



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Câmpus de São José do Rio Preto

Rodrigo dos Santos Bononi

Tipos de homotopia das componentes conexas por  
caminho do espaço das funções contínuas  $G(X, S^n)$ ,  
onde  $X = S^{n+k}$ ,  $n \geq 1$  e  $k = 0, 1$

São José do Rio Preto  
2019



Rodrigo dos Santos Bononi

Tipos de homotopia das componentes conexas por  
caminho do espaço das funções contínuas  $G(X, S^n)$ ,  
onde  $X = S^{n+k}$ ,  $n \geq 1$  e  $k = 0, 1$

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. João Peres Vieira  
Co-orientador: Prof. Dr. Thiago de Melo

Financiadora: CAPES

São José do Rio Preto  
2019

B719t

Bononi, Rodrigo

Tipos de homotopia das componentes conexas por caminho do espaço das funções contínuas  $G(X, S^n)$ , onde  $X = S^{n+k}$ ,  $n \geq 1$  e  $k=0,1$  / Rodrigo Bononi. -- São José do Rio Preto, 2019

104 p.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: João Peres Vieira

Coorientador: Thiago de Melo

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Topologia. 4. Homologia (Matemática). I. Título.

Rodrigo dos Santos Bononi

Tipos de homotopia das componentes conexas por  
caminho do espaço das funções contínuas  $G(X, S^n)$ ,  
onde  $X = S^{n+k}$ ,  $n \geq 1$  e  $k = 0, 1$

Dissertação apresentada como parte dos  
requisitos para obtenção do título de Mestre  
em Matemática, junto ao Programa de Pós-  
Graduação em Matemática, do Instituto de  
Biociências, Letras e Ciências Exatas da  
Universidade Estadual Paulista “Júlio de  
Mesquita Filho”, Câmpus de São José do  
Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

---

Prof. Dr. João Peres Vieira  
Orientador

---

Profa. Dra. Erminia de Lourdes Campello Fanti  
Departamento de Matemática - UNESP - IBILCE - SJRP

---

Profa. Dra. Karen Regina Panzarin  
Departamento de Matemática - UFSCar - São Carlos

São José do Rio Preto  
19 de fevereiro de 2019



*Dedico a Deus e aos meus pais*



## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a Deus, por me conceder a graça de concluir mais esta etapa, por me fortalecer em todos os momentos difíceis e por colocar pessoas maravilhosas em minha vida durante toda essa jornada.

Aos meus pais, Maria Nelci dos Santos Bononi e João Bononi, por todo suporte me fornecido durante toda minha vida. Saibam que são responsáveis por me manter motivado e que minha maior alegria é orgulha-lós. Se hoje estou aqui os responsáveis são vocês. Amo muito vocês.

À minha sobrinha sapeca, Manuela Nizato Bononi, por me alegrar nos momentos difíceis e também por fazer parte de minha motivação de vencer.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Peres Vieira, pela paciência, disponibilidade, atenção e cuidado para o desenvolvimento deste trabalho. Também pela amizade e companheirismo durante todo o ano de 2018, me fortalecendo e dando apoio de forma incondicional. De coração, o meu muito obrigado.

À Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela paciência, atenção, dedicação e amizade durante toda minha jornada acadêmica até aqui. Por me apresentar o Prof. Dr. João Peres Vieira e por ser essa pessoa incrível e amável.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Thiago de Melo, pela paciência e disponibilidade para o desenvolvimento deste trabalho.

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, pelos ensinamentos, amizade, conselhos e ajuda nos anos de PET e em minha jornada acadêmica até aqui.

Aos professores Prof. Dr. Antonio Aparecido de Andrade, Prof. Dr. Márcio Ricardo Alves Gouveia, Profa. Dr. Waldemar Donizete Bastos, Prof. Dr. Ali Messaoudi e Prof. Dra. Eliris Cristina Rizziolli, pelos ensinamentos e amizade.

Aos professores da Comissão Examinadora.

À CAPES, pelo apoio financeiro sem o qual não seria possível a realização desse projeto.

À UNESP, em especial, ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas -

IBILCE, São José do Rio Preto e Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE, Rio Claro.

Aos meus amigos, em especial, Plínio Sicuti, Samuel Souza, Adriano Gois, Wesley Oliveira, Amanda Souza, Carlos Vicente, Lucas Queiroz, Lucas Morelli, André do Amaral, Vinicius Fazani, Wilson Capivara, Rodrigo de Jesus, Marco Contessoto, Paulo Vecchia, Gabriel Galdino, Ewerton Xavei, Tayrone Xavei e Junior Nicolau.

E, por fim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste sonho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

*O dia está na minha frente esperando para ser o que eu quiser.*

*E aqui estou eu, o escultor que pode lhe dar forma.*

*Tudo depende de mim.*

Charlie Chaplin



## RESUMO

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos conexos por caminhos e denotemos por  $G(X, Y) = Y^X$  o espaço das funções contínuas entre o espaços  $X$  e  $Y$  com a topologia compacto-aberta. Neste trabalho, apresentamos uma classificação completa dos tipos de homotopia das componentes conexas por caminho do espaço das funções contínuas  $G(X, S^n)$  onde  $X = S^{n+k}$ ,  $n \geq 1$  e  $k = 0, 1$ .

Palavras-chave: Álgebra, Topologia, Homotopia.



## ***ABSTRACT***

*Let  $X$  and  $Y$  be path connected topological spaces and we denote by  $G(X, Y) = Y^X$  the continuous map space between  $X$  and  $Y$  with the compact-open topology. In this work, we present a complete classification of the homotopy types of the path connected components of the continuous map space  $G(X, S^n)$  where  $X = S^{n+k}$ ,  $n \geq 1$  and  $k = 0, 1$ .*

*Keywords: Algebra, Topology, Homotopy.*



# Sumário

|                                                                                                              |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introdução</b>                                                                                            | <b>19</b> |
| <b>1 Homotopia</b>                                                                                           | <b>21</b> |
| 1.1 Aplicações Homotópicas . . . . .                                                                         | 21        |
| 1.1.1 Homotopia de pares e homotopia relativa . . . . .                                                      | 24        |
| 1.2 Equivalência de Homotopia . . . . .                                                                      | 27        |
| 1.3 Espaços contráteis . . . . .                                                                             | 29        |
| <b>2 Introdução a espaços fibrados e espaços ANR</b>                                                         | <b>33</b> |
| 2.1 Definição de espaços fibrados . . . . .                                                                  | 33        |
| 2.2 Espaços AR e ANR . . . . .                                                                               | 35        |
| 2.3 Espaço de funções e a topologia compacto-aberta . . . . .                                                | 38        |
| 2.4 Fibrações de espaços de funções . . . . .                                                                | 44        |
| <b>3 Grupos de homotopia de ordens superiores</b>                                                            | <b>49</b> |
| 3.1 Definição de Grupos de Homotopia de ordens superiores . . . . .                                          | 49        |
| 3.2 Descrições alternativas para os grupos de homotopia de ordens superiores                                 | 53        |
| 3.3 Os grupos de homotopia relativa de ordens superiores . . . . .                                           | 56        |
| 3.4 O operador bordo . . . . .                                                                               | 61        |
| 3.5 Transformação induzida . . . . .                                                                         | 61        |
| 3.6 As propriedades fundamentais . . . . .                                                                   | 62        |
| 3.6.1 A propriedade da sequência exata de homotopia . . . . .                                                | 63        |
| 3.6.2 A propriedade de homotopia . . . . .                                                                   | 65        |
| 3.6.3 A propriedade da fibração . . . . .                                                                    | 66        |
| 3.7 Sequência de homotopia de uma fibração . . . . .                                                         | 68        |
| <b>4 Independência do ponto base e o conceito de <math>n</math>-simplicidade de um espaço <math>X</math></b> | <b>69</b> |
| 4.1 O isomorfismo entre os grupos de homotopia de um espaço $X$ e a independência do ponto base . . . . .    | 69        |
| 4.2 Sistema local de grupos e a ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_n(X, x_0)$ . . . . .                         | 73        |
| 4.3 Espaços $n$ -simples . . . . .                                                                           | 76        |

|          |                                                                                                                                                                                               |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>5</b> | <b>O Isomorfismo de Hurewicz e o produto de Whitehead</b>                                                                                                                                     | <b>81</b>  |
| 5.1      | O Isomorfismo de Hurewicz . . . . .                                                                                                                                                           | 81         |
| 5.2      | Uma introdução ao produto de Whitehead . . . . .                                                                                                                                              | 85         |
| 5.3      | O Teorema de Whitehead . . . . .                                                                                                                                                              | 86         |
| 5.4      | Definição alternativa para o produto de Whitehead . . . . .                                                                                                                                   | 91         |
| <b>6</b> | <b>Tipos de homotopia das componentes conexas por caminho do espaço das funções contínuas de <math>S^{n+k}</math> em <math>S^n</math>, onde <math>n \geq 1</math> e <math>k = 0, 1</math></b> | <b>95</b>  |
| 6.1      | A importância de uma seção para a fibração avaliação $\tau_\alpha$ . . . . .                                                                                                                  | 95         |
| 6.2      | A ordem de $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$ para $n$ par e $\alpha \in \pi_n(S^n)$ . . . . .                                                                                                   | 96         |
| 6.3      | Uma condição necessária e suficiente para $G_\alpha(S^m, S^n)$ e $G_0(S^m, S^n)$ possuírem o mesmo tipo de homotopia, com $\alpha \in \pi_m(S^n)$ . . . . .                                   | 98         |
| 6.4      | A divisão por tipos de homotopia das componentes conexas por caminhos dos espaços $G(S^n, S^n)$ e $G(S^{n+1}, S^n)$ . . . . .                                                                 | 100        |
|          | <b>Referências</b>                                                                                                                                                                            | <b>103</b> |

# Introdução

Seja  $G(X, Y) = Y^X$  o espaço das funções contínuas (não necessariamente baseadas) entre espaços conexos  $X$  e  $Y$  com a topologia compacto-aberta. O espaço  $G(X, Y)$  em geral é desconexo, com componentes conexas por caminhos em correspondência biunívoca com o conjunto  $[X, Y]$  de classes de homotopia (livre) de aplicações. Além disso, diferentes componentes podem ter tipos de homotopia distintos.

Um problema básico da Teoria de Homotopia é determinar quando duas componentes conexas por caminhos de  $G(X, Y)$  são homotopicamente equivalentes, ou mais geralmente, classificar as componentes de  $G(X, Y)$  a menos de tipo de homotopia.

Para um ponto base  $x_0 \in X$ , temos a aplicação avaliação (ou avaliação)  $\tau : G(X, Y) \rightarrow Y$  definida por  $\tau(g) = g(x_0)$  para  $g \in Y^X$ , que é uma fibração. Seja  $G_f(X, Y)$  a componente conexa por caminhos de  $G(X, Y)$  que contém uma dada aplicação  $f : X \rightarrow Y$ , e denotemos por  $\tau_f : G_f(X, Y) \rightarrow Y$  a restrição de  $\tau$  a  $G_f(X, Y)$ , que também é uma fibração.

Alguns trabalhos sobre tais classificações são da década de 1940. Whitehead ([20, Teorema 2.8]) considerou o caso em que  $X = S^m$  é a  $m$ -esfera unitária e provou que  $G_f(S^m, Y)$  é homotopicamente equivalente a  $G_0(S^m, Y)$  se, e somente se, a fibração avaliação  $\tau_f : G_f(S^m, Y) \rightarrow Y$  admite uma seção, onde 0 denota a aplicação constante. Ainda, alguns resultados de Hansen (e.g. [3, 4]) e, posteriormente, de McClendon ([15]) também tratam de problemas de classificação.

Neste projeto, apresentamos um estudo detalhado do artigo [4], cujo resultado principal fornece uma classificação completa dos tipos de homotopia das componentes do espaço  $G(S^n, S^n)$ . Uma classificação das componentes de  $G(S^{n+1}, S^n)$  também é apresentada.

Hansen, em [5], obteve uma classificação das componentes conexas por caminhos de  $G(M^n, S^n)$ , onde  $M^n$  é uma  $n$ -variedade específica. Em [2], Golasiński e Melo fizeram uso dos grupos de Gottlieb das esferas para estudar as componentes dos espaços  $G(S^{n+k}, S^n)$  para  $8 \leq k \leq 13$ .

Um resultado bem conhecido em Teoria de Homotopia é o cálculo dos grupos de homotopia do círculo. Facilmente encontramos na literatura o fato de que  $\pi_2(S^1) = 0$ , ou seja, qualquer aplicação contínua de  $S^2$  em  $S^1$  é homotópica à aplicação constante. Porém, não tão conhecido (ou pelo menos, divulgado nos livros clássicos sobre o as-

sunto) é o tipo de homotopia do espaço de funções  $G(S^2, S^1)$ . Mais precisamente, sabendo-se que existe apenas a componente conexa por caminhos  $G_0(S^2, S^1)$ , qual seria o seu tipo de homotopia?

Nesta mesma linha de raciocínio, sabemos que  $\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}$ , fornecendo assim uma quantia enumerável de componentes conexas por caminhos no espaço  $G(S^3, S^2)$ . Mas, o que podemos dizer sobre os tipos de homotopia de tais componentes?

# 1 Homotopia

Neste capítulo introduziremos noções básicas da teoria de homotopia, as quais vão ser utilizadas em todo nosso trabalho. Trataremos fatos gerais a respeito deste assunto, ilustrando-o com aplicações e exemplos. A menos que se especifique o contrário,  $I$  denotará o intervalo  $[0, 1]$  da reta e  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  denotarão espaços topológicos conexos por caminhos e Hausdorff. No decorrer de nosso trabalho toda função (ou aplicação) entre espaços topológicos será contínua a menos que se especifique ao contrário.

## 1.1 Aplicações Homotópicas

**Definição 1.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas. Dizemos que  $f$  é **homotópica** a  $g$  se existir uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$  tal que, para todo  $x \in X$ , tem-se  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$ . A aplicação  $H$  é chamada de **homotopia** entre  $f$  e  $g$ . Escreve-se, neste caso,  $H : f \sim g$  ou simplesmente  $f \sim g$ .*

Dada uma homotopia  $H : f \sim g$ . Para cada  $t \in I$  fixo, temos uma aplicação contínua  $H_t : X \rightarrow Y$  dada por  $H_t(x) = H(x, t)$ . A coleção  $\{H_t\}_{t \in I}$  é uma família de aplicações contínuas.

**Observação 1.2.** A definição acima pode ser expressada dizendo que  $f$  e  $g$  são homotópicas se existe uma família  $\{H_t\}_{t \in I}$  de aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ , tal que  $H_0 = f$  e  $H_1 = g$ , de modo que a família  $\{H_t\}_{t \in I}$  começa com  $f$  e termina com  $g$ , com a condição que  $(x, t) \mapsto H_t(x)$  é uma aplicação contínua. Muitas vezes iremos usar as notações  $H_t : X \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) ou  $h_t : X \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) para indicar a homotopia  $H : X \times I \rightarrow Y$  entre  $f$  e  $g$ , lembrando sempre que a continuidade da homotopia é como aplicação de  $X \times I$  em  $Y$ .

Intuitivamente, o parâmetro  $t$  pode ser imaginado como sendo o tempo. A homotopia é então pensada como um processo de deformação contínua da aplicação  $f$ . Tal deformação tem lugar durante uma unidade de tempo. No instante  $t = 0$  temos  $f$  e no instante  $t = 1$  temos  $g$ . Nos instantes intermediários,  $0 < t < 1$ , as aplicações  $H_t$  fornecem os estágios intermediários da deformação.

Antes de apresentarmos alguns exemplos sobre homotopia, veremos alguns resultados.

**Proposição 1.3.** *Sejam  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações constantes, tais que  $f(x) = p$  e  $g(x) = q$ , para todo  $x \in X$ . As aplicações  $f$  e  $g$  são homotópicas se, e somente se,  $p$  e  $q$  pertencem a mesma componente conexa por caminhos do espaço  $Y$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $f$  e  $g$  são homotópicas por uma homotopia  $H : X \times I \rightarrow Y$ . Assim,  $H(x, 0) = f(x) = p$  e  $H(x, 1) = g(x) = q$ , para todo  $x \in X$ . Seja  $x_0 \in X$  fixado. Definimos um caminho  $\alpha : I \rightarrow Y$  por  $\alpha(t) = H(x_0, t)$ , para todo  $t \in I$ . Logo,  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ , e portanto,  $p$  e  $q$  pertencem a mesma componente conexa por caminhos de  $Y$ . Reciprocamente, se  $p$  e  $q$  pertencem a mesma componente conexa por caminhos de  $Y$ , existe um caminho  $\alpha : I \rightarrow Y$  tal que  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ . Definimos uma homotopia  $H : X \times I \rightarrow Y$  por  $H(x, t) = \alpha(t)$ , para todo  $x \in X$  e  $t \in I$ . Assim,  $H(x, 0) = p = f(x)$  e  $H(x, 1) = q = g(x)$ , para todo  $x \in X$ , e portanto,  $f \sim g$ .  $\square$

**Proposição 1.4.** *Sejam  $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ ,  $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$  aplicações contínuas. Se  $f_1 \sim f_2$  e  $g_1 \sim g_2$ , então  $g_1 \circ f_1 \sim g_2 \circ f_2$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, existem homotopias  $L : X \times I \rightarrow Y$  tal que  $L(x, 0) = f_1(x)$  e  $L(x, 1) = f_2(x)$ , para todo  $x \in X$ , e  $K : Y \times I \rightarrow Z$  tal que  $K(y, 0) = g_1(y)$  e  $K(y, 1) = g_2(y)$ , para todo  $y \in Y$ . Definimos  $H : X \times I \rightarrow Z$  por  $H(x, t) = K(L(x, t), t)$ .  $H$  é contínua, pois  $L$  e  $K$  o são e  $H(x, 0) = K(L(x, 0), 0) = K(f_1(x), 0) = g_1(f_1(x)) = (g_1 \circ f_1)(x)$  e  $H(x, 1) = K(L(x, 1), 1) = K(f_2(x), 1) = g_2(f_2(x)) = (g_2 \circ f_2)(x)$ . Portanto,  $H$  é uma homotopia entre  $g_1 \circ f_1$  e  $g_2 \circ f_2$ .  $\square$

**Exemplo 1.5.** Considere  $E$  um espaço vetorial normado,  $Y \subset E$  e  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas. Suponhamos que para todo  $x \in X$  o segmento de reta  $[f(x), g(x)] = \{(1-t)f(x) + tg(x) \mid t \in I\}$  esteja contido em  $Y$ . Então  $f \sim g$  pois  $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$ , com  $x \in X$  e  $t \in I$ , é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . A aplicação  $H$  assim definida é chamada de **homotopia linear**. Para cada  $x \in X$  fixo e  $t$  variando de 0 a 1, o ponto  $H(x, t)$  percorre com velocidade uniforme o segmento de reta que liga o ponto  $f(x)$  ao ponto  $g(x)$ . Em particular, se  $Y = E$ , quaisquer duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow E$  são homotópicas. Segue que toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é homotópica à aplicação constante nula.

**Exemplo 1.6.** • Sejam  $X = \{a\}$  e  $Y = \{b, c\}$ ,  $b \neq c$ , ambos com a topologia discreta e  $f, g : X \rightarrow Y$  definidas por  $f(a) = b$  e  $g(a) = c$ . Pela Proposição 1.3, segue que  $f$  e  $g$  não são homotópicas, pois as componentes conexas por caminhos de  $Y$  são  $\{b\}$  e  $\{c\}$ .

- Sejam  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas por  $f(x) = (x, x^2)$  e  $g(x) = (x, x)$ . Definamos  $H : \mathbb{R} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $H(x, t) = (x, x^2 + tx - tx^2)$  para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times I$  (homotopia linear). Claramente,  $H$  é contínua,  $H(x, 0) = f(x)$  e  $H(x, 1) = g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Logo,  $f$  é homotópica a  $g$ .

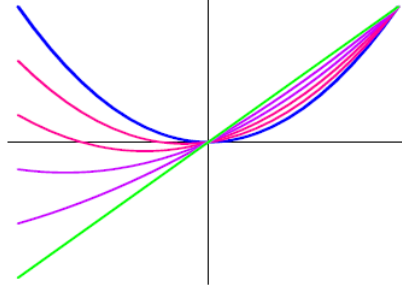


Figura 1.1: Homotopia entre  $f$  e  $g$ . Fonte: [19], página 8.

**Exemplo 1.7. (Poincaré-Bohl)** Seja  $E$  um espaço vetorial normado e considere  $f, g : X \rightarrow E - \{0\}$  aplicações contínuas. Se  $\|f(x) - g(x)\| < \|f(x)\|$ , para todo  $x \in X$ , então  $f \sim g$ . De fato, pelo Exemplo 1.5, basta mostrar que o segmento de reta  $[f(x), g(x)] \subset E - \{0\}$ , para todo  $x \in X$ . Se  $0 \in [f(x), g(x)]$  para algum  $x_0 \in X$ , então existe  $t_0 \in I$  tal que  $0 = (1 - t_0)f(x_0) + t_0g(x_0)$  e segue que  $\|f(x_0)\| \leq \|f(x_0) - g(x_0)\|$  o que contradiz a hipótese. Portanto  $f \sim g$ .

**Exemplo 1.8.** Seja  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  a esfera unitária  $n$ -dimensional. Dadas duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow S^n$ , se  $f(x) \neq -g(x)$  para todo  $x \in X$ , isto é, se  $f(x)$  e  $g(x)$  nunca são pontos antípodas, então  $f \sim g$ . De fato, nestas condições  $0$  não pertence ao segmento de reta  $[f(x), g(x)]$  para todo  $x \in X$ , e podemos definir  $H : X \times I \rightarrow S^n$  por  $H(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|}$ . Claramente  $H$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Quando  $t$  varia entre  $0$  e  $1$ ,  $H(x, t)$  percorre o arco de círculo máximo que liga  $f(x)$  e  $g(x)$ . A condição de  $f(x)$  e  $g(x)$  não serem antípodas, para todo  $x \in X$ , também pode ser expressa por  $\|f(x) - g(x)\| < 2$ , para todo  $x \in X$ .

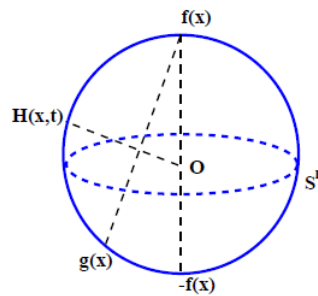


Figura 1.2: Homotopia entre  $f$  e  $g$ . Fonte: [19], página 11.

Como casos particulares do exemplo anterior, obtemos:

1. Se  $f : S^n \rightarrow S^n$  não possui pontos fixos, isto é,  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in S^n$ , então  $f$  é homotópica à aplicação antípoda  $\alpha : S^n \rightarrow S^n$ , dada por  $\alpha(x) = -x$ .
2. Se  $f : S^n \rightarrow S^n$  é tal que  $f(x) \neq -x$ , para todo  $x \in S^n$ , então  $f$  é homotópica à aplicação identidade de  $S^n$ .

**Observação 1.9.** O contradomínio  $Y$  é o espaço onde a deformação ocorre. Aumentando-se  $Y$  podem-se permitir novas homotopias. Assim, se  $Y \subset Y'$ , pode ocorrer de  $f, g : X \rightarrow Y$  serem aplicações contínuas não homotópicas, mas quando consideradas como aplicações de  $X$  em  $Y'$ , elas sejam homotópicas. Por exemplo, duas aplicações  $f, g : X \rightarrow E$ , sendo  $E$  um espaço vetorial normado, são sempre homotópicas (como visto no Exemplo 1.5), porém  $f, g : X \rightarrow E - \{0\}$  podem não ser. Basta tomar  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$  constantes, com  $f(x) = 1$  e  $g(x) = -1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Como 1 e  $-1$  pertencem a componentes conexas por caminhos distintas de  $\mathbb{R} - \{0\}$ , segue da Proposição 1.3 que  $f$  e  $g$  não são homotópicas.

### 1.1.1 Homotopia de pares e homotopia relativa

Trabalhar com homotopia será função constante em nosso trabalho, tipos de homotopias interessantes de se estudar são as homotopias chamadas de relativa, isto é, homotopias que durante sua deformação deixam fixo um certo subespaço de  $X$ .

Diremos que  $(X, A)$  é um **par** de espaços topológicos ou par topológico quando  $A$  for um subespaço de  $X$ .

**Definição 1.10.** Dados pares  $(X, A)$  e  $(Y, B)$ , uma **aplicação de pares contínua** é uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , tal que  $f(A) \subset B$ . Neste caso, escrevemos  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

**Definição 1.11.** Sejam  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  aplicações contínuas. Uma **homotopia de pares** entre  $f$  e  $g$  é uma aplicação contínua  $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ , tal que para todo  $x \in X$ ,  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$  e  $H_t(A) \subset B$ , para todo  $t \in I$ . Se  $f$  for homotópica a  $g$  por uma homotopia de pares, escrevemos  $f \sim g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ .

Quando duas aplicações contínuas  $f$  e  $g$  forem denotadas por aplicações contínuas de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , fica subentendido que qualquer homotopia entre elas é uma homotopia de pares, a menos que se especifique.

**Exemplo 1.12.** A aplicação identidade  $id : I \rightarrow I$  é homotópica a qualquer aplicação constante (basta tomar a homotopia linear). Mas, considerando o subespaço  $\partial I = \{0, 1\} \subset I$ , a aplicação de pares  $id : (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$  não é homotópica a uma aplicação constante. Isto significa que o intervalo pode ser contraído continuamente a um ponto (isto é,  $I$  é contrátil, que será tratado mais adiante) mas, durante a deformação, pelo menos um dos extremos deve passar pelo interior de  $I$ . De fato, qualquer homotopia  $H$  entre duas aplicação de pares  $f, g : (I, \partial I) \rightarrow (I, \partial I)$  deve ser tal que  $H_t(0) \in \partial I$  e  $H_t(1) \in \partial I$ , para todo  $t \in I$ . Como  $\partial I = \{0, 1\}$  é discreto,  $I$  é conexo e as aplicações  $H : I \times \{0\} \rightarrow \{0, 1\}$  e  $H : I \times \{1\} \rightarrow \{0, 1\}$  são contínuas segue que ambas são constantes, isto é, os extremos de  $I$  ficam fixos durante toda a homotopia. Tomando  $f = id$ ,  $H_0(0) = id(0) = 0$  e  $H_0(1) = id(1) = 1$ , portanto  $H_t(0) = 0$  e  $H_t(1) = 1$ , para todo  $t \in I$ . Portanto, não é possível a aplicação  $H_1$  ser constante.

**Observação 1.13.** Será usado frequentemente em nosso trabalho o caso em que  $B$  se reduz a um ponto  $y_0$ , chamado de "ponto base" do espaço  $Y$ . Neste caso, durante uma homotopia entre duas aplicações contínuas  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, y_0)$ , a aplicação  $H_t$  deve ser constante no subespaço  $A$ , para todo  $t \in I$ .

**Definição 1.14.** Sejam  $(X, A)$  um par topológico e  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicações contínuas tais que  $f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in A$ . Dizemos que  $f$  é **homotópica a  $g$  relativamente a  $A$** , e denotamos por  $f \sim_A g$  ou  $f \sim g(\text{rel } A)$ , se existir uma aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$ , tal que  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$  e  $H(x, t) = f(x) = g(x)$ , para todo  $x \in A$ . A aplicação  $H$  é chamada de **homotopia relativa a  $A$  entre  $f$  e  $g$** .

**Observação 1.15.** Note que a homotopia de pares referida na Observação 1.13 (quando  $B = \{y_0\}$ ) é um exemplo de homotopia relativa. E claramente, toda homotopia relativa é uma homotopia de pares.

**Exemplo 1.16.** Sejam  $f, g : [0, 1] \rightarrow S^2$  definidas por:  $f(t) = (\sin(\pi t), 0, \cos(\pi t))$  e  $g(t) = (0, \sin(\pi t), \cos(\pi t))$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

- Se  $A = \{\frac{1}{2}\} \subset I$ , então  $f$  não pode ser homotópica a  $g$ , relativamente a  $A$ . De fato, se  $f \sim_A g$ , necessariamente deveríamos ter  $f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2})$ , o que é falso.
- Se  $A = \{0, 1\} \subset I$ , então  $f$  é homotópica a  $g$  relativamente a  $A$ . De fato, basta definir a homotopia  $H : I \times I \rightarrow S^2$  por  $H(t, s) = (\cos(s\frac{\pi}{2})\sin(\pi t), \sin(s\frac{\pi}{2})\sin(\pi t), \cos(\pi t))$  para todo  $(t, s) \in I \times I$ . Note que  $\|H(t, s)\| = 1$ , para todo  $(t, s) \in I \times I$  e  $H(t, 0) = f(t)$ ,  $H(t, 1) = g(t)$ ,  $H(0, s) = f(0) = H(1, s) = g(1)$ , para todo  $t, s \in I$ .

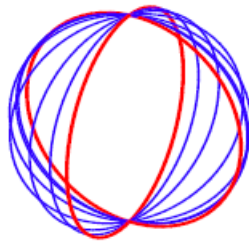


Figura 1.3: Homotopia entre  $f$  e  $g$  ( $f$  e  $g$  em vermelho). Fonte: [19], página 15.

**Exemplo 1.17.** Considere as aplicações  $id : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  e  $r : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  definidas por  $id(u) = u$  e  $r(u) = \frac{u}{\|u\|}$ , para todo  $u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . As aplicações  $id$  e  $r$  são homotópicas relativamente a  $S^1$ . De fato, defina  $H : \mathbb{R}^2 - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  por  $H(u, t) = (1 - t)\frac{u}{\|u\|} + tu$  (homotopia linear). Então  $H$  é contínua e para todo  $u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ ,  $H(u, 0) = \frac{u}{\|u\|} = r(u)$  e  $H(u, 1) = u = id(u)$ . Além disso, para todo  $u \in S^1$ ,  $H(u, t) = (1 - t)u + tu = u = id(u) = r(u)$ . Portanto  $id \sim_{S^1} r$ .

Nós agora provaremos um lema fundamental na construção de aplicações contínuas.

**Lema 1.18.** *Sejam  $X$  um espaço topológico que se escreve como união de dois subespaços fechados  $A$  e  $B$  e  $f : A \rightarrow Y$ ,  $g : B \rightarrow Y$  aplicações contínuas tais que  $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$ . Então a aplicação  $h : X = A \cup B \rightarrow Y$  definida por  $h|_A = f$  e  $h|_B = g$ , é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $F$  um conjunto fechado de  $Y$ . Claramente  $h^{-1}(F) = f^{-1}(F) \cup g^{-1}(F)$ . Como  $f$  é contínua,  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $A$ , mas  $A$  é fechado em  $X$ , então  $f^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ . Similarmente,  $g^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ . Portanto  $h^{-1}(F)$  é fechado em  $X$ , daí  $h$  é contínua.  $\square$

O próximo resultado nos garante que as relações de homotopia, homotopia de pares e homotopia relativa criam uma partição nos espaços das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ , denotado por  $G(X, Y)$ , aplicações contínuas de pares de  $(X, A)$  em  $(Y, B)$ , denotado por  $G((X, A), (Y, B))$  e das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  que coincidem em  $A$ , denotado por  $G(X, Y; A)$ , respectivamente. Todos os espaços de funções citados são munidos com a topologia compacto-aberta.

**Teorema 1.19.** *As relações  $f \sim g$ ,  $f \sim g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $f \sim g$  (rel  $A$ ) são relações de equivalência nos conjuntos  $G(X, Y)$ ,  $G((X, A), (Y, B))$  e  $G(X, Y; A)$  respectivamente.*

*Demonstração.* Que as relações são simétricas e reflexivas é trivial. Provemos a transitividade. Sejam  $f', f'', f''' : X \rightarrow Y$  tais que  $f' \sim f''$  e  $f'' \sim f'''$ . Então existem  $H_1 : X \times I \rightarrow Y$ ,  $H_2 : X \times I \rightarrow Y$ , tais que  $H_1(x, 0) = f'(x)$ ,  $H_1(x, 1) = H_2(x, 0) = f''(x)$ ,  $H_2(x, 1) = f'''(x)$ , para todo  $x \in X$ . Defina  $H : X \times I \rightarrow Y$  por  $H(x, t) = H_1(x, 2t)$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  e  $H(x, t) = H_2(x, 2t - 1)$ ,  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ . Pelo Lema 1.18  $H$  é contínua e claramente é uma homotopia entre  $f'$  e  $f'''$ . Além do mais, se  $H_1$  e  $H_2$  forem homotopias de pares ou relativas, então  $H$  também o será.  $\square$

**Observação 1.20.** Consideremos o espaço  $G(X, Y)$ , com a topologia compacto-aberta<sup>1</sup>. (No caso de  $Y$  ser metrizável, esta é a topologia da convergência nas partes compactas de  $X$ .) A cada aplicação contínua  $H : X \times I \rightarrow Y$  corresponde um caminho em  $G(X, Y)$ , isto é, uma aplicação contínua  $\tilde{H} : I \rightarrow G(X, Y)$  definida por  $\tilde{H}(t) = H_t$ , para todo  $t \in I$ . Quando  $X$  é um espaço de Hausdorff localmente compacto, ou é metrizável, então  $H$  é contínua se, e somente se  $\tilde{H}$  é contínua (a primeira implicação sempre é verdadeira). Assim, para  $X$  Hausdorff localmente compacto ou metrizável, existe uma bijeção natural entre as homotopias  $H : X \times I \rightarrow Y$  e os caminhos  $\tilde{H} : I \rightarrow G(X, Y)$ . Se  $H$  é uma homotopia entre  $f$  e  $g$  então  $\tilde{H}$  é um caminho que começa em  $f$  e termina em  $g$ . Logo, duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$ , com  $X$  Hausdorff localmente

<sup>1</sup>A definição de topologia compacto-aberta é apresentada no Capítulo 2, Seção 2.3.

compacto ou metrizável, são homotópicas se, e somente se,  $f$  e  $g$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $G(X, Y)$ .

De modo análogo, se  $X$  é Hausdorff localmente compacto ou metrizável,  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas se, e somente se,  $f$  e  $g$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $G((X, A), (Y, B))$  e  $f, g : X \rightarrow Y$ , tais que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in A$  são homotópicas relativamente a  $A$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  pertencem à mesma componente conexa por caminhos de  $G(X, Y; A)$ .

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia  $f \sim g$  são chamadas **classes de homotopia**. A classe de homotopia de uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  será denotada por  $[f]$ . O conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  será denotado por  $[X, Y]$ .

Quando não houver confusão, o símbolo  $[f]$  será usado para representar a classe de equivalência de  $f$  segundo as relações  $f \sim g$ ,  $f \sim g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ou  $f \sim g$  (rel  $A$ ).

## 1.2 Equivalência de Homotopia

Nesta seção definiremos e daremos exemplos de espaços que possuem o mesmo tipo de homotopia, uma condição mais fraca do que os espaços serem homeomorfos. Geometricamente, dois espaços possuírem o mesmo tipo de homotopia significa que um pode ser deformado continuamente no outro ou vice e versa.

**Definição 1.21.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Dizemos que  $f$  é uma **equivalência de homotopia**, se existir uma aplicação  $g : Y \rightarrow X$  contínua tal que  $f \circ g \sim id_Y$  e  $g \circ f \sim id_X$ . A aplicação  $g$  é chamada de **inversa homotópica** de  $f$ .*

**Definição 1.22.** *Dizemos que  $X$  é **homotopicamente equivalente** a  $Y$ , ou que  $X$  e  $Y$  **têm o mesmo tipo de homotopia**, se existir uma equivalência de homotopia entre  $X$  e  $Y$ . Neste caso usamos a notação  $X \equiv Y$  para dizer que  $X$  e  $Y$  têm o mesmo tipo de homotopia.*

**Lema 1.23.** *Sejam  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow W$  e  $h : Z \rightarrow X$  aplicações contínuas, tal que  $f_0 \sim f_1$ . Então  $g \circ f_0 \sim g \circ f_1 : X \rightarrow W$  e  $f_0 \circ h \sim f_1 \circ h : Z \rightarrow Y$ .*

*Demonstração.* Seja  $H : X \times I \rightarrow Y$  uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$ . Então  $g \circ H : X \times I \rightarrow W$  é uma homotopia entre  $g \circ f_0$  e  $g \circ f_1$ , e  $K : Z \times I \rightarrow Y$ , definida por  $K(z, t) = H(h(z), t)$ ,  $z \in Z$  e  $t \in I$ , é uma homotopia entre  $f_0 \circ h$  e  $f_1 \circ h$ .  $\square$

**Teorema 1.24.** *A relação  $X \equiv Y$  é uma relação de equivalência no conjunto de todos os espaços topológicos.*

*Demonstração.* Que a relação é reflexiva e simétrica é trivial. Provemos a transitividade. Sejam  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  tais que  $g \circ f \sim id_X$  e  $f \circ g \sim id_Y$ , e sejam

$u : Y \rightarrow Z$ ,  $v : Z \rightarrow Y$  tais que  $v \circ u \sim id_Y$  e  $u \circ v \sim id_Z$ . Considere as aplicações  $u \circ f : X \rightarrow Z$  e  $g \circ v : Z \rightarrow X$ . Como  $v \circ u \sim id_Y$ , pelo Lema 1.23,  $g \circ v \circ u \sim g$ , e novamente pelo Lema 1.23,  $g \circ v \circ u \circ f \sim g \circ f$ . Mas  $g \circ f \sim id_X$ , então, pelo Teorema 1.19,  $g \circ v \circ u \circ f \sim id_X$ . Similarmente,  $u \circ f \circ g \circ v \sim u \circ v \sim id_Z$ . Portanto  $u \circ f$  é uma equivalência de homotopia entre  $X$  e  $Z$  e  $g \circ v$  é uma inversa homotópica de  $u \circ f$ .  $\square$

**Observação 1.25.** Dois espaços homeomorfos possuem o mesmo tipo de homotopia. De fato, basta tomar o homeomorfismo como a equivalência de homotopia. A recíproca não é verdadeira, como veremos no exemplo a seguir.

**Observação 1.26.** Se  $X \equiv X'$  e  $Y \equiv Y'$  então podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre  $[X, Y]$  e  $[X', Y']$ . A saber,  $[f] \mapsto [\psi \circ f \circ \varphi]$ , onde  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua,  $\psi : Y \rightarrow Y'$  equivalência de homotopia entre  $Y$  e  $Y'$  e  $\varphi : X' \rightarrow X$  equivalência de homotopia entre  $X'$  e  $X$ .

**Exemplo 1.27.** A circunferência  $S^1$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . De fato, considere a aplicação inclusão  $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Definimos  $g : \mathbb{R}^2 - \{0\} \rightarrow S^1$  por  $g(u) = \frac{u}{\|u\|}$  (projeção radial), para todo  $u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Então  $(g \circ i)(u) = g(u) = \frac{u}{\|u\|}$ , para todo  $u \in S^1$ , e assim  $g \circ i = id_{S^1}$ , e portanto  $g \circ i \sim id_{S^1}$ . Agora, se  $u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , temos  $(i \circ g)(u) = i(g(u)) = i(\frac{u}{\|u\|}) = \frac{u}{\|u\|}$ . Como  $\frac{1}{\|u\|} > 0$  temos  $[u, \frac{u}{\|u\|}] \subset \mathbb{R}^2 - \{0\}$ , para todo  $u \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Pelo Exemplo 1.5, segue que  $i \circ g \sim id_{\mathbb{R}^2 - \{0\}}$ . Portanto, a aplicação inclusão é uma equivalência de homotopia entre  $S^1$  e  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Observe<sup>2</sup> que  $S^1$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ .

**Exemplo 1.28.** De modo análogo ao exemplo anterior, mostra-se que a esfera  $n$ -dimensional  $S^n$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ . Com o mesmo argumento mostra-se que  $D^{n+1} - \{0\}$  ( $D^{n+1}$  o  $(n+1)$ -disco unitário em  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) tem o mesmo tipo de homotopia que a esfera  $S^n$ .

**Exemplo 1.29.** Considere o cilindro infinito  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ . A aplicação  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$  definida por  $f(x, y, z) = (e^z x, e^z y)$  é um homeomorfismo que transforma a circunferência de altura  $z$  do cilindro na circunferência de centro  $0 = (0, 0)$  e raio  $e^z$  do plano. Assim,  $C \equiv \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Segue do Teorema 1.24 e do Exemplo 1.27 que  $C \equiv S^1$ .

**Exemplo 1.30.** Sejam  $T^2 = S^1 \times S^1$  o toro bidimensional e  $p \in T^2$  um ponto arbitrário. Então  $T^2 - \{p\}$  tem o mesmo tipo de homotopia que a união de dois círculos com um ponto em comum, chamado de figura oito. De fato, o toro  $T^2$  é homeomorfo a imagem de um quadrado  $Q$  por uma aplicação contínua  $\varphi : Q \rightarrow T^2$  que transforma o bordo  $\partial Q$  do quadrado na união  $Y = S \cup S'$  de dois círculos com um ponto em comum e é um homeomorfismo do interior de  $Q$  sobre o complementar  $T^2 - Y$ . Podemos

<sup>2</sup>Basta observar que se  $S^1$  fosse homeomorfo a  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  então  $S^1 - \{p_1, p_2\}$  seria homeomorfo a  $\mathbb{R}^2 - \{0, q_1, q_2\}$ , porém  $S^1 - \{p_1, p_2\}$  tem duas componentes conexas e  $\mathbb{R}^2 - \{0, q_1, q_2\}$  somente uma.

supor que o ponto  $p \in T^2$  é a imagem por  $\varphi$  do centro  $p_0$  do quadrado. Agora, o quadrado é homeomorfo a um disco unitário fechado. Logo  $Q - \{p_0\}$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $\partial Q$ . A deformação de  $Q - \{p_0\}$  em  $\partial Q$  tem lugar ao longo dos raios que partem de  $p_0$ . Durante a homotopia, os pontos de  $\partial Q$  não se movem. Compondo tal homotopia com  $\varphi$ , obtemos uma deformação de  $T^2 - \{p\}$  sobre  $Y$ , e portanto  $T^2 - \{p\} \equiv Y$ .

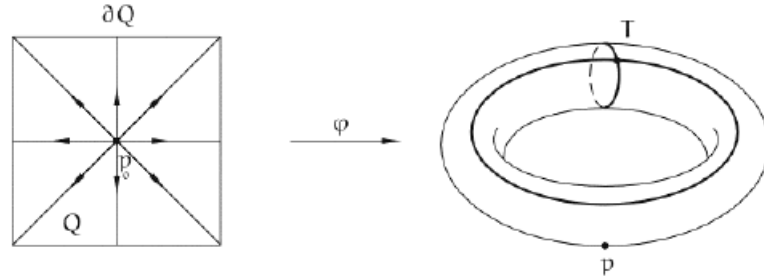


Figura 1.4: Deformação de  $T^2 - \{p\}$  em  $Y$ . Fonte: [13], página 11.

**Exemplo 1.31.** Sejam  $p = (0, \dots, 0, 1)$  e  $u = (0, \dots, 0, -1)$  os pólos norte e sul da esfera  $S^n$ . A projeção estereográfica  $\pi : S^n - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um homeomorfismo e portanto nos dá um homeomorfismo entre  $S^n - \{p, u\}$  e  $\mathbb{R}^n - \{\pi(u)\} = \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Assim, segue do Teorema 1.24 e do Exemplo 1.28 que  $S^n - \{p, u\} \equiv S^{n-1}$ .

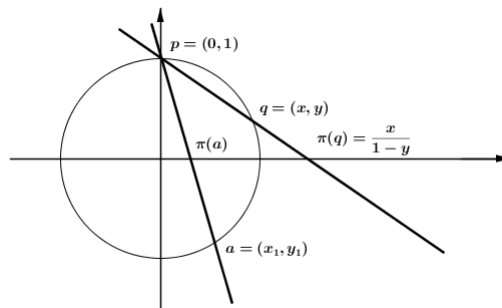


Figura 1.5: Projeção estereográfica para o caso  $n = 1$ . Fonte: Própria.

### 1.3 Espaços contráteis

**Definição 1.32.** Dizemos que um espaço topológico  $X$  é **contrátil** se  $X$  tem o mesmo tipo de homotopia que um espaço unitário.

**Observação 1.33.** É claro que  $X$  é contrátil se, e somente se,  $X \equiv \{x_0\}$ , para todo  $x_0 \in X$ , pois quaisquer dois espaços unitários possuem o mesmo tipo de homotopia.

**Exemplo 1.34.** Seja  $E$  um espaço vetorial normado. Se  $Y \subset E$  é convexo, então  $Y$  é contrátil. De fato, seja  $u_0 \in Y$ . Defina  $f : Y \rightarrow \{u_0\}$  por  $f(u) = u_0$ , para todo  $u \in Y$ ,

e  $g : \{u_0\} \rightarrow Y$  por  $g(u_0) = u_0$ . É claro que  $f$  e  $g$  são contínuas e temos  $f \circ g = id_{\{u_0\}}$ . Agora, para todo  $u \in Y$ ,  $(g \circ f)(u) = u_0$ . Como  $[(g \circ f)(u), id_Y(u)] = [u_0, u] \subset Y$ , pois  $Y$  é convexo, segue do Exemplo 1.5 que  $g \circ f \sim id_Y$ , e portanto  $f$  é um equivalência homotópica entre  $Y$  e  $\{u_0\}$ . Em particular, os seguintes espaços são contráteis:

1.  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ ;
2. O  $n$ -disco unitário  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ ;
3. Todo intervalo  $J$  da reta.

**Proposição 1.35.**  *$X$  é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade  $id_X : X \rightarrow X$  é homotópica a uma aplicação constante de  $X$ .*

*Demonstração.* Se  $X$  é contrátil existe uma equivalência de homotopia  $f : X \rightarrow \{p\}$  entre  $X$  e o espaço unitário  $\{p\}$ ,  $p \in X$ . Seja  $g : \{p\} \rightarrow X$  a inversa homotópica de  $f$ . Então  $g \circ f \sim id_X$  e  $g \circ f$  é uma aplicação constante de  $X$ . Reciprocamente, suponhamos que  $id_X \sim c_{x_0}$ , para algum  $x_0 \in X$ , onde  $c_{x_0} : X \rightarrow X$  é uma aplicação constante, definida por  $c_{x_0}(x) = x_0$ , para todo  $x \in X$ . Considere as aplicações  $f : X \rightarrow \{x_0\}$  dada por  $f(x) = x_0$ , para todo  $x \in X$  e  $g : \{x_0\} \rightarrow X$  dada por  $g(x_0) = x_0$ . Temos  $(f \circ g)(x_0) = x_0 = id_{\{x_0\}}(x_0)$  e  $(g \circ f)(x) = g(x_0) = x_0 = c_{x_0}(x)$ . Como por hipótese  $id_X \sim c_{x_0}$ , segue que  $f$  é uma equivalência de homotopia entre  $X$  e  $\{x_0\}$ .  $\square$

**Corolário 1.36.** *Todo espaço contrátil  $X$  é conexo por caminhos.*

*Demonstração.* Se  $H$  é uma homotopia entre  $id_X$  e  $c_{x_0}$ , para algum  $x_0 \in X$ , então para cada ponto  $x \in X$ , a aplicação  $\varphi_x = H(x, t) : I \rightarrow X$  é um caminho ligando  $x$  a  $x_0$ , portanto  $X$  é conexo por caminhos.  $\square$

**Proposição 1.37.** *Se  $X$  ou  $Y$  é contrátil então toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  é homotópica a uma aplicação constante.*

*Demonstração.* Se  $X$  for contrátil e  $H : X \times I \rightarrow X$  for uma homotopia entre  $id_X$  e  $c_{x_0}$ , para algum  $x_0 \in X$ , então dada qualquer  $f : X \rightarrow Y$  aplicação contínua, a aplicação  $f \circ H : X \times I \rightarrow Y$  será uma homotopia entre  $f$  e a aplicação constante  $k_{f(x_0)} : X \rightarrow Y$ , definida por  $k_{f(x_0)}(x) = f(x_0)$ , para todo  $x \in X$ . Note que neste caso a aplicação constante depende de  $f$ , mas se colocarmos a hipótese adicional que  $Y$  seja conexo por caminhos, segue da Proposição 1.3 que quaisquer duas aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  são homotópicas.

Se  $Y$  for contrátil e  $K : Y \times I \rightarrow Y$  for uma homotopia entre  $id_Y$  e  $c_{y_0}$ , para algum  $y_0 \in Y$ , então dada qualquer  $f : X \rightarrow Y$  aplicação contínua, a aplicação  $L : X \times I \rightarrow Y$ , definida por  $L(x, t) = K(f(x), t)$ , é uma homotopia entre  $f$  e a aplicação constante  $k_{y_0} : X \rightarrow Y$ , definida por  $k_{y_0}(x) = y_0$ , para todo  $x \in X$ . Note que aqui a aplicação constante não depende de  $f$ , logo podemos concluir que se  $Y$  for contrátil quaisquer duas aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$  são homotópicas.  $\square$

Como observado na prova da proposição anterior, temos os seguintes corolários

**Corolário 1.38.** *Se  $X$  é contrátil e  $Y$  é conexo por caminhos então quaisquer duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicas.*

**Corolário 1.39.** *Se  $Y$  é contrátil então quaisquer duas aplicações contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  são homotópicas.*

**Proposição 1.40.** *Se o espaço  $X$  é contrátil então, para todo espaço  $Y$ , o produto  $X \times Y$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $Y$ .*

*Demonstração.* Seja  $H : X \times I \rightarrow X$  uma homotopia entre  $id_X$  e a aplicação constante  $C_{x_0}$ , para algum  $x_0 \in X$ . Então  $f : X \times Y \rightarrow Y$ , definida por  $f(x, y) = y$  e  $g : Y \rightarrow X \times Y$ , definida  $g(y) = (x_0, y)$ , são equivalências de homotopias, pois  $f \circ g = id_Y$  e, além disso,  $K((x, y), t) = (H(x, t), y)$  define uma homotopia entre a aplicação identidade de  $X \times Y$  e a aplicação  $g \circ f$ . Portanto  $X \times Y \equiv Y$ . Em particular, se  $X$  e  $Y$  forem ambos contráteis, o produto  $X \times Y$  também é contrátil.  $\square$



## 2 Introdução a espaços fibrados e espaços ANR

### 2.1 Definição de espaços fibrados

Ao longo desta seção iremos considerar uma aplicação contínua

$$p : E \rightarrow B$$

de um espaço topológico  $E$  chamado **espaço total** em um espaço topológico  $B$  chamado **espaço base**.

**Definição 2.1.** *Sejam  $X$  um espaço topológico,  $f : X \rightarrow B$  uma aplicação contínua dada, e  $f_t : X \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) uma homotopia dada de  $f$ . Uma aplicação  $f^* : X \rightarrow E$  é dita **cobrir** a aplicação  $f$  relativo a  $p$  se  $p \circ f^* = f$ . Similarmente, uma homotopia  $f_t^* : X \rightarrow E$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) é dita **cobrir** a homotopia  $f_t$  relativo a  $p$  se  $p \circ f_t^* = f_t$  para todo  $t \in I$ ,  $f_t^*$  é chamada de **homotopia de cobertura de  $f_t$** .*

**Definição 2.2.** *A aplicação  $p : E \rightarrow B$  é dita ter a **propriedade de homotopia de cobertura** (abreviadamente **CHP** - covering homotopy property) para o espaço  $X$  se, para toda aplicação contínua  $f^* : X \rightarrow E$  e toda homotopia  $f_t : X \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), da aplicação  $f = p \circ f^* : X \rightarrow B$ , existe uma homotopia  $f_t^* : X \rightarrow E$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de  $f^*$  que cobre a homotopia  $f_t$ .*

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow f_t^* & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f_t} & B \end{array}$$

**Definição 2.3.** *A aplicação  $p : E \rightarrow B$  é dita ter a **propriedade de homotopia de cobertura absoluta** (abreviadamente **ACHP** - absolute covering homotopy property) se ela tem a CHP para todo espaço  $X$ .*

**Definição 2.4.** *A aplicação  $p : E \rightarrow B$  é dita ter a **propriedade de homotopia de cobertura poliédrica** (abreviadamente **PCHP** - polyhedral covering homotopy property) se ela tem a CHP para todo espaço triangulável  $X$ .*

**Exemplo 2.5.** Se  $E$  é o espaço produto  $B \times D$ , onde  $D$  é um espaço topológico qualquer e  $p : E \rightarrow B$  é a projeção natural em  $B$ , definida por  $p(x, y) = x$ ,  $(x, y) \in E$ , então  $p$  tem a ACHP. De fato, seja  $X$  um espaço arbitrário,  $f^* : X \rightarrow E$  uma aplicação contínua dada, e  $f_t : X \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) uma homotopia dada da aplicação  $f = p \circ f^*$ . Então,  $f_t$  tem uma homotopia de cobertura  $f_t^* : X \rightarrow E$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de  $f^*$  definido por

$$f_t^*(x) = (f_t(x), q \circ f^*(x))$$

para todo  $x \in X$  e  $t \in I$ , onde  $q : E \rightarrow D$  denota a projeção natural em  $D$ , definida por  $q(x, y) = y$ ,  $(x, y) \in E$ .

**Definição 2.6.** A aplicação  $p : E \rightarrow B$  é dita ser uma **fibração** se ela tem a PCHP. Neste caso, o espaço  $E$  será chamado de **espaço fibrado sobre o espaço base  $B$  com projeção  $p$** . Para cada ponto  $b \in B$ , o subespaço  $p^{-1}(b)$  de  $E$  é chamado de **fibra de  $p$  sobre  $b$** .

Nós não assumimos que  $p(E) = B$  e consequentemente a fibra  $p^{-1}(b)$  pode ser vazia para algum  $b \in B$ . No entanto, temos o seguinte resultado

**Proposição 2.7.** Se  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração, então  $p(E)$  é uma união de componentes conexas por caminhos de  $B$ .

*Demonstração.* Mostremos que se  $y_0 \in B$  é imagem de  $x_0$  pela fibração  $p$ , isto é,  $p(x_0) = y_0$ , então  $C_{y_0}$  (componente conexa por caminhos de  $B$  que contém  $y_0$ ) é atingida por  $p$ , isto é, para todo  $y \in C_{y_0}$ , existe  $x \in E$  tal que  $p(x) = y$ .

Se  $y \in C_{y_0}$ , então existe um caminho  $\lambda_y : I \rightarrow B$  tal que  $\lambda_y(0) = y_0$  e  $\lambda_y(1) = y$ . Tome  $X = \{w\}$ , espaço unitário, e defina  $f^* : X \rightarrow E$  por  $f^*(w) = x_0$ , e também defina  $f_t : X \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) por  $f_t(w) = \lambda_y(t)$ . Note que  $f_t$  é uma homotopia de  $f = p \circ f^*$  e como  $p$  é uma fibração, segue que existe uma homotopia  $f_t^* : X \rightarrow E$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de  $f^*$ , tal que  $p \circ f_t^* = f_t$ , para todo  $t \in I$ . Portanto  $p(f_1^*(w)) = f_1(w) = \lambda_y(1) = y$ , como queríamos.  $\square$

Segue da proposição acima, que se  $B$  é conexo por caminhos e  $p : E \rightarrow B$  é uma fibração, então  $p(E) = B$ , a menos, é claro, se  $E$  é um conjunto vazio.

**Proposição 2.8.** Se  $p : E \rightarrow B$  tem a PCHP, então se  $(X, A)$  é um par triangulável tal que  $A$  é um retrato por deformação forte de  $X$ <sup>1</sup> e se  $f : X \rightarrow B$  e  $g^* : A \rightarrow E$  são aplicações contínuas tais que  $p \circ g^* = f|_A$ , então  $g^*$  possui uma extensão contínua  $f^* : X \rightarrow E$  tal que  $p \circ f^* = f$ .

*Demonstração.* Ver [11], página 63.  $\square$

**Proposição 2.9.** Se  $E$  é um espaço fibrado sobre um espaço base  $B$  com projeção  $p$  e se  $A$  é qualquer subespaço de  $B$ , então  $p^{-1}(A)$  é um espaço fibrado sobre  $A$  com projeção  $p|_{p^{-1}(A)}$ .

*Demonstração.* Ver [11], página 73.  $\square$

<sup>1</sup>O conceito de retrato por deformação forte é encontrado na seção seguinte.

## 2.2 Espaços AR e ANR

Sejam  $X, Y$  espaços topológicos e  $A$  um subconjunto fechado de  $X$ . Dada uma aplicação contínua  $f : A \rightarrow Y$ , uma das perguntas clássicas em Topologia Algébrica é se existe uma aplicação contínua  $\bar{f} : X \rightarrow Y$  de tal forma que  $\bar{f}|_A = f$ , ou seja, se  $f$  pode ser estendida continuamente para  $X$ . O teorema clássico da Topologia Algébrica, conhecido como Teorema de Extensão de Tietze e Urysohn, assegura que a resposta para esta pergunta é afirmativa sempre que  $X$  é normal e  $Y$  é um intervalo da reta real. Nesta seção vamos estender um pouco mais o campo de espaços para os quais esta pergunta possui resposta afirmativa. Os principais resultados nesta linha de extensão de aplicação contínua (e também homotopia), que serão introduzidos a seguir, são de autoria do grande matemático polonês Karol Borsuk.

**Definição 2.10.** Uma homotopia  $h_t : X \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) é dita ser uma **deformação** se  $h_0$  é a aplicação identidade de  $X$ .

**Definição 2.11.** Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ser um **retrato** de  $X$ , se existe uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$ , para todo  $a \in A$ . A aplicação  $r$  é chamada de **retração** de  $X$  em  $A$ , e escrevemos  $r : X \supset A$ .

**Definição 2.12.** Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ser um **retrato por deformação** de  $X$  se existe uma deformação  $h_t : X \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) tal que  $h_1 = i \circ r$ , onde  $r : X \supset A$  é uma retração de  $X$  em  $A$  e  $i : A \rightarrow X$  é a aplicação inclusão. Se a deformação  $h_t$  satisfizer a condição que  $h_t(a) = a$ , para todo  $a \in A$  e  $t \in I$ , então  $A$  é dito ser um **retrato por deformação forte** de  $X$ . Neste caso,  $h_t$  será chamada de **retração por deformação** de  $X$  em  $A$ .

**Observação 2.13.** Se  $A$  é um retrato por deformação de  $X$ , então  $A$  possui o mesmo tipo de homotopia de  $X$ . De fato, a inclusão  $i : A \rightarrow X$  é uma equivalência de homotopia com inversa homotópica  $r : X \supset A$ , cuja sua existência é garantida pela definição de retrato por deformação.

**Observação 2.14.** Dizer que existe uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$ , para todo  $a \in A$ , é equivalente a dizer que toda aplicação contínua  $f : A \rightarrow Y$ , onde  $Y$  é um espaço topológico arbitrário, admite uma extensão contínua para  $X$ . De fato, a primeira implicação basta tomar a extensão contínua como sendo  $f \circ r$ , e para a implicação contrária tome  $Y = A$  e  $f = id_A$ .

Portanto, pela observação anterior, a Definição 2.11 pode ser apresentada de modo equivalente por: Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ser um **retrato** de  $X$ , se toda aplicação contínua  $f : A \rightarrow Y$ , onde  $Y$  é um espaço topológico arbitrário, admite uma extensão contínua para  $X$ .

**Proposição 2.15.** Se  $(X, A)$  é um par de espaços trianguláveis finitos, então o subespaço fechado  $L = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  é um retrato do espaço produto  $X \times I$ .

*Demonstração.* Ver [11], página 7. □

**Definição 2.16.** Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ser um **retrato de uma vizinhança** de  $X$ , se ele é um retrato de algum conjunto aberto  $U$  de  $X$ , isto é, se existem um subconjunto aberto  $U$  de  $X$  contendo  $A$  e uma aplicação contínua  $r : U \rightarrow A$  tal que  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ .

Aplicando novamente a Observação 2.14, a definição anterior pode ser apresentada de modo equivalente por: Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ser um **retrato de uma vizinhança** de  $X$ , se existe um conjunto aberto  $U$  de  $X$  contendo  $A$  tal que toda aplicação contínua  $f : A \rightarrow Y$ , onde  $Y$  é um espaço topológico arbitrário, admite uma extensão contínua para  $U$ .

**Definição 2.17.** Um espaço metrizável  $Y$  é dito ser um **retrato absoluto** (abreviadamente **AR** - absolute retract), quando uma imagem topológica de  $Y$ , como um subconjunto fechado  $Z_0$  de qualquer espaço metrizável  $Z$  é necessariamente um retrato de  $Z$ .

**Definição 2.18.** Um espaço metrizável  $Y$  é dito ser um **retrato de vizinhança absoluta** (abreviadamente **ANR** - absolute neighborhood retract), quando uma imagem topológica de  $Y$  como um subconjunto fechado  $Z_0$ , de qualquer espaço metrizável  $Z$  é necessariamente um retrato de uma vizinhança de  $Z$ .

**Definição 2.19.** Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ter a **propriedade da extensão a  $X$  com respeito a  $Y$** , se toda aplicação contínua  $f : A \rightarrow Y$  pode ser estendida continuamente para  $X$ .

**Definição 2.20.** Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ter a **propriedade da extensão a uma vizinhança de  $X$  com respeito a  $Y$** , se toda aplicação contínua  $f : A \rightarrow Y$  pode ser estendida continuamente para algum subconjunto aberto  $U$  de  $X$  que contenha  $A$ .

**Observação 2.21.** Segue direto da Observação 2.14 as seguintes equivalências

- i. Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é um retrato de  $X$  se, e somente se,  $A$  tem a propriedade da extensão a  $X$  com respeito a todo espaço topológico  $Y$ .
- ii. Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é um retrato de uma vizinhança de  $X$  se, e somente se,  $A$  tem a propriedade da extensão a uma vizinhança de  $X$  com respeito a todo espaço topológico  $Y$ .

O teorema a seguir, conhecido como **Teorema da Extensão de Borsuk**, é devido a Karol Borsuk e sugestões para sua demonstração podem ser encontradas em [11], página 29.

**Teorema 2.22.** *Seja  $Y$  um espaço metrizável*

1.  *$Y$  é um AR se, e somente se, todo subconjunto fechado  $A$  de um espaço topológico arbitrário metrizável  $X$  tem a propriedade da extensão a  $X$  com respeito a  $Y$ .*
2.  *$Y$  é um ANR se, e somente se, todo subconjunto fechado  $A$  de um espaço topológico arbitrário metrizável  $X$  tem a propriedade da extensão de uma vizinhança de  $X$  com respeito a  $Y$ .*

**Definição 2.23.** *Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ter a **propriedade da extensão de homotopia a  $X$  com respeito a  $Y$** , se toda homotopia parcial  $h_t : A \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de uma aplicação contínua arbitrária  $f : X \rightarrow Y$  (isto é,  $h_0 = f|_A$ ) tem uma extensão contínua  $\bar{h}_t : X \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) (ou seja  $\bar{h}_t|_A = h_t$ , para todo  $t \in I$ ) tal que  $\bar{h}_0 = f$ .*

**Definição 2.24.** *Um subespaço  $A$  de um espaço topológico  $X$  é dito ter a **propriedade da extensão de homotopia a uma vizinhança de  $X$  com respeito a  $Y$** , se toda homotopia parcial  $h_t : A \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de uma aplicação contínua arbitrária  $f : X \rightarrow Y$  (isto é,  $h_0 = f|_A$ ) tem uma extensão contínua  $\bar{h}_t : U \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), para algum subconjunto aberto  $U$  de  $X$  que contenha  $A$ , tal que  $\bar{h}_0 = f|_U$ .*

**Proposição 2.25.** *Se  $(X, A)$  é um par triangulável finito, então  $A$  tem propriedade da extensão de homotopia a  $X$  com respeito a  $Y$ , para todo espaço  $Y$ .*

*Demonstração.* Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua arbitrária e  $h_t : A \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), uma homotopia parcial arbitrária de  $f$ . Consideremos o espaço produto  $M = X \times I$  e seu subespaço fechado  $L = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ . Definimos uma aplicação  $H : L \rightarrow Y$  por

$$H(x, t) = \begin{cases} f(x), & \text{se } (x \in X, t = 0) \\ h_t(x), & \text{se } (x \in A, t \in I) \end{cases}$$

Pela Proposição 2.15, existe uma retração  $r : M \supset L$ . Definimos uma homotopia  $g_t : X \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), por

$$g_t(x) = (H \circ r)(x, t), \quad (x \in X, t \in I).$$

Então  $g_t$  é obviamente uma extensão contínua de  $h_t$  tal que  $g_0 = f$ . Como  $Y$  é arbitrário, a prova está concluída.  $\square$

**Proposição 2.26.** *Seja  $A$  um subconjunto fechado de um espaço normal  $X$ . Então  $A$  tem a propriedade da extensão de homotopia a  $X$  com respeito a  $Y$  se, e somente,  $A$  tem a propriedade da extensão de homotopia de uma vizinhança de  $X$  com respeito a  $Y$ .*

*Demonstração.* Ver [11], página 30.  $\square$

Por meio do Teorema 2.22, da proposição anterior e de sugestões encontradas em [11], página 31, pode-se mostrar o seguinte teorema, conhecido como **Teorema da extensão de homotopia de Borsuk**

**Teorema 2.27.** *Seja  $Y$  um espaço metrizável ANR, então:*

1. *Todo subconjunto fechado  $A$  de um espaço metrizável arbitrário  $X$  tem a propriedade da extensão de homotopia a  $X$  com respeito a  $Y$ .*
2. *Todo subconjunto fechado  $A$  de um espaço "binormal" arbitrário  $X$  (isto é,  $X$  é normal e  $X \times I$  também é normal) tem a propriedade da extensão de homotopia a  $X$  com respeito a  $Y$ .*

O último resultado desta seção será de grande importância para a próxima seção, mas não iremos demonstrá-lo aqui. Para sua demonstração veja [11], página 31.

**Proposição 2.28.** *Sejam  $X$  um espaço metrizável ANR,  $A$  um subconjunto fechado de  $X$  e  $T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  subespaço de  $X \times I$ . Então as seguintes sentenças são equivalentes*

- (a)  *$A$  tem a propriedade da extensão de homotopia a  $X$  com respeito a  $Y$ , para todo espaço topológico  $Y$ .*
- (b)  *$T$  é um retrato de  $X \times I$ .*
- (c)  *$T$  é um ANR.*
- (d)  *$A$  é um ANR.*

## 2.3 Espaço de funções e a topologia compacto-aberta

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos arbitrários. Denotemos por

$$\Omega = Y^X = G(X, Y)$$

o espaço de todas as aplicações contínuas de  $X$  em  $Y$ . Em geral,  $Y^X$  denota o espaço de todas as funções de  $X$  em  $Y$ , mas neste trabalho só estamos interessados em funções que são contínuas. Existem varias maneiras de se definir uma topologia em  $\Omega$ , mas neste trabalho será somente de nosso interesse a topologia compacto-aberta, que será introduzida a seguir.

Para quaisquer dois conjuntos  $K \subset X$  e  $W \subset Y$ , seja  $M(K, W)$  o subconjunto de  $\Omega$  definido por

$$M(K, W) = \{f \in \Omega \mid f(K) \subset W\}.$$

$M(K, W)$  será chamado de um **conjunto sub-básico** de  $\Omega$  se  $K$  é compacto e  $W$  é aberto. A **topologia compacto-aberta** de  $\Omega$  é definida selecionando-se como uma sub-base para os abertos de  $\Omega$ , todos os conjuntos sub-básicos  $M(K, W)$  de  $\Omega$ . De acordo com a definição de uma sub-base para uma topologia, todo conjunto sub-básico  $M(K, W)$  é um aberto de  $\Omega$  e todo aberto de  $\Omega$  é uma união de uma coleção de interseções finitas de conjuntos sub-básicos.

Ao longo deste trabalho, os espaços de funções são todos equipados com a topologia compacto-aberta, a menos que seja especificado o contrário.

Vamos aqui fixar notações para alguns espaços de funções que será de grande uso e importância no decorrer do nosso trabalho

- $G^n(X) = \{f \in X^{I^n} \mid f(\partial I^n) = \{x\}, \text{ para algum } x \in X\}$ , onde  $I^n$  é o  $n$ -cubo euclidiano, consistindo dos pontos  $(t_1, \dots, t_n)$  do  $\mathbb{R}^n$ , com  $0 \leq t_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
- $F^n(X, x_0) = \{f \in G^n(X) \mid f(\partial I^n) = \{x_0\}\}$ .
- $\overline{G}^n(X) = \{f \in X^{D^n} \mid f(\partial D^n) = f(S^{n-1}) = \{x\}, \text{ para algum } x \in X\}$ , onde  $D^n$  denota o  $n$ -disco unitário em  $\mathbb{R}^n$ , consistindo dos pontos  $u$  do  $\mathbb{R}^n$ , com  $\|u\| \leq 1$ .
- $\overline{F}^n(X, x_0) = \{f \in \overline{G}^n(X) \mid f(S^{n-1}) = \{x_0\}\}$ .
- $\tilde{G}^n(X) = X^{S^n} = G(S^n, X)$ , o espaço de todas as aplicações contínuas de  $S^n$  em  $X$ .
- $\tilde{F}^n(X, x_0) = \{f \in \tilde{G}^n(X) \mid f(s_0) = x_0\}$ , onde  $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .  
Iremos sempre denotar por  $s_0$  o ponto  $(1, 0, \dots, 0)$  de  $S^n$  para qualquer  $n > 0$ .

Veremos no próximo capítulo que  $G^n(X)$ ,  $\overline{G}^n(X)$  e  $\tilde{G}^n(X)$  são todos homeomorfos, como também são os espaços  $F^n(X, x_0)$ ,  $\overline{F}^n(X, x_0)$  e  $\tilde{F}^n(X, x_0)$ . Devido a isso, quando não houver confusão, usaremos a mesma notação para os espaços  $G^n(X)$ ,  $\overline{G}^n(X)$  e  $\tilde{G}^n(X)$ , a saber,  $G^n(X)$ , e também usaremos a mesma notação para os espaços  $F^n(X, x_0)$ ,  $\overline{F}^n(X, x_0)$  e  $\tilde{F}^n(X, x_0)$ , a saber,  $F^n(X, x_0)$ .

Os próximos resultados desta seção contém as propriedades essenciais da topologia compacto-aberta.

**Lema 2.29.** *Se  $X$  é um espaço de Hausdorff e  $\{U\}$  é uma sub-base para os conjuntos abertos de  $Y$ , então a totalidade dos conjuntos  $M(K, U)$ , para  $K$  um subconjunto compacto de  $X$  e  $U \in \{U\}$ , forma uma sub-base para a topologia compacto aberta de  $\Omega$ .*

*Demonstração.* É suficiente mostrar que se  $K$  é um subconjunto compacto de  $X$  e  $W$  é um subconjunto aberto de  $Y$ , então se  $f \in M(K, W)$ , existem subconjuntos compactos  $K_1, \dots, K_m$  de  $X$  e elementos  $U_1, \dots, U_m$  de  $\{U\}$  tais que

$$f \in M(K_1, U_1) \cap \dots \cap M(K_m, U_m) \subset M(K, W).$$

Seja  $x \in K$ . Como  $f(x) \in W$  e  $\{U\}$  formam uma sub-base para os abertos de  $Y$ , existem um número finito de conjuntos em  $\{U\}$ , digamos  $U_1^x, \dots, U_{n_x}^x$ , tais que

$$f(x) \in U_1^x \cap \dots \cap U_{n_x}^x \subset W.$$

Como  $f$  é contínua, existe uma vizinhança aberta  $G_x$  de  $x$  em  $X$  tal que

$$f(G_x) \subset U_1^x \cap \dots \cap U_{n_x}^x.$$

Como  $K$  é compacto e Hausdorff, então  $K$  é regular. Logo, existe uma vizinhança aberta  $H_x$  de  $x$  em  $K$  tal que o compacto  $K_x = \overline{H_x}$  está contido em  $G_x$ .

A coleção  $\{H_x \mid x \in K\}$  é uma cobertura aberta do compacto  $K$ , e consequentemente existem um número finito de pontos de  $K$ ,  $x_1, \dots, x_q$ , tal que

$$K = H_{x_1} \cup \dots \cup H_{x_q}.$$

Por conveniência, troquemos os índices  $x_j$  por  $j$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

Agora, os conjuntos  $K_1, \dots, K_q$  são compactos e além do mais

$$f(K_j) \subset f(G_j) \subset U_1^j \cap \dots \cap U_{n_j}^j \subset W.$$

Consequentemente temos

$$f \in \bigcap_{j=1}^q \left[ \bigcap_{i=1}^{n_j} M(K_j, U_i^j) \right] = Z.$$

Suponha que  $g \in \Omega$  está em  $Z$ . Se  $x \in K$ , então  $x$  está em algum  $H_j$  e consequentemente está em  $K_j$ . Logo,

$$g(x) \in U_1^j \cap \dots \cap U_{n_j}^j \subset W.$$

Portanto  $g \in M(K, W)$ , e então

$$f \in \bigcap_{j=1}^q \left[ \bigcap_{i=1}^{n_j} M(K_j, U_i^j) \right] \subset M(K, W).$$

□

Existe uma função natural

$$\omega : \Omega \times X \rightarrow Y$$

definida por  $\omega(f, x) = f(x)$ , para todo  $f \in \Omega$  e  $x \in X$ . A função  $\omega$  será chamada de **avaliação do espaço de funções**  $\Omega$ .

**Proposição 2.30.** *Se  $X$  é um espaço localmente compacto e Hausdorff, então a avaliação  $\omega$  de  $\Omega$  é contínua.*

*Demonstração.* Sejam  $f \in \Omega$ ,  $x \in X$ , e  $W$  um conjunto aberto de  $Y$  contendo  $f(x)$ . Como  $f$  é contínua, a imagem inversa  $f^{-1}(W)$  é um conjunto aberto em  $X$  contendo  $x$ . Como  $X$  é localmente compacto e Hausdorff (Ver [16], página 185), existe uma vizinhança aberta  $V$  de  $x$  tal que o fecho  $\bar{V}$  é compacto e  $x \in V \subset \bar{V} \subset f^{-1}(W)$ . Então  $U = M(\bar{V}, W)$  é um aberto sub-básico de  $\Omega$  que contém  $f$ . Agora,  $U = M(\bar{V}, W)$  implica que  $\omega(U \times V) \subset W$ . Como  $U \times V$  é um aberto de  $\Omega \times X$ , que contém  $(f, x)$ , isto prova a continuidade de  $\omega$ .  $\square$

Agora vamos considerar três espaços  $T, X, Y$  e os espaços de funções

$$\Omega = Y^X, \Phi = Y^{X \times T}, \Psi = \Omega^T.$$

Para cada aplicação  $\phi : X \times T \rightarrow Y$  em  $\Phi$ , definimos a função  $\theta(\phi) : T \rightarrow \Omega$  por

$$[\theta(\phi)(t)](x) = \phi(x, t), \quad (t \in T, x \in X).$$

Dizemos que  $\theta(\phi)$  é a **função associada** de  $\phi$ .

**Proposição 2.31.** *A função associada  $\theta(\phi)$  de  $\phi \in \Phi$  é contínua.*

*Demonstração.* Seja  $\psi = \theta(\phi)$  e seja  $U = M(K, W)$  um aberto sub-básico qualquer de  $\Omega$ . É suficiente provar que  $\psi^{-1}(U)$  é um subconjunto aberto de  $T$ . Seja  $t_0$  um ponto qualquer em  $\psi^{-1}(U)$ . Por definição, temos

$$K \times \{t_0\} \subset \phi^{-1}(W).$$

A continuidade de  $\phi$  implica que  $\phi^{-1}(W)$  é um subconjunto aberto de  $X \times T$ . Consequentemente  $\phi^{-1}(W)$  é uma união de abertos básicos da forma  $G_\mu \times H_\mu$ , onde  $G_\mu$  e  $H_\mu$  são subconjuntos abertos de  $X$  e  $T$ , respectivamente. Como  $K$  é compacto,  $K \times \{t_0\}$  está contido em uma união finita desses abertos básicos, que iremos denotar por

$$G_1 \times H_1, G_2 \times H_2, \dots, G_n \times H_n$$

com  $t_0 \in H_i$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então

$$H = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$$

é um aberto de  $T$  contendo  $t_0$  e está contido em  $\psi^{-1}(U)$ . Portanto,  $\psi^{-1}(U)$  é um subconjunto aberto de  $T$ .  $\square$

Como uma consequência do resultado anterior, a associação  $\phi \mapsto \theta(\phi)$  define uma função

$$\theta : \Phi \rightarrow \Psi,$$

que quando for contínua, será chamada de **aplicação associação**. Isto acontece quando  $T$  é Hausdorff, como segue

**Proposição 2.32.** *Se  $T$  é um espaço de Hausdorff, então  $\theta : \Phi \rightarrow \Psi$  é contínua.*

*Demonstração.* Como  $T$  é Hausdorff e os conjuntos sub-básicos  $M(K, W)$  formam uma sub-base de  $\Omega$ , segue do Lema 2.29 que os subconjuntos

$$M[L, M(K, W)] = \{\psi \in \Psi \mid \psi(L) \subset M(K, W)\}$$

formam uma sub-base para  $\Psi$ , onde  $L$  percorre todos os subconjuntos compactos de  $T$ ,  $K$  percorre todos os subconjuntos compactos de  $X$ , e  $W$  percorre todos os subconjuntos abertos de  $Y$ . Segue claramente da definição de  $\theta$  que

$$\theta^{-1}(M[L, M(K, W)]) = M(K \times L, W).$$

Como  $K \times L$  é compacto,  $M(K \times L, W)$  é um aberto de  $\Phi$ . Como  $\{M[L, M(K, W)]\}$  é um sub-base de  $\Psi$ , segue que  $\theta$  é contínua.  $\square$

**Proposição 2.33.** *A avaliação  $\omega$  de  $\Omega$  é contínua se, e somente se, para todo espaço  $T$ , a função  $\theta : \Phi \rightarrow \Psi$  é sobrejetora.*

*Demonstração.* Seja  $\psi \in \Psi$  e considere a aplicação  $\chi : X \times T \rightarrow \Omega \times X$  definida por

$$\chi(x, t) = (\psi(t), x)$$

para todo  $x \in X$  e  $t \in T$ . Seja  $\phi = \omega \circ \chi$ . Como  $\omega$  é contínua por hipótese, segue que  $\omega \circ \chi \in \Phi$ . Como

$$[\theta(\phi)(t)](x) = \phi(x, t) = \omega \circ \chi(x, t) = \omega(\psi(t), x) = [\psi(t)](x)$$

para todo  $x \in X$  e  $t \in T$ , temos  $\theta(\phi) = \psi$ . Consequentemente  $\theta$  é sobrejetora.

Para a implicação contrária, assumimos que  $\theta$  é sobrejetora, para todo espaço  $T$ . Em particular, para  $T = \Omega$ , seja  $\psi \in \Psi$  a aplicação identidade de  $\Omega$ . Então existe uma aplicação  $\phi \in \Phi$  com  $\theta(\phi) = \psi$ . Como

$$\phi(x, f) = [\psi(f)](x) = f(x) = \omega(f, x)$$

para todo  $x \in X$  e  $f \in \Omega$ , a continuidade de  $\phi$  implica a continuidade de  $\omega$ .  $\square$

Como resultado imediato da prova da proposição anterior, temos

**Corolário 2.34.** *Se a avaliação  $\omega$  de  $\Omega$  é contínua e se  $\phi : X \times T \rightarrow Y$  é uma função, então  $\phi$  é contínua se, e somente se,  $\theta(\phi) : T \rightarrow Y^X$  é contínua. Em outras palavras, se a avaliação  $\omega$  de  $\Omega$  é contínua e se  $\phi : X \times T \rightarrow Y$  é uma função, então  $\phi \in \Phi$  se, e somente se,  $\theta(\phi) \in \Psi$ .*

**Observação 2.35.** Pela definição de  $\theta : \Phi \rightarrow \Psi$ ,  $\theta$  é sempre injetora.

Como uma consequência imediata da Proposição 2.30, da proposição anterior e da observação acima, temos o seguinte

**Corolário 2.36.** *Se  $X$  é um espaço localmente compacto e Hausdorff, então a função  $\theta : \Phi \rightarrow \Psi$  é bijetora.*

**Proposição 2.37.** *Se  $X$  e  $T$  são espaços de Hausdorff, então a função associação  $\theta : \Phi \rightarrow \Psi$  é um homeomorfismo de  $\Phi$  sobre o subespaço  $\theta(\Phi)$  de  $\Psi$ .*

*Demonstração.* Como  $\theta$  é injetora e pela Proposição 2.32 é contínua, resta-nos provar que  $\theta^{-1}|\theta(\Phi)$  é contínua. Para este propósito, basta provar que, se  $J$  é um subespaço compacto de  $X \times T$  e  $W$  é um conjunto aberto de  $Y$ , então a imagem inversa  $(\theta^{-1}|\theta(\Phi))^{-1}[M(J, W)] = \theta[M(J, W)]$  é um conjunto aberto de  $\theta(\Phi)$ .

Seja  $\psi \in \theta[M(J, W)]$  um elemento arbitrário, logo existe  $\phi \in M(J, W)$  com  $\theta(\phi) = \psi$ . Sejam  $J_X$  e  $J_T$  as projeções de  $J$  em  $X$  e  $T$ , respectivamente. Como as projeções são contínuas seguem que  $J_X$  e  $J_T$  são compactos de  $X$  e  $T$ , respectivamente. Para cada ponto  $z = (x, t) \in J$ , pela continuidade de  $\phi$ , existem  $U_z$  vizinhança aberta de  $x$  em  $J_X$  e  $V_z$  vizinhança aberta de  $t$  em  $J_T$ , tal que

$$\phi(U_z \times V_z) \subset W.$$

Para ver isto, basta tomar o aberto  $\phi^{-1}(W)$ , garantido pela continuidade de  $\phi$ , e notar que  $J \subset \phi^{-1}(W)$ .

Como  $J_X$  e  $J_T$  são compactos e também são Hausdorff (subespaços de espaços Hausdorff), seguem que  $J_X$  e  $J_T$  são regulares. Consequentemente podemos tomar  $U_z$  e  $V_z$  um pouco menor de forma que

$$\phi(K_z \times L_z) \subset W,$$

onde  $K_z$  denota o fecho de  $U_z$  em  $J_X$  e  $L_z$  denota o fecho de  $V_z$  em  $J_T$ .

A coleção  $\{(U_z \times V_z) \cap J \mid z \in J\}$  é uma cobertura aberta do conjunto compacto  $J$ . Consequentemente existe um número finito de pontos em  $J$ ,  $z_1, \dots, z_n$ , tais que

$$J \subset (U_{z_1} \times V_{z_1}) \cup \dots \cup (U_{z_n} \times V_{z_n}).$$

Para melhorar o entendimento, troquemos os índices  $z_i$  por  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Os conjuntos  $K_i$  e  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , são todos compactos, pois são fechados e estão contidos em compactos. Além do mais,

$$[\psi(L_i)](K_i) = \phi(K_i \times L_i) \subset W$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Consequentemente

$$\psi \in \theta(\Phi) \cap \left( \bigcap_{i=1}^n M[L_i, M(K_i, W)] \right).$$

Suponha agora que  $\chi \in \theta(\Phi)$  está em  $\bigcap_{i=1}^n M[L_i, M(K_i, W)]$ . Como  $\chi \in \theta(\Phi)$ , existe uma aplicação  $\xi \in \Phi$  com  $\chi = \theta(\xi)$ . Se  $z = (x, t) \in J$ , então  $z$  está em  $U_i \times V_i$ ,

para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ , e consequentemente está em  $K_i \times L_i$ . Como  $\chi$  está em  $\bigcap_{i=1}^n M[L_i, M(K_i, W)]$ ,  $x$  está em  $K_i$  e  $t$  está em  $L_i$ , temos

$$\xi(z) = \xi(x, t) = [\chi(t)](x) \in W.$$

Isto prova que  $\xi(J) \subset W$ . Logo,  $\xi \in M(J, W)$  e consequentemente  $\chi = \theta(\xi) \in \theta[M(J, W)]$ . Portanto, obtemos

$$\psi \in \theta(\Phi) \cap \left( \bigcap_{i=1}^n M[L_i, M(K_i, W)] \right) \subset \theta[M(J, W)].$$

Como  $\bigcap_{i=1}^n M[L_i, M(K_i, W)]$  é um conjunto aberto de  $\Psi$ , isto prova que  $\theta[M(J, W)]$  é um conjunto aberto de  $\theta(\Phi)$ .  $\square$

Como uma consequência imediata da proposição anterior e do Corolário 2.36, obtemos o seguinte teorema

**Teorema 2.38.** *Sejam  $X$  e  $T$  espaços de Hausdorff e  $Y$  um espaço qualquer. Se  $X$  é localmente compacto, então a função associação  $\theta$  é um homeomorfismo de  $\Phi = Y^{X \times T}$  em  $\Psi = (Y^X)^T$ .*

A partir de agora, quando as hipóteses do teorema acima forem satisfeita, os dois espaços de funções serão identificados por meio do homeomorfismo  $\theta$ , e falaremos que

$$Y^{X \times T} = (Y^X)^T.$$

Esta identificação será chamada de **lei exponencial** dos espaços de funções.

## 2.4 Fibrações de espaços de funções

Nesta seção, vamos definir, para qualquer aplicação  $p : E \rightarrow B$ , a propriedade de levantamento de caminho (abreviadamente PLP - path lifting property), que foi introduzida por Hurewicz e Curtis, e provar que PLP é equivalente a propriedade de homotopia de cobertura absoluta (abreviadamente ACHP- absolute covering homotopy property). Por fim, daremos exemplos de algumas fibrações que serão de grande importância para aplicações futuras em nosso trabalho.

Seja  $p : E \rightarrow B$  uma aplicação (lembramos que neste trabalho todas as aplicações são contínuas, caso contrário, especificaremos). Seja  $Z$  o subespaço do espaço produto  $E \times B^I$  definido por

$$Z = \{(e, f) \in E \times B^I \mid p(e) = f(0)\}$$

e seja  $q : E^I \rightarrow Z$  uma aplicação definida por

$$q(g) = (g(0), p \circ g)$$

para todo  $g : I \rightarrow E$  em  $E^I$ .

**Definição 2.39.** Dizemos que uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  tem a PLP se existe uma aplicação

$$r : Z \rightarrow E^I$$

tal que  $q \circ r$  é a aplicação identidade de  $Z$ .

A grosso modo, a definição acima diz que uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  tem a PLP se, para cada  $e \in E$  e cada caminho  $f : I \rightarrow B$  com  $f(0) = p(e)$ , existe um caminho  $g : I \rightarrow E$  tal que  $g(0) = e$ ,  $p \circ g = f$ , e  $g$  depende continuamente de  $e$  e  $f$ . O diagrama abaixo ilustra a comutatividade.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ I & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

**Proposição 2.40.** Uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  tem a PLP se, e somente se, tem a ACHP.

*Demonstração.* Suponha que  $p$  tem a PLP. Sejam  $g : X \rightarrow E$  uma aplicação qualquer de um espaço  $X$  arbitrário em  $E$  e  $f_t : X \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), uma homotopia arbitrária da aplicação  $f = p \circ g$ . De acordo com a Proposição 2.31, a homotopia  $f_t$  fornece uma aplicação  $h : X \rightarrow B^I$  definida por

$$[h(x)](t) = f_t(x), \quad (x \in X, t \in I).$$

Seja  $k : X \rightarrow Z$  uma aplicação definida por

$$k(x) = (g(x), h(x)), \quad (x \in X).$$

Então a composição  $r \circ k$  é uma aplicação de  $X$  em  $E^I$ . Como  $I$  é localmente compacto e Hausdorff, segue da Proposição 2.30 e do Corolário 2.34 que podemos definir uma homotopia  $g_t : X \rightarrow E$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), por

$$g_t(x) = [r \circ k(x)](t), \quad (x \in X, t \in I).$$

Agora, por hipótese,  $q \circ r(k(x)) = k(x)$ , para todo  $x \in X$ . Usando a definição de  $q$ , segue facilmente que  $g_0(x) = g(x)$  e  $(p \circ g_t)(x) = f_t(x)$ , para todo  $x \in X$  e  $t \in I$ . Portanto,  $p$  tem a ACHP.

Suponhamos agora que  $p$  tem a ACHP. Seja  $\eta : Z \rightarrow E$  a projeção natural definida por  $\eta(e, f) = e$  para todo  $(e, f) \in Z$ . Definimos uma homotopia  $\xi_t : Z \rightarrow B$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), por

$$\xi_t(e, f) = f(t)$$

para todo  $(e, f) \in Z$  e  $t \in I$ . Então temos  $\xi_0 = p \circ \eta$ . Como  $p$  tem a ACHP, existe uma homotopia  $\eta_t : Z \rightarrow E$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $\eta_0 = \eta$  e  $p \circ \eta_t = \xi_t$ , para todo  $t \in I$ . Pela Proposição 2.31,  $\eta_t$  fornece uma aplicação  $r : Z \rightarrow E^I$  definida por

$$[r(e, f)](t) = \eta_t(e, f),$$

para todo  $(e, f) \in Z$  e  $t \in I$ . Então, para qualquer  $(e, f) \in Z$ , temos  $q \circ r(e, f) = ([r(e, f)](0), p \circ r(e, f)) = (\eta(e, f), f) = (e, f)$ , uma vez que  $[p \circ r(e, f)](t) = p([r(e, f)](t)) = p(\eta_t(e, f)) = \xi_t(e, f) = f(t)$ , para todo  $t \in I$ . Portanto  $q \circ r$  é a aplicação identidade de  $Z$  e consequentemente  $p : E \rightarrow B$  tem a PLP.  $\square$

**Corolário 2.41.** *Se uma aplicação  $p : E \rightarrow B$  tem a PLP, então  $E$  é um espaço fibrado sobre  $B$  com projeção  $p$ .*

Sejam  $X$  um espaço localmente compacto metrizável ANR,  $A$  um subespaço fechado de  $X$  também ANR e  $Y$  um espaço arbitrário. Vamos considerar os espaços de funções

$$E = Y^X, \quad B = Y^A.$$

Existe uma aplicação natural

$$p : E \rightarrow B$$

definida por

$$p(f) = f|_A,$$

para toda aplicação  $f : X \rightarrow Y$ . Vamos provar que  $E$  é um espaço fibrado sobre  $B$  com projeção  $p$ . De fato, vale o seguinte resultado mais forte

**Teorema 2.42.** *A aplicação  $p : E \rightarrow B$  definida acima tem a PLP.*

*Demonstração.* Vamos considerar o subespaço  $Z$  de  $E \times B^I$  e a aplicação  $q : E^I \rightarrow Z$  introduzidos no início da seção e construir uma aplicação  $r : Z \rightarrow E^I$  tal que  $q \circ r$  seja a aplicação identidade de  $Z$ .

Consideremos o subespaço fechado  $T = (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$  de  $X \times I$ . Pela Proposição 2.28,  $T$  é um retrato de  $X \times I$ . Seja  $\rho : X \times I \supset T$  a retração.

Consideremos o espaço de funções  $Y^T$ . Para cada  $g : T \rightarrow Y$  em  $Y^T$ , definamos duas aplicações  $e : X \rightarrow Y$  e  $f : I \rightarrow Y^A$  como segue

$$e(x) = g(x, 0), \quad (x \in X)$$

$$[f(t)](a) = g(a, t), \quad (t \in I, a \in A).$$

A continuidade de  $f$  segue da Proposição 2.31. Note que  $[f(0)](a) = g(a, 0) = e(a) = e|_A(a) = [p(e)](a)$ , para todo  $a \in A$ . Logo,  $f(0) = p(e)$ . Isto implica que  $(e, f) \in Z$ . Consequentemente a associação  $g \mapsto \theta(g) = (e, f)$  determina uma função

$$\theta : Y^T \rightarrow Z.$$

Por métodos usados anteriormente para o estabelecimento da lei exponencial dos espaços de funções, pode-se mostrar que  $\theta$  é um homeomorfismo de  $Y^T$  em  $Z$ .

Usando a aplicação inversa de  $\theta$ , podemos definir uma aplicação  $r : Z \rightarrow E^I$  por

$$[r(z)(t)](x) = \theta^{-1}(z)(\rho(x, t)),$$

para todo  $z \in Z$ ,  $t \in I$  e  $x \in X$ . Como  $\rho$  é uma retração, segue imediatamente que  $(q \circ r)(z) = z$ , para todo  $z \in Z$ . Portanto  $p$  tem a PLP.  $\square$

Nas hipóteses do teorema anterior, se  $B' = \{f \in Y^A \mid f \text{ é constante} \}$  e  $A' = p^{-1}(B')$  o conjunto de todas as aplicações  $f$  de  $Y^X$  tais que  $f$  é constante em  $A$ , então podemos identificar  $B'$  de modo natural com  $Y$ , e pela Proposição 2.9, segue que  $\tau : A' \rightarrow Y$ , dada por  $\tau(f) = f|_A$  é uma fibração. Como consequência, temos os seguintes exemplos:

**Exemplo 2.43.** A aplicação  $\tau : G^n(Y) \rightarrow Y$  definida por  $\tau(f) = f|_{\partial I^n}$ , para toda  $f \in G^n(Y)$ , é uma fibração com fibra  $\tau^{-1}(\{y_0\}) = F^n(Y, y_0)$ ,  $y_0 \in Y$ .

**Exemplo 2.44.** A aplicação  $\bar{\tau} : \bar{G}^n(Y) \rightarrow Y$  dada por  $\bar{\tau}(f) = f|_{S^{n-1}}$ , para toda  $f \in \bar{G}^n(Y)$ , é uma fibração com fibra  $\bar{\tau}^{-1}(\{y_0\}) = \bar{F}^n(Y, y_0)$ ,  $y_0 \in Y$ .

**Exemplo 2.45.** A aplicação  $\tilde{\tau} : \tilde{G}^n(Y) \rightarrow Y$  dada por  $\tilde{\tau}(f) = f(s_0)$ , para toda  $f \in \tilde{G}^n(Y)$ , é uma fibração com fibra  $\tilde{\tau}^{-1}(\{y_0\}) = \tilde{F}^n(Y, y_0)$ ,  $y_0 \in Y$ .

As fibrações  $\tau$ ,  $\bar{\tau}$  e  $\tilde{\tau}$  serão chamadas de **fibrações avaliações**, e quando não houver confusão serão todas denotadas por  $\tau$ .



## 3 Grupos de homotopia de ordens superiores

### 3.1 Definição de Grupos de Homotopia de ordens superiores

Considere  $I^n$  o  $n$ -cubo euclidiano, consistindo dos pontos  $(t_1, \dots, t_n)$  do  $\mathbb{R}^n$ , com  $0 \leq t_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . O bordo de  $I^n$  que consiste dos pontos de  $I^n$  tal que  $t_i = 0$  ou  $1$  para pelo menos um valor de  $i$ . Agora seja  $X$  um espaço Hausdorff e seja  $x_0 \in X$ . Sejam  $f, g : I^n \rightarrow X$  tais que  $f(1, t_2, \dots, t_n) = g(0, t_2, \dots, t_n)$  e defina  $h : I^n \rightarrow X$  por

$$h(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Então, pelo Lema 1.18,  $h$  é contínua e escrevemos  $h = f + g$ . Quando  $n = 1$  é usual denotar  $h$  por  $f * g$ .

Suponha agora que  $f(\partial I^n) = g(\partial I^n) = x_0$ , e seja  $F^n(X, x_0)$  o conjunto das aplicações contínuas  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , já referido anteriormente, sendo  $X$  um espaço topológico. Portanto, introduzimos uma adição em  $F^n(X, x_0)$ . Seja  $\pi_n(X, x_0)$  o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ , e como denotado no capítulo anterior,  $[f]$  representa a classe de homotopia de  $f$  (lembrando que neste caso a homotopia é relativa a  $\partial I^n$ ).

**Observação 3.1.** Como  $I^n$  é um espaço localmente compacto e Hausdorff, segue pela Proposição 2.30 e pelo Corolário 2.34 que os elementos de  $\pi_n(X, x_0)$  nada mais são que as componentes conexas por caminhos de  $F^n(X, x_0)$ .

**Lema 3.2.** Sejam  $f, g \in F^n(X, x_0)$ , então  $[f + g]$  depende somente de  $[f]$  e  $[g]$ .

*Demonstração.* Suponha  $f \sim f'$ ,  $g \sim g' : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ . Então existem  $F, G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  com  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = f'(x)$ ,  $G(x, 0) = g(x)$ ,  $G(x, 1) = g'(x)$ ,  $x \in I^n$ . Definimos  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  por

$$H((t_1, t_2, \dots, t_n), t) = \begin{cases} F((2t_1, t_2, \dots, t_n), t), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ G((2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n), t), & \text{se } 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Pelo Lema 1.18  $H$  é contínua e escrevemos  $H = F + G$ . Além do mais, é claro que  $H$  é uma homotopia entre  $f + g$  e  $f' + g'$ .  $\square$

Concluimos então que a adição introduzida em  $F^n(X, x_0)$  induz uma adição em  $\pi_n(X, x_0)$ .

Naturalmente, a adição definida em  $\pi_n(X, x_0)$  não é apenas descritível em termos da adição particular em  $F^n(X, x_0)$ . Será conveniente para as futuras aplicações fornecer mais informações sobre a adição em  $\pi_n(X, x_0)$ .

Seja  $I_1^n$  o "subcubo" de  $I^n$  consistindo de pontos  $(t_1, \dots, t_n)$  com  $\lambda_i \leq t_i \leq \mu_i$ , onde  $0 \leq \lambda_i \leq \mu_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Uma **concentração** de uma aplicação  $f \in F^n(X, x_0)$  em  $I_1^n$  é uma aplicação  $f' \in F^n(X, x_0)$  tal que  $f' \in [f]$  e  $f'(I^n - I_1^n) = x_0$ .

**Lema 3.3.** *Dado  $f \in F^n(X, x_0)$ , existe  $f' \in F^n(X, x_0)$  tal que  $f' \in [f]$  e  $f'(I^n - I_1^n) = x_0$ , isto é, existe uma concentração de  $f$ .*

*Demonstração.* Definimos  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  por

$$H((t_1, t_2, \dots, t_n), t) = \begin{cases} f\left(\frac{t_1 - \lambda_1 t}{1 - (1 - \mu_1 + \lambda_1)t}, \dots, \frac{t_n - \lambda_n t}{1 - (1 - \mu_n + \lambda_n)t}\right), & \text{se} \\ \lambda_i t \leq t_i \leq 1 - (1 - \mu_i)t, i = 1, \dots, n \\ x_0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então  $H_0 = f$  e  $H_1(t_1, \dots, t_n) = x_0$  a menos que  $\lambda_i \leq t_i \leq \mu_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Tome  $f' = H_1$ .  $\square$

Agora sejam  $f, g \in F^n(X, x_0)$  e sejam  $f', g'$  concentrações de  $f, g$  nos subcubos  $I_1^n, I_2^n$  respectivamente. Suponha ainda que os interiores de  $I_1^n$  e  $I_2^n$  são disjuntos e que  $I_1^n$  esteja "à esquerda" de  $I_2^n$ . Isto é, se  $I_1^n$  é como acima e se  $I_2^n$  é dado por  $\lambda'_i \leq t_i \leq \mu'_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então  $\mu_1 \leq \lambda'_1$ . Então definimos uma aplicação  $k \in F^n(X, x_0)$  dada por

$$k|I_1^n = f', k|I_2^n = g', k(x) = x_0 \text{ se } x \in I^n - (I_1^n \cup I_2^n).$$

**Lema 3.4.** *Seja  $k \in F^n(X, x_0)$  como definida acima, então  $k \in [f + g]$ .*

*Demonstração.* Primeiro provemos o lema supondo que  $I_1^n, I_2^n$  são os meio-cubos dados por  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$  respectivamente. Se escolhermos as concentrações particulares dadas pela construção do Lema 3.3, vemos que  $k = f + g$ . Agora, sejam  $f'_1, g'_1$  quaisquer concentrações de  $f, g$  em  $I_1^n, I_2^n$  respectivamente. Então  $f'_1 \in [f]$ ,  $g'_1 \in [g]$ . Defina  $f_1 \in F^n(X, x_0)$  por  $f_1(t_1, \dots, t_n) = f'_1(\frac{1}{2}t_1, t_2, \dots, t_n)$  e defina  $g_1$  similarmente. Então  $f'_1, g'_1$  são as concentrações de  $f_1, g_1$  dadas pelo Lema 3.3. Portanto se  $k_1$  é dado

por  $k_1|I_1^n = f'_1$ ,  $k_1|I_2^n = g'_1$ , nós temos  $k_1 = f_1 + g_1$ , e  $f_1 \in [f'_1] = [f]$ ,  $g_1 \in [g'_1] = [g]$ . Portanto, pelo Lema 3.2  $k_1 \in [f + g]$ . Isto prova o lema neste caso especial em que  $I_1^n, I_2^n$  são os meio-cubos.

Para provar o caso geral não há perda de generalidade em supor que  $\mu_1 = \lambda'_1$ , pois se  $\mu_1 < \lambda'_1$  e  $f'$  é uma concentração de  $f$  em  $I_1^n$ , então claramente  $f'$  é uma concentração de  $f$  no subcubo maior que contém  $I_1^n$  obtido por substituir  $\mu_1$  por  $\lambda'_1$ . Suponhamos então que  $\mu_1 = \lambda'_1$ . Pelo mesmo argumento podemos supor que  $\lambda_1 = 0$ ,  $\mu'_1 = 1$ , e que  $\lambda_i = \lambda'_i = 0$ ,  $\mu_i = \mu'_i = 1$ ,  $i \neq 1$ . Agora definimos  $\sigma_t : I^1 \rightarrow I^1$  por

$$\sigma_t(t_1) = \begin{cases} t_1(1 + t(2\mu - 1)), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ 1 - (1 - t_1)(1 - t(2\mu - 1)), & \text{se } 1/2 \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

onde  $\mu = \mu_1 = \lambda'_1$ . Então  $\sigma_t$  é uma deformação de  $I^1$ , rel  $(\partial I^1)$ , que deforma  $[0, \frac{1}{2}]$  em  $[0, \mu]$  e  $[\frac{1}{2}, 1]$  em  $[\mu, 1]$ . Defina

$$\bar{\sigma}_t : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n, \partial I^n) \text{ por } \bar{\sigma}_t(t_1, t_2, \dots, t_n) = (\sigma_t(t_1), t_2, \dots, t_n).$$

Como  $\bar{\sigma}_0 = id_{I^n}$  e  $\bar{\sigma}_t$  é uma homotopia entre  $\bar{\sigma}_0$  e  $\bar{\sigma}_1$ , então  $k \circ \bar{\sigma}_1 \in [k]$ ,  $f' \circ \bar{\sigma}_1 \in [f'] = [f]$  e  $g' \circ \bar{\sigma}_1 \in [g'] = [g]$ . Agora  $f' \circ \bar{\sigma}_1$  é uma concentração de  $f$  no meio-cubo  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ , e  $g' \circ \bar{\sigma}_1$  é uma concentração de  $g$  no meio-cubo  $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$ . Além do mais,  $k \circ \bar{\sigma}_1$  é dado por  $k \circ \bar{\sigma}_1|$  (meio-cubo  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ ) =  $f' \circ \bar{\sigma}_1$ ,  $k \circ \bar{\sigma}_1|$  (meio-cubo  $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$ ) =  $g' \circ \bar{\sigma}_1$ , Portanto, pelo caso especial provado acima,  $k \circ \bar{\sigma}_1 \in [f + g]$ , mas  $k \circ \bar{\sigma}_1 \in [k]$  pois  $\bar{\sigma}_1 \sim id_{I^n}$ , então  $k \in [f + g]$ .  $\square$

**Lema 3.5.** *Sejam  $f, g \in F^n(X, x_0)$ , então  $[f + g] = [g + f]$  se  $n > 1$ .*

*Demonstração.* Como  $I^2$  é homeomorfo ao disco  $E^2$ , podemos definir uma rotação de  $I^2$  de  $180^\circ$ . Esta rotação

$$\rho' : (I^2, \partial I^2) \rightarrow (I^2, \partial I^2)$$

é homotópica a aplicação identidade e troca os meios-cubos  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$ . Defina  $\rho : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$  por

$$\rho(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n) = (\rho'(t_1, t_2), t_3, \dots, t_n), \quad n > 1.$$

Então  $\rho \sim id_{I^n}$ . Sejam  $f'$  uma concentração de  $f$  no meio-cubo  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$  e  $g'$  uma concentração de  $g$  no meio-cubo  $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$ . Então  $f' \circ \rho$  é concentração de  $f$  no meio-cubo  $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$  e  $g' \circ \rho$  é concentração de  $g$  no meio-cubo  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$ . Vamos denotar o meio-cubo  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}$  por  $I_L^n$  e o meio-cubo  $\frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1$  por  $I_R^n$ . Então se  $k$  é dado por  $k|I_L^n = f'$ ,  $k|I_R^n = g'$ , temos pelo Lema 3.4 que  $k \in [f + g]$  e também  $k \circ \rho|I_L^n = g' \circ \rho$ ,  $k \circ \rho|I_R^n = f' \circ \rho$ . Portanto pelo Lema 3.4  $k \circ \rho \in [g + f]$ , mas  $k \circ \rho \in [k]$ , logo  $[f + g] = [g + f]$ .  $\square$

**Observação 3.6.** Usando um raciocínio similar ao da prova do lema anterior, pode-se mostrar, se  $n > 1$ , que a condição que  $I_1^n$  esteja a "esquerda" de  $I_2^n$  é irrelevante na construção de  $k$ .

**Teorema 3.7.** *Sob a operação de adição, o conjunto de classes de homotopia,  $\pi_n(X, x_0)$ , é um grupo ( $n \geq 1$ ) e é abeliano se  $n > 1$ .*

*Demonstração.*

- *Existência do elemento neutro:* Sejam  $g \in F^n(X, x_0)$  a aplicação constante,  $g(I^n) = x_0$ ,  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e  $f \in \alpha$  concentrado em  $I_L^n$ . Então a aplicação  $k$ , dada por  $k|I_L^n = f$ ,  $k|I_R^n = g$ , é justamente  $f$ , então  $\alpha + [g] = \alpha$  e pelo Lema 3.5 segue que  $\alpha + [g] = [g] + \alpha = \alpha$ . Denotamos  $[g] = 0$ .
- *Existência do elemento inverso:* Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  representado por  $f \in F^n(X, x_0)$ . Defina  $(-\alpha)$  como a classe da aplicação  $\bar{f} \in F^n(X, x_0)$ , definida por  $\bar{f}(t_1, t_2, \dots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \dots, t_n)$ . É claro que  $(-\alpha)$  depende somente de  $\alpha$ . Então  $\alpha + (-\alpha)$  é representado por  $h \in F^n(X, x_0)$ , dada por

$$h(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ f(2 - 2t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Agora definamos uma homotopia  $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \rightarrow (X, x_0)$  por

$$H(t_1, t_2, \dots, t_n, t) = \begin{cases} f(2(1-t)t_1, t_2, \dots, t_n), & \text{se } 0 \leq t_1 \leq 1/2 \\ f(2(1-t)(1-t_1), t_2, \dots, t_n), & \text{se } 1/2 \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Então  $H_0 = h$  e  $H_1(I^n) = x_0$ , portanto  $\alpha + (-\alpha) = 0$ . Pelo Lema 3.5 segue que  $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$ .

- *Associatividade:* Sejam  $\alpha, \beta, \lambda \in \pi_n(X, x_0)$ , sejam  $f, g, h \in F^n(X, x_0)$  representantes de  $\alpha, \beta, \lambda$  respectivamente, e concentrados nos subcubos  $0 \leq t_1 \leq \frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{3} \leq t_1 \leq \frac{2}{3}$ ,  $\frac{2}{3} \leq t_1 \leq 1$  respectivamente. Agora segue do Lema 3.4 que a aplicação que é igual a  $f$  no primeiro subcubo, a  $g$  no segundo, e a  $h$  no terceiro, representa ambos  $(\alpha + \beta) + \lambda$  e  $\alpha + (\beta + \lambda)$ .
- *Comutatividade:* Isto é justamente o Lema 3.5.

□

O grupo  $\pi_n(X, x_0)$  é chamado de **n-ésimo grupo de homotopia de X mod x<sub>0</sub>**, e  $x_0$  é chamado de **ponto base** de  $X$ . Se  $n = 1$ , é justamente o grupo fundamental de  $X$  com ponto base  $x_0$ , isto é, o grupo formado pelas classes de homotopia dos caminhos fechados em  $X$  baseados em  $x_0$ .

## 3.2 Descrições alternativas para os grupos de homotopia de ordens superiores

No decorrer de nosso trabalho será de grande importância utilizar definições equivalentes para  $\pi_n(X, x_0)$ , isto é, usar representantes diferentes para elementos de  $\pi_n(X, x_0)$  sem perder a estrutura algébrica do grupo, a saber, usar representantes cujos domínios sejam espaços homeomorfos a  $I^n$  ou a  $S^n$ .

Escolha um homeomorfismo  $\phi_n$  entre  $I^n$  e o  $n$ -disco unitário,  $D^n$ , dado pelos pontos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tais que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$ . O bordo de  $D^n$  é a  $(n-1)$ -esfera unitária,  $S^{n-1}$ , no  $n$ -espaço Euclidiano, dado pelos pontos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  tais que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .

Seja  $\overline{F}^n(X, x_0)$  o espaço das aplicações contínuas  $f : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ , já introduzido anteriormente. Usando o homeomorfismo dado  $\phi_n : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ , pode-se mostrar o seguinte teorema:

**Teorema 3.8.**  $\pi_n(X, x_0)$  é isomorfo ao grupo formado pelas classes de homotopia de  $\overline{F}^n(X, x_0)$  com a operação induzida de  $\pi_n(X, x_0)$  por  $\phi_n$ , isto é,  $[f] + [g] := [(f \circ \phi_n^{-1} + g \circ \phi_n^{-1}) \circ \phi_n]$ ,  $f, g \in \overline{F}^n(X, x_0)$ .

*Demonstração.* A prova desse teorema é trivial, basta definir o isomorfismo induzido de  $\phi_n$  por  $[f] \mapsto [f \circ \phi_n]$ ,  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ .  $\square$

**Observação 3.9.** Facilmente verifica-se que a aplicação  $\phi_{n*} : G^n(X) \rightarrow \overline{G}^n(X)$  definida por  $\phi_{n*}(f) = f \circ \phi_n$ , para toda  $f \in G^n(X)$ , é um homeomorfismo entre os espaços de funções. Claramente  $\phi_{n*}(F^n(X, x_0)) = \overline{F}^n(X, x_0)$ , logo  $\phi_{n*}|_{F^n(X, x_0)}$  é um homeomorfismo entre  $F^n(X, x_0)$  e  $\overline{F}^n(X, x_0)$ .

**Observação 3.10.** Pelo teorema anterior, se  $D_+^n$  dado pelos pontos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  de  $S^n$  tais que  $x_{n+1} \geq 0$ , e  $D_-^n$  dado pelos pontos  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$  de  $S^n$  tais que  $x_{n+1} \leq 0$ , são os hemisférios norte e sul de  $S^n$ , a  $n$ -esfera unitária em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , cujo ambos os bordos são  $S^{n-1}$ , podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de  $\pi_n(X, x_0)$  e as classes de homotopia das aplicações contínuas  $f : (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  (ou classes de aplicações contínuas  $f : (D_-^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$ ).

Agora, seja  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  o espaço das aplicações contínuas  $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , já introduzido anteriormente, onde  $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$  e  $n > 0$ .

**Teorema 3.11.** Pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de  $\pi_n(X, x_0)$  e as classes de homotopia de  $\tilde{F}^n(X, x_0)$ .

*Demonstração.* Pela observação acima, é suficiente estabelecer uma correspondência biunívoca entre as classes de homotopia das aplicações contínuas  $(D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  e as classes de homotopia de  $\tilde{F}^n(X, x_0)$ . De fato, essa correspondência é estabelecida

por qualquer aplicação contínua  $\phi_n : (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0)$  que mapeia  $D_+^n - S^{n-1}$  homeomorficamente para  $S^n - \{s_0\}$ , essa aplicação também é conhecida como aplicação colagem de uma  $n$ -célula em  $S^n$ . A correspondência  $f \rightarrow f \circ \phi_n$ ,  $f \in \tilde{F}^n(X, x_0)$ , induz uma correspondência entre as classes de homotopia de  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  e  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $[f] \rightarrow [f \circ \phi_n]$ ,  $f \in \tilde{F}^n(X, x_0)$ .

Seja  $g : (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  uma aplicação contínua, então  $g \circ \phi_n^{-1} : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  está bem definida, pois  $g(S^{n-1}) = x_0$ , e é contínua, uma vez que se  $F$  é um fechado de  $X$ ,  $g^{-1}(F)$  é um fechado de  $D_+^n$  e portanto  $(g \circ \phi_n^{-1})^{-1}(F) = \phi_n(g^{-1}(F))$  é fechado em  $S^n$ . Portanto,  $g \circ \phi_n^{-1} \in \tilde{F}^n(X, x_0)$ . Note também que  $g = (g \circ \phi_n^{-1}) \circ \phi_n$ .

É claro que se  $f' \in [f]$ ,  $f, f' \in \tilde{F}^n(X, x_0)$ , então  $f' \circ \phi_n \in [f \circ \phi_n]$ , isto é, a correspondência entre as classes está bem definida.

Portanto a correspondência  $f \rightarrow f \circ \phi_n$ ,  $f \in \tilde{F}^n(X, x_0)$ , induz uma aplicação entre as classes de homotopia de  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  e  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $[f] \rightarrow [f \circ \phi_n]$ , sobrejetiva.

Mostremos agora a injetividade: sejam  $f, f' \in \tilde{F}^n(X, x_0)$  tal que  $[f \circ \phi_n] = [f' \circ \phi_n]$ . Seja  $H : (D_+^n \times I, S^{n-1} \times I) \rightarrow (X, x_0)$  uma homotopia entre  $f \circ \phi_n$  e  $f' \circ \phi_n$ , então  $H(x, 0) = f \circ \phi_n(x)$  e  $H(x, 1) = f' \circ \phi_n(x)$ , para todo  $x \in D_+^n$ . Defina  $F : (S^n \times I, s_0 \times I) \rightarrow (X, x_0)$  por  $F(x, t) = H(\phi_n^{-1}(x), t)$ ,  $x \in S^n$ ,  $t \in I$ . Então  $F$  está bem definida e  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = f'(x)$ , para todo  $x \in S^n$ . A continuidade de  $F$  segue como acima, com  $g$ ,  $\phi_n$ ,  $S^n$  substituído por  $H$ ,  $\Phi_n$ ,  $S^n \times I$ , onde  $\Phi_n : D_+^n \times I \rightarrow S^n \times I$  é dado por  $\Phi_n(x, t) = (\phi_n(x), t)$ ,  $x \in D_+^n$ ,  $t \in I$ . Portanto,  $[f] = [f']$ . □

Uma aplicação adequada para  $\phi_n$  é a aplicação  $r \circ h$ , onde  $r$  é a rotação  $r(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_{n+1}, x_2, \dots, x_n, x_1)$  e  $h : (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, q_0)$  é dada por  $h(x_1, \dots, x_{n+1}) = (\mu x_1, \dots, \mu x_n, 2x_{n+1} - 1)$ , onde  $\mu \geq 0$  é escolhido de modo que  $h(x) \in S^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in D_+^n$ . Aqui  $q_0$  é o polo sul  $(0, 0, \dots, -1)$  e lembrando que um elemento  $x$  de  $D_+^n$  satisfaz  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$  com  $x_{n+1} \geq 0$ .

Geometricamente, primeiro a aplicação  $r \circ h$  identifica, por  $h$ , o espaço  $S^{n-1}$  ao polo sul  $q_0$ , assim obtendo  $S^n$ , em seguida por  $r$  rotaciona  $S^n$  de modo que  $q_0$  se transfira para  $s_0$ . Mais adiante mostraremos que  $r \circ h$  é uma aplicação que preserva orientação, ou seja,  $r \circ h$  é uma aplicação de grau 1.

**Observação 3.12.** A aplicação  $h$  pode ser estendida para todo  $S^n$  definindo-se  $h(D_-^n) = q_0$ . Denotando por  $\bar{h}$  a extensão de  $h$  e por  $\bar{\phi}_n$  a composta  $r \circ \bar{h}$ , note que  $\bar{\phi}_n(D_-^n) = s_0$ . É fácil de se verificar que  $\bar{h} : (S^n, D_-^n, q_0) \rightarrow (S^n, D_-^n, q_0)$  é homotópica a aplicação identidade de  $S^n$ . Na próxima seção iremos provar que  $\bar{\phi}_n : (S^n, D_-^n, s_0) \rightarrow (S^n, D_-^n, s_0)$  é homotópica a aplicação identidade de  $S^n$ . Portanto, para toda  $f \in \tilde{F}^n(X, x_0)$ ,  $f' = f \circ \bar{\phi}_n \in \tilde{F}^n(X, x_0)$  é uma concentração de  $f$  na  $n$ -célula  $D_+^n$ , isto é,  $f' = f \circ \bar{\phi}_n \in [f]$  e  $f'(S^n - D_+^n) = f'(D_-^n) = x_0$ .

**Observação 3.13.** Pode-se facilmente verificar que a aplicação  $\phi_{n*} : \tilde{G}^n(X) \rightarrow G^n(X)$  dada por  $\phi_{n*}(f) = f \circ \phi_n$ , para toda  $f \in \tilde{G}^n(X)$  é um homeomorfismo entre os espaços

de funções, onde  $\phi_n : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (S^n, s_0)$  é uma aplicação que leva homeomorficamente  $I^n - \partial I^n$  em  $S^n - \{s_0\}$ . Claramente  $\phi_{n*}(\tilde{F}^n(X, x_0)) = F^n(X, x_0)$ , logo  $\phi_{n*}|_{\tilde{F}^n(X, x_0)}$  é um homeomorfismo entre  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  e  $F^n(X, x_0)$ .

É devido as Observações 3.9 e 3.13 que muitas vezes iremos denotar os espaços  $G^n(X)$ ,  $\overline{G}^n(X)$  e  $\tilde{G}^n(X)$  simplesmente por  $G^n(X)$  e os espaços  $F^n(X, x_0)$ ,  $\overline{F}^n(X, x_0)$  e  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  simplesmente por  $F^n(X, x_0)$ .

**Observação 3.14.** Pode-se mostrar que a correspondência biunívoca tratada no Teorema 3.8 e 3.11 depende somente da classe de orientação da aplicação  $\phi_n$ . De fato duas aplicações  $\phi_n, \phi'_n : (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, s_0)$  (ou  $\phi_n, \phi'_n : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$ ) na mesma classe de orientação são homotópicas, e portanto a correspondência biunívoca independe da escolha de  $\phi_n$  ou  $\phi'_n$ . A partir de agora, as aplicações  $\phi_n$  escolhidas serão todas de modo que preservem a orientação, em outras palavras,  $\phi_n$  serão escolhidas de modo que seu grau seja 1. Para mais detalhes, ver [7], Capítulo 3.

Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  representado por uma aplicação  $f \in F^n(X, x_0)$  que é concentrada em algum subcubo  $I_1^n$ , de  $I_n$ . Então uma aplicação

$$\phi_n : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (S^n, s_0)$$

que aplica  $I^n - \partial I^n$  homeomorficamente em  $S^n - \{s_0\}$  induz uma correspondência biunívoca de elementos de  $\pi_n(X, x_0)$  com classes de homotopia de  $\tilde{F}^n(X, x_0)$ . A aplicação  $f \circ \phi_n^{-1} : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  será concentrada em alguma n-célula fechada,  $D_1^n$ , de  $S^n$ , onde  $\phi_n(I_1^n) = D_1^n$ , com a condição de que apenas  $I_1^n$  seja um subcubo próprio de  $I^n$ . Além disso, se  $f_1, f_2 \in F^n(X, x_0)$  representam  $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_n(X, x_0)$  e  $f_1, f_2$  estão concentradas em subcubos  $I_1^n, I_2^n$  cujos interiores são disjuntos, então  $f_1 \circ \phi_n^{-1}$  e  $f_2 \circ \phi_n^{-1}$  serão concentrações em n-células  $D_1^n, D_2^n$  de  $S^n$  cujos interiores são disjuntos. Se  $k \in F^n(X, x_0)$  é dado por  $k|I_1^n = f_1, k|I_2^n = f_2, k(x) = x_0$ , caso contrário,  $x \in I^n$ , então  $k \in \alpha_1 + \alpha_2$ , e  $k \circ \phi_n^{-1} : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  é dada por  $k \circ \phi_n^{-1}|D_1^n = f_1 \circ \phi_n^{-1}, k \circ \phi_n^{-1}|D_2^n = f_2 \circ \phi_n^{-1}, k \circ \phi_n^{-1}(x) = x_0$ , caso contrário,  $x \in S^n$ . Isso mostra como a adição em  $\pi_n(X, x_0)$  induz uma adição nas classes de homotopia de  $\tilde{F}^n(X, x_0)$ . Dadas duas dessas classes  $\beta_1, \beta_2$  representadas por aplicações  $f_1, f_2$ , concentradas em n-células  $D_1^n, D_2^n$  cujos interiores são disjuntos, definimos  $k : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  por  $k|D_1^n = f_1, k|D_2^n = f_2, k(x) = x_0$  caso contrário,  $x \in S^n$ . Então  $k$  representa  $\beta_1 + \beta_2$ . Nós ainda destacamos que para  $n = 1$ ,  $D_1^1$  precede  $D_2^1$  na dada orientação de  $S^1$ , a partir do ponto base.

Portanto,  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  com a adição definida acima se torna um grupo que é isomorfo a  $\pi_n(X, x_0)$  se  $n > 1$ , e isomorfo ou anti-isomorfo a  $\pi_1(X, x_0)$  de acordo se  $\phi_n$  preserva orientação ou reverte orientação.

De fato, vamos usar o mesmo símbolo  $\pi_n(X, x_0)$  para o grupo cujos elementos são classes de homotopia de aplicações  $(I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  ou  $(D^n, S^{n-1}) \rightarrow (X, x_0)$  ou

classes de aplicações  $(S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , de modo que um elemento  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  possa ser representado por uma aplicação de qualquer um dos tipos dados. Esta notação será justificada mais adiante, onde será demonstrado que existe, essencialmente, apenas uma correspondência biunívoca natural entre as classes de homotopia de aplicações de diferentes tipos.

**Observação 3.15.** Como  $I^n$ ,  $D^n$  e  $S^n$  são espaços localmente compactos e Hausdorff, segue da Proposição 2.30 e do Corolário 2.34, que os elementos de  $\pi_n(X, x_0)$  podem ser vistos como as componentes conexas por caminhos de  $F^n(X, x_0)$  ou  $\overline{F}^n(X, x_0)$  ou  $\tilde{F}^n(X, x_0)$ .

### 3.3 Os grupos de homotopia relativa de ordens superiores

Sejam  $A$  subespaço fechado de  $X$  e  $x_0 \in A$ . Seja  $I^{n-1}$  a  $(n-1)$  face de  $I^n$  dada por  $t_n = 0$  e seja  $J^{n-1}$  o fecho de  $\partial I^n - I^{n-1}$ , a união das  $(n-1)$  faces restantes de  $I^n$ . Denotemos por  $F^n(X, A, x_0)$  o conjunto de todas as aplicações contínuas  $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  e por  $\pi_n(X, A, x_0)$  as classes de homotopia de tais aplicações (homotopia de pares). Agora sejam  $f, g \in F^n(X, A, x_0)$  com  $n \geq 2$ . Então  $f + g$  está definida e pertence a  $F^n(X, A, x_0)$ . Exatamente como na seção 3.1 deste capítulo, vemos que a adição em  $F^n(X, A, x_0)$  induz uma adição em  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Nós iremos mostrar que  $\pi_n(X, A, x_0)$  é um grupo com a adição induzida de  $F^n(X, A, x_0)$ , e que é abeliano se  $n \geq 3$ .  $\pi_n(X, A, x_0)$  é chamado de **n-ésimo grupo de homotopia de X relativo a A mod  $x_0$**  (ou simplesmente **n-ésimo grupo de homotopia relativa**). Deve-se notar que o n-ésimo grupo de homotopia relativa,  $\pi_n(X, A, x_0)$ , se reduz ao n-ésimo grupo de homotopia,  $\pi_n(X, x_0)$  se  $A = \{x_0\}$ . No entanto, não podemos em geral dar para  $\pi_1(X, A, x_0)$  uma estrutura de grupo, embora algumas vezes seja útil considerar o conjunto  $\pi_1(X, A, x_0)$ . Muitas vezes iremos chamar  $(X, A, x_0)$  de uma tripla.

Nós agora procedemos como na seção 3.1 deste capítulo. Seja  $I_1^n$  um subcubo de  $I^n$  consistindo dos pontos  $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$  com  $\lambda_i \leq t_i \leq \mu_i$ , onde  $0 \leq \lambda_i \leq \mu_i \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $0 \leq t_n \leq \mu_n$ . Nós iremos somente considerar tais subcubos, onde  $\lambda_n = 0$ , nesta seção. Denotemos também por  $[f]$  a classe de homotopia, em  $\pi_n(X, A, x_0)$ , contendo a aplicação  $f \in F^n(X, A, x_0)$ .

**Lema 3.16.** Dado  $f \in F^n(X, A, x_0)$ , existe  $f' \in F^n(X, A, x_0)$  tal que  $f' \in [f]$  e  $f'(I^n - I_1^n) = x_0$ .

*Demonstração.* A prova é exatamente como a prova do Lema 3.3 □

Nesta seção dizemos também que  $f'$  resulta da concentração de  $f$  em  $I_1^n$ .

Agora sejam  $f, g \in F^n(X, A, x_0)$ ,  $n \geq 2$ . Nós assumimos que  $f' \in [f]$ ,  $g' \in [g]$  são concentrações nos subcubos  $I_1^n$ ,  $I_2^n$ , cujos interiores são disjuntos e  $I_1^n$  esteja a “esquerda” de  $I_2^n$ . Nós definimos  $k \in F^n(X, A, x_0)$  por

$$k|_{I_1^n} = f', k|_{I_2^n} = g', k(I^n - (I_1^n \cup I_2^n)) = x_0.$$

**Lema 3.17.** *Seja  $k \in F^n(X, A, x_0)$  como definida acima, então  $k \in [f + g]$ .*

*Demonstração.* A prova é exatamente como a prova do Lema 3.4 □

**Lema 3.18.** *Sejam  $f, g \in F^n(X, A, x_0)$ , então  $[f + g] = [g + f]$  se  $n > 2$ .*

*Demonstração.* Como  $n > 2$ , a prova segue como a prova do Lema 3.5, pois  $\rho' : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (I^n, \partial I^n)$  aplica  $J^{n-1}$  em  $J^{n-1}$ . Note, se  $n = 2$ ,  $\rho' : (I^2, \partial I^2) \rightarrow (I^2, \partial I^2)$  não aplica  $J^1$  em  $J^1$  e então  $f' \circ \rho'$  não será uma concentração de  $f$  em  $I_R^n$  e nem  $g' \circ \rho'$  será uma concentração de  $g$  em  $I_L^n$ , a menos que  $f', g' \in F^n(X, A, x_0)$  tenha a propriedade especial  $f'(\partial I^2) = g'(\partial I^2) = x_0$ . □

**Teorema 3.19.** *Sob a operação de adição, o conjunto de classes de homotopia,  $\pi_n(X, A, x_0)$ , é um grupo ( $n \geq 2$ ) e é abeliano se  $n > 2$ .*

*Demonstração.* A prova é exatamente como a prova do Teorema 3.7. □

**Observação 3.20.**  $I^n$  pode ser aplicado homeomorficamente para o n-disco unitário  $D^n$  de tal maneira que  $I^{n-1}$  seja aplicado<sup>1</sup> sobre  $D_+^{n-1}$  e  $J^{n-1}$  sobre  $D_-^{n-1}$ , e o ponto  $x_0 = (0, 0, \dots, 0) \in I^n$  seja levado em  $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in D^n$ . Portanto podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre as classes de homotopia das aplicações contínuas  $(I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  e as classes de homotopia das aplicações contínuas  $(E^n, D_+^{n-1}, D_-^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ .

O grupo de homotopia relativa,  $\pi_n(X, A, x_0)$ , foi originalmente definido em termos das aplicações contínuas  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , e nós agora procedemos para descrever tal grupo em termos dessas aplicações e mostrar a equivalência entre as duas definições.

Em preparação para isso, provemos dois resultados.

Seja  $\overline{\phi_n} = r \circ \bar{h} : (S^n, D_-^n, s_0) \rightarrow (S^n, D_-^n, s_0)$  como definida na Observação 3.12, satisfazendo  $\overline{\phi_n}(D_-^n) = s_0$ .

**Teorema 3.21.** *A aplicação  $\overline{\phi_n}$  é homotópica a aplicação identidade de  $S^n$ , mais precisamente,  $\overline{\phi_n} \sim id_{S^n} : (S^n, D_-^n, s_0) \rightarrow (S^n, D_-^n, s_0)$ .*

<sup>1</sup>Lembrando,  $D_+^{n-1}$  e  $D_-^{n-1}$  são hemisfério norte e sul da (n-1)-esfera unitária  $S^{n-1} = \partial D^n$

*Demonstração.* Lembramos que  $\phi_n = r \circ h$ , onde  $h : (D_+^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n, q_0)$  e  $r : (S^n, q_0) \rightarrow (S^n, s_0)$ . Nós estendemos  $h$  para  $\bar{h} : (S^n, D_-^n) \rightarrow (S^n, q_0)$  definindo  $\bar{h}(D_-^n) = q_0$ , e então definimos  $\bar{\phi}_n = r \circ \bar{h}$ .

Representemos os pontos de  $S^n$  pelo par  $(x, u)$ ,  $x \in S^{n-1}$ ,  $-1 \leq u \leq 1$ , de modo que  $(x, u) := (x_1\sqrt{1-u^2}, x_2\sqrt{1-u^2}, \dots, x_n\sqrt{1-u^2}, u)$ , onde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1}$ .

Definimos  $h_t : S^n \rightarrow S^n$  por

$$h_t(x, u) = \begin{cases} (x, u - t + ut), & \text{se } 0 \leq u \leq 1 \\ (x, u - t - ut), & \text{se } -1 \leq u \leq 0. \end{cases}$$

Então  $h_0 = id_{S^n}$  e  $h_1 = \bar{h}$ .

Definimos  $r_t : S^n \rightarrow S^n$  por

$$r_t(x_1, \dots, x_{n+1}) = (x_1\sqrt{1-t^2} - x_{n+1}t, x_2, \dots, x_n, x_1t + x_{n+1}\sqrt{1-t^2})$$

Então  $r_0 = id_{S^n}$  e  $r_1 = r$ .

Portanto  $\bar{\phi}_n = r_1 \circ h_1$  e  $id_{S^n} = r_0 \circ h_0$  e seque que  $r_t \circ h_t$  é uma homotopia entre  $\bar{\phi}_n$  e  $id_{S^n}$ . Agora mostremos que essa homotopia satisfaz as condições exigidas do teorema.

- $r_t \circ h_t(s_0) = r_t \circ h_t((1, 0, \dots, 0), 0) = r_t((1, 0, \dots, 0), -t) := r_t(\sqrt{1-t^2}, 0, \dots, 0, -t) = (1, 0, \dots, 0, 0) = s_0$ , para todo  $t \in I$ .
- Seja  $(x, u) \in S^n \cap D_-^n$ , então  $u \leq 0$ . Fazendo  $v = u - t - ut$ , temos  $r_t \circ h_t(x, u) = r_t(x, v) := r_t(x_1\sqrt{1-v^2}, x_2\sqrt{1-v^2}, \dots, x_n\sqrt{1-v^2}, v) = (x_1\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-t^2} - vt, x_2\sqrt{1-v^2}, \dots, x_n\sqrt{1-v^2}, x_1\sqrt{1-v^2}t + v\sqrt{1-t^2})$ . Como  $-v = t - u + ut \geq t$ , temos  $-v\sqrt{1-t^2} \geq t\sqrt{1-v^2} \geq t\sqrt{1-v^2}x_1$ , de modo que  $r_t \circ h_t(x, u) \in D_-^n$ .

Portanto  $r_t \circ h_t : (S^n, D_-^n, s_0) \rightarrow (S^n, D_-^n, s_0)$  é a homotopia procurada.  $\square$

Sejam  $D_1^n, D_2^n$  os subespaços de  $D^n$  dados por  $x_n \geq 0$  e  $x_n \leq 0$  respectivamente. Temos então o seguinte corolário

**Corolário 3.22.** *Existe uma aplicação contínua  $w : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (D^n, S^{n-1}, s_0)$ , tal que  $w \sim id_{D^n} : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (D^n, S^{n-1}, s_0)$  e  $w(D_2^n) = s_0$ .*

*Demonstração.* Os pontos de  $D^n$  pode ser representados como  $\lambda x + (1-\lambda)s_0$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,  $x \in S^{n-1}$ . O ponto  $\lambda x + (1-\lambda)s_0$  tem coordenadas  $(\lambda x_1 + 1 - \lambda, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ , então  $\lambda x + (1-\lambda)s_0 \in D_1^n$  (ou  $D_2^n$ ) se  $x \in D_+^{n-1}$  (ou  $D_-^{n-1}$ ).

Seja  $g'_t = r_t \circ h_t : (S^{n-1}, D_-^{n-1}, s_0) \rightarrow (S^{n-1}, D_-^{n-1}, s_0)$ . Então  $g'_t$  pode ser estendida para  $g_t : (D^n, D_2^n, s_0) \rightarrow (D^n, D_2^n, s_0)$  definida por

$$g_t(\lambda x + (1-\lambda)s_0) = \lambda g'_t(x) + (1-\lambda)s_0.$$

Como  $g'_0 = id_{S^{n-1}}$ , segue que  $g_0 = id_{D^n}$ .

Agora, se  $x \in D_-^{n-1}$ , então  $g_1(\lambda x + (1-\lambda)s_0) = \lambda g'_1(x) + (1-\lambda)s_0 = \lambda \bar{\phi}_n(x) + (1-\lambda)s_0 = \lambda s_0 + (1-\lambda)s_0 = s_0$ , portanto  $g_1(D_2^n) = s_0$ .

Também  $g_t(s_0) = s_0$ , para todo  $t \in I$  e  $g_t(x) = g'_t(x) \in S^{n-1}$ , para todo  $x \in S^{n-1}$  e  $t \in I$ .

Colocando  $w = g_1$  concluímos a prova do corolário.  $\square$

**Corolário 3.23.** *Dada uma aplicação contínua  $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , existe uma aplicação contínua  $f' : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  tal que  $f' \in [f]$  e  $f'(D_2^n) = x_0$ .*

*Demonstração.* Basta tomar  $f' = f \circ w$ .  $\square$

**Observação 3.24.** Note que  $D_2^n$  e  $D_-^n$  permanecem em  $D_2^n$  e  $D_-^n$ , respectivamente, ao longo da homotopia entre  $w$  e a  $id_{D^n}$ .

**Observação 3.25.** Redefinindo de forma conveniente as aplicação  $r$  e  $\bar{h}$ , podemos obter resultados análogos ao Teorema 3.21, Corolário 3.22 e Corolário 3.23, trocando  $D_-^n$  por  $D_+^n$  e  $D_2^n$  por  $D_1^n$ .

**Teorema 3.26.** *Pode-se estabelecer uma correspondência biunívoca entre os elementos de  $\pi_n(X, A, x_0)$  e as classes de homotopia das aplicações contínuas  $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ .*

*Demonstração.* De fato, pela Observação 3.20, iremos estabelecer uma correspondência biunívoca entre as classes de homotopia das aplicações contínuas  $(D^n, D_+^{n-1}, D_-^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  e as classes de homotopia das aplicações contínuas  $(D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ .

Seja  $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  uma aplicação contínua, então  $f \circ w \sim f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  e  $f \circ w(D_-^{n-1}) = f(s_0) = x_0$ , portanto  $f \circ w$  pode ser vista como uma aplicação de  $(D^n, D_+^{n-1}, D_-^{n-1})$  em  $(X, A, x_0)$ .

A correspondência  $f \mapsto f \circ w$  induz uma correspondência nas classes de homotopia  $[f] \mapsto [f \circ w]$ . Mostremos que essa correspondência está bem definida e é biunívoca.

- Sejam  $f \sim f' : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , então  $f \circ w \sim f' \circ w : (D^n, D_+^{n-1}, D_-^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , pois  $w(D_-^{n-1}) = s_0$  e  $w(D_+^{n-1}) \subset S^{n-1}$ . Portanto  $[f] \mapsto [f \circ w]$  está bem definida.
- Sejam  $f, f' : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  aplicações contínuas tais que  $f \circ w \sim f' \circ w : (D^n, D_+^{n-1}, D_-^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , então  $f \circ w \sim f' \circ w : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , e portanto  $f \sim f' : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ . Logo  $[f] \mapsto [f \circ w]$  é injetiva.
- Seja  $f : (D^n, D_+^{n-1}, D_-^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$  aplicação contínua, então  $f$  pode ser vista como uma aplicação contínua de  $(D^n, S^{n-1}, s_0)$  em  $(X, A, x_0)$  e  $f \circ w \sim f : (D^n, D_+^{n-1}, D_-^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ , pois pela Observação 3.24  $D_-^n$  permanece em  $D_-^n$  durante a homotopia entre  $w$  e  $id_{D^n}$  e  $f(D_-^n) = x_0$ . Assim  $[f] \mapsto [f \circ w]$  é sobrejetiva, e o teorema está provado.

$\square$

Adição pode ser definida no conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas  $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  usando uma correspondência biunívoca fixa entre essas classes e elementos de  $\pi_n(X, A, x_0)$  (como classes de aplicações contínuas  $f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$ ) e a adição dada em  $\pi_n(X, A, x_0)$ . No entanto, é conveniente ter a seguinte definição direta. Dadas as classes  $\alpha$  e  $\beta$  segue-se prontamente do Corolário 3.23 e da Observação 3.25 que podemos escolher representantes  $f \in \alpha$ ,  $g \in \beta$  tais que  $f(D_2^n) = g(D_1^n) = x_0$ . Nós então definimos a classe  $\alpha + \beta$  como a classe que contém o aplicação contínua  $k : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  definida por  $k|D_1^n = f$ ,  $k|D_2^n = g$ . Que  $\alpha + \beta$ , assim definida, depende apenas das classes  $\alpha$ ,  $\beta$  segue imediatamente do lema abaixo, cuja versão, segundo a Observação 3.25, pode ser dada trocando  $D_2^n$  por  $D_1^n$ .

**Lema 3.27.** *Sejam  $f_0 \sim f_1 : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  com  $f_0(D_2^n) = f_1(D_2^n) = x_0$ . Então existe uma homotopia  $f_t : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  com  $f_t(D_2^n) = x_0$  para todo  $t \in I$ .*

*Demonstração.* Da Observação 3.24 e do fato que  $f_i(D_2^n) = x_0$  segue que  $f_i \circ w \sim f_i : (D^n, S^{n-1}, D_2^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ ,  $i = 0, 1$ . Também  $f_0 \circ w \sim f_1 \circ w : (D^n, S^{n-1}, D_2^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ , pois  $w(D_2^n) = x_0$ . Portanto  $f_0 \sim f_0 \circ w \sim f_1 \circ w \sim f_1 : (D^n, S^{n-1}, D_2^n) \rightarrow (X, A, x_0)$ .  $\square$

Usando uma correspondência biunívoca fixa e o Lema 3.16 de forma adequada pode-se mostrar facilmente que o conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas  $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  com a adição definida acima é um grupo isomorfo a  $\pi_n(X, A, x_0)$ .

**Observação 3.28.** Fazendo  $A = \{x_0\}$  podemos dar uma outra versão para adição definida no Teorema 3.8.

Como  $I^n$  e  $\partial I^n$  são conexos por caminhos para  $n > 1$ , a proposição seguinte é imediata

**Proposição 3.29.** *Se  $X'$  denota a componente conexa por caminhos de  $X$  que contém  $x_0$  e  $A'$  denota a componente conexa por caminhos de  $A$  que contém  $x_0$ , então*

$$\pi_n(X, A, x_0) = \pi_n(X', A', x_0), \quad n > 1.$$

**Proposição 3.30.** *Se  $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$  é representado por uma aplicação  $f \in F^n(X, A, x_0)$  tal que  $f(I^n) \subset A$ , então  $\alpha = 0$ .*

*Demonstração.* Como  $f \in F^n(X, A, x_0)$  e  $f(I^n) \subset A$ , podemos definir uma homotopia  $f_t \in F^n(X, A, x_0)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), colocando

$$f_t(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = f(t_1, \dots, t_{n-1}, t(1 - t_n) + t_n).$$

Então temos  $f_0 = f$  e  $f_1(I^n) = x_0$ . Consequentemente  $\alpha = 0$ .  $\square$

**Proposição 3.31.** *Se  $(X, A, x_0)$  é uma tripla tal que  $(X, A)$  é uma  $n$ -célula relativa (ou seja,  $X$  é obtido de  $A$  por adjunção de uma  $n$ -célula), então  $\pi_m(X, A, x_0) = 0$  para todo  $m$  satisfazendo  $0 < m < n$ .*

*Demonstração.* Ver [11], página 112. □

### 3.4 O operador bordo

Seja  $(X, A, x_0)$  uma tripla. Para todo  $n > 0$ , podemos definir uma transformação

$$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0).$$

Seja  $\alpha$  um elemento qualquer de  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Então, por definição,  $\alpha$  é uma classe de homotopia representado por uma aplicação

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0).$$

Se  $n = 1$ ,  $f|I^{n-1}$  é uma aplicação constante de  $I^{n-1} = \{0\}$  em  $A$ , pela Proposição 1.3 a classe  $\beta$  de  $f|I^{n-1}$  representa a componente conexa por caminhos de  $A$  contendo  $f(0)$ , logo  $\beta \in \pi_0(A, x_0)$ . Se  $n > 1$ ,  $\partial I^{n-1} = I^{n-1} \cap J^{n-1}$ , então a restrição  $f|I^{n-1}$  é uma aplicação de  $(I^{n-1}, \partial I^{n-1})$  em  $(A, x_0)$  e consequentemente representa um elemento  $\beta \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ .

Obviamente o elemento  $\beta \in \pi_{n-1}(A, x_0)$  não depende da escolha da aplicação  $f$  que representa o elemento  $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$ . Consequentemente podemos definir a transformação  $\partial$  por  $\partial(\alpha) = \beta$ . Daqui em diante,  $\partial$  irá ser chamado de **operador bordo**.

As duas seguintes propriedades de  $\partial$  seguem da definição.

**Proposição 3.32.** *O operador bordo  $\partial$  leva o elemento neutro de  $\pi_n(X, A, x_0)$  no elemento neutro de  $\pi_{n-1}(A, x_0)$ .*

**Proposição 3.33.** *Se  $n > 1$ , então o operador bordo  $\partial$  é um homomorfismo de grupos.*

### 3.5 Transformação induzida

Sejam  $(X, A, x_0)$  e  $(Y, B, y_0)$  triplas. Entendemos por uma aplicação contínua de  $(X, A, x_0)$  em  $(Y, B, y_0)$ , uma aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subset B$  e  $f(x_0) = y_0$ . Consideremos uma tal aplicação

$$f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0).$$

Sejam  $x_1, x_2 \in X$  pertencentes a mesma componente conexa por caminhos de  $X$ , como  $f$  é contínua então  $f(x_1)$  e  $f(x_2)$  pertencem a mesma componente conexa por caminhos de  $Y$ . Consequentemente,  $f$  determina uma transformação induzida

$$f_* : \pi_0(X, x_0) \rightarrow \pi_0(Y, y_0)$$

que obviamente leva o elemento neutro de  $\pi_0(X, x_0)$  no elemento neutro de  $\pi_0(Y, y_0)$ .

Agora seja  $n > 0$ . Para toda aplicação  $\phi \in F^n(X, A, x_0)$ , a composição  $f \circ \phi \in F^n(Y, B, y_0)$  e a correspondência  $\phi \mapsto f \circ \phi$  define uma aplicação

$$f_{\#} : F^n(X, A, x_0) \rightarrow F^n(Y, B, y_0).$$

Sejam  $\phi, \psi \in F^n(X, A, x_0)$  tal que  $\phi \in [\psi]$ . Como  $f$  é uma aplicação contínua de triplas segue que  $f \circ \phi \in [f \circ \psi]$ . Consequentemente  $f_{\#}$  determina uma transformação induzida

$$f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

por  $f_*([\phi]) = [f \circ \phi]$ ,  $[\phi] \in \pi_n(X, A, x_0)$ , que obviamente leva o elemento neutro de  $\pi_n(X, A, x_0)$  no elemento neutro de  $\pi_n(Y, B, y_0)$ .

Se  $n = 1$ ,  $A = \{x_0\}$ ,  $B = \{y_0\}$ , ou se  $n > 1$ , então  $\pi_n(X, A, x_0)$  e  $\pi_n(Y, B, y_0)$  são grupos. Para quaisquer duas aplicações  $\phi, \psi \in F^n(X, A, x_0)$ , pode-se facilmente ver que

$$f \circ (\phi + \psi) = f \circ \phi + f \circ \psi$$

em  $F^n(Y, B, y_0)$ . Consequentemente segue que  $f_*$  é um homomorfismo de grupos. Portanto temos estabelecidas as duas seguintes propriedades de  $f_*$ .

**Proposição 3.34.** *Se  $n = 0$ ,  $A = \{x_0\}$ ,  $B = \{y_0\}$ , ou se  $n > 0$ , então a transformação induzida  $f_*$  leva o elemento neutro de  $\pi_n(X, A, x_0)$  no elemento neutro de  $\pi_n(Y, B, y_0)$ .*

**Proposição 3.35.** *Se  $n = 1$ ,  $A = \{x_0\}$ ,  $B = \{y_0\}$ , ou se  $n > 1$ , então a transformação  $f_*$  é um homomorfismo de grupos.*

No caso de  $f_*$  ser um homomorfismo,  $f_*$  irá ser chamado de **homomorfismo induzido** por  $f$ .

## 3.6 As propriedades fundamentais

Os grupos de homotopia  $\pi_n(X, A, x_0)$ , o operador bordo  $\partial$ , e as transformações induzidas, todos definidos nas seções anteriores, possuem sete propriedades fundamentais que serão introduzidas nesta seção.

Pela definição de transformação induzida, as duas seguintes propriedades são imediatas

**Proposição 3.36. (*Propriedade 1.*)** *Se  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  é a aplicação identidade, então  $f_*$  é a transformação identidade de  $\pi_n(X, A, x_0)$  para todo  $n$ .*

**Proposição 3.37. (*Propriedade 2.*)** *Se  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  e  $g : (Y, B, y_0) \rightarrow (Z, C, z_0)$  são aplicações contínuas, então para todo  $n \geq 0$  temos  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .*

A próxima propriedade fornece uma relação entre o operador bordo e a transformação induzida. Sua prova segue direto das definições do operador bordo e da transformação induzida.

**Proposição 3.38. (*Propriedade 3.*)** *Se  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  é uma aplicação contínua e se  $g : (A, x_0) \rightarrow (B, y_0)$  é a restrição de  $f$ , então a relação de comutatividade  $\partial \circ f_* = g_* \circ \partial$  é satisfeita para todo  $n > 0$ .*

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A, x_0) \\ f_* \downarrow & & \downarrow g_* \\ \pi_n(Y, B, y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B, y_0) \end{array}$$

### 3.6.1 A propriedade da sequência exata de homotopia

Seja  $(X, A, x_0)$  uma tripla. As aplicações inclusões

$$i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0) , j : (X, x_0, x_0) \hookrightarrow (X, A, x_0)$$

induzem as transformações  $i_*$  e  $j_*$  para cada  $n \geq 0$ . Junto com o operador bordo  $\partial$ , elas formam uma sequência (sem começo):

$$\begin{aligned} \cdots &\xrightarrow{j_*} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ \cdots &\xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

que é chamada de **sequência de homotopia** da tripla  $(X, A, x_0)$  e irá ser denotada por  $\pi(X, A, x_0)$ .

**Proposição 3.39. (*Propriedade 4.*)** *A sequência de homotopia de qualquer tripla  $(X, A, x_0)$  é exata.*

A prova divide-se nas provas das seis seguintes afirmações:

- (1).  $j_* \circ i_* = 0$ .
- (2).  $\partial \circ j_* = 0$ .
- (3).  $i_* \circ \partial = 0$ .
- (4). Se  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e  $j_*(\alpha) = 0$ , então existe um elemento  $\beta \in \pi_n(A, x_0)$  tal que  $i_*(\beta) = \alpha$ .
- (5). Se  $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$  e  $\partial(\alpha) = 0$ , então existe um elemento  $\beta \in \pi_n(X, x_0)$  tal que  $j_*(\beta) = \alpha$ .

- (6). Se  $\alpha \in \pi_{n-1}(A, x_0)$  e  $i_*(\alpha) = 0$ , então existe um elemento  $\beta \in \pi_n(X, A, x_0)$  tal que  $\partial(\beta) = \alpha$ .

Nas afirmações acima, o símbolo 0 denota o elemento neutro dos conjuntos envolvidos ou a transformação nula.

*Demonstração.* □

- (1). Para cada  $n > 0$ , seja  $\alpha \in \pi_n(A, x_0)$  e seja  $f \in F^n(A, x_0)$  um representante de  $\alpha$ . Então o elemento  $(j_* \circ i_*)(\alpha) \in \pi_n(X, A, x_0)$  é representado pela composição  $j \circ i \circ f \in F^n(X, A, x_0)$ . Como  $(j \circ i \circ f)(I^n) \subset A$ , segue da Proposição 3.30 que  $(j_* \circ i_*)(\alpha) = 0$ . Como  $\alpha$  é arbitrário, segue que  $j_* \circ i_* = 0$ .
- (2). Para cada  $n > 0$ , seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e seja  $f \in F^n(X, x_0)$  um representante para  $\alpha$ . Então o elemento  $(\partial \circ j_*)(\alpha)$  é representado pela restrição  $j \circ f|I^{n-1} = f|I^{n-1}$ . Como  $f(I^{n-1}) = x_0$ , nós temos  $(\partial \circ j_*)(\alpha) = 0$ . Consequentemente  $\partial \circ j_* = 0$ .
- (3). Para cada  $n > 0$ , seja  $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$  e seja  $f \in F^n(X, A, x_0)$  um representante de  $\alpha$ . Então o elemento  $(i_* \circ \partial)(\alpha)$  é representado por  $i \circ g = g$  onde  $g = f|I^{n-1}$ . Definimos uma homotopia  $g_t : I^{n-1} \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) por

$$g_t(t_1, \dots, t_{n-1}) = f(t_1, \dots, t_{n-1}, t).$$

Então  $g_0 = g$ ,  $g_1(I^{n-1}) = x_0$ , e  $g_t \in F^{n-1}(X, x_0)$ . Se  $n > 1$ , então a homotopia  $g_t$  implica  $(i_* \circ \partial)(\alpha) = 0$ . Se  $n = 1$ , então  $f : (I, \{0\}, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$  é um caminho em  $X$  ligando  $f(0) \in A$  e  $f(1) = x_0$ , logo  $(i_* \circ \partial)(\alpha) = [f(0)]$  é a componente conexa por caminhos de  $X$  contendo  $f(0)$ . Como  $f$  é um caminho em  $X$  ligando  $f(0)$  e  $x_0$ , segue que  $(i_* \circ \partial)(\alpha) = [x_0] = 0$ . Portanto  $i_* \circ \partial = 0$ , para todo  $n > 0$ .

- (4). Seja  $f \in F^n(X, x_0)$  um representante de  $\alpha$ . A condição  $j_*(\alpha) = 0$  implica que existe uma homotopia  $f_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $f_0 = j \circ f = f$ ,  $f_1(I^n) = x_0$ , e  $f_t \in F^n(X, A, x_0)$  para todo  $t \in I$ . Definimos uma homotopia  $g_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) por

$$g_t(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n) = \begin{cases} f_{2t_n}(t_1, \dots, t_{n-1}, 0), & \text{se } 0 \leq 2t_n \leq t \\ f_t(t_1, \dots, t_{n-1}, \frac{2t_n - t}{2-t}), & \text{se } t \leq 2t_n \leq 2. \end{cases}$$

Então  $g_0 = f$ ,  $g_1(I^n) \subset A$ , e  $g_t(\partial I^n) = x_0$  para todo  $t \in I$ . Assim,  $g_1$  representa um elemento  $\beta \in \pi_n(A, x_0)$  e a homotopia  $g_t$  implica que  $i_*(\beta) = \alpha$ .

- (5). Primeiramente, assumimos que  $n > 1$ . Seja  $f \in F^n(X, A, x_0)$  um representante de  $\alpha$ . Então a condição  $\partial(\alpha) = 0$  implica que existe uma homotopia  $g_t : I^{n-1} \rightarrow A$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $g_0 = f|I^{n-1}$ ,  $g_1(I^{n-1}) = x_0$ , e  $g_t(\partial I^{n-1}) = x_0$  para todo  $t \in I$ . Definimos uma homotopia parcial  $h_t : \partial I^n \rightarrow A$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), por

$$h_t(s) = \begin{cases} g_t(s), & \text{se } (s \in I^{n-1}, t \in I) \\ x_0, & \text{se } (s \in J^{n-1}, t \in I) \end{cases}$$

Então  $h_0 = f|_{\partial I^n}$ . Como  $I^n$  é um ANR,  $\partial I^n$  é um subespaço fechado de  $I^n$  e  $I^n \times \{0\} \cup \partial I^n \times I$  é um retrato de  $I^n \times I$ , segue da Proposição 2.28 que  $\partial I^n$  tem a propriedade da extensão de homotopia em  $I^n$ , para todo espaço  $Y$ , logo  $h_t$  tem uma extensão contínua  $f_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) tal que  $f_0 = f$ . Como  $f_1(\partial I^n) = h_1(\partial I^n) = x_0$ ,  $f_1$  representa um elemento  $\beta \in \pi_n(X, x_0)$ . Agora, como  $f_t \in F^n(X, A, x_0)$  para todo  $t \in I$ , segue que  $j_*(\beta) = \alpha$ . Para o caso  $n = 1$ ,  $\alpha$  é representado por um caminho  $f : (I, \{0\}, \{1\}) \rightarrow (X, A, x_0)$  ligando  $f(0) \in A$  e  $f(1) = x_0$ . A condição  $\partial(\alpha) = 0$  significa que  $f(0)$  pertence a componente conexa por caminhos de  $A$  que contém  $x_0$ . Consequentemente existe uma homotopia  $f_t : I \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $f_0 = f$ ,  $f_t(0) \in A$  para todo  $t \in I$ ,  $f_t(1) = x_0$  para todo  $t \in I$ , e  $f_1(0) = x_0$ . Então,  $f_1$  representa um elemento  $\beta \in \pi_1(X, x_0)$  e a homotopia  $f_t$  implica que  $j_*(\beta) = \alpha$ .

- (6). Primeiramente, assumimos que  $n > 1$ . Seja  $f \in F^{n-1}(A, x_0)$  um representante de  $\alpha$ . Então a condição  $i_*(\alpha) = 0$  implica que existe uma homotopia  $f_t : I^{n-1} \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $f_0 = f$ ,  $f_1(I^{n-1}) = x_0$ , e  $f_t(\partial I^{n-1}) = x_0$  para todo  $t \in I$ . Definimos uma aplicação  $g : I^n \rightarrow X$  por

$$g(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = f_{t_n}(t_1, \dots, t_{n-1}).$$

Esta aplicação  $g$  está em  $F^n(X, A, x_0)$  e representa um elemento  $\beta$  de  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Como  $g|_{I^{n-1}} = f$ , temos  $\partial(\beta) = \alpha$ . Para o caso  $n = 1$ ,  $\alpha$  é uma componente conexa por caminhos de  $A$ . A condição  $i_*(\alpha) = 0$  implica que  $\alpha$  está contida na componente conexa por caminhos de  $X$  que contém  $x_0$ . Tomemos um ponto  $x \in A$  de  $\alpha$ . Então existe um caminho  $f : I \rightarrow X$  ligando  $f(0) = x$  e  $f(1) = x_0$ . Este caminho  $f$  representa um elemento  $\beta$  de  $\pi_1(X, A, x_0)$ . Como  $f(0) \in A$ , temos  $\partial(\beta) = \alpha$ .

### 3.6.2 A propriedade de homotopia

Sejam  $(X, A, x_0)$  e  $(Y, B, y_0)$  duas triplas quaisquer, e sejam  $f, g : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  duas aplicações contínuas quaisquer. Lembremos que  $f$  e  $g$  são ditas homotópicas (no sentido de homotopia de triplas) se existe uma homotopia

$$h_t : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

tal que  $h_0 = f$  e  $h_1 = g$ .

**Proposição 3.40.** ( *Propriedade 5.*) *Se  $f, g : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  são homotópicas, então elas induzem transformações*

$$f_*, g_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

iguais para todo  $n$ .

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in \pi_n(X, A, x_0)$ . É suficiente provar que  $f_*(\alpha) = g_*(\alpha)$ .

Primeiramente, assumimos que  $n > 0$ . Seja  $\phi \in F^n(X, A, x_0)$  representante de  $\alpha$ . Então o elemento  $f_*(\alpha)$  e  $g_*(\alpha)$  são representados pelas composições  $f \circ \phi$  e  $g \circ \phi$  respectivamente. A composição  $h_t \circ \phi \in F^n(Y, B, y_0)$ , de  $\phi$  e uma homotopia  $h_t : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) entre  $f$  e  $g$ , fornece uma homotopia entre  $f \circ \phi$  e  $g \circ \phi$ . Consequentemente  $f_*(\alpha) = g_*(\alpha)$ .

Resta-nos resolver o caso  $n = 0$ ,  $A = \{x_0\}$  e  $B = \{y_0\}$ . Neste caso  $\alpha$  é uma componente conexa por caminhos de  $X$ . Tomemos um ponto  $x \in \alpha$ . Então  $f_*(\alpha)$  e  $g_*(\alpha)$  estão nas componentes conexas por caminhos de  $Y$  contendo  $f(x)$  e  $g(x)$  respectivamente. Seja  $h_t : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) uma homotopia entre  $f$  e  $g$ . Definimos um caminho  $\sigma : I \rightarrow Y$  por  $\sigma(t) = h_t(x)$ , para todo  $t \in I$ . Como  $\sigma$  é um caminho ligando  $f(x)$  e  $g(x)$ , segue que  $f(x)$  e  $g(x)$  estão na mesma componente conexa por caminhos de  $Y$ , e portanto  $f_*(\alpha) = g_*(\alpha)$ .  $\square$

Aqui, uma aplicação contínua  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  é dita ser uma equivalência de homotopia se existe uma aplicação  $g : (Y, B, y_0) \rightarrow (X, A, x_0)$  tal que  $g \circ f$  e  $f \circ g$  são homotópicas às aplicações identidades das triplas  $(X, A, x_0)$  e  $(Y, B, y_0)$ , respectivamente.

Como uma consequência imediata das Propriedades 1, 2 e 5, temos o seguinte corolário:

**Corolário 3.41.** *Se  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  é uma equivalência de homotopia (no sentido de homotopia de triplas), então a transformação induzida  $f_*$  é uma bijeção.*

O corolário acima diz que  $\pi_n(X, A, x_0)$  depende somente do tipo de homotopia de  $(X, A, x_0)$ . Em particular, se  $A$  é um retrato por deformação forte de  $X$ , então  $i_* : \pi_n(A, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  (lembrando que  $\pi_n(A, x_0) = \pi_n(A, x_0, x_0)$  e  $\pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, x_0, x_0)$ ) é uma bijeção para todo  $n$ . Consequentemente, pela Propriedade 4, segue que  $\pi_n(X, A, x_0) = 0$  para todo  $n > 0$ .

**Observação 3.42.** Estamos aqui usando o termo bijeção para a transformação  $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$  quando  $f : (X, A, x_0) \rightarrow (Y, B, y_0)$  for uma equivalência de homotopia. Mas lembremos que quando  $n > 1$  ou  $n = 1$ ,  $A = \{x_0\}$  e  $B = \{y_0\}$ , então  $\pi_n(X, A, x_0)$  e  $\pi_n(Y, B, y_0)$  são grupos e  $f_*$  é um homomorfismo de grupos, e portanto  $f_*$  será um isomorfismo de grupos (não apenas uma bijeção).

### 3.6.3 A propriedade da fibração

**Proposição 3.43. (Propriedade 6.)** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma fibração e  $A = f^{-1}(B)$ , então a transformação  $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$  é uma bijeção para todo  $n > 0$ .*

*Demonstração.* Para provar que  $f_*$  é sobrejetora, seja  $\alpha$  um elemento arbitrário de  $\pi_n(Y, B, y_0)$ . Seja

$$\phi : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (Y, B, y_0)$$

um representante de  $\alpha$ . Como  $J^{n-1}$  (o fecho de  $\partial I^n - I^{n-1}$ ) é um retrato por deformação forte de  $I^n$ , segue da Proposição 2.8 que existe uma aplicação contínua  $\psi : I^n \rightarrow X$  (extensão da aplicação constante  $g^*(J^{n-1}) = x_0$ ) tal que  $f \circ \psi = \phi$  e  $\psi(J^{n-1}) = g^*(J^{n-1}) = x_0$ . Como  $\phi(I^{n-1}) \subset B$ ,  $A = f^{-1}(B)$  e  $f \circ \psi = \phi$  segue que  $\psi(I^{n-1}) \subset A$  e consequentemente obtemos uma aplicação contínua

$$\psi : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0).$$

Esta aplicação  $\psi$  representa um elemento  $\beta \in \pi_n(X, A, x_0)$ . Como  $f \circ \psi = \phi$ , temos  $f_*(\beta) = \alpha$ . Isto prova que  $f_*$  é sobrejetora.

Para provar que  $f_*$  é injetora, sejam  $\alpha, \beta \in \pi_n(X, A, x_0)$  tal que  $f_*(\alpha) = f_*(\beta)$ . Sejam as aplicações

$$\phi, \psi : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_0)$$

representantes para  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Como  $f_*(\alpha) = f_*(\beta)$ , as aplicações composições  $f \circ \phi$  e  $f \circ \psi$  representam o mesmo elemento de  $\pi_n(Y, B, y_0)$ . Consequentemente, existe uma homotopia

$$F : (I^n \times I, I^{n-1} \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (Y, B, y_0)$$

tal que  $F(z, 0) = f \circ \phi(z)$  e  $F(z, 1) = f \circ \psi(z)$ , para todo  $z \in I^n$ . Consideremos o subespaço fechado

$$T = (I^n \times \{0\}) \cup (J^{n-1} \times I) \cup (I^n \times \{1\})$$

de  $I^n \times I$  e definimos uma aplicação  $G : T \rightarrow X$  por

$$G(z, t) = \begin{cases} \phi(z), & \text{se } (z \in I^n, t = 0) \\ x_0, & \text{se } (z \in J^{n-1}, t \in I) \\ \psi(z), & \text{se } (z \in I^n, t = 1) \end{cases}$$

Então temos  $f \circ G = F|_T$ . Como  $T$  é um retrato por deformação forte de  $I^n \times I$ , segue da Proposição 2.8 que  $G$  tem uma extensão contínua  $G^* : I^n \times I \rightarrow X$  tal que  $f \circ G^* = F$ . Como  $F(I^{n-1} \times I) \subset B$  e  $A = f^{-1}(B)$ , a condição  $f \circ G^* = F$  implica que  $G^*(I^{n-1} \times I) \subset A$ . Consequentemente obtemos uma aplicação contínua

$$G^* : (I^n \times I, I^{n-1} \times I, J^{n-1} \times I) \rightarrow (X, A, x_0)$$

com  $G^*(z, 0) = G(z, 0) = \phi(z)$  e  $G^*(z, 1) = G(z, 1) = \psi(z)$ , para todo  $z \in I^n$ . Isto prova que  $\phi$  e  $\psi$  representam o mesmo elemento de  $\pi_n(X, A, x_0)$ . Consequentemente  $\alpha = \beta$  e  $f_*$  é injetora.  $\square$

Se  $X$  é um espaço que consiste de um único ponto  $x_0$ , então, para cada  $n$ , a aplicação constante  $f(I^n) = x_0$  é a única aplicação de  $I^n$  em  $X$ . Consequentemente temos a seguinte e última propriedade fundamental, chamada de **propriedade da trivialidade**:

**Proposição 3.44. (*Propriedade 7.*)** *Se  $X$  é um espaço que consiste de um único ponto  $x_0$ , então  $\pi_n(X, x_0) = 0$ , para todo  $n$ .*

### 3.7 Sequência de homotopia de uma fibração

Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma fibração. Então se  $A = f^{-1}(\{y_0\})$  é a fibra de  $f$  sobre  $y_0 \in Y$ , nós sabemos que  $f$  induz uma transformação bijetora, para todo  $n > 0$ , e isomorfismo para  $n > 1$ ,  $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ . Dada a sequência de homotopia para a tripla  $(X, A, x_0)$ ,

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{j_*} \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \dots \\ \dots &\xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0) \end{aligned}$$

e colocando

$$\bar{f}_* = f_* \circ j_*, \quad d = \partial \circ f_*^{-1},$$

nós obtemos uma nova sequência sem começo,

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\bar{f}_*} \pi_{n+1}(Y, y_0) \xrightarrow{d} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\bar{f}_*} \pi_n(Y, y_0) \xrightarrow{d} \dots \\ \dots &\xrightarrow{\bar{f}_*} \pi_2(Y, y_0) \xrightarrow{d} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \end{aligned}$$

que é chamada **sequência de homotopia da fibração  $f$** . O homomorfismo conexão  $d : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_{n-1}(A, x_0)$ ,  $n > 1$ , é chamado de **operador bordo da sequência de homotopia da fibração  $f$** .

**Proposição 3.45.** *A sequência de homotopia da fibração  $f$  é exata.*

*Demonstração.* A demonstração segue dos fatos que a sequência de homotopia da tripla  $(X, A, x_0)$  é exata e que  $f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$  é isomorfismo para todo  $n > 1$ . □

## 4 Independência do ponto base e o conceito de $n$ -simplicidade de um espaço $X$

No desenvolvimento da teoria dos grupos de homotopia  $\pi_n(X, x_0)$  e  $\pi_n(X, A, x_0)$  o ponto base  $x_0$  é explicitamente usado em qualquer construção geométrica. O objetivo das próximas seções é estudar o papel desempenhado pelo ponto base, comparar os grupos de homotopia com diversos pontos base, e liberar estes grupos do ponto base quando possível.

### 4.1 O isomorfismo entre os grupos de homotopia de um espaço $X$ e a independência do ponto base

Vamos considerar um espaço topológico  $X$  e dois pontos  $x_0, x_1$  em  $X$  conectados por um caminho (isto é,  $x_0, x_1$  pertencentes a mesma componente conexa por caminhos de  $X$ )

$$\sigma : I \rightarrow X, \sigma(0) = x_0, \sigma(1) = x_1.$$

Por definição, temos

$$\pi_0(X, x_0) = P(X) = \pi_0(X, x_1)$$

onde  $P(X)$  é o conjunto de todas as componentes conexas por caminhos de  $X$ . Do fato de  $x_0, x_1$  pertencerem a mesma componente conexa por caminhos de  $X$ , segue que o elemento neutro de  $\pi_0(X, x_0)$  é o mesmo que de  $\pi_0(X, x_1)$ . Vamos denotar por

$$\sigma_0 : \pi_0(X, x_0) \rightarrow \pi_0(X, x_1)$$

a transformação identidade de  $\pi_0(X, x_0) = \pi_0(X, x_1)$ .

**Teorema 4.1.** *Para cada  $n > 0$ , todo caminho  $\sigma : I \rightarrow X$  ligando  $x_0$  a  $x_1$  fornece, de forma natural, um isomorfismo*

$$\sigma_n : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0), \sigma(0) = x_0, \sigma(1) = x_1,$$

que depende somente da classe de homotopia (relativa a  $\{0, 1\}$ ) do caminho  $\sigma$ . Se  $\sigma$  é o caminho constante  $\sigma(I) = x_0$ , então  $\sigma_n$  é o automorfismo identidade. Se  $\sigma, \tau$  são caminhos com  $\sigma(1) = \tau(0)$ , então  $(\sigma * \tau)_n = \sigma_n \circ \tau_n$ . Finalmente, para cada caminho  $\sigma : I \rightarrow X$  e cada aplicação contínua  $f : X \rightarrow Y$ , temos a comutatividade do retângulo

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_1) & \xrightarrow{\sigma_n} & \pi_n(X, x_0) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_n(Y, y_1) & \xrightarrow{\tau_n} & \pi_n(Y, y_0) \end{array}$$

onde  $\tau = f \circ \sigma$ ,  $y_0 = f(x_0)$  e  $y_1 = f(x_1)$ .

*Demonstração.* Para provar este teorema, vamos construir  $\sigma_n$  como segue. Seja  $\alpha$  um elemento qualquer de  $\pi_n(X, x_1)$  e escolhamos um representante

$$f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$$

para  $\alpha$ . A ideia geométrica da construção é puxar a imagem de  $\partial I^n$  ao longo do caminho  $\sigma$  para o ponto  $x_0$  com a imagem de  $I^n$  sendo arrastada continuamente de forma arbitrária. A aplicação obtida após essa homotopia representará um elemento  $\beta \in \pi_n(X, x_0)$  que dependerá somente de  $\alpha$  e da classe de homotopia (relativa a  $\{0, 1\}$ ) de  $\sigma$ . Então definiremos  $\sigma_n(\alpha) = \beta$ . Os detalhes seguem abaixo.

Primeiramente, vamos provar que existe uma homotopia  $f_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) de  $f$  tal que  $f_t(\partial I^n) = \sigma(1-t)$ , para todo  $t \in I$ . Toda homotopia de  $f$  satisfazendo essas condições é chamada de uma **homotopia de  $f$  ao longo de  $\sigma$** . Para este propósito, definimos uma homotopia parcial  $\phi_t : \partial I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), de  $f$  colocando-se  $\phi_t(\partial I^n) = \sigma(1-t)$ , para todo  $t \in I$ . Pela Proposição 2.25,  $\partial I^n$  tem a propriedade da extensão de homotopia em  $I^n$  com respeito a qualquer espaço  $X$ . Consequentemente a homotopia  $\phi_t$  tem uma extensão contínua  $f_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $f_0 = f$  e  $f_t(\partial I^n) = \sigma(1-t)$ , para todo  $t \in I$ . Como  $f_1$  é uma aplicação contínua que aplica  $\partial I^n$  em  $\sigma(0) = x_0$ , ela representa um elemento  $\beta \in \pi_n(X, x_0)$ . Definimos então  $\sigma(\alpha) = \beta$ .

Que  $\beta$  depende somente de  $\alpha$  e da classe de homotopia (relativa a  $\{0, 1\}$ ) de  $\sigma$  é uma consequência imediata do lema abaixo. Outra consequência imediata do lema abaixo é que  $\beta$  não depende da homotopia de  $f$  ao longo de  $\sigma$ .

**Lema 4.2.** *Se  $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  são aplicações homotópicas relativamente a  $\partial I^n$  (isto é,  $[f] = [g]$  em  $\pi_n(X, x_1)$ ),  $\sigma, \tau : I \rightarrow X$  são caminhos que ligam  $x_0$  a  $x_1$  homotópicos relativamente a  $\{0, 1\}$ , e  $f_t, g_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) são homotopias de  $f$  ao longo de  $\sigma$  e de  $g$  ao longo de  $\tau$  respectivamente, então  $f_1, g_1$  são homotópicas relativamente a  $\partial I^n$  (isto é,  $[f_1] = [g_1]$  em  $\pi_n(X, x_0)$ ).*

*Demonstração.* Definamos duas aplicações  $F, G : I^n \times I \rightarrow X$  como sendo as homotopias  $f_t, g_t$ , isto é,  $F(x, t) = f_t(x)$  e  $G(x, t) = g_t(x)$ , para todos  $x \in I^n$  e  $t \in I$ . Consideremos o subespaço fechado  $A = (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$  de  $I^n \times I$ . Da

hipótese  $f \sim_{\partial I^n} g$  e  $\sigma \sim_{\{0,1\}} \tau$ , segue que  $F|A$  e  $G|A$  são homotópicas relativamente a  $(\partial I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times \{1\})$ . Pela Proposição 2.25,  $A$  tem a propriedade da extensão de homotopia em  $I^n \times I$  com respeito a qualquer espaço  $X$ , logo existe uma homotopia  $F_t : I^n \times I \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $F_0 = F$ ,  $F_1|A = G|A$ , e  $F_t(\partial I^n \times \{1\}) = x_0$ , para todo  $t \in I$ . A aplicação  $F_1$ , que denotaremos por  $h_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), é uma homotopia de  $g$  ao longo de  $\tau$ . Como  $F_t(\partial I^n \times \{1\}) = x_0$ , para todo  $t \in I$ , segue que  $f_1$  e  $h_1$  são homotópicas relativamente a  $\partial I^n$ .

Resta-nos provar que  $g_1$  e  $h_1$  são homotópicas relativamente a  $\partial I^n$ .

Definamos uma aplicação  $M : I^n \times I \rightarrow X$  por

$$M(p, q) = \begin{cases} g_{1-2q}(p), & \text{se } (p \in I^n, 0 \leq q \leq \frac{1}{2}) \\ h_{2q-1}(p), & \text{se } (p \in I^n, \frac{1}{2} \leq q \leq 1). \end{cases}$$

Então, para todo  $p \in \partial I^n$ , temos  $M(p, q) = M(p, 1 - q)$ . Portanto, podemos definir uma homotopia parcial  $N_t : B \rightarrow X$ , ( $0 \leq t \leq 1$ ), de  $M$  sobre o bordo  $B = \partial(I^n \times I) = (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \partial I)$  de  $I^n \times I$  por

$$N_t(p, q) = \begin{cases} M(p, q), & \text{se } (p \in I^n, q \in \partial I) \\ M(p, q - tq), & \text{se } (p \in \partial I^n, 0 \leq q \leq \frac{1}{2}) \\ N_t(p, 1 - q), & \text{se } (p \in \partial I^n, \frac{1}{2} \leq q \leq 1). \end{cases}$$

Note que, se  $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$  então  $0 \leq 1 - q \leq \frac{1}{2}$  e portanto  $N_t(p, 1 - q) = M(p, (1 - q) - t(1 - q)) = M(p, (1 - q)(1 - t))$ , para todo  $p \in \partial I^n$ . Logo, para  $q = \frac{1}{2}$ ,  $N_t(p, \frac{1}{2}) = M(p, \frac{1-t}{2})$ , para todo  $p \in \partial I^n$ .

Pela Proposição 2.25, segue que  $B$  tem a propriedade da extensão de homotopia em  $I^n \times I$  com respeito a qualquer espaço  $X$ , logo  $N_t$  tem uma extensão contínua  $M_t : I^n \times I \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), tal que  $M_0 = M$ . A aplicação  $M_1$ , que denotaremos por  $k_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), é uma homotopia, tal que  $k_0 = g_1$ ,  $k_1 = h_1$ . Além do mais,  $k_t(\partial I^n) = M_1(\partial I^n \times t) = x_0$ , isto implica que  $g_1$  e  $h_1$  são homotópicas relativamente a  $\partial I^n$ , e portanto  $f_1$  e  $g_1$  são homotópicas relativamente a  $\partial I^n$ .  $\square$

Vamos agora continuar a prova do teorema. Nós construímos uma transformação

$$\sigma_n : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$$

que depende somente da classe de homotopia (relativa a  $\{0, 1\}$ ) do caminho  $\sigma$  e não depende da homotopia escolhida ao longo de  $\sigma$ .

Provemos agora, que se  $\sigma, \tau : I \rightarrow X$  são caminhos, tais que  $\sigma(0) = x_0$ ,  $\sigma(1) = \tau(0) = x_1$  e  $\tau(1) = x_2$ , então  $(\sigma * \tau)_n = \sigma_n \circ \tau_n$ . Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e tomemos  $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$  como um representante de  $\alpha$ . Consideremos  $f_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) uma homotopia de  $f$  ao longo de  $\tau$  e  $g_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) uma homotopia de  $f_1$  ao longo de  $\sigma$ . Note que  $f_1$  é um representante de  $\tau_n(\alpha)$  e  $g_1$  é um representante de  $(\sigma_n \circ \tau_n)(\alpha)$ . Definimos uma homotopia  $h_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) por

$$h_t(s) = \begin{cases} f_{2t}(s), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{2t-1}(s), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Então,  $h_0 = f_0 = f$ ,  $h_1 = g_1$ , e  $h_t(\partial I^n) = (\sigma * \tau)(1 - t)$ , para todo  $t \in I$ , e portanto  $h_t$  é uma homotopia de  $f$  ao longo de  $\sigma * \tau$ . Isto implica que  $g_1$  também representa  $(\sigma * \tau)_n(\alpha)$ . Portanto,  $(\sigma_n \circ \tau_n)(\alpha) = (\sigma * \tau)_n(\alpha)$ . Como  $\alpha$  é arbitrário, segue que  $\sigma_n \circ \tau_n = (\sigma * \tau)_n$ .

Note que se  $\sigma : I \rightarrow X$  é o caminho constante  $\sigma(I) = x_0$ , então  $\sigma_n$  é o automorfismo identidade de  $\pi_n(X, x_0)$ .

Mostremos agora que  $\sigma_n$  é um homomorfismo. Sejam  $\alpha, \beta$  elementos arbitrários de  $\pi_n(X, x_1)$  representados pelas aplicações  $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ . Sejam  $f_t, g_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) homotopias ao longo de  $\sigma$  de  $f$  e  $g$  respectivamente. Então  $f_1$  representa  $\sigma_n(\alpha)$  e  $g_1$  representa  $\sigma_n(\beta)$ . Definimos uma homotopia  $h_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), por  $h_t = f_t + g_t$ . Então  $h_0$  representa  $\alpha + \beta$ ,  $h_1$  representa  $\sigma_n(\alpha) + \sigma_n(\beta)$  e  $h_t$  é uma homotopia ao longo de  $\sigma$ . Isto implica que  $\sigma_n(\alpha + \beta) = \sigma_n(\alpha) + \sigma_n(\beta)$  e, consequentemente,  $\sigma_n$  é um homomorfismo.

Finalmente, mostremos que  $\sigma_n$  é um isomorfismo. Para este propósito, seja  $\tau$  o caminho inverso de  $\sigma$ , isto é  $\tau(t) = \sigma(1 - t)$ , para todo  $t \in I$ . Consideremos o caminho  $\sigma * \tau$ . Já mostramos que  $\sigma_n \circ \tau_n = (\sigma * \tau)_n$ . Como  $\tau$  é o caminho inverso de  $\sigma$ , segue que  $\sigma * \tau$  é homotópico ao caminho constante  $I \mapsto x_0$  relativamente a  $\{0, 1\}$ . Daí, pelo lema anterior, segue que  $\sigma_n \circ \tau_n$  é o automorfismo identidade de  $\pi_n(X, x_0)$ , e portanto  $\sigma_n$  é um epimorfismo. Por um argumento análogo mostramos que  $\tau_n \circ \sigma_n$  é o automorfismo identidade de  $\pi_n(X, x_1)$ , e portanto  $\sigma_n$  é um monomorfismo. Isto completa a prova do teorema. A comutatividade do retângulo é fácil de se verificar.  $\square$

Portanto, para um espaço conexo por caminhos  $X$ , os grupos  $\pi_n(X, x)$ ,  $x \in X$ , são todos isomorfos. Consequentemente,  $\pi_n(X, x_0)$  não depende do ponto base  $x_0$  em  $X$  e pode ser denotado simplesmente por  $\pi_n(X)$ . Nesta terminologia, temos os seguintes grupos de homotopia conhecidos

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}, \pi_m(S^1) = 0, m > 1,$$

$$\pi_n(S^m) = \mathbb{Z}, \pi_m(S^m) = 0, m < n,$$

$$\pi_3(S^2) = \mathbb{Z}.$$

Considere um subespaço  $A$  de  $X$ , e dois pontos  $x_0, x_1$  em  $A$  conectados por um caminho

$$\sigma : I \rightarrow A, \sigma(0) = x_0, \sigma(1) = x_1.$$

Para cada  $n > 0$ , pode-se definir uma transformação

$$\sigma_n : \pi_n(X, A, x_1) \rightarrow \pi_n(X, A, x_0)$$

de modo similar ao feito anteriormente. Daremos aqui somente a ideia geométrica desta construção, como segue. Seja  $\alpha \in \pi_n(X, A, x_1)$  representado por uma aplicação

$$f : (I^n, I^{n-1}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, x_1).$$

A ideia geométrica é puxar a imagem de  $J^{n-1}$  ao longo do caminho  $\sigma$  para o ponto  $x_0$  de tal forma que a imagem de  $I^n$  seja arrastada continuamente e que a imagem de  $I^{n-1}$  fique sempre em  $A$ . A aplicação obtida depois dessa homotopia representará um elemento  $\beta$  de  $\pi_n(X, A, x_0)$  que dependerá somente de  $\alpha$  e da classe de homotopia (relativa a  $\{0,1\}$ ) de  $\sigma$ . Então, definimos  $\sigma_n(\alpha) = \beta$ .

Pode-se provar as seguintes afirmações:

1. Para todo  $n \geq 2$ ,  $\sigma_n$  é um homomorfismo.
2. Para todo  $n > 0$ ,  $\sigma_n$  depende somente da classe de homotopia (relativa a  $\{0,1\}$ ) de  $\sigma$ .
3. Se  $\sigma$  é o caminho constante  $\sigma(I) = x_0$  em  $A$ , então  $\sigma_n$  é a transformação identidade de  $\pi_n(X, A, x_0)$ , para todo  $n > 0$ .
4. Se  $\sigma, \tau$  são caminhos tais que  $\sigma(1) = \tau(0)$ , então  $(\sigma * \tau)_n = \sigma_n \circ \tau_n$ , para todo  $n > 0$ .
5. Para todo  $n > 0$ ,  $\sigma_n$  é uma transformação bijetiva. Consequentemente, para todo  $n \geq 2$ ,  $\sigma_n$  é um isomorfismo.
6. Cada retângulo do diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_0) & \xrightarrow{i_*} & \dots \\
 & & \downarrow \sigma_n & & \downarrow \sigma_n & & \downarrow \sigma_n & & \downarrow \sigma_n & & \\
 \dots & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X, x_1) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X, A, x_1) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x_1) & \xrightarrow{i_*} & \dots
 \end{array}$$

## 4.2 Sistema local de grupos e a ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_n(X, x_0)$

Os grupos de homotopia junto com as transformações construídas na seção anterior motivaram a noção de sistema local de grupos em um espaço  $X$ .

Diz-se que temos um **sistema local de grupos**  $\{G_x\}_{x \in X}$  em um espaço  $X$ , se as seguintes condições são satisfeitas:

- G1.** Para cada ponto  $x \in X$ , existe um grupo  $G_x$  associado.
- G2.** Para cada caminho  $\sigma : I \rightarrow X$  ligando  $x_0$  e  $x_1$ , existe um homomorfismo  $\sigma_\# : G_{x_1} \rightarrow G_{x_0}$ .
- G3.** Se  $\sigma$  é o caminho constante  $\sigma(I) = x_0$ , então  $\sigma_\#$  é o homomorfismo identidade de  $G_{x_0}$ .

**G4.** Se dois caminhos  $\sigma, \tau : I \rightarrow X$  são caminhos equivalentes, isto é, se  $\sigma, \tau$  tem os mesmos pontos iniciais e finais e são homotópicos relativamente a  $\{0,1\}$ , então  $\sigma_{\#} = \tau_{\#}$ .

**G5.** Se dois caminhos  $\sigma, \tau : I \rightarrow X$  são consecutivos, isto é, se  $\sigma(1) = \tau(0)$ , então  $(\sigma * \tau)_{\#} = \sigma_{\#} \circ \tau_{\#}$ .

**Observação 4.3.** De acordo com o Teorema 4.1, a coleção dos grupos de homotopia  $\{\pi_n(X, x) \mid x \in X\}$ , para um espaço  $X$  e um inteiro  $n > 0$ , forma um sistema local de grupos em  $X$ . Similarmente, a coleção dos grupos de homotopia relativa  $\{\pi_n(X, A, x) \mid x \in A\}$ ,  $n > 1$ , forma um sistema local de grupos no subespaço  $A$  de  $X$ .

**Observação 4.4.** Como uma consequência imediata de G3 e G5, deduzimos como na prova do Teorema 4.1, que cada  $\sigma_{\#}$  é um isomorfismo. Consequentemente, se  $X$  é um espaço conexo por caminhos, então todos os grupos  $G_x$ ,  $x \in X$ , são isomorfos.

Seja  $\{G_x\}_{x \in X}$  um sistema local de grupos em  $X$ . Como os elementos do grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  são classes de homotopia (relativa a  $\{0,1\}$ ) dos caminhos em  $X$  com pontos iniciais e finais iguais a  $x_0$ , isto é, classes de homotopia relativa a  $\{0,1\}$  dos laços em  $X$  baseados em  $x_0$ , deduzimos como uma consequência direta de G3 e G5 que, para cada  $x_0 \in X$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  age como um grupo de operadores (ou automorfismo) em  $G_{x_0}$  no sentido definido abaixo.

**Definição 4.5.** Dizemos que um grupo multiplicativo  $H$  age como um grupo de operadores em um grupo aditivo  $G$ , (ou, simplesmente  $H$  age em  $G$ ), se, para todo  $h \in H$  e todo  $g \in G$ , um elemento  $h \cdot g \in G$  é definido de tal forma que

$$h \cdot (g_1 + g_2) = h \cdot g_1 + h \cdot g_2, \quad h_2 \cdot (h_1 \cdot g) = (h_2 * h_1) \cdot g, \quad 1 \cdot g = g,$$

onde  $g, g_1, g_2 \in G$ ,  $h, h_1, h_2 \in H$  são elementos arbitrários,  $1 \in H$  denota o elemento neutro de  $H$  e  $*$  indica a operação em  $H$ . Neste caso, a aplicação  $\omega : H \times G \rightarrow G$  dada por  $\omega(h, g) = h \cdot g$  será chamada de operação (ou ação) de  $H$  sobre  $G$ .

Para cada  $x_0 \in X$ , a ação  $\omega : \pi_1(X, x_0) \times G_{x_0} \rightarrow G_{x_0}$  de  $\pi_1(X, x_0)$  sobre  $G_{x_0}$  é definida de modo natural por  $\omega([\sigma], y) = [\sigma] \cdot y = \sigma_{\#}(y)$ , para todo  $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$  e  $y \in G_{x_0}$ . Particularizando para o sistema local de grupos  $\{\pi_n(X, x) \mid x \in X\}$ ,  $n > 0$ , em  $X$ , obtemos o seguinte resultado

**Proposição 4.6.** Para cada  $x_0 \in X$ , o grupo fundamental  $\pi_1(X, x_0)$  age no  $n$ -ésimo grupo de homotopia  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n > 0$ , como um grupo de operadores.

Neste caso, a ação  $\omega : \pi_1(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  é chamada de **ação de  $\pi_1(X, x_0)$  em  $\pi_n(X, x_0)$** .

**Observação 4.7.** Para o caso especial  $n = 1$ , pode-se ver que, a ação  $\omega : \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$  é tal que, para quaisquer  $[\sigma], [\tau]$  em  $\pi_1(X, x_0)$ ,  $\omega([\sigma], [\tau]) = [\sigma] \cdot [\tau] = \sigma_{\#}([\tau]) = [\sigma * \tau * \sigma^{-1}]$ .

Similarmente, para cada  $x_0 \in A$ ,  $\pi_1(A, x_0)$  age no  $n$ -ésimo grupo de homotopia relativa  $\pi_n(X, A, x_0)$ ,  $n > 1$ , como um grupo de operadores.

Agora, vamos considerar duas aplicações homotópicas

$$f, g : X \rightarrow Y.$$

Seja  $h_t : X \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) uma homotopia entre  $f$  e  $g$ , com  $h_0 = f$  e  $h_1 = g$ . Seja  $x_0 \in X$  e denotemos por  $y_0 = f(x_0)$  e  $y_1 = g(x_0)$ . Definamos um caminho  $\sigma : I \rightarrow Y$  por

$$\sigma(t) = h_t(x_0), \quad t \in I.$$

Então,  $\sigma(0) = y_0$  e  $\sigma(1) = y_1$ . De acordo com a Seção 3.5 do capítulo anterior, as aplicações  $f$  e  $g$  induzem os homomorfismos

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0), \quad g_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_1),$$

para cada  $n > 0$ . Por outro lado, o caminho  $\sigma$  determina um isomorfismo

$$\sigma_n : \pi_n(Y, y_1) \rightarrow \pi_n(Y, y_0).$$

Logo, temos o seguinte resultado

**Proposição 4.8.**  $f_* = \sigma_n \circ g_*$

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$  e escolhamos a aplicação  $\phi : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$  como um representante de  $\alpha$ . Definimos uma homotopia  $\psi_t : I^n \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), por  $\psi_t = h_t \circ \phi$ , para todo  $t \in I$ . Então,  $\psi_0 = f \circ \phi$  representa  $f_*(\alpha)$  e  $\psi_1 = g \circ \phi$  representa  $g_*(\alpha)$ . Como  $\psi(\partial I^n) = \sigma(t)$ , para todo  $t \in I$ , segue que  $\rho_t = \psi_{(1-t)} : I^n \rightarrow Y$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) é uma homotopia, tal que  $\rho_0 = g \circ \phi$  representa  $g_*(\alpha)$ ,  $\rho_1 = f \circ \phi$  representa  $f_*(\alpha)$ , e  $\rho_t(\partial I^n) = \psi_{(1-t)}(\partial I^n) = \sigma(1-t)$ , para todo  $t \in I$ . Logo  $\rho_t$  é uma homotopia de  $g \circ \phi$  ao longo de  $\sigma$ , e portanto  $\sigma_n(g_*(\alpha)) = [\rho_1] = f_*(\alpha)$ . Como  $\alpha$  é arbitrário, segue que  $f_* = \sigma_n \circ g_*$ .  $\square$

**Corolário 4.9.** Se  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações homotópicas tais que  $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$ , então existe um elemento  $w \in \pi_1(Y, y_0)$  tal que  $f_* = w \cdot g_*$ .

*Demonstração.* Da proposição anterior, segue que existe um laço baseado em  $y_0$ ,  $\sigma : I \rightarrow Y$ , tal que  $f_* = \sigma_n \circ g_*$ . Mas  $\sigma_n \circ g_*(\alpha) = \sigma_n(g_*(\alpha)) = [\sigma] \cdot g_*(\alpha)$ , para todo  $\alpha \in \pi_n(X, x_0)$ . Tome  $w = [\sigma] \in \pi_1(Y, y_0)$ .  $\square$

Como outra consequência da proposição anterior temos o famoso teorema em Topologia Algébrica, conhecido como o Teorema da **invariância homotópica dos grupos de homotopia**

**Teorema 4.10.** Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma equivalência de homotopia e se  $f(x_0) = y_0$ , então

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

é um isomorfismo, para todo  $n > 0$ .

*Demonstração.* Como  $f$  é uma equivalência de homotopia, existe uma aplicação contínua  $g : Y \rightarrow X$  tal que  $g \circ f$  e  $f \circ g$  são homotópicas às aplicações identidades de  $X$  e  $Y$  respectivamente. Seja  $x_1 = g(y_0)$ . Então  $g$  induz o homomorfismo

$$g_* : \pi_n(Y, y_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1),$$

para todo  $n > 0$ . Seja  $h_t : X \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) uma homotopia entre  $g \circ f$  e  $id_X$  (identidade de  $X$ ), com  $h_0 = g \circ f$  e  $h_1 = id_X$ . Definimos o caminho  $\sigma : I \rightarrow X$  por  $\sigma(t) = h_t(x_0)$ , para todo  $t \in I$ . Então, pela proposição anterior, temos

$$g_* \circ f_* = \sigma_n.$$

Como  $\sigma_n$  é um isomorfismo, para todo  $n > 0$ , isto implica que  $f_*$  é um monomorfismo e  $g_*$  é um epimorfismo. Como  $g$  é também uma equivalência de homotopia, segue que  $g_*$  é também um monomorfismo. Consequentemente,  $g_*$  é um isomorfismo e então  $f_* = g_*^{-1} \circ \sigma_n$  é também um isomorfismo, para todo  $n > 0$ .  $\square$

Similarmente, se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma equivalência de homotopia de pares com  $f(x_0) = y_0$ , então

$$f_* : \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$$

é um isomorfismo, para todo  $n > 1$ .

### 4.3 Espaços $n$ -simples

**Definição 4.11.** Dizemos que um sistema local de grupos  $\{G_x\}_{x \in X}$  em um espaço  $X$  é **simples**, se o homomorfismo  $\sigma_\#$  depende somente do ponto inicial  $\sigma(0)$  e do ponto final  $\sigma(1)$  do caminho  $\sigma : I \rightarrow X$ , para todo  $\sigma$ .

**Definição 4.12.** Seja  $W$  um grupo que age sobre um grupo  $G$ . Dizemos que  $W$  **age simplesmente** sobre  $G$ , se  $w \cdot g = g$  para todo  $w \in W$  e  $g \in G$ .

**Proposição 4.13.** Um sistema local de grupos  $\{G_x\}_{x \in X}$  em um espaço  $X$  é simples se, e somente se, para todo  $x_0 \in X$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $G_{x_0}$ .

*Demonstração.* Assumimos que o sistema local de grupos  $\{G_x\}_{x \in X}$  é simples. Seja  $\sigma : I \rightarrow X$  o caminho constante,  $\sigma(I) = x_0$ . Como  $\{G_x\}_{x \in X}$  em  $X$  é simples, temos para todo  $[\tau] \in \pi_1(X, x_0)$   $\tau_\# = \sigma_\# = id_{G_{x_0}}$ , e portanto  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $G_{x_0}$ . Uma vez que  $x_0$  é arbitrário, segue que  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $G_{x_0}$ , para todo  $x_0 \in X$ .

Para provar a implicação contrária, sejam  $\sigma, \tau : I \rightarrow X$  caminhos tais que  $\tau(0) = \sigma(0)$  e  $\tau(1) = \sigma(1)$ . Denotemos por  $x_0 = \tau(0) = \sigma(0)$ . Logo,  $\sigma * \tau^{-1}$  é um laço baseado em  $x_0$ , e portanto representa o elemento  $[\sigma * \tau^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ . Por hipótese,  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $G_{x_0}$ , logo  $(\sigma * \tau^{-1})_\# = \sigma_\# \circ \tau_\#^{-1} = id_{G_{x_0}}$ , e portanto  $\sigma_\# = \tau_\#$ . Consequentemente o sistema local de grupos  $\{G_x\}_{x \in X}$  é simples.  $\square$

**Proposição 4.14.** *Um sistema local de grupos  $\{G_x\}_{x \in X}$  em um espaço conexo por caminhos  $X$  é simples se, e somente se, existe um ponto  $x_0 \in X$  tal que  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $G_{x_0}$ .*

*Demonstração.* A primeira implicação é consequência imediata da proposição anterior. Para a prova da implicação contrária, seja  $x_1 \in X$  um ponto arbitrário. Como  $X$  é conexo por caminhos, existe um caminho  $\sigma : I \rightarrow X$  tal que  $\sigma(0) = x_0$  e  $\sigma(1) = x_1$ . Seja  $[\tau] \in \pi_1(X, x_1)$ , então  $\sigma * \tau * \sigma^{-1}$  é um laço baseado em  $x_0$  e portanto representa o elemento  $[\sigma * \tau * \sigma^{-1}] \in \pi_1(X, x_0)$ . Por hipótese,  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $G_{x_0}$ , isso implica que  $(\sigma * \tau * \sigma^{-1})_\# = \sigma_\# \circ \tau_\# \circ \sigma_\#^{-1} = id_{G_{x_0}}$ , logo  $\tau_\# = id_{G_{x_1}}$ . Como  $[\tau] \in \pi_1(X, x_1)$ , segue que  $\pi_1(X, x_1)$  age simplesmente em  $G_{x_1}$ . Agora, como  $x_1$  também é arbitrário em  $X$ , segue pela proposição anterior que o sistema local de grupos  $\{G_x\}_{x \in X}$  é simples.  $\square$

**Corolário 4.15.** *Um sistema local de grupos  $\{G_x\}_{x \in X}$  em um espaço simplesmente conexo  $X$  é sempre simples.*

**Definição 4.16.** *Seja  $n > 0$  um inteiro positivo. Dizemos que um espaço  $X$  é  $n$ -simples se o sistema local  $\{\pi_n(X, x_0) \mid x_0 \in X\}$  dos  $n$ -ésimos grupos de homotopia em  $X$  é simples.*

Os próximos resultados são consequências imediatas da definição e dos resultados acima.

**Proposição 4.17.** *Um espaço  $X$  é  $n$ -simples se, e somente se, para todo  $x_0 \in X$ ,  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $\pi_n(X, x_0)$ .*

**Proposição 4.18.** *Um espaço conexo por caminhos  $X$  é  $n$ -simples se, e somente se, existe um ponto  $x_0 \in X$  tal que  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $\pi_n(X, x_0)$ .*

**Corolário 4.19.** *Um espaço simplesmente conexo  $X$  é  $n$ -simples para todo  $n > 0$ .*

**Corolário 4.20.** *Um espaço conexo por caminhos  $X$  é  $n$ -simples se  $\pi_n(X) = 0$ .*

Segue imediatamente da Observação 4.7 o seguinte resultado:

**Corolário 4.21.** *Um espaço conexo por caminhos  $X$  é 1-simples se, e somente se,  $\pi_1(X)$  é abeliano.*

**Observação 4.22.** Segue dos três corolários acima que a  $m$ -esfera  $S^m$  é  $n$ -simples para todo  $m > 0$  e  $n > 0$ .

**Observação 4.23.** Toda teoria feita até aqui poderia ser desenvolvida de modo equivalente usando aplicações de  $\overline{F}^n(X, x_0)$  ou de  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  como representantes dos elementos de  $\pi_n(X, x_0)$ .

Denotemos por  $G_f^n(X)$ ,  $f \in G^n(X)$ , a componente conexa por caminhos de  $G^n(X)$  que contém  $f$  e seja  $\tau : G^n(X) \rightarrow X$  a fibração avaliação introduzida no final do Capítulo 2. O próximo resultado fornece o significado geométrico da  $n$ -simplicidade de um espaço  $X$ .

**Teorema 4.24.** *Um espaço  $X$  é  $n$ -simples se, e somente se, para todo ponto  $x_0 \in X$  e quaisquer duas aplicações  $f, g \in G^n(X)$  com  $\tau(f) = \tau(g) = x_0$ ,  $G_f^n(X) = G_g^n(X)$  implica  $[f] = [g]$  em  $\pi_n(X, x_0)$ .*

*Demonstração.* Assumimos que  $X$  é  $n$ -simples. Então, pela Proposição 4.17,  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $\pi_n(X, x_0)$ . Agora, como  $I^n$  é localmente compacto e Hausdorff, então  $G_f^n(X) = G_g^n(X)$  se, e somente se,  $f \sim g : h_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), com  $h_t \in G^n(X)$  para todo  $t \in I$ . Como  $\tau(f) = \tau(g) = x_0$ , segue que  $f$  e  $g$  representam elementos  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\pi_n(X, x_0)$ , respectivamente. Definamos o caminho  $\sigma : I \rightarrow X$  por  $\sigma(t) = h_t(\partial I^n)$  para todo  $t \in I$ . Como  $\sigma(0) = \tau(f) = \tau(g) = \sigma(1) = x_0$ ,  $\sigma$  representa um elemento  $w$  de  $\pi_1(X, x_0)$ . Pela própria definição da ação de  $\pi_1(X, x_0)$  em  $\pi_n(X, x_0)$  é fácil ver que  $\alpha = w \cdot \beta$ . Como  $\pi_1(X, x_0)$  age simplesmente em  $\pi_n(X, x_0)$ , temos  $w \cdot \beta = \beta$ . Consequentemente  $\alpha = \beta$ , e portanto  $[f] = [g]$ .

Agora vamos provar a implicação contrária. Seja  $w \in \pi_1(X, x_0)$  e seja  $\sigma : I \rightarrow X$  com  $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$  um representante para  $w$ . Seja  $\alpha$  um elemento arbitrário de  $\pi_n(X, x_0)$  representado por uma aplicação  $f : I^n \rightarrow X$  com  $\tau(f) = x_0$ . Então o elemento  $w \cdot \alpha$  de  $\pi_n(X, x_0)$  é representado por uma aplicação  $g : I^n \rightarrow X$  com  $\tau(g) = x_0$ , onde  $g = h_1$  e  $h_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) é a homotopia de  $f$  ao longo de  $\sigma$ , isto implica que  $f \sim g : h_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) com  $h_t \in G^n(X)$  para todo  $t \in I$  e  $\tau(f) = \tau(g) = x_0$ . Por hipótese,  $[f] = [g]$  em  $\pi_n(X, x_0)$ , e portanto  $w \cdot \alpha = \alpha$ . Segue então da Proposição 4.17 que  $X$  é  $n$ -simples.  $\square$

**Observação 4.25.** Pela Observação 4.23, o teorema acima pode ser enunciado trocando  $G^n(X)$  e  $\tau$  por  $\overline{G}^n(X)$  e  $\overline{\tau}$  (ou por  $\tilde{G}^n(X)$  e  $\tilde{\tau}$ ). Por esse motivo e outros já enunciados anteriormente, a partir de agora usaremos apenas  $G^n(X)$  para denotar os três espaços  $G^n(X)$ ,  $\overline{G}^n(X)$  e  $\tilde{G}^n(X)$ ,  $F^n(X, x_0)$  para denotar os três espaços  $F^n(X, x_0)$ ,  $\overline{F}^n(X, x_0)$  e  $\tilde{F}^n(X, x_0)$  e  $\tau$  para denotar as três fibrações avaliações  $\tau$ ,  $\overline{\tau}$  e  $\tilde{\tau}$ .

**Proposição 4.26.** *Sejam  $X$  um espaço conexo por caminhos,  $n$ -simples e  $x_0 \in X$ . Então as componentes conexas por caminhos de  $G^n(X)$  podem ser enumeradas pelos elementos de  $\pi_n(X, x_0)$ .*

*Demonstração.* Seja  $g \in G^n(X)$  e consideremos  $G_g^n(X)$  a componente conexa por caminhos de  $G^n(X)$  que contém  $g$ . Como  $X$  é conexo por caminhos, existe um caminho  $\sigma : I \rightarrow X$  ligando  $x_0$  e  $\tau(g)$ . Consideremos  $h_t : I^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) a homotopia de  $g$  ao longo de  $\sigma$ . Logo  $f = h_1 \in G^n(X)$  representa um elemento de  $\pi_n(X, x_0)$  e como  $h_t \in G^n(X)$ , para todo  $t \in I$ , temos  $G_g^n(X) = G_f^n(X)$ . Como  $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ , podemos indexar as componentes conexas por caminhos de  $G^n(X)$  pelos elementos de

$\pi_n(X, x_0)$ . Agora, como  $X$  é  $n$ -simples, segue pelo Teorema 4.24 que  $G_\alpha^n(X) = G_\beta^n(X)$  se, e somente se,  $\alpha = \beta$  em  $\pi_n(X, x_0)$ . Isto prova a proposição.  $\square$

Vamos denotar por  $\tau_\alpha = \tau|_{G_\alpha^n(X)} : G_\alpha^n(X) \rightarrow \tau(G_\alpha^n(X))$  a aplicação obtida pela restrição da fibração avaliação a componente conexa por caminho  $G_\alpha^n(X)$  de  $G^n(X)$ ,  $\tau_\alpha$  é também uma fibração (Ver [18], página 71) e é chamada de fibração avaliação definida por  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ . Se  $X$  é conexo por caminhos, segue da Proposição 2.7, que  $\tau(G_\alpha^n) = X$ .

Similarmente vamos denotar por  $F_\alpha^n(X, x_0)$  a componente conexa por caminhos que contém qualquer representante da classe  $\alpha$ . Note que  $F_\alpha^n(X, x_0) = \alpha$ , pois  $S^n$  é localmente compacta. O resultado a seguir é uma consequência imediata do Teorema 4.24.

**Proposição 4.27.** *Se  $X$  é um espaço  $n$ -simples, então a fibra  $\tau_\alpha^{-1}(\{x_0\}) = F_\alpha^n(X, x_0)$ .*



## 5 O Isomorfismo de Hurewicz e o produto de Whitehead

O objetivo deste capítulo é construir o Isomorfismo de Hurewicz e definir um produto entre grupos de homotopia, chamado de produto de Whitehead, para futuras aplicações de grande relevância deste trabalho. Daqui em diante, todos os espaços considerados serão conexos por caminhos.

Daqui em diante, usaremos as notações  $D_1^n$  para denotar o subespaço de  $D^n$  determinado pelos pontos de  $D^n$  em que a última coordenada  $x_n \geq 0$ ,  $D_2^n$  para denotar o subespaço de  $D^n$  determinado pelos pontos de  $D^n$  em que a última coordenada  $x_n \leq 0$ ,  $S_1^n$  para denotar o subespaço de  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  determinado pelos pontos de  $S^n$  em que a última coordenada  $x_{n+1} \geq 0$  e  $S_2^n$  para denotar o subespaço de  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  determinado pelos pontos de  $S^n$  em que a última coordenada  $x_{n+1} \leq 0$ . Lembremos que estávamos usando a notação  $D_+^n$  para  $S_1^n$  e  $D_-^n$  para  $S_2^n$ .

### 5.1 O Isomorfismo de Hurewicz

Sejam  $X$  um espaço topológico,  $x_0 \in X$  e  $p \geq 1$ .

**Teorema 5.1.** *Quaisquer duas componentes de  $F^p(X, x_0)$  têm o mesmo tipo de homotopia.*

*Demonstração.* É suficiente provar que  $F_0^p(X, x_0)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $F_\alpha^p(X, x_0)$ , para todo  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ . Para este propósito, sejam  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$  e  $a \in F_\alpha^p(X, x_0)$ , e seja  $(-a)$  a aplicação contínua pertencente a  $F_{-\alpha}^p(X, x_0)$  definida por  $(-a)(y_1, y_2, \dots, y_p) = (1 - y_1, y_2, \dots, y_p)$ ,  $(y_1, \dots, y_p) \in I^p$ .

Definimos  $\varphi : F_0^p(X, x_0) \rightarrow F_\alpha^p(X, x_0)$  por  $\varphi(f) = f + a$ ,  $f \in F_0^p(X, x_0)$  e  $\psi : F_\alpha^p(X, x_0) \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  por  $\psi(g) = g + (-a)$ ,  $g \in F_\alpha^p(X, x_0)$ .

Note que estamos usando fortemente nas definições de  $\varphi$  e  $\psi$  o fato de  $\pi_p(X, x_0)$  ser um grupo (não necessariamente abeliano quando  $n = 1$ ) cuja a operação será denotada aditivamente e elemento neutro 0, representado pela aplicação constante  $e_{x_0}(I^p) = x_0$ .

Então  $\varphi \circ \psi(g) = (g + (-a)) + a$  e  $\psi \circ \varphi(f) = (f + a) + (-a)$ ,  $g \in F_\alpha^p(X, x_0)$  e  $f \in F_0^p(X, x_0)$ . A homotopia  $H : F_0^p(X, x_0) \times I \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  definida por

$$H(f, t)(y_1, y_2, \dots, y_p) = \begin{cases} f(\frac{4y_1}{1+3t}, y_2, \dots, y_p), & \text{se } 0 \leq y_1 \leq \frac{1+3t}{4} \\ a(4y_1 - (1+3t), y_2, \dots, y_p), & \text{se } \frac{1+3t}{4} \leq y_1 \leq \frac{1+t}{2} \\ a(2 - 2y_1, y_2, \dots, y_p), & \text{se } \frac{1+t}{2} \leq y_1 \leq 1 \end{cases}$$

é uma homotopia entre  $\psi \circ \varphi$  e a aplicação identidade de  $F_0^p(X, x_0)$ . De modo similar podemos estabelecer uma homotopia entre  $\varphi \circ \psi$  e a aplicação identidade de  $F_\alpha^p(X, x_0)$ . Portanto  $\psi$  é uma equivalência de homotopia entre  $F_\alpha^p(X, x_0)$  e  $F_0^p(X, x_0)$  e o teorema está provado.  $\square$

Denotemos por  $H_\alpha$  o isomorfismo natural de  $\pi_{q-1}(F_\alpha^p(X, x_0), a)$  em  $\pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$ ,  $a_0 = \psi(a) = a + (-a) \in 0$ ,  $q > 1$ , induzido pela equivalência de homotopia  $\psi$ , isto é,  $H_\alpha = \psi_*$ .

Agora, seja  $a_0$  a aplicação constante de  $D^p$  em  $x_0$ . Queremos definir uma aplicação de  $\pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$  em  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n = q + p - 1$ .

O bordo  $(D^p \times S^{q-1}) \cup (S^{p-1} \times D^q) = S_0^n$  de  $D^p \times D^q$  é, a menos de homeomorfismo, a esfera  $S^{p+q-1} = S^n$ . Sejam  $y_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$ ,  $z_0 = (1, 0, \dots, 0, 0)$  os pontos bases de  $S^{p-1}$  e  $S^{q-1}$  respectivamente, e  $w_0 = (y_0, z_0)$  o ponto base de  $S_0^n$ . Como  $S_0^n$  é homeomorfo a  $S^n$ , **daqui em diante iremos usar  $S^n$  para denotar  $S_0^n$** .

Seja  $\eta \in \pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$  e  $f : S^{q-1} \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  tal que  $f(z_0) = a_0$  um representante para  $\eta$ . Definimos uma aplicação  $\bar{f} : D^p \times S^{q-1} \rightarrow X$  por

$$\bar{f}(y, z) = [f(z)](y)$$

para todo  $y \in D^p$  e  $z \in S^{q-1}$ . Note que  $\bar{f}(S^{p-1} \times S^{q-1}) = x_0$ , pois  $f(z) \in F_0^p(X, x_0)$ , para todo  $z \in S^{q-1}$ , e portanto  $f(z)|_{S^{p-1}} = x_0$ , para todo  $z \in S^{q-1}$ . Note também que  $\bar{f}(D^p \times \{z_0\}) = x_0$ , pois  $f(z_0) = a_0$ . Agora definimos uma aplicação  $I_0(f) : S^n \rightarrow X$  por

$$[I_0(f)](y, z) = \begin{cases} \bar{f}(y, z), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

Então  $I_0(f)$  representa o elemento  $[I_0(f)]$  em  $\pi_n(X, x_0)$ , que iremos denotar por  $I_0(\eta)$ , lembrando sempre que  $n = p + q - 1$ . A continuidade de  $I_0(f)$  segue da continuidade de  $f$  e do Lema 1.18. Podemos então definir  $I_0 : \pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  tal que  $I_0([f]) = [I_0(f)]$ .

**Teorema 5.2.**  $I_0 : \pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  é um isomorfismo.

*Demonstração.* • Primeiramente, mostremos que  $I_0$  está bem definida.

Seja  $\eta = [f] = [g] \in \pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$ . Como  $[f] = [g]$  em  $\pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$ , existe uma homotopia  $H : S^{q-1} \times I \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  tal que  $H_0 = f$ ,  $H_1 = g$  e  $H(z_0, t) = a_0$  para todo  $t \in I$ .

Definimos  $L : S^n \times I \rightarrow X$  por

$$L[(y, z), t] = \begin{cases} [H(z, t)](y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

Logo,

$$L_0(y, z) = L[(y, z), 0] = \begin{cases} [H(z, 0)](y) = [f(z)](y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

Portanto  $L_0 = I_0(f)$ . Analogamente,  $L_1 = I_0(g)$ . A continuidade de  $L$  segue da continuidade de  $H$  e do Lema 1.18. Note que temos também  $L[(y_0, z_0), t] = x_0$ , para todo  $t \in I$ , e portanto  $[I_0(f)] = [I_0(g)] = I_0(\eta)$ , como queríamos.

- Mostremos agora que  $I_0$  é um homomorfismo.

Sejam  $\eta_i \in \pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$  e  $f_i : S^{q-1} \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  seus representantes,  $i = 1, 2$ . Como  $I_0$  está bem definida, vamos assumir que  $f_i$  seja uma concentração em  $S_i^{q-1}$ ,  $i = 1, 2$ , isto é,  $f_1(S_2^{q-1}) = f_2(S_1^{q-1}) = a_0$ . Logo  $f_0 : S^n \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  definida por

$$f_0(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{se } z \in S_1^{q-1} \\ f_2(z), & \text{se } z \in S_2^{q-1}. \end{cases}$$

representa  $\eta_0 = \eta_1 + \eta_2$  em  $\pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$ .

$$[I_0(f_0)](y, z) = \begin{cases} \overline{f_0}(y, z), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

- (1) Como  $f_1(S_2^{q-1}) = f_2(S_1^{q-1}) = a_0$ , segue que  $\overline{f_1}(D^p \times S_2^{q-1}) = \overline{f_2}(D^p \times S_1^{q-1}) = x_0$ , e também, como  $f_i(z) \in F_0^p(X, x_0)$ , para todo  $z \in S^{q-1}$ , segue que  $\overline{f_i}(S^{p-1} \times S^{q-1}) = x_0$ ,  $i = 1, 2$ . Logo  $I_0(f_1)|S_2^n = I_0(f_2)|S_1^n = x_0$ , uma vez que,  $S_i^n = (D^p \times S_i^{q-1}) \cup (S^{p-1} \times D_i^q)$ .
- (2) Agora, note que  $\overline{f_0}|D^p \times S_i^{q-1} = \overline{f_i}|D^p \times S_i^{q-1}$ ,  $i = 1, 2$ , implica que  $I_0(f_0)|D^p \times S_i^{q-1} = I_0(f_i)|D^p \times S_i^{q-1}$ ,  $i = 1, 2$ , e também  $I_0(f_0)|S^{p-1} \times D_i^q = I_0(f_i)|S^{p-1} \times D_i^q = x_0$ ,  $i = 1, 2$ , logo  $I_0(f_0)|S_i^n = I_0(f_i)|S_i^n$ ,  $i = 1, 2$ .

Portanto, por (1) e (2), segue que  $I_0(f_0) = I_0(f_1) + I_0(f_2)$ , daí  $I_0(\eta_0) = I_0(\eta_1 + \eta_2) = I_0(\eta_1) + I_0(\eta_2)$ .

- Provemos agora a sobrejetividade de  $I_0$ .

Consideremos  $W = (D^p \times \{z_0\}) \cup (S^{p-1} \times D^q)$  subespaço de  $S^n$ . Observe que  $W$  é contrátil, isto é,  $W \equiv w_0$ , pois  $D^p \equiv y_0$  (homotopia linear),  $D^q \equiv z_0$  (homotopia linear) e  $S^{p-1} = \partial(D^p)$ . Logo, pela Proposição 1.35, segue que existe

uma homotopia  $K : W \times I \rightarrow W \subset S^n$ , tal que  $K_0 = id_W$  e  $K_1 = c_{w_0}$ , onde  $c_{w_0}$  é a aplicação constante,  $c_{w_0}(w) = w_0$ , para todo  $w \in W$ . Como  $W \subset S^n$ , a menos de uma composição com a inclusão de  $W$  em  $S^n$ , podemos olhar  $K$  como uma aplicação de  $W \times I$  em  $S^n$ . Pela Proposição 2.25, segue que existe uma extensão contínua da homotopia  $K$  para a homotopia  $\bar{K} : S^n \times I \rightarrow S^n$ , tal que  $\bar{K}_0 = id_{S^n}$ .

Sejam  $\eta \in \pi_n(X, x_0)$  um elemento arbitrário e  $g_0 : S^n \rightarrow X$  um representante de  $\eta$ . Definimos uma homotopia  $g_t : S^n \rightarrow X$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), por  $g_t(w) = g_0[\bar{K}(w, t)]$ , para todo  $w \in S^n$  e  $t \in I$ . Note que  $g_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) é uma homotopia entre  $g_0$  e  $g_1$ , onde  $g_1$  é tal que  $g_1(w) = x_0$ , para todo  $w \in S^{p-1} \times D^q$ , pois  $S^{p-1} \times D^q \subset W$  e  $g_1(w) = g_0[\bar{K}(w, 1)] = g_0[C_{w_0}(h)] = g_0(w_0) = x_0$ , para todo  $w \in W$ . Definimos  $\tilde{g}_1 : S^{q-1} \rightarrow F_0^p(F, x_0)$ , por

$$[\tilde{g}_1(z)](y) = g_1(y, z),$$

para todo  $z \in S^{q-1}$  e para todo  $y \in D^p$ . Como  $\tilde{g}_1(z_0) = a_0$ , segue que  $\tilde{g}_1$  representa um elemento  $\zeta$  em  $\pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$  e

$$g_1(y, z) = [I_0(\tilde{g}_1)](y, z) = \begin{cases} g_1(y, z), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q, \end{cases}$$

para todo  $(y, z) \in S^n$ . Logo,  $I_0(\zeta) = [I_0(\tilde{g}_1)] = [g_1] = \eta$ , e portanto,  $I_0$  é sobrejetora.

- Finalmente, mostremos a injetividade de  $I_0$ .

Para esse propósito, sejam  $\eta \in \pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$  e  $f : S^{q-1} \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  um representante de  $\eta$ , satisfazendo a condição  $I_0(\varphi) = [I_0(f)] = 0$ . Vamos denotar por  $e_{x_0}$  a aplicação constante  $e_{x_0}(S^n) = x_0$ . Lembremos que

$$[I_0(f)](y, z) = \begin{cases} \bar{f}(y, z) = [f(z)](y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

Como  $I_0(\varphi) = 0$ , existe uma homotopia  $h : S^n \times I \rightarrow X$  relativa a  $w_0$  entre  $I_0(f)$  e  $e_{x_0}$ , isto é, existe uma aplicação contínua  $h : S^n \times I \rightarrow X$ , tal que  $h_0 = I_0(f)$ ,  $h_1 = e_{x_0}$  e  $h(w_0, t) = x_0$ , para todo  $t \in I$ . Definimos  $h' : S^n \times I \rightarrow X$  por

$$h'(w, t) = \begin{cases} h(\bar{K}(w, 2t), 0), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, w \in S^n \\ h(\bar{K}(w, 1), 2t - 1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, w \in S^n. \end{cases}$$

Então,  $h'(w, 0) = h(\bar{K}(w, 0), 0) = I_0(f)[id_{S^n}(w)] = I_0(f)(w)$ , para todo  $w \in S^n$ , e  $h'(w, 1) = h(\bar{K}(w, 1), 1) = e_{x_0}[\bar{K}(w, 1)] = x_0$ , para todo  $w \in S^n$ . Pelo Lema 1.18,  $h'$  é contínua, logo  $h'$  é uma homotopia entre  $I_0(f)$  e  $e_{x_0}$ .

Se  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  e  $w \in W$ , temos  $h'(w, t) = h(\bar{K}(w, 2t), 0) = I_0(f)[\bar{K}(w, 2t)] \stackrel{w \in W}{=} I_0(f)[K(w, 2t)]$ . Agora, como  $I_0(W) = x_0$ , pois  $I_0(f)|_{S^{p-1} \times D^q} = x_0$  e  $[f(z_0)](y) =$

$a_0(y) = x_0$ , para todo  $y \in D^p$ , e  $K(w, 2t) \in W$ , para todo  $w \in W$ , segue que  $h'(w, t) = I_0(f)[K(w, 2t)] = x_0$ .

Se  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  e  $w \in W$ , temos  $h'(w, t) = h(\overline{K}(w, 1), 2t - 1) \stackrel{w \in W}{=} h(K(w, 1), 2t - 1) = h(c_{w_0}(w), 2t - 1) = h(w_0, 2t - 1) = x_0$ .

Portanto,  $h'$  é uma homotopia entre  $I_0(f)$  e  $e_{x_0}$  relativa a  $W$ . Definimos  $L : S^{q-1} \times I \rightarrow F_0^p(X, x_0)$  por

$$[L(z, t)](y) = h'[(y, z), t],$$

para todo  $z \in S^{q-1}$ ,  $t \in I$  e  $y \in D^p$ . Se  $z \in S^{q-1}$  então  $[L(z, 0)](y) = h'[(y, z), 0] = [I_0(f)](y, z) = \bar{f}(y, z) = [f(z)](y)$ , para todo  $y \in D^p$  e portanto  $L(z, 0) = f(z)$ . Agora,  $[L(z, 1)](y) = h'[(y, z), 1] = e_{x_0}(y, z) = x_0 = [e_{a_0}(z)](y)$ , para todo  $y \in D^p$ , onde  $e_{a_0}$  é a aplicação constante  $e_{a_0}(S^{q-1}) = a_0$ . Logo,  $L(z, 1) = e_{a_0}(z)$ . Como  $z$  é arbitrário, segue que  $L_0 = f$  e  $L_1 = e_{a_0}$ . Logo,  $L$  é uma homotopia entre  $f$  e  $e_{a_0}$ . Temos também que  $[L(z_0, t)](y) = h'[(y, z_0), t] = x_0 = a_0(y)$ , para todo  $y \in D^p$  e  $t \in I$ , pois  $(y, z_0) \in D^p \times \{z_0\} \subset W$  e  $h(W \times I) = x_0$ , e portanto  $L(z_0, t) = a_0$ , para todo  $t \in I$ . Assim,  $L$  é uma homotopia entre  $f$  e  $e_{a_0}$  relativa a  $z_0$ , ou seja,  $[f] = [e_{a_0}] = 0$  em  $\pi_{q-1}(F_0^p(X, x_0), a_0)$ . Portanto,  $I_0$  é injetora.  $\square$

Denotemos por  $I_\alpha : \pi_{q-1}(F_\alpha^p(X, x_0), a) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ , onde  $p \geq 1$ ,  $q > 1$  e  $n = p + q - 1$ , o isomorfismo composição  $I_0 \circ H_\alpha$ .  $I_\alpha$  é chamado de **Isomorfismo de Hurewicz** associado a  $\alpha$ .

## 5.2 Uma introdução ao produto de Whitehead

Sejam  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ ,  $\beta \in \pi_q(X, x_0)$  e aplicações  $a : D^p \rightarrow X$ ,  $b : D^q \rightarrow X$ , com  $a(S^{p-1}) = b(S^{q-1}) = x_0$ , seus representantes, respectivamente,  $p \geq 1$  e  $q \geq 1$ . Então, definimos o elemento  $[\alpha, \beta]$  em  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n = p + q - 1$ , como sendo o elemento representado pela aplicação  $(a, b) : S^n \rightarrow X$ , definida por

$$(a, b)(y, z) = \begin{cases} a(y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ b(z), & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

A continuidade de  $(a, b)$  segue do Lema 1.18 e observe que  $(a, b)(w_0) = x_0$ .

A proposição abaixo mostra que  $[\alpha, \beta]$  depende somente de  $\alpha$  e  $\beta$ , como era de se esperar. Vamos denotar a classe da aplicação  $(a, b)$  em  $\pi_n(X, x_0)$  por  $[a, b]$ .

**Proposição 5.3.** *Sejam  $a, a' : D^p \rightarrow X$  e  $b, b' : D^q \rightarrow X$  aplicações, tais que  $[a] = [a']$  em  $\pi_p(X, x_0)$  e  $[b] = [b']$  em  $\pi_q(X, x_0)$ , então  $[a, b] = [a', b']$  em  $\pi_n(X, x_0)$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, existem homotopias  $R : D^p \times I \rightarrow X$  e  $L : D^q \times I \rightarrow X$ , tais que  $R_0 = a$ ,  $R_1 = a'$ ,  $L_0 = b$ ,  $L_1 = b'$  e  $R(S^{p-1} \times I) = L(S^{q-1} \times I) = x_0$ . Definimos  $K : S^n \times I \rightarrow X$  por

$$K[(y, z), t] = \begin{cases} R(y, t), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ L(z, t), & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

A continuidade de  $K$  segue do Lema 1.18. Note que,  $K_0 = [a, b]$ ,  $K_1 = [a', b']$  e  $K(w_0, t) = x_0$ , para todo  $t \in I$ . Portanto,  $[a, b] = [a', b']$  em  $\pi_n(X, x_0)$ .  $\square$

Logo, o produto  $[ , ] : \pi_p(X, x_0) \times \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$  está bem definido e é chamado de **Produto de Whitehead** dos grupos  $\pi_p(X, x_0)$  e  $\pi_q(X, x_0)$ .

**Observação 5.4.** Note que quando  $p = q = 1$ , então  $[\alpha, \beta] = \alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1}$ , para todo  $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ . Consequentemente, se  $\pi_1(X, x_0)$  é abeliano, então o produto de Whitehead sempre é o elemento neutro de  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Proposição 5.5.** Se  $p + q \geq 2$ , então  $[\alpha, \beta] = (-1)^{pq}[\beta, \alpha]$ , para todo  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$  e  $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ .

*Demonstração.* Ver [22], página 412.  $\square$

**Proposição 5.6.** Se  $q > 1$ , então a transformação  $\rho_\alpha : \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ ,  $n = p + q - 1$ , definida por,  $\rho_\alpha(\beta) = [\alpha, \beta]$ , para todo  $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ , é um homomorfismo, para todo  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ .

*Demonstração.* Ver [22], página 412.  $\square$

### 5.3 O Teorema de Whitehead

Sejam  $X$  um espaço  $p$ -simples conexo por caminhos,  $x_0 \in X$  e  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$ ,  $p \geq 1$ . Como  $X$  é  $p$ -simples, segue da Proposição 4.27, que  $\tau_\alpha^{-1}(\{x_0\}) = F_\alpha^p(X, x_0)$ .

Seja  $a \in G_\alpha^p(X)$  tal que  $\tau_\alpha(a) = x_0$  e consideremos a sequência exata de homotopia da fibração  $\tau_\alpha : G_\alpha^p(X) \rightarrow X$  (fibrção avaliação restrita a  $G_\alpha^p(X)$ ).

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \pi_{q+1}(X, x_0) \xrightarrow{d} \pi_q(F_\alpha^p(X, x_0), a) \xrightarrow{i_*} \pi_q(G_\alpha^p(X), a) \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \pi_q(X, x_0) \xrightarrow{d} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \pi_2(X, x_0) \xrightarrow{d} \pi_1(F_\alpha^p(X, x_0), a) \xrightarrow{i_*} \pi_1(G_\alpha^p(X), a)$$

onde  $\overline{\tau_{\alpha*}} = \tau_{\alpha*} \circ j_*$  e  $d = \partial \circ \tau_{\alpha*}^{-1}$ , sendo  $\partial : \pi_q(G_\alpha^p(X), F_\alpha^p(X, x_0), a) \rightarrow \pi_{q-1}(F_\alpha^p(X, x_0), a)$ , definida por  $\partial([f]) = [f|S^{n-1}]$ , para todo  $[f] \in \pi_q(G_\alpha^p(X), F_\alpha^p(X, x_0), a)$ ,  $q > 1$  e  $j_*$  a induzida da inclusão  $j : (G_\alpha^p(X), a, a) \rightarrow (G_\alpha^p(X), F_\alpha^p(X, x_0), a)$  (Veja seções 4.6 e 4.7).

Consideremos também o homomorfismo da Proposição 5.6,  $\rho_\alpha : \pi_q(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ ,  $n = p + q - 1$ , definido por  $\rho_\alpha(\beta) = [\alpha, \beta]$ , para todo  $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ ,  $q > 1$ .

Para simplicidade de escrita, denotemos  $G_\alpha^p(X)$  por  $G_\alpha^p$  e  $F_\alpha^p(X, x_0)$  por  $F_\alpha^p$ .

Nas hipóteses acima, temos um famoso teorema, conhecido como **Teorema de Whitehead**, como segue

**Teorema 5.7.** *Para todo  $q > 1$ , o diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(G_\alpha^p, F_\alpha^p, a) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{q-1}(F_\alpha^p, a) \\ \tau_{\alpha*} \downarrow & & \downarrow I_\alpha \\ \pi_q(X, x_0) & \xrightarrow{-\rho_\alpha} & \pi_n(X, x_0) \end{array}$$

onde  $I_\alpha : \pi_{q-1}(F_\alpha^p, a) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ , é o isomorfismo de Hurewicz, introduzido na seção 6.1. Em outras palavras, para todo  $q > 1$ , temos  $I_\alpha \circ \partial = -\rho_\alpha \circ \tau_{\alpha*}$ .

*Demonstração.* Seja  $\varphi \in \pi_{q-1}(F_\alpha^p, a)$  e  $f : S^{q-1} \rightarrow F_\alpha^p$ , tal que  $f(z_0) = a$ , seu representante. Definimos, como na seção 6.7,  $\bar{f} : D^p \times S^{q-1} \rightarrow X$  por  $\bar{f}(y, z) = [f(z)](y)$ , para todo  $(y, z) \in D^p \times S^{q-1}$ , e consequentemente, também definimos a aplicação  $g : S^n \rightarrow X$ , lembrando que  $S^n = (D^p \times S^{q-1}) \cup (S^{p-1} \times D^q)$ , por

$$g(y, z) = \begin{cases} \bar{f}(y, z), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

**Lema 5.8.** *A aplicação  $g : S^n \rightarrow X$  representa  $I_\alpha(\varphi)$  em  $\pi_n(X, x_0)$ , isto é,  $I_\alpha(\varphi) = (I_0 \circ H_\alpha)([f]) = [g]$ .*

*Demonstração.* Lembremos que o isomorfismo  $H_\alpha : \pi_{q-1}(F_\alpha^p, a) \rightarrow \pi_{q-1}(F_0^p, a_0)$ , é o isomorfismo induzido pela equivalência de homotopia  $\psi : F_\alpha^p \rightarrow F_0^p$ , definida por  $\psi(h) = h + (-a)$ , para todo  $h \in F_\alpha^p$ , isto é,  $H_\alpha = \psi_*$ .

Sem perda de generalidade, vamos supor que  $f$  e  $a$  sejam concentrações em  $D_1^p$  e  $D_2^p$  respectivamente. Logo,  $I_\alpha(\varphi) = I_\alpha([f]) = (I_0 \circ H_\alpha)([f]) = I_0(H_\alpha([f])) = I_0([\psi \circ f]) = [I_0(\psi \circ f)]$ , e  $I_0(\psi \circ f)$  é dada por

$$\begin{aligned} [I_0(\psi \circ f)](y, z) &= \begin{cases} [(\psi \circ f)(z)](y) = [f(z) + (-a)](y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases} \\ &= \begin{cases} [f(z)](y), & \text{se } (y, z) \in D_1^p \times S^{q-1} \\ -a(y), & \text{se } (y, z) \in D_2^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases} \end{aligned}$$

Seja  $\beta \in \pi_n(X, x_0)$  representado pela aplicação  $[a, e_{x_0}]$ , que é dada por

$$\begin{aligned} [a, e_{x_0}](y, z) &= \begin{cases} a(y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ e_{x_0}(z) = x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases} \\ &= \begin{cases} x_0, & \text{se } (y, z) \in D_1^p \times S^{q-1} \\ a(y), & \text{se } (y, z) \in D_2^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases} \end{aligned}$$

uma vez que,  $a(D_1^p) = x_0$ , pois é uma concentração em  $D_2^p$ .

Agora,  $S^n = K_1^n \cup K_2^n$ , onde  $K_1^n = (D_1^p \times S^{q-1}) \cup (S_1^{p-1} \times D^q)$  e  $K_2^n = (D_2^p \times S^{q-1}) \cup (S_2^{p-1} \times D^q)$  são  $n$ -células dadas pelos pontos de  $S^n$  onde a  $p$ -ésima coordenada é  $\geq 0$  e  $\leq 0$  respectivamente. A aplicação  $-[a, e_{x_0}]$  é um concentração em  $K_2^n$ .

Definimos uma concentração  $j : S^n \rightarrow X$  em  $K_1^n$ , por

$$j(y, z) = \begin{cases} [f(z)](y), & \text{se } (y, z) \in D_1^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in D_2^p \times S^{q-1} \\ x_0, & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

Como  $-[a, e_{x_0}]$  é um concentração em  $K_2^n$  e  $j$  é um concentração em  $K_1^n$ , segue que a aplicação  $l : S^n \rightarrow X$ , definida por  $l|K_1^n = j$  e  $l|K_2^n = -[a, e_{x_0}]$  representa  $[j] + [-[a, e_{x_0}]]$  em  $\pi_n(X, x_0)$ , mas a aplicação  $l$  nada mais é que a aplicação  $I_0(\psi \circ f)$ , logo  $[I_0(\psi \circ f)] = [j] + [-[a, e_{x_0}]]$ . Pela Proposição 5.6, segue que  $[-[a, e_{x_0}]] = -\rho_\alpha(0) = 0$ , e portanto  $I_\alpha(\varphi) = [I_0(\psi \circ f)] = [j]$ . Agora, observe que  $j = g$ , pois tomamos  $f$  como sendo uma concentração em  $D_1$ , logo  $I_\alpha(\varphi) = [g]$ . Como queríamos demonstrar.  $\square$

Voltemos agora para a demonstração do teorema.

Vamos supor que  $a$ , o ponto base de  $F_\alpha^p$ , é tal que  $a(y) = x_0$ , para todo  $y \in D^p$  tal que  $\|y\| \geq \frac{1}{2}$ , pois, se  $a$  não satisfaz essa condição, tomamos como ponto base de  $F_\alpha^p$  a aplicação  $\tilde{a} : D^p \rightarrow X$ , definida por

$$\tilde{a}(y) = \begin{cases} a(2y), & \text{se } \|y\| \leq \frac{1}{2} \\ x_0, & \text{se } \|y\| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Definimos a aplicação  $a_0 : D^p \rightarrow X$ , por  $a_0(y) = a(\frac{1}{2}y)$ . Note que  $a_0$  também está em  $F_\alpha^p$ .

Sejam  $v \in \pi_q(G_\alpha^p, F_\alpha^p, a)$  um elemento arbitrário e  $b : D^q \rightarrow X$ ,  $b(S^{q-1}) = x_0$ , um representante para  $\beta = \tau_{\alpha*}(v)$ . Vamos supor que  $b$  aplica o segmento  $\overline{0z_0}$  em  $x_0$ , pois caso contrário, basta tomar uma concentração de  $b$  em  $D_1^q$ .

Então,  $\rho_\alpha(\beta) = [\alpha, \beta]$ , é representado pela aplicação

$$[a_0, b](y, z) = \begin{cases} a_0(y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ b(z), & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

Definimos uma aplicação  $\zeta : S^n \rightarrow S^n$  por

$$\zeta(y, z) = \begin{cases} (2y, z), & \text{se } (\|y\| \leq \frac{1}{2}, \|z\| = 1) \\ (\frac{y}{\|y\|}, [2 - 2\|y\|]z), & \text{se } (\|y\| \geq \frac{1}{2}, \|z\| = 1) \\ (y, 0), & \text{se } (\|y\| = 1, \|z\| \leq 1). \end{cases}$$

Como  $\zeta(y, z) \neq (y, z)$ , para todo  $(y, z) \in S^n$ , segue a aplicação  $H : S^n \times I \rightarrow S^n$  definida por

$$H((y, z), t) = \frac{t(y, z) + (1-t)\zeta(y, z)}{\|t(y, z) + (1-t)\zeta(y, z)\|},$$

para todo  $(y, z) \in S^n$  e  $t \in I$ , define uma homotopia entre  $\zeta$  e  $id_{S^n}$  (aplicação identidade de  $S^n$ ).

Note que nos pontos do segmento  $\{y_0\} \times \overline{0z_0}$ , temos  $\zeta(\{y_0\} \times \overline{0z_0}) = (y_0, 0)$ , pois  $\|y_0\| = 1$ . Isso implica,  $H(w_0, t) = \frac{t(y_0, z_0) + (1-t)(y_0, 0)}{\|t(y_0, z_0) + (1-t)(y_0, 0)\|}$ , para todo  $t \in I$ . Logo,  $H$  move  $w_0$  ao longo do segmento  $y_0 \times \overline{0z_0}$ . Consequentemente, a aplicação  $L : S^n \times I \rightarrow X$ , definida por  $L(w, t) = [a_0, b](H(w, t))$ , para todo  $w \in S^n$  e  $t \in I$ , define uma homotopia entre  $[a_0, b] \circ \zeta$  e  $[a_0, b]$ , satisfazendo  $L(\{w_0\} \times I) = [a_0, b](H(\{w_0\} \times I)) = [a_0, b](\{y_0\} \times \overline{0z_0}) = b(\overline{0z_0}) = x_0$ . Logo,  $[a_0, b] \circ \zeta$  representa  $[\alpha, \beta]$ .

Definimos uma aplicação  $g : S^{q-1} \rightarrow F_\alpha^p$ , por  $[g(z)](y) = ([a_0, b] \circ \zeta)(y, z)$ , para todo  $z \in S^{q-1}$  e  $y \in D^p$ . Note que,  $([a_0, b] \circ \zeta)(S^{p-1} \times D^q) = x_0$ . Logo, pelo lema acima,  $I_\alpha(g) = [[a_0, b] \circ \zeta] = [\alpha, \beta]$  e portanto  $g$  representa  $I_\alpha^{-1}([\alpha, \beta])$ .

Todo ponto de  $D^q$  pode ser expresso por  $(1-t)z$ , para algum  $z \in S^{q-1}$  e algum  $t \in I$ . Assim, estendemos a aplicação  $\bar{g} = ([a_0, b] \circ \zeta)|(S^{p-1} \times D^q)$ , para uma aplicação  $h : D^p \times D^q \rightarrow X$ , definida por

$$h(y, (1-t)z) = \begin{cases} a_0(2y), & \text{se } (\|y\| \leq \frac{1}{2}, \|z\| = 1, 0 \leq t \leq 1) \\ x_0, & \text{se } (\frac{1}{2} \leq \|y\| \leq \frac{1+t}{2}, \|z\| = 1) \\ b([2 - 2\|y\| + t]z), & \text{se } (\frac{1+t}{2} \leq \|y\| \leq 1, \|z\| = 1). \end{cases}$$

Então,  $h(S^{p-1}, (1-t)z) \stackrel{\|y\|=1}{=} b(tz)$ . Logo  $h$  define uma aplicação  $h^* : D^q \rightarrow G_\alpha^p$ , por  $[h^*((1-t)z)](y) = h(y, (1-t)z)$ , para todo  $z \in S^{q-1}$ ,  $t \in I$ , e  $y \in D^p$ . Observe que, fazendo  $t = 0$ , temos

$$[h^*(z)](y) = h(y, z) = \begin{cases} a_0(2y), & \text{se } \|y\| \leq \frac{1}{2} \\ b((2 - 2\|y\|)z), & \text{se } \frac{1}{2} \leq \|y\| \leq 1, \end{cases}$$

para todo  $z \in S^{q-1}$  e  $y \in D^p$ , assim  $[h^*(z)](S^{p-1}) \stackrel{\|y\|=1}{=} b(0) = x_0$ , para todo  $z \in S^{q-1}$ . Portanto  $h^*(S^{q-1}) \subset F_\alpha^p$ .

Observemos também que  $[h^*(z_0)](y) = a(y)$ , para todo  $y \in D^p$ , pois  $a_0(2y) = a(y)$ , para  $\|y\| \leq \frac{1}{2}$ , e o conjunto dos pontos  $(2 - 2\|y\|)z_0$ , com  $\frac{1}{2} \leq \|y\| \leq 1$ , é o segmento  $\overline{0z_0}$  e  $b(\overline{0z_0}) = x_0$ .

Concluimos então, que  $h^* : D^q \rightarrow G_\alpha^p$  é tal que  $h^*(S^{q-1}) \subset F_\alpha^p$  e  $h^*(z_0) = a$ . Portanto  $h^*$  representa um elemento de  $\pi_q(G_\alpha^p, F_\alpha^p, a)$ . Além disso,  $(\tau_\alpha \circ h^*)((1-t)z) = \tau_\alpha(h^*((1-t)z)) = [h^*((1-t)z)](S^{p-1}) \stackrel{\|y\|=1}{=} b(tz)$ , e portanto  $\tau_{\alpha*}([h^*]) = [\tau_\alpha \circ h^*] = -[b] = -\beta$ . Como  $\tau_{\alpha*}$  é um isomorfismo e  $\tau_{\alpha*}(v) = \beta$ , segue que  $[h^*] = -v$ .

Note  $h^*|_{S^{q-1}} = g$ . Logo,  $\partial(-v) = [h^*|_{S^{q-1}}] = [g] = I_\alpha^{-1}([\alpha, \beta]) = I_\alpha^{-1}([\alpha, \tau_{\alpha*}(v)]) = I_\alpha^{-1}(\rho_\alpha(\tau_{\alpha*}(v))) = (I_\alpha^{-1} \circ \rho_\alpha \circ \tau_{\alpha*})(v)$ . Isso implica,  $(I_\alpha \circ \partial)(v) = -(\rho_\alpha \circ \tau_{\alpha*})(v)$ . Como  $v$  é arbitrário, segue que  $I_\alpha \circ \partial = -\rho_\alpha \circ \tau_{\alpha*}$ .  $\square$

Seja  $X$  é um espaço p-simples,  $p \geq 1$ ,  $x_0 \in X$  e  $a \in G_\alpha^p(X, x_0)$  tal que  $\tau_\alpha(a) = x_0$ , é fácil ver que uma nova versão do teorema acima pode ser dada, como segue:

**Teorema 5.9.** Para todo  $q \geq 1$ , temos a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} & \pi_{q+1}(X, x_0) & \xrightarrow{d} & \pi_q(F_{\alpha}^p(X, x_0), a) & \xrightarrow{i_*} & \pi_q(G_{\alpha}^p(X), a) \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \dots \\
 & & \searrow -\rho_{\alpha} & & \downarrow I_{\alpha} & & \\
 & & & & \pi_{p+q}(X, x_0) & & 
 \end{array}$$

onde  $d = \partial \circ \tau_{\alpha*}^{-1}$  é o operador bordo da sequência exata longa de homotopia da fibração  $\tau_{\alpha}$ , e  $\rho_{\alpha}$  é o produto de Whitehead com  $\alpha$ , isto é,  $\rho_{\alpha}(\beta) = [\alpha, \beta]$ , para todo  $\beta \in \pi_{q+1}(X, x_0)$ .

**Definição 5.10.** Dizemos que uma fibração  $p : E \rightarrow B$  possui uma seção, se existe uma aplicação  $\lambda : B \rightarrow E$  tal que  $p \circ \lambda$  é a aplicação identidade de  $B$ . Neste caso,  $\lambda$  é chamada de **seção da fibração**  $p$ .

**Definição 5.11.** Dois espaços fibrados  $E_1$  e  $E_2$  sobre o mesmo espaço base  $B$  conexo por caminhos, com projeções  $p_i : E_i \rightarrow B$ ,  $i = 1, 2$ , são ditos **espaços fibrados equivalentes** sobre  $B$ , se existem aplicações  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ ,  $\psi : E_2 \rightarrow E_1$ , satisfazendo:

1.  $\varphi \circ \psi$  e  $\psi \circ \varphi$  são homotópicas às aplicações identidades de  $E_2$  e  $E_1$ , respectivamente.
2.  $p_2 \circ \varphi$  é homotópica a  $p_1$  e  $p_1 \circ \psi$  é homotópica a  $p_2$ .

Já mostramos que as componentes de  $F^p(X, x_0)$  sempre têm o mesmo tipo de homotopia. Por outro lado, as componentes de  $G^p(X)$  nem sempre têm o mesmo tipo de homotopia. Para um contra-exemplo ver o Apêndice de [20]. Se, contudo, ainda nas hipóteses do início da seção, existir uma seção  $\lambda_{\alpha} : X \rightarrow G_{\alpha}^p(X)$  da fibração  $\tau_{\alpha}$ , isto é, se existir uma aplicação  $\lambda_{\alpha} : X \rightarrow G_{\alpha}^p(X)$  tal que  $\tau_{\alpha} \circ \lambda_{\alpha}$  é a aplicação identidade de  $X$ , então uma construção similar a feita no Teorema 5.1, com  $\varphi(f) = f + \lambda[\tau_0(f)]$  e  $\psi(g) = g + (-\lambda[\tau_{\alpha}(g)])$ , para todo  $f \in G_0^p(X)$  e  $g \in G_{\alpha}^p(X)$ , mostra que  $G_0^p(X)$  e  $G_{\alpha}^p(X)$  possuem o mesmo tipo de homotopia. De fato, vale uma condição ainda mais forte,  $G_0^p(X)$  e  $G_{\alpha}^p(X)$  são espaços fibrados equivalentes sobre  $X$ .

**Proposição 5.12.** Se a fibração avaliação  $\tau_{\alpha} : G_{\alpha}^p(X) \rightarrow X$  possui uma seção  $\lambda_{\alpha} : X \rightarrow G_{\alpha}^p(X)$ , então  $G_0^p(X)$  e  $G_{\alpha}^p(X)$  são espaços fibrados equivalentes sobre  $X$  com projeções  $\tau_0$  e  $\tau_{\alpha}$  respectivamente.

*Demonstração.* Basta definir, como já observado acima,  $\varphi : G_0^p \rightarrow G_{\alpha}^p$  e  $\psi : G_{\alpha}^p \rightarrow G_0^p$  por,  $\varphi(f) = f + \lambda_{\alpha}[\tau_0(f)]$  e  $\psi(g) = g + (-\lambda_{\alpha}[\tau_{\alpha}(g)])$ , para todo  $f \in G_0^p$  e  $g \in G_{\alpha}^p$ . Observemos que a soma na definição de  $\varphi$  está bem definida, pois, para todo  $f \in G_0^p$ ,  $f$  e  $\lambda_{\alpha}[\tau_0(f)]$  aplicam  $\partial I^p$  no mesmo ponto, uma vez que  $f(\partial I^p) = \tau_0(f)$  e  $(\lambda_{\alpha}[\tau_0(f)])(\partial I^p) = \tau_{\alpha}(\lambda_{\alpha}(\tau_0(f))) \stackrel{\tau_{\alpha} \circ \lambda_{\alpha} = id_X}{=} \tau_0(f)$ . Analogamente, a soma na definição de  $\psi$  também está bem definida.

Agora,  $(\varphi \circ \psi)(g) = \varphi(g + (-\lambda_\alpha[\tau_\alpha(g)])) = g + (-\lambda_\alpha[\tau_\alpha(g)]) + \lambda_\alpha[\tau_0(g + (-\lambda_\alpha[\tau_\alpha(g)]))] = g + (-\lambda_\alpha[\tau_\alpha(g)]) + \lambda_\alpha[\tau_\alpha(g)]$ , para todo  $g \in G_\alpha^p$ , pois,  $\tau_0(g + (-\lambda_\alpha[\tau_\alpha(g)])) = \tau_\alpha(g)$ . De modo análogo, chegamos que  $(\psi \circ \varphi)(f) = f + \lambda_\alpha[\tau_0(f)] + (-\lambda_\alpha[\tau_0(f)])$ , para todo  $f \in G_0^p$ . Logo, usando a mesma técnica do Teorema 5.1, conclui-se que  $\varphi \circ \psi$  é homotópica a aplicação identidade  $G_\alpha^p$  e  $\psi \circ \varphi$  é homotópica a aplicação identidade  $G_0^p$ . Por fim,  $(\tau_\alpha \circ \varphi)(f) = \tau_\alpha(f + \lambda_\alpha[\tau_0(f)]) = \tau_0(f)$ , para todo  $f \in G_0^p$ , isto é,  $\tau_\alpha \circ \varphi = \tau_0$ , e portanto  $\tau_\alpha \circ \varphi$  é homotópica a  $\tau_0$ . De modo similar,  $\tau_0 \circ \psi = \tau_\alpha$ , e portanto  $\tau_0 \circ \psi$  é homotópica a  $\tau_\alpha$ .  $\square$

A recíproca da proposição acima é verdadeira, ver [20], página 464.

## 5.4 Definição alternativa para o produto de Whitehead

Para futuras aplicações será de grande conveniência definir o produto de Whitehead de dois elementos  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$  e  $\beta \in \pi_q(X, x_0)$  vistos como classes de aplicações que saem de  $S^p$  e  $S^q$ , respectivamente.

Essa definição é feita de modo natural e equivalente com tudo que foi feito até aqui. Sejam  $f : S^p \rightarrow X$  e  $g : S^q \rightarrow X$ , com  $f(y_0) = g(z_0) = x_0$ , representantes de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Consideremos duas aplicações  $\phi_p : (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (S^p, y_0)$  e  $\phi_q : (D^q, S^{q-1}) \rightarrow (S^q, z_0)$ , definidas no Capítulo 4, ambas preservando orientação, isto é, ambas de grau 1. Lembremos que essas aplicações são aplicações colagens, isto é,  $\phi_p$  e  $\phi_q$  aplicam homeomorficamente  $D^p - S^{p-1}$  e  $D^q - S^{q-1}$  sobre  $S^p - \{y_0\}$  e  $S^q - \{z_0\}$ , respectivamente. Definimos  $\phi_{p,q} : D^p \times D^q \rightarrow S^p \times S^q$ , por

$$\phi_{p,q}(y, z) = (\phi_p(y), \phi_q(z)),$$

para todo  $(y, z) \in D^p \times D^q$ .

De modo natural, definimos o produto de Whitehead entre  $\alpha$  e  $\beta$ , como sendo a classe representada pela aplicação  $[f \circ \phi_p, g \circ \phi_q]$ , onde

$$[f \circ \phi_p, g \circ \phi_q](y, z) = \begin{cases} (f \circ \phi_p)(y), & \text{se } (y, z) \in D^p \times S^{q-1} \\ (g \circ \phi_q)(z), & \text{se } (y, z) \in S^{p-1} \times D^q. \end{cases}$$

Também denotaremos o produto de Whitehead entre  $\alpha$  e  $\beta$  visto como classes de aplicações que partem de  $S^p$  e  $S^q$ , por  $[\alpha, \beta]$  em  $\pi_{p+q-1}(X, x_0)$ . Nada mais natural, já que este produto, do modo que foi definido, independe da escolha de  $\phi_p$  e  $\phi_q$ , e preserva todos resultados feitos até agora.

Vamos denotar por  $S^p \vee S^q$  o subespaço  $(S^p \times \{z_0\}) \cup (\{y_0\} \times S^q)$  de  $S^p \times S^q$ , esse espaço muitas vezes é chamado de wedge de  $S^p$  e  $S^q$  pelos pontos bases  $y_0$  e  $z_0$ . Denotemos por  $\overline{\phi_{p,q}}$  a aplicação restrição de  $\phi_{p,q}$  ao  $\partial(D^p \times D^q) = (D^p \times S^{q-1}) \cup (S^{p-1} \times D^q) = S^n$ , onde  $n = p + q - 1$ . Da teoria de CW-complexos, segue que  $\overline{\phi_{p,q}}$  é uma

aplicação colagem de uma  $n$ -célula em  $S^p \vee S^q$ , e a obtenção dessa colagem é o espaço  $S^p \times S^q$ .

Observe que,  $[f \circ \phi_p, g \circ \phi_q]$  nada mais é que a aplicação  $(f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}}$ , onde  $f \vee g : S^p \vee S^q \rightarrow X$  é definida por

$$(f \vee g)(y, z) = \begin{cases} f(y), & \text{se } (y, z) \in S^p \times \{z_0\} \\ g(z), & \text{se } (y, z) \in \{y_0\} \times S^q. \end{cases}$$

O diagrama comutativo seguinte será de grande utilidade para fixar as ideias iniciais e futuras.

$$\begin{array}{ccc} \partial(D^p \times D^q) & \xrightarrow{\overline{\phi_{p,q}}} & S^p \vee S^q \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ D^p \times D^q & \xrightarrow{\phi_{p,q}} & S^p \times S^q \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow f \vee g \\ \searrow \\ X \end{array}$$

onde  $i$  é a aplicação inclusão dos respectivos espaços.

Apresentemos agora um lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [7], página 37.

**Lema 5.13.** *Seja  $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$  uma aplicação, então  $[f] = 0$  em  $\pi_n(X, x_0)$  se, e somente se,  $f$  tem uma extensão contínua  $f' : D^{n+1} \rightarrow X$ .*

**Definição 5.14.** *Sejam  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$  e  $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ . Uma aplicação  $h : S^p \times S^q \rightarrow X$  é dita ter **tipo**  $(\alpha, \beta)$ , se  $h|(S^p \times \{z_0\})$  vista como aplicação de  $S^p$  representa  $\alpha$  e  $h|(\{y_0\} \times S^q)$  vista como aplicação de  $S^q$  representa  $\beta$ .*

**Teorema 5.15.** *Sejam  $\alpha \in \pi_p(X, x_0)$  e  $\beta \in \pi_q(X, x_0)$ . Então, existe uma aplicação  $h : S^p \times S^q \rightarrow X$  do tipo  $(\alpha, \beta)$  se, e somente se,  $[\alpha, \beta] = 0$  em  $\pi_n(X, x_0)$ ,  $n = p + q - 1$ .*

*Demonstração.* Vamos supor que existe uma aplicação  $h$  do tipo  $(\alpha, \beta)$ . Denotemos por  $f$  a aplicação  $h|(S^p \times \{z_0\})$  vista como aplicação de  $S^p$  e por  $g$  a aplicação  $h|(\{y_0\} \times S^q)$  vista como aplicação de  $S^q$ , logo  $[f] = \alpha$  e  $[g] = \beta$ . Como claramente  $h$  estende  $h|(S^p \vee S^q) = f \vee g$ , então  $h \circ \phi_{p,q}$  estende  $(f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}}$ . Logo, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \partial(D^p \times D^q) & \xrightarrow{\overline{\phi_{p,q}}} & S^p \vee S^q \\ \downarrow i & & \downarrow i \\ D^p \times D^q & \xrightarrow{\phi_{p,q}} & S^p \times S^q \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow f \vee g \\ \searrow h \\ X \end{array}$$

$\searrow h \circ \phi_{p,q}$

Como  $h|(S^p \vee S^q) = f \vee g$ , então  $h \circ \phi_{p,q}$  estende  $(f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}}$ , e segue do lema anterior que  $[(f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}}] = 0$  em  $\pi_n(X, x_0)$ . Portanto,  $[\alpha, \beta] = 0$ .

Para a implicação contrária, sejam  $f : (S^p, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  e  $g : (S^q, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ , representantes para  $\alpha$  e  $\beta$  respectivamente. Por hipótese, temos  $[\alpha, \beta] = 0$  em  $\pi_n(X, x_0)$ , ou seja,  $[(f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}}] = 0$  em  $\pi_n(X, x_0)$ . Novamente pelo lema anterior, segue que existe uma aplicação  $H : D^p \times D^q \rightarrow X$  que estende  $(f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}}$ . Definimos  $h : S^p \times S^q \rightarrow X$  por,  $h(x, y) = H(\phi_{p,q}^{-1}(x, y))$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \partial(D^p \times D^q) & \xrightarrow{\overline{\phi_{p,q}}} & S^p \vee S^q \\
 \downarrow i & & \downarrow i \\
 D^p \times D^q & \xrightarrow{\phi_{p,q}} & S^p \times S^q
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \searrow f \vee g \\
 \searrow h \\
 \searrow H
 \end{array}
 \rightarrow X$$

Como  $\phi_p$  e  $\phi_q$  aplicam homeomorficamente  $(D^p - S^{p-1})$  e  $(D^q - S^{q-1})$  sobre  $S^p - \{y_0\}$  e  $S^q - \{z_0\}$ , respectivamente, seque que os únicos pontos que poderiam dar problema na definição de  $h$  são os pontos cuja segunda coordenada é  $z_0$  ou a primeira coordenada é  $y_0$ , ou seja, os pontos de  $S^p \vee S^q = (S^p \times \{z_0\}) \cup (\{y_0\} \times S^q)$ . Mas, o fato de  $H$  estender  $(f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}}$ , implica que  $h(y, z_0) = H(\phi_{p,q}^{-1}(y, z_0)) = ((f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}})(\phi_{p,q}^{-1}(y, z_0)) = (f \vee g)(y, z_0) = f(y)$ , para todo  $(y, z_0) \in S^p \times \{z_0\}$  e  $h(y_0, z) = H(\phi_{p,q}^{-1}(y_0, z)) = ((f \vee g) \circ \overline{\phi_{p,q}})(\phi_{p,q}^{-1}(y_0, z)) = (f \vee g)(y_0, z) = g(z)$ , para todo  $(y_0, z) \in \{y_0\} \times S^q$ , logo  $h(y, z)$  independe da escola do ponto em  $\phi^{-1}(y, z)$ , para todo  $(y, z) \in S^p \vee S^q$ . Além do mais,  $h|(S^p \times \{z_0\})$  vista como aplicação de  $S^p$  é  $f$  e  $h|(\{y_0\} \times S^q)$  vista como aplicação de  $S^q$  é  $g$ . Portanto  $h$  tem tipo  $(\alpha, \beta)$ .  $\square$



## 6 Tipos de homotopia das componentes conexas por caminho do espaço das funções contínuas de $S^{n+k}$ em $S^n$ , onde $n \geq 1$ e $k = 0, 1$

Neste capítulo, o espaço  $X$  em questão, será sempre a  $n$ -esfera unitária  $S^n$ ,  $n \geq 1$ , e para melhor entendimento, iremos usar a notação  $G(S^m, S^n)$  para denotar o espaço das aplicações contínuas de  $S^m$  em  $S^n$ , que inicialmente foi denotado por  $\tilde{G}^m(S^n)$  e muitas vezes por  $G^m(S^n)$ . Também, usaremos a notação  $F(S^m, S^n)$  para denotar o espaço das aplicações contínuas de  $S^m$  em  $S^n$ , que leva o ponto base  $s_0 \in S^m$  no ponto base  $s_0 \in S^n$ , que inicialmente foi denotado por  $\tilde{F}^m(S^n, s_0)$  e muitas vezes por  $F^m(S^n, s_0)$ .

Lembremos que, pela Observação 4.22, a  $n$ -esfera  $S^n$  é  $m$ -simples, para todo  $n \geq 1$  e  $m \geq 1$ .

Este é o capítulo principal de nosso trabalho e faz jus ao título desta dissertação, pois apresentaremos aqui a classificação por tipo de homotopia das componentes conexas por caminho do espaço das funções contínuas de  $S^{n+k}$  em  $S^n$ , onde  $n \geq 1$  e  $k = 0, 1$ . Como já mencionado na introdução a principal referência para este trabalho é [4].

### 6.1 A importância de uma seção para a fibração avaliação $\tau_\alpha$

A fibração avaliação,  $\tau_0 : G_0(S^m, S^n) \rightarrow S^n$ , definida pelo elemento neutro  $0 \in \pi_m(S^n)$ , é chamada de **fibração avaliação neutral**. Ela tem uma seção canônica,  $\lambda_0 : S^n \rightarrow G_0(S^m, S^n)$ , definida por,  $[\lambda_0(x)](y) = x$ , para todo  $x \in S^n$  e  $y \in S^m$ . A existência de uma seção é uma propriedade muito especial para uma fibração avaliação.

Vamos denotar por  $i_n$  a classe da aplicação identidade de  $S^n$ ,  $id_{S^n}$ , em  $\pi_n(S^n)$ . É de grande conhecimento, que  $\pi_n(S^n, s_0)$  é isomorfo a  $\mathbb{Z}$  e  $i_n$  é um gerador de  $\pi_n(S^n, s_0)$ , mais precisamente, a transformação  $deg : \pi_n(S^n, s_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ , definida por  $deg([f]) = grau(f)$ , para todo  $[f] \in \pi_n(S^n, s_0)$ , é um isomorfismo e  $deg(i_n) = grau(id_{S^n}) = 1$ .

**Lema 6.1.** A fibração avaliação  $\tau_\alpha : G_\alpha(S^m, S^n) \rightarrow S^n$  definida por  $\alpha \in \pi_m(S^n, s_0)$  tem uma seção se, e somente se,  $[\alpha, i_n] = 0$ .

*Demonstração.* Seja  $\lambda_\alpha : S^n \rightarrow G_\alpha(S^m, S^n)$  uma seção de  $\tau_\alpha$ . Logo,  $\tau_\alpha \circ \lambda_\alpha = id_{S^n}$ . Agora,  $\tau_\alpha(\lambda_\alpha(s_0)) = s_0$  e  $S^n$  é m-simples, pelo Teorema 4.24, segue que  $[\lambda_\alpha(s_0)] = \alpha$ . Defina  $\overline{\lambda}_\alpha : S^m \times S^n \rightarrow S^n$ , por  $\overline{\lambda}_\alpha(x, y) = [\lambda_\alpha(y)](x)$ , para todo  $(x, y) \in S^m \times S^n$ , então  $\overline{\lambda}_\alpha(s_0, y) = [\lambda_\alpha(y)](s_0) = (\tau_\alpha \circ \lambda_\alpha)(y) = id_{S^n}(y)$ , para todo  $(s_0, y) \in \{s_0\} \times S^n$  e  $\overline{\lambda}_\alpha(x, s_0) = [\lambda_\alpha(s_0)](x)$ , para todo  $(x, s_0) \in S^m \times \{s_0\}$  e portanto, de acordo com a Definição 5.14,  $\overline{\lambda}_\alpha$  tem tipo  $(\alpha, i_n)$ . Pelo Teorema 5.15, segue que  $[\alpha, i_n] = 0$ .

Para a implicação contrária, seja  $f : (S^m, s_0) \rightarrow (S^n, s_0)$  um representante para  $\alpha$ . Pelo Teorema 5.15, segue que existe uma aplicação  $h : S^m \times S^n \rightarrow S^n$  do tipo  $(\alpha, i_n)$  que estende  $f \vee id_{S^n}$ . Definimos,  $\lambda_\alpha : S^n \rightarrow G_\alpha(S^m, S^n)$ , por  $[\lambda_\alpha(y)](x) = h(x, y)$ , para todo  $(x, y) \in S^m \times S^n$ . Como  $\lambda_\alpha(s_0) = f \in G_\alpha(S^m, S^n)$ ,  $\lambda_\alpha$  é contínua e  $S^m$  é conexo por caminhos, segue que  $\lambda_\alpha(S^m) \subset G_\alpha(S^m, S^n)$ . Agora,  $(\tau_\alpha \circ \lambda_\alpha)(y) = [\lambda_\alpha(y)](s_0) = h(s_0, y) = (f \vee id_{S^n})(s_0, y) = id_{S^n}(y)$ , para todo  $y \in S^n$ . Portanto,  $\lambda_\alpha$  é uma seção de  $\tau_\alpha$ .  $\square$

**Teorema 6.2.** Sejam  $\alpha, \beta \in \pi_m(S^n, s_0)$ . Se  $[\alpha, i_n] = \pm[\beta, i_n]$ , então  $G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $G_\beta(S^m, S^n)$  são espaços fibrados equivalentes sobre  $X$ , com projeções  $\tau_\alpha$  e  $\tau_\beta$  respectivamente.

*Demonstração.* Se  $[\alpha, i_n] = -[\beta, i_n]$ , então  $[\alpha + \beta, i_n] = 0$  e pelo lema anterior, segue que  $\tau_{\alpha+\beta}$  tem uma seção  $\lambda_{\alpha+\beta} : S^n \rightarrow G_{\alpha+\beta}(S^m, S^n)$ . Definimos  $\varphi : G_\alpha(S^m, S^n) \rightarrow G_\beta(S^m, S^n)$  e  $\psi : G_\beta(S^m, S^n) \rightarrow G_\alpha(S^m, S^n)$  por,  $\varphi(f) = (-f) + \lambda_{\alpha+\beta}(\tau_\alpha(f))$  e  $\psi(g) = (-g) + \lambda_{\alpha+\beta}(\tau_\beta(g))$ , para todo  $f \in G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $g \in G_\beta(S^m, S^n)$ . Aplicando de modo similar as técnicas usadas na Proposição 5.12, mostra-se que  $\varphi$  e  $\psi$  satisfazem as condições da Definição 5.11.

Se  $[\alpha, i_n] = [\beta, i_n]$ , então  $[\alpha - \beta, i_n] = 0$  e pelo lema anterior, segue que  $\tau_{\alpha-\beta}$  tem uma seção  $\lambda_{\alpha-\beta} : S^n \rightarrow G_{\alpha-\beta}(S^m, S^n)$ . Definimos  $\varphi : G_\alpha(S^m, S^n) \rightarrow G_\beta(S^m, S^n)$  e  $\psi : G_\beta(S^m, S^n) \rightarrow G_\alpha(S^m, S^n)$  por,  $\varphi(f) = f + [-\lambda_{\alpha-\beta}(\tau_\alpha(f))]$  e  $\psi(g) = g + \lambda_{\alpha-\beta}(\tau_\beta(g))$ , para todo  $f \in G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $g \in G_\beta(S^m, S^n)$ . Novamente, aplicando de modo similar as técnicas usadas na Proposição 5.12, mostra-se que  $\varphi$  e  $\psi$  satisfazem as condições da Definição 5.11.  $\square$

## 6.2 A ordem de $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$ para $n$ par e $\alpha \in \pi_n(S^n)$

Denotemos por  $G_\alpha = G_\alpha(S^n, S^n)$ . Dados  $H$  um grupo e  $h \in H$ , usaremos a notação  $|H|$  e  $|h|$  para denotar a ordem do grupo e do elemento, respectivamente. Como todos os espaços envolvidos são conexos por caminhos, a partir de agora omitiremos os pontos bases dos grupos de homotopia, para simplificação de escrita.

**Proposição 6.3.** *i. Os grupos  $\pi_i(S^n)$ ,  $i > n$  e  $n \geq 1$  ímpar, são grupos finitos.*

*ii. Os grupos  $\pi_i(S^n)$ ,  $i > n$  e  $n \geq 2$  par, são grupos finitos, com exceção de  $\pi_{2n-1}(S^n)$  que é um grupo isomorfo a soma direta de  $\mathbb{Z}$  com um grupo finito  $H$ , isto é,  $\pi_{2n-1}(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus H$ , com  $|H| < \infty$ .*

*Demonstração.* A demonstração desta proposição envolve técnicas muito apuradas; sua demonstração foge ao nosso interesse. O resultado pode ser encontrado em [17], páginas 494 e 498.  $\square$

**Teorema 6.4.** *Suponha que  $n \geq 2$  é par e seja  $\alpha \in \pi_n(S^n)$ . Então*

*i. Se  $\alpha = 0$ ,  $\pi_{n-1}(G_0)$  é um grupo infinito.*

*ii. Se  $\alpha \neq 0$ ,  $\pi_{n-1}(G_\alpha)$  é um grupo finito e sua ordem satisfaz*

$$|\pi_{n-1}(G_\alpha)| = |\deg(\alpha)| |\pi_{n-1}(G_{i_n})|.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 5.9, segue que a sequência abaixo é exata

$$\dots \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \pi_n(S^n) \xrightarrow{-\rho_\alpha} \pi_{2n-1}(S^n) \xrightarrow{i_* \circ I_\alpha^{-1}} \pi_{n-1}(G_\alpha) \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \pi_{n-1}(S^n) \cong \{0\} \longrightarrow \dots$$

Suponhamos  $\alpha = 0$ , logo  $\rho_\alpha = 0$  e consequentemente,  $\pi_{n-1}(G_0) \cong \pi_{2n-1}(S^n)$ . Pela proposição anterior, segue que  $\pi_{n-1}(G_0)$  é infinito.

Agora, vamos supor  $\alpha \neq 0$ . Sejam  $A_\alpha = \rho_\alpha(\pi_n(S^n))$  e  $A_{i_n} = \rho_{i_n}(\pi_n(S^n))$ . Observe-mos que  $\pi_n(S^n) = \langle i_n \rangle \cong \mathbb{Z}$  e  $-\rho_\alpha(i_n) = -[\alpha, i_n] = -[\deg(\alpha)i_n, i_n] = -\deg(\alpha)[i_n, i_n] = -\deg(\alpha)\rho_{i_n}(i_n)$ . Logo,  $A_\alpha = \langle \rho_\alpha(i_n) \rangle = -\deg(\alpha) \langle \rho_{i_n}(i_n) \rangle = -\deg(\alpha)A_{i_n}$  e  $A_\alpha$  é um subgrupo de  $A_{i_n}$ . Por um resultado delicado apresentado em [21], página 206, segue que  $\rho_{i_n}(i_n) = [i_n, i_n]$  tem ordem infinita. Portanto  $A_\alpha$  e  $A_{i_n}$  são ambos grupos de rank 1 em  $\pi_{2n-1}(S^n)$ , logo  $A_\alpha \cong \mathbb{Z}$  e  $A_{i_n} \cong \mathbb{Z}$  e  $\frac{A_{i_n}}{A_\alpha} = \frac{A_{i_n}}{-\deg(\alpha)A_{i_n}} \cong \mathbb{Z}_{|\deg(\alpha)|}$ .

Como a sequência acima é exata, para todo  $\alpha \in \pi_n(S^n)$ , segue que  $\pi_{n-1}(G_\alpha) \cong \frac{\pi_{2n-1}(S^n)}{A_\alpha}$  e  $\pi_{n-1}(G_{i_n}) \cong \frac{\pi_{2n-1}(S^n)}{A_{i_n}}$ . Novamente pela proposição anterior, temos que  $\pi_{2n-1}(S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus H$ , com  $|H| < \infty$ , logo  $\pi_{n-1}(G_\alpha)$  e  $\pi_{n-1}(G_{i_n})$  são grupos finitos.

Consideremos a sequência exata curta de grupos finitos

$$\{0\} \longrightarrow \frac{A_{i_n}}{A_\alpha} \xrightarrow{i} \frac{\pi_{2n-1}(S^n)}{A_\alpha} \xrightarrow{j} \frac{\pi_{2n-1}(S^n)}{A_{i_n}} \longrightarrow \{0\}$$

onde  $i$  é aplicação inclusão e  $j$  é definida por,  $j(\beta + A_\alpha) = \beta + A_{i_n}$ , para todo  $\beta + A_\alpha \in \frac{\pi_{2n-1}(S^n)}{A_\alpha}$ . Note que  $j$  está bem definida uma vez que  $A_\alpha \subset A_{i_n}$ . Agora, como  $\frac{A_{i_n}}{A_\alpha} \cong \mathbb{Z}_{|\deg(\alpha)|}$ ,  $\frac{\pi_{2n-1}(S^n)}{A_\alpha} \cong \pi_{n-1}(G_\alpha)$ ,  $\frac{\pi_{2n-1}(S^n)}{A_{i_n}} \cong \pi_{n-1}(G_{i_n})$  e a sequência é exata curta, segue que  $\frac{\pi_{n-1}(G_\alpha)}{\mathbb{Z}_{|\deg(\alpha)|}} \cong \pi_{n-1}(G_{i_n})$ , o que implica  $|\pi_{n-1}(G_\alpha)| = |\deg(\alpha)| |\pi_{n-1}(G_{i_n})|$ . Isto prova o teorema.  $\square$

Se mais informações detalhadas sobre os grupos de homotopia envolvidos e a aplicação  $\rho_\alpha$  são fornecidas na prova anterior, então pode-se facilmente calcular a estrutura exata de  $\pi_{n-1}(G_\alpha)$ . Isto foi feito primeiramente por Hu, para  $n = 2$ , ver [10], e mais tarde por Koh, para  $n = 4, 6, 8, 10, 12, 14$ , ver [12].

### 6.3 Uma condição necessária e suficiente para $G_\alpha(S^m, S^n)$ e $G_0(S^m, S^n)$ possuírem o mesmo tipo de homotopia, com $\alpha \in \pi_m(S^n)$

A condição referida no título acima é o anulamento do produto de Whitehead  $[\alpha, i_n]$  em  $\pi_{n+m-1}(S^n)$ . Esta condição é também necessária e suficiente para que  $G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $G_0(S^m, S^n)$  sejam espaços fibrados equivalentes com projeções  $\tau_\alpha$  (fibrção avaliação definida por  $\alpha$ ) e  $\tau_0$  (fibrção avaliação neutra). Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Teorema 6.5.** *Para todo  $\alpha \in \pi_m(S^n)$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i).  $G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $G_0(S^m, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia.
- (ii).  $G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $G_0(S^m, S^n)$  são espaços fibrados equivalentes sobre  $S^n$ , com projeções  $\tau_\alpha$  e  $\tau_0$  respectivamente.
- (iii).  $\tau_\alpha : G_\alpha(S^m, S^n) \rightarrow S^n$  tem uma seção.
- (iv). O produto de Whitehead  $[\alpha, i_n] = 0$  em  $\pi_{n+m-1}(S^n)$ .

*Demonstração.* Vamos provar as equivalências na seguinte ordem

$$(iv) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) \Rightarrow (iv)$$

.

$(iv) \Rightarrow (iii)$  segue do Lema 6.1.

$(iii) \Rightarrow (ii)$  é exatamente a Proposição 5.12.

$(ii) \Rightarrow (i)$  é trivial, segue da primeira condição de fibrados equivalentes.

Temos então, que provar somente  $(i) \Rightarrow (iv)$ .

Se  $n = m = 1$ , segue da Observação 5.4, que  $[\alpha, i_n] = \alpha * i_n * \alpha^{-1} * i_n^{-1} = 0$ , pois  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  é abeliano.

Se  $n = 1$  e  $m > 1$ , então  $\pi_m(S^1) \cong \{0\}$  e portanto  $[\alpha, i_n] = 0$ .

Se  $1 \leq m < n$ , então  $\pi_m(S^n) = \{0\}$  e portanto  $[\alpha, i_n] = 0$ .

Resta-nos mostrar  $(i) \Rightarrow (iv)$  quando  $m \geq n \geq 2$ . Por hipótese,  $G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $G_0(S^m, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia, logo, pelo Teorema da Invariância Homotópica, segue que  $\pi_i(G_\alpha(S^m, S^n)) \cong \pi_i(G_0(S^m, S^n))$ , para todo  $i \geq 1$ . Consideremos a seguinte sequência exata obtida do Teorema 5.9

$$\dots \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \pi_n(S^n) \xrightarrow{-\rho_\alpha} \pi_{n+m-1}(S^n) \xrightarrow{i_* \circ I_\alpha^{-1}} \pi_{n-1}(G_\alpha(S^m, S^n)) \xrightarrow{\overline{\tau_{\alpha*}}} \pi_{n-1}(S^n) \cong \{0\} \longrightarrow \dots$$

Usando a sequência exata acima para  $\alpha = 0$ , segue que  $\rho_\alpha = 0$  e consequentemente  $\pi_{n-1}(G_0(S^m, S^n)) \cong \pi_{n+m-1}(S^n)$ . Da hipótese segue que  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^m, S^n)) \cong \pi_{n-1}(G_0(S^m, S^n))$ . Assim,  $\pi_{n+m-1}(S^n) \cong \pi_{n-1}(G_\alpha(S^m, S^n))$  ( $\star$ ). Novamente, usando a sequência exata acima (para  $\alpha$  qualquer) obtemos  $\frac{\pi_{n+m-1}(S^n)}{\rho_\alpha(\pi_n(S^n))} \cong \pi_{n-1}(G_\alpha(S^m, S^n))$  ( $\star\star$ ). Se  $m \geq n+1$ , então  $n+m-1 \geq 2n > 2n-1 > n$ , a última desigualdade segue do fato que  $n \geq 2$ . Então pela Proposição 6.3, temos que  $\pi_{n+m-1}(S^n)$  é um grupo finito ( $\star\star\star$ ). Logo, por ( $\star$ ), ( $\star\star$ ) e ( $\star\star\star$ ), segue que  $\rho_\alpha(\pi_n(S^n)) \cong \{0\}$ , o que implica,  $\rho_\alpha(i_n) = [\alpha, i_n] = 0$ . Se  $m = n$  ímpar, segue pela Proposição 6.3, que  $\pi_{2n-1}(S^n)$  é finito, e obtemos  $[\alpha, i_n] = 0$ , como anteriormente. Se  $m = n$  par, segue do Teorema 6.4, que  $\pi_{n-1}(G_0(S^m, S^n))$  é um grupo infinito e  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^m, S^n))$  é um grupo finito se  $\alpha \neq 0$ . Mas, como já observado, uma vez que  $G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $G_0(S^m, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia obtemos que  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^m, S^n)) \cong \pi_{n-1}(G_0(S^m, S^n))$ . Portanto,  $\alpha$  não pode ser diferente de 0. Assim,  $\alpha = 0$ , e consequentemente,  $[\alpha, i_n] = 0$ .

Portanto (i) implica (iv) e o teorema está provado. □

O corolário abaixo é uma consequência do fato que os grupos de homotopia da componente neutral (que contém o elemento neutro) são fáceis de serem calculados.

**Corolário 6.6.** *Seja  $\alpha \in \pi_m(S^n)$  e suponha que  $[\alpha, i_n] = 0$ . Então,  $\pi_i(G_\alpha(S^m, S^n)) \cong \pi_i(S^n) \oplus \pi_{i+m}(S^n)$ , para todo  $i \geq 1$ .*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, temos que  $G_\alpha(S^m, S^n)$  e  $G_0(S^m, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia, logo, pelo Teorema da Invariância Homotópica, segue que  $\pi_i(G_\alpha(S^m, S^n)) \cong \pi_i(G_0(S^m, S^n))$ , para todo  $i \geq 1$ . Pelo Teorema 5.9, para  $\alpha = 0$ , obtemos a seguinte sequência exata,

$$\dots \xrightarrow{\overline{\tau_{0*}}} \pi_{i+1}(S^n) \xrightarrow{-\rho_0} \pi_{i+m}(S^n) \xrightarrow{i_* \circ I_0^{-1}} \pi_i(G_0(S^m, S^n)) \xrightarrow{\overline{\tau_{0*}}} \pi_i(S^n) \xrightarrow{-\rho_0} \dots$$

Pelo Teorema do Isomorfismo, segue que  $\frac{\pi_i(G_0(S^m, S^n))}{Ker(\overline{\tau_{0*}})} \cong \overline{\tau_{0*}}(\pi_i(G_0(S^m, S^n)))$ . Agora, como a sequência é exata, por um lado  $\overline{\tau_{0*}}(\pi_i(G_0(S^m, S^n))) = Ker(-\rho_0) = \pi_i(S^n)$ , pois  $\rho_0 = 0$ , e por outro lado,  $Ker(\overline{\tau_{0*}}) = (i_* \circ I_0^{-1})(\pi_{i+m}(S^n)) \cong \pi_{i+m}(S^n)$ , uma vez que  $i_* \circ I_0^{-1}$  é monomorfismo, pois  $Ker(i_* \circ I_0^{-1}) = -\rho_0(\pi_{i+1}(S^n)) = \{0\}$ . Portanto,  $\frac{\pi_i(G_0(S^m, S^n))}{\pi_{i+m}(S^n)} \cong \pi_i(S^n)$ , logo

$$\pi_i(G_\alpha(S^m, S^n)) \cong \pi_i(G_0(S^m, S^n)) \cong \pi_i(S^n) \oplus \pi_{i+m}(S^n),$$

como queríamos demonstrar. □

## 6.4 A divisão por tipos de homotopia das componentes conexas por caminhos dos espaços $G(S^n, S^n)$ e $G(S^{n+1}, S^n)$

Agora estamos prontos para provar os dois principais resultados de nosso trabalho.

**Teorema 6.7.** *Considere o espaço de funções  $G(S^n, S^n)$ ,  $n \geq 1$ , e sejam  $\alpha, \beta \in \pi_n(S^n)$ .*

- i. Se  $n$  é par, então as componentes  $G_\alpha(S^n, S^n)$  e  $G_\beta(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se,  $\alpha = \pm\beta$ .*
- ii. Se  $n$  é ímpar, então  $G_\alpha(S^n, S^n)$  possui o mesmo tipo de homotopia que  $G_0(S^n, S^n)$  se  $\deg(\alpha)$  é par e possui o mesmo tipo de homotopia que  $G_{i_n}(S^n, S^n)$  se  $\deg(\alpha)$  é ímpar. Além do mais,  $G_0(S^n, S^n)$  e  $G_{i_n}(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se,  $n = 1, 3$  ou  $7$ .*

*Demonstração.* (i). Caso  $n$  par.

Como já observado, a aplicação  $\deg : \pi_n(S^n) \rightarrow \mathbb{Z}$  é um isomorfismo e  $\deg(i_n) = 1$ .

Para a primeira implicação, vamos supor por absurdo que  $\alpha \neq \pm\beta$ . Daí  $\deg(\alpha) \neq \deg(\pm\beta) = \pm\deg(\beta)$ .

Se  $\alpha = 0$ , então  $\beta \neq 0$ , pois estamos supondo  $\alpha \neq \pm\beta$ . Logo, pelo Teorema 6.4, segue que  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$  é infinito e  $\pi_{n-1}(G_\beta(S^n, S^n))$  é finito, o que implica que  $G_\alpha(S^n, S^n)$  não possui o mesmo tipo de homotopia que  $G_\beta(S^n, S^n)$ , pois, caso contrário, o Teorema da Invariância Homotópica garantiria que  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$  e  $\pi_{n-1}(G_\beta(S^n, S^n))$  seriam isomorfos, e portanto  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$  seria finito. Isso gera uma contradição, pois, por hipótese  $G_\alpha(S^n, S^n)$  e  $G_\beta(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia. Portanto, se  $\alpha = 0$ , necessariamente devemos ter  $\beta = 0$  e assim  $\alpha = \pm\beta$ .

Se  $\beta = 0$ , a ideia é análoga.

Se  $\alpha, \beta \neq 0$ , segue pelo Teorema 6.4, que  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$  e  $\pi_{n-1}(G_\beta(S^n, S^n))$  são ambos finitos, com ordens satisfazendo  $|\pi_{n-1}(G_\alpha)| = |\deg(\alpha)||\pi_{n-1}(G_{i_n})|$  e  $|\pi_{n-1}(G_\beta)| = |\deg(\beta)||\pi_{n-1}(G_{i_n})|$ . Mas, como  $\deg(\alpha) \neq \pm\deg(\beta)$ , segue que  $|\deg(\alpha)| \neq |\deg(\beta)|$ , e portanto  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$  e  $\pi_{n-1}(G_\beta(S^n, S^n))$  possuem ordens diferentes, o que implica que  $G_\alpha(S^n, S^n)$  não possui o mesmo tipo de homotopia que  $G_\beta(S^n, S^n)$ , pois, caso contrário,  $\pi_{n-1}(G_\alpha(S^n, S^n))$  e  $\pi_{n-1}(G_\beta(S^n, S^n))$  seriam isomorfos pelo o Teorema da Invariância Homotópica e portanto teriam a mesma ordem. Isso gera novamente uma contradição, pois, por hipótese  $G_\alpha(S^n, S^n)$  e  $G_\beta(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia. Portanto,  $\alpha = \pm\beta$ .

Que  $\alpha = \pm\beta$  implica que as componentes  $G_\alpha(S^n, S^n)$  e  $G_\beta(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia segue do Teorema 6.2.

(ii). Caso  $n$  ímpar.

Por um resultado que pode ser encontrado em [21], página 206, temos que  $2[i_n, i_n] = 0$ . Logo,  $[\alpha, i_n] = \deg(\alpha)[i_n, i_n] = 0$ , se  $\deg(\alpha)$  é par e  $[\alpha + i_n, i_n] = (\deg(\alpha) + 1)[i_n, i_n] = 0$ , se  $\deg(\alpha)$  é ímpar. Portanto, se  $\deg(\alpha)$  é par, segue pelo Teorema 6.5, que  $G_\alpha(S^n, S^n)$  e  $G_0(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia, e se o  $\deg(\alpha)$  é ímpar, segue que  $[\alpha, i_n] = -[i_n, i_n]$  e pelo Teorema 6.2, obtemos que  $G_\alpha(S^n, S^n)$  e  $G_{i_n}(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia.

Além do mais, (Ver [1], página 20)  $[i_n, i_n] = 0$  se, e somente se,  $n = 1, 3$  ou  $7$ , e pelo Teorema 6.5, temos que  $G_0(S^n, S^n)$  e  $G_{i_n}(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se,  $[i_n, i_n] = 0$ . Portanto,  $G_0(S^n, S^n)$  e  $G_{i_n}(S^n, S^n)$  possuem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se,  $n = 1, 3$  ou  $7$ .

□

O teorema a seguir é um famoso resultado e também é conhecido como o Teorema de Whitehead. Sua demonstração pode ser encontrada em [6], página 346. Ele será usado na demonstração do último resultado deste trabalho.

**Teorema 6.8.** *Se uma aplicação  $f : X \rightarrow Y$  entre CW complexos induz isomorfismos  $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ , para todo  $n \geq 1$ , então  $f$  é um equivalência de homotopia. No caso em que  $f$  é a aplicação inclusão de um sub-complexo  $X \hookrightarrow Y$ , então a conclusão é mais forte:  $X$  é um retrato por deformação de  $Y$ .*

Seja  $\phi : S^3 \rightarrow S^2$  a fibração de Hopf (Ver [7], página 51). É bem conhecido que o grupo  $\pi_{n+1}(S^n)$ ,  $n \geq 2$ , é cíclico gerado pela classe da suspensão de  $\phi$ , mais precisamente  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$  (cíclico infinito) e  $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}_2$ , se  $n \geq 3$  (Ver [7], página 83, Teorema 2.16). Para mais detalhes ver [7], Capítulos 5 e 6. Vamos denotar por  $\eta_n \in \pi_{n+1}(S^n)$ ,  $n \geq 2$ , a classe de homotopia da suspensão de  $\phi$ . No caso  $n = 2$  tem-se que  $\eta_2 = [\phi]$ . O lema abaixo é consequência de resultados de [8, 9, 14] e nos fornece uma condição necessária e suficiente para que o produto de Whitehead  $[\eta_n, i_n]$  seja nulo em  $\pi_{2n}(S^n)$ .

**Lema 6.9.** *O produto de Whitehead  $[\eta_n, i_n] = 0$  se, e somente se,  $n = 2, 6$  ou  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .*

Muito se sabe sobre o anulamento ou o não dos produtos de Whitehead  $[\alpha, i_n]$  para  $\alpha \in \pi_m(S^n)$ . Pelo Teorema 6.5, obtemos muitas informações sobre as componentes de  $G(S^m, S^n)$  e adicionando as informações acima somos capazes de fornecer uma solução completa para o problema de homotopia para as componentes de  $G(S^{n+1}, S^n)$ ,  $n \geq 1$ .

**Teorema 6.10.** *Considere o espaço de funções  $G(S^{n+1}, S^n)$  para  $n \geq 1$ .*

*i. Se  $n = 1$ , então  $G(S^2, S^1)$  é conexo por caminhos e tem o mesmo tipo de homotopia que  $S^1$ .*

*ii.* Se  $n = 2$ , então  $G(S^3, S^2)$  tem um número enumerável de componentes e todas possuem o mesmo tipo de homotopia.

*iii.* Se  $n \geq 3$ , então  $G(S^{n+1}, S^n)$  tem duas componentes. Estas componentes possuem o mesmo tipo de homotopia se, e somente se,  $n = 6$  ou  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .

*Demonstração.* (i). Seja  $m > 1$ . Como  $\pi_m(S^1) \cong \{0\}$ , então  $G(S^m, S^1)$  e  $F(S^m, S^1)$  tem somente uma componente, a componente neutral, e portanto ambos são conexos por caminhos. Temos também, pelo Isomorfismo de Hurewicz, que  $\pi_i(F(S^m, S^1)) \cong \pi_{i+m}(S^1) \cong \{0\}$ , para todo  $i \geq 1$ . Note que  $\tau_0 = \tau : G(S^m, S^1) \rightarrow S^1$ . Consideremos a sequência exata fornecida pelo Teorema 5.9 ,

$$\cdots \xrightarrow{\overline{\tau}_*} \pi_{i+1}(S^1) \xrightarrow{-\rho_0=0} \pi_{i+m}(S^1) \xrightarrow{i_* \circ I_0^{-1}} \pi_i(G_\alpha(S^m, S^1)) \xrightarrow{\overline{\tau}_*} \pi_i(S^1) \xrightarrow{0} \cdots$$

Como  $\pi_i(F(S^m, S^1)) \cong \{0\}$ , para todo  $i \geq 1$ , segue que  $i_* \circ I_0^{-1} = 0$ . Assim,  $\overline{\tau}_*$  é um isomorfismo, para todo  $i \geq 1$ . Logo, pelo Teorema 6.8, segue que  $\tau : G(S^m, S^1) \rightarrow S^1$  é uma equivalência de homotopia e portanto  $G(S^m, S^1)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $S^1$ . Em particular,  $G(S^2, S^1)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $S^1$ .

(ii). Sabemos que  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ , logo  $G(S^3, S^2)$  tem um número enumerável de componentes. Como um elemento arbitrário  $\alpha \in \pi_3(S^2)$  tem a forma  $\alpha = k\eta_2$ , para algum  $k \in \mathbb{Z}$ , segue do lema anterior que  $[\alpha, i_2] = k[\eta_2, i_2] = 0$ . Consequentemente, pelo Teorema 6.5,  $G_\alpha(S^3, S^2)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $G_0(S^3, S^2)$ . Portanto, todas possuem o mesmo tipo de homotopia.

(iii). Suponhamos  $n \geq 3$ . Como  $\pi_{n+1}(S^n) \cong \mathbb{Z}_2$ , segue que  $G(S^{n+1}, S^n)$  tem duas componentes, nomeadamente  $G_0(S^{n+1}, S^n)$  e  $G_{\eta_n}(S^{n+1}, S^n)$ . Agora, pelo Teorema 6.5,  $G_{\eta_n}(S^{n+1}, S^n)$  tem o mesmo tipo de homotopia  $G_0(S^{n+1}, S^n)$  se, e somente se,  $[\eta_n, i_n] = 0$  e pelo lema anterior,  $[\eta_n, i_n] = 0$  se, e somente se,  $n = 6$  ou  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Portanto,  $G_{\eta_n}(S^{n+1}, S^n)$  tem o mesmo tipo de homotopia que  $G_0(S^{n+1}, S^n)$  se, e somente se,  $n = 6$  ou  $n \equiv 3 \pmod{4}$ .  $\square$

# Referências

- [1] J. F. Adams. On the non-existence of elements of hopf invariant one. *Annals of Mathematics*, 72:20–104, 1960.
- [2] M. Golasinski and T. de Melo. Evaluation fibrations and path-components of the mapping space  $M(S^{n+k}, S^n)$  for  $8 \leq k \leq 13$ . *Ukrainian Math. J.*, 65:1141–1154, 2014.
- [3] V. L. Hansen. Equivalence of evaluation fibrations. *Invent. Math.*, 23:163–171, 1974.
- [4] V. L. Hansen. The homotopy problem for the components in the space of maps on the  $n$ -sphere. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 25:313–321, 1974.
- [5] V. L. Hansen. On spaces of maps of  $n$ -manifolds into the  $n$ -sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 265:273–281, 1981.
- [6] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, New York, 1 edition, 2001.
- [7] P. J. Hilton. *An Introduction to Homotopy Theory*. Cambridge University Press, New York and London, 1 edition, 1953.
- [8] P. J. Hilton. A note on the  $p$ -homomorphism in homotopy groups of spheres. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51:230–233, 1955.
- [9] P. J. Hilton and J. H. C. Whitehead. Note on the whitehead product. *Annals of Mathematics*, 51:429–442, 1953.
- [10] S. T. Hu. Concerning the homotopy groups of the components of the mapping space  $Y^{S_p}$ . *Indagationes Mathematicae*, 8:623–629, 1946.
- [11] S. T. Hu. *Homotopy Theory*. Academic press, New York and London, 1 edition, 1959.
- [12] S. S. Koh. Note on the homotopy properties of the components of the mapping space  $X^{S_p}$ . *American Mathematical Society*, 11:896–904, 1960.

- [13] E. L. Lima. *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 3 edition, 2006.
- [14] M. Mahowald. Some whitehead product in  $S^n$ . *Pergamon Press*, 4:17–26, 1965.
- [15] J. F. McClendon. On evaluation fibrations. *Houston J. Math.*, 7:379–388, 1981.
- [16] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, Inc., Massachusetts, 2 edition, 2000.
- [17] Jean-Pierre Serre. Homologie singuliere des espaces fibres. *Annals of Mathematics*, 54:425–505, 1951.
- [18] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hil, Inc., United States of America, 1 edition, 1966.
- [19] Mauricio A. Vilches. *Introdução à topologia algébrica*. Departamento de Análise - IME UERJ, Rio de Janeiro, 1 edition.
- [20] George W. Whitehead. On products in homotopy groups. *Annals of Mathematics*, 47:460–475, 1946.
- [21] George W. Whitehead. A generalization of the hopf invariant. *Annals of Mathematics*, 51:192–237, 1950.
- [22] J. H. C. Whitehead. On adding relations to homotopy groups. *Annals of Mathematics*, 42:409–428, 1941.
- [23] J. H. C. Whitehead. On certain theorems of G. W. Whitehead. *Annals of Mathematics*, 58:418–428, 1953.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"  
Campus de São José do Rio Preto

## TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

---

Assinatura do autor