LU*) [32] e o AMG (*Algebraic Multi-Grid*) [6]. Ressalta-se que o uso da forma segregada deve ser acompanhado por um procedimento iterativo para resolver o acoplamento pressão-velocidade, por exemplo, SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) [44, 45, 63] e o PISO (*Pressure Implicit Splitting of Operators*) [25, 63].

A.1.2 Acoplamento Pressão-Velocidade

Quando o campo de velocidade é desconhecido, a sua obtenção surge durante o processo de busca da solução, como qualquer outra variável do escoamento. Como pode ser observado, a velocidade é governada pela equação do momento, que é uma ocorrência especial da equação geral de transporte [44] e, além disso, deve satisfazer a equação de continuidade. Isso pode ser mostrado considerando as equações que governam um escoamento bidimensional

Equação do momento em x:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u. \quad (\text{A.1})$$

Equação do momento em y:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v. \quad (\text{A.2})$$

Equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0. \quad (\text{A.3})$$

A solução do conjunto de equações (A.1) – (A.3) apresenta dois novos problemas [63]:

- Os conteúdos convectivos das equações do momento contêm termos não lineares: por exemplo, o primeiro termo da equação (A.1) é a derivada de ρu^2 em relação a x ;
- Essas equações são intrinsecamente interligadas, porque cada componente de velocidade aparece nas equações (A.1) – (A.3). A adversidade mais complexa a ser estudada é a função empreendida pela pressão. Aparece nas duas equações de momento, mas evidentemente não existe (transporte ou outra) equação para a pressão.

Se o gradiente de pressão é conhecido, a obtenção de equações discretizadas para velocidades, a partir das equações de momento, é exatamente o mesmo que para qualquer outro escalar. Se o escoamento for compressível, a equação de continuidade pode ser usada como equação de transporte para densidade e, além de (A.1) - (A.3), a equação de energia torna-se o transporte para temperatura. Em vista disso, a pressão pode ser determinada a partir da densidade e da temperatura usando a equação do estado $p = p(\rho, T)$.

Contudo, se o escoamento for incompressível, a densidade é constante e, por definição, não está associada à pressão. Nesse caso, o acoplamento entre a pressão e a velocidade apresenta uma limitação na solução do campo de escoamento: se o campo de pressão correto for aplicado nas equações de momento, o campo de velocidade resultante deverá satisfazer a continuidade [63]. Dessa forma, inicia-se a construção do método de Volumes Finitos com a discretização do domínio do escoamento e das equações de transporte relevantes (A.1) - (A.3).

Primeiro, destaca-se que a velocidade não pode ser definida nos mesmos locais que as outras variáveis, pois se as velocidades e pressões são definidas nos nós de um volume de controle, um campo de pressão altamente não uniforme pode agir como um campo uniforme nas equações de momento discretizadas [63]. Considerando uma malha uniforme representada na Figura A.2, supõe que de alguma forma obteve-se um campo de pressão altamente irregular com os valores evidenciados na Figura A.2.

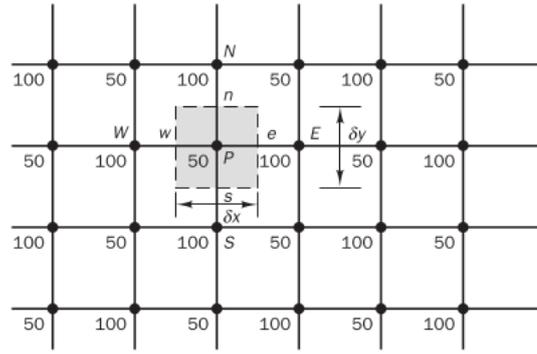


Figura A.2: Um campo de pressão: “tabuleiro de damas”.

E, então, em e e w pode-se obter as informações das pressões por interpolação linear. Dessa forma, $\frac{\partial p}{\partial x}$ é dado por

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_e - p_w}{\delta x} = \frac{\left(\frac{p_E + p_P}{2} - \frac{p_P + p_W}{2} \right)}{\delta x} = \frac{p_E - p_W}{2\delta x}. \quad (\text{A.4})$$

Da mesma forma, o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial y}$ para a equação do momento v é avaliado como

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_N - p_S}{2\delta y}. \quad (\text{A.5})$$

Nota-se que a pressão no nó central (P) não aparece em (A.4) e (A.5) e, novamente, utilizando os valores da pressão apresentados na Figura A.2, obtém-se que os gradientes discretizados são zero em todos os pontos nodais. Consequentemente, implicaria em um comportamento não-físico para o problema [63].

Se as velocidades são definidas nos nós da malha, a influência da pressão não é representada adequadamente nas equações de momento discretizadas. Uma solução para esse problema é usar uma malha escalonada para componentes de velocidade, apresentada por Harlow [22]. E, como já dito, a ideia é examinar algumas das variáveis em pontos nodais comuns, mas calcular as componentes de velocidade em malhas escalonadas centradas nas faces da célula. A Figura A.3 ilustra a disposição dos pontos nodais e das faces da célula.

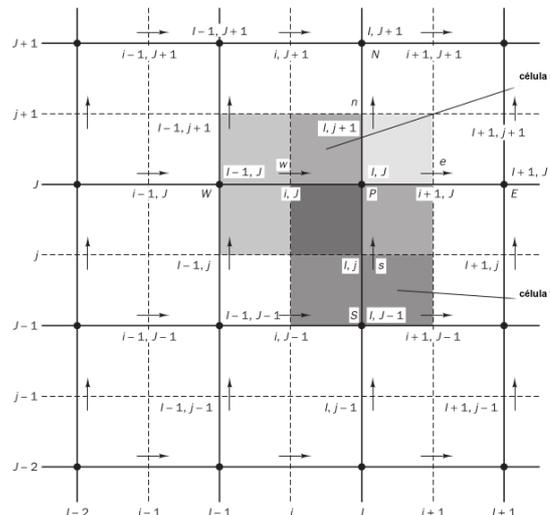


Figura A.3: Disposição dos pontos nodais.

As variáveis escalares, incluindo pressão, são armazenadas nos nós marcados (\bullet), enquanto as velocidades são definidas nas faces da célula e são indicadas por setas. As setas horizontais (\rightarrow) indicam os locais para as velocidades u e as verticais (\uparrow) indicam os locais para a velocidade v . Além da notação E, W, N, S, a Figura A.3 também introduz um novo sistema de notação baseado na numeração de linhas de grade e faces da célula [63].

Decorre-se diretamente do uso de malhas escalonadas que a transferência de massa F , por meio das faces da célula de controle, pode ser calculado sem nenhuma interpolação [44]. Desse modo, utilizando as malhas escalonadas, obtêm-se os seguintes resultados para ∇p

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_E - p_W}{\delta x_u}, \quad (\text{A.6})$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_N - p_S}{\delta y_v}, \quad (\text{A.7})$$

onde δx_u e δy_v são as larguras do volume de controle u e v , respectivamente.

Considerando o campo de pressão da malha, apresentada na Figura A.3, e substituindo os valores da pressão nos nós das equações (A.6) e (A.7) gera termos significativos de gradiente de pressão diferente de zero. O escalonamento da velocidade evita o comportamento irreal da equação de momento discretizada para pressões. Uma outra vantagem é que as velocidades são obtidas exatamente nos locais onde são necessárias para os cálculos de transporte escalar e, portanto, nenhuma interpolação é necessária para calculá-las nas faces das células [63].

Para o cálculo dos coeficientes de difusão e convecção utilizou-se um sistema subscrito, apresentado na Figura A.3, baseado na localização precisa dos nós da malha e faces da célula. Diante do exposto, a equação discreta do momento para a velocidade u em (i, J) expressa no novo sistema de coordenadas, é dada por

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} - \frac{p_{I,J} - p_{I-1,J}}{\delta x_u} \Delta V_u + \bar{S} \Delta V_u,$$

ou

$$a_{i,J}u_{i,J} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J}, \quad (\text{A.8})$$

onde ΔV_u é o volume da célula u , $b_{i,J} = \bar{S} \Delta V_u$ é o termo fonte do momento, $A_{i,J}$ é a área da face da célula (leste ou oeste) do volume de controle u e os coeficientes vizinhos (a_{nb}) avaliam o predomínio da difusão e convecção na célula de controle [44]. O termo fonte do gradiente de pressão em (A.8) foi discretizado por meio de uma interpolação linear entre os nós de pressão nos limites do volume de controle u .

No novo sistema de numeração, os vizinhos E, W, N e S envolvidos no somatório $\sum a_{nb}u_{nb}$ são $(i-1, J)$, $(i+1, J)$, $(i, J-1)$ e $(i, J+1)$. Suas localizações e as velocidades prevaletentes são mostradas em mais detalhes na Figura A.4.

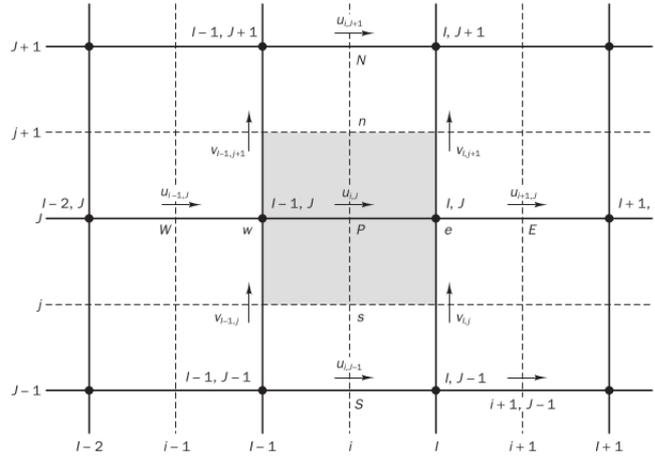


Figura A.4: Um volume de controle u e suas componentes de velocidade vizinhos.

Por analogia, a equação do momento v se torna

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (p_{I,J-1} - p_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j}. \quad (\text{A.9})$$

A Figura A.5 mostra os vizinhos envolvidos no somatório $\sum a_{nb}v_{nb}$ e as velocidades prevalentes.

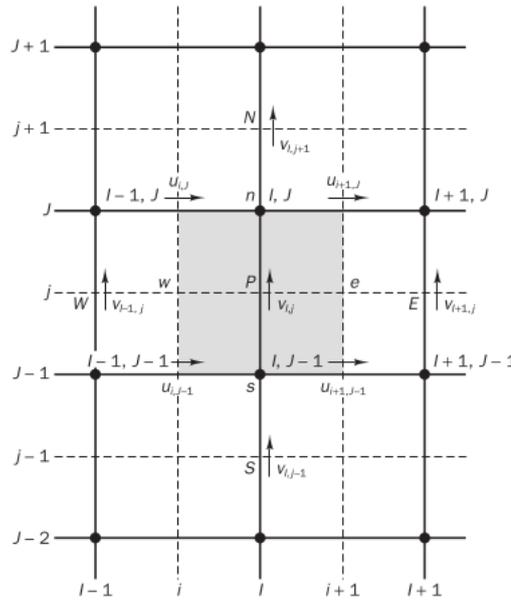


Figura A.5: Um volume de controle v e suas componentes de velocidade vizinhos.

A.1.2.1 Algoritmo SIMPLE

O acrônimo SIMPLE significa Método Semi-Implícito para Equações Vinculadas à Pressão. O algoritmo foi originalmente apresentado em 1972 por Patankar e Spalding [45] e é essencialmente um procedimento de previsão e correção para o cálculo da pressão em uma malha escalonada, apresentada acima [63].

O algoritmo SIMPLE deve iniciar calculando um campo de pressão p^* . As equações de momento discretas (A.8) e (A.9) são determinadas utilizando a pressão calculada para obter as componentes de velocidade u^* e v^* da seguinte maneira

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,J}^* - p_{I,J}^*)A_{i,J} + b_{i,J}, \quad (\text{A.10})$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{I,J-1}^* - p_{I,J}^*)A_{I,j} + b_{I,j}. \quad (\text{A.11})$$

Agora, define-se a correção p' como a diferença entre o campo de pressão correto p e o campo de pressão estimado p^* . Semelhantemente, as correções de velocidade u' e v' para relacionar as velocidades corretas u e v com as velocidades calculadas u^* e v^* também são definidas de modo que

$$p = p^* + p', \quad (\text{A.12})$$

$$u = u^* + u', \quad (\text{A.13})$$

$$v = v^* + v'. \quad (\text{A.14})$$

Subtraindo as equações (A.10) e (A.11) das equações (A.8) e (A.9), respectivamente, e substituindo as equações (A.12)–(A.14) nas equações resultantes, obtêm-se

$$a_{i,J}u'_{i,J} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})A_{i,J}, \quad (\text{A.15})$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})A_{I,j}. \quad (\text{A.16})$$

Para continuar o processo é introduzida uma aproximação, os termos $\sum a_{nb}u'_{nb}$ e $\sum a_{nb}v'_{nb}$ são descartados, simplificando as equações (A.15) e (A.16) de correções de velocidade. A omissão desses termos é a principal aproximação do algoritmo SIMPLE. E, dessa forma, obtêm-se

$$u'_{i,J} = d_{i,J}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}), \quad (\text{A.17})$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}), \quad (\text{A.18})$$

$$\text{onde } d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}} \text{ e } d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}. \quad (\text{A.19})$$

As equações (A.17) e (A.18) tratam-se das correções que devem ser utilizadas nas velocidades aplicando-as nas equações (A.13) e (A.14), que fornecem

$$u_{i,J} = u_{i,J}^* + d_{i,J}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}), \quad (\text{A.20})$$

$$v_{I,j} = v_{I,j}^* + d_{I,j}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}). \quad (\text{A.21})$$

Expressões semelhantes existem para $u_{i+1,J}$ e $v_{I,j+1}$:

$$u_{i+1,J} = u_{i+1,J}^* + d_{i+1,J}(p'_{I,J} - p'_{I+1,J}), \quad (\text{A.22})$$

$$v_{I,j+1} = v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1}(p'_{I,J} - p'_{I,J+1}), \quad (\text{A.23})$$

$$\text{onde } d_{i+1,J} = \frac{A_{i+1,J}}{a_{i+1,J}} \text{ e } d_{I,j+1} = \frac{A_{I,j+1}}{a_{I,j+1}}. \quad (\text{A.24})$$

Até agora apenas considerou-se as equações do momento, mas a velocidade também está submetida a satisfazer a equação de conservação de massa (A.3). Isto posto, escreve-se

$$[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}] + [(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}] = 0. \quad (\text{A.25})$$

Considerando o modo discreto, a conservação de massa é satisfeita para o volume de controle escalar como ilustrado na Figura A.6.

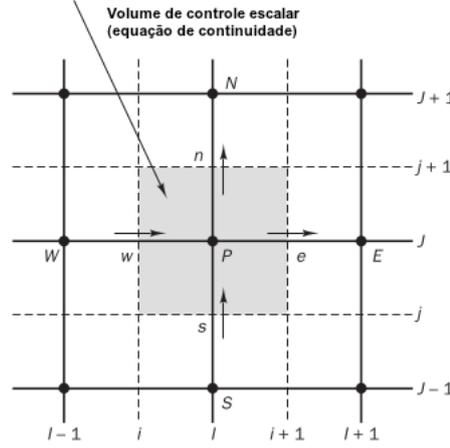


Figura A.6: O volume de controle escalar usado para a discretização da equação de continuidade.

A substituição das velocidades corrigidas das equações (A.20) – (A.23) na equação de continuidade discretizada (A.25) fornece

$$\begin{aligned} & [\rho_{i+1,J} A_{i+1,J} (u_{i+1,J}^* + d_{i+1,J} (p'_{I,J} - p'_{I+1,J})) - \rho_{i,J} A_{i,J} (u_{i,J}^* + d_{i,J} (p'_{I-1,J} - p'_{I,J}))] + \\ + & [\rho_{I,j+1} A_{I,j+1} (v_{I,j+1}^* + d_{I,j+1} (p'_{I,J} - p'_{I,J+1})) - \rho_{I,j} A_{I,j} (v_{I,j}^* + d_{I,j} (p'_{I,J-1} - p'_{I,J}))] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Manipulando algebricamente, obtém-se

$$\begin{aligned} & [(\rho dA)_{i+1,J} + (\rho dA)_{i,J} + (\rho dA)_{I,j+1} + (\rho dA)_{I,j}] p'_{I,J} = \\ = & (\rho dA)_{i+1,J} p'_{I+1,J} + (\rho dA)_{i,J} p'_{I-1,J} + (\rho dA)_{I,j+1} p'_{I,J+1} + (\rho dA)_{I,j} p'_{I,J-1} + \\ + & [(\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}]. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Identificando os coeficientes de p' , a equação (A.27) pode ser escrita como

$$a_{I,J} p'_{I,J} = a_{i+1,J} p'_{i+1,J} + a_{i-1,J} p'_{i-1,J} + a_{I,j+1} p'_{I,j+1} + a_{I,j-1} p'_{I,j-1} + b'_{I,J}, \quad (\text{A.28})$$

onde $a_{I,J} = a_{i+1,J} + a_{i-1,J} + a_{I,j+1} + a_{I,j-1}$ e os coeficientes são dados abaixo

$$\begin{aligned} a_{i+1,J} &= (\rho dA)_{i+1,J}, \\ a_{i-1,J} &= (\rho dA)_{i,J}, \\ a_{I,j+1} &= (\rho dA)_{I,j+1}, \\ a_{I,j-1} &= (\rho dA)_{I,j}, \\ b'_{I,J} &= (\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}, \end{aligned}$$

onde desempenha o papel da equação de conservação de massa discretizada sob efeito da equação de correção da pressão p' . O termo fonte b' na equação é o desequilíbrio da continuidade resultante do campo incorreto de velocidade u^* e v^* . Resolvendo a equação (A.28), o campo de correção da pressão p' pode ser obtido em todos os pontos. Uma vez conhecido o campo de correção da pressão, o campo de pressão correto pode ser obtido usando a fórmula (A.12) e as componentes de velocidade através de fórmulas de correção (A.20) – (A.23). A omissão de termos como $\sum a_{nb} u'_{nb}$ na derivação não afeta a solução final porque a correção da pressão e a velocidade serão todas nulas em uma solução convergente, dando $p^* = p$, $u^* = u$ e $v^* = v$ [63].

A equação de correção da pressão é vulnerável à divergência, a menos que seja usado um sub-relaxamento durante o processo iterativo, novas e melhoradas pressões p^{new} são obtidas com

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p', \quad (\text{A.29})$$

onde α_p é o coeficiente de sub-relaxamento da pressão e o mesmo pode ser feito para as velocidades. As componentes de velocidade iterativamente aprimoradas u^{new} e v^{new} são obtidas de

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)}, \quad (\text{A.30})$$

$$v^{new} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)}, \quad (\text{A.31})$$

onde α_u e α_v são os fatores de sub-relaxamento da velocidade u e v . u e v são as componentes de velocidade corrigidas sem relaxamento e $u^{(n-1)}$ e $v^{(n-1)}$ representam seus valores obtidos na iteração anterior.

Uma escolha adequada dos coeficientes de sub-relaxamento é essencial para simulações econômicas. Um valor muito alto desses coeficientes de sub-relaxamento pode levar a soluções iterativas oscilatórias ou até mesmo divergentes, e um valor muito pequeno causará uma convergência extremamente lenta. Infelizmente, os seus valores ótimos dependem do escoamento e devem ser buscados caso a caso [63].

O algoritmo SIMPLE fornece um método de cálculo de pressão e velocidade, é um método iterativo e, quando outros escalares são acoplados às equações de momento, o cálculo precisa ser realizado sequencialmente. A sequência de operações de um procedimento que emprega o algoritmo SIMPLE é apresentada na Figura A.7 [63].

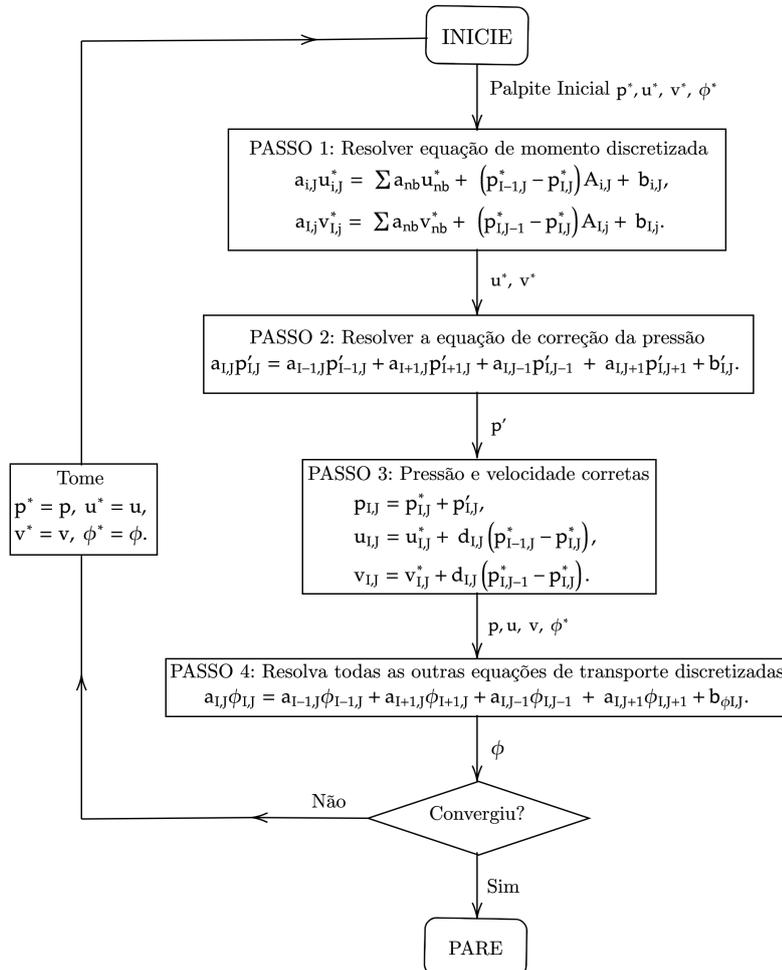


Figura A.7: O algoritmo SIMPLE.

A.1.2.2 Algoritmo PISO

O acrônimo PISO significa Pressão Implícita com Divisão de Operadores, foi desenvolvido em 1986 por Issa [25], é um procedimento para o cálculo do acoplamento pressão-velocidade desenvolvido originalmente para o cálculo não iterativo de escoamentos compressíveis instáveis. Foi adaptado, com sucesso, para a solução iterativa de problemas em estado estacionário. O PISO envolve uma etapa preditora e duas etapas do corretor e pode ser visto como uma extensão do SIMPLE, com uma etapa adicional do corretor para aprimorá-lo [63].

Etapa do preditor

As equações do momento discretas (A.10) – (A.11) são calculadas utilizando a pressão p^* , que irá fornecer as velocidades u^* e v^* usando o mesmo método que o algoritmo SIMPLE.

Corretor passo 1

As velocidades u^* e v^* não satisfarão a conservação de massa, exceto se a pressão p^* estiver correta. O primeiro passo do corretor referente ao algoritmo SIMPLE é estabelecido para fornecer as velocidades (u^{**}, v^{**}) que satisfaça a equação de continuidade discretizada. Percebe-se que as equações de correção obtidas são semelhantes ao algoritmo SIMPLE (A.17) – (A.18), mas como há uma etapa de correção adicional no algoritmo PISO, usa-se a seguinte notação

$$\begin{aligned} p^{**} &= p^* + p', \\ u^{**} &= u^* + u', \\ v^{**} &= v^* + v'. \end{aligned}$$

Essas fórmulas são utilizadas para definir as velocidades corrigidas u^{**} e v^{**} :

$$u_{i,J}^{**} = u_{i,J}^* + d_{i,J}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}), \quad (\text{A.32})$$

$$v_{I,j}^{**} = v_{I,j}^* + d_{I,j}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}). \quad (\text{A.33})$$

Como no algoritmo SIMPLE, as equações (A.32) – (A.33) são substituídas na equação de continuidade discretizada (A.25) para originar a equação de correção da pressão (A.28) com seus coeficientes e termo fonte. Uma vez conhecidas as correções de pressão, as componentes de velocidade u^{**} e v^{**} podem ser obtidas através das equações (A.32) – (A.33).

Corretor passo 2

Para aprimorar o procedimento SIMPLE, o PISO executa uma segunda etapa do corretor. As equações do momento discretizadas para u^{**} e v^{**} são

$$a_{i,J}u_{i,J}^{**} = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,J}^{**} - p_{I,J}^{**})A_{i,J} + b_{i,J}, \quad (\text{A.34})$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^{**} = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{I,J-1}^{**} - p_{I,J}^{**})A_{I,j} + b_{I,j}. \quad (\text{A.35})$$

Um campo de velocidade corrigido duas vezes (u^{***}, v^{***}) pode ser obtido resolvendo as equações de momento novamente

$$a_{i,J}u_{i,J}^{***} = \sum a_{nb}u_{nb}^{**} + (p_{I-1,J}^{***} - p_{I,J}^{***})A_{i,J} + b_{i,J}, \quad (\text{A.36})$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^{***} = \sum a_{nb}v_{nb}^{**} + (p_{I,J-1}^{***} - p_{I,J}^{***})A_{I,j} + b_{I,j}. \quad (\text{A.37})$$

Observa-se que os termos da soma são avaliados usando as velocidades u^{**} e v^{**} calculadas na etapa anterior. Subtraindo a equação (A.34) de (A.36) e (A.35) de (A.37) obtém-se

$$u_{i,J}^{***} = u_{i,J}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(u_{nb}^{**} - u_{nb}^*)}{a_{i,J}} + d_{i,J}(p''_{I-1,J} - p''_{I,J}), \quad (\text{A.38})$$

$$v_{I,j}^{***} = v_{I,j}^{**} + \frac{\sum a_{nb}(v_{nb}^{**} - v_{nb}^*)}{a_{I,j}} + d_{I,j}(p''_{I,J-1} - p''_{I,J}), \quad (\text{A.39})$$

onde p'' é a segunda correção aplicada a pressão para que p^{***} possa ser obtido por

$$p^{***} = p^{**} + p'' = p^* + p' + p''. \quad (\text{A.40})$$

A substituição de u^{***} e v^{***} na equação de continuidade discretizada (A.25) produz uma segunda equação de correção da pressão

$$a_{I,J}p''_{I,J} = a_{I+1,J}p''_{I+1,J} + a_{I-1,J}p''_{I-1,J} + a_{I,J+1}p''_{I,J+1} + a_{I,J-1}p''_{I,J-1} + b''_{I,J}, \quad (\text{A.41})$$

com $a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$, e os coeficientes vizinhos são determinados por

$$\begin{aligned} a_{I+1,J} &= (\rho dA)_{i+1,J}, \\ a_{I-1,J} &= (\rho dA)_{i,J}, \\ a_{I,J+1} &= (\rho dA)_{I,j+1}, \\ a_{I,J-1} &= (\rho dA)_{I,j}, \\ b''_{I,J} &= \left[\left(\frac{\rho A}{a} \right)_{i,J} \sum a_{nb}(u_{nb}^{**} - u_{nb}^*) - \left(\frac{\rho A}{a} \right)_{i+1,J} \sum a_{nb}(u_{nb}^{**} - u_{nb}^*) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\rho A}{a} \right)_{I,j} \sum a_{nb}(v_{nb}^{**} - v_{nb}^*) - \left(\frac{\rho A}{a} \right)_{I,j+1} \sum a_{nb}(v_{nb}^{**} - v_{nb}^*) \right]. \end{aligned}$$

O campo de velocidade corrigido duas vezes é obtido das equações (A.38) – (A.39). No cálculo não iterativo de escoamentos instáveis, o campo de pressão p^{***} e o campo de velocidade u^{***} e v^{***} são considerados os u , v e p corretos [63]. A sequência de operações para um cálculo PISO iterativo no estado estacionário é apresentada na Figura A.8 [63].

A.1.2.3 Acoplamento momento-tensão e viscosidade tensorial

O presente trabalho trata-se de um escoamento de fluido viscoelástico, onde o *solver* utilizado foi o `viscoelasticFluidFoam` e, por este motivo, as equações do momento apresentam os tensores não-Newtonianos não abordados na discussão acoplamento pressão-velocidade.

Em relação ao acoplamento momento-tensão e a estabilização numérica na solução da equação do momento, a estratégia empregada consiste em decompor a tensão viscoelástica em um componente implícito alinhado com \mathbf{D} , definido com base na viscosidade tensorial $\boldsymbol{\eta}_T$ e uma correção explícita [13].

O procedimento usado para resolver o problema do escoamento de fluido viscoelástico pode ser resumido em quatro passos [13]:

1. Com os campos iniciais dados de velocidade \mathbf{u} , tensão \mathbf{T} e pressão p , são realizados cálculos explícitos do gradiente de pressão e o divergente de tensão e, subseqüentemente, a equação do momento é resolvida implicitamente para cada componente do vetor velocidade, calculando uma nova estimativa de campo de velocidade \mathbf{u}^* .

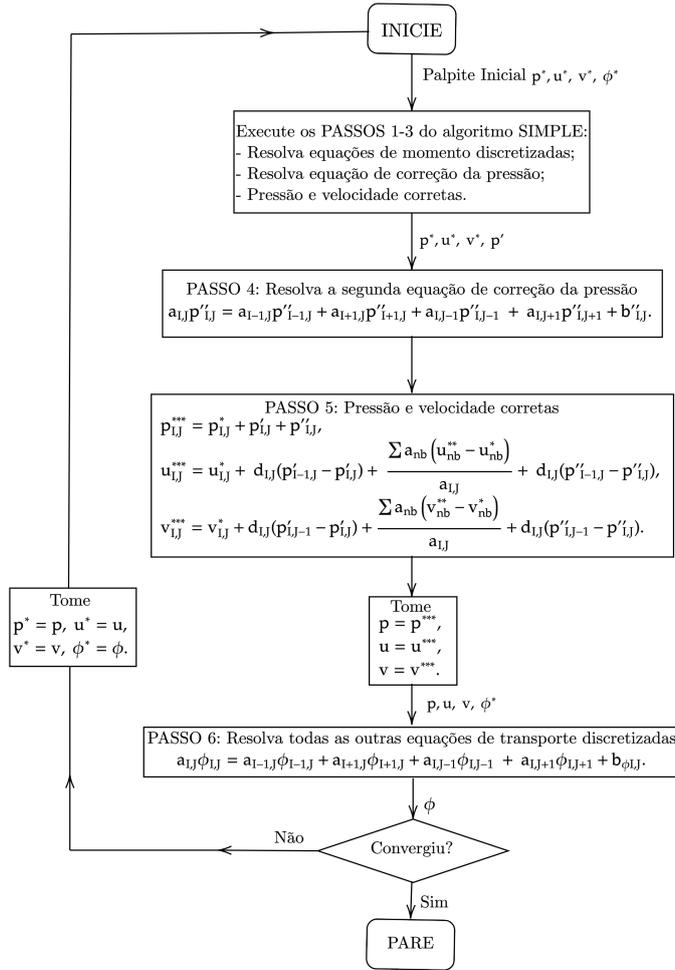


Figura A.8: O algoritmo PISO.

2. Com os novos valores de velocidade \mathbf{u}^* , o novo campo de pressão p^* é estimado e, posteriormente, a correção da velocidade é realizada, levando a um novo campo de velocidade \mathbf{u}^{**} que satisfaz a equação de continuidade. Nesta etapa, o algoritmo SIMPLE ou PISO pode ser usado para obter p^* e \mathbf{u}^{**} .
3. Com o campo de velocidade corrigida \mathbf{u}^{**} , a nova estimativa \mathbf{T}^* para o campo tensor de tensão é calculado resolvendo a equação constitutiva especificada.
4. Os passos 1, 2 e 3 podem ser repetidos recursivamente a cada passo de tempo. Para isso, \mathbf{u} , p e \mathbf{T} são atualizados com \mathbf{u}^{**} , p^* e \mathbf{T}^* , respectivamente.