



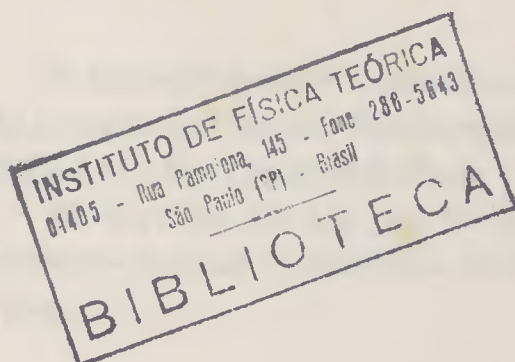
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
01405 - Rua Pamplona, 145 - fone 288-5643
São Paulo (SP) - Brasil

BIBLIOTECA

93
4

TESE DE MESTRADO

IFT, TM-04/88



**CARACTERÍSTICAS DE ALGUMAS
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM TERMO NÃO-LINEAR
DO TIPO EXPONENCIAL**



Spartaco Marcus da Silveira Carlos

Orientador: Bruto Max Pimentel Escobar

Instituto de Física Teórica - UNESP

São Paulo, Abril de 1988

ABSTRACT

In this work we study a class of non-linear equations, which includes as particular cases the Liouville and the sine-Gordon equations, under the approach of the Inverse Scattering Method and the Theory of Surfaces.

We work out the Lax pair for the general form of the non-linear equation which represents the class we mentioned, and investigate the geometrical characteristics of such a class.

RESUMO

Nesse trabalho estudamos uma classe de equações não-lineares, que inclui como casos particulares as equações de Liouville e sine-Gordon, sob a abordagem do Método de Espalhamento Inverso e da Teoria de Superfícies.

Calculamos o par de Lax para a forma geral da equação não-linear que representa a classe mencionada, e investigamos as características geométricas de tal classe.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer o suporte financeiro dos órgãos FAPESP e CAPES, sem o qual seria difícil a realização deste trabalho.

Agradeço também ao prof. Bruto M. Pimentel a orientação concedida e a amizade e paciência contidas neste apoio.

Ao Instituto de Física Teórica, e todos os seus membros, gostaria de agradecer o incentivo que me manteve erguido para enfrentar uma dura fase de minha vida.

O companherismo de meu melhor amigo, Luís Coelho, bem como do Moyses, César, além do Edson, do Jonas e de tantas outras pessoas que me são caras, foi não apenas um enorme apoio mas imprescindível para este passo que dou agora.

Finalmente gostaria de agradecer o apoio incondicional e devotado de minha família cujo carinho e amor são as coisas mais preciosas que possuo. Assim, dedico a eles este trabalho, muito especialmente a minha mãe Iracy.

"In the light of the knowledge obtained, the happy achievement seems almost a matter of course and any intelligent student can grasp it without too much trouble. But the years of anxious searching in the dark with their intense longing, their alternation of confidence and exhaustion and the final emergence into light - only those who have experienced it can understand that."

Albert Einstein.

ÍNDICE

0. Introdução	01
1. Pares de Lax Locais	
1.1 Introdução	03
1.2 Pares de Lax para as equações E segundo Zakharov-Shabat	03
1.3 Pares de Lax para as equações E segundo ZTF	06
1.4 Comparação entre os pares locais	09
2. Pares de Lax não-Locais	
2.1 Introdução	11
2.2 Par de Lax não-local para as equações E	11
2.3 Redução ao caso local	13
2.4 Autofunções para $\lambda = 0$ e sua evolução temporal	14
2.5 Espalhamento Inverso e as equações E	17
3. Transformações de Bäcklund e o Princípio de Superposição Não-Linear	
3.1 Introdução	20
3.2 ATB para o problema de sine-Gordon	21
3.3 TB para as equações E	24
3.4 Princípio de Superposição não-linear para as equações E	28
4. Interpretação Geométrica para as Equações E	
4.1 Introdução	31
4.2 Curvatura em função da métrica	31
4.3 Equações não-lineares e problemas de imersão	32
4.4 Características geométricas das subclasses das equações E	40
Apêndice A - Método de Espalhamento Inverso	42
Apêndice B - Teoria de Imersão	55
Referências	59

CONVENÇÕES

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Matrizes de Pauli.

$$\phi_{\xi\tau} \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \tau}$$

Para as referências adotamos:

[H.número]:Históricas.

[T.número]:Livros Texto.

[A.número]:Artigos usados no trabalho.

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

Revista de Ciências
Vol. 10, No. 1
1981

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

Em memória de
Joffre da Silveira Carlos

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

... e a importância da educação para a formação do cidadão, a fim de que ele possa exercer plenamente sua cidadania e participar ativamente da vida social e política do país.

0. INTRODUÇÃO GERAL

A parte da importância intrínseca que o estudo de sistemas não-lineares adquiriu nas duas últimas décadas, alguns destes sistemas tornaram-se especialmente visados devido ao fato de representarem bons modelos de importantes teorias físicas.

Neste trabalho nos propusemos a analisar as características em comum de problemas representados por equações do tipo

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + V(\phi) = 0, \quad (0.1)$$

$$V(\phi) = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi}, \quad (0.2)$$

sendo que $V(\phi) \in \mathbb{R}$ e A , B e a são constantes.

A razão desta escolha é que, com os parâmetros constantes de $V(\phi)$ convenientemente escolhidos, a equação (0.1) inclui problemas não-lineares importantes como:

(i) Liouville

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + e^{\phi} = 0, \quad (0.3)$$

que surge como a equação de movimento de strings relativísticos (imersos em espaços pseudo-euclidianos tridimensionais [A.6,A.7]), que, por sua vez, são a base de modelos para interações fortes, incluindo como limite os Modelos Duais [A.9].

(ii) Sine-Gordon

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0, \quad (0.4)$$

que foi proposta como representante do modelo massivo de Thirring e como modelo unidimensional não-linear para a teoria de campos [A.2], para

pulsos óticos ultracurtos em meios de dois estados [A.1], para deslocamentos unidimensionais de átomos em sólidos [T.2], além de outras aplicações .

As equações E, como chamaremos doravante as equações do tipo (0.1), apresentam ainda a importante característica de possuírem Transformações de Bäcklund o que contorna o problema de construir novas soluções a partir de outras conhecidas. Em particular, mostraremos que as Transformações de Bäcklund para qualquer caso de (0.1) podem ser reescritas sob uma forma algébrica extremamente útil.

Em nosso estudo das características das equações E dividimos a análise em três partes, abordando:

1. Pares de Lax
2. Transformações de Bäcklund
3. Teoria de Imersão de Superfícies

onde procuramos uniformizar a apresentação dos aspectos em função dos parâmetros de (0.2).

Finalmente, observemos que em parte do trabalho utilizamos as "coordenadas do cone-de-luz", definidas por:

$$\xi = \frac{x+t}{2}, \quad \tau = \frac{x-t}{2}, \quad (0.5)$$

de acordo com as quais o problema (0.1) é dado por:

$$\phi_{\xi\tau} = V(\phi). \quad (0.6)$$

Cumpre observar, no entanto, que (0.6) não é completamente equivalente a (0.1) no sentido de que nem toda solução de (0.1) satisfaz (0.6).

1. PARES DE LAX LOCAIS

1.1 Introdução

Neste capítulo estaremos mostrando dois métodos de construção do Par de Lax * para as equações E, baseados na bem conhecida prescrição de Zakharov e Shabat ** e na formulação usada por Zakharov, Takhtadzhyan e Fadeev (ZTF) [A.2,A.3].

Nosso objetivo será ressaltar a dependência explícita do par de Lax em relação ao parâmetro espectral λ (autovalor de um dos operadores do par de Lax) o que causa um constrangimento no caso $\lambda = 0$.

1.2 Pares de Lax para as equações E segundo Zakharov-Shabat

O par de Lax é definido (vide apêndice A) pela condição necessária de que

$$(\hat{L}_{zs})_t = [\hat{B}, \hat{L}_{zs}], \quad (1.1)$$

conhecida como equação de Lax, reproduza a equação não-linear que queremos analisar ***.

No caso de Zakharov-Shabat temos que

$$\begin{aligned} \hat{L}_{zs} &= i\tau_3 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} - U \right], \\ U &= \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.2)$$

e' o operador de Zakharov-Shabat $\hat{B}$, que gera a evolução temporal das autofunções de $\hat{L}_{zs}$, no sentido de

$$\frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \hat{B} \chi, \quad (1.3)$$

* Àqueles não familiarizados com a terminologia empregada no Método de Espalhamento Inverso, recomendamos a leitura do apêndice A.

** Vide [A.8].

*** Como em (1.1) estamos usando as coordenadas do cone-de-luz a equação visada é do tipo (0.6).

deve ser encontrado para cada problema que se quer analisar, de modo que (1.1) seja satisfeita. Assim teremos,

$$(\hat{L}_{zs})_r = -i\tau_3 U_r = \begin{pmatrix} 0 & -iq_r \\ i\tau_r & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$[\hat{B}, \hat{L}_{zs}] = -[\hat{B}, i\tau_3] \frac{\partial}{\partial \xi} - [\hat{B}, i\tau_3 U] - i\tau_3 \frac{\partial \hat{B}}{\partial \xi}. \quad (1.5)$$

Notemos que (1.4) tem a forma de um operador linear multiplicativo (sem derivadas) o que nos leva à hipótese de $\hat{B}$ linear e, de alguma forma, sem o termo em $\frac{\partial}{\partial \xi}$. Como admitir

$$[\hat{B}, i\tau_3] = 0$$

e' absurdo, adotaremos

$$[\hat{B}, i\tau_3] = F(\phi)\tau_1 + G(\phi)\tau_2,$$

tal que

$$[\hat{B}, i\tau_3] \frac{\partial}{\partial \xi} = (G(\phi)\tau_1 - F(\phi)\tau_2) i\tau_3 \frac{\partial}{\partial \xi},$$

A idéia aqui é que se

$$i\tau_3 \frac{\partial \hat{B}}{\partial \xi} + [\hat{B}, i\tau_3 U] = (G(\phi)\tau_1 - F(\phi)\tau_2) i\tau_3 U, \quad (1.6)$$

for satisfeita, teremos

$$[\hat{B}, \hat{L}_{zs}] = (G(\phi)\tau_1 - F(\phi)\tau_2) \hat{L}_{zs},$$

que permite uma reinterpretação da aplicação de (1.1) restrita às autofunções de $\hat{L}_{zs}$, isto é,

$$(\hat{L}_{zs})_r \chi = [\hat{B}, \hat{L}_{zs}] \chi,$$

que com

$$\hat{L}_{zs} \chi = \lambda \chi,$$

fornece

$$-iq_r = \lambda(G(\phi) + iF(\phi)),$$

$$i\tau_r = \lambda(G(\phi) - iF(\phi)).$$

que são as equações não-lineares associadas ao par $\hat{L}_{rs}, \hat{B}$.

Como podemos ver o par de Lax segundo Zakharov-Shabat tem aplicações muito mais amplas que o caso das equações E que queremos estudar. De fato, para estas devemos adotar

$$q = r = \alpha \phi_\xi, \quad \alpha = \text{cte.},$$

o que nos leva a

$$\phi_{\xi r} = \frac{i\lambda}{a}(G + iF) = \frac{i\lambda}{a}(-G + iF) = V(\phi),$$

e que, portanto, fornece

$$G(\phi) = 0 \quad \text{e} \quad F(\phi) = -\frac{\alpha}{\lambda}V(\phi).$$

Voltando agora a (1.5) e calculando os coeficientes vemos que:

$$[\hat{B}, i\tau_3] \equiv 2i \begin{pmatrix} 0 & -B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{\lambda}V(\phi)\tau_1,$$

$$[\hat{B}, i\tau_3 U] = i\alpha\phi_\xi \begin{pmatrix} 0 & (B_{11} - B_{22}) \\ (B_{11} - B_{22}) & 0 \end{pmatrix} = i\alpha\phi_\xi(B_{11} - B_{22})\tau_1,$$

isto é, a condição (1.6) será verificada se

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{22} &= \frac{i}{2\lambda}V'(\phi), \\ \frac{\partial B_{11}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial B_{22}}{\partial \xi} = i\frac{\alpha^2}{\lambda}\phi_\xi V(\phi), \\ B_{12} &= -B_{21} = \frac{\alpha}{i\lambda}V(\phi). \end{aligned}$$

Como no caso das equações E temos

$$V''(\phi) = a^2V(\phi),$$

obtemos

$$B_{11} = -B_{22} = \frac{1}{4\lambda}V'(\phi), \quad \alpha = \frac{a}{2}.$$

Assim podemos dizer que o par de Lax para as equações E segundo Zakharov- Shabat, tem a seguinte forma

$$\begin{aligned}\hat{L} &= i\tau_3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a}{2} \phi \xi \tau_2, \\ \hat{B} &= -\frac{1}{4i\lambda} [\tau_3 V'(\phi) + ia\tau_2 V(\phi)].\end{aligned}\tag{1.7}$$

E' fácil ver que para o caso da equação de sine-Gordon ($a = i$ e $V(\phi) = \text{sen}\phi$) o par (1.7) reproduz um resultado bem conhecido [T.1].

1.3 Pares de Lax para as equações E segundo ZTF

Mostramos na seção anterior como se pode obter, facilmente, o par de Lax para as equações E, nas coordenadas do cone-de-luz, através de (1.7). Veremos agora outro método que permite descrever o par de Lax nas coordenadas do espaço -tempo, partindo da seguinte forma geral *:

$$\begin{aligned}\hat{L} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \\ \hat{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - 2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{JB} \\ \mathbf{BJ} & \mathbf{0} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{1.8}$$

onde,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{i} \tau_2 \quad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tau_0,$$

sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ operadores lineares.

Substituindo (1.8) na equação de Lax

$$\hat{L}_t = [\hat{B}, \hat{L}],\tag{1.9}$$

teremos

$$\hat{L}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{B}_t \\ \mathbf{B}_t & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

e

* Aplicamos pequenas modificações em relação aos trabalhos originais [A.2,A.3].

$$\hat{B}\hat{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B} - 2\mathbf{B}\mathbf{J}^2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_x - 2\mathbf{J}\mathbf{B}^2 & \mathbf{B}_x \\ -\mathbf{B}_x - 2\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{A} & -2\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}\hat{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} -\mathbf{A} - 2\mathbf{J}^2\mathbf{B} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + -2 \begin{pmatrix} \mathbf{B}^2\mathbf{J} & \mathbf{J}^2\mathbf{B}_x\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{B} \end{pmatrix},$$

de modo que

$$[\hat{B}, \hat{L}] = 2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & (\mathbf{1} + \mathbf{J}^2)\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}(\mathbf{1} + \mathbf{J}^2) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \mathbf{A}_x + 2[\mathbf{B}^2, \mathbf{J}] & (\mathbf{1} + 2\mathbf{J}^2)\mathbf{B}_x + 2\mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}_x - 2\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Usando agora

$$\mathbf{J}^2 = -1$$

teremos, no lugar de (1.9), o seguinte sistema:

$$\mathbf{A}_t - \mathbf{A}_x + 2[\mathbf{J}, \mathbf{B}^2] = 0, \quad (1.10a)$$

$$\mathbf{B}_t + \mathbf{B}_x + 2\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{A} = 0, \quad (1.10b)$$

$$\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{B} = 0. \quad (1.10c)$$

Seja então

$$\mathbf{A} = A_0 + A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + A_3\tau_3,$$

$$\mathbf{B} = B_0 + B_1\tau_1 + B_2\tau_2 + B_3\tau_3,$$

quando substituirmos estas expressões em (1.10c) obtemos

$$A_0B_2 = A_2B_0,$$

$$A_1B_2 = A_2B_1,$$

$$A_3B_2 = A_2B_3,$$

o que sugere

$$A_2 = B_2 = 0.$$

Com isto teremos

$$[\mathbf{J}, \mathbf{B}^2] = 4B_0(B_3\tau_1 - B_1\tau_3),$$

de modo que, de acôrdo com (1.10a),

$$A_0 = 0.$$

Por outro lado, de (1.10b) e $B_2 = 0$ deveremos ter

$$A_1 B_1 + A_3 B_3 = 0.$$

tal que se

$$A_3 = B_1 = 0 \quad \text{ou} \quad A_1 = B_3 = 0,$$

teremos consistência em (1.10). Adotando a primeira hipótese obteremos

$$\mathbf{A} = A \tau_1$$

$$\mathbf{B} = B_0 + B_3 \tau_3.$$

Notemos agora que (1.10a), ou (1.10b), deve reproduzir a equação não-linear que desejamos analisar. Assim sendo, tomemos

$$A = \alpha(\phi_t + \phi_x), \quad \alpha = \text{cte.},$$

para obtermos de (1.10)

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{8}{\alpha} B_0 B_3 = 0,$$

$$B_{0t} + B_{0x} = 2\alpha(\phi_t + \phi_x) B_3,$$

$$B_{3t} + B_{3x} = 2\alpha(\phi_t + \phi_x) B_0.$$

E' fácil ver então que

$$B_0(\phi) = \frac{1}{2} [\beta_1 e^{2\alpha\phi} + \beta_2 e^{-2\alpha\phi}],$$

$$B_3(\phi) = \frac{1}{2} [\beta_1 e^{2\alpha\phi} - \beta_2 e^{-2\alpha\phi}],$$

e' solução para o sistema em B_i e que portanto

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{2}{\alpha} (\beta_1^2 e^{4\alpha\phi} - \beta_2^2 e^{-4\alpha\phi}) = 0,$$

de onde deduzimos que

$$\alpha = \frac{a}{4},$$

$$\beta_1^2 = \frac{a}{8}A, \quad \beta_2^2 = -\frac{a}{8}B,$$

para que a equação não-linear obtida seja indêntica a (0.1). Assim o par de Lax procurado é':

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - 2 \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{JB} \\ \mathbf{BJ} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$
(1.11)

$$\mathbf{J} = \frac{1}{i}\tau_2, \quad \mathbf{A} = \frac{a}{8}(\phi_t + \phi_x)\tau_1,$$

$$\mathbf{B} = \sqrt{\frac{a}{8}} \begin{pmatrix} \sqrt{A}e^{a\phi/2} & 0 \\ 0 & i\sqrt{B}e^{-a\phi/2} \end{pmatrix}.$$

onde podemos observar que o par acima é coerente com aquele usado por Zakharov, Takhtadzhyan e Fadeev [A.2,A.3] para a equação de sine-Gordon.

1.4 Comparação entre os pares locais

Como vimos, a obtenção do par de Lax para as equações E sob uma forma geral não apresenta maiores dificuldades. Por outro lado, cada método apresenta peculiaridades que vão além do sistema de coordenadas ao qual se aplicam.

De fato, podemos ver em (1.7) que o par de Lax segundo Zakharov-Shabat apresenta uma dependência explícita em relação ao autovalor λ (o parâmetro espectral), de modo que o caso $\lambda = 0$ não pode ser tratado.

No caso ZTF, esta dependência explícita não ocorre, porém, ao se analisar o problema de autovalôres vemos que

$$\hat{L}\Omega = \lambda\Omega, \quad \text{onde } \Omega = \begin{pmatrix} \Psi \\ \chi \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$J \frac{\partial \Psi}{\partial x} + A \Psi + B \chi = \lambda \Psi,$$

$$B \Psi = \lambda \chi,$$

que desacoplado se torna

$$\begin{aligned} J \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \left(A + \frac{1}{\lambda} B^2 \right) \Psi &= \lambda \Psi, \\ \chi &= \frac{1}{\lambda} B \Psi, \end{aligned} \tag{1.12}$$

de modo que $\lambda = 0$ será intratável a menos que se admita

$$\Omega(\lambda = 0) = 0, \tag{1.13}$$

o que não é justificável a priori *.

Assim, em ambas as formulações, se a autofunção associada a $\lambda = 0$ desempenhar um papel importante na aplicação do método de espalhamento inverso **, se fará necessário outro método de construção do par de Lax que contorne este problema. Por outro lado, a justificativa da hipótese (1.13) seria interessante visto que o caso $\lambda = 0$ não é analisado na literatura.

* Notemos que o problema de autovalores é também a origem da dificuldade para $\lambda = 0$ no caso de Zakharov-Shabat.

** Como no caso da equação de Liouville analisada por Andreev [A.4]

2. PARES DE LAX NÃO-LOCAIS

2.1 Introdução

O par de Lax utilizado por Andreev [A.4] para analisar a equação de Liouville, permitiu a construção de soluções tipo sótilon a partir da análise das autofunções associadas a $\lambda = 0$. Isto foi possível porque Andreev utilizou um operador $\tilde{L}$ tipo Zakharov-Shabat, que não apresenta degenerescência no problema de autovalôres, e um operador $\tilde{B}$ não-local que, além de não apresentar dependência explícita em λ , permite a evolução temporal de $\Psi(\lambda = 0)$, uma vez determinadas as condições de contorno sobre a derivada ϕ_t .

Aproveitando esta idéia mostramos a forma geral do par de Lax não-local para as equações E e justificamos algumas hipóteses implícitas, utilizadas frequentemente na literatura, que nem sempre são evidentes.

2.2 Par de Lax não-local para as equações E

Tomemos o caso especial do operador de Zakharov-Shabat dado em (1.7), isto é:

$$\tilde{L} = i\tau_3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a}{2} \phi_\xi \tau_2,$$

no qual, para seguirmos o trabalho de Andreev, será aplicada a transformação unitária

$$\hat{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & -i \end{pmatrix}.$$

Assim, partiremos da seguinte forma geral para o par de Lax:

$$\begin{aligned} \tilde{L} &= \frac{1}{i} \tau_2 \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{a}{2} A(\xi, \tau) \tau_1, & A(\xi, \tau) &= \phi_\xi, \\ \tilde{B}\Psi &= \int_{-\infty}^{\xi} K(\xi', \xi, \tau) \Psi(\xi', \tau) d\xi', \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $K(\xi', \xi, \tau)$, o núcleo de $\tilde{B}$, é uma matriz 2×2 . Temos então que

$$\tilde{L}_\tau = -\frac{a}{2} \phi_{\xi\tau} \tau_1,$$

$$\tilde{B}L\Psi = K(\xi', \xi, \tau) \frac{1}{i} \tau_2 \Psi(\xi', \tau) \Big|_{-\infty}^{\xi} - \int_{-\infty}^{\xi} \left[\frac{\partial K}{\partial \xi'} \frac{1}{i} \tau_2 + \frac{a}{2} A(\xi', \tau) K \tau_1 \right] \Psi(\xi', \tau) d\xi',$$

$$\tilde{L}B\Psi = \frac{1}{i} \tau_2 K(\xi, \xi, \tau) \Psi(\xi, \tau) + \int_{-\infty}^{\xi} \left[\frac{1}{i} \tau_2 \frac{\partial K}{\partial \xi} - \frac{a}{2} A(\xi, \tau) \tau_1 K \right] \Psi(\xi', \tau) d\xi',$$

ou seja, a equação de Lax (1.1) fornecerá:

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} \phi_{\xi} \tau_1 \Psi(\xi, \tau) &= \left[K(\xi, \xi, \tau), \frac{1}{i} \tau_2 \right] \Psi(\xi, \tau) - \lim_{\xi' \rightarrow -\infty} K(\xi', \xi, \tau) \frac{1}{i} \tau_2 \Psi(\xi', \tau) + \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\xi} \left[\frac{1}{i} \tau_2 \frac{\partial K(\xi', \xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{a}{2} A(\xi, \tau) \tau_1 K(\xi', \xi, \tau) \right] \Psi(\xi', \tau) d\xi' + \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\xi} \left[\frac{\partial K(\xi', \xi, \tau)}{\partial \xi'} \frac{1}{i} \tau_2 + \frac{a}{2} K(\xi', \xi, \tau) A(\xi', \tau) \tau_1 \right] \Psi(\xi', \tau) d\xi'. \end{aligned}$$

Suponhamos então que

$$\frac{1}{i} \tau_2 \frac{\partial K(\xi', \xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{a}{2} \phi_{\xi} \tau_1 K = 0,$$

$$\frac{\partial K(\xi', \xi, \tau)}{\partial \xi'} \frac{1}{i} \tau_2 + \frac{a}{2} \phi_{\xi'} K \tau_1 = 0.$$

Assim,

$$K(\xi', \xi, \tau) = \begin{pmatrix} k_{11}(\tau) e^{a(\phi+\phi')/2} & k_{12}(\tau) e^{a(\phi-\phi')/2} \\ k_{21}(\tau) e^{-a(\phi-\phi')/2} & k_{22}(\tau) e^{-a(\phi+\phi')/2} \end{pmatrix},$$

onde $\phi' \equiv \phi(\xi', \tau)$. Por outro lado, admitindo que

$$\lim_{\xi' \rightarrow -\infty} K(\xi', \xi, \tau) \frac{1}{i} \tau_2 \Psi(\xi', \tau) = 0, \quad (2.2)$$

deveremos ter a partir da equação de Lax que

$$\left[K(\xi', \xi, \tau), \frac{1}{i} \tau_2 \right] = -\frac{a}{2} V(\phi) \tau_1,$$

e portanto,

$$K(\xi', \xi, \tau) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} A e^{a(\phi+\phi')/2} & -C e^{a(\phi-\phi')/2} \\ C e^{-a(\phi-\phi')/2} & -B e^{-a(\phi+\phi')/2} \end{pmatrix},$$

sendo a , A e B , os parâmetros de $V(\phi)$ e C uma constante que deve ser compatível com a condição (2.2). A forma explícita desta última é:

$$\begin{aligned} C\chi_1 + A\chi_2 &= 0, \\ C\chi_2 + B\chi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde

$$\begin{aligned}\chi_1 &\equiv \lim_{\xi \rightarrow -\infty} e^{-a\phi(\xi, \tau)/2} \Psi_1(\xi, \tau) \\ \chi_2 &\equiv \lim_{\xi \rightarrow -\infty} e^{a\phi(\xi, \tau)/2} \Psi_2(\xi, \tau).\end{aligned}$$

Assim, o sistema (2.3) terá solução se

$$\det K(\xi', \xi, \tau) \equiv C^2 - AB = 0, \quad (2.4)$$

o que fornece:

$$K(\xi', \xi, \tau) = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} Ae^{a(\phi+\phi')/2} & -\sqrt{AB}e^{a(\phi-\phi')/2} \\ \sqrt{AB}e^{-a(\phi-\phi')/2} & -Be^{-a(\phi+\phi')/2} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Portanto, propomos que (2.5) substituída em (2.1) represente o par de Lax não-local para qualquer equação E.

Notemos primeiramente que (2.5) no caso da equação de Liouville ($a = A = 1$ e $B = 0$) resulta em

$$K_L(\xi', \xi, \tau) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{(\phi+\phi')/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} e^{(\phi+\phi')/2} (\tau_0 + \tau_3),$$

que é exatamente o núcleo utilizado por Andreev. Por outro lado, para o caso da equação de sine-Gordon ($a = i$, $A = -B = 1/2i$) os termos antidiagonais não existem na literatura [A.1]. Isto ocorre devido ao fato de não se analisar a parte correspondente a $\lambda = 0$, fornecendo um comportamento assintótico para a autofunção $\Psi(\lambda \neq 0)$, através das condições de contorno, tal que (2.2) seja satisfeita. Entretanto, isto escapa à nossa proposta de análise das equações E, o que nos leva a manter os termos com $\sqrt{AB}$.

2.3 Redução ao caso local

O que faremos agora é mostrar que o par de Lax definido na seção anterior reproduz o par de Lax local (1.7) a menos de transformações lineares simples.

A partir de (2.5) e do problema de autovalor

$$\tilde{L}\Psi = \lambda\Psi,$$

podemos escrever

$$\tilde{B}L\Psi = \lambda\tilde{B}\Psi = K(\xi, \xi, \tau)\frac{1}{i}\tau_2\Psi,$$

que no caso $\lambda \neq 0$ resultará em

$$\tilde{B} = \frac{1}{\lambda}K(\xi, \xi, \tau)\frac{1}{i}\tau_2,$$

ou seja,

$$\tilde{B} = -\frac{1}{4\lambda}\left[2a\sqrt{AB}\tau_0 + aV(\phi)\tau_1 + V'(\phi)i\tau_2\right].$$

Aplicando a transformação inversa de $\hat{T}$ definida na primeira seção, obtemos:

$$\begin{aligned}\hat{L} &\equiv \hat{T}^\dagger \tilde{L} \hat{T} = i\tau_3 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a}{2}\phi_\xi \tau_2, \\ \hat{B} &\equiv \hat{T}^\dagger \tilde{B} \hat{T} = -\frac{a}{2\lambda}\sqrt{AB}\tau_0 + \frac{i}{4\lambda}\left[i\tau_2 aV(\phi) + \tau_3 V'(\phi)\right],\end{aligned}\tag{2.6}$$

que é idêntico a (1.7) a menos do deslocamento temporal

$$\Psi \longrightarrow \Psi e^{-a\tau\sqrt{AB}/2\lambda}.$$

Deste modo, todos os resultados conhecidos na literatura para cada caso especial de $V(\phi)$, derivados da análise para $\lambda \neq 0$, estão incluídos na formulação não-local apresentada.

2.4 Autofunções para $\lambda = 0$ e sua evolução temporal

O problema de autovalores,

$$\tilde{L}\Psi = \lambda\Psi,$$

possue a seguinte representação explícita:

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{a}{2}\phi_\xi\right]\Psi_1(\lambda, \xi, \tau) &= \lambda\Psi_2(\lambda, \xi, \tau), \\ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{a}{2}\phi_\xi\right]\Psi_2(\lambda, \xi, \tau) &= -\lambda\Psi_1(\lambda, \xi, \tau).\end{aligned}\tag{2.7}$$

de onde é fácil ver que:

$$\Psi(\lambda = 0, \xi, \tau) = \begin{bmatrix} \psi_1(\tau)e^{\frac{a}{2}\phi(\xi, \tau)} \\ \psi_2(\tau)e^{-\frac{a}{2}\phi(\xi, \tau)} \end{bmatrix}.$$

Voltando agora a (2.3) e de acordo com (2.5) teremos que

$$\sqrt{A}(\sqrt{B}\psi_1 + \sqrt{A}\psi_2) = 0,$$

$$\sqrt{B}(\sqrt{B}\psi_1 + \sqrt{A}\psi_2) = 0,$$

de modo que tomaremos:

$$\psi_1(\tau) = \sqrt{A}f(\tau) \quad e \quad \psi_2(\tau) = -\sqrt{B}f(\tau),$$

e portanto,

$$\Psi(\lambda = 0, \xi, \tau) = f(\tau) \begin{bmatrix} \sqrt{A}e^{\frac{1}{2}\phi(\xi, \tau)} \\ -\sqrt{B}e^{-\frac{1}{2}\phi(\xi, \tau)} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Entretanto, devemos ter também que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \tilde{B}\Psi,$$

que no caso $\lambda = 0$ e' dada por

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \left[\frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\xi} V[\phi(\xi', \tau)] d\xi' \right] \tau_3 \Psi,$$

ou seja,

$$\tilde{B}(\lambda = 0) = \frac{a}{2} \tau_3 \int_{-\infty}^{\xi} V[\phi(\xi', \tau)] d\xi'. \quad (2.9)$$

Notemos agora que

$$\Psi^t \Psi = f^2(\tau) V(\phi), \quad , \lambda = 0,$$

de modo que se derivarmos em relação a τ teremos

$$\Psi^t \tilde{B} \Psi = f(\tau) \phi_{\tau} V'(\phi) + f(\tau) f'(\tau) V(\phi), \quad , \lambda = 0,$$

que com

$$B^t = B \quad e \quad \Psi^t \tau_3 \Psi = \frac{f^2(\tau)}{a} V'(\phi), \quad , \lambda = 0,$$

e' o mesmo que,

$$\phi_r(\xi, \tau) = -2 \frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} + \int_{-\infty}^{\xi} V[\phi(\xi', \tau)] d\xi'. \quad (2.10)$$

Entretanto, devemos impor

$$\phi_{\xi\tau}(\xi, \tau) = V[\phi(\xi, \tau)],$$

ou seja, de acôrdo com (2.10),

$$\frac{f'(\tau)}{f(\tau)} \left[1 - \left(\frac{aV(\phi)}{V'(\phi)} \right)^2 \right] = 0,$$

que pode ser traduzida nos termos das equações E como:

$$ABf'(\tau) = 0. \quad (2.11)$$

Notemos então que para a equação de sine-Gordon ($a = i$, $A = -B = 1/2i$) teremos, necessariamente, $f'(\tau) = 0$, como de fato para qualquer caso de $V(\phi)$ em que $AB \neq 0$. Como não existe nenhuma outra condição sôbre $f(\tau)$ vemos que poderemos adotar $f(\tau) = 0$, o que justifica a análise usual concentrada no caso $\lambda \neq 0$ embora, como vimos, esta não seja a única possibilidade *.

Já para os casos associados à equação de Liouville ($AB = 0$), (2.11) é automaticamente satisfeita não havendo portanto, até este nível, qualquer limitação quanto a $f(\tau)$. Entretanto, devido à análise de Andreev, não é interessante adotar $f(\tau) = 0$ visto que a condição de contôrno sôbre ϕ_r deve ser consistente com (2.10). De fato, suponhamos que

$$\phi_r \longrightarrow \pm \beta \delta_{AB,0} \quad \text{para } \xi \rightarrow \pm \infty \quad (2.12)$$

onde β e' uma constante e

$$\delta_{AB,0} = \begin{cases} 1, & AB = 0, \\ 0, & AB \neq 0, \end{cases}$$

* Notemos que $f(\tau) = 0$ torna os produtos com Ψ^t e Ψ identidades.

seja a condição de contorno em ϕ_τ para qualquer equação E *. Substituindo (2.12) em (2.10) teremos:

$$\begin{aligned} f(\tau) &= \gamma \exp\left[-\left(\frac{a}{2}\beta\tau\right)\delta_{AB,0}\right], & \gamma &= \text{cte.}, \\ \int_{-\infty}^{\xi} V[\phi(\xi', \tau)] d\xi' &= \beta\delta_{AB,0}\left(1 - \frac{aV(\phi)}{V'(\phi)}\right) = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

e portanto, para todos os casos de $V(\phi)$ em que (2.12) é aplicável valerá

$$\Psi(\lambda = 0, \xi, \tau) = \gamma e^{-\frac{a}{2}\beta\tau\delta_{AB,0}} \begin{bmatrix} \sqrt{A}e^{\frac{a}{2}\phi(\xi, \tau)} \\ -\sqrt{B}e^{-\frac{a}{2}\phi(\xi, \tau)} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

onde β e γ são constantes, como autofunção de $\tilde{L}$ para $\lambda = 0$.

2.5 Espalhamento Inverso e as equações E

Se desacoplarmos (2.7) teremos

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + u(\xi, \tau)\right]\Psi_1 &= \lambda^2\Psi_1, \\ \left[-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + v(\xi, \tau)\right]\Psi_2 &= \lambda^2\Psi_2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

sendo que,

$$\begin{aligned} u(\xi, \tau) &= \frac{a}{4}(a\phi_\xi^2 + 2\phi_{\xi\xi}), \\ v(\xi, \tau) &= \frac{a}{4}(a\phi_\xi^2 - 2\phi_{\xi\xi}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

e onde é fácil ver que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{a}{2}\phi_\xi[aV(\phi) + V'(\phi)] = aA\frac{\partial}{\partial \xi}(e^{a\phi}), \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{a}{2}\phi_\xi[aV(\phi) - V'(\phi)] = -aB\frac{\partial}{\partial \xi}(e^{-a\phi}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau}(u + v) &= a\frac{\partial}{\partial \xi}[V(\phi)], \\ \frac{\partial}{\partial \tau}(u - v) &= \frac{\partial}{\partial \xi}[V'(\phi)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

* Esta proposta é compatível com a condição de contorno adotada por Andreev.

Assim, o problema de autovalores para o operador $\tilde{L}$, associado às equações E, foi transformado em dois problemas de espalhamento (no sentido da equação de Schrödinger) para os "potenciais" $u(\xi, \tau)$ e $v(\xi, \tau)$ que, por sua vez, satisfazem (2.17). O método de espalhamento inverso, neste caso, deve fornecer soluções $\phi(\xi, \tau)$ para o problema não-linear (0.6) se pudermos encontrar o comportamento assintótico dos potenciais e usarmos

$$\begin{aligned}\phi(\xi, \tau) &= \frac{1}{aA} \ln \int \frac{\partial u}{\partial \tau} d\xi, & A \neq 0, \\ \phi(\xi, \tau) &= -\frac{1}{aB} \ln \int \frac{\partial v}{\partial \tau} d\xi, & B \neq 0, \\ \frac{aV(\phi)}{V'(\phi)} &= \frac{\frac{\partial}{\partial \tau}(u-v)}{\frac{\partial}{\partial \tau}(u+v)},\end{aligned}\tag{2.19}$$

onde o último caso conduz a uma identidade nos casos em que $AB = 0$. Entretanto, para que tal análise seja lícita, deve existir um par de Lax associado a cada componente de Ψ tal que as equações (2.17) sejam reproduzidas pela equação de Lax. É fácil ver que

$$\begin{aligned}\tilde{L}_u &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + u(\xi, \tau), & \tilde{B}_u \Psi_1 &= aA \int_{-\infty}^{\xi} e^{\frac{a}{2}(\phi+\phi')} \Psi_1(\xi', \tau) d\xi', \\ \tilde{L}_v &= -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + v(\xi, \tau), & \tilde{B}_v \Psi_2 &= -aB \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{a}{2}(\phi+\phi')} \Psi_2(\xi', \tau) d\xi',\end{aligned}\tag{2.20}$$

satisfazem estas exigências.

A partir destas considerações, o método de espalhamento inverso aplicado às autofunções para $\lambda = 0$ seria uma nova tentativa de se buscar soluções para as equações E*, que seria ainda mais interessante devido à possibilidade de se parametrizar estas soluções em função das constantes a , A e B que definem $V(\phi)$. Todavia devemos notar que para uma aplicação efetiva do método de espalhamento inverso, são necessárias condições de contorno específicas sobre ϕ , ϕ_ξ e ϕ_τ **. Além disso, como se pode ver das equações deduzidas, o caso de Liouville apresenta algumas particularidades que tendem a isolá-lo

* Observemos que o procedimento que no levou a (2.15) assumiu implicitamente que $\lambda \neq 0$ levando a um sistema de equações mais geral que (2.7), do qual se originou. Entretanto, o resultado (2.14) permanece válido.

** Note que nossa proposta em (2.12) introduz uma condição muito forte (vide (2.13)).

de uma análise unificada. Esta característica, como veremos nos capítulos seguintes, se estende a outros casos de $V(\phi)$. Assim sendo, preferimos deixar este problema em aberto.

2.2. Modelagem

Para modelar a dinâmica do sistema, consideramos a seguinte hipótese: a taxa de crescimento da população é dada por $\lambda = \lambda_0 - \alpha N$, onde λ_0 é a taxa de crescimento intrínseca, α é o coeficiente de competição intraespecífica e N é o tamanho da população. A taxa de mortalidade é dada por $\mu = \mu_0 + \beta N$, onde μ_0 é a taxa de mortalidade intrínseca e β é o coeficiente de mortalidade induzida. Assim, a taxa líquida de crescimento é dada por $r = \lambda - \mu = \lambda_0 - \mu_0 - \alpha N - \beta N$.

Para a modelagem da dinâmica do sistema, consideramos a seguinte hipótese: a taxa de crescimento da população é dada por $\lambda = \lambda_0 - \alpha N$, onde λ_0 é a taxa de crescimento intrínseca, α é o coeficiente de competição intraespecífica e N é o tamanho da população. A taxa de mortalidade é dada por $\mu = \mu_0 + \beta N$, onde μ_0 é a taxa de mortalidade intrínseca e β é o coeficiente de mortalidade induzida. Assim, a taxa líquida de crescimento é dada por $r = \lambda - \mu = \lambda_0 - \mu_0 - \alpha N - \beta N$.

Para a modelagem da dinâmica do sistema, consideramos a seguinte hipótese: a taxa de crescimento da população é dada por $\lambda = \lambda_0 - \alpha N$, onde λ_0 é a taxa de crescimento intrínseca, α é o coeficiente de competição intraespecífica e N é o tamanho da população. A taxa de mortalidade é dada por $\mu = \mu_0 + \beta N$, onde μ_0 é a taxa de mortalidade intrínseca e β é o coeficiente de mortalidade induzida. Assim, a taxa líquida de crescimento é dada por $r = \lambda - \mu = \lambda_0 - \mu_0 - \alpha N - \beta N$.

Para a modelagem da dinâmica do sistema, consideramos a seguinte hipótese: a taxa de crescimento da população é dada por $\lambda = \lambda_0 - \alpha N$, onde λ_0 é a taxa de crescimento intrínseca, α é o coeficiente de competição intraespecífica e N é o tamanho da população. A taxa de mortalidade é dada por $\mu = \mu_0 + \beta N$, onde μ_0 é a taxa de mortalidade intrínseca e β é o coeficiente de mortalidade induzida. Assim, a taxa líquida de crescimento é dada por $r = \lambda - \mu = \lambda_0 - \mu_0 - \alpha N - \beta N$.

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

2.3. Solução

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

$$N(t) = N_0 e^{(\lambda_0 - \mu_0 - \alpha N - \beta N)t}$$

Assim, a solução da equação diferencial é dada por $N(t) = N_0 e^{(\lambda_0 - \mu_0 - \alpha N - \beta N)t}$. Esta expressão mostra que a população cresce exponencialmente se a taxa líquida de crescimento r for positiva, ou decresce exponencialmente se r for negativa. O ponto de equilíbrio ocorre quando $r = 0$, ou seja, quando $\lambda_0 - \mu_0 - \alpha N - \beta N = 0$.

3. TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND E O PRINCÍPIO DE SUPERPOSIÇÃO NÃO-LINEAR

3.1 Introdução

Uma peculiaridade que qualquer problema não-linear apresenta, e que já se tornou folclore dada a frequência com que é mencionada, consiste no fato de não existir um princípio de superposição linear para estes problemas. Isto significa que dadas soluções conhecidas de uma equação diferencial não-linear, a combinação linear destas não constitui uma nova solução .

Esta afirmação , embora correta, conduz a um erro de interpretação segundo o qual apenas seria possível construir soluções particulares isoladas para os problemas não-lineares, o que é, como veremos, falso.

De fato, existem transformações , sob a forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem acopladas, que permitem encontrar novas soluções de um problema não-linear a partir das soluções de um problema associado. São as chamadas "Transformações de Bäcklund" [H.2], ou abreviadamente TB.

Neste capítulo, investigaremos como as soluções das Equações E podem ser associadas entre si através das TB, isto é, procuraremos $\phi(\xi, \tau)$ a partir de $\chi(\xi, \tau)$,

$$\chi(\xi, \tau) \xrightarrow{TB} \phi(\xi, \tau),$$

onde,

$$\phi_{\xi\tau} = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi} = V(\phi),$$

$$\chi_{\xi\tau} = Ce^{a\chi} + De^{-a\chi} = U(\chi).$$

Mostraremos também que no caso $U \equiv V$, as chamadas "Autotransformações de Bäcklund", ou ATB, existem para qualquer uma das Equações E e podem ser reescritas sob uma forma algébrica fornecendo uma nova solução a partir de três soluções conhecidas,

através de uma "combinação não-linear". À expressão desta combinação chamaremos "Princípio de Superposição Não-Linear".

O que apresentaremos a seguir sobre as TB e as ATB para as Equações E não constitui um trabalho original, porém, a forma algébrica das ATB no caso geral das equações E é, até onde sabemos, um resultado novo*.

Finalmente, notemos que não nos preocuparemos com os desenvolvimentos formais, mas sim procuraremos chegar aos resultados da maneira que a nosso ver é a mais simples, através da analogia com as TB para o problema de sine-Gordon.

3.2 ATB para o problema de sine-Gordon

As TB para sine-Gordon são bem conhecidas da literatura [T.1,A.5] e podem ser descritas pelo sistema:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\phi + \chi)_{\xi} &= \gamma \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi - \chi) \right], \\ \frac{1}{2}(\phi - \chi)_{\tau} &= \frac{1}{\gamma} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi + \chi) \right],\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde γ é um parâmetro constante que rotula as transformações.

Diferenciando (3.1) obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\phi + \chi)_{\xi\tau} &= \gamma \frac{1}{2}(\phi - \chi)_{\tau} \cos \left[\frac{(\phi - \chi)}{2} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{(\phi + \chi)}{2} \right] \cos \left[\frac{(\phi - \chi)}{2} \right], \\ \frac{1}{2}(\phi - \chi)_{\xi\tau} &= \frac{1}{\gamma} \frac{1}{2}(\phi + \chi)_{\xi} \cos \left[\frac{(\phi + \chi)}{2} \right] = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left[\frac{(\phi - \chi)}{2} \right] \cos \left[\frac{(\phi + \chi)}{2} \right],\end{aligned}$$

logo,

$$\phi_{\xi\tau} = \operatorname{sen} \phi, \quad \chi_{\xi\tau} = \operatorname{sen} \chi,\tag{3.2}$$

e portanto vemos que (3.1) é na verdade uma ATB.

Uma das aplicações mais surpreendentes de (3.1) é aquela que fornece a solução associada à solução trivial

$$\chi \equiv 0,$$

* Para o caso da equação de sine-Gordon esta forma é bem conhecida. Vide [A.5].

que substituída em (3.1) resulta em

$$\begin{aligned}\phi_\xi &= 2\gamma \operatorname{sen}(\phi/2), \\ \phi_\tau &= \frac{2}{\gamma} \operatorname{sen}(\phi/2),\end{aligned}\tag{3.3}$$

logo,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \phi(\xi, \tau) \equiv 0,$$

ou seja,

$$\phi(\xi, \tau) \equiv \phi\left(\xi + \frac{1}{\gamma^2} \tau\right),\tag{3.4}$$

que é uma solução tipo onde viajante, com velocidade $u = -1/\gamma^2$, nas coordenadas do cone-de-luz. Para as coordenadas do espaço-tempo (vide (0.4)) teremos

$$\phi(x, t) \equiv \phi(x - vt),\tag{3.5}$$

onde v e' definida por

$$u = -\frac{1}{\gamma^2} = \left(\frac{v+1}{v-1} \right).\tag{3.6}$$

De fato, integrando (3.3),

$$\begin{aligned}d\phi &= \gamma \left(d\xi + \frac{1}{\gamma^2} d\tau \right) \operatorname{sen}(\phi/2), \\ \int \frac{d(\phi/2)}{\operatorname{sen}(\phi/2)} &= \frac{\gamma}{2} \int d\left(\xi + \frac{1}{\gamma^2} \tau\right),\end{aligned}$$

e portanto,

$$\phi(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{K} \exp \left[\frac{\gamma}{2} \left(\xi + \frac{1}{\gamma^2} \tau \right) \right] \right\},\tag{3.7}$$

ou seja,

$$\phi(\xi, \tau) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{K} \exp \left[\frac{1}{2\sqrt{1-v^2}} ((1-v)\xi + (1+v)\tau) \right] \right\},\tag{3.8}$$

$$\phi(x, t) = 4 \operatorname{arctg} \left\{ \frac{1}{K} \exp \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (x - vt) \right] \right\}.\tag{3.9}$$

Notamos então que a solução associada à solução trivial $\chi \equiv 0$ e' a solução de 1-sóliton para a equação de sine-Gordon.

Podemos aplicar (3.1) sucessivamente a fim de gerar toda uma classe de soluções a partir de uma solução inicial. Por exemplo, tomemos as transformações :

$$\phi_0 \longrightarrow \phi_1 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0)_\xi = \gamma_1 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_0) \right], \\ \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_0)_\tau = \frac{1}{\gamma_1} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0) \right], \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\phi_1 \longrightarrow \phi_3 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_1)_\xi = \gamma_3 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_1) \right], \\ \frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_1)_\tau = \frac{1}{\gamma_3} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_1) \right]. \end{cases} \quad (3.11)$$

Mostraremos que existem γ_2 e γ_4 tal que

$$\phi_0 \longrightarrow \phi_2 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_0)_\xi = \gamma_2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_0) \right], \\ \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_0)_\tau = \frac{1}{\gamma_2} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_0) \right], \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\phi_2 \longrightarrow \phi_3 \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_2)_\xi = \gamma_4 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_2) \right], \\ \frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_2)_\tau = \frac{1}{\gamma_4} \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_2) \right], \end{cases} \quad (3.13)$$

e $\gamma_4 = \gamma_1$ e $\gamma_3 = \gamma_2$, de modo que (3.10)-(3.13) fornecem uma relação algébrica entre as quatro soluções $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$. Tal caso corresponde ao esquema abaixo [T.1].

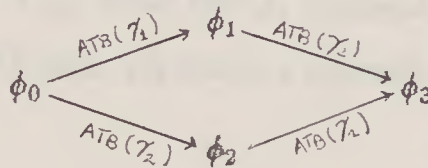


Figura 3.1 Aplicações sucessivas de ATB

Procurando as expressões para

$$(\phi_2 + \phi_1)_\xi \quad e \quad (\phi_2 - \phi_1)_\tau$$

em (3.10)-(3.13), com $\gamma_4 = \gamma_1$ e $\gamma_3 = \gamma_2$, chegamos às seguintes condições de consistência:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_1) \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_3) \right] \right\} &= \gamma_2 \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_0 - \phi_2) \right] + \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_3) \right] \right\} \\ \gamma_1 \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_1) \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_0) \right] \right\} &= \gamma_2 \left\{ \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_2) \right] - \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0) \right] \right\}, \end{aligned}$$

que de acordo com a propriedade:

$$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(A \pm B) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(A \mp B) \right],$$

fornece

$$\gamma_1 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{4}(\phi_0 - \phi_1 + \phi_2 - \phi_3) \right] = \gamma_2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{4}(\phi_0 + \phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \right],$$

ou seja,

$$\operatorname{tg} \left[\frac{1}{4}(\phi_3 - \phi_0) \right] = \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) \operatorname{tg} \left[\frac{1}{4}(\phi_2 - \phi_1) \right]. \quad (3.14)$$

Este resultado [A.5], personifica uma "princípio de superposição não-linear" para a equação de sine-Gordon pois, dadas três soluções pode-se encontrar uma quarta através da inversão da relação algébrica (3.14), isto é:

$$\phi_3(\xi, \tau) = \phi_0(\xi, \tau) + 4 \operatorname{arctg} \left\{ \left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \right) \operatorname{tg} \left[\frac{1}{4}(\phi_2 - \phi_1) \right] \right\}, \quad (3.15)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são soluções obtidas de ϕ_0 pelas transformações de Bäcklund rotuladas por γ_1 e γ_2 .

Uma aplicação importante de (3.15) é aquela para $\phi_0 \equiv 0$ e, portanto, ϕ_1 e ϕ_2 soluções de 1-sóliton, com velocidades v_1 e v_2 . Neste caso ϕ_3 representa a chamada solução de 2-sólitons para a equação de sine-Gordon, que traduz a interação das soluções ϕ_1 e ϕ_2 .

3.3 TB para as equações E

Tomando-se (3.1) como modelo, vamos descrever as TB para o problema

$$\begin{aligned} \chi &\longrightarrow \phi, \\ \chi_{\xi\tau} &= Ce^{b\chi} + De^{-b\chi}, \\ \phi_{\xi\tau} &= Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a\phi + b\chi)_{\xi} &= F \left[\frac{1}{2}(a\phi - b\chi) \right], \\ \frac{1}{2}(a\phi - b\chi)_{\tau} &= G \left[\frac{1}{2}(a\phi + b\chi) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Diferenciando (3.17) teremos:

$$\begin{aligned} a\phi_{\xi\tau} &= F'(\Theta)G(\Omega) + F(\Theta)G'(\Omega) = aV(\phi), \\ b\chi_{\xi\tau} &= F'(\Theta)G(\Omega) - F(\Theta)G'(\Omega) = bU(\chi), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2}(a\phi - b\chi), \\ \Omega &= \frac{1}{2}(a\phi + b\chi). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Assim, vemos que:

$$\frac{\partial\phi_{\xi\tau}}{\partial\chi} = \frac{\partial\chi_{\xi\tau}}{\partial\phi} = 0,$$

logo,

$$\frac{F''(\Theta)}{F(\Theta)} = \frac{G''(\Omega)}{G(\Omega)} = cte.,$$

que resolvida fornece:

$$F(\Theta) = \alpha e^{\Theta} + \beta e^{-\Theta} \quad e \quad G(\Omega) = \gamma e^{\Omega} + \delta e^{-\Omega}.$$

Comparando esses resultados com (3.16) e (3.18), obteremos:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= \frac{a}{2}A, & \beta\delta &= -\frac{a}{2}B, \\ \beta\gamma &= -\frac{b}{2}C, & \alpha\delta &= \frac{b}{2}D, \end{aligned}$$

que impõe:

$$a^2AB = b^2CD, \quad (3.20)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (a\phi + b\chi)_{\xi} &= \frac{1}{\gamma} \left(aAe^{(a\phi - b\chi)/2} - bCe^{-(a\phi - b\chi)/2} \right), \\ (a\phi - b\chi)_{\tau} &= 2\gamma \left(e^{(a\phi + b\chi)/2} + \frac{bD}{aA} e^{-(a\phi + b\chi)/2} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assim, não poderemos relacionar as soluções de duas equações E arbitrárias através das TB (3.17), mas apenas daqueles que satisfizerem (3.20). Isto sugere a idéia de uma divisão das equações E em subclasses cujas soluções possam ser associadas entre si. Assim, teremos:

1) Liouville

O problema de Liouville generalizado, para um campo real χ , pode ser definido por:

$$\chi_{\xi\tau} = Ce^{bx} \quad ; \quad b, C \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

que é obtido de (3.16), substituindo $D \equiv 0$ em $U(\chi)$.

De acordo com (3.20) e (3.21) teremos, usando $B = 0$, que:

$$\begin{aligned} (a\phi + b\chi)_{\xi} &= \frac{1}{\gamma}[aAe^{\Theta} - bCe^{-\Theta}], \\ (a\phi - b\chi)_{\tau} &= 2\gamma e^{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

cujo problema associado é:

$$\phi_{\xi\tau} = Ae^{a\phi} \quad ; \quad a, A \in \mathbb{R}, \quad (3.24)$$

2) Senh - Gordon

Tomemos agora o caso:

$$C = -D = \frac{\epsilon}{2b},$$

isto é,

$$\chi_{\xi\tau} = \frac{\epsilon}{b} \sinh(b\chi) \quad ; \quad \epsilon \in \mathbb{R}, \quad (3.25)$$

onde $b^2 < 0$ ou $b^2 > 0$.

De acordo com (3.20), deveremos ter:

$$a^2 AB = -\frac{\epsilon^2}{4} < 0,$$

que implica:

$$A = \frac{\epsilon}{2a} e^{\Delta} \quad e \quad B = -\frac{\epsilon}{2a} e^{-\Delta}, \quad (3.26)$$

logo,

$$\phi_{\xi\tau} = \frac{\epsilon}{a} \sinh(a\phi + \Delta). \quad (3.27)$$

As TB entre (3.25) e (3.27) são dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}(a\phi + b\chi)_{\xi} &= k \sinh(a\phi - b\chi + \frac{\Delta}{2}), \\ \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}(a\phi - b\chi)_{\tau} &= \frac{1}{k} \sinh(a\phi + b\chi + \frac{\Delta}{2}),\end{aligned}\tag{3.28}$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\gamma} e^{\frac{\Delta}{2}}$$

e' o parâmetro que rotula as transformações .

Notemos que (3.27) inclui os problemas de sine-Gordon, senh-Gordon e cos-Gordon.

3) Cosh - Gordon

O problema,

$$\chi_{\xi\tau} = \epsilon \cosh(b\chi),\tag{3.29}$$

onde $C = D = \frac{\epsilon}{2}$ e $b, \in \mathfrak{R}$, pode ser associado a,

$$\phi_{\xi\tau} = \left(\frac{b}{a}\right)\epsilon \cosh(a\phi + \Delta), \quad a \in \mathfrak{R}.\tag{3.30}$$

As TB assumirão então a forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{b\epsilon}}(a\phi + b\chi)_{\xi} &= k \sinh(a\phi - b\chi + \frac{\Delta}{2}), \\ \frac{1}{2\sqrt{b\epsilon}}(a\phi - b\chi)_{\tau} &= \frac{1}{k} \cosh(a\phi + b\chi + \frac{\Delta}{2}),\end{aligned}\tag{3.31}$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{b\epsilon}}{2\gamma} e^{\frac{\Delta}{2}}.$$

Vemos então que as equações E podem ser subclassificadas, de acordo com suas soluções , em

$$\begin{cases} - \text{Liouville} \\ - \text{Senh - Gordon} \\ - \text{Cosh - Gordon} \end{cases}$$

3.4 Princípio de Superposição não-linear para as equações E

Consideremos o caso $U \equiv V$ em (3.16), que se refere as ATB para as equações E. É fácil ver que (3.20) é idênticamente satisfeita e (3.21) fornece:

$$\beta = -\alpha \quad e \quad \begin{cases} \gamma = aA/2\alpha, \\ \delta = aB/2\alpha, \end{cases}$$

e portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\chi + \phi)_\xi &= \frac{2\alpha}{a} \sinh\left[\frac{a}{2}(\chi - \phi)\right], \\ \frac{1}{2}(\chi - \phi)_\tau &= \frac{1}{2\alpha} V\left[\frac{1}{2}(\chi + \phi)\right], \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde é fácil perceber que para $V(\phi) = \sin\phi$, (3.32) e (3.1) são idênticas.

Como no caso da equação de sine-Gordon, façamos aplicações sucessivas de ATB para o problema geral

$$\phi_{\xi\tau} = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi}.$$

Então, de acordo com o esquema geral da figura 3.2, teremos:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0)_\xi = \frac{2\alpha_1}{a} \sinh\left[\frac{a}{2}(\phi_1 - \phi_0)\right], \\ \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_0)_\tau = \frac{1}{2\alpha_1} V\left[\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0)\right], \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_1)_\xi = \frac{2\alpha_2}{a} \sinh\left[\frac{a}{2}(\phi_3 - \phi_1)\right], \\ \frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_1)_\tau = \frac{1}{2\alpha_2} V\left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_1)\right], \end{cases} \quad (3.34)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_0)_\xi = \frac{2\alpha_2}{a} \sinh\left[\frac{a}{2}(\phi_2 - \phi_0)\right], \\ \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_0)_\tau = \frac{1}{2\alpha_2} V\left[\frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_0)\right], \end{cases} \quad (3.35)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_2)_\xi = \frac{2\alpha_1}{a} \sinh\left[\frac{a}{2}(\phi_3 - \phi_2)\right], \\ \frac{1}{2}(\phi_3 - \phi_2)_\tau = \frac{1}{2\alpha_1} V\left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_2)\right]. \end{cases} \quad (3.36)$$

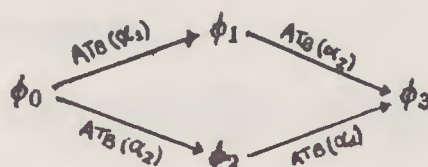


Figura 3.2 Aplicações sucessivas de ATB
para as equações E em geral.

Assim, para

$$(\phi_3 + \phi_0)_\xi \quad \text{e} \quad (\phi_3 - \phi_0)_\tau$$

teremos, respectivamente

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left\{ \sinh \left[\frac{a}{2} (\phi_1 - \phi_0) \right] + \sinh \left[\frac{a}{2} (\phi_3 - \phi_2) \right] \right\} = \\ = \alpha_2 \left\{ \sinh \left[\frac{a}{2} (\phi_2 - \phi_0) \right] + \sinh \left[\frac{a}{2} (\phi_3 - \phi_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left\{ V \left[\frac{1}{2} (\phi_2 + \phi_0) \right] - V \left[\frac{1}{2} (\phi_3 + \phi_1) \right] \right\} = \\ = \alpha_2 \left\{ V \left[\frac{1}{2} (\phi_1 + \phi_0) \right] - V \left[\frac{1}{2} (\phi_3 + \phi_2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando agora,

$$\sinh A \pm \sinh B = 2 \sinh \left[\frac{1}{2} (A \pm B) \right] \cosh \left[\frac{1}{2} (A \mp B) \right],$$

obtemos, no lugar de (3.37), que:

$$\alpha_1 \sinh \left[\frac{a}{4} (\phi_1 - \phi_0 + \phi_3 - \phi_2) \right] = \alpha_2 \sinh \left[\frac{a}{4} (\phi_2 - \phi_0 + \phi_3 - \phi_1) \right]. \quad (3.39)$$

Por outro lado, como

$$V(\phi) \equiv (A + B) \cosh(a\phi) + (A - B) \sinh(a\phi),$$

e usando também

$$\cosh A - \cosh B = 2 \sinh \left[\frac{1}{2} (A + B) \right] \sinh \left[\frac{1}{2} (A - B) \right],$$

poderemos reescrever (3.38) a partir de,

$$V(x) - V(y) = \frac{2}{\alpha} \sinh \left[\frac{a}{2}(x - y) \right] V \left[\frac{1}{2}(x + y) \right]$$

e assim,

$$\begin{aligned} V \left[\frac{1}{2}(\phi_2 + \phi_0) \right] - V \left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_1) \right] &= \\ &= \frac{2}{\alpha} \sinh \left[\frac{a}{4}(\phi_0 - \phi_1 + \phi_2 - \phi_3) \right] V \left[\frac{1}{4}(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \right] \end{aligned}$$

e permutando ϕ_1 com ϕ_2 ,

$$\begin{aligned} V \left[\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_0) \right] - V \left[\frac{1}{2}(\phi_3 + \phi_2) \right] &= \\ &= \frac{2}{\alpha} \sinh \left[\frac{a}{4}(\phi_0 + \phi_1 - \phi_2 - \phi_3) \right] V \left[\frac{1}{4}(\phi_0 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3) \right] \end{aligned}$$

portanto, (3.38) fornecerá:

$$\alpha_1 \sinh \left[\frac{a}{4}(\phi_1 - \phi_0 + \phi_3 - \phi_2) \right] = \alpha_2 \sinh \left[\frac{a}{4}(\phi_2 - \phi_0 + \phi_3 - \phi_1) \right]. \quad (3.40)$$

que é idêntica a (3.39). Desenvolvendo estas expressões obtemos:

$$\tanh \left[\frac{a}{4}(\phi_3 - \phi_0) \right] = \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \right) \tanh \left[\frac{a}{4}(\phi_2 - \phi_1) \right], \quad (3.41)$$

onde notamos que se $a = i$ reproduziremos (3.14).

Mostramos, em (3.41), que as equações E possuem um princípio de superposição não-linear na forma de uma equação algébrica que relaciona a solução ϕ_0 e suas soluções transformadas ϕ_1 e ϕ_2 , para construir uma nova solução para a equação E dada por ϕ_3 .

Observemos que de acordo com Dodd e Bullough [A.5], a condição necessária e suficiente para que existam ATB para um problema não-linear

$$\phi_{\xi\tau} = V(\phi),$$

e,

$$V''(\phi) = a^2 V(\phi), \quad (3.42)$$

o que equivale dizer que apenas as equações E possuem ATB e portanto só estes problemas terão um princípio de superposição dado por (3.41).

Finalmente, notemos que o resultado (3.41) não é mencionado em [A.5].

4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA PARA AS EQUAÇÕES E

4.1 Introdução

Usaremos neste capítulo, conhecimentos básicos sobre a Teoria de Imersão * para apresentarmos a relação entre equações não-lineares e as equações fundamentais das variedades imersas.

Suporemos sempre que as variedades que serão imersas são bidimensionais (superfícies) e que o espaço de imersão é tridimensional, com métrica $g_{\mu\nu}(x)$ tal que o campo vetorial normal à superfície imersa satisfaça:

$$g_{\mu\nu}(x)\eta^\mu(x)\eta^\nu(x) = f; \quad f = \pm 1. \quad (4.1)$$

Com isto veremos que a equação de Gauss da superfície pode ser identificada com uma equação não-linear para um campo ϕ em duas dimensões. Em particular, mostraremos os problemas de imersão correspondentes as Equações E.

4.2 Curvatura em função da métrica

Sabemos que o tensor de curvatura em relação à métrica induzida da superfície imersa, tem apenas uma componente independente não-nula, que escolheremos como:

$$R_{1212} \equiv \frac{\partial}{\partial u^2} [1, 21] - \frac{\partial}{\partial u^1} [1, 22] + [m, 11] \left\{ \begin{matrix} m \\ 22 \end{matrix} \right\} - [m, 12] \left\{ \begin{matrix} m \\ 21 \end{matrix} \right\}, \quad (4.2)$$

onde $X^\mu(u^1, u^2)$ são os pontos da superfície imersa.

Parametrizado a métrica com o campo ϕ , i. e.,

$$[g_{ij}(\phi)] = \begin{pmatrix} E(\phi) & G(\phi) \\ G(\phi) & F(\phi) \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

onde,

$$\phi \equiv \phi(u) \equiv \phi(u^1, u^2),$$

* Vide Apêndice B

e usando as definições para conexões métricas, obtemos:

$$\begin{aligned}
R_{1212} = & -\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1 \partial u_2} G' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1^2} F' + \frac{\partial^2 \phi}{\partial u_2^2} E' \right) + \\
& - \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) (G'' + G' \Delta) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)^2 (F'' + F' \Delta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 (E'' + E' \Delta),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde,

$$\Delta \equiv \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (\ln \sqrt{g}) \right], \tag{4.5}$$

$$g \equiv \det(g_{ij}) \equiv EF - G^2. \tag{4.6}$$

Sejam então K , R e h_0 as curvaturas total (ou gaussiana), escalar e média, teremos que:

$$K(\phi) \equiv \frac{R(\phi)}{2} \equiv \frac{1}{2g} R_{1212}, \tag{4.7}$$

$$h_0 \equiv \frac{1}{2} g^{ij} h_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{Fh_{11} + Eh_{22} - 2Gh_{12}}{EF - G^2} \right), \tag{4.8}$$

onde h_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental da superfície.

4.9 Equações não-lineares e Problemas de Imersão

Usando (4.4) e (4.7) podemos escrever:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_2^2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 \left(\frac{E''}{E'} + \Delta \right) \right] E' + \right. \\
& \left. + \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1^2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)^2 \left(\frac{F''}{F'} + \Delta \right) \right] F' \right\} + \\
& - \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) \left(\frac{G''}{G'} + \Delta \right) \right] G' = K(\phi)(EF - G^2)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

que é, sem dúvida, uma equação diferencial não-linear para o campo ϕ . O que faremos agora é estudar (4.9) tentando interpretá-la como a equação de Gauss de uma superfície imersa num espaço tridimensional. Notemos que para tanto, será necessário analisar também a equação de Peterson-Codazzi.

A equação de Gauss e a equação de Peterson-Codazzi, para o nosso caso em particular, são descritas por *:

$$R_{1212} = f \det(h_{ij}), \quad (4.10)$$

$$h_{ij;k} = h_{ik;j} \quad ; i, j, k \in \{1, 2\}, \quad (4.11)$$

respectivamente, onde “;” denota a derivada covariante em relação à métrica da superfície. Começemos por investigar a equação de Peterson-Codazzi que, na sua forma explícita, é dada por:

$$\begin{aligned} h_{11,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} h_{11} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} h_{22} &= h_{12,1} + \left[\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} \right] h_{12}, \\ h_{22,1} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} h_{11} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} h_{22} &= h_{12,2} + \left[\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} \right] h_{12}, \end{aligned}$$

que podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} [h'_{11} - h_0 E'] \phi_{,2} &= \\ \left\{ h'_{12} + \frac{1}{2(EF - G^2)} [-GF' h_{11} + (GE' - 2EG') h_{22} + (EF' - FE' + 2GG') h_{12}] \right\} \phi_{,1} \\ [h'_{22} - h_0 F'] \phi_{,1} &= \\ \left\{ h'_{12} + \frac{1}{2(EF - G^2)} [(GF' - 2FG') h_{11} - GE' h_{22} + (FE' - EF' + 2GG') h_{12}] \right\} \phi_{,2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde h_0 é a curvatura média como dada em (4.8).

Façamos agora a hipótese de que $\phi_{,1}$ e $\phi_{,2}$ (as derivadas do campo) são independentes. Devemos então ter:

$$(EF' - FE') h_{12} = (GF' - FG') h_{11} - (GE' - EG') h_{22}. \quad (4.13)$$

Sendo esta equação observada, o sistema (4.12) se reduzirá a:

$$h'_{11} = h_0 E' \quad h'_{22} = h_0 F' \quad h'_{12} = h_0 G'. \quad (4.14)$$

* Vide (4.1).

(i) $F(\phi) = -E(\phi)$ e $G(\phi) = 0$.

Neste caso, a métrica induzida terá o seguinte aspecto formal:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} E(\phi), \quad (4.21)$$

que a torna pseudo-euclidiana localmente. A escolha (i) garante também que (4.17) e (4.19) sejam satisfeitas contanto que

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \quad (4.22)$$

o que nos leva a uma segunda forma fundamental do tipo:

$$\begin{aligned} h_{11}(\phi) &= h_0 E(\phi) + \alpha_{11}, \\ h_{22}(\phi) &= -h_0 E(\phi) + \alpha_{11}, \\ h_{12}(\phi) &= \alpha_{12}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

E' fácil verificar de (4.8) que:

$$h_0 = \frac{h_{11} - h_{22}}{2E} \equiv h_0(\phi),$$

e a curvatura gaussiana da superfície será dada por:

$$K(\phi) = f \left[h_0^2 - \left(\frac{\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2}{E^2} \right) \right]. \quad (4.24)$$

A equação (4.9) será reduzida à forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial u_2^2} \right) \phi - \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right)^2 \right] \left(\frac{E''}{E'} + \Delta \right) = 2 \frac{K(\phi) E^2(\phi)}{E'(\phi)}, \quad (4.25)$$

onde,

$$\Delta \equiv -\frac{E'(\phi)}{E(\phi)}.$$

Mas se,

$$\frac{E''}{E'} + \Delta \equiv \frac{E''}{E'} - \frac{E'}{E} = 0,$$

Suponhamos agora que:

$$h_0 = \text{constante}, \quad (4.15)$$

então:

$$\begin{aligned} h_{11} &= h_0 E(\phi) + \alpha_{11}, \\ h_{22} &= h_0 F(\phi) + \alpha_{22}, \\ h_{12} &= h_0 G(\phi) + \alpha_{12}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde, *

$$\alpha_{11} F + \alpha_{22} E - 2\alpha_{12} G = 0. \quad (4.17)$$

Neste caso, substituindo (4.7) em (4.10) teremos:

$$K(\phi) = f \left[h_0^2 + \left(\frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{EF - G^2} \right) \right]. \quad (4.18)$$

Substituindo também (4.16) em (4.13) obtemos:

$$(\alpha_{11}G - \alpha_{22}E)F' + (\alpha_{12}F - \alpha_{22}G)E' + (\alpha_{22}E - \alpha_{11}F)G' = 0, \quad (4.19)$$

que deve ser observada junto com a condição (4.17).

O que faremos agora é estudar os casos particulares de (4.3) que transformem as derivadas de segunda ordem em (4.9) em um operador d'Alembertiano atuando sobre o campo ϕ . Assim, teremos **:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & F(\phi) = -E(\phi) \text{ e } G = 0, \\ \text{(ii)} \quad & E(\phi) = 0 \text{ e } F'(\phi) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Notemos que em ambos os casos a métrica induzida terá sua dependência em ϕ determinada por uma única função. Observemos ainda que as escolhas acima devem ser compatíveis com (4.17) e (4.19). Isto garantirá que a equação de Peterson-Codazzi é satisfeita definindo uma segunda forma fundamental para a superfície imersa, que ficará então completamente determinada, a menos de sua posição no espaço.

* Esta equação surge impondo-se (4.8) novamente.

** A razão desta escolha é óbvia, uma vez que queremos encontrar uma ligação com a física nos problemas não-lineares da classe das Equações E.

ou seja,

$$E(\phi) = \exp(a\phi + b) \quad (4.26)$$

e fazendo :

$$u_1 = t \quad u_2 = x, \quad (4.27)$$

veremos que (4.25) poderá ser reescrita como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi + V(\phi) = 0, \quad (4.28a)$$

$$V(\phi) = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi} \quad (4.28b)$$

sendo que:

$$A = -\frac{2}{a} f h_0^2 e^b \quad e \quad B = \frac{2}{a} f (\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2) e^{-b}. \quad (4.29)$$

Assim, as equações diferenciais não-lineares contidas na classe das Equações E podem ser identificadas com a equação de Gauss de uma superfície com

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{a\phi+b}, \quad (4.30)$$

$$h = (h_0 e^{a\phi+b} + \alpha_{11})(dt)^2 + 2\alpha_{12} dt dx + (\alpha_{11} - h_0 e^{a\phi+b})(dx)^2, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} K(\phi) &= f[h_0^2 - (\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2)e^{-2(a\phi+b)}] = \\ &= -\frac{a}{2} V(\phi) e^{-(a\phi+b)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

imersa em um espaço tridimensional com métrica $g_{\mu\nu}$ que satisfaz (4.1). Em especial para,

$$h_0 = 0, \quad (4.33)$$

$$a = -1, \quad b = 0,$$

$$f = -1, \quad (4.34)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0,$$

onde a segunda igualdade denota uma superfície do tipo espaço *, e

$$\begin{aligned}(g_{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} e^{-\phi}, \\ h_0 &= 2\alpha_{12} dt dx, \\ K &= -\alpha_{12}^2 e^{2\phi},\end{aligned}\tag{4.35}$$

o que fornece a seguinte equação de movimento:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = 2\alpha_{12}^2 e^{\phi},\tag{4.36}$$

que coincide com aquela encontrada por Barbashov, Nesterenko e Chervyakov [A.6,A.7].

A condição (4.33) é mencionada comumente como "condição de superfície mínima".

(ii) $E'(\phi) = 0$; e $F'(\phi) = 0$.

Neste caso teremos:

$$E(\phi) = \sigma_1 \quad \text{e} \quad F(\phi) = \sigma_2,$$

onde σ_1 e σ_2 são constantes. Assim,

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & G(\phi) \\ G(\phi) & \sigma_2 \end{pmatrix}.\tag{4.37}$$

As condições (4.17) e (4.19) para este caso impõem:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{11}\sigma_2 = \alpha_{22}\sigma_1 = 0,$$

onde supomos $G'(\phi) \neq 0$.

A equação de Gauss da superfície, (4.9), deve então ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial u_2}\right)\left(\frac{G''}{G'} + \Delta\right) = -\frac{K(\phi)}{G'(\phi)}(\sigma_1 \sigma_2 - G^2),\tag{4.38}$$

onde,

$$\Delta \equiv \frac{GG'}{\sigma_1 \sigma_2 - G^2}.$$

* Se o espaço de imersão for M^3 (espaço de Minkowski em três dimensões).

Notemos agora que a equação

$$\frac{G''}{G'} + \Delta \equiv \frac{G''}{G'} + \frac{GG''}{\sigma_1\sigma_2 - G^2} = 0,$$

integrada uma vez fornece:

$$G'(\phi) = \alpha \sqrt{\sigma_1\sigma_2 - G^2(\phi)}, \quad \alpha = \text{Cte.}$$

Porém, para integra-la novamente, devemos impor restrições sobre o produto $\sigma_1\sigma_2$. De fato, obteremos:

$$G(\phi) = \begin{cases} \sqrt{\sigma_1\sigma_2} \sin(\alpha\phi + \beta), & \text{se } \sigma_1\sigma_2 \neq 0. \\ \exp[i(\alpha\phi + \beta)], & \text{se } \sigma_1\sigma_2 = 0. \end{cases} \quad (4.39)$$

Qualquer que seja o caso, é fácil ver que

$$g = \sigma_1\sigma_2 - G^2 = \left(\frac{G'}{\alpha^2}\right),$$

e assim, usando

$$u_1 = \tau \quad u_2 = \xi, \quad (4.40)$$

teremos no lugar de (4.38) a equação :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi \partial \tau} &= V(\phi), \\ V(\phi) &= -\frac{1}{\alpha^2} K(\phi) G'(\phi) = -\frac{1}{\alpha} K(\phi) \sqrt{\sigma_1\sigma_2 - G^2(\phi)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

A curvatura gaussiana será dada por:

$$K(\phi) = f \left[h_0^2 + \frac{\alpha_{11}\alpha_{22}}{\sigma_1\sigma_2 - G^2} \right]. \quad (4.42)$$

O caso particular $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, indica que a imersão da superfície

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{a\phi + b}, \quad (4.43)$$

$$h = \alpha_{11}(d\tau)^2 + 2h_0 e^{a\phi + b} d\tau d\xi + \alpha_{22}(d\xi)^2, \quad (4.44)$$

$$K = f[h_0^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}e^{-2(a\phi+b)}] = aV(\phi)e^{-(a\phi+b)}, \quad (4.45)$$

em um espaço tridimensional, fornece como equação de Gauss

$$\phi_{\xi\tau} = V(\phi), \quad (4.46)$$

$$V(\phi) = Ae^{a\phi} + Be^{-a\phi},$$

onde,

$$A = \frac{f}{a}h_0^2e^b \quad e \quad B = -\frac{f}{a}\alpha_{11}\alpha_{22}e^{-b}, \quad (4.47)$$

sendo que as constantes a e b são dadas por:

$$a = i\alpha \quad b = i\beta.$$

Finalmente, observemos que o caso

$$\begin{aligned} h_0 &= 0 & (\text{superfície mínima}), \\ a &= -1, & b = 0, \\ f &= -1. \end{aligned} \quad (4.48)$$

resulta na superfície

$$\begin{aligned} (g_{ij}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} e^{-\phi}, \\ h &= \alpha_{11}(d\tau)^2 + \alpha_{22}(d\xi)^2, \\ K &= \alpha_{11}\alpha_{22}e^{2\phi}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

que possui a seguinte equação de Gauss:

$$\phi_{\xi\tau} = -\alpha_{11}\alpha_{22}e^{\phi}. \quad (4.50)$$

No caso $\alpha_{11} = -\alpha_{22} = 1$, isto é,

$$h = (d\tau)^2 - (d\xi)^2,$$

obteremos:

$$\phi_{\xi\tau} = e^{\phi}. \quad (4.51)$$

4.4 Características Geométricas das subclasses das Equações E

Usando a classificação definida no capítulo 3, isto é

- (i) $AB = 0$, Liouville,
- (ii) $A = \frac{\epsilon}{2a}e^b$ e $B = -\frac{\epsilon}{2a}e^{-b}$, Senh-Gordon,
- (iii) $A = \frac{\epsilon}{2}e^b$ e $B = \frac{\epsilon}{2}e^{-b}$, Cosh-Gordon,

mostraremos as características geométricas principais de cada subclasse das Equações E.

(i) Liouville

Usando (4.29) e (4.47) vemos que a equação de Liouville generalizada pode ser obtida a partir da imersão de superfícies com as seguintes características:

$$h_0^2(\alpha_{11}^2 - \alpha_{22}^2) = 0, \quad (\text{Coord. do espaço} - \text{tempo}), \quad (4.52)$$

$$h_0^2\alpha_{11}\alpha_{22} = 0, \quad (\text{Coord. do cone} - \text{de} - \text{luz}). \quad (4.53)$$

(ii) Senh - Gordon

Neste caso teremos:

$$h_0^2 = (\alpha_{11}^2 - \alpha_{22}^2), \quad (\text{Coord. do espaço} - \text{tempo}), \quad (4.54)$$

$$h_0^2 = \alpha_{11}\alpha_{22}, \quad (\text{Coord. do cone} - \text{de} - \text{luz}). \quad (4.55)$$

onde $h_0 = 0$ implicaria $V(\phi) = 0$.

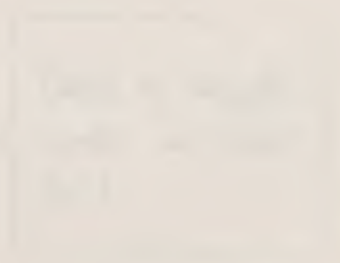
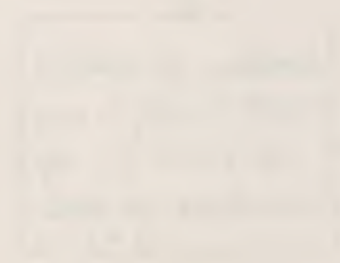
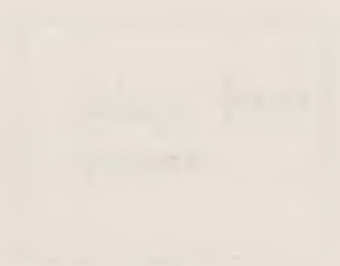
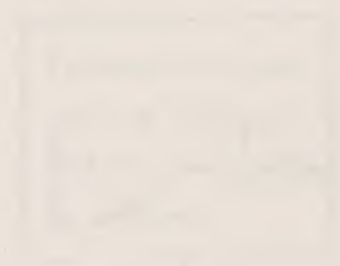
(iii) Cosh - Gordon

Para este caso teremos:

$$h_0^2 = -(\alpha_{11}^2 - \alpha_{22}^2), \quad (\text{Coord. do espaço} - \text{tempo}), \quad (4.56)$$

$$h_0^2 = -\alpha_{11}\alpha_{22}, \quad (\text{Coord. do cone} - \text{de} - \text{luz}). \quad (4.57)$$

Podemos ver então que características uma superfície imersa em M^3 deve possuir para que a equação de Gauss a ela associada possa ser identificada com uma das equações não-lineares contida na classe das equações E, onde notamos a mesma subclassificação que a encontrada na página 27.



APÊNDICE A

MÉTODO DE ESPALHAMENTO INVERSO

O Método de Espalhamento Inverso (MEI) já se tornou uma maneira clássica de se tentar resolver equações diferenciais não-lineares. Ele consiste em um artifício que transforma um problema não-linear em um problema de espalhamento onde a solução do primeiro desempenha o papel de potencial espalhador.

Uma vez definido o problema de espalhamento e conhecidas as condições de contorno sobre o potencial, podemos construir o comportamento assintótico das autofunções de espalhamento que, por sua vez, permitem calcular os, chamados, dados de espalhamento. A solução do problema não-linear surge da inversão desses dados.

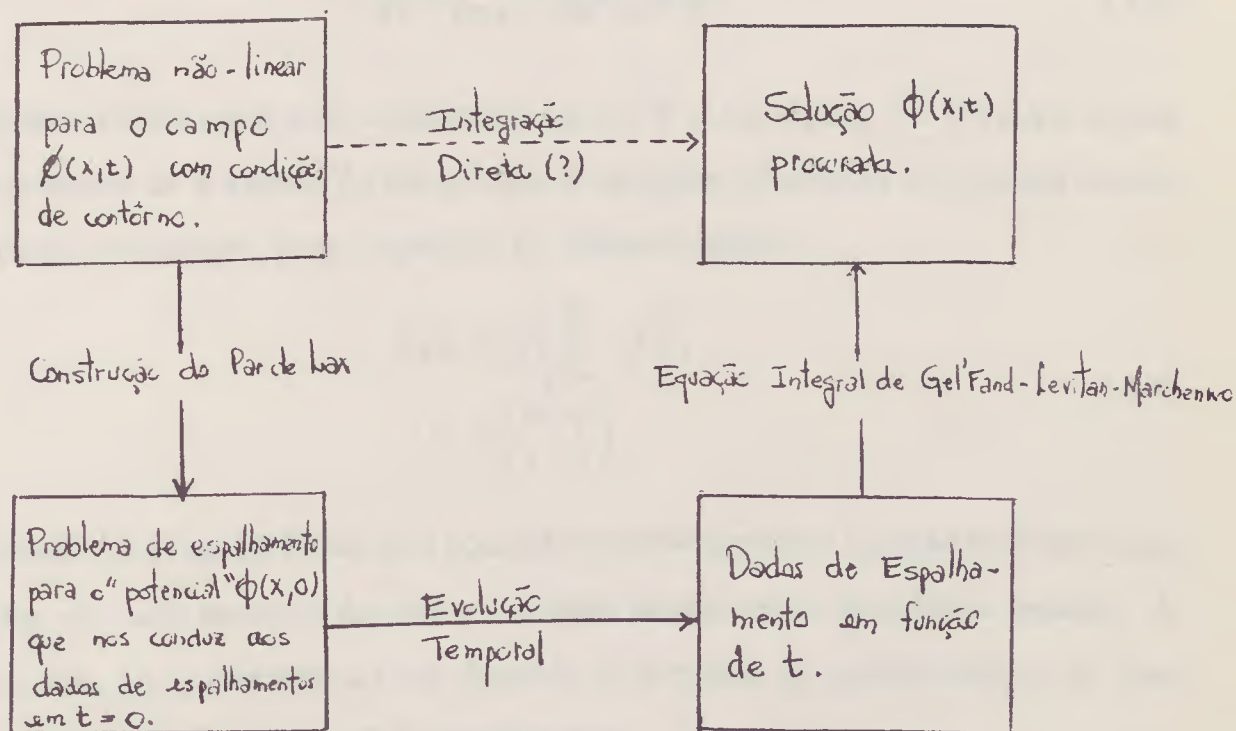


Figura A.1

Como mostra o esquema acima, o primeiro passo do MEI consiste em encontrar um par de operadores, $\tilde{L}$ e $\tilde{B}$, conhecido como par de Lax. Na verdade, apenas um deles (o operador $\tilde{L}$) é que realiza a transformação mencionada, sendo que o outro realiza a

evolução temporal das autofunções , que é linear.

O problema de espalhamento referido é definido pelo problema de autovalôres do operador $\tilde{L}$, isto é:

$$\tilde{L}\Psi = \lambda\Psi. \quad (A.1)$$

Entretanto, (A.1) só poderá ser reconhecida como um problema de espalhamento usual em casos muito especiais onde

$$\tilde{L} \equiv \tilde{L}_{Sch} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \phi(x, t), \quad (A.2)$$

que é o operador de Schrödinger . Este é o caso, por exemplo, relativo à equação de Korteweg-de Vries, ou K-dV, dada por:

$$\phi_t + \phi_{xxx} - 3(\phi^2)_x = 0. \quad (A.3)$$

Existem porém casos mais complicados em que Ψ e' um espinor e $\tilde{L}$ e' tal que acopla as componentes de Ψ através de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Isto ocorre, por exemplo, para o operador de Zakharov-Shabat,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{ZS} &= i\tau_3 \left[\frac{\partial}{\partial \xi} - U \right], \\ U &= \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (A.4)$$

Substituindo (A.4) em (A.1) não será possível encontrar nenhuma equação de Schrödinger a não ser em casos especiais em que q e r estão associados de uma forma especial. Apesar disso (A.1) continuará a ser chamado de problema de espalhamento e, no caso (A.4), q e r serão os "potenciais" de espalhamento.

Notemos agora que (A.1) é um problema de espalhamento independente do tempo, ou melhor, em um tempo $t(=0)$ fixo, isto é:

$$\tilde{L}(0)\Psi(x, 0) = \lambda\Psi(x, 0),$$

onde supomos de antemão que o espectro de $\tilde{L}$ e' independente do tempo. Fazendo agora a hipótese de que a evolução temporal das autofunções é dada por:

$$\Psi(x, t) = \hat{U}(t)\Psi(x, 0),$$

teremos que o gerador desta operação definirá o operador $\tilde{B}(t)$, que complementa o par de Lax. De fato, seja

$$\tilde{B}(t) \equiv -\hat{U}\hat{U}_t^{-1} = \hat{U}_t\hat{U}^{-1}, \quad (A.5)$$

teremos *

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \tilde{B}\Psi. \quad (A.6)$$

Aplicando então (A.5) no cálculo

$$\tilde{L}_t(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} [\hat{U}(t)\tilde{L}(0)\hat{U}^{-1}(t)],$$

obtemos:

$$\tilde{L}_t(t) = [\tilde{B}(t), \tilde{L}(t)], \quad (A.7)$$

relação conhecida como "equação de Lax". É fácil ver que no caso (A.2)

$$\tilde{L}_t = \phi_t,$$

logo, para que (A.7) seja interpretada como uma igualdade ela deverá ser idêntica a (A.3), isto é:

$$[\tilde{B}, \tilde{L}] = 3(\phi^2)_x - \phi_{xxx}.$$

Na verdade, existe uma condição conhecida como "prescrição de Lax", que diz que para que dois operadores $\tilde{L}$ e $\tilde{B}$ constituam um par de Lax, é necessário que a equação de Lax reproduza a equação não-linear que define o problema que desejamos resolver. Assim,

* O operador $\tilde{B}$ e' linear e, no caso em que $\hat{U}$ e' unitário ($\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$), $\tilde{B}$ será anti-hermitiano, isto é, $\tilde{B} \equiv -i\hat{H}$ e $\hat{H}$ hermitiano. Assim, (A.6) nada mais é que uma generalização da equação de Schrödinger dependente do tempo.

uma vez conhecido $\tilde{L}$ podemos encontrar $\tilde{B}$ a partir de (A.7), que no caso da equação de K-dV é dado por:

$$\tilde{B} = -4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3 \left(\phi \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \phi \right) = -4 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6\phi \frac{\partial}{\partial x} + 3\phi_x. \quad (A.8)$$

O caso do operador de Zakharov-Shabat é bem mais abrangente, incluindo K-dV como caso particular. De fato, do problema de autovalôres para o operador em (A.4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + i\lambda \Psi_1 &= q \Psi_2, \\ \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi} - i\lambda \Psi_2 &= r \Psi_1, \\ \Psi &= \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (A.9)$$

que com (A.6) linear *

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

teremos, da comparação do cálculo de $\Psi_{\xi\tau}$ em ambas as expressões acima, o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\begin{aligned} (B_{11})_\xi &= -(B_{22})_\xi = qB_{21} - rB_{12}, \\ (B_{12})_\xi + 2i\lambda B_{12} &= q_\tau - q(B_{11} - B_{22}), \\ (B_{21})_\xi - 2i\lambda B_{21} &= r_\tau + r(B_{11} - B_{22}). \end{aligned} \quad (A.10)$$

Notemos também que

$$\tilde{L}B\Psi \equiv \tilde{B}L\Psi - [\tilde{B}, \tilde{L}] = (\lambda\tilde{B} - \tilde{L}_\tau)\Psi,$$

de modo que teremos simbólicamente

$$\tilde{B}\Psi = -\frac{1}{(\tilde{L} - \lambda)} \tilde{L}_\tau \Psi.$$

Isto nos sugere o desenvolvimento de $\tilde{B}$ em potências de λ **, ou seja,

$$B_{ij} = \frac{b_{ij}^{(-1)}}{\lambda}, \quad (A.11a)$$

* Usaremos ξ e τ no lugar de x e t .

** A partir de agora estaremos seguindo [A.8].

ou

$$B_{ij} = \sum_{n=0}^N b_{ij}^{(n)} \lambda^n. \quad (A.11b)$$

Então, de acordo com (A.10) teremos respectivamente,

$$\begin{aligned} b_{12}^{(-1)} &= -\frac{i}{2} q_r, & b_{21}^{(-1)} &= \frac{i}{2} r_r, \\ \frac{\partial b_{11}^{(-1)}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial b_{22}^{(-1)}}{\partial \xi} = \frac{i}{2} (qr)_r, \end{aligned} \quad (A.12a)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}^{(n)}}{\partial \xi} &= -\frac{\partial b_{22}^{(n)}}{\partial \xi} = q b_{21}^{(n)} - r b_{12}^{(n)}, \\ \frac{\partial b_{12}^{(n)}}{\partial \xi} + 2i b_{12}^{(n-1)} &= -q(b_{11}^{(n)} - b_{22}^{(n)}), & n \neq 0 \\ \frac{\partial b_{21}^{(n)}}{\partial \xi} - 2i b_{21}^{(n-1)} &= r(b_{11}^{(n)} - b_{22}^{(n)}), & n \neq 0 \\ \frac{\partial b_{12}^{(0)}}{\partial \xi} &= q_r - q(b_{11}^{(0)} - b_{22}^{(0)}), \\ \frac{\partial b_{21}^{(0)}}{\partial \xi} &= r_r + r(b_{11}^{(0)} - b_{22}^{(0)}). \end{aligned} \quad (A.12b)$$

Supondo agora que no primeiro caso $b_{11}^{(-1)} = -b_{22}^{(-1)}$ a prescrição de Lax para a equação

$$\phi_{\xi r} = V(\phi), \quad V''(\phi) = a^2 V(\phi)$$

fornece

$$b_{11}^{(-1)} = \frac{i}{4} V'(\phi), \quad q = r = \frac{a}{2} \phi_{\xi}.$$

Por outro lado, no caso (A.11b) e usando (A.12b), teremos

$$b_{12}^{(N)} = b_{21}^{(N)} = 0,$$

$$b_{11}^{(N)} = -b_{22}^{(N)} = b_N(\tau),$$

$$rb_{12}^{(N-1)} = qb_{12}^{(N-1)} = ib_N(\tau)qr,$$

$$b_{11}^{(N-1)} = -b_{22}^{(N-1)} = b_{N-1}(\tau),$$

$$b_{12}^{(N-2)} = ib_{N-1}(\tau)q - \frac{1}{2}b_N(\tau)q\xi,$$

$$b_{21}^{(N-2)} = ib_{N-1}(\tau)r + \frac{1}{2}b_N(\tau)r\xi,$$

$$b_{11}^{(N-2)} = -b_{22}^{(N-2)} = b_{N-2}(\tau) + \frac{1}{2}b_N(\tau)qr,$$

$$b_{12}^{(N-3)} = ib_{N-2}(\tau)q - \frac{1}{2}b_{N-1}(\tau)q\xi + \frac{i}{2}b_N(\tau)\left(q^2r - \frac{1}{2}q\xi\xi\right),$$

$$b_{21}^{(N-3)} = ib_{N-2}(\tau)r + \frac{1}{2}b_{N-1}(\tau)r\xi + \frac{i}{2}b_N(\tau)\left(qr^2 - \frac{1}{2}r\xi\xi\right),$$

$$b_{11}^{(N-3)} = -b_{22}^{(N-3)} = b_{N-3}(\tau) + \frac{1}{2}b_{N-1}(\tau)qr + \frac{i}{4}b_N(\tau)(rq\xi - qr\xi),$$

.

.

.

onde se $N - k = 0$ devemos introduzir as derivadas q_r e r_r que fornecerão as equações de evolução através de:

$$\frac{\partial b_{12}^{(0)}}{\partial \xi} = q_r - 2qb_{11}^{(0)},$$

$$\frac{\partial b_{21}^{(0)}}{\partial \xi} = r_r + 2rb_{11}^{(0)}.$$

O caso mais geral que pode ter todos os coeficientes $b_{ij}^{(n)}$ integrados sem nenhuma hipótese adicional sobre q e r e' $N = 3$, que fornece o seguinte sistema de equações :

$$\begin{aligned} q_r + \frac{i}{4}b_3(\tau)[q\xi\xi\xi - 3r(q^2)\xi] + \frac{1}{2}b_2(\tau)(q\xi\xi - 2q^2r) - ib_1(\tau)q\xi - 2b_0(\tau)q &= 0, \\ r_r + \frac{i}{4}b_3(\tau)[r\xi\xi\xi - 3q(r^2)\xi] - \frac{1}{2}b_2(\tau)(r\xi\xi - 2qr^2) - ib_1(\tau)r\xi + 2b_0(\tau)r &= 0, \end{aligned} \quad (A.13)$$

de onde reconhecemos os seguintes casos especiais:

i) K-dV

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = -4i, \quad r = 1,$$

$$q_r + q_{\xi\xi\xi} - 3(q^2)_{\xi} = 0,$$

ii) Schrödinger não-linear

$$b_0 = b_1 = b_3 = 0, \quad b_2 = -2i, \quad r = q^*,$$

$$q_r - iq_{\xi\xi} + 2iq^2q^* = 0.$$

A partir de agora apresentaremos alguns aspectos técnicos do MEI para o problema de espalhamento (A.9), associado ao operador de Zakharov-Shabat, utilizando as condições de contorno

$$q \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad r \longrightarrow 0, \quad \text{para } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (\text{A.14})$$

Os limites assintóticos das autofunções Ψ podem ser representados em relação à base

$$\begin{aligned} f_1^{(-)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi}, & f_2^{(-)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\lambda\xi}, & \xi &\rightarrow -\infty, \\ f_1^{(+)} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi}, & f_2^{(+)} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\lambda\xi}, & \xi &\rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

denominadas "funções de Jost", de onde observamos que

$$\begin{aligned} f_1^{(-)}(\lambda, \xi) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi} + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' G(\xi', \xi) f_1^{(-)}(\lambda, \xi'), \\ f_2^{(-)}(\lambda, \xi) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi} + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' G(\xi', \xi) f_2^{(-)}(\lambda, \xi'), \\ f_1^{(+)}(\lambda, \xi) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi} - \int_{\xi}^{+\infty} d\xi' G(\xi', \xi) f_1^{(+)}(\lambda, \xi'), \\ f_2^{(+)}(\lambda, \xi) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi} - \int_{\xi}^{+\infty} d\xi' G(\xi', \xi) f_2^{(+)}(\lambda, \xi'), \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde

$$G(\xi', \xi) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\lambda(\xi' - \xi)q(\xi')} \\ e^{i\lambda(\xi' - \xi)r(\xi')} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Façamos agora a extensão para o plano complexo, isto é, $\lambda \rightarrow \eta = \lambda + i\epsilon$ tal que teremos, por exemplo,

$$\begin{aligned} f_1^{(-)}(\eta, \xi) e^{i\eta\xi} = & \\ = & \left(1 + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi_0 G(\xi_0, \xi) e^{-i\eta(\xi_0 - \xi)} \right. \\ & + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi_0 \int_{-\infty}^{\xi_0} d\xi_1 G(\xi_0, \xi) G(\xi_1, \xi_0) e^{-i\eta(\xi_1 - \xi)} + \dots \\ & \left. \dots + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi_0 \int_{-\infty}^{\xi_0} d\xi_1 \dots \int_{-\infty}^{\xi_{N-1}} d\xi_N G(\xi, \xi_0) G(\xi_1, \xi_0) \dots G(\xi_N, \xi_{N-1}) e^{-i\eta(\xi_N - \xi)} + \dots \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde,

$$e^{-i\eta(\xi_0 - \xi)} G(\xi_0, \xi) = \begin{pmatrix} 0 & q(\xi_0) \\ e^{-2i\eta(\xi_0 - \xi)} r(\xi_0) & 0 \end{pmatrix},$$

$$e^{-i\eta(\xi_1 - \xi)} G(\xi_0, \xi) G(\xi_1, \xi_0) = \begin{pmatrix} e^{-2i\eta(\xi_1 - \xi_0)} q(\xi_0) r(\xi_1) & 0 \\ 0 & e^{-2i\eta(\xi_0 - \xi)} q(\xi_1) r(\xi_0) \end{pmatrix},$$

então, como $\xi > \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_N > \dots$ teremos que $f_1^{(-)}(\eta, \xi)$ e $f_2^{(-)}(\eta, \xi)$ serão analíticas em $\text{Im}\eta > 0$, enquanto que $f_1^{(+)}(\eta, \xi)$ e $f_2^{(+)}(\eta, \xi)$ analíticas em $\text{Im}\eta < 0$, contanto que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |q(\xi)|^N |r(\xi)|^N |\xi - \xi'|^N < \infty.$$

Voltando agora ao esquema da figura A.1, devemos encontrar os “dados de espalhamento”, que definem a chamada “matriz de transferência”

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

e que por sua vez são definidos por:

	$\xi \rightarrow -\infty$	$\xi \rightarrow +\infty$	
$f_1^{(-)}(\lambda, \xi)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\lambda\xi}$	$a(\lambda)f_1^{(+)}(\lambda, \xi) + b(\lambda)f_2^{(+)}(\lambda, \xi)$	(A.19)
$f_2^{(-)}(\lambda, \xi)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\lambda\xi}$	$c(\lambda)f_1^{(+)}(\lambda, \xi) + d(\lambda)f_2^{(+)}(\lambda, \xi)$	

Não é difícil ver que $T(\lambda)$ é invertível. De fato, de (A.9) podemos construir o seguinte Wronskiano:

$$W[\Psi, \chi] \equiv i\Psi^\dagger \tau_2 \chi = (\Psi_1 \chi_2 - \Psi_2 \chi_1), \quad (\text{A.20})$$

que para Ψ e χ autofunções de $\tilde{L}$, do mesmo autovalor, obedece:

$$\frac{\partial W[\Psi, \chi]}{\partial \xi} \equiv 0. \quad (\text{A.21})$$

Assim, como

$$W[f_1^{(-)}, f_2^{(-)}] = W[f_1^{(+)}, f_2^{(+)}] = 1,$$

temos que

$$\det T(\lambda) = 1, \quad (\text{A.22a})$$

ou seja,

$$T^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} d(\lambda) & -b(\lambda) \\ -c(\lambda) & a(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.22b})$$

Substituindo (A.20) em (A.19) obtemos

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= W[f_1^{(-)}, f_2^{(+)}], & b(\lambda) &= -W[f_1^{(-)}, f_1^{(+)}], \\ c(\lambda) &= W[f_2^{(-)}, f_2^{(+)}], & d(\lambda) &= -W[f_2^{(-)}, f_1^{(+)}], \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

que expandidas em η fornecem *

$$\begin{aligned} a(\eta) &= 1 - \frac{1}{2i\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi q(\xi) r(\xi) + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right), \\ d(\eta) &= 1 + \frac{1}{2i\eta} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi q(\xi) r(\xi) + O\left(\frac{1}{\eta^2}\right), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

* Vide [A.8] pp. 68-69.

que se mostram analíticas em $\text{Im}\eta \geq 0$ e $\text{Im}\eta \leq 0$, respectivamente.

Notemos então que para

$$\begin{aligned} a(\eta_j^+) &= 0; & j &= 1, \dots, N^+; & \eta_j^+ &\in \text{Im}\eta \geq 0, \\ d(\eta_j^-) &= 0; & j &= 1, \dots, N^-; & \eta_j^- &\in \text{Im}\eta \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

teremos, quando $\xi \rightarrow +\infty$, que

$$\begin{aligned} f_1^{(-)}(\eta_j^+, \xi) &\approx b(\eta_j^+) f_2^{(+)}(\eta_j^+, \xi) \rightarrow 0, \\ f_2^{(-)}(\eta_j^+, \xi) &\approx c(\eta_j^+) f_1^{(+)}(\eta_j^+, \xi) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

e portando aos zeros de $a(\eta)$ e $d(\eta)$ correspondem os estados ligados do problema de espalhamento (A.9) com a condição de contorno (A.14).

Uma vez obtidos os dados de espalhamento devemos invertê-los afim de encontrar as soluções q e r procuradas. Para tanto, consideraremos os seguintes contornos no plano complexo

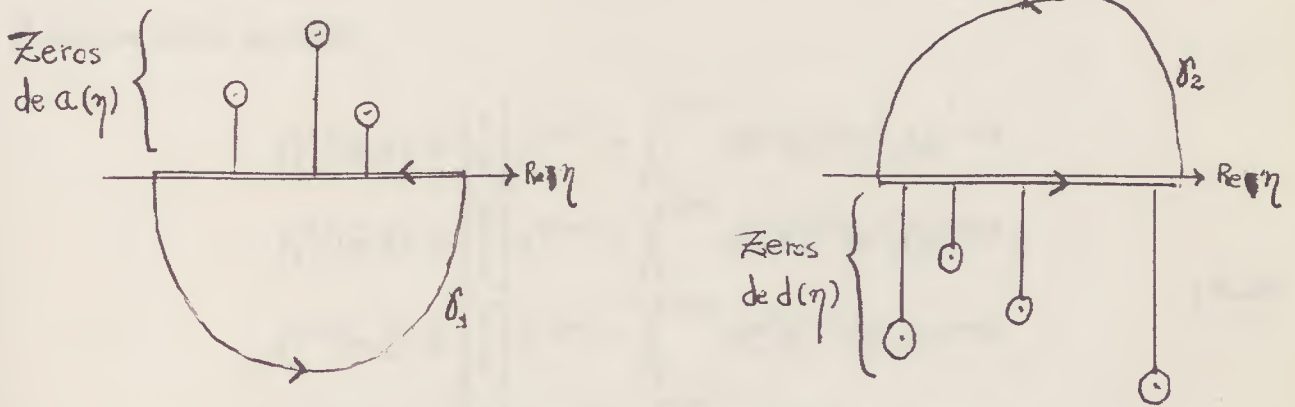


Figura A.2

de onde, supondo os zeros de $a(\eta)$ e $d(\eta)$ simples, obtemos

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_1} d\eta' \frac{f_1^{(-)}(\eta', \xi) e^{+i\eta' \xi}}{a(\eta')(\eta' - \eta)} &= 2\pi i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \oint_{\gamma_2} d\eta' \frac{f_2^{(-)}(\eta', \xi) e^{-i\eta' \xi}}{d(\eta')(\eta' - \eta)} &= 2\pi i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ \oint_{\gamma_1} d\eta' \frac{f_2^{(+)}(\eta', \xi) e^{-i\eta' \xi}}{a(\eta')(\eta' - \eta)} &= 2\pi i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \oint_{\gamma_2} d\eta' \frac{f_1^{(+)}(\eta', \xi) e^{+i\eta' \xi}}{d(\eta')(\eta' - \eta)} &= 2\pi i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que com

$$\oint_{\gamma_1} d\eta' \frac{f_1^{(+)}(\eta', \xi) e^{+i\eta' \xi}}{(\eta' - \eta)} = 2\pi i f_1^{(+)}(\eta, \xi) e^{+i\eta \xi}, \quad \oint_{\gamma_2} d\eta' \frac{f_1^{(-)}(\eta', \xi) e^{+i\eta' \xi}}{(\eta' - \eta)} = 2\pi i f_1^{(-)}(\eta, \xi) e^{+i\eta \xi},$$

$$\oint_{\gamma_2} d\eta' \frac{f_2^{(+)}(\eta', \xi) e^{-i\eta' \xi}}{(\eta' - \eta)} = 2\pi i f_2^{(+)}(\eta, \xi) e^{-i\eta \xi}, \quad \oint_{\gamma_1} d\eta' \frac{f_2^{(-)}(\eta', \xi) e^{-i\eta' \xi}}{(\eta' - \eta)} = 2\pi i f_2^{(-)}(\eta, \xi) e^{-i\eta \xi},$$

e usando (A.19) e (A.22) fornecem:

$$\begin{aligned} f_1^{(+)}(\eta, \xi) e^{+i\eta \xi} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} d\eta' \frac{b(\eta')}{a(\eta')} \frac{f_2^{(+)}(\eta', \xi)}{\eta' - \eta} e^{+i\eta' \xi}, \\ f_2^{(+)}(\eta, \xi) e^{-i\eta \xi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} d\eta' \frac{c(\eta')}{d(\eta')} \frac{f_1^{(+)}(\eta', \xi)}{\eta' - \eta} e^{-i\eta' \xi}, \\ f_1^{(-)}(\eta, \xi) e^{+i\eta \xi} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_2} d\eta' \frac{b(\eta')}{d(\eta')} \frac{f_2^{(-)}(\eta', \xi)}{\eta' - \eta} e^{+i\eta' \xi}, \\ f_2^{(-)}(\eta, \xi) e^{-i\eta \xi} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} d\eta' \frac{c(\eta')}{a(\eta')} \frac{f_1^{(-)}(\eta', \xi)}{\eta' - \eta} e^{-i\eta' \xi}. \end{aligned} \quad (A.27)$$

Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} f_1^{(+)}(\eta, \xi) &\equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\eta \xi} + \int_{\xi}^{+\infty} d\xi' K_1^{(+)}(\xi', \xi) e^{-i\eta \xi'}, \\ f_2^{(+)}(\eta, \xi) &\equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{+i\eta \xi} + \int_{\xi}^{+\infty} d\xi' K_2^{(+)}(\xi', \xi) e^{+i\eta \xi'}, \\ f_1^{(-)}(\eta, \xi) &\equiv \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\eta \xi} - \int_{\xi}^{+\infty} d\xi' K_1^{(-)}(\xi', \xi) e^{-i\eta \xi'}, \\ f_2^{(-)}(\eta, \xi) &\equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{+i\eta \xi} - \int_{\xi}^{+\infty} d\xi' K_2^{(-)}(\xi', \xi) e^{+i\eta \xi'}, \end{aligned} \quad (A.28)$$

onde

$$K_j^{(\pm)} \equiv \begin{bmatrix} K_{j1}^{(\pm)} \\ K_{j2}^{(\pm)} \end{bmatrix}.$$

Usando agora

$$\oint_{\gamma_1} d\eta' \frac{b(\eta')}{a(\eta')} \frac{e^{+i\eta' \xi}}{\eta' - \eta} = 2\pi i \frac{b(\eta)}{a(\eta)} e^{+2i\eta \xi},$$

e outras relações similares, obteremos:

$$\begin{aligned}
K_1^{(+)}(\xi', \xi) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_1^{(+)}(\xi' + \xi) + \int_{\xi}^{+\infty} d\xi'' F_1^{(+)}(\xi'' + \xi') K_2^{(+)}(\xi'', \xi) &= 0, \quad \xi' > \xi, \\
K_2^{(+)}(\xi', \xi) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F_2^{(+)}(\xi' + \xi) + \int_{\xi}^{+\infty} d\xi'' F_2^{(+)}(\xi'' + \xi') K_1^{(+)}(\xi'', \xi) &= 0, \quad \xi' > \xi, \\
K_1^{(-)}(\xi', \xi) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} F_1^{(-)}(\xi' + \xi) + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi'' F_1^{(-)}(\xi'' + \xi') K_2^{(-)}(\xi'', \xi) &= 0, \quad \xi' < \xi, \\
K_2^{(-)}(\xi', \xi) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} F_2^{(-)}(\xi' + \xi) + \int_{-\infty}^{\xi} d\xi'' F_2^{(-)}(\xi'' + \xi') K_1^{(-)}(\xi'', \xi) &= 0, \quad \xi' < \xi,
\end{aligned} \tag{A.29}$$

onde

$$\begin{aligned}
F_1^{(+)}(\xi) &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_1} d\eta \frac{b(\eta)}{a(\eta)} e^{+i\eta\xi}, & F_2^{(+)}(\xi) &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_2} d\eta \frac{c(\eta)}{d(\eta)} e^{-i\eta\xi}, \\
F_1^{(-)}(\xi) &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_2} d\eta \frac{b(\eta)}{d(\eta)} e^{+i\eta\xi}, & F_2^{(-)}(\xi) &\equiv \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_1} d\eta \frac{c(\eta)}{a(\eta)} e^{-i\eta\xi}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

As equações (A.29), conhecidas como "Equações de Gel'Fand-Levitan- Marchenko", são equações integrais lineares do tipo Volterra para os núcleos $K_j^{(\pm)}$ que junto com as expressões assintóticas para $|\text{Im}\eta| \rightarrow \infty$ das funções de Jost e comparando com (A.28) permitem escrever *

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(-)}(\xi, \xi) &= K_{22}^{(-)}(\xi, \xi) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} d\xi' q(\xi') r(\xi'), \\
K_{12}^{(-)}(\xi, \xi) &= K_{12}^{(+)}(\xi, \xi) = -\frac{1}{2} r(\xi'), \\
K_{21}^{(-)}(\xi, \xi) &= K_{21}^{(+)}(\xi, \xi) = -\frac{1}{2} q(\xi'), \\
K_{11}^{(+)}(\xi, \xi) &= K_{22}^{(+)}(\xi, \xi) = -\frac{1}{2} \int_{\xi}^{+\infty} d\xi' q(\xi') r(\xi'),
\end{aligned} \tag{A.31}$$

que fornecem as soluções $q(\xi)$ e $r(\xi)$ do problema não-linear em termos dos núcleos $K_j^{(\pm)}$, soluções de (A.29). Assim, no caso especial em que:

$$q(\xi) = r(\xi) = \frac{a}{2} \phi \xi \tag{A.32}$$

* Conforme [A.8], pp. 68-69.

teremos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \phi_\xi &= -2 K_{12}^{(-)}(\xi, \xi) = -2 K_{12}^{(+)}(\xi, \xi) = -2 K_{21}^{(-)}(\xi, \xi) = -2 K_{21}^{(+)}(\xi, \xi), \\ \left(\frac{a}{2} \phi_\xi \right)^2 &= -2 \frac{dK_{11}^{(-)}}{d\xi} = -2 \frac{dK_{22}^{(-)}}{d\xi} = 2 \frac{dK_{11}^{(+)}}{d\xi} = 2 \frac{dK_{22}^{(+)}}{d\xi}. \end{aligned} \quad (A.33)$$

Notemos que se usarmos (A.6) para obtermos a dependência temporal em cada função de Jost $f_j^{(\pm)}(\lambda, \xi)$ e colocarmos essas expressões em (A.19) obteremos a dependência temporal dos dados de espalhamento. Substituindo estes dados em (A.30) e resolvendo (A.29) podemos obter as soluções para qualquer tempo, $q(\xi, \tau)$ e $r(\xi, \tau)$.

Este é, em resumo, o Método de Espalhamento Inverso associado ao operador de Zakharov-Shabat.

APÊNDICE B

TEORIA DE IMERSÃO

Seja V_m uma variedade m -dimensional em que está definida a métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m, \quad (B.1)$$

onde $x \equiv (x^1, x^2, \dots, x^m)$ são pontos em V_m . A equação

$$x \equiv x(u) \quad u = (u^1, u^2, \dots, u^n), \quad (B.2)$$

define uma variedade n -dimensional V_n , imersa em V_m *. Neste caso, a métrica em V_m induz uma métrica em V_n através de

$$g_{ij}(u) = g_{\mu\nu}(x) x^\mu_{,i} x^\nu_{,j} \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (B.3)$$

onde $x^\mu_{,i} \equiv \partial x^\mu / \partial u^i$ e u é um ponto em V_n .

Sejam $T_u(V_n)$ e $N_u(V_n)$ os espaços tangente e normal de V_n no ponto u , respectivamente, adotaremos a seguinte notação :

$$\begin{aligned} e^\mu_i(u) &\equiv x^\mu_{,i} & 1 \leq i \leq n &\in T_u(V_n), \\ \eta^\mu_\alpha(u) & & n+1 \leq \alpha \leq m &\in N_u(V_n). \end{aligned} \quad (B.4)$$

Assim,

$$g_{\mu\nu} e^\mu_i(u) \eta^\nu_\alpha(u) = 0 \quad e \quad g_{\mu\nu} \eta^\mu_\alpha(u) \eta^\nu_\beta(u) = g_{\alpha\beta}. \quad (B.5)$$

A teoria de imersão garante ** que podemos sempre encontrar η^μ_α unitários e ortogonais entre si, de tal modo que:

$$g_{\mu\nu} \eta^\mu_\alpha \eta^\nu_\beta = f_{\alpha\beta}, \quad (B.6)$$

* A condição para que esta afirmação seja verdadeira é que $x(u)$ seja uma função analítica em u e a matriz jacobiana, $J = \partial x^\mu / \partial u^i$ tenha posto n . Vide [T.3] pp. 44-45

** Vide [T.3] pp. 143-145.

onde $f_\alpha = \pm 1$ de acordo com a assinatura da métrica $g_{\mu\nu}$.

Denotemos agora a derivada covariante em relação à métrica g_{ij} por " ; ". Por exemplo:

$$g_{ij;k} = 0.$$

então temos que

$$e_{ij}^\mu = e_{i,j}^\mu = - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} e_k^\mu, \quad (B.7a)$$

ou

$$x_{ij}^\mu = x^\mu_{,ij} = - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} e_k^\mu, \quad (B.7b)$$

onde usamos $x_{i,k}^\mu = x^\mu_{,k}$ pois as funções $x^\mu(u)$ são escalares em V_n , e também,

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\} \equiv g^{kl} [l, ij] = g^{kl} \frac{1}{2} (g_{lj,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}),$$

que são os símbolos de Christoffel.

Definimos a primeira forma fundamental de V_n como sendo

$$ds^2 = g_{ij}(u) du^i du^j, \quad (B.8)$$

e cada forma quadrática do tipo

$$h_\alpha = h_{\alpha|ij} du^i du^j, \quad (B.9)$$

$$h_{\alpha|ij} = g_{\mu\nu} e_{i,j}^\mu \eta_{\alpha}^\nu, \quad n+1 \leq \alpha \leq m$$

é chamada de segunda forma fundamental *. A primeira, (B.8), fornece as distâncias em V_n e as últimas nos informam como esta variedade é curva. Assim teremos:

$$e_{ij}^\mu \equiv x_{ij}^\mu = \sum_{\alpha=n+1}^m f_\alpha h_{\alpha|ij} \eta_{\alpha}^\mu. \quad (B.10)$$

Além das distâncias e curvaturas, a variedade V_n possui como propriedades geométricas intrínsecas as torsões, representadas por vetores definidos como: **

$$\tau_{\beta\alpha|i} = -g_{\mu\nu} \eta_{\beta}^\nu \eta_{\alpha,i}^\mu, \quad \tau_{\beta\alpha|i} = -\tau_{\alpha\beta|i} \quad (B.11)$$

* Vide [T.3] pp. 86-87, 102 e 298 e [T.4]

** Notemos que existem $\binom{m-n}{2}$ vetores de torsão.

e assim poderemos escrever,

$$\eta_{\alpha,i}^{\mu} = -h_{\alpha|ij}g^{jk}e_k^{\mu} - \sum_{\beta} \tau_{\beta\alpha|i}\eta_{\beta}^{\mu}. \quad (B.12)$$

Impondo agora as condições de integrabilidade

$$e_{i,jk}^{\mu} = e_{i,kj}^{\mu} \quad e \quad \eta_{\alpha,kj}^{\mu} = \eta_{\alpha,jk}^{\mu}$$

obtemos as seguintes equações :

$$R_{ijkl} = \sum_{\alpha} f_{\alpha} (h_{\alpha|ik}h_{\alpha|jl} - h_{\alpha|ij}h_{\alpha|kl}), \quad (B.13)$$

$$h_{\alpha|ijk} - h_{\alpha|ikj} = - \sum_{\beta} (\tau_{\beta\alpha|k}h_{\beta|ij} - \tau_{\beta\alpha|j}h_{\beta|ik}), \quad (B.14)$$

$$\tau_{\beta\alpha|j;k} - \tau_{\beta\alpha|k;j} + \sum_{\gamma} (\tau_{\gamma\alpha|j}\tau_{\gamma\beta|k} - \tau_{\gamma\beta|j}\tau_{\gamma\alpha|k}) = g^{ml} (h_{\beta|jl}h_{\alpha|km} - h_{\beta|lk}h_{\alpha|jm}), \quad (B.15)$$

que são respectivamente conhecidas como equação de Gauss, equação de Peterson-Codazzi e equação de Ricci, onde R_{ijkl} e' o tensor de curvatura em relação à métrica g_{ij} , ou seja,

$$R_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial u^l} [i, jk] - \frac{\partial}{\partial u^k} [i, jl] + [m, ki] \left\{ \begin{matrix} m \\ lj \end{matrix} \right\} - [m, il] \left\{ \begin{matrix} m \\ jk \end{matrix} \right\}. \quad (B.16)$$

Notemos que de (B.13) e da simetria de $h_{\alpha|ij}$ nos índices i e j , este tensor de curvatura possui as seguintes propriedades:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{klji} \quad (B.17)$$

e portanto, o número de componentes não nulas independentes é:

$$N = \frac{1}{2} \left[\binom{n}{2}^2 + \binom{n}{2} \right]. \quad (B.18)$$

Assim, no caso especial $n = 2$, em que V_n será uma superfície, teremos:

$$\binom{m-2}{2} = \frac{(m-2)(m-3)}{2}$$

vetores de torsão e $N = 1$ componente independente não nula. Escolhendo esta componente como R_{1212} , obteremos de (B.13)

$$R_{1212} = \sum_{\alpha=3}^m f_{\alpha} (h_{\alpha|11} h_{\alpha|22} - h_{\alpha|12}^2) = \sum_{\alpha=3}^m f_{\alpha} \det(h_{\alpha|ij}). \quad (B.19)$$

A variedade geométrica V_n , imersa em V_m , estará completamente especificada, a menos de sua posição no espaço, uma vez encontradas a primeira e a segunda forma fundamental e seus vetores de torsão, sendo que para isso é que são usadas as equações (B.13) a (B.15).

REFERÊNCIAS

Históricas

- [H.1] Liouville, J., "Sur l'équation aux différences partielles $\frac{d^2}{du dv} \log \lambda \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$ ". J. Math. P. Appl., 18, 71-72 (1853).
- [H.2] A. V. Bäcklund, "Zur Theorie der Flächentransformationen" Math. Ann. 19, 387-422 (1882).

Livros Texto

- [T.1] G. Eilenberg, "Solitons. Mathematical Methods for Physicists.". Springer-Verlag, Berlin (1981).
- [T.2] G. L. Lamb Jr., "Elements of Soliton Theory". John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [T.3] L. P. Eisenhart, "Riemannian Geometry". Princeton Univ. Press (1949).
- [T.4] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, "Géométrie Contemporaine". Éditions Mir-Moscou (1982).

Artigos

- [A.1] L. A. Takhtadzhyan, "Exact Theory of Propagation of Ultrashort Optical Pulses in Two-Level Media". Sov. Phys. - JETP, Vol. 39, No. 2, August 1974.
- [A.2] L. A. Takhtadzhyan and L. D. Fadeev, "Essentially Nonlinear one-dimensional Model of Classical Field Theory". T. M. P., Vol. 21, No. 2, pp. 1046-1057 (1975).
- [A.3] V. E. Zakharov, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Fadeev, "Complete Description of Solutions of the 'sine-Gordon' Equation". Sov. Phys. Dokl., Vol. 19, No. 12, June 1975.

- [A.4] V. A. Andreev, "Application of the Inverse Scattering Method to the Equation $\sigma_{xt} = e^{\sigma}$ ". T. M. P., Vol. 29, No. 2, pp. 1027-1032, (1976).
- [A.5] R. K. Dodd and R. K. Bullough, "Bäcklund Transformations for the sine-Gordon Equations". Proc. R. Soc. Lond., A 351, 449-523 (1976).
- [A.6] B. M. Barbashov and V. V. Nesterenko, "Geometrical Analysis of Nonlinear Equations in the Theory of Relativistic Strings". Sov. J. Part. Nucl., 15, (5), Sept.-Oct., 1984, pp. 464-480.
- [A.7] B. M. Barbashov, V. V. Nesterenko, A. M. Chervyakov, "General Solutions of Nonlinear Equations in the Theory of Minimal Surfaces". T. M. P., Vol. 52, No.1, pp. 621-627 (1983).
- [A.8] José Augusto Suyama, "Sôbre Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Não-Lineares". Tese de Mestrado, Instituto de Física Teórica (1980).
- [A.9] M. S. Marinov, "Relativistic Strings and Dual Models of the Strong Interactions". Sov. Phys. Usp., Vol. 20, No. 3, March 1977.

