UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá

VITOR BENTES MENDROT

Simetrias do movimento relativístico planar: bósons e férmions

Guaratinguetá
2023

Vitor Bentes Mendrot

Simetrias do movimento relativístico planar: bósons e férmions

Dissertação apresentada ao Conselho de Curso do Programa de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia e Ciências do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estatual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro
Coorientador: Prof. Dr. Pedro Almeida Vieira Alberto

Guaratinguetá
2023

M539s

Mendrot, Vitor Bentes
Simetrias do movimento relativístico planar: bósons e férmions / Vitor Bentes Mendrot - Guaratinguetá, 2023.
105 f : il.
Bibliografia: f. 89-91

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2023.
Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro
Coorientador: Prof. Dr.: Pedro Almeida Vieira Alberto

1. Simetria (Física). 2. Bósons. 3. Férmions.
4. Modelos de interação boson-fermion. I. Título.

CDU 539.12

Luciana Máximo
Bibliotecária/CRB-8 3595

unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

VÍTOR BENTES MENDROT

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
"MESTRE EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA
CURSO: MESTRADO

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto
Coordenador

B A N C A E X A M I N A D O R A:

Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO
Orientador - UNESP

Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP

Prof. Dr. LUIS RAFAEL BENITO CASTRO
UFMA/CCET

MARÇO de 2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar à minha família, em especial aos meus pais Eduardo e Léa por me proporcionarem irrestrita liberdade e incondicional apoio para perseguir os meus objetivos acadêmicos.

Aos amigos do grupo 'Rocks'n Roses' pelo companheirismo e camaradagem em todos os momentos, em especial à minha querida Thaynara, sempre disposta a ouvir minhas elucubrações sobre o processo de confecção desta dissertação.

Aos meus colegas de departamento, desde os que me acompanham desde o primeiro dia da graduação até os que pude de fato conhecer pessoalmente apenas após a pandemia.

A todos os funcionários e colaboradores da Universidade por proporcionarem a infraestrutura e conforto.

A todos os professores com quem tive o prazer de estudar, por todo o conhecimento transmitido.

Aos membros da banca avaliadora Prof. Dr. Elias Leite Mendonça e Prof. Dr. Luis Rafael Benito Castro, a quem sou grato pelas considerações e sugestões sobre o trabalho. Agradeço em especial ao meu orientador Prof. Dr. Antonio Soares de Castro e ao meu coorientador Prof. Dr. Pedro Almeida Vieira Alberto, pela dedicação e paciência em integrar um jovem pesquisador ao mundo acadêmico, além de todos os conhecimentos gastronômicos e gramaticais adquiridos.

Agradeço especialmente à CAPES pelo suporte financeiro para a realização não apenas deste trabalho, mas do projeto de pesquisa que o engloba.

Agradeço também ao Programa de Pós-Graduação em Física da Faculdade de Engenharia e Ciências do campus de Guaratinguetá da Unesp, pelos suportes financeiros para que eu pudesse participar de eventos científicos.

Agradeço a todos os brasileiros cujos impostos se direcionam ao financiamento da formação do corpo técnico-científico brasileiro. Espero poder retribuir em meu tempo de vida.

Esta pesquisa foi realizada durante um período extremamente nefasto para a Ciência e para a Educação, portanto deixo meus agradecimentos a todos que lutaram pela sua valorização neste ínterim.

Por fim, agradeço a todos que colaboram com projetos como Sci-Hub, Library Genesis, etc., pelo seu esforço em criar redes de compartilhamento irrestrito de conhecimento, fornecendo a necessária democratização ao maior bem da humanidade, o conhecimento, cuja apropriação nunca deveria ser privada mas sempre social.

O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, processo CAPES-DS.

"Symmetry, as wide or narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection."

(Hermann Weyl)

RESUMO

A dinâmica das partículas sem spin é modelada pela teoria de Klein-Gordon, enquanto a de partículas com spin-1/2 é modelada pela teoria de Dirac. Estamos particularmente interessados no comportamento de tais partículas quando imersas em misturas de potenciais de diversas naturezas sob transformações de Lorentz, de sorte que elas se mantenham restritas ao movimento em um plano fixo. Apresentamos o estudo completo de sistemas circularmente simétricos, identificando simetrias capazes de nos orientar quanto à construção de autoestados pertinentes, empregando o sistema de coordenadas cilíndricas. Particularmente à teoria de Dirac, demonstra-se que com certas condições para os potenciais, simetrias adicionais são encontradas: as simetrias de spin e pseudospin. É realizada a análise de diversos sistemas e o confronto dos resultados com os disponíveis na literatura é avaliado. Perspectivas para o avanço na pesquisa deste tipo particular de movimento são discutidas.

PALAVRAS-CHAVE: Simetrias; bósons de spin-0; teoria de Klein-Gordon; férmions de spin-1/2; teoria de Dirac; simetria de spin; simetria de pseudospin.

ABSTRACT

The dynamics of spinless particles is modeled by the Klein-Gordon theory, while the Dirac theory is adequate for spin-1/2 particles. We are specifically interested in such particles constrained to move in a plane when immersed in a mix of potentials with different properties under Lorentz transformations. The full treatment of circularly symmetric systems is shown, identifying symmetries which indicate how to build relevant eigenstates, using the cylindrical coordinate system. Particularly for the Dirac theory, in some specific conditions for the potentials, new symmetries arise: the spin and pseudospin symmetries. The analysis of a number of configurations is made and the results are compared with the ones found in the literature. Perspectives for further development of research about this particular type of motion are adressed.

KEYWORDS: Symmetries; spin-0 bosons; Klein-Gordon theory; spin-1/2 fermions; Dirac theory; spin symmetry; pseudospin symmetry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Onda viajando no sentido positivo de x à velocidade c nos instantes t e $t + \Delta t$, em que se destaca o ponto de mesma amplitude e derivada primeira em relação à x (fase). Nesta ilustração, $c\Delta t < \lambda/2$. 14
Figura 2 Lado esquerdo de (2.38) em termos de ϵ 37
Figura 3 Argumento de χ em função de A tomando a raiz cúbica principal. 38
Figura 4 Módulo de χ em função de A. 38
Figura 5 Valores reais de χ em função de A. 39
Figura 6 Valores reais de $\chi + \chi^{-1}$ em função de A. 39
Figura 7 Espectro para os "três mais baixos níveis de energia". A linha fina é o nível $n = 0$, a linha grossa é o nível $n = 1$, a linha tracejada é $n = 2$. 42
Figura 8 A região em azul indica os pares $(\alpha_\Sigma, \alpha_\Delta)$ cujas intensidades dos potenciais não possuem limitação, enquanto a região cinza indica os pares cuja intensidade possui uma limitação e a região vazia os pares impossíveis de formarem estados ligados. 46
Figura 9 ε/m em função de $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$. Em laranja, temos a área em que $\alpha_\Sigma < 0$ e em turquesa, $\alpha_\Sigma > 0$. 46
Figura 10 ε/m em função da razão $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$, com $\alpha_\Sigma = 0,05$ (abaixo da linha traço-ponto $\alpha_\Sigma > 0$ e vice-versa), para as seis primeiras energias válidas. A linha pontilhada espaçada é para $n = 2$, $|l| = 1$; a linha tracejada longa é para $n = 3$, $|l| = 1$; a linha tracejada espaçada é para $n = 3$, $|l| = 2$. 47
Figura 11 ε/m em função da razão $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$, com $\alpha_\Sigma = -1,8$ (acima da linha traço-ponto $\alpha_\Sigma < 0$ e vice-versa), para as seis primeiras energias válidas. As linhas sólidas são para $n = 1$, $|l| = 0$; as linhas pontilhadas são para $n = 2$, $|l| = 0$; as linhas pontilhadas espaçadas são para $n = 2$, $|l| = 1$; as linhas tracejadas são para $n = 3$, $|l| = 0$; as linhas tracejadas longas são para $n = 3$, $|l| = 1$; as linhas tracejadas espaçadas são para $n = 3$, $|l| = 2$. . . . 48
Figura 12 Versão ampliada da Figura 11. 49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Elementos da base do espaço das matrizes 4×4. 25
Tabela 2 – Número de soluções físicas para os intervalos de interesse 37

SUMÁRIO

1	**BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA E RELATIVÍSTICA**	**13**
1.1	A transição de uma descrição não-relativística para uma descrição relativística	17
1.1.1	**A equação de Klein-Gordon**	**19**
1.1.2	**A equação de Dirac**	**23**
1.2	O movimento circularmente simétrico	26
1.3	Simetrias	27
2	**A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON RESTRITA AO MOVIMENTO PLANAR CIRCULARMENTE SIMÉTRICO**	**30**
2.1	Simetrias do movimento circularmente simétrico de bósons de spin-0	30
2.2	Equações radiais da teoria de Klein-Gordon para o movimento circularmente simétrico	31
2.3	Oscilador harmônico	34
2.4	Problema de “Coulomb”	43
2.4.1	**Interação puramente vetorial**	**50**
2.4.2	**Interação puramente escalar**	**51**
2.4.3	$\alpha_\Delta = 0$	**51**
3	**A EQUAÇÃO DE DIRAC RESTRITA AO MOVIMENTO PLANAR CIRCULARMENTE SIMÉTRICO**	**54**
3.1	Geradores de simetria para o movimento circularmente simétrico para férmions de spin-1/2	54
3.1.1	**Geradores de simetrias contínuas da teoria de Dirac**	**56**
3.1.1.1	O operador de “spin”	57
3.1.1.2	O operador “momento angular orbital”	59
3.1.1.3	O terceiro componente do operador momento angular total	60
3.1.1.4	O operador spin-órbita	60
3.1.2	**Geradores de simetrias discretas da teoria de Dirac: paridade**	**61**
3.1.3	**Uma nova simetria dinâmica**	**63**
3.1.3.1	A conexão com a Física	68
3.1.3.2	O par da simetria de spin: a simetria de pseudospin	71
3.2	Equações radiais da teoria de Dirac para o movimento circularmente simétrico	72
3.3	Problema de “Coulomb”	75
3.3.1	**Interação puramente vetorial**	**83**
3.3.2	**Interação puramente escalar**	**84**

3.3.3 Simetria de spin 84

4 OS PRÓXIMOS PASSOS DO PRESENTE ESTUDO 87

REFERÊNCIAS 88

APÊNDICE A – O SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS . 89

APÊNDICE B – AS MATRIZES DE PAULI 92

APÊNDICE C – A CONJUGAÇÃO DE CARGA 94

APÊNDICE D – OS POLINÔMIOS DE LAGUERRE GENERALIZADOS 96

APÊNDICE E – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE EQUAÇÕES RADIAIS DA TEORIA NÃO-RELATIVÍSTICA 98

E.1 Potencial harmônico em coordenadas esféricas 98

E.2 Potencial de Coulomb em coordenadas esféricas 99

APÊNDICE F – A REGRA DOS SINAIS DE DESCARTES 100

APÊNDICE G – A EQUAÇÃO DE KUMMER 101

1 BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA QUÂNTICA NÃO-RELATIVÍSTICA E RELATIVÍSTICA

Erwin Schrödinger, ao buscar desenvolver uma teoria ondulatória para a matéria no primeiro quartel do século XX, inspirado pelo postulado de de Broglie e amparado pelos avanços realizados por Einstein na compreensão da natureza da luz assim como os de Planck no entendimento da radiação de corpo negro, se defrontou com a equação que hoje é conhecida como equação de Klein-Gordon, seguidamente abandonando-a, visto que esta possuía aparentes problemas contraditórios com as observações físicas da época (**????**). Em fato, isso se dava pelo desconhecimento do momento angular de spin do elétron.

A busca por uma teoria de natureza ondulatória para partículas é sustentada pelas relações de Planck-Einstein (**??**)

$$\varepsilon = h\nu, \tag{1.1}$$

$$p = \frac{h}{\lambda}, \tag{1.2}$$

em que se conectam a energia ε e o momento linear p de uma partícula material com a frequência ν e comprimento de onda λ da onda associada, respectivamente. a constante de proporcionalidade h é a constante de Planck. Faremos uma breve digressão sobre a teoria eletromagnética de Maxwell, que nos fornece uma equação de onda para descrever o campo eletromagnético, nos indicando como talvez encontrar algo equivalente para partículas com massa [1].

Da teoria eletromagnética, nomeadamente as equações de Maxwell, é possível extrair a equação de onda do campo eletromagnético (**??**). Vamos considerar, por simplificação do argumento, mas sem afetar a generalidade do resultado, a equação de onda para apenas uma dimensão

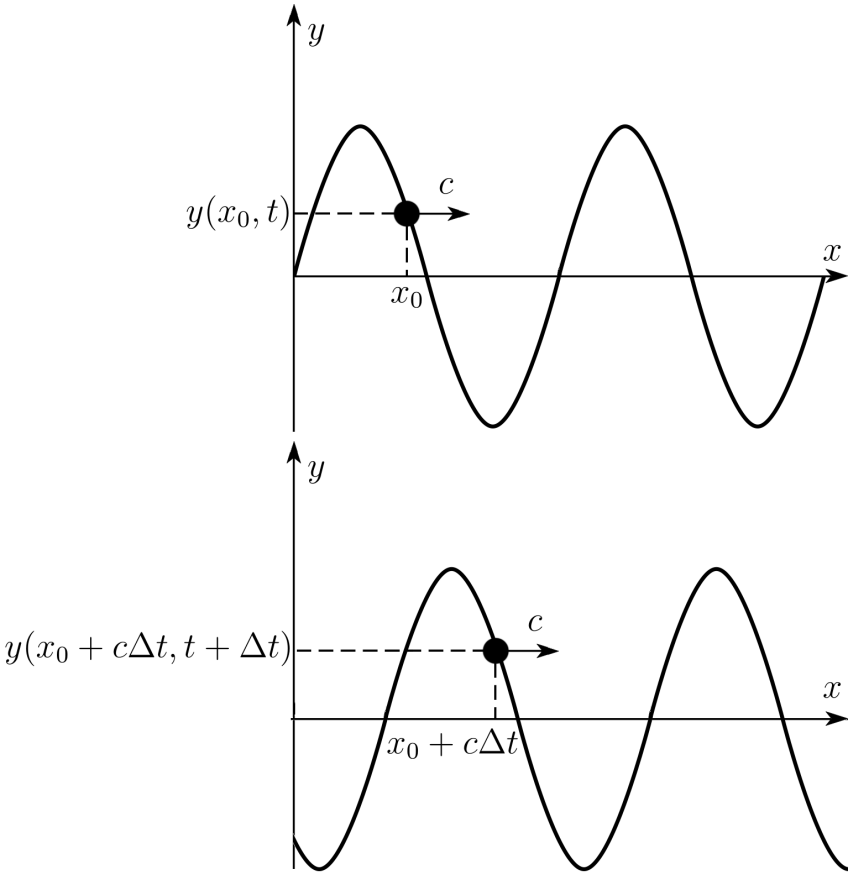
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) y(x,t) = 0, \tag{1.3}$$

em que $y(x,t)$ é a amplitude da onda e c é a velocidade da luz, conforme o diagrama abaixo.

Supondo uma solução da forma de uma onda senoidal viajando no sentido positivo de x, como mostrado na Figura 1

[1] Deve-se enfatizar que esse paralelo entre a teoria eletromagnética e a mecânica quântica não é plenamente realizado, mas apenas nos indica uma pista de como construir uma equação de onda adequada para a mecânica quântica.

Figura 1 – Onda viajando no sentido positivo de x à velocidade c nos instantes t e $t + \Delta t$, em que se destaca o ponto de mesma amplitude e derivada primeira em relação à x (fase). Nesta ilustração, $c\Delta t < \lambda/2$.



Fonte: Autor (2022).

$$y(x,t) = y_m \sin[k(x - ct)], \tag{1.4}$$

em que y_m é a amplitude máxima. Identificamos o chamado número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \tag{1.5}$$

definido em termos do comprimento de onda λ, que é determinado a partir da periodicidade espacial de $y(x,t)$

$$y(x + \lambda, t) = y(x,t). \tag{1.6}$$

Também definimos, por conveniência, a frequência angular ω, determinada em termos da frequência ν da onda

$$c = \lambda\nu \Rightarrow kc = 2\pi\nu = \omega. \tag{1.7}$$

Portanto, a amplitude da onda pode ser reescrita como

$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t), \tag{1.8}$$

e as relações (1.1) e (1.2) podem ser escritas da forma

$$\varepsilon = \hbar\omega, \tag{1.9}$$

$$p = \hbar k. \tag{1.10}$$

em que $\hbar = h/2\pi$.

O cerne do argumento aqui apresentado se dá no seguinte ponto: a substituição de (1.8) em (1.3) nos leva à igualdade

$$\varepsilon^2 = p^2c^2. \tag{1.11}$$

É pertinente portanto afirmar que a equação de onda nada mais é do que a equação de energia em forma de operadores aplicados em uma função que descreve o estado da grandeza estudada, neste caso a amplitude da onda. Isso nos permite corresponder as grandezas energia e momento linear com operadores diferenciais. Para isso, entendemos a potência em (1.11) como a dupla aplicação da grandeza — ou operador —:

$$\varepsilon \times \varepsilon = p \times pc^2. \tag{1.12}$$

Dessa forma, podemos fazer a correspondência com a equação de onda, resultando em

$$\varepsilon \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.13}$$

$$p \longrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \tag{1.14}$$

É de simples observação que o operador equivalente em três dimensões para o momento linear é

$$\boldsymbol{p} \longrightarrow -i\hbar\boldsymbol{\nabla}, \tag{1.15}$$

em que o operador $\boldsymbol{\nabla}$, em coordenadas cartesianas, é

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{\imath}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\jmath}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.16}$$

Para buscar uma equação de onda para uma partícula com massa, executamos o mesmo raciocínio na ordem inversa: substituímos os operadores na equação de energia para obter uma equação envolvendo operadores, que por sua vez agem em uma função que descreve o estado doo sistema. Aplicando este procedimento à equação de energia clássica, obtemos a equação de Schrödinger

$$\varepsilon = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r},t) \quad \Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(\boldsymbol{r},t) + V(\boldsymbol{r},t)\Psi(\boldsymbol{r},t), \tag{1.17}$$

em que $V(\boldsymbol{r},t)$ é a energia potencial[2] do sistema e $\Psi(\boldsymbol{r},t)$ é chamada de função de onda, e contém as informações sobre o sistema estudado.

As analogias entre a teoria eletromagnética e a teoria quântica, entretanto, se encerram por aqui, pois estamos lidando agora com uma equação cuja solução pode ser — e na verdade é — complexa. A conexão entre a função de onda Ψ e a partícula associada é dada pela chamada interpretação de Born (**??**). A interpretação se baseia na ideia de que, se o movimento da partícula está relacionado com a propagação de uma onda associada, ambos devem estar conectados no espaço. Em outras palavras, a "posição" da partícula e as regiões de alta amplitude da onda estão ligadas. Matematicamente, podemos enunciar essa ideia formulando uma equação de continuidade a partir de (1.17) — considerando que o potencial $V(\boldsymbol{r},t)$ seja real — e identificando a densidade de probabilidade J_0, que especifica a probabilidade por unidade de volume de se encontrar a partícula em uma posição $\boldsymbol{r}$ em um momento t. A equação de continuidade obtida é

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} + \frac{\partial J_0}{\partial t} = 0, \tag{1.18}$$

em que a densidade de probabilidade é

$$J_0(\boldsymbol{r},t) = \Psi^*(\boldsymbol{r},t)\Psi(\boldsymbol{r},t), \tag{1.19}$$

[2] Usalmente referido apenas como "potencial", aderiremos ao jargão.

tal que $\Psi^*(\boldsymbol{r},t)$ é o conjugado complexo da função de onda, e portanto J_0 é real e não-negativo, como é de se esperar de uma probabilidade. A função $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ por sua vez, deve corresponder à densidade de corrente de probabilidade, que especifica como a probabilidade flui no espaço e no tempo, e é dada por

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\Psi(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{\nabla}\Psi^*(\boldsymbol{r},t) - \Psi^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{\nabla}\Psi(\boldsymbol{r},t)\right]. \tag{1.20}$$

A teoria de Schrödinger pode nos fornecer dois tipos de estados: estados ligados e estados de espalhamento. No presente trabalho nos interessa o primeiro, estados que devido à sujeição a um potencial externo, restringem a partícula em certas regiões do espaço. Ademais, estes estados são tais que as funções de onda podem ser normalizadas em todo o espaço V de forma que a probabilidade total seja a unidade

$$\int_V d^3\boldsymbol{r}\ J_0 = 1. \tag{1.21}$$

Esta condição restringe as formas permitidas para as funções de onda, que deverão ser do tipo quadrado integrável, *i.e.*, tais que $J_0 = |\Psi(\boldsymbol{r},t)|^2$ seja integrável. Isto impõe severas condições sobre a forma da função na origem e em seu comportamento assintótico.

Em suma, a conjunção da equação de Schrödinger com a interpretação de Born nos oferece uma teoria quântica da matéria que une seus aspectos ondulatórios e de partícula em um regime não-relativístico, a chamada teoria de Schrödinger.

1.1 A TRANSIÇÃO DE UMA DESCRIÇÃO NÃO-RELATIVÍSTICA PARA UMA DESCRIÇÃO RELATIVÍSTICA

A teoria da relatividade especial se baseia em dois postulados:

1. A velocidade da luz c é a mesma em qualquer referencial inercial;
2. As leis físicas são igualmente válidas em todos os referenciais inerciais.

Para melhor descrição de eventos físicos que contemplem os axiomas da teoria da relatividade especial, introduzimos um espaço-tempo quadridimensional em que a grandeza ct aparece como uma nova dimensão, adjunta às tradicionais três dimensões espaciais, formando o espaço de Minkowski. Neste espaço, o vetor posição — ou quadrivetor posição — pode ser representado por um objeto denominado “contravariante” ou “covariante”, dados respectivamente por

$$x^\mu = \{ct, x, y, z\} = \{ct, \boldsymbol{r}\}\,, \tag{1.22}$$

$$x_\mu = \{ct, -x, -y, -z\} = \{ct, -\boldsymbol{r}\}\,, \tag{1.23}$$

que se relacionam por

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \tag{1.24}$$

em que $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski, que caracteriza o espaço-tempo, definido como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

A relação entre dois vetores posição em dois referenciais inerciais diferentes, dados por $x^\mu = \{ct, \boldsymbol{r}\}$ e $x'^\mu = \{ct', \boldsymbol{r'}\}$, respectivamente, é construída por intermédio de uma transformação de Lorentz (**??**) [3]

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{1.26}$$

onde $\Lambda^\mu{}_\nu$ representam os elementos da matriz transformação de Lorentz, e estão condicionados pela restrição que mantêm o elemento de espaço-tempo ds^2, definido como o produto escalar da posição consigo mesmo — ou norma da posição —, invariante

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx \cdot dx \\ &= dx^\mu dx_\mu = dx'^\mu dx'_\mu \\ &= c^2 dt^2 - d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = c^2 dt'^2 - d\boldsymbol{r'} \cdot d\boldsymbol{r'}, \end{aligned} \tag{1.27}$$

o que produz a condição

[3] Pode-se adicionar a essa transformação uma translação no espaço-tempo, constituindo a chamada transformação de Poincaré.

$$\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}\Lambda^{\beta}{}_{\delta}g_{\alpha\beta} = g_{\gamma\delta}. \tag{1.28}$$

O quadrivetor posição constitui o protótipo de todos os vetores deste espaço, de tal forma que para dois quadrivetores quaisquer $a^{\mu} = \{a^0, \boldsymbol{a}\}$ e $b^{\mu} = \{b^0, \boldsymbol{b}\}$, o elemento

$$a^{\mu}b_{\mu} = a^0 b_0 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.29}$$

também será um escalar de Lorentz.

A introdução dos princípios da relatividade especial, particularmente o segundo, colocam a teoria de Schrödinger em sério risco, pois ela os viola. Em primeiro lugar, a equação de Schrödinger não é invariante sob transformações de Lorentz — ou covariante de Lorentz —, o que fisicamente corresponde à equação não possuir a mesma forma em diferentes referenciais inerciais. Em segundo lugar, o fato de o tempo perder seu caráter privilegiado de dimensão inalterada ao se mudar de referencial na teoria relativística nos faz ter que revisitar o conceito de densidade de probabilidade.

Além desses problemas profundos, ainda é fato notório que a teoria não-relativística falha em descrever certos fenômenos tais como a criação de pares, a polarização de vácuo, e outras formas de violação da conservação de probabilidade em regimes de altas energias (**??**). Na verdade, todas essas aparentes limitações se devem ao fato de a teoria de Schrödinger não ser covariannte.

1.1.1 A equação de Klein-Gordon

É indispensável então que haja uma generalização relativística da teoria de Schrödinger, para que os problemas supracitados possam ser superados. O passo natural a se tomar é considerar a expressão relativística de energia, que pode ser escrita em termos do quadrimomento, grandeza do espaço-tempo que unifica energia e momento[4]

$$p^{\mu} = \{\varepsilon, \boldsymbol{p}\} = i\left\{\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right\}, \tag{1.30}$$

produzindo

$$\varepsilon^2 = m^2 + \boldsymbol{p}^2 \quad \Rightarrow \quad p^{\mu}p_{\mu} = m^2. \tag{1.31}$$

Vamos utilizar as relações entre as grandezas e os operadores diferenciais para obter uma equação de operadores, que aplicadas em uma função de onda, nos forneça uma equação

[4] A partir daqui, recorreremos ao uso do sistema de unidades naturais em que $\hbar = c = 1$.

covariante. Deste processo surge a equação de Klein-Gordon, cuja forma manifestamente covariante é

$$(p^{\mu}p_{\mu} - m^2)\Psi(\boldsymbol{r}, t) = 0. \tag{1.32}$$

Expressamos portanto uma equação de segunda ordem que fornece uma função de onda. Essa equação, como dito anteriormente, foi descartada por Schrödinger em 1926, mas foi estudada mais a fundo por Klein e Gordon (**??**), que a propuseram como adequada à descrição relativística do elétron. Embora a covariância da equação seja autoevidente, ela (aparentemente) exibe dois problemas relacionados à sua interpretação como equação de estado de uma partícula (livre) por ser uma equação de segunda ordem.

Em primeiro lugar, a equação admite soluções com energia negativa. Esse fato está intimamente relacionado com a ordem da equação no tempo, o que pode ser observado ao realizar a separação das variáveis temporal e espaciais via o *Ansatz*

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi(\boldsymbol{r})e^{-i\varepsilon t}, \tag{1.33}$$

de forma que a equação independente do tempo será

$$\left(\nabla^2 + \varepsilon^2 - m^2\right)\varphi = 0, \tag{1.34}$$

em que ε é a constante de separação e corresponde à energia total do sistema. A solução de onda plana é

$$\varphi = Ae^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{1.35}$$

onde $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{r}$ representaram os vetores momento e posição, respectivamente. Substituindo o *Ansatz* na equação (1.34), obtetmos

$$-\boldsymbol{p}^2 + \varepsilon^2 - m^2 = 0 \therefore \varepsilon = \pm\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}, \tag{1.36}$$

em que fica evidente a inevitabilidade de soluções negativas.

Essa possibilidade acarreta um segundo problema: não é possível definir uma densidade de probabilidade. A equação de continuidade

$$\frac{\partial J_0}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{1.37}$$

só é satisfeita se J_0 e $\boldsymbol{J}$ forem definidos, a menos de uma constante multiplicativa comum aos dois, como

$$J_0 = \frac{i}{2m}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\right) \tag{1.38}$$

e

$$\boldsymbol{J} = -\frac{i}{2m}(\Psi^* \boldsymbol{\nabla} \Psi - \Psi \boldsymbol{\nabla} \Psi^*). \tag{1.39}$$

Já que Ψ e $\partial\Psi/\partial t$ podem assumir valores arbitrários em algum instante, a expressão para J_0 não é necessariamente não-negativa. Isso já se torna aparente para o caso livre, em que ela assume a forma

$$J_0 = \frac{\varepsilon}{m}\Psi^* \Psi. \tag{1.40}$$

Assim sendo, J_0 não pode ser interpretada como uma densidade de probabilidade. Contudo, Pauli e Weisskopf (**??**) demonstraram que se (1.38) e (1.39) forem interpretadas como densidade e corrente de carga, respectivamente, esse problema seria resolvido, o que já aponta para as limitações da interpretação de partícula única da teoria. De fato, a tentativa de interpretar as teorias relativísticas como descrições de partícula única são essencialmente problemáticas. Essas teorias são salvas apenas pela reinterpretação fornecida pelo novo paradigma da teoria quântica de campos, que trata as teorias como teorias de campos tais que a sua quantização determina uma interpretação de partícula adequada (**??**). Quanto à primeira patologia, demonstra-se que na verdade esta possibilidade de energias negativas está relacionada à descrição de antipartículas (**??**), cuja existência à época carecia de evidência experimental.

É possível por meio de uma simples mudança estender a equação de Klein-Gordon para o caso em que a partícula não é mais livre, mas sujeita a um campo eletromagnético externo minimamente acoplado descrito por um potencial vetorial $V^\mu = (V_v, \boldsymbol{V_v})$. Para isso, deve-se transmutar o operador quadrimomento de forma análoga ao que se transforma o momento na mecânica quântica não relativística, *i.e.*, (**??**)

$$p^\mu \to p^\mu - V^\mu. \tag{1.41}$$

Desta forma, a equação de Klein-Gordon para uma interação eletromagnética minimamente acoplada será

$$[(p^\mu - V^\mu)(p_\mu - V_\mu) - m^2]\Psi = 0. \tag{1.42}$$

Podemos ainda acoplar um potencial escalar V_s (no sentido de Lorentz) à massa do sistema, obtendo

$$[(p^\mu - V^\mu)(p_\mu - V_\mu) - (m + V_s)^2]\Psi = 0. \tag{1.43}$$

Assim como na teoria não-relativística, a equação de continuidade nos fornece uma expressão que nos permite normalizar as autofunções. Dispondo da notação covariante, escrevemos a equação de continuidade

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0, \tag{1.44}$$

em que

$$J^\mu(x) = \frac{i}{2m}(\Psi^*\partial^\mu\Psi - \Psi\partial^\mu\Psi^*) - \frac{1}{m}V^\mu\Psi^*\Psi. \tag{1.45}$$

Identificamos então que a integral de normalização das autofunções é

$$\int_V d^3\boldsymbol{r} J_0 = \pm 1, \tag{1.46}$$

em que o sinal do lado direito da equação é utilizado para partículas de carga positiva $(+)$ e negativa $(-)$.

A discordância da equação de Klein-Gordon com a descrição do espectro do hidrogênio foi o golpe final para que ela fosse inicialmente descartada como candidata à contraparte relativística da equação de Schrödinger para o elétron. Efetivamente, a equação de Klein-Gordon não modela o elétron, visto que ela não contempla o grau de liberdade do spin da partícula. Ela na verdade fornece a descrição relativística adequada de bósons de spin 0. Isto posto, podemos afirmar ainda que a equação de Schrödinger descreve bósons de spin 0 no regime de baixas energias, visto que a equação é obtida ao se tomar o limite não-relativístico da equação de Klein-Gordon.

Contudo, é possível também incorporar o grau de liberdade de spin na teoria não-relativística. Para isso, basta rescrever o termo de energia cinética da equação de Schrödinger com acoplamento mínimo em termos de matrizes de Pauli (**??**), o que por sua vez requer que o estado seja descrito

por um espinor de duas componentes, sendo um para cada estado possível de spin. Esta adaptação da equação de Schrödinger, conhecida como equação de Pauli, é obtida ao se tomar o limite não-relativístico da equação que realmente descreve o elétron: a equação de Dirac, tópico da próxima seção.

1.1.2 A equação de Dirac

Visto que a teoria de Klein-Gordon não é capaz de contemplar o grau de liberdade de spin da partícula, outra teoria é necessária para descrever as partículas que possuem essa característica. Buscando na verdade uma generalização relativística da teoria de Schrödinger que não possuísse as aparentes patologias da teoria de Klein-Gordon, Paul Dirac encontrou a equação adequada para descrever partículas de spin-1/2, tal como o elétron (**??**).

Para uma partícula de spin-1/2 com massa m em um espaço-tempo de 3+1 dimensões, a equação de Dirac é

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(x) = 0, \tag{1.47}$$

em que γ^μ são um conjunto de matrizes que obedecem à álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \tag{1.48}$$

dada em termos do tensor métrico do espaço-tempo de Minkowski (1.25). A função de onda Ψ é um espinor de quatro componentes, tal que cada componente obedece à equação de Klein-Gordon.

A teoria de Dirac, como dito acima, foi buscada na intenção de se construir uma interpretação probabilística aos moldes da teoria de Schrödinger. De fato, podemos determinar uma equação de continuidade em que é possível definir uma densidade de probabilidade. Seja o chamado espinor adjunto

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0, \tag{1.49}$$

a quadricorrente de densidade que satisfaz à equação de continuidade (1.44) é

$$J^\mu(x) = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \tag{1.50}$$

com a imposição de que as matrizes γ^μ sejam hermitianas com respeito à γ^0:

$$(\gamma^0\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu. \tag{1.51}$$

Identificamos portanto a densidade

$$J^0 = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi, \tag{1.52}$$

que é sempre não-negativa.

Para a teoria de Dirac portanto, a condição de normalização assumirá uma forma muito similar à da teoria não-relativística:

$$\int_V d^3\boldsymbol{r}\Psi^\dagger\Psi = 1. \tag{1.53}$$

Embora o tratamento estatístico da teoria de Dirac seja mais simples do que o da teoria de Klein-Gordon, aqui também surge a inevitabilidade de soluções com energia negativa.

As matrizes γ^μ são linearmente independentes, mas elas não formam uma base do espaço vetorial das matrizes 4×4, pois são necessários dezesseis elementos matriciais linearmente independentes para que qualquer matriz 4×4 possa ser escrita como uma combinação linear dessas dezesseis matrizes. Com as matrizes γ^μ, e a matriz identidade $\mathbb{1}_4$, já dispomos de cinco elementos. Outra matriz linearmente independente às citadas é a matriz γ^5, definida por

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{1.54}$$

Com essas seis matrizes, é possível construir uma base de 16 elementos $\Gamma^{(m)}$, que podem ser categorizados em termos de como se comportam sob transformações de Lorentz as formas bilineares covariantes $\bar{\Psi}\Gamma^{(m)}\Psi$. Assim, identificamos um elemento escalar $\Gamma^{(S)}$, quatro elementos vetoriais $\Gamma^{(V)}$, seis elementos tensoriais $\Gamma^{(T)}$, quatro elementos pseudovetoriais (ou axiais) $\Gamma^{(A)}$, e um elemento pseudoescalar $\Gamma^{(P)}$, dispostos na Tabela 1.

Tabela 1 – Elementos da base do espaço das matrizes 4×4.

Notação	nº	Forma explícita
$\Gamma^{(S)} = \mathbb{1}$	1	$\mathbb{1}$
$\Gamma^{(V)} = \gamma^\mu$	4	$\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$
$\Gamma^{(T)} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	6	$\gamma^0\gamma^1, \gamma^0\gamma^2, \gamma^0\gamma^3, \gamma^1\gamma^2, \gamma^1\gamma^3, \gamma^2\gamma^3$
$\Gamma^{(A)} = \gamma^\mu\gamma^5$	4	$i\gamma^0\gamma^2\gamma^3, i\gamma^0\gamma^3\gamma^1, i\gamma^0\gamma^1\gamma^2, i\gamma^1\gamma^2\gamma^3$
$\Gamma^{(P)} = \gamma^5$	1	$i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

Fonte: Wachter, A. Relativistic Quantum Mechanics

Existem diversos conjuntos de matrizes, relacionadas por transformações unitárias entre si, as chamadas representações, que satisfazem tanto à álgebra de Clifford quanto à propriedade (1.51). Ao longo deste trabalho, será utilizada a representação de Dirac, também chamada de representação padrão

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

em que $\mathbb{1}_2$ é a matriz identidade 2×2, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$, e $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli (vide Apêndice B). Nesta representação, os componentes inferiores do espinor são suprimidos em relação aos componentes superiores no limite não-relativístico, e a matriz γ^5 possui a forma

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.56}$$

Da mesma forma que na seção anterior, podemos incluir interações de diversas naturezas na equação de Dirac. Nos interessa no presente trabalho as interações vetoriais $V^\mu = (V_v, \boldsymbol{V_v})$, introduzidas pela prescrição

$$p^\mu \to p^\mu - V^\mu, \tag{1.57}$$

e as interações de natureza escalar V_s, sob a prescrição

$$m \to m + V_s, \tag{1.58}$$

resultando em

$$\left[\gamma^{\mu}\left(p_{\mu}-V_{\mu}\right)-\left(m+V_{s}\right)\right]\Psi=0. \tag{1.59}$$

Para os nossos intentos, é conveniente rescrever a equação de Dirac em sua formulação hamiltoniana, facilmente derivada de (1.59). Já na forma independente do tempo,

$$H\Psi=\varepsilon\Psi, \tag{1.60}$$

em que ε é a energia total do sistema e H é o operador hamiltoniano

$$H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta(m+V_{s})+V_{v}, \tag{1.61}$$

onde tomamos a parte espacial da interação vetorial como nula, pois ela vai além do escopo de interesse deste trabalho. As matrizes $\boldsymbol{\alpha}=\gamma^{0}\boldsymbol{\gamma}$ e $\beta=\gamma^{0}$ satisfazem às seguintes propriedades

$$\alpha_{i}\alpha_{j}=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\Sigma_{k}\quad,\quad i=1,2,3 \tag{1.62}$$

$$\{\alpha_{i},\alpha_{j}\}=2\delta_{ij} \tag{1.63}$$

$$\{\alpha_{i},\beta\}=0, \tag{1.64}$$

e são escritas na representação padrão como

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix}\quad,\quad\beta=\begin{pmatrix}\mathbb{1}_{2} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}_{2}\end{pmatrix}. \tag{1.65}$$

1.2 O MOVIMENTO CIRCULARMENTE SIMÉTRICO

No presente trabalho, nos interessa especificamente os regimes de estados ligados tais que a partícula esteja restrita a um plano de movimento, que por simplicidade, escolheremos como o plano xy do sistema de coordenadas cartesianas. Em termos da dinâmica do problema, isto implica em as soluções serem autoestados do componente z do momento linear, ou em termos da equação de autovalor,

$$-i\frac{\partial}{\partial z}\Psi_{p_{z}}=p_{z}\Psi_{p_{z}}, \tag{1.66}$$

sendo p_z o autovalor do componente z do momento linear e Ψ_{p_z} o respectivo autoestado. No caso da teoria de Klein-Gordon, isto nos permite fatorar diretamente a dependência em z da função de onda. Empregando o sistema de coordenadas cilíndricas — vide Apêndice A —, escrevemos

$$\Psi_{p_z}(\boldsymbol{r}, t) = \varphi(\rho, \phi, t)e^{-izp_z}. \tag{1.67}$$

Ademais, fixamos o autovalor $p_z = 0$, o que restringe a dinâmica do problema a um plano fixo e torna a função de onda independente de z. Para a teoria de Dirac, dada a estrutura espinorial do estado, tal fatoração não pode ser simplesmente realizada. Para este caso, procederemos como a referência (**??**), ao observar que se não há momento ou forças em z, o espinor pode ser construído com a restrição

$$p_z\Psi = 0, \tag{1.68}$$

que efetivamente reduz um grau de liberdade do problema.

Isto posto, faremos ainda a restrição ao movimento circularmente simétrico, ou seja, todos os potenciais do problema dependerão apenas da distância à origem do sistema no plano de movimento, para o qual o sistema de coordenadas cilíndricas é muito conveniente de utilizar.

1.3 SIMETRIAS

O último preparativo necessário para que iniciemos a discussão são algumas considerações sobre o conceito de simetria na mecânica quântica. A busca por essas propriedades de um sistema físico são fundamentais para determinarmos soluções adequadas, visto que elas revelam invariâncias do sistema, o que na prática reduz o reino de possibilidades de soluções para aquelas em que essa invariância é respeitada. Segundo Roman : "*First of all, the symmetries give a guide for solving the dynamical equations: they restrict the forms the solution can take. Thus all admissible solutions will be classified by their symmetry character, to speak loosely*"[5].(**??**)

A invariância, em termos matemáticos, pode ser entendida como a característica do sistema físico ser insensível à transformação de certas quantidades, *i.e.*, o estado do sistema não é afetado pela variação dessa quantidade. A existência dessas transformações "irrelevantes" apontam por sua vez para o surgimento de um conjunto de simetrias que as equações que descrevem o sistema obedecem. Devemos ser capazes de determinar uma lei de transformação que conecta estados que possuem especificações diferentes dessa propriedade, mas representam estados equivalentes, e por sua vez caracterizar explicitamente a simetria. Na teoria quântica, sabemos que para conectar dois estados fisicamente equivalentes, uma transformação $\mathcal{U}$ unitária, *i.e.*, tal que

[5] Tradução simples: "Em primeiro lugar, as simetrias dão um guia para se resolver as equações dinâmicas: elas restringem as formas que a solução pode ter. Logo todas as soluções admissíveis serão classificadas pela característica da simetria, para falar não rigorosamente."

$$\mathcal{U}^{\dagger} = \mathcal{U}^{-1}, \tag{1.69}$$

é adequada, visto que ela preserva o produto escalar (**??**) — em outras palavras, as características físicas do sistema [6]. Seja um estado Ψ e um observável $\mathcal{O}$, uma simetria do sistema será descrita pelo operador $\mathcal{U}$ tal que

$$\Psi^{(\mathcal{U})} = \mathcal{U}\Psi, \tag{1.70}$$

$$\mathcal{O}^{(\mathcal{U})} = \mathcal{U}\mathcal{O}\mathcal{U}^{\dagger}, \tag{1.71}$$

correspondem ao estado e ao observável transformado, respectivamente. A forma de $\mathcal{U}$ dependerá dos parâmetros da simetria em questão, de tal forma que este operador constitui o "código de translação" entre duas descrições permitidas pela simetria (**??**).

Ao considerarmos grupos de simetria, distinguimos dois casos: simetrias contínuas e discretas. Para as simetrias contínuas, podemos construir a lei de transformação a partir de transformações infinitesimais partindo da operação identidade

$$\mathcal{U} = 1 - i\epsilon\mathcal{G}, \tag{1.72}$$

de forma que a transformação infinitesimal será

$$\delta\Psi = \Psi^{(\mathcal{U})} - \Psi = -i\epsilon\mathcal{G}\Psi, \tag{1.73}$$

em que o parâmetro ϵ é infinitesimal e $\mathcal{G}$ é o chamado gerador da simetria. Construímos a transformação nesta forma específica, pois a unitariedade de $\mathcal{U}$ implica em $\mathcal{G}$ ser hermitiano, o que nos permite associá-lo à grandeza conservada associada à simetria. $\mathcal{G}$ é portanto o observável físico adequado. Sabendo que o operador que representa a simetria comuta com o hamiltoniano,

$$[\mathcal{U}, H] = 0 \tag{1.74}$$

decorre obviamente que

$$[\mathcal{G}, H] = 0. \tag{1.75}$$

[6] A transformação, conforme (**??**), também pode ser antiunitária, caso que não será necessário neste trabalho.

Para simetrias discretas, não podemos realizar tal processo de encontrar um observável que seja o análogo quântico a grandezas clássicas, portanto utilizaremos o próprio operador unitário, sem buscar identificar na teoria clássica uma contraparte.

Para o escopo deste trabalho, não nos interessam os detalhes sobre as simetrias e as ferramentas matemáticas para descrevê-las, sendo este breve resumo apenas uma contextualização para o que virá na frente. Nos interessa especificamente a relação das simetrias com os números quânticos e as degenerescências. Seja um estado Ψ que satisfaça à equação dinâmica

$$H\Psi = \varepsilon\Psi. \tag{1.76}$$

Seja também uma simetria do sistema, em que (1.75) é satisfeita. Disto decorre que

$$\mathcal{G}H\Psi = \varepsilon\mathcal{G}\Psi \tag{1.77}$$

$$H\left(\mathcal{G}\Psi\right) = \varepsilon\left(\mathcal{G}\Psi\right). \tag{1.78}$$

Então $\mathcal{G}\Psi$ também é autoestado de H com mesmo autovalor ε. Se Ψ e $\mathcal{G}\Psi$ forem linearmente independentes, diz-se que o autovalor será degenerado.

Com um conjunto completo de observáveis mutuamente comutantes (**??**), *i.e.*, um conjunto de operadores que caracterize todos os graus de liberdade do sistema, podemos determinar sem ambiguidade os estados rotulando-os pelos autovalores, aos quais associaremos os números quânticos.

Esta dissertação tem por objetivo investigar simetrias e suas propriedades no regime do movimento planar, e mais especificamente, de sistemas circularmente simétricos. Iniciaremos o estudo abordando a teoria de Klein-Gordon, discutindo as simetrias pertinentes e avaliando sistemas físicos específicos. Adiante, estudaremos configurações semelhantes na teoria de Dirac, realizando também um estudo dos diversos geradores de simetrias encontrados para sistemas circularmente simétricos, onde identificaremos o surgimento de duas simetrias adicionais em condições específicas dos potenciais: as simetrias de spin e pseudospin.

Nos capítulos seguintes, desenvolveremos em detalhes argumentos relativos às características particulares de sistemas sujeitos às misturas de um potencial escalar e da componente temporal de um potencial vetorial (faremos $\boldsymbol{V_v} = \mathbf{0}$) que permitam a formação de estados ligados em termos de funções analíticas. No caso da teoria de Dirac, também discutiremos a natureza e as particularidades das simetrias adicionais mencionadas acima.

2 A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON RESTRITA AO MOVIMENTO PLANAR CIRCULARMENTE SIMÉTRICO

O nosso caso de interesse é em sistemas cuja expressão das equações no sistema de coordenadas cilíndricas (ρ,ϕ,z) é mais vantajoso, devido às suas simetrias geométricas (veja Apêndice A). Vamos então desenvolver a equação (1.43) considerando que $\boldsymbol{V_v} = \mathbf{0}$ e os demais potenciais são independentes do tempo e circularmente simétricos. Isso consiste em dizer que os potenciais são da forma

$$V_v = V_v(\rho) \quad , \quad V_s = V_s(\rho). \tag{2.1}$$

Considerando (1.67), dispomos do *Ansatz*

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \varphi(\rho, \phi) e^{i(z p_z - \varepsilon t)}, \tag{2.2}$$

em que ε é a energia total do sistema. Portanto obtemos a equação para os estados estacionários[1] $\varphi(\boldsymbol{r})$

$$[(\varepsilon - V_v)^2 + \nabla^2 - (m + V_s)^2]\varphi = 0. \tag{2.3}$$

Explicitando o operador laplaciano em coordenadas cílindricas, a equação (2.3) torna-se

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{L_z^2}{\rho^2} + (\varepsilon - V_v)^2 - (m + V_s)^2\right]\varphi = 0, \tag{2.4}$$

em que identificamos o operador momento angular (A.18).

2.1 SIMETRIAS DO MOVIMENTO CIRCULARMENTE SIMÉTRICO DE BÓSONS DE SPIN-0

O único termo da equação (2.4) que envolve a coordenada polar é justamente o termo de momento angular, o que nos sugere que podemos propor um *Ansatz* que separa as partes radial e angular da equação recorrendo às autofunções de L_z, dadas por (A.21), visto que L_z comuta com o operador que atua no estado φ. Vamos propor a seguinte forma conveniente

[1] por simplicidade, foi escolhido o autovalor $p_z = 0$.

$$\varphi_l(\rho,\phi) = \frac{U_l(\rho)}{\sqrt{\rho}}\Phi_l(\phi), \tag{2.5}$$

o que nos conduz diretamente à equação radial do problema

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2U_l}{d\rho^2} + \left(-\frac{V_v^2 - V_s^2}{2m} + \frac{\varepsilon V_v + mV_s}{m} + \frac{l^2 - 1/4}{2m\rho^2}\right)U_l = \frac{\varepsilon^2 - m^2}{2m}U_l. \tag{2.6}$$

O *Ansatz* construído relaciona-se com a invariância do sistema sob rotações no plano, cuja simetria relacionada tem por gerador o operador L_z (**??**), constituindo uma transformação contínua. Retomando (1.67), as autofunções também são autoestados do componente z do momento linear, com autovalor p_z, que foi fixado em $p_z = 0$. Assim, com estes dois números quânticos, mais um número quântico que será determinado a partir da equação radial, temos rótulos o suficiente para dar conta de todos os graus de liberdade do problema.

Para a teoria de Klein-Gordon também interessará a transformação de paridade, ou reversão espacial, que é a transformação discreta que reverte o sinal das coordenadas espaciais e mantém o sinal da coordenada temporal

$$\boldsymbol{r} \longrightarrow -\boldsymbol{r} \tag{2.7}$$

$$t \longrightarrow t. \tag{2.8}$$

Esta transformação, aplicada em (2.4), nos leva a uma equação para $\varphi(-\boldsymbol{r})$. A paridade constituirá uma transformação de simetria do sistema se a função $\varphi(-\boldsymbol{r})$ também for solução de (2.4). Para isso ser verdadeiro, os potenciais envolvidos devem ser invariantes sob (2.7) e (2.8), de forma que a equação para $\varphi(-\boldsymbol{r})$ seja idêntica à (2.4). Em coordenadas cilíndricas, a reversão (2.7) não afeta a componente radial ρ, de forma que os potenciais (2.1) de fato não se alteram após reversão espacial. Portanto, concluímos que a transformação de paridade constitui uma transformação de simetria para sistemas circularmente simétricos na teoria de Klein-Gordon.

2.2 EQUAÇÕES RADIAIS DA TEORIA DE KLEIN-GORDON PARA O MOVIMENTO CIRCULARMENTE SIMÉTRICO

A equação (2.6) já nos permite inferir certas propriedades: claramente a solução U_l depende apenas de $|l|$, o que implica em uma degenerescência essencial; a equação não gera estados ligados para uma interação puramente vetorial com $\lim_{\rho\to\infty}|V_v| = \infty$, mas com a introdução de uma interação escalar, isto passa a ser possível se a seguinte condição for satisfeita

$$\lim_{\rho\to\infty}|V_s| \geq \lim_{\rho\to\infty}|V_v|\,; \tag{2.9}$$

para uma interação puramente escalar, as autoenergias serão simétricas em relação à $\varepsilon = 0$. Por a mistura dos potenciais escalares e vetoriais ser determinante para o surgimento de estados ligados, sugerimos as seguintes redefinições

$$V_\Sigma = V_v + V_s \quad \text{e} \quad V_\Delta = V_v - V_s, \tag{2.10}$$

que levam à seguinte mudança na equação radial

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2U_l}{d\rho^2} + \left[\frac{(\varepsilon+m)V_\Sigma + (\varepsilon-m)V_\Delta - V_\Sigma V_\Delta}{2m} + \frac{l^2-1/4}{2m\rho^2}\right]U_l = \frac{\varepsilon^2-m^2}{2m}U_l. \tag{2.11}$$

Definindo a energia não relativística $\varepsilon_\pm^{NR} \equiv \varepsilon \mp m$, em que o índice $+$ corresponde à partícula e o índice $-$ corresponde à antipartícula, obtemos os limites não-relativísticos da equação (2.11)

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2U_l}{d\rho^2} + \left[\frac{\varepsilon_+^{NR}}{2m}V_\Delta + V_\Sigma\left(1-\frac{V_\Delta}{2m}\right) + \frac{l^2-1/4}{2m\rho^2}\right]U_l = \varepsilon_+^{NR}U_l \tag{2.12}$$

e

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2U_l}{d\rho^2} + \left[\frac{\varepsilon_-^{NR}}{2m}V_\Sigma - V_\Delta\left(1+\frac{V_\Sigma}{2m}\right) + \frac{l^2-1/4}{2m\rho^2}\right]U_l = -\varepsilon_-^{NR}U_l. \tag{2.13}$$

É interessante observar que, se o potencial for muito fraco na região análoga à região classicamente permitida — em outras palavras, regiões de alta densidade de carga — de maneira que possamos afirmar que a intensidade dos potenciais é muito menor que m, a aproximação não-relativística se reduz para uma forma muito mais simples

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2U_l}{d\rho^2} + \left(V_\Sigma + \frac{l^2-1/4}{2m\rho^2}\right)U_l = \varepsilon_+^{NR}U_l \tag{2.14}$$

e

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2U_l}{d\rho^2} + \left(-V_\Delta + \frac{l^2-1/4}{2m\rho^2}\right)U_l = -\varepsilon_-^{NR}U_l. \tag{2.15}$$

A condição de normalização da teoria de Klein-Gordon para uma mistura de interações vetorial e escalar, conforme (1.46), é

$$\varepsilon \int_0^\infty d\rho \ |U_l|^2 - \int_0^\infty d\rho \ V_v \, |U_l|^2 = \pm m. \tag{2.16}$$

A estratégia geral neste capítulo será buscar mapear nosso problema da teoria relativística nos problemas não-relativísticos apresentados no Apêndice E. Para este fim é necessário que as autofunções aqui estudadas satisfaçam às condições (E.2) e (E.3). Mediante avaliação das condições impostas pela teoria de Klein-Gordon em relação àquelas da teoria não-relativística, podemos determinar se a estratégia proposta será exequível. Para tanto, convém estudar (2.16) avaliando a finitude do lado esquerdo da equação — recorrendo à desigualdade triangular —, o que nos conduz a

$$\int_0^\infty d\rho \ |U_l|^2 < \infty, \tag{2.17}$$

$$\int_0^\infty d\rho \ |V_v| \, |U_l|^2 < \infty. \tag{2.18}$$

A condição (2.17), tão presente na mecânica quântica não-relativística, que demanda que U_l seja quadrado integrável, poderá ser satisfeita se

$$\lim_{\rho \to 0} |U_l| \propto \rho^{-1/2+\epsilon} \ , \ \epsilon > 0 \tag{2.19}$$

e

$$\lim_{\rho \to \infty} |U_l| = 0. \tag{2.20}$$

Se V_v se comportar como

$$\lim_{\rho \to 0} |V_v| \propto \rho^{d_2}, \tag{2.21}$$

sendo d_2 um parâmetro qualquer, observamos que a inequação (2.18) imporá novas condições sobre U_l na vizinhança da origem:

$$\lim_{\rho \to 0} |U_l| \propto \rho^{-1/2-d_2/2+\epsilon} \ , \ \epsilon > 0. \tag{2.22}$$

Na prática a situação será a de que se o potencial for tal que $d_2 > 0$, a condição (2.19) será mais forte, e no caso contrário (2.22) será a mais forte. Basta verificar a condição mais forte para que ambas sejam satisfeitas, e desta forma, poderemos avaliar finalmente se o mapeamento será possível. Com a equação radial (2.11) e a equação de normalização (2.16) em mãos, assim como suas condições de normalizabilidade, poderemos ver isso de forma explícita para alguns sistemas de interesse. Aproveitaremos também para apontar uma inconsistência disponível na literatura (**????**), em que a discussão sobre a normalização é inadequada, haja vista que se considera a mesma normalização usada na teoria não-relativística.

2.3 OSCILADOR HARMÔNICO

O primeiro caso que iremos estudar são os dos potenciais do tipo oscilador harmônico, descritos por

$$V_\Sigma = \frac{1}{2}K_\Sigma \rho^2 \quad \text{e} \quad V_\Delta = \frac{1}{2}K_\Delta \rho^2, \tag{2.23}$$

nos fornecendo a equação, que para fins de análise, será disposta na forma de uma equação tipo Schrödinger

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \left\{ \frac{1}{4}K_\Sigma K_\Delta \rho^4 - \frac{1}{2}\left[K_\Sigma(\varepsilon + m) + K_\Delta(\varepsilon - m)\right]\rho^2 - \frac{l^2 - 1/4}{\rho^2} + \varepsilon^2 - m^2 \right\} U = 0. \tag{2.24}$$

Não é possível construir regimes de estados ligados em termos de funções analíticas devido à presença do termo de quarta potência na equação. Logo, uma restrição adicional que imporemos ao sistema modelado por osciladores harmônicos, se quisermos obter estados em termos de funções convencionais, é

$$K_\Sigma K_\Delta = 0, \tag{2.25}$$

o que nos leva a duas possibilidades de configurações dos potenciais escalar e vetorial — excetuando o caso livre, que não nos interessa —, $V_v = \pm V_s$, já denotando como a relação entre estes potenciais de diferentes naturezas de Lorentz é muito estreita para a realização de estados ligados descritos por soluções analíticas. Avaliemos então o caso em que $K_\Delta = 0$ e $K_\Sigma \neq 0$, o que em conformidade com o Apêndice C, também nos fornecerá os resultados para o caso em que $K_\Delta \neq 0$ e $K_\Sigma = 0$, com a substituição $K_\Sigma \to -K_\Delta$ e $\varepsilon \to -\varepsilon$ no resultado obtido.

Para este caso particular, a equação radial se torna

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \left[-\frac{1}{2}K_\Sigma(\varepsilon+m)\rho^2 - \frac{l^2-1/4}{\rho^2} + \varepsilon^2 - m^2\right]U = 0. \tag{2.26}$$

Para o oscilador harmônico a condição (2.19) deverá ser satisfeita. Em conjunto com a condição (2.20), identificamos portanto que é possível mapear este problema na equação radial para um potencial harmônico na teoria não-relativística, conforme Apêndice E.

Iniciamos nossas investigações identificando o mapeamento dos parâmetros das duas equações:

$$\left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^2 = \frac{1}{2}K_\Sigma(\varepsilon+m) \tag{2.27}$$

$$S^2 - \frac{1}{4} = l^2 - 1/4 \tag{2.28}$$

$$\frac{2ME}{\hbar^2} = \varepsilon^2 - m^2, \tag{2.29}$$

em que $M > 0$, $\omega > 0$, $S \geq 0$ e $E > 0$. Com o mapeamento definido, podemos determinar o espectro e as autofunções do problema. Com a definição do número quântico principal

$$n = 2n_r + |l| \tag{2.30}$$

e a identificação da constante auxiliar

$$\gamma = \sqrt{\frac{K_\Sigma(\varepsilon+m)}{2}}, \tag{2.31}$$

teremos

$$U_{n|l|}(\rho) = C_{n|l|}\rho^{1/2+|l|}e^{-\frac{1}{2}\gamma\rho^2}L^{(|l|)}_{(n-|l|)/2}\left(\gamma\rho^2\right), \tag{2.32}$$

$$\pm\sqrt{2K_\Sigma(\varepsilon+m)}\,(n+1) = \varepsilon^2 - m^2, \tag{2.33}$$

tal que os números quânticos podem tomar os valores $n = 0, 1, 2, 3, ...$ e $|l| = 0, 1, ..., n$, e $C_{n|l|}$ é uma constante arbitrária. As funções radiais são proporcionais aos polinômios de Laguerre generalizados (vide Apêndice D).

Das relações de mapeamento (2.27), (2.28) e (2.29) — em conjunto com as condições dos parâmetros —, podemos estudar o espectro e determinar sua forma explícita. Da relação (2.27),

certificamos que

$$K_\Sigma(\varepsilon + m) > 0 \ \therefore K_\Sigma \gtrless 0 \Rightarrow \varepsilon \gtrless -m, \tag{2.34}$$

e da relação (2.29) encontramos que

$$|\varepsilon| > m. \tag{2.35}$$

Da condição (2.35), eliminamos a possibilidade do sinal negativo no lado esquerdo da equação (2.33). Convém analisar o espectro quadrando esta equação e fazendo as seguintes mudanças de variáveis:

$$\epsilon = 3\frac{\varepsilon}{m}, \ \ |\epsilon| > 3 \tag{2.36}$$

$$A = \frac{27}{16} K_\Sigma \frac{(n+1)^2}{m^3}, \tag{2.37}$$

fornecendo

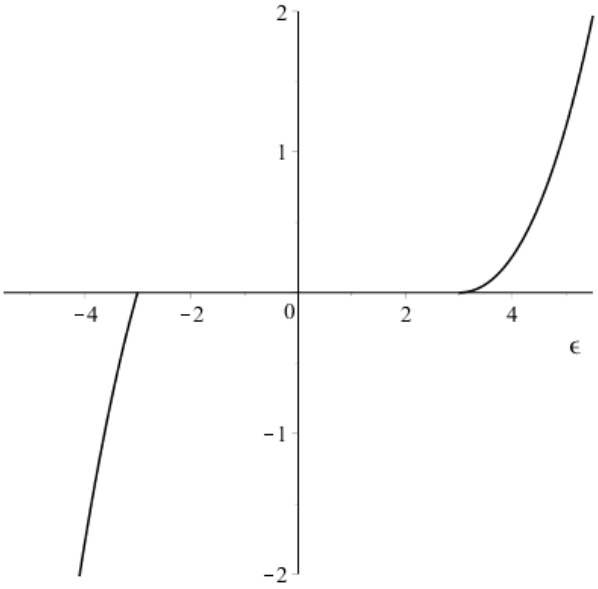
$$\left(\frac{\epsilon}{3} - 1\right)^2 \left(\frac{\epsilon}{3} + 1\right) = \frac{32}{27} A. \tag{2.38}$$

O processo de quadrar a equação do espectro leva a uma equação de terceiro grau, que possui mais soluções do que a equação original, e portanto precisamos estudar essa nova equação, além de resolvê-la, para extrair a solução que também satisfaz (2.33). De (2.38), inferimos que se $\epsilon \gtrless -3$, então $A \gtrless 0$. Ademais, em conjunto com a definição (2.36), os intervalos de interesse serão $\epsilon \gtrless \pm 3$. A Figura 2 demonstra isto graficamente, além de evidenciar como os dois intervalos do espectro não são simétricos entre si. Ainda resta determinar quantas soluções existem, *i.e.*, quantas raízes existem em cada intervalo de A. A regra dos sinais de Descartes (veja Apêndice F) nos orienta quanto a isso. Dado os intervalos de interesse, conforme (2.34), o que na redefinição das variáveis se torna $\epsilon > 3$ e $\epsilon < -3$, como demonstra a Figura 2, podemos deduzir as condições sobre A. Teremos, para $\epsilon > 3$, definindo a variável auxiliar $\tilde{\epsilon}$, para que possamos empregar diretamente a regra dos sinais, que

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{3} - 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\epsilon}^3 + 2\tilde{\epsilon}^2 - \frac{32}{27} A = 0. \tag{2.39}$$

Avaliamos que se $A < 0$, não existem raízes reais positivas, e se $A > 0$, existe uma única raiz real positiva. Para $\epsilon < -3$, definindo $\hat{\epsilon}$, realizamos a mesma análise

Figura 2 – Lado esquerdo de (2.38) em termos de ϵ



Fonte: Autor (2022).

$$\hat{\epsilon} = -\left(\frac{\epsilon}{3} + 1\right) \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon}^3 + 4\hat{\epsilon}^2 + 4\hat{\epsilon} + \frac{32}{27}A = 0. \tag{2.40}$$

Nota-se que se $A < 0$, há uma raiz real positiva, e nenhuma se $A > 0$. A tabela a seguir sumariza o resultado das análises.

Tabela 2 – Número de soluções físicas para os intervalos de interesse

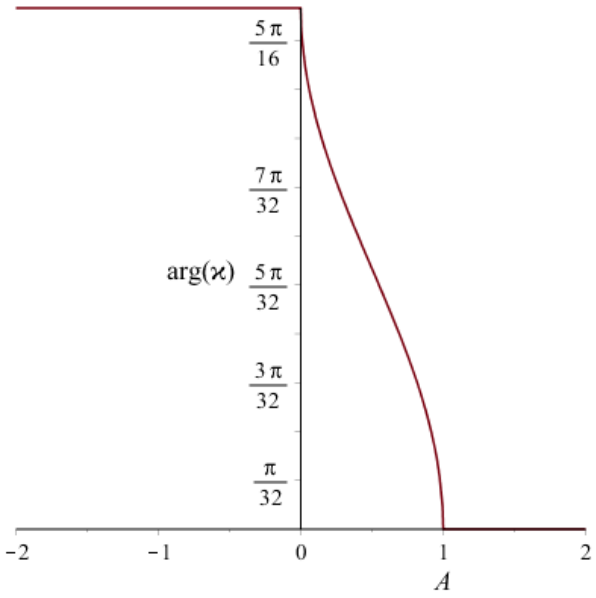
A	$+$	$-$
$\epsilon > 3$	1	0
$\epsilon < -3$	0	1

Concluímos que, conforme a Tabela 2, há uma e apenas uma solução real com $\epsilon > 3$ para $A > 0$ e outra com $\epsilon < -3$ para $A < 0$. De todas as soluções de (2.38), para extrairmos aquela adequada para o problema, resolvemos a equação de terceiro grau e escrevemos ϵ da seguinte forma

$$\epsilon = 1 + 2\left(\chi + \chi^{-1}\right) \ , \ \chi = \left[2A - 1 + 2\sqrt{A(A-1)}\right]^{1/3}. \tag{2.41}$$

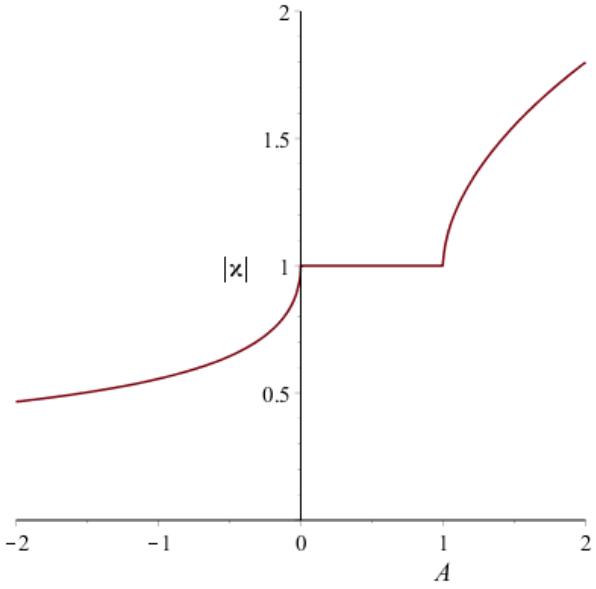
Resta executar a análise de χ, para o qual recorreremos à visualização gráfica, disposta na Figura 3 e na Figura 4:

Figura 3 – Argumento de χ em função de A tomando a raiz cúbica principal.



Fonte: Autor (2022).

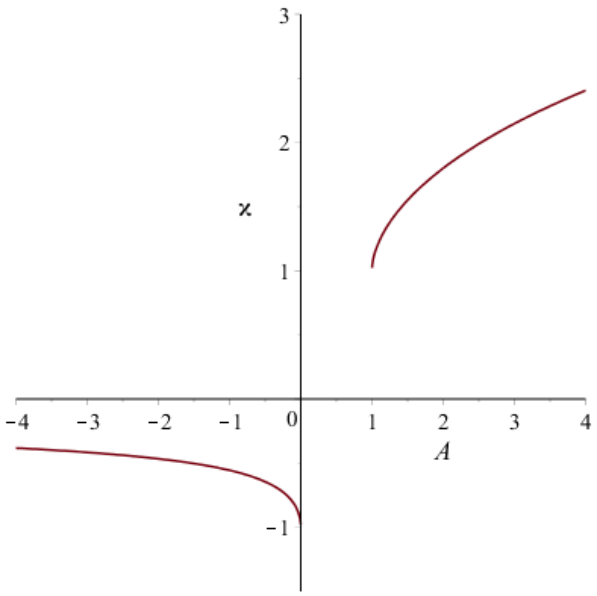
Figura 4 – Módulo de χ em função de A.



Fonte: Autor (2022).

O argumento de χ possui três valores por ser uma raiz cúbica, cujos argumentos diferem de $2\pi/3$. A Figura 3 mostra o argumento da raiz principal. Para $A < 0$, o argumento é exatamente $\pi/3$. Plotando os três valores possíveis de χ em função de A, apresentado na Figura 5, obtemos:

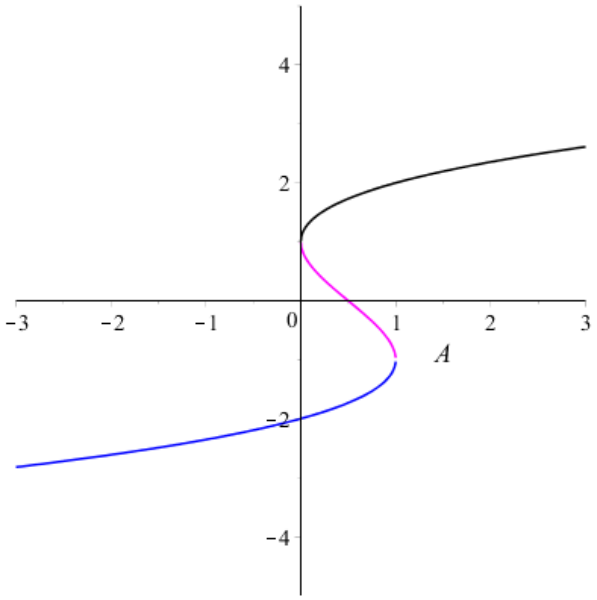
Figura 5 – Valores reais de χ em função de A.



Fonte: Autor (2022).

O trecho no semi-intervalo positivo de A na Figura 5 corresponde à raiz principal, enquanto a parte negativa corresponde à segunda raiz ($\arg(\chi) = \pi$). A terceira raiz não possui valores reais em nenhum ponto da reta real. Na Figura 6, plotamos a soma que aparece em (2.41). O trecho em preto corresponde à raiz principal, o trecho azul à segunda raiz e o trecho em magenta à terceira raiz.

Figura 6 – Valores reais de $\chi + \chi^{-1}$ em função de A.



Fonte: Autor (2022).

Conforme a Figura 3 e a Figura 4, podemos subdividir a análise em três intervalos de A: $A \geq 1$, $0 \leq A < 1$ e $A < 0$. Avaliando o intervalo do semieixo positivo tal que $A \geq 1$, o

argumento das três raízes — rotularemos a primeira, segunda e terceira raízes por $j = 0$, $j = 1$ e $j = 2$, respectivamente — é

$$\arg(\chi) = 2j\frac{\pi}{3}\ ,\ j = 0, 1, 2, \tag{2.42}$$

e o módulo é tal que

$$|\chi| \geq 1 \tag{2.43}$$

para todas as raízes. Como já esperado ao observar a Figura 5, ϵ é, para o intervalo $A \geq 1$, escrito em termos da raiz principal de χ, o que pode ser simplificado para

$$\epsilon = 1 + 2\left(|\chi| + |\chi|^{-1}\right). \tag{2.44}$$

O segundo caso, em que $0 \leq A < 1$, é tal que

$$\arg(\chi) \in \left]2j\frac{\pi}{3}, (1 + 2j)\frac{\pi}{3}\right] \tag{2.45}$$

e

$$|\chi| = 1. \tag{2.46}$$

Embora neste intervalo χ não seja real, a Figura 5 demonstra que a soma com seu inverso resulta em número real. Isto posto, ϵ será, neste intervalo, dado por

$$\epsilon = 1 + 4\cos(\arg(\chi)). \tag{2.47}$$

Considerando o intervalo (2.45), apenas para $j = 0$ a condição $|\epsilon| > 3$ é satisfeita, e portanto o valor de $\arg(\chi)$ deve ser relativo à raiz principal neste caso.

Para o último caso que resta estudar, $A < 0$, o argumento é dado por

$$\arg(\chi) = (1 + 2j)\frac{\pi}{3}\ ,\ j = 0, 1, 2, \tag{2.48}$$

e

$$0 < |\chi| < 1. \tag{2.49}$$

Conforme Figura 6, para este intervalo devemos tomar a segunda raiz ($j = 1$), e portanto, conforme (2.48),

$$\arg(\chi) = \pi \tag{2.50}$$

A solução será, portanto,

$$\epsilon = 1 - 2\left(|\chi| + |\chi|^{-1}\right) \tag{2.51}$$

Em suma, as soluções podem ser escritas em uma única expressão:

$$\epsilon = 1 + 2\ \mathrm{sgn}(A)(\chi^{1/3} + \chi^{-1/3}) \tag{2.52}$$

$$\chi = \mathrm{sgn}(A)\left[2A - 1 + 2\sqrt{A(A-1)}\right], \tag{2.53}$$

sempre tomando a raiz principal de χ. Portanto, o espectro é dado por:

$$\frac{\varepsilon_n}{m} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\ \mathrm{sgn}(K_\Sigma)(\chi_n^{1/3} + \chi_n^{-1/3}) \tag{2.54}$$

$$\chi_n = \mathrm{sgn}(K_\Sigma)\left[2A_n - 1 + 2\sqrt{A_n(A_n-1)}\right] \tag{2.55}$$

$$A_n = \frac{27}{16} K_\Sigma \frac{(n+1)^2}{m^3} \tag{2.56}$$

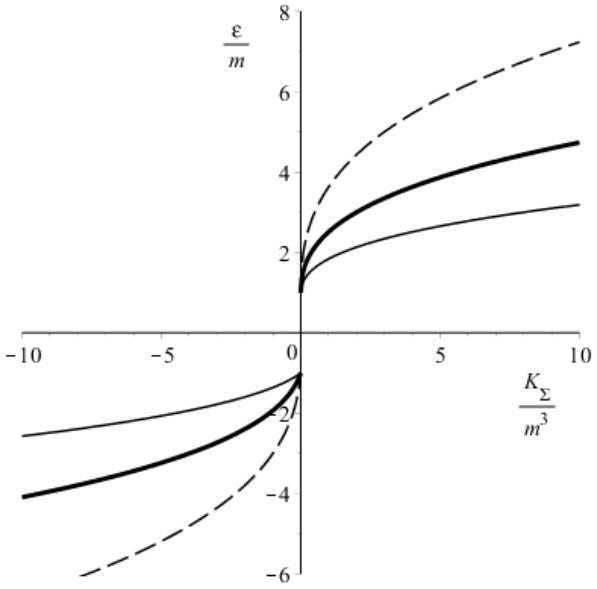
em que $n = 0, 1, 2, 3, ...$ É evidente que o espectro, por não depender do número quântico l, apresenta degenerescências essenciais, exceto para os estados com $l = 0$. O grau de degenerescência dos estados com número quântico principal n, conforme (2.30), é $2n + 1$.

Na Figura 7 apresentamos a visualização do espectro como função da intensidade da interação.

Para concluir a solução do problema, vamos escrever os autoestados normalizados. Conforme (2.16), resgatando (2.2), (2.5), (2.32), e nos referindo a (D.4) e (D.5), teremos

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\frac{8m\gamma^{|l|+2}}{\pi[4\gamma\varepsilon-K_\Sigma(n+1)]}\frac{\Gamma\left(\frac{n-|l|}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+|l|}{2}+1\right)}}\rho^{|l|}e^{-\frac{1}{2}\gamma\rho^2}L^{(|l|)}_{(n-|l|)/2}\left(\gamma\rho^2\right)e^{i(l\phi-\varepsilon t)}. \quad (2.57)$$

Figura 7 – Espectro para os "três mais baixos níveis de energia". A linha fina é o nível $n=0$, a linha grossa é o nível $n=1$, a linha tracejada é $n=2$.



Fonte: Autor (2022).

Podemos agora obter as expansões para acoplamentos pequenos, *i.e.*, $|K_\Sigma| << m^3$, que são:

$$K_\Sigma>0\ :\varepsilon-m\approx(n+1)\sqrt{\frac{|K_\Sigma|}{m}}, \quad (2.58)$$

$$K_\Sigma<0\ :\varepsilon+m\approx-(n+1)^2\frac{|K_\Sigma|}{2m^2}. \quad (2.59)$$

Observamos que o espectro para $K_\Sigma>0$, relativo a estados de partículas reproduz o espectro conhecido para o oscilador harmônico simples bidimensional não-relativístico (**??**), enquanto o caso $K_\Sigma<0$, que vale para estados de antipartículas, apresenta um comportamento diferente que carece de analogia com a teoria não-relativística. Estes resultados são esperados, o que pode ser respaldado analisando as equações (2.12) e (2.13). Para o caso da interação repulsiva, o potencial efetivo é dado pelo termo de barreira centrífuga mais um termo de oscilador harmônico com constante de intensidade K_Σ. Para o caso do potencial atrativa, por outro lado, o termo de oscilador harmônico no potencial efetivo tem como constante de intensidade $\varepsilon_-^{NR}K_\Sigma$.

2.4 PROBLEMA DE "COULOMB"

Outro caso de clássico interesse é aquele dos potenciais inversamente radiais, usualmente chamado de problema de Coulomb, embora façamos a distinção de que aqui não há simetria esférica, como na genuína interação coulombiana, mas simetria circular. Os potenciais são dados por

$$V_\Sigma = \frac{\alpha_\Sigma}{\rho} \quad \text{e} \quad V_\Delta = \frac{\alpha_\Delta}{\rho}. \tag{2.60}$$

Mais uma vez, escreveremos a equação radial no formato tipo Schrödinger

$$\frac{d^2U}{d\rho^2} + \left[-\frac{l^2 - 1/4 - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta}{\rho^2} - \frac{\alpha_\Sigma(\varepsilon + m) + \alpha_\Delta(\varepsilon - m)}{\rho} + \varepsilon^2 - m^2 \right] U = 0. \tag{2.61}$$

Aqui não temos a mesma patologia encontrada no caso do oscilador harmônico, de maneira que tanto α_Σ quanto α_Δ podem ser não-nulos.

Para o potencial de Coulomb, as autofunções, no caso mais extremo, podem ser tais que, conforme (2.22), tenhamos na vizinhança da origem que

$$\lim_{\rho\to 0} |U| = 0. \tag{2.62}$$

Identificamos portanto que é possível mapear este problema na equação radial para um potencial de Coulomb na teoria não-relativística, conforme Apêndice E, haja vista que a forma das autofunções (2.62) são suficientes para satisfazer a condição (E.2).

Iniciamos nossas investigações com os dois casos particulares: $\varepsilon = m$ e $\varepsilon = -m$. Para o primeiro caso, convém avaliar o comportamento assintótico da solução. Para $\rho \to \infty$, a equação (2.61) é tal que a solução é dada por

$$U = A\rho + B. \tag{2.63}$$

A única forma desta solução ser apropriada à condição de normalização é se $A = B = 0$, uma solução claramente inapropriada. Portanto, descartamos a possibilidade de estados com $\varepsilon = m$.

O caso $\varepsilon = -m$ conduz à uma equação da mesma forma que o caso anterior, de forma que a sua solução também deverá ser descartada.

Para os demais casos, em vez de estudar as equações na forma (2.61), faremos uma mudança de variável para tornar a equação mais simples:

$$\tilde{\rho} = 2\lambda\rho \quad , \quad \lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}. \tag{2.64}$$

A equação resultante será

$$\frac{d^2U}{d\tilde{\rho}^2} + \left[-\frac{l^2 - 1/4 - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta}{\tilde{\rho}^2} - \frac{\alpha_\Sigma(\varepsilon + m) + \alpha_\Delta(\varepsilon - m)}{\lambda\tilde{\rho}} - \frac{1}{4} \right] U = 0. \tag{2.65}$$

O mapeamento fornece as seguintes relações:

$$S^2 - \frac{1}{4} = l^2 - \frac{1}{4} - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta \tag{2.66}$$

$$\frac{2MZ}{\hbar^2} = \frac{\alpha_\Sigma(\varepsilon + m) + \alpha_\Delta(\varepsilon - m)}{\lambda} \tag{2.67}$$

$$\frac{2ME}{\hbar^2} = -\frac{1}{4}, \tag{2.68}$$

em que $M > 0$, $Z < 0$, $S \geq 0$, $E < 0$ e $\gamma = 1/2$.

Definindo o número quântico principal

$$n = n_r + |l| + 1 \quad , \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, ... \\ |l| = 0, 1, ..., n - 1 \end{cases} \tag{2.69}$$

e identificando as constantes auxiliares

$$\bar{n} = n - 1/2 + \bar{l} - |l| \tag{2.70}$$

$$\bar{l} = \sqrt{l^2 - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta}, \tag{2.71}$$

somos capazes de determinar os autoestados e suas respectivas autoenergias

$$U_{n|l|}(\tilde{\rho}) = C_{n|l|}\tilde{\rho}^{1/2+\bar{l}}e^{-\tilde{\rho}/2}L^{(2\bar{l})}_{n-|l|-1}(\tilde{\rho}), \tag{2.72}$$

$$\frac{\varepsilon^{\pm}_{n|l|}}{m} = \frac{\alpha_\Delta^2 - \alpha_\Sigma^2 \pm 4\bar{n}\sqrt{\alpha_\Sigma\alpha_\Delta + \bar{n}^2}}{(\alpha_\Delta + \alpha_\Sigma)^2 + 4\bar{n}^2}, \tag{2.73}$$

em que $C_{n|l|}$ é uma constante arbitrária. As funções radiais envolvem os polinômios de Laguerre generalizados (vide Apêndice D). Notemos que a operação conjugação de carga (vide Apêndice C) faz a transformação $\varepsilon^{\pm} \longrightarrow \varepsilon^{\mp}$.

As relações de mapeamento fornecem algumas restrições: de (2.66), obtemos

$$|l|^2 \geq \alpha_\Sigma \alpha_\Delta; \tag{2.74}$$

de (2.67)

$$\alpha_\Sigma(\varepsilon + m) + \alpha_\Delta(\varepsilon - m) < 0; \tag{2.75}$$

e de (2.68), extraímos

$$|\varepsilon| < m. \tag{2.76}$$

As três condições acima, após breve análise, nos permitem realizar afirmações sobre os possíveis sistemas formados pela combinação dos potencias. A restrição (2.74) implica que se o produto $\alpha_\Sigma \alpha_\Delta > 0$, deve-se excluir o autovalor $l = 0$, e a depender da magnitude do produto, autovalores seguintes também podem ter que ser excluídos. Se $\alpha_\Sigma > 0$ e $\alpha_\Delta < 0$, a segunda e terceira condições acima são mutuamente excludentes. Se α_Σ e α_Δ tiverem o mesmo sinal, as três condições vinculam a intensidade dos potenciais ao momento angular, tal que

$$|l|^2 > \frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}\alpha_\Sigma^2 \quad \text{e} \quad |l|^2 > \frac{m-\varepsilon}{m+\varepsilon}\alpha_\Delta^2. \tag{2.77}$$

Se $\alpha_\Sigma < 0$ e $\alpha_\Delta > 0$, as condições não geram restrições. Representamos essa análise graficamente na Figura 8.

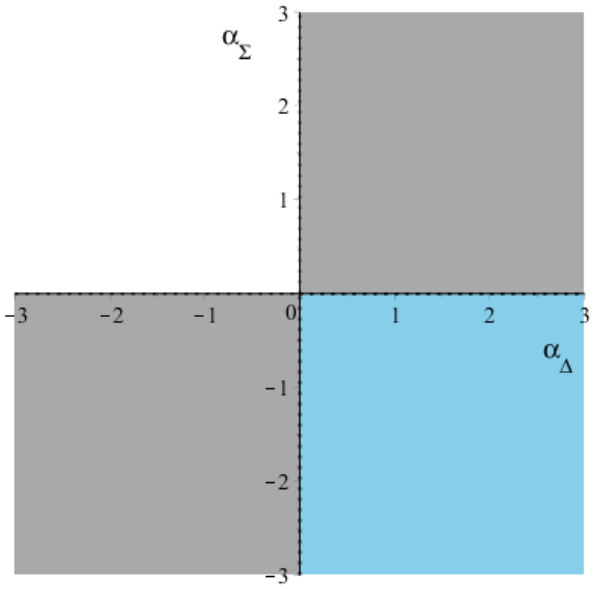
Outra forma de estudar essas limitações graficamente é plotando ε/m em função de $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$ a partir de (2.75). Rescrevendo essa relação na forma

$$\frac{\varepsilon}{m} + 1 + \frac{\alpha_\Delta}{\alpha_\Sigma}\left(\frac{\varepsilon}{m} - 1\right) \lesseqgtr 0 \ \ , \alpha_\Sigma \gtreqless 0, \tag{2.78}$$

podemos determinar as seguintes desigualdades

$$\frac{\varepsilon}{m} \begin{cases} \lesseqgtr \dfrac{\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma - 1}{\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma + 1} \ , \dfrac{\alpha_\Delta}{\alpha_\Sigma} > -1 \\ \gtreqless \dfrac{\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma - 1}{\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma + 1} \ , \dfrac{\alpha_\Delta}{\alpha_\Sigma} < -1 \end{cases} \quad , \alpha_\Sigma \gtreqless 0. \tag{2.79}$$

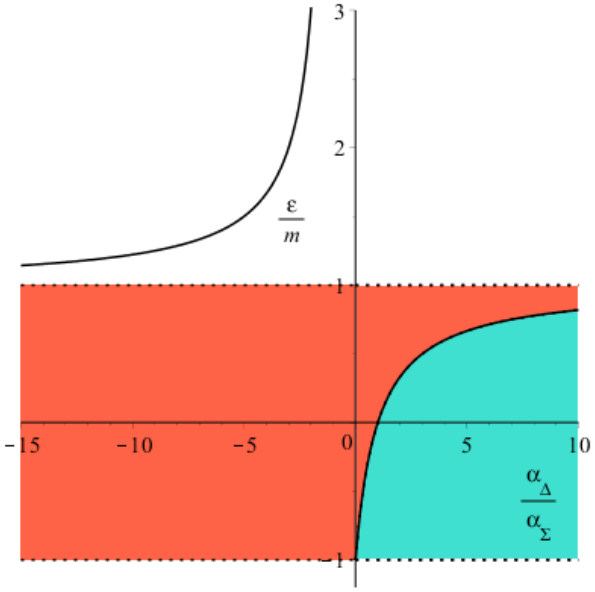
Figura 8 – A região em azul indica os pares $(\alpha_\Sigma, \alpha_\Delta)$ cujas intensidades dos potenciais não possuem limitação, enquanto a região cinza indica os pares cuja intensidade possui uma limitação e a região vazia os pares impossíveis de formarem estados ligados.



Fonte: Autor (2022).

Este desenvolvimento está ilustrado na Figura 9.

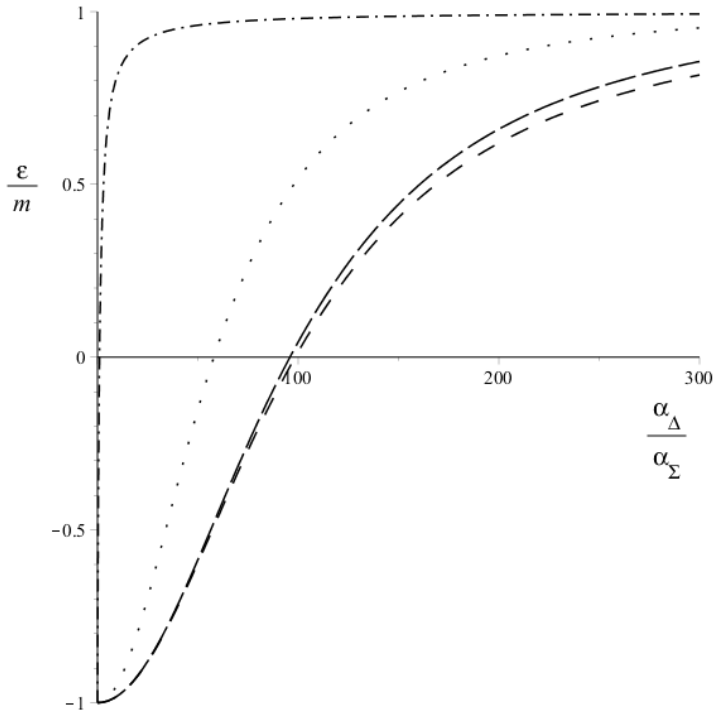
Figura 9 – ε/m em função de $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$. Em laranja, temos a área em que $\alpha_\Sigma < 0$ e em turquesa, $\alpha_\Sigma > 0$.



Fonte: Autor (2022).

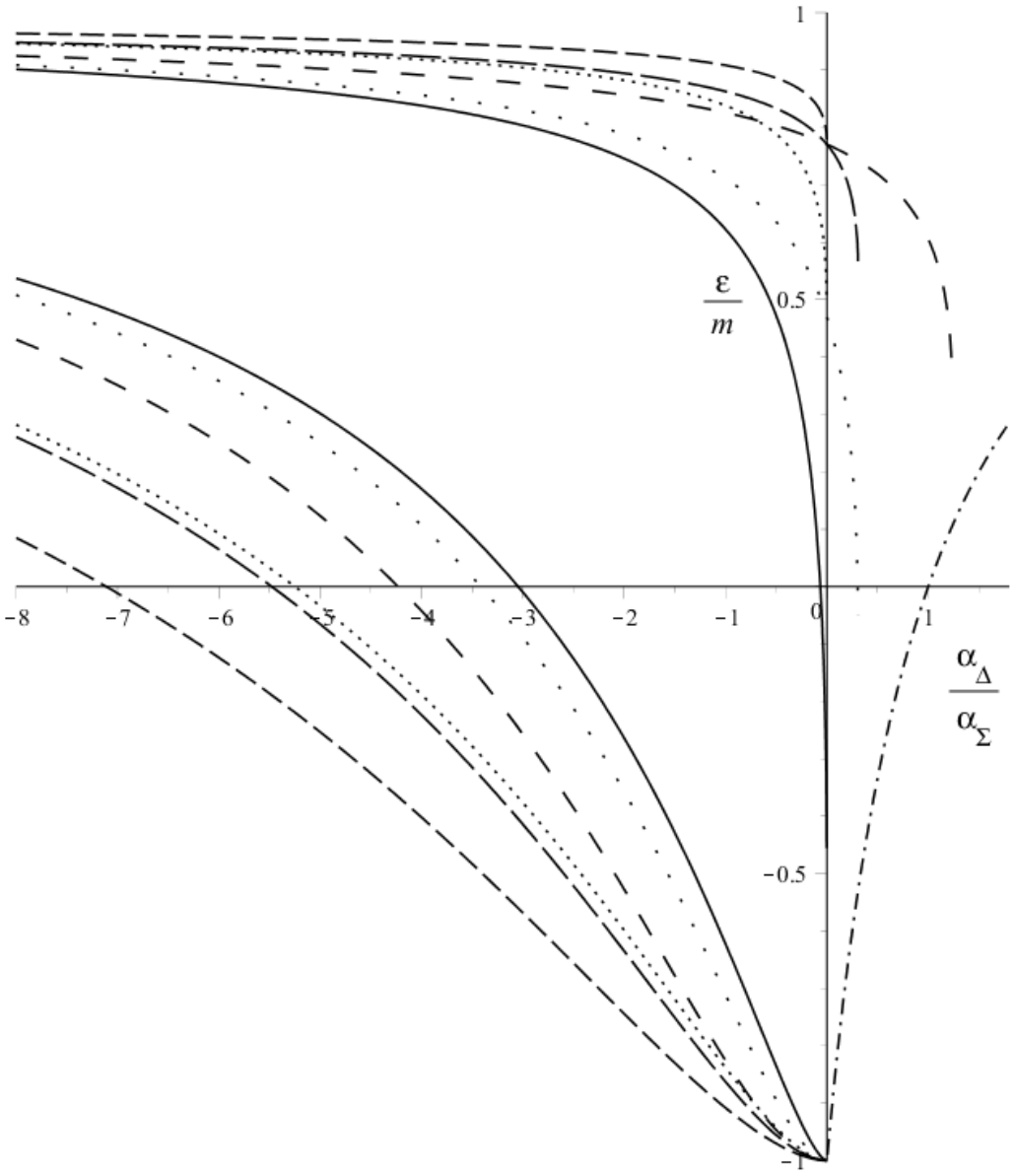
As autoenergias plotadas em termos da razão $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$ são

Figura 10 – ε/m em função da razão $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$, com $\alpha_\Sigma = 0,05$ (abaixo da linha traço-ponto $\alpha_\Sigma > 0$ e vice-versa), para as seis primeiras energias válidas. A linha pontilhada espaçada é para $n = 2$, $|l| = 1$; a linha tracejada longa é para $n = 3$, $|l| = 1$; a linha tracejada espaçada é para $n = 3$, $|l| = 2$.



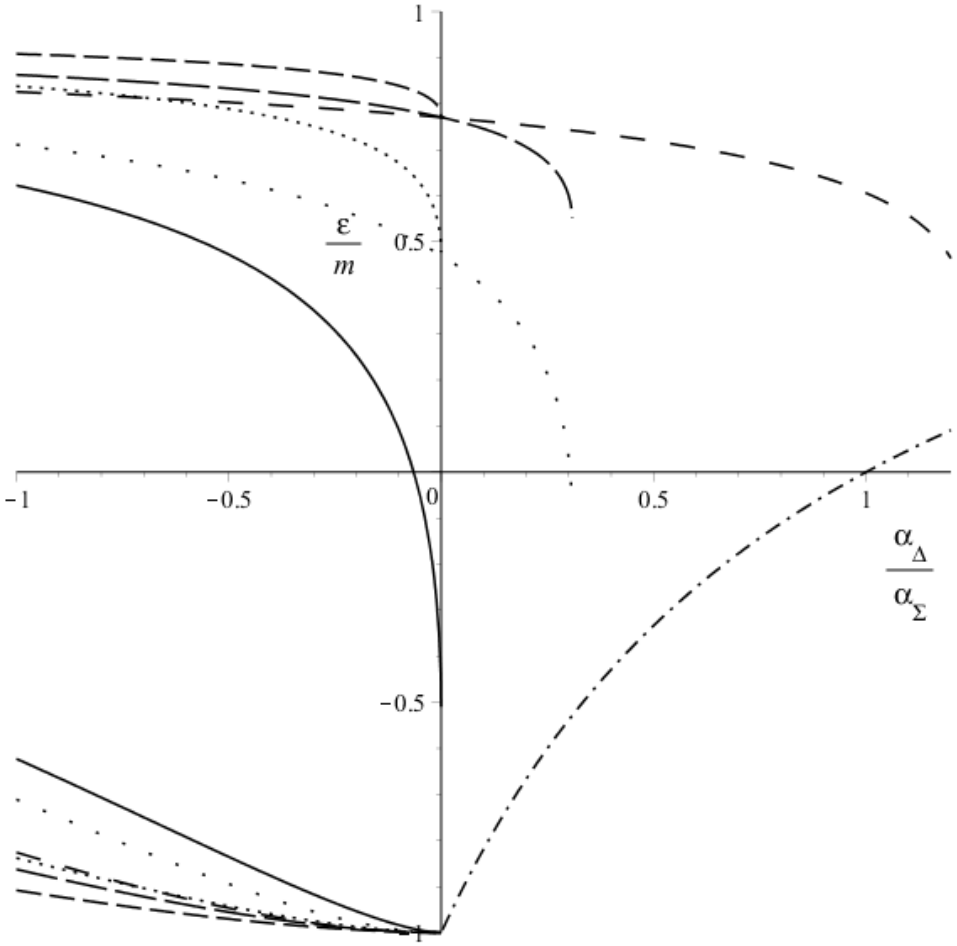
Fonte: Autor (2022).

Figura 11 – ε/m em função da razão $\alpha_\Delta/\alpha_\Sigma$, com $\alpha_\Sigma = -1,8$ (acima da linha traço-ponto $\alpha_\Sigma < 0$ e vice-versa), para as seis primeiras energias válidas. As linhas sólidas são para $n = 1$, $|l| = 0$; as linhas pontilhadas são para $n = 2$, $|l| = 0$; as linhas pontilhadas espaçadas são para $n = 2$, $|l| = 1$; as linhas tracejadas são para $n = 3$, $|l| = 0$; as linhas tracejadas longas são para $n = 3$, $|l| = 1$; as linhas tracejadas espaçadas são para $n = 3$, $|l| = 2$.



Fonte: Autor (2022).

Figura 12 – Versão ampliada da Figura 11.



Fonte: Autor (2022).

Para concluir a solução do problema, vamos escrever os autoestados normalizados. Conforme (2.16), resgatando (2.2), (2.5), (2.72), e nos referindo a (D.4) e (D.5), teremos

$$\Psi(\boldsymbol{r},t)=\sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{m\lambda}{2\bar{n}\varepsilon-(\alpha_\Sigma+\alpha_\Delta)\lambda}\frac{\Gamma(\bar{n}+1/2-\bar{l})}{\Gamma(\bar{n}+1/2+\bar{l})}}\tilde{\rho}^{1/2+\bar{l}}e^{-\tilde{\rho}/2}L^{(2\bar{l})}_{n-|l|-1}(\tilde{\rho})\,e^{i(l\phi-\varepsilon^{\pm}t)}. \quad (2.80)$$

Nas referências (**????**) o mesmo problema foi abordado, porém a normalização está equivocada, ao não considerar a parte que envolve o potencial na integral (2.16).

Expandindo o espectro (2.73) para acoplamentos fracos, *i.e.*, com α_Σ e α_Δ pequenos, respectivamente, temos:

$$\frac{\varepsilon^{+}_{n|l|}}{m} = 1 - \frac{\alpha_\Sigma^2}{2\left(n-1/2\right)^2} + \frac{|l| - 2\left(n-1/2\right)}{4\,|l|\left(n-1/2\right)^4}\alpha_\Sigma^3\alpha_\Delta + \frac{\alpha_\Sigma^4}{8\left(n-1/2\right)^4} + O(\alpha_\Sigma^a\alpha_\Delta^b, a+b>4) \tag{2.81}$$

$$\frac{\varepsilon^{-}_{n|l|}}{m} = -1 + \frac{\alpha_\Delta^2}{2\left(n-1/2\right)^2} - \frac{|l| - 2\left(n-1/2\right)}{4\,|l|\left(n-1/2\right)^4}\alpha_\Delta^3\alpha_\Sigma - \frac{\alpha_\Delta^4}{8\left(n-1/2\right)^4} + O(\alpha_\Sigma^a\alpha_\Delta^b, a+b>4). \tag{2.82}$$

Identificamos destas expressões que $\varepsilon^{+(-)}$ é a energia de estados ligados com energia positiva (negativa) para α_Δ (α_Σ) pequeno. A simetria entre essas duas expressões ilustra a transformação de conjugação de carga (vide Apêndice C). Em relação às degenerescências, vemos que o espectro original (2.73) é duplamente degenerado para todo l, exceto $l = 0$. Já a expansão para acoplamentos fracos mostra que as degenerescências do momento angular só são quebradas na ordem de $\alpha_\Sigma^a\alpha_\Delta^b$, com $a + b = 4$. Ademais, é notório que, em primeira aproximação, o espectro coincide com o potencial de Coulomb não-relativístico (**??**), mesmo com interações de diferentes naturezas (escalar e vetorial), o que já é esperado, visto que a teoria não-relativística não distingue as naturezas das interações.

Vamos avaliar agora o espectro (2.73) para casos particulares do problema resolvido acima.

2.4.1 Interação puramente vetorial

Se tomarmos o caso particular em que $\alpha_\Delta = \alpha_\Sigma \equiv -\alpha$, o que corresponde à supressão da interação escalar, o espectro é, conforme (2.75), tal que

$$\text{sgn}(\varepsilon) = \text{sgn}(\alpha) \tag{2.83}$$

Isto nos permite identificar as duas soluções possíveis (2.73), relacionando o sinal na expressão com o sinal de α. Logo

$$\frac{\varepsilon_{n|l|}}{m} = \frac{\text{sgn}(\alpha)}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\alpha}{\bar{n}}\right)^2}} \quad , \quad \bar{l} = \sqrt{l^2 - \alpha^2}\ ,\ |\alpha| \leq |l|\,. \tag{2.84}$$

Este caso particular apresenta dupla degenerescência decorrente da dependência em $|l|$ do espectro. O resultado aqui apresentado é extremamente semelhante ao problema esfericamente simétrico, como demonstram as referências (**????**), com a diferença de que no caso aqui apresentado, temos $|l|$ no lugar do autovalor de $\boldsymbol{J}^2$.

Expandindo o espectro para acoplamentos fracos, temos:

$$\frac{\varepsilon_{n|l|}}{m} = -\text{sgn}(\alpha)\left[1 - \frac{\alpha^2}{2(n-1/2)^2} + \frac{3\,|l| - 4(n-1/2)}{8\,|l|\,(n-1/2)^4}\alpha^4 + O(\alpha^6)\right] \tag{2.85}$$

Notamos que a única influência do sinal de α no espectro é em um sinal global da expressão, visto que a expansão só apresenta potências pares em α. Identificamos a segunda parcela como correspondente ao espectro não-relativístico do problema de "Coulomb" bidimensional, já conhecido na literatura (**??**). Identificamos também que a degenerescência do módulo do momento angular, assim como no caso geral, só é quebrada no termo de potência α^4, embora a degenerescência referente à troca do sinal do autovalor de momento angular seja preservada.

2.4.2 Interação puramente escalar

Agora vejamos o caso em que $\alpha_\Delta = -\alpha_\Sigma \equiv \alpha$, extinguindo portanto a interação vetorial. Teremos aqui

$$\frac{\varepsilon^{\pm}_{n|l|}}{m} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\bar{n}}\right)^2} \quad , \bar{l} = \sqrt{l^2 + \alpha^2} \quad , \alpha > 0. \tag{2.86}$$

Como já esperado, as energias para partículas e antipartículas são simétricas em torno de $\varepsilon = 0$. Além disso, ainda estão presentes as duplas degenerescências decorrentes da dependência do espectro em $|l|$. Por fim, a condição (2.75) impõe que $\alpha > 0$.

O espectro aqui obtido se assemelha em forma com o caso do potencial de Coulomb esfericamente simétrico acoplado tal que $m^2 \longrightarrow m^2 + V_s^2$ (**??**). A diferença reside no termo $\bar{n}$, que abriga o número quântico principal n. Enquanto o acoplamento mais simples realizado na referência citada resulta em o espectro independer do número quântico do momento angular orbital, l, no nosso caso, conforme a definição (2.70), o espectro agora depende explicitamente dele, resultando no desaparecimento das degenerescências apresentadas no caso mais simples.

Realizando a expansão do espectro considerando acoplamentos fracos, produzimos

$$\frac{\varepsilon^{\pm}_{n|l|}}{m} = \pm\left[1 - \frac{\alpha^2}{2(n-1/2)^2} - \frac{|l| - 4(n-1/2)}{8\,|l|\,(n-1/2)^4}\alpha^4\right] + O(\alpha^6) \tag{2.87}$$

Mais uma vez, a degenerescência do módulo do momento angular só é quebrada na ordem de α^4, mas a dupla degenerescência relativa ao sinal de l se mantém.

2.4.3 $\alpha_\Delta = 0$

É conveniente realizar também o estudo deste caso particular, que corresponde a uma sistema em que as interações escalar e vetorial são exatamente iguais. Neste caso, um resultado muito

interessante surge

$$\frac{\varepsilon^{+}_{n|l|}}{m} = \frac{-\alpha_\Sigma^2 + 4(n-1/2)^2}{\alpha_\Sigma^2 + 4(n-1/2)^2} \quad , \alpha_\Sigma < 0 \tag{2.88}$$

$$\frac{\varepsilon^{-}_{n|l|}}{m} = -1. \tag{2.89}$$

Aqui as degenerescências são ainda mais fortes, visto que não há dependência direta em l. Portanto, para os estados com número quântico principal n, há $2n-1$ estados degenerados, conforme (2.69). É notável também que existem muitas restrições aos estados ligados. Antipartículas não podem se ligar nesta configuração (a conjugação de carga nos ensina que haverão estados ligados se $\alpha_\Sigma > 0$), e partículas só podem estar ligadas se $\alpha_\Sigma < 0$.

Realizando a expansão para acoplamentos fracos, chegamos em

$$\frac{\varepsilon^{+}_{n|l|}}{m} = 1 - \frac{\alpha_\Sigma^2}{2\left(n-1/2\right)^2} + \frac{\alpha_\Sigma^4}{8\left(n-1/2\right)^4} + O(\alpha_\Sigma^6) \quad \text{e} \quad \frac{\varepsilon^{-}_{n|l|}}{m} = -1, \tag{2.90}$$

em que observamos como a não dependência em l já no espectro exato leva a uma degenerescência maior do que aos outros casos particulares estudados no regime de baixas energias. Para compreender melhor este resultado, vamos estudar a expansão do espectro (2.73) na vizinhança desse caso extremo, i.e., $|\alpha_\Delta| << 1$. A expansão resulta em

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon^{+}_{n|l|}}{m} = 1 &- \frac{2\alpha_\Sigma^2}{\alpha_\Sigma^2 + 4\left(n-1/2\right)^2} + \frac{4\alpha_\Sigma^3\left[|l|^2 - 2\left(n-1/2\right)|l|\right]}{|l|^2\left[\alpha_\Sigma^2 + 4\left(n-1/2\right)^2\right]^2}\alpha_\Delta \\ &- \frac{4\alpha_\Sigma^4\left(n-1/2\right)^3|l|\left\{\alpha_\Sigma^2 + 4\left[\left(n-1/2\right)^2 - 4|l|^2\right]\right\}}{2|l|^4\left(n-1/2\right)^2\left[\alpha_\Sigma^2 + 4\left(n-1/2\right)^2\right]^2}\alpha_\Delta^2 \\ &- \frac{\alpha_\Sigma^4|l|^2\left\{\alpha_\Sigma^2\left[|l|^2 - 4\left(n-1/2\right)^2\right] + 20|l|^2\left(n-1/2\right)^2 + 48\left(n-1/2\right)^4\right\}}{2|l|^4\left(n-1/2\right)^2\left[\alpha_\Sigma^2 + 4\left(n-1/2\right)^2\right]^2}\alpha_\Delta^2 + O(\alpha_\Delta^3)\end{aligned} \tag{2.91}$$

$$\frac{\varepsilon^{-}_{n|l|}}{m} = -1 + \frac{\alpha_\Delta^2}{2\left(n-1/2\right)^2} - \frac{\alpha_\Sigma\left[|l|^2 - 2\left(n-1/2\right)|l|\right]}{4|l|^2\left(n-1/2\right)^4}\alpha_\Delta^3 + O(\alpha_\Delta^4) \tag{2.92}$$

Entendemos portanto que a energia de ligação para partículas e antipartículas é intimamente relacionada com a relação entre os potencias escalar e vetorial. A diferença relativa entre as intensidades das interações define a capacidade ligante deste sistema para antipartículas. Para partículas é a soma das intensidades das interações que determina a capacidade ligante.

Para esta situação particular, a função se onda se reduz para

$$U_{n|l|}(\tilde{\rho}) = C_{n|l|}\tilde{\rho}^{1/2+|l|}e^{-\tilde{\rho}/2}L^{(2|l|)}_{n-|l|-1}(\tilde{\rho})\,. \tag{2.93}$$

A realização da operação conjugação de carga (vide Apêndice C) nos resultados desta seção nos fornecem as conclusões para o caso em que $\alpha_\Sigma = 0$.

3 A EQUAÇÃO DE DIRAC RESTRITA AO MOVIMENTO PLANAR CIRCULARMENTE SIMÉTRICO

Sejam as restrições ao movimento planar ($p_z\Psi = 0$) usando o sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z), caso de nosso interesse. Em primeiro lugar, identificamos propriedades do operador L_z (A.18), em relação ao operadores α_i em coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} [L_z, \alpha_\rho] = \alpha_\rho \Sigma_z \\ [L_z, \alpha_\phi] = \alpha_\phi \Sigma_z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [L_z, \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}] = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}\, \Sigma_z. \tag{3.1}$$

Observamos também que é possível escrever o hamiltoniano (1.61) em termos de apenas uma matriz α, pois

$$\alpha_\phi = i\alpha_\rho \Sigma_z. \tag{3.2}$$

Restringindo os potenciais para formas circularmente simétricas

$$V_\Sigma = V_\Sigma(\rho) \quad , \quad V_\Delta = V_\Delta(\rho), \tag{3.3}$$

temos

$$H = i\alpha_\rho \left(-\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{2\rho} + \frac{\beta K}{\rho} \right) + \beta(m + V_s) + V_v. \tag{3.4}$$

Identificamos aqui o operador spin-órbita

$$K = \beta \left(L_z \Sigma_z + \frac{1}{2} \right), \tag{3.5}$$

cuja relevância será melhor discutida quando tratarmos dos geradores de simetria na próxima seção.

3.1 GERADORES DE SIMETRIA PARA O MOVIMENTO CIRCULARMENTE SIMÉTRICO PARA FÉRMIONS DE SPIN-1/2

Iremos apresentar agora um método sucinto e elegante de se encontrar geradores de simetria do sistema, que nos orientará sobre a construção de autoespinores convenientes para a solução

da equação de Dirac em diversas configurações de potenciais.

Em primeiro lugar, iremos definir operadores que projetam o componente superior ou inferior do espinor de Dirac. Sejam os projetores

$$P_{\pm} = \frac{\mathbb{1} \pm \beta}{2}, \tag{3.6}$$

que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(P_{\pm})^2 = P_{\pm} \tag{3.7}$$

$$P_{\pm} P_{\mp} = 0 \tag{3.8}$$

$$P_{+} + P_{-} = 1 \tag{3.9}$$

$$P_{\pm} \beta = \pm P_{\pm} \tag{3.10}$$

$$[P_{\pm}, \beta] = 0 \tag{3.11}$$

$$P_{\pm}\, \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\, P_{\mp}. \tag{3.12}$$

Aplicados ao espinor de Dirac, identificamos seus componentes superior e inferior, respectivamente

$$P_{+}\Psi = \Psi_{+} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \, , P_{-}\Psi = \Psi_{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Assim como no capítulo anterior, rescreveremos os potenciais em termos de sua soma e de sua diferença. Recapitulamos aqui as definições

$$V_{\Sigma} = V_v + V_s \quad \text{e} \quad V_{\Delta} = V_v - V_s. \tag{3.14}$$

A aplicação dos projetores na equação de Dirac nos permite convertê-la em duas equações acopladas

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}\ \Psi_{+} = (\varepsilon - V_{\Delta} + m)\Psi_{-} \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}\ \Psi_{-} = (\varepsilon - V_{\Sigma} - m)\Psi_{+} \tag{3.16}$$

Multiplicando (3.15) por $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}$ e considerando $\varepsilon - V_\Delta + m \neq 0$, podemos construir uma equação de segunda ordem desacoplada para Ψ_+[1]

$$\mathcal{H}\Psi_+ = 0, \tag{3.17}$$

em que

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{\varepsilon - V_\Delta + m}\frac{\partial V_\Delta}{\partial \rho}\left(\frac{L_z\Sigma_z}{\rho} - \frac{\partial}{\partial\rho}\right) - (\varepsilon - V_\Sigma - m)(\varepsilon - V_\Delta + m). \tag{3.18}$$

Como discutido no primeiro capítulo, devemos agora dividir nossa abordagem em simetrias contínuas e simetrias discretas.

3.1.1 Geradores de simetrias contínuas da teoria de Dirac

Podemos encontrar geradores de simetrias contínuas ao descobrir operadores $\mathcal{O}$ que satisfaçam às relações

$$[\mathcal{H}, \mathcal{O}] = 0 \quad e \quad \mathcal{O}^\dagger = \mathcal{O}, \tag{3.19}$$

o que nos permite escrever transformações relacionadas a geradores de simetria para Ψ_+,

$$\delta\Psi_+ = -i\epsilon\mathcal{O}\Psi_+, \tag{3.20}$$

em que $\delta\Psi_+$ é a variação de Ψ_+ após uma transformação, com parâmetro infinitesimal ϵ:

$$\Psi_+ \longrightarrow \Psi_+^{'} \Rightarrow \delta\Psi_+ = \Psi_+^{'} - \Psi_+. \tag{3.21}$$

Por ser uma transformação infinitesimal, os espinores transformados também devem obedecer às equações (3.15) e (3.16). Desta forma, poderemos encontrar a partir de $\delta\Psi_+$ a forma de $\delta\Psi_-$, e recorrendo à propriedade (3.9) somos habilitados à determinar a transformação do espinor completo,

$$\delta\Psi = \delta\Psi_+ + \delta\Psi_-, \tag{3.22}$$

[1] Retornaremos ao caso em que $\varepsilon - V_\Delta + m = 0$ mais adiante.

e por sua vez, o gerador de simetria do sistema.

Distinguimos dois casos de análise, conforme (3.15) e (3.16): se $\varepsilon - V_\Sigma - m \neq 0$, podemos extrair da segunda equação a igualdade

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}\, \delta\Psi_- = (\varepsilon - V_\Sigma - m)\delta\Psi_+; \tag{3.23}$$

e se $\varepsilon - V_\Delta + m \neq 0$, obtemos

$$\delta\Psi_- = \frac{1}{\varepsilon - V_\Delta + m}\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p}\, \delta\Psi_+. \tag{3.24}$$

Veremos que para os geradores de interesse, ambas as igualdades serão satisfeitas pelo mesmo operador.

Antes de investigarmos os geradores de simetria em si, cabe fazer uma breve observação do desenvolvimento apresentado acima: se estivermos estudando operadores $\mathcal{O}$ que não possuam operadores diferenciais em sua composição, essa análise se reduz a algo muito mais simples. Em primeiro lugar devemos averiguar se o operador comuta com β, *i.e.*, se $[\mathcal{O}, \beta] = 0$. Se satisfeito, só haverão duas possibilidades de geradores de simetria, dispostos resumidamente abaixo

$$\delta\Psi_- = \begin{cases} -i\epsilon\mathcal{O}\ , & \text{se } [\mathcal{O}, \alpha_i] = 0 \Rightarrow \delta\Psi = -i\epsilon\mathcal{O}\Psi \\ i\epsilon\mathcal{O}\ , & \text{se } \{\mathcal{O}, \alpha_i\} = 0 \Rightarrow \delta\Psi = -i\epsilon\beta\mathcal{O}\Psi \end{cases}, \tag{3.25}$$

em que identificamos os geradores de simetria como $\mathcal{O}$ ou $\beta\mathcal{O}$, respectivamente.

Finalmente, passemos ao estudo dos candidatos a geradores de simetrias.

3.1.1.1 O operador de "spin"

Antes de nos restringirmos ao movimento circularmente simétrico, identificamos que o operador Σ_z — definido em (B.13) — constitui um gerador de simetria do movimento planar mais geral possível para o componente superior do espinor de Dirac, exemplificando a simplificação sumarizada em (3.25), mais especificamente o segundo caso. Observamos em primeiro lugar que, em conformidade com (3.19),

$$[\mathcal{H}, \Sigma_z] = 0, \tag{3.26}$$

$$\Sigma_z^\dagger = \Sigma_z. \tag{3.27}$$

Consequentemente, podemos escrever

$$\delta\Psi_+ = -i\epsilon\Sigma_z\Psi_+, \tag{3.28}$$

e como $\{\Sigma_z, \alpha_i\} = 0$, concluímos que $\delta\Psi_- = i\epsilon\Sigma_z\Psi_+$, e portanto,

$$\delta\Psi = -i\epsilon\beta\Sigma_z\Psi. \tag{3.29}$$

Este operador possui flagrante semelhança com o verdadeiro operador de spin, e portanto, definindo o que chamaremos de operador de "spin"

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \beta\boldsymbol{\Sigma}, \tag{3.30}$$

identificamos o gerador de simetria como

$$\mathcal{S}_z = \beta\Sigma_z. \tag{3.31}$$

Quanto aos autoestados e autovalores de (3.31), uma simples manipulação algébrica nos revela que

$$\mathcal{S}_z\Psi^{(s)} = s\Psi^{(s)} \quad , \quad s = +1, -1. \tag{3.32}$$

Podemos realizar um estudo preliminar das propriedades desses novos operadores $\mathcal{S}_i$. Visto que $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ se assemelha ao operador de spin, podemos realizar a análise aos moldes da teoria geral do momento angular (**??**). Descobrimos então que sua álgebra é dada por

$$[\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\Sigma_k \tag{3.33}$$

$$\{\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j\} = 2\delta_{ij} \tag{3.34}$$

$$\mathcal{S}_i\mathcal{S}_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\Sigma_k. \tag{3.35}$$

Vemos que embora possua semelhança com o operador de spin, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ não possui uma álgebra de momento angular.

Avancemos agora sobre o estudo dos geradores de simetria particulares ao movimento circularmente simétrico.

3.1.1.2 O operador “momento angular orbital”

O aparecimento do operador L_z em (3.18) nos convida a avaliar se apenas ele, assim como Σ_z, nos conduz a um novo gerador de simetria do sistema. Um breve exame nos certifica que para potenciais circularmente simétricos L_z é gerador de simetria do componente superior do espinor de Dirac, então mais uma vez podemos realizar o processo descrito acima para identificar um novo gerador de simetria do sistema. Deduzimos descomplicadamente que

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= -i\epsilon(L_z P_+ + \Sigma_z P_- + L_z P_-)\Psi \\ &= -i\epsilon\left(L_z + \frac{\Sigma_z}{2} - \frac{\beta\Sigma_z}{2}\right)\Psi \\ &= -i\epsilon\left(L_z + P_-\Sigma_z\right)\Psi \equiv -i\epsilon\mathcal{L}_z\Psi, \end{aligned} \tag{3.36}$$

em que identificamos esse novo operador, que é semelhante a uma espécie de momento angular orbital

$$\mathcal{L}_z = L_z + P_-\Sigma_z. \tag{3.37}$$

Se denotarmos por l o autovalor de L_z (vide Apêndice A) para Ψ_+, podemos escrever

$$\mathcal{L}_z\Psi_l = l\Psi_l \quad , \quad l = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{3.38}$$

Ressaltamos que embora l denote os autovalores tanto de $\mathcal{L}_z$ quanto de L_z, eles de forma alguma podem ser tomados como a mesma coisa. O componente superior de Ψ — um objeto de dois componentes não-nulos denotado por Ψ_+ — é autoestado de L_z com autovalor l. O espinor completo Ψ — um objeto de quatro componentes — é autoestado de $\mathcal{L}_z$ com autovalor l.

Generalizando-o para o vetor,

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} = \boldsymbol{L} + P_-\boldsymbol{\Sigma}, \tag{3.39}$$

vemos que os componentes não possuem exatamente uma álgebra de momento angular, o que demonstra o comutador

$$[\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k. \tag{3.40}$$

3.1.1.3 O terceiro componente do operador momento angular total

Com os dois geradores de simetria encontrados, fazemos a seguinte observação: o componente perpendicular ao plano de movimento do operador momento angular total

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}, \tag{3.41}$$

i.e.,

$$J_z = L_z + \frac{\Sigma_z}{2}, \tag{3.42}$$

também pode ser escrito da seguinte forma:

$$J_z = \mathcal{L}_z + \frac{\mathcal{S}_z}{2}, \tag{3.43}$$

o que garante que J_z é um gerador de simetria. Isto pode ser facilmente confirmado repetindo o processo descrito no início desta subseção, considerando J_z como gerador de simetria de Ψ_+.

Conforme (3.32) e (3.38), identificamos que os autovalores de J_z são tais que

$$J_z\Psi_{m_j} = m_j\Psi_{m_j} \quad , \quad m_j = l + \frac{s}{2} = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, ... \tag{3.44}$$

3.1.1.4 O operador spin-órbita

Já descobrimos dois geradores de simetrias empregando o método descrito no início desta subseção. Com a combinação linear deles, encontramos um terceiro gerador. Agora recorreremos ao produto de geradores conhecidos para se construir mais um gerador. Seja o chamado operador spin-órbita — este operador já foi previsto em (3.5) —, construído com o produto dos geradores

$$K = \mathcal{S}_z J_z = \beta\left(L_z\Sigma_z + \frac{1}{2}\right). \tag{3.45}$$

Por simples inspeção, nos asseguramos que de fato este novo operador satisfaz às condições de um gerador de simetria. Os autovalores dos autoestados são dados em termos dos autovalores de $\mathcal{S}_z$ e J_z

$$K\Psi_k = k\Psi_k \quad , \quad k = m_j s = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, ... \tag{3.46}$$

Nota-se que em discussões para sistemas esfericamente simétricos, a simetria adicional relacionada ao operador spin-órbita K envolve o chamado operador BJL, conforme (**??**),

$$K_{BJL} = \beta(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\Sigma} + 1). \tag{3.47}$$

3.1.2 Geradores de simetrias discretas da teoria de Dirac: paridade

O processo apresentado na subseção anterior se destina exclusivamente às transformações contínuas. Contudo, a teoria de Dirac também abarca as ditas simetrias discretas, que não podem ser construídas pela sucessão de transformações infinitesimais. Abordaremos aqui a chamada transformação de paridade, que será conveniente para os nossos estudos seguintes.

A transformação de paridade, ou reversão espacial, conforme estudado na seção 2.1, é a transformação que reverte o sinal das coordenadas espaciais e mantém o sinal da coordenada temporal (vide (2.7) e (2.8)). Para se determinar uma transformação de simetria relacionada à reversão espacial, é preciso encontrar um operador P, dado por

$$P = \mathcal{P}P_0, \tag{3.48}$$

em que P_0 é o operador que realiza a transformação correspondente às mudanças (2.7) e (2.8), e $\mathcal{P}$ é um operador que compensa essa transformação de forma a satisfazer à relação

$$[P, H] = 0. \tag{3.49}$$

Além disso, conforme (**??**), as leis de rotação de espinores indicam que uma rotação de 4π transforma um espinor em si mesmo, e não 2π. Isto posto, exigimos então que a transformação P seja tal que

$$P^4 = 1. \tag{3.50}$$

Conforme as prescrições (2.7) e (2.8), as grandezas que compõem o hamiltoniano (1.61) se transformam da seguinte forma ao serem afetadas por P_0, considerando os potenciais circularmente simétricos:

$$P_0 \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{p} \longrightarrow -\boldsymbol{p} \\ V_s(\boldsymbol{r}) \longrightarrow V_s(-\boldsymbol{r}) = V_s(\boldsymbol{r}) \\ V_v(\boldsymbol{r}) \longrightarrow V_v(-\boldsymbol{r}) = V_v(\boldsymbol{r}). \end{cases} \tag{3.51}$$

Por conseguinte, escrevemos

$$P_0 H = -\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta(m + V_s) + V_v. \tag{3.52}$$

Uma simples inspeção nos conduz a identificar que, para satisfazer (3.49) e (3.50), o operador

$$\mathcal{P} = \lambda_P \beta \quad , \quad \lambda_P^4 = 1, \tag{3.53}$$

é adequado pra construção do operador de simetria. Finalmente, identificamos a transformação de simetria de paridade, dada pelo operador

$$P = \lambda \beta P_0. \tag{3.54}$$

Evidentemente, os autovalores deste operador são ± 1, e são eles denominados de "paridade" do estado, o que nos será útil adiante para determinar a estrutura do espinor. Para que o espinor possua paridade definida, seus componentes superior e inferior devem ser tais que, operados por P_0, resultem em ± 1. Sejam p e p' os rótulos dos componentes superior e inferior, respectivamente,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_p(\boldsymbol{r}, t) \\ \chi_{p'}(\boldsymbol{r}, t) \end{pmatrix} \tag{3.55}$$

Se Ψ for autoestado da paridade, teremos

$$
\begin{aligned}
P\Psi &= \lambda\beta \begin{pmatrix} P_0\varphi_p(\boldsymbol{r},t) \\ P_0\chi_{p'}(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} P_0\varphi_p(\boldsymbol{r},t) \\ -P_0\chi_{p'}(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} p\varphi_p(\boldsymbol{r},t) \\ -p'\chi_{p'}(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}. \qquad (3.56)
\end{aligned}
$$

Concluímos portanto que para o espinor ser de fato autoestado de P, devemos ter $p' = -p$, e portanto, φ e χ possuem paridades opostas.

3.1.3 Uma nova simetria dinâmica

Até agora, nos deparamos apenas com simetrias cujas origens residem na geometria do problema. Nos debruçaremos agora em um caso particular, intimamente relacionado com o grau de liberdade de spin da teoria. Ao observar (3.18), notamos uma característica muito pertinente da segunda parcela do operador: se V_Δ for uma constante, a segunda parcela se anula, resultando na supressão da interação spin-órbita para o componente superior do espinor de Dirac, fornecendo a equação

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{p}^2 - (\varepsilon - V_\Sigma - m)(\varepsilon - V_\Delta + m), \qquad (3.57)$$

o que nos permite inferir um gerador de simetria para o componente superior do espinor de Dirac mais geral do que o apresentado na subsubseção (3.1.1.1). Reiteramos aqui que esta nova candidata à simetria não é particular ao regime de movimento circularmente simétrico. De fato, excluída a parcela que envolve Σ_z em (3.18), podemos determinar uma transformação infinitesimal mais geral do que (3.28):

$$\delta\Psi_+ = -i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\Psi_+, \qquad (3.58)$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}$ é um vetor constante com componentes de magnitudes infinitesimais.

Como já demonstrado para os geradores anteriores, procederemos mais uma vez analisando (3.23) e (3.24) para determinar a transformação correspondente para Ψ_-. Apresentaremos explicitamente a análise do segundo caso, por mérito de exposição. Desenvolvendo (3.24):

$$\begin{aligned}\delta\Psi_- &= \frac{1}{\varepsilon - V_\Delta + m}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\ (-i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\Psi_+) \\ &= \frac{-i}{\varepsilon - V_\Delta + m}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\Sigma}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}\right)\Psi_+ \\ &= -i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\Sigma}}{\boldsymbol{p}^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}}{\varepsilon - V_\Delta + m}\Psi_+\right). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Utilizando (3.15), substituímos o termo entre parênteses e obtemos o gerador do componente inferior

$$\delta\Psi_- = -i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\left(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\boldsymbol{p}^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\right)\Psi_-. \tag{3.60}$$

Finalmente, determinamos o novo gerador de simetria do espinor de Dirac

$$\delta\Psi = -i\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\mathcal{O}}\Psi, \tag{3.61}$$

em que

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = \boldsymbol{\Sigma}P_+ + \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{\Sigma}}{\boldsymbol{p}^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}P_-. \tag{3.62}$$

Podemos observar que há uma outra forma de escrever o gerador, recorrendo ao operador (3.30):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mathcal{O}} &= \boldsymbol{\mathcal{S}} - 2\boldsymbol{p}\frac{\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}P_- \\ &= \boldsymbol{\mathcal{S}} - 2\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})P_-\ . \end{aligned} \tag{3.63}$$

Esta nova simetria é chamada de simetria de spin no caso esfericamente simétrico (veja, e.g., (**??**)), mas deve-se notar que seu gerador não é o operador de spin, e portanto não nos referiremos a $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ como tal, para não confundir o leitor, mantendo qualquer referência pela menção explícita de $\boldsymbol{\mathcal{O}}$.

Vamos estudar as propriedades deste novo operador. Escrevendo os componentes do vetor:

$$\mathcal{O}_i = \mathcal{S}_i - 2p_i\frac{\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}P_-\ , \tag{3.64}$$

podemos estudá-los individualmente — lembrando que o componente z coincide com o operador

(3.31). Cada componente elevado ao quadrado é igual à identidade:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_i^2 &= \mathcal{S}_i^2 + 4\frac{p_i^2}{\boldsymbol{p}^4}(\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p})^2 P_- - 2\mathcal{S}_i p_i \frac{\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}P_- - 2p_i\frac{\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}P_-\mathcal{S}_i \\
&= \mathcal{S}_i^2 + 4\frac{p_i^2}{\boldsymbol{p}^4}(\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p})^2 P_- - 2\mathcal{S}_i p_i \frac{\sum_k \mathcal{S}_k p_k}{\boldsymbol{p}^2}P_- - 2p_i\frac{\sum_k \mathcal{S}_k p_k}{\boldsymbol{p}^2}P_-\mathcal{S}_i \\
&= \mathcal{S}_i^2 + 4\frac{p_i^2}{\boldsymbol{p}^4}(\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p})^2 P_- - 2\frac{p_i}{\boldsymbol{p}^2}\sum_k p_k\left\{\mathcal{S}_i,\mathcal{S}_k\right\}P_- \\
&= 1 + 4\frac{p_i^2}{\boldsymbol{p}^2}P_- - 4\frac{p_i^2}{\boldsymbol{p}^2}P_- \\
&= 1
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Notemos que no desenvolvimento acima, não se soma em i. Vejamos agora os comutadores e anticomutadores dos componentes:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_i,\mathcal{O}_j] &= [\mathcal{S}_i,\mathcal{S}_j] - \frac{2p_j}{\boldsymbol{p}^2}[\mathcal{S}_i,\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-] - \frac{2p_i}{\boldsymbol{p}^2}[\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-,\mathcal{S}_j] + \frac{4p_ip_j}{\boldsymbol{p}^4}[\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-,\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-] \\
&= [\mathcal{S}_i,\mathcal{S}_j] - \frac{2p_jp_a}{\boldsymbol{p}^2}[\mathcal{S}_i,\mathcal{S}_a]P_- - \frac{2p_ip_a}{\boldsymbol{p}^2}[\mathcal{S}_a,\mathcal{S}_j]P_- \\
&= 2i\epsilon_{ijk}\Sigma_k - \frac{4i}{\boldsymbol{p}^2}\left(p_j\epsilon_{ial} - p_j\epsilon_{jal}\right)p_a\Sigma_l P_- \ .
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Vamos trabalhar a segunda parcela para que fique em uma forma mais conveniente

$$\begin{aligned}
\left(p_j\epsilon_{ial} - p_j\epsilon_{jal}\right)p_a\Sigma_l &= p_j(\epsilon_{ial}p_a\Sigma_l) - p_i(\epsilon_{jal}p_a\Sigma_l) \\
&= (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Sigma})_i p_j - (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Sigma})_j p_i \\
&= \epsilon_{ijk}[(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{\Sigma})\times\boldsymbol{p}]_k \\
&= \epsilon_{ijk}(\Sigma_k\boldsymbol{p}^2 - p_k\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}),
\end{aligned} \tag{3.67}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_i,\mathcal{O}_j] &= 2i\epsilon_{ijk}\left(\Sigma_k - 2\Sigma_k P_- + 2p_k\frac{\boldsymbol{\Sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}P_-\right) \\
&= 2i\epsilon_{ijk}\mathcal{O}_k.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Quanto ao anticomutador:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{O}_i,\mathcal{O}_j\} &= \{\mathcal{S}_i,\mathcal{S}_j\} - \frac{2p_j}{\boldsymbol{p}^2}\{\mathcal{S}_i,\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-\} - \frac{2p_i}{\boldsymbol{p}^2}\{\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-,\mathcal{S}_j\} + \frac{4p_ip_j}{\boldsymbol{p}^4}\{\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-,\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}P_-\}\\ &= \{\mathcal{S}_i,\mathcal{S}_j\} - \frac{2p_jp_a}{\boldsymbol{p}^2}\{\mathcal{S}_i,\mathcal{S}_a\}P_- - \frac{2p_ip_a}{\boldsymbol{p}^2}\{\mathcal{S}_a,\mathcal{S}_j\}P_- + \frac{4p_ip_jp_ap_b}{\boldsymbol{p}^4}\{\mathcal{S}_a,\mathcal{S}_b\}P_-\\ &= 2\delta_{ij} - 8\frac{p_ip_j}{\boldsymbol{p}^2}P_- + 8\frac{p_ip_j}{\boldsymbol{p}^2}P_-\\ &= 2\delta_{ij}\end{aligned} \tag{3.69}$$

Podemos estudar agora as relações de comutação destes componentes com os outros geradores de simetria discutidos acima. Para o gerador discutido em 3.1.1.1, observamos que ele coincide, como afirmado acima, com $\mathcal{O}_z$, logo seu comutador já está contemplado em (3.68):

$$[\mathcal{O}_i,\mathcal{S}_z] = [\mathcal{O}_i,\mathcal{O}_z] = 2i\epsilon_{izk}\mathcal{O}_k. \tag{3.70}$$

Para o terceiro compontente do "momento angular orbital", estudado em 3.1.1.2, temos

$$\begin{aligned}[\mathcal{O}_i,\mathcal{L}_z] &= \left[\mathcal{S}_i - 2p_i\frac{\boldsymbol{\mathcal{S}}\cdot\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2}P_-, L_z + \frac{\Sigma_z}{2}\right]\\ &= 2iP_-\left(\epsilon_{izj} - 2\frac{p_ip_k}{\boldsymbol{p}^2}\epsilon_{kzj}\right)\mathcal{S}_j - \frac{2\mathcal{S}_kP_-}{\boldsymbol{p}^2}\left(p_i[p_k,L_z] + [p_i,L_z]p_k\right).\end{aligned} \tag{3.71}$$

Desenvolvendo os comutadores da segunda parcela — explicitemos apenas o segundo por mérito de demonstração — temos

$$\begin{aligned}[p_i,L_z] &= [p_i,xp_y] - [p_i,yp_x]\\ &= [p_i,x]p_y - [p_i,y]p_x\\ &= -i\delta_{ix}p_y + i\delta_{iy}p_x,\end{aligned} \tag{3.72}$$

o que no permite escrever

$$[\mathcal{O}_i,\mathcal{L}_z] = 2iP_-\left(\epsilon_{izj} - 2\frac{p_ip_k}{\boldsymbol{p}^2}\epsilon_{kzj}\right)\mathcal{S}_j - +\frac{2i\mathcal{S}_kP_-}{\boldsymbol{p}^2}[p_y(\delta_{kx}p_i + \delta_{ix}p_k) - p_x(\delta_{ky}p_i + \delta_{iy}p_k)]. \tag{3.73}$$

Da expressão acima é muito difícil determinar uma expressão compacta, então procederemos para avaliar os três casos particulares para identificar essa expressão. Concluímos que

$$\begin{cases} [\mathcal{O}_x, \mathcal{L}_z] = 0 \\ [\mathcal{O}_y, \mathcal{L}_z] = 0 \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{O}_i, \mathcal{L}_z] = 0. \\ [\mathcal{O}_z, \mathcal{L}_z] = 0 \end{cases} \tag{3.74}$$

Prosseguindo, agora estudaremos as relações de comutação do gerador J_z, estudado em 3.1.1.3. Este gerador é uma combinação linear dos dois geradores estudados anteriormente, conforme (3.43), portanto das relações de comutação deles decorre que

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_i, J_z] &= \left[\mathcal{O}_i, \mathcal{L}_z + \frac{\mathcal{S}_z}{2}\right] \\ &= [\mathcal{O}_i, \mathcal{L}_z] + \frac{1}{2}[\mathcal{O}_i, \mathcal{S}_z] \\ &= i\epsilon_{izj}\mathcal{O}_j. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Finalmente, avaliamos agora o gerador estudado em 3.1.1.4. Este operador também pode ser decomposto em operadores cujas relações de comutação foram obtidas acima. Logo,

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_i, K] = [\mathcal{O}_i, \mathcal{S}_z J_z] &= [\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_z J_z] \\ &= [\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_z]J_z + \mathcal{O}_z[\mathcal{O}_i, J_z] \\ &= [\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_z]J_z + \mathcal{O}_z[\mathcal{O}_i, J_z] \\ &= i\varepsilon_{izk}(2\mathcal{O}_k J_z + \mathcal{O}_z\mathcal{O}_k). \end{aligned} \tag{3.76}$$

Sumarizando os resultados, a álgebra dos $\mathcal{O}_i$ é dada por

$$\mathcal{O}_i^2 = 1, \tag{3.77}$$

$$[\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\mathcal{O}_k, \tag{3.78}$$

$$\{\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j\} = 2\delta_{ij}, \tag{3.79}$$

$$\mathcal{O}_i\mathcal{O}_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\mathcal{O}_k, \tag{3.80}$$

e suas relações de comutação com os outros geradores são

$$[\mathcal{O}_i, \mathcal{S}_z] = 2i\epsilon_{izk}\mathcal{O}_k, \tag{3.81}$$

$$[\mathcal{O}_i, \mathcal{L}_z] = 0, \tag{3.82}$$

$$[\mathcal{O}_i, J_z] = i\epsilon_{izj}\mathcal{O}_j, \tag{3.83}$$

$$[\mathcal{O}_i, K] = i\varepsilon_{izk}(2\mathcal{O}_k J_z + \mathcal{O}_z\mathcal{O}_k). \tag{3.84}$$

3.1.3.1 A conexão com a Física

Resta agora entender a consequência física desta nova simetria. O termo suprimido em (3.18) é justamente o termo de acoplamento spin-órbita do componente superior, então já temos um indício de que, em termos físicos, esta simetria age modificando a interação spin-órbita. Para entender as implicações disso, construíremos os operados auxiliares

$$\mathcal{O}_s \equiv \mathcal{O}_x + is\mathcal{O}_y, \tag{3.85}$$

em que o rótulo s corresponde aos autovalores de (3.32). Duas relações de comutação pertinentes a estes operadores, de fácil dedução, são

$$[\mathcal{O}_z, \mathcal{O}_s] = 2s\mathcal{O}_s, \tag{3.86}$$

$$[\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_{-s}] = 4s\mathcal{O}_z. \tag{3.87}$$

Reconhecemos em (3.85), e na álgebra acima, formalismo semelhante ao de operadores escada da teoria geral do momento angular (**??**), o que nos convida a proceder no mesmo espírito para esses operadores tendo em vista estudar os números quânticos do sistema.

Vamos agora determinar como agem $\mathcal{O}_s$ nos autoestados (3.32). Para tanto, estudaremos como atua $\mathcal{O}_z$ nos espinores $\mathcal{O}_s\Psi^{(s')}$. Comecemos pelo caso em que $s' = s$, onde empregaremos uma manipulação algébrica para determinar uma equação de autovalor:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_z\left(\mathcal{O}_s\Psi^{(s)}\right) &= (\mathcal{O}_s\mathcal{O}_z - [\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_z])\Psi^{(s)} \\ &= \left(s\mathcal{O}_s + 2s\mathcal{O}_s\right)\Psi^{(s)} \\ &= 3s\left(\mathcal{O}_s\Psi^{(s)}\right).\end{aligned} \tag{3.88}$$

Comparando a equação de autovalor acima com (3.32), determinamos que ela é satisfeita se e apenas se

$$\mathcal{O}_s \Psi^{(s)} = 0, \tag{3.89}$$

o que já era esperado, visto que construímos operadores escada com apenas "dois degraus", $s = +1$ e $s = -1$. Tratando da mesma forma o caso em que $s \neq s'$, ou seja, $s = -s'$, concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_z \left(\mathcal{O}_s \Psi^{(-s)} \right) &= (\mathcal{O}_s \mathcal{O}_z - [\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_z]) \Psi^{(-s)} \\ &= \left(-s\mathcal{O}_s + 2s\mathcal{O}_s \right) \Psi^{(-s)} \\ &= s \left(\mathcal{O}_s \Psi^{(-s)} \right), \end{aligned} \tag{3.90}$$

e portanto, por comparação,

$$\mathcal{O}_s \Psi^{(-s)} \propto \Psi^{(s)}. \tag{3.91}$$

O próximo passo é avaliar os autoestados dos operadores estudados na subseção 3.1.1, além do operador hamiltoniano (1.61) para compreender exatamente quais são os números quânticos que rotulam o espinor — s, l, m_j e k —, que são independentes dois a dois. Para que possamos executar a manipulação algébrica como a que fizemos acima, calcularemos os comutadores de $\mathcal{O}_s$ com os operadores em questão, para assim determinar a equação de autovalor do estado $\mathcal{O}_{-s}\Psi^{(s)}$, que sabemos por (3.91) ser proporcional à $\Psi^{(s)}$.

Comecemos pelo operador hamiltoniano. Sendo $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ um gerador de simetria do sistema, é tomado por óbvio que H comuta com cada componente $\mathcal{O}_i$, logo

$$[\mathcal{O}_s, H] = 0. \tag{3.92}$$

Isto posto, é de simples conclusão que, da equação de autovalor de energia $H\Psi^{(-s)} = \varepsilon\Psi^{(-s)}$, deduzimos que

$$H(\mathcal{O}_s \Psi^{(-s)}) = \varepsilon(\mathcal{O}_s \Psi^{(-s)}). \tag{3.93}$$

Em seguida, avaliemos o gerador (3.31), que coincide com o operador $\mathcal{O}_z$, cuja relação de comutação com $\mathcal{O}_s$ já foi dada em (3.86) e a equação de autovalor dada em (3.90). Repetindo o resultado,

$$\mathcal{O}_z \left(\mathcal{O}_s \Psi^{(-s)}\right) = s \left(\mathcal{O}_s \Psi^{(-s)}\right). \tag{3.94}$$

Em seguida, avaliemos o gerador $\mathcal{L}_z$, dado por (3.37). De (3.82) decorre que

$$[\mathcal{O}_s, \mathcal{L}_z] = 0, \tag{3.95}$$

e portanto

$$\mathcal{L}_z \left(\mathcal{O}_s \Psi_l^{(-s)}\right) = l \left(\mathcal{O}_s \Psi_l^{(-s)}\right). \tag{3.96}$$

Adiante, temos o gerador J_z, cuja equação de autovalor é (3.44). A relação de comutação com $\mathcal{O}_s$ pode ser determinada utilizando o resultado (3.83):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{O}_s, J_z] &= [\mathcal{O}_x, J_z] + is\,[\mathcal{O}_y, J_z] \\
&= -i\mathcal{O}_y + is\,(i\mathcal{O}_x) \\
&= -s\,(\mathcal{O}_x + is\mathcal{O}_y) \\
&= -s\mathcal{O}_s.
\end{aligned} \tag{3.97}$$

Decorre que

$$\begin{aligned}
J_z \left(\mathcal{O}_s \Psi_{m_j}^{(-s)}\right) &= (\mathcal{O}_s J_z - [\mathcal{O}_s, J_z])\Psi_{m_j}^{(-s)} \\
&= (m_j \mathcal{O}_s + s\mathcal{O}_s)\,\Psi_{m_j}^{(-s)} \\
&= (m_j + s) \left(\mathcal{O}_s \Psi_{m_j}^{(-s)}\right).
\end{aligned} \tag{3.98}$$

Por fim, estudemos agora o operador spin-órbita K, cuja equação de autovalor é (3.46). Podemos deduzir a relação de comutação de forma mais simples empregando os resultados (3.86) e (3.97), o que resulta em

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{O}_s, K] = [\mathcal{O}_s, \mathcal{S}_z J_z] &= [\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_z J_z] \\
&= \mathcal{O}_z \left[\mathcal{O}_s, J_z\right] + \left[\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_z\right] J_z \\
&= \mathcal{O}_z \left(-s\mathcal{O}_s\right) + \left(-2s\mathcal{O}_s\right) J_z \\
&= -s \left(\mathcal{O}_s\mathcal{O}_z - \left[\mathcal{O}_s, \mathcal{O}_z\right]\right) - 2s\mathcal{O}_s J_z \\
&= -s\mathcal{O}_s \left(\mathcal{O}_z + 2s + 2J_z\right). \qquad (3.99)
\end{aligned}
$$

Identificamos então a equação de autovalor

$$
\begin{aligned}
K\left(\mathcal{O}_s\Psi_k^{(-s)}\right) &= \left(\mathcal{O}_s K - \left[\mathcal{O}_s, K\right]\right)\Psi_k^{(-s)} \\
&= \left[k\mathcal{O}_s + s\mathcal{O}_s \left(\mathcal{O}_z + 2s + 2J_z\right)\right]\Psi_k^{(-s)} \\
&= \left[k\mathcal{O}_s + s\mathcal{O}_s \left(-s + 2s + 2\frac{k}{-s}\right)\right]\Psi_k^{(-s)} \\
&= (-k+1)\left(\mathcal{O}_s\Psi_k^{(-s)}\right), \qquad (3.100)
\end{aligned}
$$

onde recorremos ao fato de que $m_j = k/(-s)$ para $\Psi_k^{(-s)}$.

Finalmente somos capazes de interpretar que, compilando (3.93), (3.94), (3.96), (3.98), (3.100), e relembrando (3.91), a simetria de spin implica o surgimento de uma dupla degenerescência essencial de dois estados: $\Psi_{k,m_j}^{(-s)}$ e

$$
\mathcal{O}_s\Psi_{k,m_j}^{(-s)} \propto \Psi_{-k+1,m_j+s}^{(s)}, \qquad (3.101)
$$

ambos possuindo energia $\varepsilon = \varepsilon(k, m_j)$.

3.1.3.2 O par da simetria de spin: a simetria de pseudospin

Assim como a simetria de spin se relaciona com a supressão da interação spin-órbita no componente superior do espinor de Dirac, decorrente de $V_\Delta =$ constante, semelhante simetria surge no caso em que $V_\Sigma =$ constante, a chamada simetria de pseudospin, caso em que a supressão da interação spin-órbita ocorre para o componente inferior. O estudo dessa outra simetria pode ser realizado da mesma forma que o apresentado acima para a simetria de spin, de maneira que seria exaustivo repetir aqui. O gerador de simetria encontrado neste caso será (**??**)

$$
\tilde{\boldsymbol{\mathcal{O}}} = \gamma^5\boldsymbol{\mathcal{O}}, \qquad (3.102)
$$

em que a matriz γ^5 representa o operador quiralidade, dado por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.103}$$

Corresponde também um gerador semelhante à $\mathcal{L}_z$, onde agora encontramos

$$\tilde{\mathcal{L}}_z = \gamma^5 \mathcal{L}_z. \tag{3.104}$$

3.2 EQUAÇÕES RADIAIS DA TEORIA DE DIRAC PARA O MOVIMENTO CIRCULARMENTE SIMÉTRICO

Para determinar a solução da equação de Dirac, devemos em primeiro lugar determinar a estrutura do espinor adequado para o sistema circularmente simétrico. Para atender a isso, devemos dispor de um conjunto completo de observáveis mutuamente comutantes (**??**), que no presente problema, deve ter três elementos, pois recordamos que para o movimento planar, já escolhemos convenientemente soluções tais que (1.68) seja respeitada, o que elimina um grau de liberdade do sistema. Por outro lado, diferente da teoria de Klein-Gordon, aqui temos que considerar o grau de liberdade adicional do spin, resultando portanto em três graus de liberdade. Como dito anteriormente, os geradores de simetria contínuos já construídos são independentes dois a dois, de forma que junto ao hamiltoniano (1.61), escolheremos mais dois operadores cujos observáveis associados rotularão as soluções. A presença do operador spin-órbita K em (3.4) obviamente justifica sua escolha imediata como um dos operadores. A aparição do termo $L_z\Sigma_z$ em (3.4) indica que utilizar o terceiro componente do momento angular total, $J_z = L_z + \Sigma_z/2$ também é conveniente. Precisamos verificar se esses observáveis comutam entre si, haja vista que todos comutam com o hamiltoniano. Verificamos que, de acordo com (3.83),

$$\begin{aligned} [K, J_z] = [\mathcal{S}_z J_z, J_z] &= [\mathcal{O}_z J_z, J_z] \\ &= \mathcal{O}_z[J_z, J_z] + [\mathcal{O}_z, J_z]J_z \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.105}$$

Concluímos que H, K e J_z de fato constituem um conjunto completo de observáveis comutantes, e podemos escrever portanto um autoestado simultâneo de todos esses operadores. Isto posto, temos

$$H\Psi = \varepsilon\Psi, \tag{3.106}$$

$$K\Psi = k\Psi, \tag{3.107}$$

$$J_z\Psi = m_j\Psi. \tag{3.108}$$

Retomando a subseção (3.1.2), escolhemos adicionalmente que o espinor seja um autoestado da paridade — que comuta com todos os operadores citados acima —, o que nos orienta sobre a sua parte angular. Conforme (3.56), deveremos ter os componentes superior e inferior com paridades opostas, de forma que já explicitaremos esses componentes para determinar a estrutura do autoespinor. Conforme (**??**), esperamos que esses componentes sejam um produto de duas funções, uma de ρ e outra de ϕ. Escrevemos, já considerando alguns fatores convenientes relativos à condição de normalização (1.53),

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_S \\ \Psi_I \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{pmatrix} ig(\rho)h_1(\phi) \\ f(\rho)h_2(\phi) \end{pmatrix}. \tag{3.109}$$

Da forma em que o produto $L_z\Sigma_z$ aparece no hamiltoniano — vide (3.5) —, h_1 e h_2 serão construídos como produtos dos autoestados de L_z e σ_z (versão 2×2 do operador Σ_z), de forma que a paridade de ambas as funções sejam opostas. Verificamos primeiro que, de acordo com (A.21), as autofunções de L_z são autoestados da paridade, tal que

$$P_0\Phi_l = (-1)^l\Phi_l. \tag{3.110}$$

E para os autoestados de σ_z, nos referimos à (B.12). Com estes autoestados, devemos construir dois espinores de duas componentes tais que: 1) suas paridades sejam opostas; 2) seus autovalores do operador spin-órbita de duas componentes

$$K^{(2)} = L_z\sigma_z + \frac{1}{2} \quad , \quad K^{(2)}h = kh, \tag{3.111}$$

sejam opostos; e 3) o autovalor do operador

$$j_z = L_z + \frac{\sigma_z}{2} \quad , \quad j_z h = m_j h, \tag{3.112}$$

seja o mesmo para ambos. Construímos o chamado harmônico circular espinorial

$$h_{km_j} = \Phi_l \chi_s, \tag{3.113}$$

tal que

$$l = m_j - \frac{k}{2m_j}, \tag{3.114}$$

$$s = \frac{k}{m_j}. \tag{3.115}$$

Conforme (3.42) e (3.46), podemos determinar duas propriedades pertinentes de (3.113):

$$\int_0^{2\pi} d\phi \; h^{\dagger}_{k'm'_j} h_{km_j} = \delta_{k'k}\delta_{m'_j m_j} \tag{3.116}$$

$$\sigma_\rho h_{km_j} = h_{-km_j}. \tag{3.117}$$

Além disso, nos detenhamos por um momento ao ponto 2, que é o menos óbvio. Ele se torna claro se pensarmos o operador spin-órbita como

$$K = \beta \begin{pmatrix} K^{(2)} & 0 \\ 0 & K^{(2)} \end{pmatrix} \tag{3.118}$$

e o espinor (3.109) como

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[\begin{pmatrix} ig(\rho)h_1(\phi) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(\rho)h_2(\phi) \end{pmatrix} \right]. \tag{3.119}$$

Aplicando (3.118) neste espinor, se torna óbvio que h_1 e h_2 devem ter autovalores opostos, para que o fator β compense a diferença de sinal que surge da aplicação de $K^{(2)}$ neles.

Os três pontos elencados acima são satisfeitos se

$$h_1 = h_{km_j}, \tag{3.120}$$

$$h_2 = h_{-km_j}, \tag{3.121}$$

e portanto, o espinor de Dirac terá a estrutura final

$$\Psi_{km_j} = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \begin{pmatrix} ig_{km_j}(\rho)h_{km_j}(\phi) \\ f_{km_j}(\rho)h_{-km_j}(\phi) \end{pmatrix}. \tag{3.122}$$

A condição de normalização para essa estrutura espinorial é, conforme (1.53), dada por

$$\int d\rho \, \left(\left| g_{km_j} \right|^2 + \left| f_{km_j} \right|^2 \right) = 1. \tag{3.123}$$

Portanto, as funções radiais devem ser quadrado integráveis, uma condição muito mais simples do que aquela da teoria de Klein-Gordon.

Enfim estamos prontos para construir as equações radiais. Substituindo (3.122) em (1.61) ou (3.4), obtemos

$$\frac{dg}{d\rho} - \frac{k}{\rho} g = (\varepsilon - V_\Delta + m) f, \tag{3.124}$$

$$\frac{df}{d\rho} + \frac{k}{\rho} f = -(\varepsilon - V_\Sigma - m) g. \tag{3.125}$$

Diferenciando as duas equações e substituindo o termo de derivada primeira, temos

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} - \frac{k(k-1)}{\rho^2} g = -\frac{dV_\Delta}{d\rho} f - \left[\varepsilon^2 - m^2 - (\varepsilon + m)V_\Sigma - (\varepsilon - m)V_\Delta + V_\Sigma V_\Delta \right] g, \tag{3.126}$$

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} - \frac{k(k+1)}{\rho^2} f = \frac{dV_\Sigma}{d\rho} g - \left[\varepsilon^2 - m^2 - (\varepsilon + m)V_\Sigma - (\varepsilon - m)V_\Delta + V_\Sigma V_\Delta \right] f, \tag{3.127}$$

onde já ressalta aos olhos que a condição de simetria de spin, $V_\Delta = 0$, propicia imediatamente o desacoplamento da equação para g, como esperado, visto que a supressão da interação spin-órbita do componente superior corresponde à eliminação do caráter matricial da equação (3.17), e por sua vez, o acoplamento das equações. Notamos também que as duas equações acima se relacionam entre si pela transformação de conjugação de carga (vide Apêndice C). O mesmo vale para o par (3.124) e (3.125).

Finalmente estamos aptos a estudar um problema concreto: o potencial de "Coulomb" para o movimento planar.

3.3 PROBLEMA DE "COULOMB"

Vamos agora avaliar o mesmo sistema estudado na seção 2.4, mas dessa vez na teoria de Dirac. Repetindo, os potenciais são

$$V_\Sigma = \frac{\alpha_\Sigma}{\rho} \quad \text{e} \quad V_\Delta = \frac{\alpha_\Delta}{\rho}. \tag{3.128}$$

As equações radiais de primeira e segunda ordem do problema são

$$\frac{dg}{d\rho} = \frac{k}{\rho} g + \left(\varepsilon + m - \frac{\alpha_\Delta}{\rho}\right) f, \tag{3.129}$$

$$\frac{df}{d\rho} = -\frac{k}{\rho} f - \left(\varepsilon - m - \frac{\alpha_\Sigma}{\rho}\right) g, \tag{3.130}$$

e

$$\frac{d^2 g}{d\rho^2} + \left[-\frac{k(k-1) - \alpha_\Sigma \alpha_\Delta}{\rho^2} - \frac{(\varepsilon + m)\alpha_\Sigma + (\varepsilon - m)\alpha_\Delta}{\rho} + \varepsilon^2 - m^2\right] g = \frac{\alpha_\Delta}{\rho^2} f, \tag{3.131}$$

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \left[-\frac{k(k+1) - \alpha_\Sigma \alpha_\Delta}{\rho^2} - \frac{(\varepsilon + m)\alpha_\Sigma + (\varepsilon - m)\alpha_\Delta}{\rho} + \varepsilon^2 - m^2\right] f = -\frac{\alpha_\Sigma}{\rho^2} g. \tag{3.132}$$

Iniciamos nossa investigação avaliando dois casos particulares: $\varepsilon = m$ e $\varepsilon = -m$. Para o primeiro, as equações de primeira ordem se reduzem para

$$\frac{dg}{d\rho} = \frac{k}{\rho} g + \left(2m - \frac{\alpha_\Delta}{\rho}\right) f, \tag{3.133}$$

$$\frac{df}{d\rho} = -\frac{k}{\rho} f + \frac{\alpha_\Sigma}{\rho} g. \tag{3.134}$$

A análise do comportamento assintótico das equações nos mostra que ou as funções não poderão ser normalizadas, ou temos uma solução trivial, pois no limite tendendo a infinito, elas serão tais que

$$g = 2m(A\rho + B), \tag{3.135}$$

$$f = A, \tag{3.136}$$

em que A e B são constantes arbitrárias. Semelhante análise para o caso $\varepsilon = -m$ nos leva a mesma conclusão, portanto esses dois casos são descartados.

Em vez de estudar as equações para os demais casos na forma acima, faremos uma mudança de variáveis conveniente:

$$\tilde{\rho} = 2\lambda\rho \quad , \quad \lambda = \sqrt{m^2 - \varepsilon^2}\,, \tag{3.137}$$

que nos conduz às equações

$$\frac{dg}{d\tilde{\rho}} = \frac{k}{\tilde{\rho}}g + \left(\frac{\varepsilon + m}{2\lambda} - \frac{\alpha_\Delta}{\tilde{\rho}}\right) f, \tag{3.138}$$

$$\frac{df}{d\tilde{\rho}} = -\frac{k}{\tilde{\rho}}f - \left(\frac{\varepsilon - m}{2\lambda} - \frac{\alpha_\Sigma}{\tilde{\rho}}\right) g, \tag{3.139}$$

$$\frac{d^2g}{d\tilde{\rho}^2} + \left[-\frac{k(k-1) - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta}{\tilde{\rho}^2} - \frac{(\varepsilon + m)\alpha_\Sigma + (\varepsilon - m)\alpha_\Delta}{2\lambda\tilde{\rho}} - \frac{1}{4}\right] g = \frac{\alpha_\Delta}{\tilde{\rho}^2} f, \tag{3.140}$$

$$\frac{d^2f}{d\tilde{\rho}^2} + \left[-\frac{k(k+1) - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta}{\tilde{\rho}^2} - \frac{(\varepsilon + m)\alpha_\Sigma + (\varepsilon - m)\alpha_\Delta}{2\lambda\tilde{\rho}} - \frac{1}{4}\right] f = -\frac{\alpha_\Sigma}{\tilde{\rho}^2} g. \tag{3.141}$$

Nossa estratégia será avaliar o comportamento das equações de primeira ordem nos limites $\tilde{\rho} \to \infty$ e $\tilde{\rho} \to 0$ para extrair o comportamento da função nos extremos, propondo um *Ansatz* para fatorá-las da solução, nos conduzindo a uma equação diferencial mais simples.

Para $\tilde{\rho} \to \infty$, as equações se reduzem para

$$\frac{dg}{d\tilde{\rho}} = \frac{m + \varepsilon}{2\lambda} f, \tag{3.142}$$

$$\frac{df}{d\tilde{\rho}} = \frac{m - \varepsilon}{2\lambda} g. \tag{3.143}$$

Uma breve inspeção nos sugere que uma solução pertinente seja da forma

$$g = \beta e^{-\delta\tilde{\rho}}, \tag{3.144}$$

$$f = \alpha e^{-\delta\tilde{\rho}}, \tag{3.145}$$

que, substituídas na equação diferencial, leva ao sistema de equações algébricas

$$-\delta\beta = \frac{\varepsilon + m}{2\lambda}\alpha, \tag{3.146}$$

$$-\delta\alpha = -\frac{\varepsilon - m}{2\lambda}\beta. \tag{3.147}$$

Resolvendo para δ, encontramos $\delta = \pm 1/2$, mas a condição $\delta > 0$ deve ser respeitada para a função satisfazer à condição de normalização (3.123). Portanto

$$\delta = \frac{1}{2}. \tag{3.148}$$

Para $\tilde{\rho} \to 0$, temos as equações

$$\frac{dg}{d\tilde{\rho}} = \frac{k}{\tilde{\rho}} g - \frac{\alpha_\Delta}{\tilde{\rho}} f, \tag{3.149}$$

$$\frac{df}{d\tilde{\rho}} = -\frac{k}{\tilde{\rho}} f + \frac{\alpha_\Sigma}{\tilde{\rho}} g. \tag{3.150}$$

As soluções apropriadas

$$g = \beta \tilde{\rho}^{\gamma_1}, \tag{3.151}$$

$$f = \alpha \tilde{\rho}^{\gamma_2}, \tag{3.152}$$

substituídas nas equações, geram o sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned} \beta(\gamma_1 - k) + \alpha\alpha_\Delta \tilde{\rho}^{\gamma_2 - \gamma_1} = 0, \\ -\beta\alpha_\Sigma + \alpha(\gamma_2 + k)\tilde{\rho}^{\gamma_2 - \gamma_1} = 0. \end{aligned} \tag{3.153}$$

Aqui, podemos analisar três casos diferentes dos *Ansatz* (3.151) e (3.152):

(1) $\gamma_1 > \gamma_2$;

(2) $\gamma_1 < \gamma_2$;

(3) $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$, em que $\gamma = \pm\sqrt{k^2 - \alpha_\Sigma \alpha_\Delta}$.

Como demonstraremos, apenas o caso (3) fornece soluções pertinentes. Tratando do caso (1), teremos duas possibilidades embutidas nele:

(1.a) $\alpha = 0$, que implica $f = 0$;

(1.b) $\alpha_\Delta = 0$ e $\gamma_2 = -k$.

Para a possibilidade (1.a), com $f = 0$ a equação (3.150) nos leva à relação

$$\frac{\alpha_\Sigma}{\tilde{\rho}} g = 0, \tag{3.154}$$

e a equação (3.139) se torna

$$\left(\frac{\varepsilon - m}{2\lambda} - \frac{\alpha_\Sigma}{\tilde{\rho}} \right) g = 0. \tag{3.155}$$

Só existem duas formas de satisfazer ambas as equações. Tomando $\alpha_\Sigma = 0$, devemos também impor que $\varepsilon = m$, o que não é permitido para as equações estudadas, pois elas decorrem de equações que foram sujeitas à mudança de variável (3.137), o que tacitamente exclui estes casos. Além disso, já foi estudado o caso em que $\varepsilon = m$, em que se verificou que não existem soluções adequadas. A outra forma de satisfazer (3.154) e (3.155) é tomando $g = 0$, uma solução trivial do problema, o que não nos interessa. Portanto a possibilidade (1.a) deve ser descartada

Para a possibilidade (1.b), temos $f = \alpha\rho^{-k}$. Se $k > 0$, a solução não é apropriada à condição de normalização (3.123), e portanto devemos impor que $\alpha = 0$, e por conseguinte $f = 0$. Isto posto, assim como na possibilidade (1.a), teremos $g = \beta\rho^k$, que leva à soluções que devem ser descartadas. No caso em que $k < 0$, a solução f é apropriada, e aplicando a condição $\alpha_\Delta = 0$ em (3.149), descobrimos que $g = 0$ é a única solução apropriada. Contudo, neste cenário, a equação (3.138) se reduz para

$$\frac{\varepsilon + m}{2\lambda} f = 0 \tag{3.156}$$

o que só pode ser satisfeito se $f = 0$, uma solução trivial, ou se $\varepsilon = -m$, caso que deve ser excluído da análise haja vista a mudança de variável (3.137).

Com a análise exposta acima, concluímos portanto que o caso (1) não fornece soluções pertinentes ao problema estudado. O caso (2) pode ser obtido a partir das soluções do caso (1) apenas realizando as trocas $k \to -k$, $f \to g$, $g \to f$ e $\varepsilon^\pm \to \varepsilon^\mp$. Isso pode ser facilmente concluído ao avaliar a forma das equações radiais para este caso. Concluímos da mesma forma que o caso (2) também não provê soluções adequadas para o problema.

Nos resta avaliar o caso (3), em que um estudo mais minucioso é exigido. Resolvendo para γ o sistema de equações (3.153), encontramos $\gamma = \pm\sqrt{k^2 - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta}$. Conforme a condição de normalização (3.123), devemos impor que $Re\ \gamma > -1/2$. Além disso, a existência de certos valores esperados — como $\langle V_\Sigma \rangle$ e $\langle V_\Delta \rangle$ — pressupõe que $Re\ \gamma > 0$ para se construir estados ligados, o que restringe γ a ser real e não negativo, e portanto

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha_\Sigma\alpha_\Delta}, \tag{3.157}$$

de modo que a seguinte desigualdade deve ser respeitada:

$$\alpha_\Sigma \alpha_\Delta < k^2. \tag{3.158}$$

Isto posto, construíremos, convenientemente, o seguinte *Ansatz* (**??**)

$$g(\tilde{\rho}) = \sqrt{m+\varepsilon}\, e^{-\tilde{\rho}/2}\tilde{\rho}^\gamma \left[F(\tilde{\rho}) + G(\tilde{\rho})\right], \tag{3.159}$$

$$f(\tilde{\rho}) = \sqrt{m-\varepsilon}\, e^{-\tilde{\rho}/2}\tilde{\rho}^\gamma \left[F(\tilde{\rho}) - G(\tilde{\rho})\right]. \tag{3.160}$$

Explicitados o comportamento na vizinhança da origem e o comportamento assintótico de g e f, resta determinar a forma da função no restante do espaço, o que será feito por F e G. Claramente, é pressuposto que essas funções se comportem de forma a não prejudicar os comportamentos na origem e no limite tendendo a infinito para g e f.

Definiremos a notação conveniente

$$\alpha_\pm = \frac{(m+\varepsilon)\alpha_\Sigma \pm (m-\varepsilon)\alpha_\Delta}{2\lambda}, \tag{3.161}$$

da qual decorre que

$$\alpha_+^2 - \alpha_-^2 = \alpha_\Sigma \alpha_\Delta. \tag{3.162}$$

Substituindo (3.159) e (3.160) nas equações (3.138) e (3.139), encontramos

$$\frac{dG}{d\tilde{\rho}} + \frac{\gamma + \alpha_-}{\tilde{\rho}} G = \frac{k - \alpha_+}{\tilde{\rho}} F, \tag{3.163}$$

$$\frac{dF}{d\tilde{\rho}} + \left(-1 + \frac{\gamma - \alpha_-}{\tilde{\rho}}\right) F = \frac{k + \alpha_+}{\tilde{\rho}} G. \tag{3.164}$$

Daqui se desdobram duas possibilidades para avaliar:

(i) $\alpha_+ = k$;

(ii) $\alpha_+ \neq k$.

Na possibilidade (i), a relação (3.162) nos permite deduzir que $\alpha_- = \pm\gamma$. Se tomarmos a solução com $\alpha_- = +\gamma$, as equações radiais se reduzem para

$$\frac{dG}{d\tilde{\rho}} + \frac{2\gamma}{\tilde{\rho}}G = 0, \tag{3.165}$$

$$\frac{dF}{d\tilde{\rho}} - F = \frac{2k}{\tilde{\rho}}G. \tag{3.166}$$

A equação (3.165) tem como solução a função $G = A\tilde{\rho}^{-2\gamma}$, sendo A uma constante arbitrária. G possui comportamento inapropriado na origem se $A \neq 0$, e portanto deve ser descartada. Mesmo assim, tomando $A = 0$, a equação (3.166) só é satisfeita pela função $F = Be^{\tilde{\rho}}$, sendo B uma constante arbitrária. A função F, por sua vez, é inapropriada assintoticamente se $B \neq 0$, o que nos deixa com apenas uma solução trivial — $G = F = 0$ — como adequada para satisfazer a condição de contorno. Concluímos finalmente que a solução com $\alpha_- = +\gamma$ deve ser descartada. Avaliando agora se $\alpha_- = -\gamma$, a mesma análise conduz às soluções (vide Apêndice G)

$$G(\tilde{\rho}) = A, \tag{3.167}$$

$$F(\tilde{\rho}) = \frac{Ak}{\gamma}\left[1 + \frac{\tilde{\rho}}{1+2\gamma}M(1, 2\gamma+2, \tilde{\rho})\right] + B\tilde{\rho}^{-2\gamma}e^{\tilde{\rho}}, \tag{3.168}$$

que só seria apropriada à condição de normalização (3.123) se $A = B = 0$, resultando também em solução trivial, o que não nos interessa, logo a solução $\alpha_- = -\gamma$ também deve ser descartada.

Não havendo soluções pertinentes para a possibilidade (i), vejamos a (ii), $\alpha_+ \neq k$. Este caso nos permite desacoplar a equação para G, conduzindo à equação de segunda ordem

$$\tilde{\rho}\frac{d^2G}{d\tilde{\rho}^2} + (2\gamma + 1 - \tilde{\rho})\frac{dG}{d\tilde{\rho}} - (\gamma + \alpha_-)G = 0, \tag{3.169}$$

que identificamos ser a equação de Kummer com parâmetros (vide Apêndice G)

$$a = \gamma + \alpha_-, \tag{3.170}$$

$$b = 2\gamma + 1. \tag{3.171}$$

A solução apropriada da equação (3.169) é

$$G(\tilde{\rho}) = AM\left(\gamma + \alpha_-, 2\gamma + 1, \tilde{\rho}\right), \tag{3.172}$$

em que A é uma constante arbitrária. Excluiu-se a solução cujo comportamento na vizinhança da origem é singular. A solução apropriada para os nossos propósitos requer ainda que o

comportamento assintótico da função (3.172) seja tratado para que ela atenda à condição de normalização (3.123). Isto pode ser realizado com a condição (G.5), que no nosso problema corresponde à

$$n_r = -a = 0, 1, 2, ..., \tag{3.173}$$

o que resultará na quantização dos estados ligados e na representação da função radial como

$$G_{n_r k}(\tilde{\rho}) = A_{n_r k} \frac{n_r!\, \Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)} L_{n_r}^{(2\gamma)}(\tilde{\rho})\,. \tag{3.174}$$

Com o uso de (3.163) e da propriedade (G.6), determinamos a outra função radial, que é

$$\begin{aligned} F_{n_r k}(\tilde{\rho}) &= A_{n_r k} \frac{1}{k-\alpha_+} aM\left(a+1, b, \tilde{\rho}\right) \\ &= -\frac{A_{n_r k} n_r!}{k-\alpha_+} \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma)} L_{n_r-1}^{(2\gamma)}(\tilde{\rho})\,. \end{aligned} \tag{3.175}$$

Contudo, a expressão (3.175) não é válida para o caso $n_r = 0$, que requer atenção especial. Sabendo que $G_{0k}(\tilde{\rho}) = A_{0k}$, descobrimos que

$$F_{0k}(\tilde{\rho}) = 0. \tag{3.176}$$

Da relação $n_r = -a$, determinamos também o espectro

$$\frac{\varepsilon_{n_r k}^{\pm}}{m} = \frac{\alpha_\Delta^2 - \alpha_\Sigma^2 \pm 4\xi\sqrt{\alpha_\Delta \alpha_\Sigma + \xi^2}}{\left(\alpha_\Delta + \alpha_\Sigma\right)^2 + 4\xi^2}, \qquad \xi = n_r + \gamma. \tag{3.177}$$

Com a pré-condição de que $\alpha_+ \neq k$, finalmente, conforme (3.159) e (3.160), teremos as funções radiais do caso (3)

$$g_{n_r k}(\tilde{\rho}) = A_{n_r k m_j} \sqrt{m+\varepsilon}\; e^{-\tilde{\rho}/2} \tilde{\rho}^{\gamma} \frac{n_r!\, \Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)} \left[-\frac{n_r+2\gamma}{k-\alpha_+} L_{n_r-1}^{(2\gamma)}(\tilde{\rho}) + L_{n_r}^{(2\gamma)}(\tilde{\rho}) \right], \tag{3.178}$$

$$f_{n_r k}(\tilde{\rho}) = A_{n_r k m_j} \sqrt{m-\varepsilon}\; e^{-\tilde{\rho}/2} \tilde{\rho}^{\gamma} \frac{n_r!\, \Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(n_r+2\gamma+1)} \left[-\frac{n_r+2\gamma}{k-\alpha_+} L_{n_r-1}^{(2\gamma)}(\tilde{\rho}) - L_{n_r}^{(2\gamma)}(\tilde{\rho}) \right]. \tag{3.179}$$

Para que possamos incluir a expressão das funções radiais quando $n_r = 0$, tomaremos como implícito que

$$L_{-1}^{(2\gamma)}(\tilde{\rho}) = 0. \tag{3.180}$$

Avaliaremos agora três casos particulares da solução geral do problema.

3.3.1 Interação puramente vetorial

É interessante avaliarmos a particularização para o caso de uma interação puramente vetorial, *i.e.*, $\alpha_\Sigma = \alpha_\Delta \equiv -\alpha$. Neste caso, as expressões (3.161) se tornam

$$\alpha_+ = -\frac{\alpha m}{\lambda} \quad , \quad \alpha_- = -\frac{\alpha \varepsilon}{\lambda}, \tag{3.181}$$

e (3.157) se reduz para

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2} \quad , \quad |\alpha| < |k| \,. \tag{3.182}$$

A expressão (3.177) se torna

$$\frac{\varepsilon_{n_r k}^{\pm}}{m} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2}{\xi^2}}}, \tag{3.183}$$

mas a relação (3.173) fornece a condição sgn $(\varepsilon) =$ sgn (α), e portanto

$$\frac{\varepsilon_{n_r k}}{m} = \frac{\text{sgn}\,(\alpha)}{\sqrt{1 + \dfrac{\alpha^2}{\xi^2}}}. \tag{3.184}$$

Se $n_r = 0$, devemos tomar cuidado, pois neste caso $k = \pm \alpha m/\lambda$. Mas lembremos que só existem soluções pertinentes para $k \neq -\alpha m/\lambda$. Logo, descobrimos que sgn $(k) =$ sgn (α) para $n_r = 0$. Os valores possíveis do número quântico portanto devem ser distinguidos a depender da relação entre o sinal de k e α,

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, ... & , \quad \text{sgn}\,(k) = \text{sgn}\,(\alpha) \\ 1, 2, 3, ... & , \quad \text{sgn}\,(k) \neq \text{sgn}\,(\alpha) \end{cases}. \tag{3.185}$$

Definimos o número quântico principal $n = n_r + 1/2 + |k|$, $n = 1, 2, 3, ...$, tal que $|k| \leq n - 1/2$. Isso nos leva a um grau de degenerescência de $2(2n-1)$. O espectro é duas vezes mais degenerado do que sua contraparte não-relativística (**??**). Isso se explica pelo novo grau de liberdade relacionado ao spin, que possui duas projeções possíveis. Além disso, o espectro tem a exata mesma forma que o mesmo sistema para uma partícula de Klein-Gordon (2.84), mas enquanto lá o estado é rotulado pelo autovalor de L_z, aqui o estado é rotulado pelo autovalor de K.

3.3.2 Interação puramente escalar

Avaliamos também o casos em que a interação vetorial é suprimida, restando apenas o potencial escalar, *i.e.*, fazendo $\alpha_\Delta = -\alpha_\Sigma \equiv \alpha$. Aqui, as expressões (3.161) se tornam

$$\alpha_+ = -\frac{\alpha\varepsilon}{\lambda} \quad , \quad \alpha_- = -\frac{\alpha m}{\lambda}, \tag{3.186}$$

e o espectro se torna

$$\frac{\varepsilon^{\pm}_{n_r k}}{m} = \pm\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}}, \tag{3.187}$$

tal que

$$\gamma = \sqrt{k^2 + \alpha^2}. \tag{3.188}$$

Assim como o mesmo caso na teoria de Klein-Gordon (2.86), o espectro é tal que há uma dupla degenerescência no número quântico orbital, que em Klein-Gordon é l e aqui é k.

3.3.3 Simetria de spin

Neste caso particular, as seguintes simplificações ocorrem:

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{\frac{m+\varepsilon}{m-\varepsilon}}\frac{\alpha_{\Sigma}}{2}, \tag{3.189}$$

$$\gamma = |k|\,, \tag{3.190}$$

$$\xi = n_r + |k| \tag{3.191}$$

Portanto, o espectro (3.177) se reduz para

$$\frac{\varepsilon_{n_r k}}{m} = \frac{-\alpha_{\Sigma}^2 + 4(n_r + |k|)^2}{\alpha_{\Sigma}^2 + 4(n_r + |k|)^2}. \tag{3.192}$$

Para a condição da simetria de spin, excluímos a possibilidade do sinal negativo, visto que ele leva a um estado com $\varepsilon = m$, o que não é válido para as equações que estamos estudando, conforme (3.137). Este valor de energia, além disso, já foi eliminado após nossa análise concluir que ele não possui soluções adequadas.

As funções radiais também tomarão uma forma mais simples, e portanto é conveniente expressá-las aqui. Empregando as relações de recorrência (D.9) e (D.10), expressamos g e f para os casos em que $k > 0$ e $k < 0$.

Se $k > 0$, as funções radiais serão

$$g_{n_r k}(\tilde{\rho}) = A_{n_r k m_j}\sqrt{m+\varepsilon}\; e^{-\tilde{\rho}/2}\tilde{\rho}^{|k|}\frac{n_r!\,\Gamma(2\,|k|+1)}{\Gamma(n_r+2\,|k|+1)}L_{n_r}^{(2|k|-1)}(\tilde{\rho})\,, \tag{3.193}$$

$$f_{n_r k}(\tilde{\rho}) = -A_{n_r k m_j}\sqrt{m-\varepsilon}\; e^{-\tilde{\rho}/2}\tilde{\rho}^{|k|}\frac{n_r!\,\Gamma(2\,|k|+1)}{\Gamma(n_r+2\,|k|+1)}\left(L_{n_r}^{(2|k|)}(\tilde{\rho}) + L_{n_r-1}^{(2|k|)}(\tilde{\rho})\right) \tag{3.194}$$

Se $k < 0$, as funções tomarão a forma

$$g_{n_r k}(\tilde{\rho}) = -A_{n_r k m_j}\sqrt{m+\varepsilon}\; e^{-\tilde{\rho}/2}\tilde{\rho}^{|k|+1}\frac{n_r!\,\Gamma(2\,|k|+1)}{\Gamma(n_r+2\,|k|+1)}L_{n_r-1}^{(2|k|+1)}(\tilde{\rho})\,, \tag{3.195}$$

$$\begin{aligned} f_{n_r k}(\tilde{\rho}) = -A_{n_r k m_j}\sqrt{m-\varepsilon}\; e^{-\tilde{\rho}/2}\tilde{\rho}^{|k|}&\frac{(n_r-1)!\,\Gamma(2\,|k|+1)}{\Gamma(n_r+2\,|k|+1)} \\ &\times\left(2n_r L_{n_r}^{(2|k|)}(\tilde{\rho}) + \tilde{\rho}L_{n_r-1}^{(2|k|+1)}(\tilde{\rho})\right). \end{aligned} \tag{3.196}$$

É relevante ressaltar que este caso em particular também poderia ser resolvido empregando o método do mapeamento, como feito no capítulo 2, visto que com $\alpha_{\Delta} = 0$, a equação (3.140) se torna desacoplada. Mapeando a solução para g, a substituição em (3.138) forneceria f, e portanto o problema estaria completamente resolvido. Ainda, a supressão da interação spin-órbita na

componente superior reduz a equação (3.17) à equação de Klein-Gordon, de maneira que também poderíamos mapear a solução (2.93) aqui.

Na seção 3.1.3 entendemos como a simetria de spin está intimamente conectada com o componente superior do espinor de Dirac, cuja parte radial é dada por g, conforme (3.122). Se utilizarmos como número quântico principal o número de nós da função g, que denotaremos por n_g, a degenerescência demonstrada em (3.101) pode ser melhor apreciada. De (3.193) e (3.195), identificamos

$$n_g = \begin{cases} n_r \quad , \quad k > 0 \\ n_r - 1 \quad , \quad k < 0 \end{cases} . \tag{3.197}$$

Assim, podemos escrever o espectro (3.192) da seguinte maneira:

$$\frac{\varepsilon_{n_g k}}{m} = \frac{-\alpha_\Sigma^2 + 4\left(n_g + \frac{1}{2} + \left|k - \frac{1}{2}\right|\right)^2}{\alpha_\Sigma^2 + 4\left(n_g + \frac{1}{2} + \left|k - \frac{1}{2}\right|\right)^2}. \tag{3.198}$$

Notamos aqui como a dependência do espectro no número quântico k, dada por $|k - 1/2|$ é insensível à troca de k por $-k + 1$.

4 OS PRÓXIMOS PASSOS DO PRESENTE ESTUDO

Deste trabalho, logrou-se uma série de novos resultados, dos quais se destaca um estudo muito minucioso, até então desconhecido na literatura — conforme vai o conhecimento do autor e dos orientadores envolvidos — das características das simetrias de spin e pseudospin para o movimento planar, e a apresentação de soluções explícitas para sistemas que possuem essas simetrias no regime do movimento circularmente simétrico, onde se recorreu ao uso do sistema de coordenadas cilíndricas. O passo natural a se tomar nas investigações é realizar o confronto com o conhecimento aqui apresentado com o já difundido para essas simetrias em sistemas esfericamente simétricos, para notar semelhanças e diferenças, o que porventura pode iluminar novos aspectos do debate.

Nas últimas duas décadas muita pesquisa tem sido realizada sobre estas simetrias em 3+1 dimensões, das quais citamos alguns tópicos: sobre sua natureza (**????**), o papel do isospin (**??????**), o efeito da introdução de interações tensoriais (**??**), sua realização com potenciais osciladores harmônicos (**????**) e potenciais de Coulomb (**??**), o caráter supersimétrico do spin e pseudosin (**??**), as realizações das simetrias para anti-férmions (**????????**) e sua aplicação para estados ressonantes (**??**). Notamos portanto que as simetrias de spin e pseudospin para sistemas esfericamente simétricos possuem ampla atenção da comunidade científica. É pertinente portanto avançar os estudos no mesmo espírito dos já realizados para a configuração esférica agora para a configuração cilíndrica, visto que todo o arcabouço básico necessário à essa pesquisa está aqui apresentado de forma organizada. Citamos, por exemplo, a influência da introdução de interações tensoriais no regime de movimento circularmente simétrico, em que novas circunstâncias surgem, como o fato de as interações tensoriais influírem da exata mesma maneira que os componentes espaciais da interação vetorial (**??**), o que sabidamente quebra as simetrias de spin e pseudospin. Intenta-se por fim reunir todo o conhecimento logrado para se discutir formas concretas de aplicação prática, recorrendo à literatura para se identificar estudos pertinentes.

Para todos os sistemas estudados analisamos detalhadamente as soluções, investigando também casos especiais de forma a assegurar que a discussão esteja apresentada em sua totalidade. Examinamos a exequibilidade de estados ligados com energia $\varepsilon = \pm m$ na teoria de Klein-Gordon e Dirac; estudamos a possibilidade de estados ligados com comportamentos diferentes para as funções f e g na vizinhança da origem no problema de "Coulomb" na teoria de Dirac; fomos capazes de identificar equívocos na literatura (**????**), que agora estão propriamente corrigidos. Viabilizamos portanto um tratamento mais rigoroso e meticuloso das discussões referentes aos sistemas cilindricamente simétricos, com especial atenção para as simetrias de spin e pseudospin. Deduzindo os operadores de simetria, demonstramos como as degenerescências são implicadas pela supressão da interação spin-órbita, e exemplificamos essas propriedades estudando o problema de "Coulomb". Tais resultados atualmente estão sendo adaptados para a forma de artigos que posteriormente poderão ser publicados em periódicos científicos.

REFERÊNCIAS

APÊNDICE A – O SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

O sistema de coordenadas curvilíneas cilíndricas é definido por meio das relações

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \cos\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}} \\ \hat{\boldsymbol{k}} = \hat{\boldsymbol{k}} \end{cases}, \tag{A.1}$$

de onde deduzimos o vetor posição

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= \rho\cos\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + \rho\sin\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= \rho(\cos\phi\hat{\boldsymbol{\imath}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{\jmath}}) + z\hat{\boldsymbol{k}} \\ &= \rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{k}}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

O elemento de volume diferencial é

$$d\tau = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz. \tag{A.3}$$

Os operadores diferenciais vetoriais são

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{A.4}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\phi) - \frac{\partial v_\rho}{\partial\phi}\right]\hat{\boldsymbol{k}}, \tag{A.6}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{A.7}$$

Podemos construir o vetor $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, que em coordenadas cilíndricas pode ser escrito

como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha} &= \alpha_\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \alpha_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + \alpha_3 \hat{\boldsymbol{k}} \\ &= (\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}})\hat{\boldsymbol{\phi}} + (\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{k}})\hat{\boldsymbol{k}}.\end{aligned} \tag{A.8}$$

Expandindo as componentes usando (A.1), obtemos

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\rho}} = \alpha_\rho = \alpha_1 cos\phi + \alpha_2 sen\phi \tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \alpha_\phi = -\alpha_1 sen\phi + \alpha_2 cos\phi \tag{A.10}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{k}} = \alpha_3. \tag{A.11}$$

É de fácil averiguação que

$$\alpha_\rho^2 = \alpha_\phi^2 = \alpha_3^2 = \mathbb{1}_2. \tag{A.12}$$

Ademais, os componentes (A.11) também obedecem as relações (1.62), (1.63) e (1.64), com índices cíclicos ordenados como $i, j, k \leftrightarrow \rho, \phi, z$.

O operador momento em coordenadas cilíndricas é

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} p_\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}} p_\phi + \hat{\boldsymbol{k}} p_z \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}}\left(-i\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \hat{\boldsymbol{\phi}}\left(-\frac{i}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \hat{\boldsymbol{k}}\left(-i\frac{\partial}{\partial z}\right).\end{aligned} \tag{A.13}$$

De (A.2) e (A.13), podemos determinar o operador momento angular $\boldsymbol{L}$ em coordenadas cilíndricas. O operador é definido como (vide por exemplo (**??**))

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}. \tag{A.14}$$

Logo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &= \hat{\boldsymbol{\rho}} L_\rho + \hat{\boldsymbol{\phi}} L_\phi + \hat{\boldsymbol{k}} L_z \\ &= (\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\boldsymbol{k}}) \times (p_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + p_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + p_z\hat{\boldsymbol{k}}) \\ &= (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}})\rho p_\phi + (\hat{\boldsymbol{\rho}} \times \hat{\boldsymbol{k}})\rho p_z + (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}) z p_\rho + (\hat{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\phi}}) z p_\phi \\ &= \hat{\boldsymbol{\rho}} \left(i\frac{z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} \right) + \hat{\boldsymbol{\phi}} \left[i\left(\rho\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial\rho} \right) \right] + \hat{\boldsymbol{k}} \left(-i\frac{\partial}{\partial\phi} \right). \end{aligned} \tag{A.15}$$

Os componentes cilíndricos são

$$L_\rho = i\frac{z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{A.16}$$

$$L_\phi = i\left(\rho\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial\rho} \right), \tag{A.17}$$

$$L_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{A.18}$$

Voltemos nossa atenção para o componente L_z. Os seus autoestados obedecem à equação diferencial $L_z\Phi_l(\phi) = l\Phi_l(\phi)$, em que l são os autovalores relacionados ao autoestado Φ_l, ou seja,

$$-i\frac{d\Phi_l(\phi)}{d\phi} = l\Phi_l(\phi), \tag{A.19}$$

que tem as soluções, ortonormalizadas, *i.e.*, soluções tais que

$$\int_0^{2\pi} \Phi_l^* \Phi_{\bar{l}} = \delta_{l\bar{l}}, \tag{A.20}$$

dadas por

$$\Phi_l(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\phi}. \tag{A.21}$$

Analisando a condição de contorno $\Phi_l(\phi + 2\pi) = \Phi_l(\phi)$, deduz-se que os autovalores são $l = 0, \pm1, \pm2, ...$

APÊNDICE B – AS MATRIZES DE PAULI

As matrizes de Pauli são as matrizes 2×2

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{B.1}$$

que possuem as propriedades

$$\sigma_i^\dagger = \sigma_i, \tag{B.2}$$

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2. \tag{B.3}$$

Elas satisfazem à seguinte álgebra (veja por exemplo (**??**)):

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \tag{B.4}$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{B.5}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk}\sigma_k, \tag{B.6}$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker, cujo valor é 1 se $i = j$, e zero para os demais casos, e ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita, cujos valores são

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 \quad , & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2), \\ -1 \quad , & (i,j,k) = (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3), \\ 0 \quad , & \text{para dois ou mais índices repetidos.} \end{cases} \tag{B.7}$$

As matrizes de Pauli formam, junto da matriz identidade $\mathbb{1}$, uma base do espaço das matrizes 2×2. Das matrizes de Pauli podemos definir o vetor matrizes de Pauli

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3), \tag{B.8}$$

que satisfaz à identidade vetorial

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \tag{B.9}$$

e nos permite definir o operador spin

$$\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}. \tag{B.10}$$

Para a terceira componente do operador spin, os autoestados e autovalores são dados pela equação de autovalor

$$\frac{\sigma_3}{2}\chi_s=\frac{s}{2}\chi_s, \tag{B.11}$$

cujas soluções são χ_s, relacionados aos autovalores $s=\pm1$

$$\chi_+=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\quad,\quad\chi_-=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}. \tag{B.12}$$

Para a teoria de Dirac, construímos uma versão 4×4 destes operadores

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}&0\\0&\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}, \tag{B.13}$$

satisfazendo às seguintes propriedades

$$\Sigma_i\Sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\Sigma_k, \tag{B.14}$$

$$\Sigma_i=\gamma^5\alpha_i, \tag{B.15}$$

$$[\Sigma_i,\Sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\Sigma_k, \tag{B.16}$$

$$\{\Sigma_i,\Sigma_j\}=2\delta_{ij}, \tag{B.17}$$

$$[\beta,\Sigma_i]=0, \tag{B.18}$$

$$[\alpha_i,\Sigma_j]=2i\epsilon_{ijk}\alpha_k, \tag{B.19}$$

$$\{\alpha_i,\Sigma_j\}=2\delta_{ij}\gamma^5. \tag{B.20}$$

APÊNDICE C – A CONJUGAÇÃO DE CARGA

Seja a equação de Klein-Gordon (1.43):

$$[(p^\mu - V^\mu)(p_\mu - V_\mu) - (m + V_s)^2]\Psi = 0. \tag{C.1}$$

A operação conjugação de carga consiste na prescrição

$$e \to -e, \tag{C.2}$$

que aplicada em (C.1), conduz à equação

$$[(p^\mu + V^\mu)(p_\mu + V_\mu) - (m + V_s)^2]\Psi_C = 0, \tag{C.3}$$

haja vista que a transformação (C.2) acarreta na mudança $V^\mu \to -V^\mu$, dado que o campo eletromagnético minimamente acoplado à carga elétrica e, modelado pelo potencial A^μ, produzindo a energia potencial $V^\mu = eA^\mu$ constitui o protótipo desta interação. Esta não é mais uma equação de Klein-Gordon e portanto identificamos este novo estado Ψ_C, que a priori não possui significado físico claro. Se tomarmos o conjugado complexo de (C.3), obtemos uma equação de Klein-Gordon novamente, agora para o estado Ψ_C^*:

$$[(p^\mu - V^\mu)(p_\mu - V_\mu) - (m + V_s)^2]\Psi_C^* = 0. \tag{C.4}$$

Comparando (C.1) e (C.4), encontramos uma interpretação física para Ψ_C: ele corresponde ao conjugado complexo do estado Ψ. Esta transformação é fundamental para se entender a relação de estados de partículas e antipartículas. Conhecendo a prescrição da transformação, se a avaliarmos para a equação independente do tempo (2.11), a prescrição completa da transformação deve ser

$$V_\Sigma \leftrightarrow -V_\Delta, \tag{C.5}$$

$$\varepsilon \to -\varepsilon, \tag{C.6}$$

$$l \to -l. \tag{C.7}$$

Para o autovalor l, devemos ter em conta que a equação transformada determina o estado

conjugado complexo do estado original, de forma que se inicialmente rotulado por l, o estado transformado será rotulado por $-l$.

Para a teoria de Dirac, a sua mais complicada estrutura matricial nos conduz, ao se realizar argumentos análogos aos apresentados para a teoria de Klein-Gordon, à regra de transformação do espinor sob conjugação de carga (**??**)

$$\Psi_C = i\gamma^2\Psi^*. \tag{C.8}$$

Dada a transformação, se avaliarmos as equações radiais (3.124) e (3.125), a prescrição completa da transformação deve ser

$$f \to g, \tag{C.9}$$

$$V_\Sigma \leftrightarrow -V_\Delta, \tag{C.10}$$

$$\varepsilon \to -\varepsilon, \tag{C.11}$$

$$k \to -k. \tag{C.12}$$

APÊNDICE D – OS POLINÔMIOS DE LAGUERRE GENERALIZADOS

Os polinômios de Laguerre generalizados $L_{n_r}^{(\alpha)}(x)$, com $\alpha > -1$, cujo domínio se restringe ao semieixo positivo $[0, +\infty[$ são soluções da equação de Laguerre associada (**??**)

$$x\frac{d^2L_{n_r}^{(\alpha)}(x)}{dx^2} + (\alpha + 1 - x)\frac{dL_{n_r}^{(\alpha)}(x)}{dx} + n_r L_{n_r}^{(\alpha)}(x) = 0 \quad , \quad n_r = 0, 1, 2, 3, ... \tag{D.1}$$

A fórmula de Rodrigues para esses polinômios é

$$L_{n_r}^{(\alpha)}(x) = \frac{e^{-x}x^{-\alpha}}{\Gamma(n_r + 1)}\frac{d^{n_r}}{dx^{n_r}}(e^{-x}x^{n_r+\alpha}). \tag{D.2}$$

Em forma de série, os polinômios podem ser escritos como

$$L_{n_r}^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n_r}(-1)^m\frac{\Gamma(n_r + \alpha + 1)}{\Gamma(n_r - m + 1)\Gamma(\alpha + m + 1)\Gamma(m + 1)}x^m, \tag{D.3}$$

onde vemos que $L_{n_r}^{(\alpha)}(x)$ é um polinômio de coeficientes reais e grau n_r. A ortogonalidade dos polinômios depende da função peso $e^{-x}x^{\alpha}$, de tal forma que

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x}x^{\alpha}L_{n_r}^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(n_r + \alpha + 1)}{\Gamma(n_r + 1)}\delta_{n_r m}. \tag{D.4}$$

Ademais, a integral de normalização correspondente é

$$\int_0^\infty dx\, e^{-x}x^{\alpha+1}\left(L_{n_r}^{(\alpha)}(x)\right)^2 = \frac{\Gamma(n_r + \alpha + 1)}{\Gamma(n_r + 1)}(2n_r + \alpha + 1). \tag{D.5}$$

A derivada dos polinômios é dada por, para $m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{d^m}{dx^m}L_{n_r}^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} (-1)^m L_{n_r-m}^{(\alpha+m)}(x) \quad , \quad m \leq n_r \\ \\ 0 \quad , \quad m > n_r \end{cases} \tag{D.6}$$

O comportamento dos polinômios na origem é dado por

$$L_{n_r}^{(\alpha)}(0) = \frac{\Gamma(n_r + \alpha + 1)}{\Gamma(n_r + 1)\Gamma(\alpha + 1)}. \tag{D.7}$$

Uma propriedade importante dos polinômios é que

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1 \tag{D.8}$$

para todo o domínio.

Duas relações de recorrência úteis são

$$L_{n_r}^{(\alpha-1)}(x) = L_{n_r}^{(\alpha)}(x) - L_{n_r-1}^{(\alpha)}(x), \tag{D.9}$$

$$L_{n_r-1}^{(\alpha+1)}(x) = \frac{1}{x}\left[(n_r + \alpha)L_{n_r-1}^{(\alpha)}(x) - n_r L_{n_r}^{(\alpha)}(x)\right]. \tag{D.10}$$

APÊNDICE E – SOLUÇÕES ANALÍTICAS DE EQUAÇÕES RADIAIS DA TEORIA NÃO-RELATIVÍSTICA

Conforme a referência (**??**), apresentaremos aqui de forma sumarizada dois resultados para sistemas não-relativísticos que serão pertinentes à discussão do presente trabalho. Em ambos os casos, a solução é tal que as autofunções são do tipo quadrado integrável, de forma que considera-se como condição de normalizabilidade

$$\int_0^\infty dr\,|U|^2 < \infty. \tag{E.1}$$

Isto conduz a restrição de que, na pior das hipóteses, as autofunções sejam singulares na origem com a forma

$$\lim_{r\to 0} U \propto r^{-1/2+\varepsilon}, \tag{E.2}$$

em que ε é uma grandeza positiva, e que no limite tendendo a infinito a função se anule

$$\lim_{r\to\infty} U = 0. \tag{E.3}$$

E.1 POTENCIAL HARMÔNICO EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Em concordância com a referência supracitada, a equação radial em coordenadas esféricas para uma partícula submetida a um potencial harmônico é

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \left[-\left(\frac{M\omega}{\hbar}\right)^2 r^2 - \frac{S^2-1/4}{r^2} + \frac{2ME}{\hbar^2}\right] U = 0. \tag{E.4}$$

As autofunções e suas respectivas autoenergias são

$$U_{n_rS} = C_{n_rS} r^{\frac{1}{2}+S} exp\left(-\frac{M\omega}{2\hbar}r^2\right) L_{n_r}^{(S)}\left(\frac{M\omega}{\hbar}r^2\right), \tag{E.5}$$

$$E_{n_rS} = \hbar\omega\left(2n_r + 1 + S\right), \tag{E.6}$$

em que $n_r = 0, 1, 2, 3, ...$ e C_{n_rS} é uma constante arbitrária que depende de n_r e S. Pressupõe-se que $M > 0, \omega > 0$ e $S \geq 0$.

E.2 POTENCIAL DE COULOMB EM COORDENADAS ESFÉRICAS

No mesmo espírito, a equação radial em coordenadas esféricas para uma partícula submetida a um potencial de Coulomb é

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \left(-\frac{S^2 - 1/4}{r^2} - \frac{2MZ}{\hbar^2 r} + \frac{2ME}{\hbar^2} \right) U = 0. \tag{E.7}$$

As autofunções e suas respectivas autoenergias são

$$U_{n_r S} = C_{n_r S} r^{1/2+S} e^{-\gamma r} L_{n_r}^{(2S)} \left(2\gamma r\right), \tag{E.8}$$

$$E_{n_r S} = -\frac{M \left|Z\right|^2}{2\hbar^2 \left(n_r + 1/2 + S\right)^2}, \quad , \quad n_r = 0, 1, 2, 3, ... \tag{E.9}$$

em que

$$\gamma = \frac{\sqrt{2M \left|E_{n_r S}\right|}}{\hbar} \tag{E.10}$$

e $C_{n_r S}$ é uma constante arbitrária que depende de n_r e S. Pressupõe-se que $M > 0$, $Z < 0$ e $S \geq 0$

APÊNDICE F – A REGRA DOS SINAIS DE DESCARTES

Dada uma equação polinomial com coeficientes reais da forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0 = 0, \tag{F.1}$$

a regra dos sinais de Descartes afirma que considerando os termos não-nulos em ordem de grau do expoente, o número de raízes positivas do polinômio é igual ou inferior por um número par ao número de troca de sinais entre os coeficientes consecutivos (**??**).

Descorre dessa regra que o número de raízes negativas é dada pela mesma análise ser efetuada para $f(-x)$.

APÊNDICE G – A EQUAÇÃO DE KUMMER

A equação de Kummer é a equação diferencial (**??**)

$$z\frac{d^2G}{dz^2} + (b - z)\frac{dG}{dz} - aG = 0, \tag{G.1}$$

cujos parâmetros a e b determinarão a forma explícita da solução geral, que é

$$G(z) = AM(a, b, z) + BU(a, b, z). \tag{G.2}$$

As funções $M(a, b, z)$ e $U(a, b, z)$ são as chamadas funções hipergeométricas confluentes, de primeiro e segundo tipo, respectivamente, e A e B são constantes arbitrárias. Estudando M e U na região da origem, temos

$$z \simeq 0 \Rightarrow \begin{cases} M(a, b, z) \simeq 1 \\ \\ U(a, b, z) \simeq \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b}, \quad b > 1. \end{cases} \tag{G.3}$$

Para que G seja finita em $z = 0$, devemos impor que $B = 0$.

Descreveremos agora três propriedades de interesse para o presente trabalho. Para grandes valores de $|z|$, a seguinte aproximação é válida:

$$M(a, b, z) \simeq \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b - a)} e^{i\pi a} z^{-a} + \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} z^{a-b} e^{z}. \tag{G.4}$$

Em problemas cujo comportamento do segundo termo de (G.4) é inadequado, podemos impor a condição extra

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = 0, \tag{G.5}$$

que é satisfeita quando $a = 0, -1, -2, ...$

Duas identidades úteis são

$$aM(a + 1, b, z) = aM(a, b, z) + z\frac{dM(a, b, z)}{dz}, \tag{G.6}$$

e

$$M(-n, \alpha + 1, z) = \frac{n!\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^{(\alpha)}(z). \tag{G.7}$$