Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Tópicos de Equações Diferenciais com Retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do Prof. Nelson Onuchic

Loreane Aldrigui de Lima Estevam

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

2012

517.38 Estevam, Loreane Aldrigui de Lima
E79t Tópicos de Equações Diferenciais com Retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do Prof. Nelson Onuchic/ Loreane Aldrigui de Lima Estevam- Rio Claro: [s.n.], 2012.
65 f., il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. equações diferenciais com retardamento. 2. solução. 3. estabilidade. 4. funcional de Lyapunoff. 5. Prof. Nelson Onuchic. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Loreane Aldrigui de Lima Estevam

Tópicos de Equações Diferenciais com Retardamento: uma abordagem segundo o trabalho do Prof. Nelson Onuchic

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Prof. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
Departamento de Matemática - IGCE - Unesp - Rio Claro - SP

Prof. Dr. Miguel Vinícius Santini Frasson
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística - ICMC - USP - São Carlos - SP

Rio Claro, 17 de Agosto de 2012

Aos meus queridos pais José Roberto e Liliane,
com muito amor e carinho.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por estar sempre presente, auxiliando e amparando todos os momentos da minha vida.

Ao meu marido, Luís Felipe, meu amor. Por todo carinho, paciência, dedicação, respeito, companheirismo, e por estar sempre ao meu lado me fazendo cada dia mais feliz.

Aos meus pais amados, Beto e Liliane, meus maiores exemplos. Obrigada pela educação e princípios passados desde o meu nascimento e por serem sempre tão presentes. Agradeço por me amarem e dedicarem o melhor de vocês para me dar sempre o melhor.

Ao meu querido irmão Terence pelo companheirismo de sempre, por dividir comigo momentos e pessoas tão especiais, pelo apoio e por se alegrar e participar de todas as minhas conquistas.

Aos meus avós queridos, Vô Gisto, Vó Quinha e Vó Nega, que foram participativos e presentes em toda a minha vida. Obrigada pelo apoio e pelas orações.

À minha nova família, Célia, Pedro, Ana Virginia, João Guilherme e as minhas sobrinhas Valentine e Bárbara que alegram tanto os meus dias. A todos os meus tios e primos que de uma forma ou de outra, sempre contribuíram.

À minha orientadora Marta, pela compreensão, pelo auxílio, pela convivência, pelo aprendizado e principalmente, pela amizade que criamos durante esse trabalho.

Às professoras Suzi e Renata pelas críticas, sugestões e contribuições enriquecedoras ao trabalho.

Ao Prof. Miguel pelas ótimas sugestões sobre o uso do latex e pelas contribuições que enriqueceram esse trabalho.

Aos colegas Ana Claudia Chinchio, Carolina Mesquita e Thiago Mota pelo aprendizado e pelos seminários realizados.

A todos os meus amigos de mestrado, graduação, de república e de coração pelos momentos vividos de alegria e aprendizado.

Agradeço a UNESP por proporcionar momentos tão felizes e valiosos. Aos professores do departamento que com muita sabedoria garantem a qualidade do nosso curso e nos dão segurança para a continuidade da vida acadêmica e profissional. E todos os funcionários do departamento que sempre nos auxiliam com boa vontade.

Agradeço a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

Resumo

Apresentamos um breve relato sobre a vida do Professor Nelson Onuchic e sua trajetória acadêmica. Além disso, apresentamos um estudo sobre existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial de equações diferenciais com retardamento e estabelecemos resultados sobre estabilidade de pontos de equilíbrio, baseados no trabalho "Equações Diferenciais com Retardamento" de Nelson Onuchic.

Palavras-chave: equações diferenciais com retardamento, solução, estabilidade, funcional de Lyapunoff, Prof. Nelson Onuchic.

Abstract

In this work we presented a brief account of the life of Professor Nelson Onuchic and his academic career. Furthermore, we presented a study about existence and uniqueness of solution for differential equations with delay problems and stablished results on stability of the equilibrium points based on the work “Equações Diferenciais com Retardamento”, written by Nelson Onuchic.

Keywords: delay diferential equation, solution, stability, Lyapunoff functional, Prof. Nelson Onuchic.

Sumário

1 Introdução **13**

2 Aspectos Históricos sobre a Vida do Prof. Nelson **15**

2.1 Biografia 15

2.2 Trajetória Acadêmica 16

3 Preliminares **23**

3.1 Espaços Métricos 23

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias 27

4 Resultados Básicos de EDR **33**

4.1 Definição 33

4.2 Existência e Unicidade de Soluções 35

4.3 Extensão de Soluções 40

4.4 Desigualdade Fundamental 42

5 Estabilidade e o Segundo Método de Lyapunoff **47**

5.1 Definições de Estabilidade 47

5.2 Segundo Método de Lyapunoff 52

6 Conclusão **63**

Referências **65**

1 Introdução

Pretendemos com esse trabalho, apresentar um texto introdutório de fácil interpretação e entendimento baseado no livro "Equações Diferenciais com Retardamento" do Professor Nelson Onuchic, [8]. Há várias referências que tratam da teoria das equações diferenciais com retardamento, porém esse texto aborda especificamente esse trabalho, sem comparações ou, contrastes com outras referências.

As Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento constituem uma classe das Equações Diferenciais Funcionais (EDF) que consideram problemas não governados por um princípio de causalidade, mas que apresentam um lapso de tempo entre causa e efeito. Alguns problemas em Ecologia, Medicina, Economia, Física, entre outras áreas são modelados pelas equações diferenciais funcionais com retardamento. O Prof. Nelson Onuchic colaborou de forma relevante no desenvolvimento deste tema, especialmente formando pesquisadores que deram continuidade ao seu trabalho.

Os objetivos centrais deste texto são: destacar a importância acadêmica do Prof. Nelson Onuchic e sua colaboração no desenvolvimento da Matemática, especificamente com respeito às equações diferenciais funcionais; e promover um estudo minucioso sobre uma parte do seu trabalho "Equações Diferenciais com Retardamento".

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos aspectos relevantes sobre a vida acadêmica do professor Nelson Onuchic; no capítulo 3 introduzimos os resultados sobre espaços métricos e equações diferenciais ordinárias para bom entendimento do texto; a definição de equações diferenciais com retardamento, solução e resultados de existência constituem o capítulo 4; e finalmente, no capítulo 5 apresentamos o Segundo Método de Lyapunoff e exemplos.

2 Aspectos Históricos sobre a Vida do Prof. Nelson

Esse capítulo traz um breve relato histórico sobre a vida pessoal e profissional do professor Nelson Onuchic. Todas as informações contidas nas seções 2.1 e 2.2 foram baseadas no trabalho de Badin [1].

2.1 Biografia

Nelson Onuchic nasceu no dia 11 de março de 1926, na cidade de Brodósqui-SP, Brasil. Porém, seu registro foi efetuado no dia 12 de março do mesmo ano, ficando como data oficial do seu nascimento. Filho de Francisco Onusic e Maria Doles, e irmão de Olívia, José e Olga. A diferença entre o sobrenome do pai "Onusic" e o "Onuchic" de seu registro ocorreu devido à pronúncia de seu pai, imigrante austríaco.

Nelson Onuchic fez o curso primário em Brodósqui e cursou a 1ª série ginasial no Ginásio Nossa Senhora Auxiliadora, em Jardinópolis, em 1940. Entre 1941 e 1943 cursou da 2ª a 4ª séries no Seminário Diocesano de Campinas. Em 1944 foi aprovado no Exame de Madureza, do ginásio estadual de Ribeirão Preto. Mudando-se com a família para São Paulo, Nelson fez o curso científico noturno no Colégio Anglo Latino, de 1945 a 1947 e, durante o dia, trabalhava em um banco, trabalho esse que conseguiu graças à indicação de José Portinari (irmão do famoso pintor Cândido Portinari). Em 1948 prestou vestibular para Matemática na Universidade de São Paulo (USP), mas não conseguiu ser aprovado. No mesmo ano foi aprovado em Física no Mackenzie.

Quando cursava o 4º ano do curso de Física, em 1951, foi contratado como professor de Matemática no Colégio Estadual Presidente Roosevelt. Casou-se com Lourdes de la Rosa e tiveram quatro filhos.

Nelson e Lourdes moraram em São José dos Campos de 1955 a 1958. De 1959 a 1966 residiram em Rio Claro, e de 1967 a 1999 estabeleceram residência em São Carlos, onde o casal foi membro do Movimento das Equipes de Nossa Senhora de São Carlos, um movimento católico de espiritualidade conjugal e familiar, por 32 anos.

Em 1971 Nelson Onuchic começou a apresentar os primeiros sinais da doença de Mal de Parkinson e faleceu no dia 3 de setembro de 1999, deixando Lourdes de la Rosa

Onuchic, os quatro filhos e treze netos.

2.2 Trajetória Acadêmica

O trabalho de pesquisa desenvolvido por Nelson Onuchic na área de Matemática foi muito significativo. Foram quarenta e nove trabalhos publicados, sendo vinte no Brasil, vinte e um nos Estados Unidos, três em Portugal, dois no México, um na Itália, um na Holanda e um no Japão. Desenvolveu pesquisas importantes e pioneiras.

Licenciado em Física pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Instituto Mackenzie em São Paulo (1951), foi convidado por seu professor Francisco Lacaz Neto a iniciar carreira de professor universitário junto ao departamento de Matemática do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), exercendo a função de Auxiliar de Ensino de 1951 a 1955. Posteriormente, foi contratado como Professor Assistente (1956-1958). Durante todo esse período morou em São José dos Campos, onde aprofundou seus estudos sob a orientação do professor Francis Dominic Murnaghan, participou de cursos sobre "Teoria de Representação de Grupos", "Equações Diferenciais Ordinárias", "Equações Diferenciais a Derivadas Parciais e Problemas de Valor de Contorno", "Equações Integrais", "Funções de Variáveis Complexas", "Transformadas de Laplace"e "Integral de Lebesgue". Participou também de seminários sobre Análise Funcional, Integral de Lebesgue, Topologia Geral e Tópicos de Análise, entre 1952 a 1954.

Entre 1955 e 1956 foi bolsista do CNPq, viajava semanalmente a São Paulo para estudar Análise Funcional, Topologia Geral e Estruturas Uniformes, sob a orientação do professor Chaim Samuel Hönig. Nesse período produziu sua tese de doutorado intitulada *Estruturas Uniformes sobre P-Espaços e Aplicações da Teoria destes Espaços em Topologia Geral* [6].

Nelson Onuchic teve participação de destaque no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado em Poços de Caldas em 1957. Escreveu o capítulo sobre "Espaços de Banach e de Hilbert" da publicação Análise Funcional, 1º Colóquio Brasileiro de Matemática. A publicação tinha caráter didático e serviu de texto para o curso ministrado por ele no referido colóquio.

Em 1957, Onuchic teve seu primeiro trabalho publicado no exterior, *On two properties of P-spaces* (Portugaliae Mathematica). Em 1958, foi convidado pelo professor João Dias da Silveira para criar o Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Rio Claro (hoje Unesp - Rio Claro). Aceitou o convite e transferiu-se para Rio Claro, em 1959, onde foi regente da cadeira de Análise Matemática até 1966, acompanhado de sua mulher que trabalhava como professora no Instituto de Educação de São José dos Campos, desde 1955. O trabalho e o empenho do Professor Nelson foram importantes para a implementação e o sucesso do curso de Matemática de Rio Claro. Nelson Onuchic continuou participando de reuniões científicas, ministrando cursos e publicando trabalhos.

De novembro de 1959 a fevereiro de 1960 foi professor visitante do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de Montevidéo, Uruguai, onde ministrou um curso sobre o Método Topológico de Wazewski e teve contatos proveitosos com os matemáticos Juan Jorge Schäffer e José Luís Massera. O contato com Massera foi um marco importante na sua carreira. Nelson tinha interesse em estudar Equações Diferenciais e, seu conhecimento de Topologia foi usado para resolver alguns problemas propostos por Massera.

Publicou *On the Nachbin uniform structure* (Proceedings of the American Mathematical Society) [7], em abril de 1960. Em julho de 1961 ministrou o curso de "Equações Diferenciais Ordinárias: Estabilidade em Sistemas Lineares, Equivalência Assintótica e Método Topológico de T. Wazewski", no 3º Colóquio Brasileiro de Matemática, em Fortaleza.

Outro marco importante para mudança de foco de pesquisa do Professor Nelson da área de Topologia para a área de Equações Diferenciais foi sua ida para os Estados Unidos. De outubro de 1961 a outubro de 1962 foi bolsista da "John Simon Guggenhein Memorial Foundation", no "Research Institute for Advanced Studies" (RIAS), Baltimore, USA, onde aprofundou estudos sobre equações diferenciais. Nessa época, a "guerra fria" entre os Estados Unidos e a União Soviética exarcebava a disputa entre os dois grandes blocos ideológicos. O lançamento do Sputinik pelos russos preocupou os americanos, inconformados com a hipótese de os russos saberem mais que eles. Descobriram que os russos conheciam muito mais do que eles em algumas áreas da Matemática, como por exemplo a das equações diferenciais. Então, os Estados Unidos se propuseram a montar um grupo de pesquisadores americanos e estrangeiros para juntos trabalharem sobre Equações Diferenciais. Esse grupo era composto por 40 matemáticos, dentre eles, Nelson Onuchic. Nesse período sua produção foi muito intensa.

Depois de retornar dos Estados Unidos, os estudos de Nelson enfocavam cada vez mais a área de equações diferenciais. O ano de 1963 foi repleto de publicações relevantes. Em parceria com Philip Hartman, Nelson Onuchic escreveu o artigo *On the Asymptotic Integration of Ordinary Differential Equations* (Pacific Journal of Mathematics, vol 13, 1963). O principal resultado apresentado nesse trabalho ficou conhecido como Teorema de Hartman-Onuchic, uma de suas grandes contribuições à Matemática. Também, no mesmo ano, proferiu a conferência "Integração Assintótica de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias", registrada na Separata das Atas do 4º Colóquio Brasileiro de Matemática.

Em 1964, junto com Jack K. Hale, escreveu *On the Assymptotic Integration of Ordinary Differential* (Contributions to Differential Equations, Interscience, 1964). Produziu também o artigo *Nonlinear Pertubation of a Linear System of Ordinary Differential Equations*, publicado no Michigan Mathematical Journal. E, com Ayrton Badelucci publicou *Nonlinear pertubation of a linear system of ordinary differential equations of order m* (Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol.37, nº2).

Paralelamente à grande atividade de pesquisas, Nelson Onuchic continuou ministrando cursos e abrindo uma linha de pesquisa em equações diferenciais no Brasil. Ministrou no Instituto de Pesquisas Matemáticas da Universidade de São Paulo os seguintes cursos de pós-graduação: Equações Diferenciais Ordinárias, Análise Funcional e Aplicações na Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Diferenciais Ordinárias e Funcionais. Esses cursos e os trabalhos apresentados nos Colóquios de 1961 e 1963 foram fundamentais para se iniciarem, no Brasil, os estudos de Equações Diferenciais com Retardamento. Essa foi uma das grandes contribuições de Nelson Onuchic para o desenvolvimento da Matemática no Brasil.

Com a colaboração dos professores Odelar Leite Linhares e Lourdes de la Rosa Onuchic, em 1965 escreveu o trabalho intitulado *Equações Diferenciais Funcionais* (Instituto de Pesquisas Matemáticas da USP e F.F.C.L. de Rio Claro). Nesse mesmo ano foi professor visitante no Instituto de Física e de Matemática da Livre-Docência junto a Cadeira de cálculo infinitesimal da F.F.C.L. da USP com a tese *Comportamento Assintótico das Soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias*; participou do 5º Colóquio Brasileiro de Matemática; e, voltou aos Estados Unidos para participar do International Symposium on Differential Equations and Dynamical System, como *invited speaker*.

Em 1966 foi professor visitante no instituto de matemática e física da Universidade de Pernambuco, onde ministrou o curso "Teoria da Estabilidade das Equações Diferenciais". No final desse ano, Onuchic pediu desligamento da F.F.C.L. de Rio Claro, transferindo-se para o departamento de matemática da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP).

No início de 1967, Nelson Onuchic mudou-se com a família para São Carlos e a professora Lourdes foi contratada para dar aulas no EESC-USP. A chegada do Prof. Nelson em São Carlos foi decisiva para consolidar um forte departamento de matemática na EESC e, principalmente, para a criação de um curso de matemática em São Carlos. Durante esse mesmo ano, Onuchic publicou *On the Asymptotic Behavior of the Functional Differential Equation*, e participou do 6º Colóquio Brasileiro de Matemática.

No ano seguinte o professor Nelson retornou aos Estados Unidos para participar da reunião anual da "American Mathematical Society" realizada em San Francisco, USA; também foi professor visitante da "Georgetown University" em Washington, USA; escreveu *On the uniform stability of a perturbed linear functional differential equations*; e, apresentou como tese para o concurso de Professor Titular da Escola de Engenharia de São Carlos - USP o trabalho *Estabilidade de Sistemas Perturbados e Comportamento no Infinito de Sistemas de Equações Diferenciais com Retardamento no Tempo.*

Em 1969, Nelson Onuchic escreveu o artigo *Stability Properties of a Second Order Differential Equation.* Em 1970 publicou *On a Criterion of Instability for Differential Equations with Time Delay - Periodic Orbits Stability and Resonances* que tinha como objetivo generalizar um critério de instabilidade de J. Hale para sistemas autônomos de equações com retardamento, usando propriedades de invariança e fazer uma aplicação do mesmo.

No ano de 1971 publicou *Invariance properties in the theory of ordinary differential equations with applications to stability problems*; começou a apresentar os primeiros sintomas do Mal de Parkinson; e com a colaboração de Hildebrando Munhoz Rodrigues, Lourdes de la Rosa Onuchic e Plácido Zoega Táboas escreveu *Equações Diferenciais com Retardamento*, pela Escola de Engenharia de São Carlos.

Em 1975, publicou *Invariance properties in the theory of stability for ordinary differential systems and applications* em parceria com Lourdes Onuchic e Plácido Táboas. Escreveu, juntamente com Lourdes, Systems with repulsive forces e, em parceria com Plácido Táboas os artigos *Qualitative properties of nonlinear ordinary differential equations e On the conditional asymptotic stability for a nonlinear ordinary differential equations.*

Fez as últimas publicações individuais nos Estados Unidos, em 1978, *Invariance and stability for ordinary differential equations* e *Invariance properties for ordinary differential equations: stability and instability.* O último texto didático publicado foi *Teoria da Estabilidade: Invariança, Funções de Lyapunov.*

Sua última publicação foi em 1984, em parceria com Hermínio Cassago Junior, em que escreveu *Asymptotic behavior at infinity between the solutions of ordinary differ-*

ential equations.

Nelson foi colaborador de várias publicações, com destaque em revistas estrangeiras; participou de diversas entidades científicas; ocupou diversos cargos importantes na USP de São Carlos; e, teve participação de destaque em diversas bancas.

Nelson Onuchic orientou catorze trabalhos de Mestrado:

Antonio Fernandes Izé (ITA), *Método Topológico de Wazewski e suas Aplicações ao Estudo do Comportamento Assintótico de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*, 1965.

Natalino Adelmo de Molfetta (ITA), *Fórmula Integral de Alekseev e Aplicações em Problemas de Estabilidade*, 1968.

Hildebrando Munhoz Rodrigues (EESC-USP), *Invariança para Sistemas não Autônomos de Equações Diferenciais com Retardamento e Aplicações*, 11.11.1970.

Plácido Zoéga Táboas (EESC-USP), *Sobre o Comportamento Assintótico para uma Classe de Equações Diferenciais com Retardamento no Tempo*, 10.12.1970.

Lourdes de la Rosa Onuchic (EESC-USP), *Algumas Aplicações de um Critério de Comparação de Hale para Sistemas de Equações Diferenciais com Retardamento*, 13.04.1971.

José Geraldo dos Reis (FMRP-USP), *Relações entre Diferentes Definições de Estabilidade no Sentido de Lyapunoff*, 29.03.1972.

Cerino Ewerton de Avellar (UFSCar), *Propriedades de Estabilidade das Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais de Segunda Ordem*, 19.03.1973.

José Gaspar Ruas Filho (FFCL-Araraquara), *Propriedades Assintóticas de Equações Diferenciais de Segunda Ordem Perturbado de Equações Autônomas*, 04.10.1973.

Luiz Carlos Pavlu (UFSCar), *Comportamento Assintótico de Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*, 13.12.1974.

Pedro Walter de Pretto (Fundação Educacional de Bauru), *Estabilidade e Comportamento Assintótico das Soluções de Sistemas de Equações Diferenciais*, 27.12.1975.

Adalberto Spezamiglio (ICMSC-USP), *Certas Propriedades Topológicas de uma Classe de Sistemas Lineares Periódicos Bidimensionais e Equações Diferenciais Ordinárias*, 26.04.1976.

Arnaldo Simal do Nascimento (ICMSC-USP), *O Método topológico de Wazewski e algumas aplicações ao estudo do comportamento assintótico de sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias com perturbações não necessariamente lineares*, 25.11.1977.

Maurício Silveira (UFSCar), *Estabilidade Eventual e uma Aplicação*, 21.11.1977.

Sandra Maria Semensato de Godoy (ICMSC-USP), *Aplicações em Estabilidade do Teorema do Ponto Fixo de Schauder-Tychonoff*, 21.05.1980.

O Prof. Nelson também orientou nove teses de Doutorado:

Ayrton Badelucci (Escola Politécnica da USP), *Comportamento Assintótico de alguns Sistemas Lineares Perturbados de Equações Diferenciais Ordinárias*, 1966.

Odelar Leite Linhares (EESC-USP), *Sobre a Racionalização de Dois Algoritmos Numéricos*, 29.11.1968.

Antonio Fernandes Izé (EESC-USP), *Sobre o Comportamento nas vizinhanças do Infinito de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*, 1968.

Hildebrando Munhoz Rodrigues (ICMSC-USP), *Equivalência Assintótica Relativa, com Peso t^μ, entre Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*, 11.10.1973.

Plácido Zoéga Táboas (ICMSC-USP), *Admissibilidade e Aplicações em Equações Diferenciais Ordinárias*, 1975.

Adalberto Spezamiglio (ICMSC-USP), *Aplicações da Teoria de Admissibilidade ao Estudo de Equivalência Assintótica relativa em Equações Diferenciais Ordinárias*, 11.10.1978.

Luiz Carlos Pavlu (UFSCar), *Funções de Liapunov e Propriedades de Invariança para Sistemas Não Autônomos: Estabilidade e Instabilidade*, 13.09.1978.

Lourdes de la Rosa Onuchic (ICMSC-USP), *Estimativa e Invariança de Conjuntos $\omega-$ limite das soluções de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias:*

Estabilidade e Comportamento no Infinito, 15.12.1978.

Hermínio Cassago Júnior (ICMSC-USP), *Comportamento Assintótico no Infinito entre as Soluções de Dois Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias*, 26.06.1981.

Onuchic aposentou-se como Professor Titular do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP em 11 de novembro de 1982 e, em 29 de abril de 1983 recebeu o título de Professor Emérito do Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - USP.

3 Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados necessários para a boa interpretação dos próximos capítulos. Todas as definições e resultados descritos nas seções 3.1 e 3.2 são baseados nas referências [5], [4], [3] e [2].

3.1 Espaços Métricos

Apresentamos definições, propriedades e resultados referentes aos espaços métricos.

Definição 3.1. *Dado um espaço vetorial M, dizemos que $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma* ***métrica*** *em M se satisfaz:*

i) $d(x, y) \geq 0,\ \forall\, x, y \in M$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
ii) $d(x, y) = d(y, x),\ \forall\, x, y \in M$.
iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),\ \forall\, x, y, z \in M$.

Definição 3.2. *Um espaço vetorial M munido de uma métrica d, é chamado de* ***espaço métrico*** *e denotado por (M,d).*

Exemplo 3.1. Defina, para todo $x = (x_1, ..., x_n)$ e $y = (y_1, ..., y_n)$ em $\mathbb{R}^n$ a função $d(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{|(x_i - y_i)|\}$, então $(\mathbb{R}^n, d)$ é um espaço métrico.

Definição 3.3. *Uma* ***sequência*** *em um Espaço Métrico (M,d) é uma função*

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow M$$

que associa a cada $n \in \mathbb{N}$, um elemento $x_n \in M$.
Notação: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n)

Definição 3.4. *Seja (x_n) uma sequência em M. Dizemos que (x_n)* ***converge*** *para $x \in M$ quando*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon\,.$$

Definição 3.5. *Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M é chamada de sequência de* ***Cauchy*** *quando*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,/\, m > n > n_0 \ \Rightarrow\ d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Observação 3.1. Toda sequência convergente é de Cauchy. Porém a recíproca não é sempre válida.

Definição 3.6. *Dizemos que um espaço métrico M é* ***completo*** *se toda sequência de Cauchy em M , converge em M.*

Observação 3.2. Todo espaço de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ é completo. A prova desse reultado pode ser encontrada em [4].

Exemplo 3.2. O espaço de todas as funções contínuas $f : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$, denotado por $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$, onde $h > 0$, é completo com a norma do supremo. A norma do supremo é dada por $\|f\| = \sup\limits_{-r \leq \theta \leq 0} |f(\theta)|$.

Definição 3.7. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ chama-se ponto de acumulação do conjunto X quando toda bola aberta de centro a contém algum ponto de X, diferente do ponto a, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, deve existir $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \varepsilon$.*

Para verificarmos se um subespaço de um espaço métrico completo é completo podemos utilizar os próximos resultados.

Lema 3.1. *Sejam X um subconjunto não vazio de um espaço métrico (M, d) e $\overline{X}$ o fecho de X. Então $x \in \overline{X}$ se, e somente se, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tal que $x_n \to x$.*

Demonstração. Suponha $x \in \overline{X}$ então $x \in X$ ou $x \in \overline{X} - X$.

No caso $x \in X$, considere a sequência $(x_n) = (x, x, ...)$ constante, logo $x_n \to x$, quando $n \to \infty$.

Se $x \in \overline{X} - X$, x é ponto de acumulação de X, logo para cada $n = 1, 2, ...$ a bola aberta de centro em x e raio $1/n$, denotada por $B(x, 1/n)$ contém pelo menos um elemento $x_n \in X - \{x\}$, assim $x_n \to x$, quando $n \to \infty$, já que $1/n \to 0$.

Reciprocamente, se existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \to x$, mostremos que $x \in \overline{X}$.

Se $x \in X \subset \overline{X}$ então $x \in \overline{X}$.

Se acaso $x \notin X$ então toda vizinhança de x contém pontos $x_n \neq x$, logo x é ponto de acumulação de X, ou seja, $x \in \overline{X}$. □

Teorema 3.1. *Um subespaço X de um espaço métrico completo M é completo se, e somente se, X é fechado.*

Demonstração. Para provar que X é fechado basta mostrar que $X = \overline{X}$. Considere então $x \in \overline{X}$, logo pelo lema anterior existe uma sequência (x_n) em X tal que $x_n \to x$ e, como X é completo segue que $x \in X$. Portanto X é fechado.

Reciprocamente, suponha que X é um subespaço fechado de um espaço métrico completo, mostremos que toda sequência de Cauchy em X é convergente em X.

Seja então (x_n) uma sequência de Cauchy em X, logo (x_n) é uma sequência de Cauchy em M. Como M é completo, existe $x \in M$ tal que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$.

Pelo lema anterior $x \in \overline{X}$, como X é fechado $X = \overline{X}$ e, portanto $x \in X$. Logo X é completo. $\square$

Definição 3.8. *Um espaço normado $(E, \|.\|)$ completo com respeito à métrica induzida pela norma, isto é $d(x,y) = \|x-y\|$, $\forall\, x\,, y\, \in E$, é chamado* ***Espaço de Banach.***

Definição 3.9. *Seja (X,d) um espaço métrico. Dizemos que $f : X \longrightarrow X$ é uma* ***contração*** *se existir $\beta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \beta < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \beta d(x,y)$, $\quad \forall\, x,\, y \in X$.*

Teorema 3.2. ***(Teorema do Ponto Fixo de Banach)*** *Seja X um Espaço Métrico Completo com a métrica d. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma contração. Então, existe um único ponto fixo $x^* \in X$ de f, isto é, $f(x^*) = x^*$.*

Demonstração. i) Unicidade. Suponha que existam dois pontos fixos $x,\, y \in X$ de f, ou seja, $f(x) = x$ e $f(y) = y$.

Assim $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \beta \cdot d(x,y)$. Logo $d(x,y) \leq \beta \cdot d(x,y) < d(x,y)$, segue que $d(x,y) - d(x,y) < 0$, o que é uma contradição. Logo $d(x,y) = 0$ o que implica $x = y$.

ii) Existência. Escolha um ponto qualquer $x_0 \in X$ e construa a seguinte sequência.

$x_1 = f(x_0); x_2 = f(x_1); x_3 = f(x_2); ...; x_n = f(x_{n-1}); ....$ Ou seja, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 1$.

Mostremos que tal sequência é de Cauchy. Para tal, usando a desigualdade triangular temos

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + ... + d(x_{n+1}, x_n) = \sum_{j=1}^{k} d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \quad (3.1)$$

Usando a hipótese que f é contração, segue que

$$d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) = d(f(x_{n+j-1}), f(x_{n+j-2})) \leq \beta \cdot d(x_{n+j-1}, x_{n+j-2}) = \beta \cdot d(f(x_{n+j-2}), f(x_{n+j-3})) \leq \beta^2 \cdot d(x_{n+j-2}, x_{n+j-3}) \leq ... \leq \beta^{n+j-1} \cdot d(x_1, x_0).$$

Usando (3.1) temos

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \sum_{j=1}^{k-1} d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \beta^{n+j-1} \cdot d(x_1, x_0).$$

O que implica

$$d(x_{n+k}, x_n) \leq \beta^n \cdot d(x_1, x_0) \sum_{j=1}^{k-1} \beta^{j-1}.$$

Como $0 \leq \beta < 1$ temos $0 \leq d(x_{n+k}, x_n) \leq \dfrac{\beta^n}{1-\beta} d(x_1, x_0)$ o que implica

$$d(x_{n+k}, x_n) \longrightarrow 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ tal que $n > N$, $k \in \mathbb{N}$ implica $d(x_{n+k}, x_n) < \varepsilon$.

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy e X é completo, existe $x^* \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x^*$ quando $n \to \infty$. Mostremos que x^* é o ponto fixo de $f(x)$. De fato, $x_{n+1} = f(x_n)$, como f é contração, logo é contínua, temos
$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$. Assim, $f(x^*) = x^*$.

□

Para enunciarmos o Teorema do Ponto Fixo de Schauder precisamos da definição de conjunto compacto num Espaço de Banach. Neste caso, consideramos um conjunto compacto K como aquele que satisfaz a propriedade que toda sequência em K admite subsequência convergente em K.

Vamos enunciar um outro resultado de ponto fixo muito importante, omitiremos a prova, mas ela pode ser encontrada na referência [3].

Teorema 3.3. *(**Teorema do Ponto Fixo de Schauder**) Sejam A um conjunto convexo e compacto no Espaço de Banach $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ e $f : A \to A$ uma função contínua, então f tem um ponto fixo em A.*

Definição 3.10. *Sejam A e B espaços de Banach. Uma aplicação $f : A \to B$ é dita **completamente contínua** quando para todo conjunto limitado $K \subset A$ tem-se $\{f(x); x \in K\}$ compacto em B.*

Temos a seguinte consequência do Teorema de Schauder.

Corolário 3.1. *Se A é um conjunto fechado, limitado e convexo do Espaço de Banach $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ e $f : A \to A$ é completamente contínua, então f tem um ponto fixo em A.*

Definição 3.11. *Sejam M e N espaços métricos. Um **homeomorfismo** de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua. Neste caso diz-se que M e N são homeomorfos.*

Definição 3.12. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K. Dizemos que a aplicação $\phi : V \to K$ é um **funcional linear** quando para todos $u, v \in V$ e $a, b \in K$, temos*

$$\phi(au + bv) = a\phi(u) + b\phi(v).$$

O conjunto de todos os funcionais $\phi : V \to K$ é chamado espaço dual de V.

Exemplo 3.3. Se V é um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e se $v_0 \in V$, então $\phi(v) = \langle v, v_0 \rangle$ é um funcional linear.

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção introduzimos o Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias e os conceitos de estabilidade.

Primeiramente consideremos algumas definições.

Definição 3.13. *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Um número real c chama-se um valor de aderência em f no ponto a quando existir uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$.*

Definição 3.14. *Seja f uma função a valores reais limitada numa vizinhança de um ponto a, chamaremos **limite superior de** f no ponto a ao maior valor de aderência de f no ponto a e o **limite inferior de** f no ponto a ao menor valor de aderência de f no ponto a. Escreveremos $\overline{\lim}_{x\to a} f(x) = L$ para exprimir que L é o limite superior de f no ponto a e $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = M$ para exprimir que M é o limite inferior de f no ponto a.*

Exemplo 3.4. Considere $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Note que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ não existe, basta tomar a sequência $x_n = \dfrac{1}{n\frac{\pi}{2}}$, pois $x_n \to 0$ mas $(f(x_n))$ é oscilante, logo diverge. E o conjunto dos valores de aderência de f no ponto 0 é o intervalo $[-1, 1]$, portanto $\overline{\lim}_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\underline{\lim}_{x\to 0} f(x) = -1$.

Definição 3.15. *Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de **classe** C^1 se as derivadas parciais de primeira ordem existem e são contínuas. Neste caso escrevemos $f \in C^1(\Omega)$.*

Definição 3.16. *Sejam $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e D um conjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ contínua. Uma **equação diferencial ordinária (EDO)** é uma relação da forma*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))\,, \textit{ ou simplesmente}\,,\ \dot{x} = f(t, x)\,. \tag{3.2}$$

*Dizemos que $x(t)$ é uma **solução** de (3.2) num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ se x é uma função diferenciável em I, $(t, x(t)) \in D$, $\forall\, t \in I$ e x satisfaz (3.2) no intervalo I.*

*Dado $(t_0, x_0) \in D$, resolver um **Problema de Valor Inicial** (PVI) para a equação (3.2) consiste em encontrar um intervalo I contendo t_0 e uma solução $x(t)$ denotada por $x(t) = x(t; t_0, x_0)$ de (3.2) satisfazendo $x(t_0) = x_0$. Escrevemos o problema de valor inicial na forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Dizemos que uma solução de (3.3) passa por (t_0, x_0).

O resultado abaixo com respeito à existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias pode ser encontrado em [3].

Teorema 3.4. *(Existência) Se f é contínua em D, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe pelo menos uma solução de (3.2) passando por (t_0, x_0).*

Para garantir a unicidade, precisamos da definição de função localmente lipschitziana.

Definição 3.17. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função, dizemos que f é localmente lipschitziana na segunda variável quando para todo $(t, x) \in D$, existe uma vizinhança $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\{t\} \times X \subset D$ e existe $\lambda \geq 0$ tal que $\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq \lambda \|y - z\|$ para todo y, $z \in X$.*

Teorema 3.5. *(Unicidade) Seja $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua que a cada $(t, x) \in D$ associa $f(t, x) \in \mathbb{R}^n$ e localmente lipschitziana com respeito à variável x, então para cada $(t_0, x_0) \in D$ existe uma única solução $x(t; t_0, x_0)$ de (3.2) passando por (t_0, x_0).*

Exemplo 3.5. Considere

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + x^2 \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

A função $f(t, x) = 1 + x^2$ satisfaz as hipóteses do teorema anterior e portanto existe uma única solução deste PVI, a saber $x(t) = \operatorname{tg} t$ com $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Para introduzirmos a definição abaixo com respeito à estabilidade vamos supor que

$$f(t, 0) = 0\,,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

Note que para qualquer solução $\tilde{x}(t)$ de $\dot{x} = f(t, x)$, pela mudança de variáveis $x = y + \tilde{x}(t)$, e fazendo $g(t, y) = f(t, y + \tilde{x}(t)) - f(t, \tilde{x}(t))$, obtemos que a equação diferencial ordinária associada $\dot{y} = g(t, y)$ tem $y = 0$ como solução, e esta corresponde à solução $x(t) = \tilde{x}(t)$.

Logo, sem perda de generalidade, pode-se fazer as definições de estabilidade apenas para a solução nula de uma EDO (3.2).

Definição 3.18. *Seja $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo $f(t, 0) = 0$ para todo $t \in [0, \infty)$. Então*

*i) a solução $x = 0$ de (3.2) é dita **estável** se $\forall\, \varepsilon > 0\,, \forall\, t_0 \geq 0\,, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ tal que $|x_0| < \delta \Rightarrow |x(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$, para $t \in [t_0, \infty)$.*

*ii) a solução $x = 0$ de (3.2) é dita **uniformemente estável** se for estável e se δ puder ser escolhido independentemente de t_0.*

*iii) a solução $x = 0$ de (3.2) é dita **assintoticamente estável** se for estável e existir $b = b(t_0) \in \mathbb{R}$ tal que $|x_0| < b \Rightarrow |x(t; t_0, x_0)| \to 0$ quando $t \to \infty$.*

*iv) a solução $x = 0$ de (3.2) é dita **uniformemente assintoticamente estável** se ela for uniformemente estável, se b na definição de assintoticamente estável puder ser escolhido independentemente de t_0 e se para todo $\eta > 0\,, \exists\, T(\eta) > 0$ tal que*

$$|x_0| < b \Rightarrow |x(t; t_0, x_0)| < \eta$$

se $t \geq t_0 + T(\eta)$.

v) a solução $x = 0$ *de* (3.2) *é dita* ***instável*** *se ela não for estável.*

Para estudar a estabilidade de um sistema não linear podemos utilizar uma técnica descoberta por Lyapunoff no fim do século XIX. Esta técnica é muito utilizada até nos dias atuais, também conhecida como método direto pois pode ser aplicada diretamente à equação diferencial sem a necessidade de conhecer as soluções e permite efetuar a análise de estabilidade de um sistema através de uma função escalar do estado designada de função de Lyapunoff. Essa função pode ser encarada como uma extensão matemática do conceito de energia do sistema. Um sistema, quer que seja mecânico, elétrico ou de outro tipo tem dissipação ou amplificação de energia. Sempre que a dissipação for maior que a amplificação, a energia do sistema diminuirá e as variáveis do sistema (amplitude de oscilação, velocidade, etc) terão tendência de convergir ao equilíbrio.

A amplificação de energia só existe em sistemas com componentes ativos em que existe uma transformação de energia contínua para um tipo de energia alternado ou oscilante.

Por exemplo o sistema constituído por uma massa sujeita a ação de uma mola não linear, com amortecimento proporcional ao quadrado da velocidade:

$$m\ddot{x} + b|\dot{x}|\dot{x} + k_1 x + k_2 x^3 = 0\,.$$

Note que $k_1 x + k_2 x^3$ é a força de restituição da mola, a energia potencial associada a esta força, quando a mola se encontra na posição x é dada por

$$V_p(x) = \int_0^x (k_1 t + k_2 t^3)dt = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{4}k_2 x^4$$

e a energia cinética do sistema é

$$V_c(x) = \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2$$

então a energia total do sistema será

$$V(x) = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{4}k_2 x^4 + \frac{1}{2}\, m\, \dot{x}^2\,.$$

Observando $V(x)$, conclui-se que
$V(x)$ é positiva quando $x \neq 0$ ou $\dot{x} \neq 0$.
$V(x)$ é nula quando $x = 0$ e $\dot{x} = 0$.

Calcula-se a evolução de $V(x)$ com o tempo e tem-se

$$\dot{V}(x) = k_1 x\dot{x} + k_2 x^3 \dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = (k_1 x + k_2 x^3 + m\ddot{x})\dot{x}\,.$$

Como $(k_1 x + k_2 x^3 + m\ddot{x}) = -b|\dot{x}|\dot{x}$ temos $\dot{V}(x) = -b|\dot{x}|\dot{x}^2 = -b|\dot{x}|^3 \Rightarrow \dot{V}(x) < 0$, isto é, a energia do sistema sempre vai diminuindo.

Definição 3.19. *Consideremos um sistema autônomo*

$$x' = f(x), \ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \tag{3.5}$$

de classe C^1, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto.*

Seja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável satisfazendo, para cada* $x \in \Omega$,

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \nabla V \cdot f(x),$$

ou seja, $\dot{V}(x) = \left.\dfrac{d}{dt}V(\varphi x(t))\right|_{t=0}$.

Seja x_0 *um ponto de equilíbrio de* (3.5). *Uma função de Lyapunoff para* x_0 *é uma função* $V : U \to \mathbb{R}$ *diferenciável definida em um aberto* $U \ni x_0$, *satisfazendo às seguintes condições:*

i) $V(x_0) = 0$ *e* $V(x) > 0, \ \forall\, x \neq x_0$;
ii) $\dot{V} \leq 0$ *em* Ω;
A função de Lyapunoff V diz-se estrita quando
iii) $\dot{V} < 0$ *em* $\Omega - \{x_0\}$.

Para as equações diferenciais ordinárias autônomas, do tipo $\dot{x} = f(x)$, tem-se o seguinte resultado sobre estabilidade.

Teorema 3.6. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto contendo* x_0. *Suponha que* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^1 *e que* $f(x_0) = 0$. *Suponha também que exista uma função* $V \in C^1(\Omega)$ *satisfazendo* $V(x_0) = 0$ *e* $V(x_0) > 0$ *se* $x \neq x_0$. *Então:*

a) se $\dot{V}(x) \leq 0 \forall\, x \in \Omega$ *a solução* $x = x_0$ *é estável;*

b) se $\dot{V}(x) < 0 \forall\, x \in \Omega - \{x_0\}$ *então* x_0 *é assintoticamente estável;*

c) se $\dot{V}(x) > 0 \forall\, x \in \Omega - \{x_0\}$ *então* x_0 *é instável.*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [9].

Aplicando esse resultado para o sistema massa-mola anterior, que pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\dfrac{b}{m}|v|v - \dfrac{k_1}{m}x - \dfrac{k_2}{m}x^3 \end{cases}$$

Observe que esse sistema é da forma $\dot{X} = f(X)$, onde $X = (x, v)$, $\dot{X} = (\dot{x}, \dot{v})$ e a

$$f(X) = \left(v, -\frac{b}{m}|v|v - \frac{k_1}{m}x - \frac{k_2}{m}x^3\right).$$

Neste caso
$$V(x,v) = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_2x^4 + \frac{1}{2}mv^2$$
é o Funcional de Lyapunoff que satisfaz
$$\dot{V} = (k_1x + k_2x^3, mv)\left(v, -\frac{b}{m}|v|v - \frac{k_1}{m}x - \frac{k_2}{m}x^3\right) = -b|v|v^2 \leq 0,$$
se $(x,v) \neq (0,0)$.

Portanto o equilíbrio $(0,0)$ é estável.

4 Resultados Básicos de EDR

Diferentemente das equações diferenciais ordinárias, veremos que a determinação das soluções das equações diferenciais com retardamento, depende não apenas do conhecimento da mesma num instante t_0, mas sim do conhecimento da solução em um certo intervalo anterior a t_0, ou seja, para determinar a solução de uma EDR é necessário conhecermos uma dada função inicial.

4.1 Definição

Sejam h, H com $0 \leq h < \infty$, $0 < H \leq \infty$, $C_H = \{\varphi \in C\,;\, \|\varphi\| < H\}$, onde $C = C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ é o Espaço de Banach das aplicações contínuas de $[-h,0]$ no $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(\theta)|,\ -h \leq \theta \leq 0\}$, $|\cdot|$ denotando uma norma do $\mathbb{R}^n$. No caso $H = \infty$ temos $C_H = C_\infty = C$.

Definição 4.1. *Sejam A, $0 < A \leq \infty$, e $x(t)$ contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$ com valores em $\mathbb{R}^n$. Seja t tal que $t_0 \leq t < t_0 + A$. Definimos x_t como o* ***elemento*** *de C dado por $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ para $-h \leq \theta \leq 0$.*

Para estabelecermos um resultado de existência e unicidade precisamos do seguinte lema.

Lema 4.1. *Seja $x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$. A aplicação $F : [t_0, t_0 + A] \to C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ com $F(t) = x_t$ é uma função contínua.*

Demonstração. Como a solução x é uma função contínua em $[t_0 - h, t_0 + A]$, que é compacto, segue que x é uniformemente contínua, isto é, $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0$ tal que para $t,\ s$ satisfazendo $|t - s| < \delta$ tem-se $|x(t) - x(s)| < \varepsilon$.

Para $t\,, s \in [t_0, t_0 + A]$ tal que $|t - s| < \delta$, (pensemos em s fixado), temos

$$|x(t+\theta) - x(s+\theta)| < \varepsilon\,,\ \forall\, \theta \in [-h,0]\,. \tag{4.1}$$

Como $t_0 \leq t \leq t_0 + A$ então $t_0 + \theta \leq t + \theta \leq t_0 + A + \theta$ com $\theta \in [-h,0]$, logo

$$t_0 - h \leq t_0 + \theta \leq t + \theta \leq t_0 + A + \theta \leq t_0 + A\,.$$

Consequentemente de (4.1) temos

$$\sup_{\theta \in [-h,0]} \{|x_t(\theta) - x_s(\theta)|\} = \|x_t - x_s\| \leq \varepsilon\,. \tag{4.2}$$

Portanto, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|t - s| < \delta \Rightarrow \|F(t) - F(s)\| = \|x_t - x_s\| \leq \varepsilon$. Portanto, F é contínua em s, e como s é arbitrário, F é contínua em $[t_0, t_0 + A]$.

□

Definição 4.2. *Seja $f : [0, \infty) \times C_H \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação, a equação*

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{4.3}$$

*é chamada de **Equação Diferencial Funcional com Retardamento** e denotada por **EDR**.*

Definição 4.3. *Uma função $x(t)$, contínua em $[t_0 - h, t_0 + A)$, $0 < A \leq \infty$, $t_0 \geq 0$, é dita uma **solução de** (4.3) em $[t_0, t_0 + A)$ se existir a derivada de $x(t)$ em $[t_0, t_0 + A)$ e satisfizer a equação (4.3) para $t \in [t_0, t_0 + A)$.*

Observação 4.1. Não é exigido que $x(t)$, definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$, seja diferenciável em t_0. No instante t_0 consideramos apenas a derivada lateral à direita. Notemos que quando $h = 0$, uma equação diferencial com retardamento se reduz a uma equação diferencial ordinária.

Exemplo 4.1. Consideremos a equação diferencial ordinária $\dot{x} = x(t)$, então a família de soluções dessa equação é dada por $x(t) = ce^t$, onde $c \in \mathbb{R}$ e basta fixarmos um único valor $x_0 \in \mathbb{R}$, por exemplo $x(0) = x_0$, para obtermos a única solução do problema de valor inicial, a saber, $x(t) = x_0 e^t$.

Agora, consideremos equação diferencial com retardamento

$$\dot{x}(t) = x(t - 1)$$

e a condição inicial $x_0 = \varphi_0 \in C([-1, 0], \mathbb{R})$ no instante $t = 0$. Neste caso o retardo é $h = 1$. Note que $f(t, x_t) = f(x_t) = x_t(-1)$, ou seja, $f : C \to \mathbb{R}$ com $f(\varphi) = \varphi(-1)$.

Pensemos em como determinar uma solução do problema acima para $t \geq 0$, conhecendo a função inicial φ_0. Para isto consideremos intervalos de tempo de comprimento igual ao retardo para construirmos a solução em cada intervalo, procedemos da seguinte forma:

Se $t \in [0, 1]$ integramos a equação diferencial acima e obtemos

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x(s - 1)ds = \varphi_0(0) + \int_0^t \varphi_0(s - 1)ds\,.$$

Portanto, sendo φ_0 conhecida é possível obter $x(t)$ com $t \in [0, 1]$.

Agora defina $\varphi_1(t) := \varphi_0(0) + \displaystyle\int_0^t \varphi_0(s - 1)ds$, $t \in [0, 1]$. Para $t \in [1, 2]$ temos

$$x(t) = x(1) + \int_1^t x(s - 1)ds = \varphi_1(1) + \int_1^t \varphi_1(s - 1)ds\,.$$

Ou seja, a solução do problema é conhecida no intervalo $[1,2]$, repetindo o raciocínio para $t \in [2,3]$ e assim sucessivamente, obtemos a solução deste problema no intervalo $[-1,\infty)$.

Fica claro nesse problema que precisamos ter como dado inicial o conhecimento da solução no intervalo $[-1,0]$, não bastando conhecer o seu valor no instante $t_0 = 0$, como no caso da equação diferencial ordinária.

4.2 Existência e Unicidade de Soluções

Nesta seção vamos apresentar condições que garantam a existência de solução da equação diferencial com retardamento (4.3), onde

$$f : [0,\infty) \times C_H \to \mathbb{R}^n$$

com $0 < H \leq \infty$ e com condição inicial $x_{t_0} = \psi$; $t_0 \geq 0$ e $\psi \in C_H$.

Definição 4.4. *A função $x(t)$, contínua em $[t_0 - h, t_0 + A), A > 0$, diferenciável em $[t_0, t_0 + A)$, é chamada uma* ***solução*** *de* (4.3) ***com função inicial*** *ψ em t_0 se:*
i) $x_t \in C_H$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$
ii) $x_{t_0} = \psi$
iii) $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 \leq t < t_0 + A$.

Definição 4.5. *Dizemos que $f(t,\varphi)$ satisfaz a condição de Lipschitz ou é* ***lipschitziana*** *relativamente a φ em $[0,\tau] \times C_{H_1}$, $0 < H_1 < H$, se existir $L = L(\tau, H_1)$ tal que*

$$|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| \leq L\|\varphi_2 - \varphi_1\|, \text{ para } 0 \leq t \leq \tau \text{ e } \varphi_1, \varphi_2 \text{ em } C_{H_1}.$$

Definição 4.6. *Dizemos que $f(t,\varphi)$ é* ***localmente lipschitziana*** *relativamente a φ em $[0,\infty) \times C_H$ se $f(t,\varphi)$ for lipschitziana relativamente a φ em $[0,\tau] \times C_{H_1}$, para todo τ, $0 < \tau < \infty$ e para todo H_1, $0 < H_1 < H$.*

Lema 4.2. *O conjunto dado por*

$$F = \{x \in C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n), \|x\| \leq H_1 \text{ e } x_{t_0} = x(t_0 + \theta) = \psi(\theta)\,; \theta \in [-h, 0]\}$$

é um espaço métrico completo.

Demonstração. É fácil ver que F é um espaço vetorial. Mostremos que F é um espaço métrico, para isto defina a seguinte função em $F \times F$:

$$d(x,y) = \|x - y\| = \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + A]} |x(t) - y(t)| = \max_{t \in [t_0 - h, t_0 + A]} |x(t) - y(t)|.$$

Mostremos que $d(x,y)$ é métrica. De fato,
i) Dados $x, y \in F$, provemos que $\|x - y\| \geq 0$ e $\|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

A afirmação $\|x-y\| \geq 0$ é válida por definição. E mais:

$$\|x-y\| = \max_{t\in[t_0-h,t_0+A]}\{|x(t)-y(t)|\} = 0 \Leftrightarrow$$
$$|x(t)-y(t)| = 0 \Leftrightarrow x(t) = y(t),\ \forall\, t \in [t_0-h, t_0+A].$$

ii) Dados $x, y \in F$, então

$$d(x,y) = \max_{t\in[t_0-h,t_0+A]}\{|x(t) - y(t)|\} = \max_{t\in[t_0-h,t_0+A]}\{|y(t) - x(t)|\} = d(y,x).$$

iii) Dados $x, y, z \in F$ mostremos que $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

$$d(x,z) = \max_{t\in[t_0-h,t_0+A]}\{|x(t)-z(t)|\} = \max_{t\in[t_0-h,t_0+A]}\{|x(t)-y(t)+y(t)-z(t)|\} \leq$$
$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+A]}\{|x(t)-y(t)|\} + \max_{t\in[t_0-h,t_0+A]}\{|y(t)-z(t)|\} = d(x,y)+d(y,z).$$

Portanto F é um espaço métrico.

Provemos agora que $F \subset C([t_0-h, t_0+A], \mathbb{R}^n)$ é completo. Pelo Teorema 3.1 basta verificar que F é fechado, pois $C([t_0-h, t_0+A], \mathbb{R}^n)$ é Banach. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F, isto é,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C([t_0-h, t_0+A], \mathbb{R}^n);\ \|x_n\| \leq H_1$$

e $x_n(t_0+\theta) = \psi(\theta)$; $\theta \in [-h, 0]$ e suponha que $x_n \to f \in C([t_0-h, t_0+A], \mathbb{R}^n)$ (uniformemente). Mostremos que $f \in F$.

Afirmamos que $\|f\| \leq H_1$. De fato, como (x_n) é definida em F, $\|x_n\| \leq H_1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Considere $a_n = \|x_n\| \in \mathbb{R}$ e $a_n \longrightarrow \|f\|$.

Vamos supor, por contradição, que $\|f\| > H_1$. Então para $\varepsilon = \dfrac{\|f\|-H_1}{2} > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \|f\|| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$ e assim,

$$|a_n - \|f\|| < \frac{\|f\|-H_1}{2} \Leftrightarrow \frac{-\|f\|+H_1}{2} \leq a_n - \|f\| \leq \frac{\|f\|-H_1}{2} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\|f\|+H_1}{2} \leq a_n \leq \frac{3\|f\|-H_1}{2}.$$

Então,

$$\|x_n\| = a_n \geq \frac{\|f\|+H_1}{2} = \frac{\|f\|}{2} + \frac{H_1}{2} > \frac{H_1}{2} + \frac{H_1}{2} = H_1,\ \forall\, n \geq n_0.$$

O que é uma contradição. Portanto, $\|f\| \leq H_1$.

Mostremos que $f(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, $\forall\, \theta \in [-h, 0]$.

Sabemos que $x_n \in F$, $x_n \longrightarrow f$ uniformemente, e que $x_n(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, $\theta \in [-h, 0]$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n(t_0+\theta) = f(t_0+\theta)$. Portanto, $f(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, $\forall\, \theta \in [-h, 0]$. Logo F é fechado e portanto completo.

□

Teorema 4.1. *Seja $f(t,\varphi)$ contínua e localmente Lipschitziana relativamente a φ em $[0,\infty)\times C_H$. Então, para qualquer $t_0 \geq 0$, $\psi \in C_H$, existem $A > 0$ e uma função $x(t)$ definida em $[t_0 - h, t_0 + A)$, que é solução de (4.3) com função inicial ψ em t_0. Ainda mais, esta solução é única.*

Demonstração. Considerando o espaço F como no Lema 4.2 e

$$T : F \longrightarrow C([t_0 - h, t_0 + A], \mathbb{R}^n)$$

que a cada $x \in F$ associa uma função Tx onde $Tx : [t_0 - h, t_0 + A] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\begin{cases} Tx(t_0+\theta) = \psi(\theta)\,, \;\; \theta \,\in\, [-h, 0] \\ Tx(t) = \psi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds;\; t \,\in\, [t_0, t_0 + A]. \end{cases} \tag{4.4}$$

Provemos que T tem ponto fixo, para isso utilizaremos o Teorema 3.2.

Primeiro vamos mostrar que T, para A conveniente, é uma aplicação de F em F, ou seja, $\|Tx\| \leq H_1, \;\; \forall\, x \in F$.

Para um número $A > 0$ qualquer e $t \,\in\, [t_0, t_0 + A]$, temos

$$\begin{aligned} |Tx(t)| = \left|\psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds\right| \leq |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t} |f(s,x_s)|ds \leq \\ |\psi(0)| + \int_{t_0}^{t_0+A} |f(s,x_s)|ds \leq \|\psi\| + \int_{t_0}^{t_0+A} |f(s,x_s)|ds. \end{aligned}$$

Fazendo a restrição $A \leq 1$ e observando que $\|x_s\| \leq H_1$ com $t_0 \leq s \leq t_0 + A$, segue que para $s \,\in\, [t_0, t_0 + A]$,

$$\begin{aligned} |f(s,x_s)| = |f(s,x_s) + f(s,0) - f(s,0)| \leq |f(s,x_s) - f(s,0)| + |f(s,0)| \leq \\ L\,\|x_s - 0\| + k \leq L\,H_1 \,+\, k, \end{aligned}$$

onde $k = \displaystyle\sup_{\tau \,\in\, [t_0, t_0+A]} |f(\tau, 0)|$ e $L = L(t_0 + 1, H_1)$.

Então $|Tx(t)| \leq \|\psi\| + (LH_1 + k)A$, para $t \,\in\, [t_0, t_0 + A]$.

Por outro lado, como $\|\psi\| \,<\, H_1$, por hipótese, resulta que existe H_2 tal que $\|\psi\| \,<\, H_2 \,<\, H_1$. Logo $|(Tx)(t)| \,<\, H_2 + A\,[H_1\,L \,+\, k] \,<\, H_1$, para A conveniente. Consideremos $A < \min\left\{1, \dfrac{H_1 - H_2}{H_1\,L \,+\, k}\right\}$. Assim $\|Tx\| \leq H_1$.

Agora, para $t \,\in\, [t_0 - h, t_0]$, $Tx = \psi$ e $\|\psi\| < H_1$.

Portanto, T é uma aplicação de F em F.

Provemos que T é uma contração, ou seja, existe $\beta \,\in\, \mathbb{R}$, $0 \,\leq\, \beta \,<\, 1$ tal que $\|Tx - Ty\| \leq \beta\|x - y\|$, $\forall\, x,\, y \,\in\, F$.

Escolhemos agora A não só com a indicação anterior, mas também com a exigência $A < \dfrac{1}{L}$.

Dados x, $y \in F$, por definição $(Tx)(t_0+\theta) = \psi(\theta)$ e $(Ty)(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, com $-h \leq \theta \leq 0$; $(Tx)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds$ e $(Ty)(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,y_s)ds$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$. Então $|Tx(t) - Ty(t)| = 0$ para $t_0 - h \leq t \leq t_0$, e para $t \in [t_0, t_0 + A]$ temos

$$|Tx(t) - Ty(t)| = \left|\psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds - (\psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,y_s)ds)\right| =$$
$$\left|\psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds - \psi(0) - \int_{t_0}^{t} f(s,y_s)ds\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x_s) - f(s,y_s)ds\right| \leq$$
$$\int_{t_0}^{t} |f(s,x_s) - f(s,y_s)|ds \leq \int_{t_0}^{t} L \cdot \|x_s - y_s\|ds.$$

Como $\|x_s - y_s\| \leq \|x - y\|$ para $s \in [t_0, t_0 + A]$, pois $-h \leq \theta \leq 0$ o que implica $t_0 - h \leq -h + s \leq \theta + s \leq s \leq t_0 + A$. Assim,

$$\|x_s - y_s\| = \sup_{\theta \in [-h,0]} |x_s(\theta) - y_s(\theta)| =$$
$$\sup_{\theta \in [-h,0]} |x(s+\theta) - y(s+\theta)| \leq \sup_{t \in [t_0 - h, t_0 + A]} |x(t) - y(t)| = \|x - y\|.$$

Logo $|(Tx)(t) - (Ty)(t)| \leq A\,L\|x - y\|$ para $t_0 - h \leq t \leq t_0 + A$, com

$$A < \min\left\{1, \frac{1}{L}, \frac{H_2 - H_1}{H_1 L + k}\right\}.$$

Portanto T é uma contração, pois $A\,L < 1$.

Note que para provar a existência de solução basta verificar que $T : F \to F$ definido em (4.4) tem ponto fixo, pois esse ponto fixo corresponderá a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x_t) \\ x(t_0) = \psi, \end{cases}$$

já que, se integrarmos a equação diferencial de t_0 a t, obtemos

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds = Tx(t), \text{ para } t \in [t_0, t_0 + A].$$

Pelo Teorema 3.2 do Ponto Fixo de Banach existe uma e só uma função $x \in F$ tal que $Tx = x$. Em outras palavras, existe uma só função $x \in F$ tal que $x(t_0+\theta) = \psi(\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$ e $x(t) = \psi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x_s)ds$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + A$.

□

Observação 4.2. No caso em que supomos $f(t,\varphi)$ apenas contínua podemos provar a existência, mas não a unicidade de uma solução da equação (4.3) com uma condição inicial dada, em um intervalo $[t_0 - h, t_0 + A)$, com A suficientemente pequeno. A prova, neste caso, pode ser feita como uma aplicação natural do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Exemplo 4.2. Considere o PVI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ x_0 = \psi = \operatorname{sen}\theta, \quad \theta \in \left[-\dfrac{3\pi}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Vamos construir de forma recursiva, a sua única solução.

(i) Para $t \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$,

$$x_1(t) = x(0) + \int_0^t x\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds = -\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} t.$$

(ii) Para $t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$,

$$\begin{aligned} x_2(t) = x_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t x\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds = -1 + \int_{\frac{3\pi}{2}}^t \operatorname{sen}\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds = \\ -1 - \cos\left(s - \frac{3\pi}{2}\right)\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^t = -\cos\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

(iii) E assim sucessivamente, temos

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, \quad t \in \left[\dfrac{-3\pi}{2}, 0\right] \\ \operatorname{sen} t, \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Se considerarmos outro PVI dado por

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right) \\ x_0 = \psi = \cos\theta, \quad \theta \in \left[\dfrac{-3\pi}{2}, 0\right]. \end{cases}$$

Analogamente ao caso anterior a solução é obtida de forma recursiva e é dada por:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, \quad t \in \left[\dfrac{-3\pi}{2}, 0\right] \\ \cos t, \quad t \in [0, \infty). \end{cases}$$

Este exemplo ilustra um dos importantes contrastes entre EDOs e EDRs, pois para equações ordinárias nas condições do Teorema de Existência e Unicidade, as soluções de uma mesma equação, com condições iniciais diferentes nunca se interceptam, diferentemente do que constatamos no exemplo acima, em que as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ se interceptam em infinitos pontos.

4.3 Extensão de Soluções

Daremos algumas propriedades relativamente ao problema de extensão de soluções da equação (4.3). Indicamos por $x(t; t_0, \varphi)$ a solução da equação diferencial com retardamento (4.3) cuja função inicial em t_0 é φ. Consideremos agora as seguintes hipóteses:

i) $f(t, x_t)$ é uma função contínua que leva conjuntos de $[0, \tau] \times C_{H_1}$ em conjuntos limitados do $\mathbb{R}^n$, para $\forall\ \tau, H_1,\ 0 < \tau < \infty,\ 0 < H_1 < H$.

ii) Se $x(t)$ *e* $y(t)$ são duas soluções definidas em algum intervalo comum, digamos o intervalo $[t_0 - h, t_0 + \delta),\ 0 < \delta \leq \infty$, com $x_{t_0} = y_{t_0}$, então $x(t) = y(t),\ \forall\, t \in [t_0 - h, t_0 + \delta)$.

Usamos $x_t(t_0, \varphi)$ para indicar o elemento de C dado por $x_t(t_0, \varphi)(\theta) = x(t_0 + \theta, t_0, \varphi)$.

Observação 4.3. Poderíamos substituir a hipótese i) por:

i') a função $f(t, x_t)$ é completamente contínua.

As propriedades 1, 2 e 3 descritas abaixo são verdadeiras relativamente ao problema de extensão de soluções de (4.3), supostas satisfeitas as condições **(i)** e **(ii)**.

Propriedade 1: Se $x(t)$ definida em $[t_0 - h, t_0 + \delta)$ com $0 < \delta < \infty$, é solução de (4.3) e se, neste intervalo, $|x(t)| \leq \tilde{H} < H$, então $x(t)$ pode ser estendida a $[t_0 - h, t_0 + \delta]$.

Demonstração. Mostremos que podemos estender a solução de (4.3) em $[t_0 - h, t_0 + \delta]$.

A demonstração segue do Critério de Cauchy, considerando

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds$$

e usando a hipótese **i)**.

Seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária, onde $t_n \in [t_0, t_0 + \delta)$, tal que $t_n \to t_0 + \delta$. Mostraremos que existe $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n)$ para definirmos $x(t_0 + \delta)$ como sendo o valor do limite.

Como $(x(t_n))$ é uma sequência em $\mathbb{R}^n$, basta provar que é de Cauchy, ou seja, $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0\ \Rightarrow\ |x(t_n) - x(t_m)| < \epsilon$.

Note que

$$|x(t_n) - x(t_m)| = \left| x(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s)ds - x(t_0) - \int_{t_0}^{t_m} f(s, x_s)ds \right| =$$
$$\left| \int_{t_m}^{t_n} f(s, x_s)ds \right| \leq \int_{t_m}^{t_n} |f(s, x_s)|ds.$$

Usando a hipótese (i), como $[t_m, t_n] \subset [0, \tau]$, *e* $||x_s|| \leq \tilde{H} < H$, segue que

$$F\ = \{f(s, x_s), s \in [t_m, t_n], x_s\ \in\ C_{H_1}\}$$

é um conjunto limitado do $\mathbb{R}^n$.

Logo existe $M > 0$, tal que $|f(s, x_s)| \leq M, \ \forall\ s \in [t_m, t_n]$.

Assim

$$|x(t_n) - x(t_m)| \leq \int_{t_n}^{t_m} M ds = M|t_n - t_m|. \tag{4.5}$$

Como $t_n \in \mathbb{R}$, e (t_n) é convergente, segue que (t_n) é de Cauchy. Logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ m, n > N$, tem-se $|t_m - t_n| < \dfrac{\epsilon}{M}$. Dado $\epsilon > 0$, basta considerar $n_0 = N$.

Utilizando essa última desigualdade em (4.5), temos

$$|x(t_n) - x(t_m)| \leq M|t_n - t_m| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon\,.$$

Segue que $(x(t_n))_{n \in\ \mathbb{N}}$ é de Cauchy, o que implica em ser convergente. Logo existe $\bar{x}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n) = \bar{x}$. Defina $x(t_0 + \delta) = \bar{x}$.

Note que $x(t)$ é solução do PVI para $t \in [t_0 - h, t_0 + \delta)$, por hipótese. Para $t = t_0 + \delta$, note que $x(t)$ é contínua em $t_0 + \delta$, pois $x(t_0 + \delta) = \bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n)$.

$x(t_n) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s)ds$, para $t \in [t_0 - h, t_0 + \delta)$.

Mostremos agora $\displaystyle\int_{t_0}^{t_m} f(s, x_s)ds \to \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(s, x_s)ds$, quando $n \to \infty$.

Com efeito $F(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds$, com $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ é contínua em t e mais, é derivável em t. Portanto,

$$x(t_n) = x_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, x_s)ds \to x_0 + \int_{t_0}^{t_0+\delta} f(s, x_s)ds = \bar{x} = x(t_0 + \delta)$$

o que implica $x(t_0 + \delta) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\delta} f(s, x_s)ds$.

Assim, $x(t) = x(t_0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, x_s)ds, \ \forall\ t \in [t_0, t_0 + \delta]$.

□

Observação 4.4. Necessitamos da hipótese **i)** para aplicar o Critério de Cauchy, porque num espaço de Banach de dimensão infinita, como é o caso de $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ com $h > 0$, uma bola fechada não é um conjunto compacto e portanto, não podemos garantir que uma função contínua, seja limitada em uma bola fechada.

Propriedade 2: Suponhamos que $x(t)$ seja solução de (4.3) tal que $|x(t)| < H < \infty$ para $t_0 - h \leq t < t^+$. Então $t^+ = \infty$.

Demonstração. Suponhamos $t^+ < +\infty$. Então pela Propriedade 1 podemos estender $x(t)$ até t^+ como solução de (4.3), isto é, $x(t)$ é solução de (4.3) com $t \in [t_0 - h, t^+)$, o que é contradição. Segue que $t^+ = +\infty$. □

Propriedade 3: Em geral, não podemos estender $x(t, t_0, \varphi)$ como solução à esquerda de $[t_0 - h, t^+)$, isto é, não podemos garantir a existência de $\delta > 0$ e de uma função $x(t)$ definida em $[t_0 - \delta - h, t^+)$, $x(t)$ coincidindo com $x(t, t_0, \varphi)$ em $[t_0 - h, t^+)$ tal que $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$ para $t_0 - \delta \leq t < t^+$.

Por exemplo, se $\varphi \in C$ tal que $\varphi(\theta)$ não tenha derivada esquerda para $\theta = 0$, então $x(t, t_0, \varphi)$ não admite prolongamento à esquerda qualquer que seja $t_0 \geq 0$. Mas um prolongamento à esquerda não ocorre, em geral, mesmo que $\varphi(\theta)$ seja diferenciável.

4.4 Desigualdade Fundamental

Para estabelecermos uma importante desigualdade necessária no estudo de estabilidade, precisamos provar o seguinte resultado.

Lema 4.3. *Se* $t \in [t_0, \tau]$, *então* $||x_t(t_0, \varphi_2) - x_t(t_0, \varphi_1)|| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||$ *se, e somente se,* $|x(t; t_0, \varphi_2) - x(t; t_0, \varphi_1)| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||$, *onde* $L = L(\tau, H_1)$.

Demonstração. Por hipótese, temos

$$||x_t(t_0, \varphi_2) - x_t(t_0, \varphi_1)|| = \sup_{\theta \in [-h,0]} \{|x_t(t_0, \varphi_2)(\theta) - x_t(t_0, \varphi_1)(\theta)|\} \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||.$$

O que implica, para $\theta \in [-h, 0]$,

$$|x(t+\theta; t_0, \varphi_2) - x(t+\theta; t_0, \varphi_1)| \leq \sup_{\theta \in [-h,0]} \{|x(t+\theta; t_0, \varphi_2) - x(t+\theta; t_0, \varphi_1)|\} \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||$$

para qualquer $t \in [t_0, \tau]$, então $|x(t+\theta; t_0, \varphi_2) - x(t+\theta; t_0, \varphi_1)| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||$, $\forall\, \theta \in [-h, 0]$. Em particular para $\theta = 0$, temos

$$|x(t; t_0, \varphi_2) - x(t; t_0, \varphi_1)| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||, \; t_0 \leq t \leq \tau.$$

Reciprocamente, $||x_t(t_0, \varphi_2) - x_t(t_0, \varphi_1)|| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||$ está satisfeita para $t = t_0$ e mais, vale a igualdade.

Vamos demonstrar o resultado, considerando a divisão de $(t_0, \tau]$:

(i) $t \in (t_0, t_0 + h)$

(ii) $t \in [t_0 + h, \tau]$

(i) Para $t \in (t_0, t_0 + h)$ fixo, defina:

$$x_t(t_0; \varphi_1)(\theta) = \begin{cases} \varphi_1(\theta), & \theta \in [-h, t_0 - t] \\ x(t+\theta; t_0, \varphi_1), & \theta \in (t_0 - t, 0] \end{cases}$$

$$x_t(t_0; \varphi_2)(\theta) = \begin{cases} \varphi_2(\theta), & \theta \in [-h, t_0 - t] \\ x(t+\theta; t_0, \varphi_2), & \theta \in (t_0 - t, 0] \end{cases}$$

Para $\theta \in [-h, 0]$ e observando que $t > t_0 \;\Rightarrow\; t - t_0 > 0 \;\Rightarrow\; e^{L(t-t_0)} > e^0 = 1$, temos

$$|x_t(t_0, \varphi_2)(\theta) - x_t(t_0, \varphi_1)(\theta)| = |\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)| \leq ||\varphi_2 - \varphi_1||\,1 \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||, \;\forall\; \theta \;\in [-h, t_0 - t].$$

Portanto

$$|x(t+\theta; t_0, \varphi_2) - x(t+\theta; t_0, \varphi_1)| \leq e^{L(t+\theta-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1|| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||, \text{ para todo } \theta \in [t_0 - t, 0].$$

E como o supremo é a menor das cotas superiores, segue que $\sup\limits_{\theta\in[-h,0]} |x_t(t_0, \varphi_2)(\theta) - x_t(t_0, \varphi_1)(\theta)| = ||x_t(t_0, \varphi_2) - x_t(t_0, \varphi_1|| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||$ o que conclui a demonstração.

(ii) Para $t \geq t_0 + h$, vale a seguinte desigualdade

$$|x(t; t_0, \varphi_2) - x(t; t_0, \varphi_1)| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||.$$

Note que se $\theta \in [-h, 0]$ e $t \geq t_0 + h \;\Rightarrow\; t + \theta \geq t_0 + h + \theta \geq t_0 + h - h = t_0$.
Portanto, $t + \theta \geq t_0$. Aplicando $t + \theta$ em (4.4) temos

$$|x(t+\theta; t_0, \varphi_2) - x(t+\theta; t_0, \varphi_1)| \leq e^{L(t+\theta-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||. \tag{4.6}$$

Como $f(t) = e^{L(t-t_0)}$ é crescente, então se

$$t + \theta - t_0 \leq t - t_0 \;\Rightarrow\; e^{L(t+\theta-t_0)} \leq e^{L(t-t_0)}.$$

Voltando em (4.6), e usando a observação anterior, temos

$$|x(t+\theta; t_0, \varphi_2) - x(t+\theta; t_0, \varphi_1)| \leq \sup_{\theta\in[-h,0]} |x(t+\theta; t_0, \varphi_2) - x(t+\theta; t_0, \varphi_1)| \leq \sup_{\theta\in[-h,0]} e^{L(t+\theta-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1|| = e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||.$$

Logo,

$$||x_t(t_0, \varphi_2) - x_t(t_0, \varphi_1)|| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||.$$

□

A desigualdade a seguir estabelece a continuidade de $x(t, t_0, \varphi)$ em relação a φ.

Teorema 4.2. *Seja $f : [0, \infty) \times C_H \to \mathbb{R}^n$ contínua e localmente lipschitziana. Dados $t_0 \geq 0$, φ_1, $\varphi_2 \in C_H$, sejam $x(t; t_0, \varphi_1)$ e $x(t; t_0, \varphi_2)$ definidas em um intervalo comum $[t_0 - h, \tau]$, $t_0 \leq \tau < \infty$, com $||x_t(t_0, \varphi_j)|| \leq H_1 < H$, $t_0 \leq t \leq \tau$, $j = 1, 2$. Então,*

$$||x_t(t_0, \varphi_2) - x_t(t_0, \varphi_1)|| \leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||, \; t_0 \leq t \leq \tau, \; \textit{onde } L = L(\tau, H_1).$$

Demonstração. Vamos supor, sem perda de generalidade, que

$$|f(t,\varphi_2)-f(t,\varphi_1)|<L||\varphi_2-\varphi_1)||,$$

para φ_1 , $\varphi_2 \in C_{H_1}$, $\varphi_2 \neq \varphi_1$ e $t \in [0,\tau]$ onde $L=L(\tau,H_1)$ é a constante de Lipschitz.

Pelo Lema 4.3, basta demonstrar que

$$|x(t;t_0,\varphi_2)-x(t;t_0,\varphi_1)|\leq e^{L(t-t_0)}||\varphi_2-\varphi_1||,\ t_0\leq t\leq \tau. \tag{4.7}$$

A desigualdade (4.7) está satisfeita se $\varphi_2=\varphi_1$ e também é verdadeira para $t=t_0$, com $\varphi_1\neq\varphi_2$.

Para $\varphi_1\neq\varphi_2$, suporemos que (4.7) não seja verdadeira. Então existem $\tilde{t}\in(t_0,\tau)$ e uma sequência $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$, $t_m>\tilde{t}$, e $t_m\to\tilde{t}$, de modo que

$$|x(\tilde{t},t_0,\varphi_2)-x(\tilde{t},t_0,\varphi_1)|=e^{L(\tilde{t}-t_0)}||\varphi_2-\varphi_1|| \tag{4.8}$$

e

$$|x(t_m,t_0,\varphi_2)-x(t_m,t_0,\varphi_1)|>e^{L(t_m-t_0)}||\varphi_2-\varphi_1||, \tag{4.9}$$

pois se chamarmos $M(t)=|x(t;t_0,\varphi_2)-x(t;t_0,\varphi_1)|$ e $G(t)=e^{L(t-t_0)}\|\varphi_2-\varphi_1\|$, ambas são contínuas em t e $M(t_0)\leq G(t_0)$, como estamos supondo que existe $\bar{t}$ tal que $M(\bar{t})>G(\bar{t})$ então deve existir $\tilde{t}\in(t_0,\bar{t})$ tal que $M(\tilde{t})=G(\tilde{t})$ e daí existe uma sequência (t_m) , que satisfaz $t_m>\tilde{t}$ com $t_m\to\tilde{t}$ quando $m\to\infty$.

Multiplicando (4.8) e (4.9) por $\dfrac{1}{t_m-\tilde{t}}>0$ e subtraindo (4.9) de (4.8) obtemos

$$\frac{1}{t_m-\tilde{t}}\ [|x(t_m,t_0,\varphi_2)-x(t_m,t_0,\varphi_1)|-|x(\tilde{t};t_0,\varphi_2)-x(\tilde{t};t_0,\varphi_1)|]>$$
$$\frac{1}{t_m-\tilde{t}}\ [e^{L(t_m-t_0)}-e^{L(\tilde{t}-t_0)}]||\varphi_2-\varphi_1||=\frac{e^{L(t_m-t_0)}-e^{L(\tilde{t}-t_0)}}{t_m-t_0-(\tilde{t}-t_0)}\ ||\varphi_2-\varphi_1||.$$

Chamando $\Delta t=t_m-\tilde{t}$, então fazer $m\to\infty$, é equivalente a fazer $\Delta t\to 0^+$. Calculando o limite obtemos

$$\overline{\lim}_{\Delta t\to 0^+}\frac{1}{\Delta t}[|x(\tilde{t}+\Delta t,t_0,\varphi_2)-x(\tilde{t}+\Delta t,t_0,\varphi_1)|-|x(\tilde{t},t_0,\varphi_2)-x(\tilde{t},t_0,\varphi_1)|]\geq$$
$$\lim_{m\to\infty}\frac{e^{L(t_m-t_0)}-e^{L(\tilde{t}-t_0)}}{(t_m-t_0)-(\tilde{t}-t_0)}||\varphi_2-\varphi_1||=Le^{L(\tilde{t}-t_0)}||\varphi_2-\varphi_1||, \tag{4.10}$$

considerando $f(t_m)=e^{L(t_m-t_0)}$, temos $\dot{f}(\tilde{t})=Le^{L(\tilde{t}-t_0)}$.

Agora sejam $K>0$ e $\epsilon_0>0$ tais que

$$|\dot{x}(\tilde{t},t_0,\varphi_2)-\dot{x}(\tilde{t},t_0,\varphi_1)|<K<K+\epsilon_0<L||x_{\tilde{t}}(t_0,\varphi_2)-x_{\tilde{t}}(t_0,\varphi_1)||=Le^{L(\tilde{t}-t_0)}||\varphi_2-\varphi_1||. \tag{4.11}$$

Dado $\forall\ \epsilon_0 > 0,\ \exists\ \delta_0 > 0$, tal que

$$\frac{1}{\Delta t}|[x(\tilde{t}+\Delta t, t_0, \varphi_2) - x(\tilde{t}+\Delta t, t_0, \varphi_1)]| - |[x(\tilde{t}, t_0, \varphi_2) - x(\tilde{t}, t_0, \varphi_1)]| \leq$$
$$|\dot{x}(\tilde{t}, t_0, \varphi_2) - \dot{x}(\tilde{t}, t_0, \varphi_1)| + \epsilon_0,$$

para $0 < \Delta t \leq \delta_0$. Usando (4.11), temos

$$\frac{1}{\Delta t}[|x(\tilde{t}+\Delta t, t_0, \varphi_2) - x(\tilde{t}+\Delta t, t_0, \varphi_1)| - |x(\tilde{t}, t_0, \varphi_2) - x(\tilde{t}, t_0, \varphi_1)|] \leq$$
$$\leq |\dot{x}(\tilde{t}, t_0, \varphi_2) - \dot{x}(\tilde{t}, t_0, \varphi_1)| + \epsilon_0 < K + \epsilon_0 < Le^{L(\tilde{t}-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||,$$

para $0 < \Delta t \leq \delta_0$.

Portanto,

$$\overline{\lim}_{\Delta t \to 0^+} \frac{1}{\Delta t}[|x(\tilde{t}+\Delta t, t_0, \varphi_2) - x(\tilde{t}+\Delta t, t_0, \varphi_1)| - |x(\tilde{t}, t_0, \varphi_2) - x(\tilde{t}, t_0, \varphi_1)|] <$$
$$Le^{L(\tilde{t}-t_0)}||\varphi_2 - \varphi_1||,$$

o que é uma contradição com (4.10).

$\square$

5 Estabilidade e o Segundo Método de Lyapunoff

Neste capítulo introduziremos os conceitos de estabilidade, e motivado pelo caso ordinário apresentaremos um importante método para o estudo de estabilidade para equações diferenciais com retardamento.

Durante todo o capítulo, assumiremos que as condições (i) e (ii) do início da seção 4.3 do Capítulo 4 estejam satisfeitas relativamente à equação (4.3) dada por

$$\dot{x} = f(t, x_t)\,,$$

em $[0, \infty) \times C_H$.

5.1 Definições de Estabilidade

As definições de estabilidade desta seção serão dadas em relação ao ponto de equilíbrio $x = 0$ da equação (4.3). Para isto, vamos supor que a origem seja um ponto de equilíbrio de (4.3), isto é, $f(t, 0) = 0$, $t \geq 0$.

Observação 5.1. Quando a equação $\dot{y} = g(t, y_t)$ tem um ponto de equilíbrio $y^* \neq 0$, consideramos a mudança de variável $x = y - y^*$ e dessa forma

$$\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = g(t, y_t) = g(t, x_t + y_t^*) - g(t, y_t^*).$$

Denotando $f(t, x_t) = g(t, x_t + y_t^*) - g(t, y_t^*)$ tem-se $f(t, 0) = 0,\ \forall\, t$, ou seja, $x = 0$ é equilíbrio da equação $\dot{x}(t) = f(t, x_t)$.

Portanto, basta que as definições sobre estabilidade sejam dadas com respeito ao ponto de equilíbrio $x = 0$ de (4.3).

Definição 5.1. *Dizemos que $x = 0$ é* ***estável*** *se dados $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon\,, t_0) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implicam $\|x_t(t_0\,, \varphi)\| < \varepsilon$.*

No caso de uma equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t,x)$, $\quad f(t\,,\,0) = 0$, se $\delta(\varepsilon\,,\,t_0)$ puder ser determinado de acordo com a definição acima para algum $t_0 = \bar{t_0}$, então $\delta(\varepsilon\,,\,t_0)$ poderá ser determinado para qualquer $t_0 \geq 0$. Isto se deve ao fato de que a aplicação que associa $x_0 \mapsto x(t_0\,,\,\bar{t_0}\,,\,x_0)$ induz um homeomorfismo entre duas vizinhanças de $x = 0$, desde que $f(t\,,\,x)$ seja contínua e satisfaça alguma condição de unicidade para o problema de valor inicial.

Para verificar que a afirmação acima é verdadeira para EDO, basta considerar o resultado abaixo.

Teorema 5.1. *Suponha que $f(t,x)$ seja contínua para qualquer $(t,x) \in A$, A é aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $x(t;\bar{t_0},x_0)$ (com $x(t_0;\bar{t_0},x_0) = x_0$) é a única solução da equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t,x)$ em $[a,b]$, então existe uma solução $x(t;s,\eta)$ dessa mesma equação definida em $[a,b]$, para quaisquer s, η suficientemente próximos a $\bar{t_0}, x_0$, e é uma função contínua de (t,s,η) em $(t,\bar{t_0},x_0)$.*

Demonstração. A solução $x(t,s,\eta)$ é uma função contínua de s,η e é uniformemente contínua em t, com $t \in [a,b]$.

Assim, $\forall\,\varepsilon > 0$, temos

1. $\exists\,\delta_1 > 0$ tal que $|x(t,s,\eta) - x(t,\bar{t_0},x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, se $\|(s,\eta) - (\bar{t_0},x_0)\| < \delta_1$
2. $\exists\,\delta_2 > 0$ tal que se $t \in [a,b]$, então $|x(t,s,\eta) - x(\tau,\bar{t_0},x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, desde que $|t-\tau| < \delta_2$

Considere $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, tem-se

$$|x(t;s,\eta) - x(\tau;\bar{t_0},x_0)| \leq$$
$$|x(t;s,\eta) - x(t;\bar{t_0},x_0)| + |x(t;\bar{t_0},x_0) - x(\tau;\bar{t_0},x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

□

A conclusão da prova da existência do homeomorfismo entre vizinhanças de $x = 0$ para EDO está feita na referência [3].

Um tal homeomorfismo não existe para o caso de equações com retardamento positivo. Ilustremos essa observação através do seguinte exemplo que mostra a existência de dois instantes iniciais de modo que para um deles a condição de estabilidade é satisfeita e para o outro não.

Exemplo 5.1. Consideremos a seguinte equação diferencial com retardamento

$$\dot{x} = b(t)\,\cdot\,x\left(t - \frac{3\pi}{2}\right),$$

onde

$$\begin{cases} b(t) = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq t \leq 3\pi/2, \\ b(t) = -\cos t, \quad \text{para} \quad 3\pi/2 \leq t \leq 3\pi, \\ b(t) = 1, \quad \text{para} \quad t > 3\pi. \end{cases}$$

Procedendo a construção da solução em intervalos de comprimento do retardo temos:

Para $t \in \left[0, \dfrac{3\pi}{2}\right]$, observamos que

$\dot{x} = 0 \Rightarrow x(t)$ é constante. Mas, $0 \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow \dfrac{-3\pi}{2} \leq t - \dfrac{3\pi}{2} \leq 0$. Logo, $x(t) = \varphi(0)$ nesse intervalo.

Para $t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$, observamos que

$$\dot{x}(t) = -\cos t\, x\left(t - \frac{3\pi}{2}\right) \Longrightarrow \dot{x}(t) = -\varphi(0)\, \cos t.$$

Integrando os dois lados, temos:

$x(t) - x\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{t} -\varphi(0)\, \cos s\, ds \Longrightarrow x(t) = x\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - \varphi(0) \displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{t} \cos s\, ds \Longrightarrow$

$x(t) = \varphi(0) - \varphi(0)\,\text{sen}\, s\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{t} = \varphi(0) - \varphi(0)\left(\text{sen}\, t - \text{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right) = \varphi(0) - \varphi(0)\,\text{sen}\, t - \varphi(0).$

Logo, $x(t) = -\varphi(0)\,\text{sen}\, t$, para $t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

Para $t \in \left[3\pi\,, \dfrac{9\pi}{2}\right]$, observamos que

$\dot{x}(t) = 1 \cdot x\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right) \Longrightarrow \dot{x}(t) = x\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right) \Longrightarrow \dot{x}(t) = -\varphi(0)\,\text{sen}\left(t - \dfrac{3\pi}{2}\right).$

Como $3\pi \leq t \leq \dfrac{9\pi}{2} \Longrightarrow \dfrac{3\pi}{2} \leq t - \dfrac{3\pi}{2} \leq 3\pi\,.$

Integrando os dois lados, temos:

$$x(t) - x(3\pi) = \int_{3\pi}^{t} -\varphi(0)\,\text{sen}\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds \Longrightarrow$$

$$x(t) = x(3\pi) - \varphi(0) \int_{3\pi}^{t} \text{sen}\left(s - \frac{3\pi}{2}\right) ds \Longrightarrow$$

$$x(t) = -\varphi(0)\left(-\cos s - \frac{3\pi}{2}\right)\Big|_{3\pi}^{t} \Longrightarrow x(t) = \varphi(0)\, \cos t - \frac{3\pi}{2} =$$

$$\varphi(0)\left(\cos t\, \cos\frac{3\pi}{2} + \text{sen}\, t\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = \varphi(0)\text{sen}\, t\,.$$

Procedendo de forma análoga nos intervalos seguintes concluimos que

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(0), & 0 \leq t \leq 3\pi/2, \\ -\varphi(0)\,\text{sen}\, t, & t \geq 3\pi/2. \end{cases}$$

Note que para $t_0 = 0$ a condição de estabilidade é satisfeita, por outro lado se $t_0 = 3\pi$ temos que nossa equação fica na forma $\dot{x} = x\left(t - \frac{3}{2}\pi\right)$ para $t \geq 3\pi$, e assim para a raiz *lambda* da equação $\lambda = e^{3\pi\lambda/2}$, obtida pela intersecção dos gráficos das funções $f(\lambda) = \lambda$ e $g(\lambda) = e^{-3\pi\lambda/2}$ temos que $x(t) = ce^{\lambda t}$ é solução para todo $c \in \mathbb{R}$. Como $|ce^{\lambda t}| \to \infty$ quando $t \to \infty$, qualquer vizinhança da função inicial zero existe uma infinidade de funções iniciais φ de modo que $|\ x(t, 3\pi, \varphi)\ | \to \infty$ com $t \to \infty$; assim, a condição de estabilidade não está satisfeita para $t_0 = 3\pi$.

Definição 5.2. *Dizemos que $x = 0$ é **uniformemente estável** se dados $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implicam $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$.*

Definição 5.3. *Dizemos que $x = 0$ é **assintoticamente estável** se a Definição 5.1 é satisfeita e a todo $t_0 \geq 0$ corresponde $\rho = \rho(t_0) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \rho$ implica $x(t, t_0, \varphi) \to 0$ com $t \to \infty$.*

Definição 5.4. *Dizemos que $x = 0$ é **equiassintoticamente estável** se dados $\varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$ existem $\rho = \rho(t_0) > 0$ e $T = T(\varepsilon) \geq 0$ de modo que $\|\varphi\| < \rho$ e $t \geq t_0 + T$ implicam $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$.*

Definição 5.5. *Dizemos que $x = 0$ é **uniformemente assintoticamente estável** se a Definição 5.2 é satisfeita e existe $\rho > 0$ de modo que a todo $\varepsilon > 0$ corresponde $T(\varepsilon) \geq 0$ tal que se $\|\varphi\| < \rho$ e $t_0 \geq 0$, então $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.*

Definição 5.6. *Dizemos que $x = 0$ é **exponencialmente estável** se existem constantes positivas ρ, α e β de modo que se $\|\varphi\| < \rho$ então $\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq \beta \cdot e^{-\alpha \cdot (t - t_0)} \|\varphi\|$ para $t \geq t_0 \geq 0$.*

Definição 5.7. *Dizemos que $x = 0$ é **globalmente assintoticamente estável** se $H = \infty$ e a Definição 5.3 é satisfeita com $\rho(t_0) = \infty$.*

Entre as definições acima, as seguintes implicações podem ser verificadas:

$(Def. 5.6) \Longrightarrow (Def. 5.5) \Longrightarrow (Def. 5.2) \Longrightarrow (Def. 5.1)$

$(Def. 5.6) \Longrightarrow (Def. 5.5) \Longrightarrow (Def. 5.4) \Longrightarrow (Def. 5.3) \Longrightarrow (Def. 5.1)$

De fato:

$(Def. 5.6) \Longrightarrow (Def. 5.5)$:

Por hipótese, temos que existem constantes positivas ρ_0, α_0 e β_0 com $\|\varphi\| < \rho_0$ tal que $\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq \beta_0 \cdot e^{-\alpha_0 (t - t_0)} \|\varphi\|$, com $t \geq t_0 \geq 0$.

Como $e^{-\alpha_0(t-t_0)} \to 0$ quando $t \to \infty$, então dado $\dfrac{\varepsilon}{\beta_0 \cdot \rho_0}$, existe $T_\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $t > t_0 + T_\varepsilon$ tem-se $e^{-\alpha_0(t-t_0)} < \dfrac{\varepsilon}{\beta_0 \cdot \rho_0}$.

Agora, mostremos que $\exists\, r > 0$ tal que $\forall\, \varepsilon > 0$ corresponde $T(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\varphi\| < r$ e $t_0 \geq 0$ implicam $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \quad \forall\, t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.

De fato, basta tomar $r = \rho_0$ e dado ε, escolha $T(\varepsilon) = T_\varepsilon$ acima, pois

$$\|\varphi\| < \rho_0 = r \implies \|x_t(t_0, \varphi)\| \leq \beta_0 \cdot e^{-\alpha_0(t-t_0)}\|\varphi\| < \beta_0 \cdot \rho_0 \cdot e^{-\alpha_0(t-t_0)} < \beta_0 \cdot \rho_0 \cdot \frac{\varepsilon}{\beta_0 \cdot \rho_0} = \varepsilon\,.$$

Agora, mostremos que $x = 0$ é uniformemente estável (Def. 5.2), isto é, $\forall\, \eta > 0$ e $t_0 \geq 0, \quad \exists\, \delta > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0$ implicam $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \eta$.

De fato, dado $\eta > 0$ escolha $\delta \leq \min\{\rho_0, \dfrac{\eta}{\beta_0}\}$. Assim, se $\|\varphi\| < \delta$ e, como $\delta < \rho_0$, tem-se $\|x_t(t_0, \varphi)\| \leq \beta_0 \cdot e^{-\alpha_0(t-t_0)}\|\varphi\| \leq \beta_0 \cdot \|\varphi\| < \beta_0 \cdot \delta \leq \beta_0 \cdot \dfrac{\eta}{\beta_0} = \eta$.

As implicações $(Def.5.5) \implies (Def.5.2)$ e $(Def.5.2) \implies (Def.5.1)$ são imediatas.

$(Def.5.5) \implies (Def.5.4)$:

Devemos mostrar que $\forall\, \varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0, \quad \exists\, \rho_0 = \rho_0(t_0) > 0$ e $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que $\|\varphi\| < \rho_0$ e $t \geq t_0 + T$ implicam $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$.

Basta tomar $\rho_0 = \rho$ e $T = T(\varepsilon)$.

$(Def.5.4) \implies (Def.5.3)$:

Primeiramente devemos provar $x = 0$ é estável, isto é, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, M_\varepsilon > 0$ tal que se $t > M_\varepsilon$ então $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon$. Por hipótese, temos a validade de (Def. 5.4), ou seja, dados $\varepsilon > 0$ e t_0, existe $\rho = \rho(t_0)$ e $T(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \rho$ e $t \geq t_0 + T(\varepsilon) + h \implies \|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$. Ou seja,

$$\|x_t(t_0, \varphi)\| = \sup_{\theta \in [-h,0]} |x(t + \theta; t_0, \varphi)| < \varepsilon \implies |x(t + \theta; t_0, \varphi)| < \varepsilon\,, \forall\, \theta \in [-h, 0].$$

Como $-h \leq \theta \leq 0 \implies t + \theta \geq t - h \implies t - h \geq t_0 + T(\varepsilon) \implies t \geq t_0 + T(\varepsilon) + h$.

Basta tomar $M_\varepsilon = t_0 + T(\varepsilon) + h$.

Agora, mostremos (Def. 5.1), ou seja, $\forall\, \varepsilon > 0$ e $t_0 \geq 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \delta$ e $t \geq t_0 \implies \|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$ fixo e $t_0 \geq 0$, $\exists\, \rho(t_0) > 0$ e $T = T(\varepsilon) \geq 0$ tal que $\|\varphi\| < \rho \implies \|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$, $\forall\, t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.

Considere o intervalo $[t_0, T(\varepsilon)]$, por hipótese a cada $\bar{t} \in [t_0, T(\varepsilon)]$, $\exists\, \rho = \rho_{\bar{t}}$ de modo que $\|\psi\| < \rho_{\bar{t}}$ e assim temos $\|x_t(\bar{t}, \psi)\| < \varepsilon$ e pelo Teorema 4.1 $\|x_{\bar{t}}(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq \bar{t} + T(\varepsilon)$.

Considere $\delta(\varepsilon, t_0) = \min\{\inf\{\rho_t;\, t \in [0, T(\varepsilon)]\}, \varepsilon\}$.

Note que $\inf\{\rho_t;\, t \in [0, T(\varepsilon)]\}$ existe pois a cada par (t_0, φ) a solução $x(t; t_0, \varphi)$ com $t \in [t_0, T(\varepsilon)]$ é limitada.

Então, dados $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$, $\exists\, \bar{\delta}(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que $\|\varphi\| < \bar{\delta}$ implica $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

A implicação $(Def.5.3) \implies (Def.5.1)$ é imediata.

Não é, em geral, verdade que $(Def.5.5) \Longrightarrow (Def.5.6)$, como podemos observar no exemplo $\dot{x} = -x^3$, dada $x(t) = \dfrac{x_0}{\sqrt{1+2x_0^2(t-t_0)}}$ solução de $\dot{x} = -x^3$. É claro que para toda condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\left| \frac{x_0}{\sqrt{1+2x_0^2(t-t_0)}} \right| \to 0 \text{ quando } t \to \infty$$

logo (Def. 5.5) está satisfeita. Porém (Def. 5.6) não está satisfeita, pois a função $e^{-\alpha(t-t_0)}|x_0|$ tende mais rapidamente a zero que $x(t)$, independentemente da condição inicial x_0.

Contudo, se $f(t,\varphi)$ é linear em φ, então a estabilidade assintótica uniforme implica a estabilidade exponencial. A prova desse fato pode ser encontrada em [2].

5.2 Segundo Método de Lyapunoff

Seja $g(t)$ uma função escalar contínua definida em $[a,b)$, $b \leq \infty$. A expressão

$$\overline{\lim}_{r\to 0^+} \frac{g(t+r)-g(t)}{r}$$

tem sempre significado podendo ser $\pm\infty$. Este limite é denotado por $\dot{g}(t)$. No caso em que $g(t)$ é diferenciável, $\dot{g}(t)$ coincide com a derivada de $g(t)$ no sentido usual.

Com relação à derivada de $g(t)$, tomada no sentido acima, temos os seguintes lemas que são fundamentais no Segundo Método de Lyapunoff.

Lema 5.1. *Seja $g(t)$ contínua com $\dot{g}(t) \leq 0 \quad (\dot{g}(t) \geq 0)$ para $a \leq t < b$. Então $g(t)$ é não-crescente (não-decrescente) em $[a,b)$.*

Demonstração. Consideremos o caso $\dot{g}(t) \leq 0$. (Análogo para o caso $\dot{g}(t) \geq 0$).

Mostremos que se para quaisquer t_1, $t_2 \in [a,b)$, com $t_1 \leq t_2$ $(a \leq t_1 \leq t_2 < b)$, então $g(t_2) \leq g(t_1)$. Basta provar que para todo $\varepsilon > 0$ vale $g(t_2) - g(t_1) \leq \varepsilon\,(t_2 - t_1)$.

Supomos que não seja verdade. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $G(t_2) > 0$, onde $G(t) = g(t) - g(t_1) - \varepsilon_0\,(t - t_1)$. Como $\dot{g}(t) \leq 0$, existe uma infinidade de pontos t em (t_1, t_2) de modo que

$$\frac{g(t)-g(t_1)}{t-t_1} \leq \varepsilon_0$$

o que implica $g(t) - g(t_1) \leq \varepsilon_0(t-t_1)$ ou seja, $g(t) - g(t_1) - \varepsilon_0(t-t_1) \leq 0$. Logo $G(t) \leq 0$. Então o conjunto $A = \{t \in (t_1,t_2); G(t) = 0\} \neq \emptyset$.

Para $\xi = \sup A$, temos $t_1 < \xi < t_2$ e $G(\xi) = 0$.

De fato, suponha que $\sup A \notin A$. Se $G(\xi) > 0$, como G é contínua existe uma vizinhança $V_r(\xi)$, $r > 0$, tal que $G(t) > 0$, $\forall t \in V_r(\xi)$. Logo, ξ não pode ser $\sup A$ e portanto $G(\xi) = 0$.

Também temos $G(t) > 0$ para $\xi < t \leq t_2$, pois G é contínua e $\xi = \sup A$ (se $\exists\, t' \in (\xi, t_2]$ tal que $G(t') = 0$ então $\exists\, \bar{\xi} > \xi$ tal que $G(\bar{\xi}) = 0$ o que é absurdo, pois $\xi = \sup A$). Por fim, $\dot{G}(\xi) \geq 0$ pois $\dot{G}(\xi) = \displaystyle\lim_{t\to\xi^+} \frac{G(t)-G(\xi)}{t-\xi} \geq 0$.

Como $G(t) = g(t) - g(t_1) - \varepsilon_0(t - t_1)$ segue que $\dot{G}(\xi) = \dot{g}(\xi) - \varepsilon_0 \geq 0$, logo

$$\dot{g}(\xi) \geq \varepsilon_0 > 0\,,$$

o que contraria a hipótese.

Portanto, g(t) é não-crescente.

□

Lema 5.2. *Seja $g(t)$ contínua com $\dot{g}(t) \leq -\sigma\,(\dot{g}(t) \geq \sigma)$, $\sigma > 0$ em $[a,b)$. Então, $g(t) \leq g(t_0) - \sigma(t - t_0) \quad (g(t) \geq g(t_0) + \sigma(t - t_0))$ para $a \leq t_0 \leq t < b$.*

Demonstração. Seja $h(t) = g(t) + \sigma t$, então $\dot{h}(t) = \dot{g}(t) + \sigma$. Como $\dot{h}(t) \leq 0$, então $h(t)$ é não-crescente. Pelo lema anterior, se $t_0 \leq t$ então $h(t_0) \geq h(t)$, o que implica $g(t_0) + \sigma t_0 \geq g(t) + \sigma t$, ou seja, $g(t_0) + \sigma(t_0 - t) \geq g(t)$, assim temos $g(t_0) \leq g(t_0) - \sigma(t - t_0)$. □

Definição 5.8. *Seja $v(t,\varphi)$ um **funcional** definido para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$, isto é, $v(t,\varphi)$ é uma aplicação contínua definida em $[0,\infty) \times C_H$ com valores em $\mathbb{R}$ e considere $v(t,0) = 0$, $\forall t \geq 0$. O funcional $v(t,\varphi)$ é chamado de **positivo-definido** se existir uma função escalar contínua $w(r)$, $r \geq 0$, tal que $v(t,\varphi) \geq w(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0$, para $\varphi \in C_H$ e $w(r) > 0$ com $r > 0$. O funcional $v(t,\varphi)$ é chamado **negativo-definido** se $-v(t,\varphi)$ for positivo-definido.*

Para todo funcional $v(t,\varphi)$, $t_0 \geq 0$, $\varphi \in C_H$, definimos

$$\dot{v}(t_0,\varphi) = \dot{v}(t, x_t(t_0,\varphi)) = \overline{\lim}_{r\to 0^+} \frac{1}{r}[v(t_0 + r, x_{t_0+r}(t_0,\varphi)) - v(t_0,\varphi)]$$

onde $x(t,t_0,\varphi)$ é solução de (4.3).

Teorema 5.2. *Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$ positivo-definido satisfazendo $\dot{v}(t,\varphi) \leq 0$. Então a solução $x = 0$ de (4.3) é estável.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $x = 0$ não seja estável. Ou seja, suponha que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existem φ e t_1 tais que $\|\varphi\| < \delta$, $t_1 > t_0$ e $\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\| = \varepsilon$.

Note que $v(t,\varphi)$ é um funcional linear contínuo em $[0,\infty) \times C_H$, então $v(t,\varphi)$ é contínuo em $(t_0, \varphi \equiv 0)$.

Assim, para $\omega(\varepsilon) > 0$, existe $\delta_0 = \delta_0(t_0,\varepsilon)$ tal que $\|(t_0,0) - (t_0,\psi)\| < \delta_0$, neste caso então $\|\psi\| < \delta_0$, implica

$$|v(t_0,0) - v(t_0,\psi)| < \omega(\varepsilon) \Rightarrow v(t_0,\psi) < \omega(\varepsilon). \tag{5.1}$$

O que implicaria

$$v(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)) \geq \omega(\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\|) = \omega(\varepsilon) > v(t_0,\varphi) = v(t_0, x_{t_0}(t_0,\varphi))$$

pela desigualdade (5.1). Ou seja,

$$v(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi)) > v(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)). \tag{5.2}$$

Como $v(t, \varphi)$ é não-crescente, pelo Lema 5.2 segue que se $t_0 < t_1$ então

$$v(t_0, x_{t_0}(t_0, \varphi)) > v(t_1, x_{t_1}(t_1, \varphi)),$$

o que contraria (5.2). □

Definição 5.9. *Dizemos que o funcional $v(t, \varphi)$ tem* ***extremo superior infinitésimo*** *se existir uma função escalar contínua $\xi(r)$, com $r > 0$, tal que $|v(t, \varphi)| \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$ e $\xi(0) = 0$.*

Teorema 5.3. *Suponhamos que exista um funcional $v(t, \varphi)$ positivo-definido, tendo extremo superior infinitésimo, com $\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$. Então a solução $x = 0$ de (4.3) é uniformemente estável.*

Demonstração. Por hipótese $v(t_0, \varphi) \leq \xi(\|\varphi\|), \forall t \geq 0$. Como $\xi(r)$ é contínua e $\xi(0) = 0$ segue que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|\varphi\| < \delta \Rightarrow |\xi(\|\varphi\|) - \xi(0)| < \varepsilon \Rightarrow |\xi(\|\varphi\|)| < \varepsilon.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $v(t_0, \varphi) \leq \xi(\|\varphi\|) < \omega(\varepsilon) = \varepsilon$. Segue o resultado da prova do Teorema anterior, com δ independente de t_0. □

Definição 5.10. *Seja a solução $x = 0$ de (4.3) assintoticamente estável. Dado $t_0 \geq 0$, o conjunto:*

$$D_{t_0} = \{\varphi \in C_H / x(t, t_0, \varphi) \to 0, \textit{ com } \quad t \to \infty\}$$

é chamado o ***centro de atração*** *do ponto de equilíbrio $x = 0$ em t_0.*

Observação 5.2. No caso de um sistema autônomo, isto é, $f(t, \varphi) = h(\varphi)$, o conjunto D_{t_0} não depende de t_0 e $D = D_{t_0}$ é simplesmente chamado o centro de atração.

Observação 5.3. No caso em que a origem $(x = 0)$ é globalmente assintoticamente estável temos que $D_{t_0} = C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ para $t_0 \geq 0$.

Teorema 5.4. *Suponhamos que exista um funcional $v(t, \varphi)$ positivo-definido, tendo extremo superior infinitésimo e com $\dot{v}(t, \varphi)$ negativo-definido. Então, a solução $x = 0$ de (4.3) é uniformemente assintoticamente estável.*

Demonstração. Como $\dot{v}(t, \varphi)$ é negativo-definido, então existe $\omega(r)$, $r > 0$ tal que $-\dot{v}(t, \varphi) \geq \omega(\|\varphi\|) \geq 0$. Logo, $\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$. Pelo teorema 5.3, temos a estabilidade uniforme.

Como $v(t,\varphi)$ é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo, segue que existem funções escalares contínuas $\omega(r)$ e $\xi(r)$, com $\omega(r) > 0$ para $r > 0$ e $\xi(0) = 0$, de modo que $\omega(\|\varphi\|) \leq v(t,\varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0$ e $\varphi \in C_H$.

Sejam H_1 e H_2 com $0 < H_1 < H_2 < H$ escolhidos de modo que $\xi(H_1) < \omega(H_2)$ pois, dado $0 < H_2 < H$, como ω é contínua em $[H_2, H]$, existe $\min\limits_{r\in[H_2,H]} \omega(r) = \alpha > 0$. Agora $\xi(r) \to 0$ quando $r \to 0$ pois ξ é contínua, então dado H_2, sempre existe α. Basta tomar $H_1 > 0$ tal que $\xi(H_1) < \alpha$.

Afirmamos que $t_0 \geq 0$ e $\varphi \in C_{H_1}$ implicam $x_t(t_0,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t_0 \leq t < t^+$. Suponhamos que isto não seja verdade. Então, existem t_1, t_2 tais que $t_0 < t_1 < t_2$ com $\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\| = H_1$ e $\|x_{t_2}(t_0,\varphi)\| = H_2$. Assim,

$$v(t_1, x_{t_1}(t_0,\varphi)) \leq \xi(\|x_{t_1}(t_0,\varphi)\|) = \xi(H_1) < \omega(H_2) = \omega(\|x_{t_2(t_0,\varphi)}\|) \leq v(t_2, x_{t_2}(t_0,\varphi)).$$

Pelo Lema 5.1 existe τ com $t_1 < \tau < t_2$ tal que $\dot{v}(\tau, x_\tau(t_0,\varphi)) > 0$, o que nos leva a uma contradição. Logo, $t_0 \geq 0$ e $\varphi \in C_H$ implicam $x_t(t_0,\varphi) \in C_{H_2}$ para $t_0 \leq t < t^+$ e $t^+ = \infty$. Como $x = 0$ é uniformemente estável, dado $\varepsilon > 0$ com $0 < \varepsilon < H_1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $\varphi \in C_\delta$ implica $x_t(t_0,\varphi) \in C_\varepsilon$ para $t_0 \leq t < \infty$.

Como $\dot{v}(t,\varphi)$ é negativo-definido, existe uma função escalar contínua $\sigma(r)$ com $\sigma(r) > 0$ para $r > 0$, com $\dot{v}(t,\varphi) \leq -\sigma(\|\varphi\|)$.

Sejam

$$0 < \gamma = \inf_{\delta \leq r \leq H_2} \sigma(r), \quad M > \sup_{0 \leq r \leq H_1} \xi|r| \qquad \text{e} \qquad T = \frac{M}{\gamma}.$$

Note que T não depende de t_0.

Afirmamos que $\varphi \in C_{H_1}$ implica $x_{\tilde{t}}(t_0,\varphi) \in C_\delta$ para algum instante $\tilde{t}$, $t_0 \leq \tilde{t} \leq t_0 + T$.

Novamente provemos por contradição. Suponhamos que isto não seja verdade. Então $\delta \leq \|x_t(t_0,\varphi)\| \leq H_2$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ e, portanto,

$$\dot{v}(t, x_t(t_0,\varphi)) \leq -\sigma(\|x_t(t_0,\varphi)\|) \leq -\inf_{\delta \leq r \leq H_2} (\sigma(r)) = -\gamma,$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Segue do Lema 5.2 que $v(t, x_t(t_0,\varphi)) \leq v(t_0,\varphi) - \gamma(t - t_0)$ para $0 \leq t_0 \leq t \leq t_0 + T$ e, consequentemente

$$v(t_0 + T, x_{t_0+T}(t_0,\varphi)) \leq v(t_0,\varphi) - \gamma(t_0 + T - t_0) \leq$$
$$\xi(\|\varphi\|) - \gamma T < M - \gamma T = 0$$

o que é impossível pois $v(t,\varphi)$ é positivo-definido $(v(t_0 + T, \varphi) \geq 0)$.

Então, $\varphi \in C_\rho$, com $\rho = H_1$ implica $x_{\tilde{t}}(t_0,\varphi) \in C_\delta$ para algum $\tilde{t}$, $\tilde{t} \in [t_0, t_0 + T]$ e pela estabilidade uniforme dado $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < H_1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $\varphi \in C_\delta$ implica $x_t(t_0,\varphi) \in C_\varepsilon$ para $t \geq t_0 + T$.

$\square$

Dados H_1 , H_2 como no Teorema 5.4, é possível verificar que C_{H_1} está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $t_0 \geq 0$.

Definição 5.11. *O funcional $v(t, \varphi)$ definido em $[0, \infty) \times C$, é dito* ***radialmente ilimitado*** *se existir uma função escalar contínua $\gamma(r)$ tal que $v(t, \varphi) \geq \gamma(\|\varphi\|)$ e $\gamma(r) \to \infty$ com $r \to \infty$.*

Teorema 5.5. *Suponhamos que exista um funcional $v(t, \varphi)$ positivo-definido, radialmente ilimitado, tendo extremo superior infinitésimo e com $\dot{v}(t, \varphi)$ negativo-definido. Então, a solução $x = 0$ de (4.3) é globalmente assintoticamente estável.*

Demonstração. Como $v(t, \varphi)$ é positivo-definido e tem extremo superior infinitésimo, existem funções escalares contínuas $\omega_1(r)$ e $\xi(r)$ com $\omega_1(r) > 0$ para $r > 0$ e $\xi(0) = 0$ de modo que $\omega_1(\|\varphi\|) \leq v(t, \varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$ para $t \geq 0$, $\varphi \in C_H$.

Como $v(t, \varphi)$ é radialmente ilimitada, existe uma função escalar contínua $\gamma(r)$ tal que $v(t, \varphi) \geq \gamma(\|\varphi\|)$ e $\gamma(r) \to \infty$ com $r \to \infty$.

Definindo $\omega(r) = \max\{\omega_1(r) \,;\, \gamma(r)\}$ temos que $\omega(r) > 0$ para $r > 0$, $\omega(r) \to \infty$ com $r \to \infty$ e $\omega(\|\varphi\|) \leq v(t, \varphi) \leq \xi(\|\varphi\|)$. Então, dada qualquer constante positiva H_1 , podemos encontrar H_2 tal que $\xi(H_1) < \omega(H_2)$, já que $\omega(r) \to \infty$ quando $r \to \infty$ e ω é uma função contínua.

Suponha que C_{H_1} não esteja contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $t_0 \geq 0$, ou seja, que a solução $x_t(t_0, \varphi)$ com $\|\varphi\| < H_1$ "escape" da região de atração, isto é, $\exists\, t_1$, t_2 com $t_1 < t_2$ tais que $\|x_{t_1}(t_0, \varphi)\| = H_1$ e $\|x_{t_2}(t_0, \varphi)\| = H_2$ com $H_1 < H_2$, então $v(t_1, x_{t_1}) \leq \xi(H_1) < \omega(H_2) = \omega(x_{t_2}) \leq v(t_2, x_{t_2})$. Logo, v é crescente, o que é um absurdo pois $\dot{v}$ é negativo-definido (v deveria ser não-crescente). Assim, C_{H_1} está contido no centro de atração do ponto de equilíbrio $x = 0$ para todo $t_0 \geq 0$. Portanto, $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

□

Os Teoremas 5.6 , 5.7 e o Corolário 5.1 dados a seguir são bastante convenientes nas aplicações como critérios de estabilidade.

Teorema 5.6. *Suponhamos que exista um funcional $v(t, \varphi)$ definido em $[0, \infty) \times C_H$ e satisfazendo as seguintes condições:*

1. *$\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq \omega(\varphi)$, com $t \geq 0$ e $\varphi \in C_H$ onde $\omega(\varphi)$ é funcional em C_H , com $\omega(0) = 0$ e $\gamma(r)$ é uma função escalar contínua em $[0, H)$ com $\gamma(r) > 0$ para $r > 0$;*

2. *$\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$ com $t \geq 0$ e $\varphi \in C_H$.*

Então a solução $x = 0$ de (4.3) é uniformemente estável.

Demonstração. Dado ε, com $0 < \varepsilon < H_1$, seja $\delta = \delta(\varepsilon)$, com $0 < \delta < \varepsilon$ escolhido de modo que $\omega(\varphi) < \gamma(\varepsilon)$ para $\varphi \in C_\delta$. Essa desigualdade ocorre pela continuidade das funções ω e γ e, além do mais, $\omega(0) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ sempre conseguimos encontrar $\gamma(\varepsilon)$ de forma que essa desigualdade ocorra. Então $t_0 \geq 0$ e $\varphi \in C_\delta$ ($\|\varphi\| < \delta$) implicam $v(t_0, \varphi) \leq \omega(\varphi) < \gamma(\varepsilon)$. Do Lema 5.1 e hipótese (b), segue que $v(t, x_t(t_0, \varphi))$ é não crescente, então $v(t, x_t(t_0, \varphi)) \leq v(t_0, \varphi) < \gamma(\varepsilon)$ para $t \geq t_0$.

Afirmamos que $x_t(t_0, \varphi) \in C_\varepsilon$ para $t \geq t_0$, ou seja, $\|x_t(t_0, \varphi)\| < \varepsilon$, para $t \geq t_0$.

Suponha que esta afirmação não ocorra, isto é, existe um $\bar{t}$ com $\bar{t} \geq t_0$ tal que $|x_{\bar{t}}(t_0, \varphi)| = \varepsilon$. Assim $v(\bar{t}, x_{\bar{t}}(t_0, \varphi)) \geq \gamma(|x(\bar{t}, t_0, \varphi)|) = \gamma(\varepsilon)$, o que é uma contradição. Logo, $\varphi \in C_\delta$ com $t_0 \geq 0$ implicam $|x(t, t_0, \varphi)| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$. Portanto $x = 0$ é uniformemente estável.

□

Exemplo 5.2. A solução nula da equação $\dot{x} = -x(t)g(t, x_t)$, onde $g(t, \varphi) \geq 0$, é uniformemente estável.

Para isto considere o seguinte funcional:

$$v(t, \varphi) = [\varphi(0)]^2 \,, \text{com} \quad \varphi \in C_H \,.$$

Devemos mostrar as hipóteses do Teorema 5.6:

1. Afirmamos que $\dot{v}(t, \varphi) \leq 0$

   De fato, $v(t, x_t) = [x_t(0)]^2 = [x(t + 0)]^2 = [x(t)]^2$.

   Assim, $\dot{v}(t, x_t) = 2.x(t).\dot{x}(t) = 2.x(t)[-x(t).g(t, x_t)] = -2.[x(t)]^2.g(t, x_t) \leq 0$.

   Portanto, $\dot{v}(t, x_t) \leq 0$.

2. Provemos que $\exists\, \gamma : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ onde $\gamma(r) > 0$ para $r > 0$ e $\exists \quad \omega(\varphi)\,; \quad \omega : C_H \to \mathbb{R}$ onde $\omega(0) = 0$ tal que $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq \omega(\varphi)$.

Basta definir $\gamma(r) = r^2$, $\forall\, r$. Mostremos que $[\varphi(0)]^2 \leq \omega(\varphi)$. De fato, considere $\omega(\varphi) = \|\varphi\|^2$. Como $\|\varphi\| = \sup\limits_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)| \geq |\varphi(0)|$, temos $\|\varphi\|^2 \leq |\varphi(0)|^2$. Logo, $0 \leq [\varphi(0)]^2 \leq \|\varphi\|^2$. Pelo Teorema 5.6 concluimos que $x = 0$ é uniformemente estável.

Teorema 5.7. *Suponhamos que exista um funcional $v(t, \varphi)$ definido em $[0, \infty) \times C_H$ e satisfazendo a condição (1) do Teorema 5.6 . Suponhamos ainda que exista uma função escalar $\Gamma(r)$, $r \geq 0$, positiva e contínua para $r > 0$ tal que $\dot{v}(t, x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$ para toda solução $x(t)$ de (4.3). Suponhamos que $f(t, \varphi)$ seja limitada em $[0, \infty) \times C_H$. Então a solução $x = 0$ de (4.3) é assintoticamente estável.*

Demonstração. Nesta prova vamos considerar por conveniência $|x| = \sup\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Sejam H_1, H_2 tais que $0 < H_1 < H_2 < H$ escolhidos de modo que se $\varphi \in C_{H_1}$ então $\omega(\varphi) < \gamma(H_2)$ (pela continuidade de ω e γ).

Do mesmo modo que na prova do teorema anterior, segue que se $\varphi \in C_{H_1}$ então $x_t(t_0, \varphi) \in C_{H_2}$ para $t \geq t_0 \geq 0$. Assim, pelo Teorema 5.6, x é uniformemente estável. Logo, x é estável.

Para completar a prova é suficiente mostrar que se $\varphi \in C_{H_1}$ e $t_0 \geq 0$ então $x(t; t_0, \varphi) \to 0$ com $t \to \infty$.

Vamos provar por contradição. Suponhamos que existam $t_0 \geq 0$, $\varphi \in C_{H_1}$ de modo que $x(t; t_0, \varphi)$ não tenda para zero com $t \to \infty$. Então, existe uma sequência crescente $\{t_m\}$ com $t_{m+1} - t_m > 2$ e $\eta > 0$ de modo que $|x(t_m; t_0, \varphi)| > \eta$ para todo m.

Garantimos que existe $\beta > 0$, não dependendo de m, tal que $|x(t; t_0, \varphi)| > \dfrac{\eta}{2}$ para $|t_m - t| \leq \beta$. Com efeito, seja $\sigma > 0$ satisfazendo $|f(t, \varphi)| \leq \sigma$ para todo $t \geq 0$ e para $\varphi \in C_H$. Para cada t_m, considere o intervalo $(t_m - 1, t_m + 1)$ e vamos aplicar o Teorema do Valor Médio em cada componente de $x(t; t_0, \varphi)$, ou seja, para $t \in (t_m - 1, t_m + 1)$ temos

$$|x_j(t_m; t_0, \varphi) - x_j(t; t_0, \varphi)| = |\dot{x}(\xi; t_0, \varphi)(t - t_m)| = |f_j(\xi; x_\xi)|.|t - t_m| \leq \sigma |t - t_m|\,,$$

onde ξ é um número entre t_m e t.

Usando $|a - b| \geq |a| - |b|$, tem-se

$$|x_j(t_m; t_0, \varphi)| - |x_j(t; t_0, \varphi)| \leq \sigma |t - t_m| \Rightarrow |x_j(t_m; t_0, \varphi)| - \sigma |t - t_m| \leq |x_j(t; t_0, \varphi)|\,.$$

Assim,

$$|x_j(t; t_0, \varphi)| \geq |x_j(t_m; t_0, \varphi)| - \sigma |t - t_m| > \eta - \sigma |t - t_m|\,.$$

Agora, tomando $\beta = \min\left\{\dfrac{\eta}{3\sigma}, 1\right\}$, temos

$$|x_j(t; t_0, \varphi)| \geq |x_j(t_m; t_0, \varphi)| - \sigma |t - t_m| > \eta - \sigma \frac{\eta}{3\sigma} = \eta - \frac{\eta}{3} = \frac{2}{3}\eta > \frac{\eta}{2}\,,$$

para $|t - t_m| \leq \beta$. Observamos que β não depende de m. Então, $\dfrac{\eta}{2} \leq |x(t; t_0, \varphi)| \leq H_2$ para $|t - t_m| \leq \beta$ e isto acarreta que para $|t - t_m| \leq \beta$ temos

$$\begin{aligned}\dot{v}(t, x_t(t_0, \varphi)) \leq -\Gamma(|x(t; t_0, \varphi)|) &\leq \sup_{t_m - \beta \leq s \leq t_m + \beta} (\{-\Gamma(|x(s; t_0, \varphi)|)\}) \\ &\leq \sup_{\frac{\eta}{2} \leq r \leq H_2} \{-\Gamma(r)\} = -q < 0.\end{aligned}$$

Pelos Lemas 5.1 e 5.2, e o fato de que $\beta \leq 1$ e $t_{m+1} - t_m > 2$, segue que, para todo natural N temos

$$\begin{aligned}&v(t_N + \beta, x_{t_N + \beta}(t_0, \varphi)) - v(t_1 - \beta, x_{t_1 - \beta}(t_0, \varphi)) \leq \\ &\qquad \sum_{m=1}^{N} [v(t_m + \beta, x_{t_m + \beta}(t_0, \varphi)) - v(t_m - \beta, x_{t_m - \beta}(t_0, \varphi))] \leq -2\beta q N\end{aligned}$$

e, por conseguinte, $v(t_N + \beta, x_{t_N + \beta}(t_0, \varphi)) \to -\infty$ com $N \to \infty$, o que não é possível, pois $v(t, \varphi) \geq 0$. Esta contradição prova o teorema.

□

Observação 5.4. Da prova anterior segue que, nas condições do Teorema 5.7, se H_1, H_2 com $0 < H_1 < H_2 < H$, são escolhidos de modo que $\varphi \in C_{H_1}$ implique $\omega(\varphi) < \gamma(H_2)$, então C_{H_1} está contido no centro de atração de $x = 0$ para todo $t_0 \geq 0$.

O exemplo seguinte é uma aplicação do Teorema 5.7 .

Exemplo 5.3. Seja $b(t)$ uma função escalar contínua de modo que

$$|b(\theta)| \leq \sigma \text{ e } 0 \leq \tau = h < \infty \text{ com } t \geq 0\,.$$

Sejam H e a escolhidos de modo que $\sigma H < a$, com H e a sendo reais positivos. Então a solução $x = 0$ da equação

$$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-\tau)x(t)$$

é assintoticamente estável e C_H está contido no centro de atração para todo $t_0 \geq 0$.

Note que $\dot{x}(t) = -x(t).[a-b(t).x_t(-\tau)]$ (pelas hipóteses do Exemplo 5.2). Mostremos que $g(t, x_t) = a - b(t)x_t(-\tau) > 0$.

De fato, $|-b(t).x_t(-\tau)| < \sigma H$, note que $|x_t(-\tau)| < H$, $\forall t$, pois se $\|\varphi\| < H$, então:

1. Se $x(t) > 0 \Rightarrow \dot{x}(t) < 0$, então $x(t) < H$.

2. Se $x(t) < 0 \Rightarrow \dot{x}(t) > 0$, então $|x(t)| < H$.

$\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t)x(t-\tau)x(t) \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = -x(t)(a - b(t)x_t(-\tau))$

I) $x = 0$ é uniformemente estável pelo Teorema 5.6, pois:

i) $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq \omega(\varphi)$

Basta tomar $\gamma(r) = r^2$, $\forall r$, $v(t, \varphi) = [\varphi(0)]^2$ e $\omega(\varphi) = \|\varphi\|^2$.

Logo, $[\varphi(0)]^2 \leq [\varphi(0)]^2 \leq \|\varphi\|^2$.

ii) $\dot{v}(t, \varphi) = 0 \leq 0$ com $\varphi \in C_H$, $\forall t$.

Assim, podemos concluir que $\forall \varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < H_1 < H$, $\exists \delta$, $0 < \delta < \varepsilon < H$ tal que se $\varphi \in C_\delta$ então $|x(t; t_0, \varphi)| < \varepsilon < H$, $\forall t \geq t_0$.

II) Note também que

$$|f(t,\varphi)| = |-\varphi(0)(a - b(t)\varphi(-\tau))| = |-\varphi(0)||a - b(t)\varphi(-\tau)| \leq$$
$$H(|a| + |-b(t)||\varphi(-\tau)|) \leq H(a - \sigma H)\,.$$

Portanto, $f(t, \varphi)$ é limitada.

III) Afirmação: $\dot{v}(t, x_t) \leq -\gamma(|x(t)|)$, $\forall x(t)$.

Defina $\gamma(r) = 2r^2(a - \sigma H)$ (pois por hipótese $a > \sigma H$ e γ é contínua) e também $\dot{v}(t, x_t) = -2x(t)^2(a - b(t).x_t(-\tau))$.

Basta mostrar que $|\dot{v}| \geq \gamma$.

$$|\dot{v}(t,x_t)| = |-2x(t)^2(a - b(t).x_t(-\tau))| = |-2x(t)^2||a - b(t).x_t(-\tau)| \geq$$
$$|-2x(t)^2|(|a| - |b(t)||x_t(-\tau)|) \geq |2x(t)^2|.(a - \sigma H) = \gamma(|x(t)|)$$

Concluimos que $|\dot{v}| \geq \gamma$. Logo, pode ocorrer $\dot{v} \geq \gamma$ ou $\dot{v} \leq -\gamma$.

Mostremos que $\dot{v}(t,x_t) \leq 0$. Para isso, basta provar que $a - b(t).x_t(-\tau) > 0$. De fato, pois $|b(t).x_t(-\tau)| \leq \sigma H < a$, $\forall\, t \geq 0$. Logo, o sinal de $a - b(t).x_t(-\tau)$ é igual ao sinal de a. Logo, $x = 0$ é assintoticamente estável.

Corolário 5.1. *Suponhamos que exista um funcional $v(t,\varphi)$ definido em $[0,\infty) \times C$ e satisfazendo as seguintes hipóteses:*

1. $\gamma(|\varphi(0)|) \leq v(t,\varphi) \leq \omega(\varphi)$, $t \geq 0$, $\varphi \in C$, *onde $\omega(\varphi)$ é um funcional, limitado sobre toda bola de C, com $\omega(0) = 0$ e $\gamma(r)$ é uma função escalar contínua para $r \geq 0$, com $\gamma(r) > 0$ para $r > 0$ e $\gamma(r) \to \infty$,;*

2. *Existe função escalar contínua $\Gamma(r)$, $r \geq 0$, positiva e contínua para $r > 0$ tal que $\dot{v}(t,x_t) \leq -\Gamma(|x(t)|)$ para toda solução $x(t)$ de (4.3);*

3. *$f(t,\varphi)$ é limitada em $[0,\infty) \times C_H$ para todo $H < \infty$.*

Então a solução $x = 0$ de (4.3) é globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Basta mostrar que

$$C_{H_1} \subset D_{t_0} = \{\varphi \in C_H; x(t;t_0,\varphi) \to 0 \text{ com } t \to \infty\}, \quad \forall\, t_0 \geq 0, \quad \forall\, H_1 < \infty.$$

Como $\gamma(r) \to \infty$ com $r \to \infty$ e $\omega : C_H \to \mathbb{R}$, com $\omega(\varphi)$ funcional limitado sobre toda bola, segue que para todo H_1, existe H_2 tal que $\varphi \in C_{H_1} \Rightarrow \omega(\varphi) < \gamma(H_2)$. Assim, pela observação após o Teorema 5.7, segue que C_{H_1} está contido no centro de atração da origem.

□

Exemplo 5.4. Seja $b(t)$ função escalar contínua para $t \geq 0$ e sejam a e σ constantes positivas de modo que $a \geq |b(t)| + \sigma$ para todo $t \geq 0$. Então, a solução $x = 0$ da equação $\dot{x}(t) = -ax(t) + b(t).x(t-h)$, com $0 \leq h < \infty$ é globalmente assintoticamente estável.

Mostremos que as hipóteses do Corolário 5.1 estão satisfeitas:

Desde que $f(t,\varphi) = -a\varphi(0) + b(t).\varphi(-h)$ segue que o item (3) do corolário fica satisfeito, pois:

$$|-a\varphi(0) + b(t)\varphi(-h)| \leq |-a\varphi(0)| + |b(t)\varphi(-h)| = |-a||\varphi(0)| + |b(t)||\varphi(-h)| \leq$$
$$aH + (a - \sigma)H = H(2a - \sigma)$$

e $H(2a-\sigma) > 0$ pois $a-\sigma \geq 0 \Rightarrow 2a > a \geq \sigma \Rightarrow 2a-\sigma > 0$.

Considere $v(\varphi) = \omega(\varphi) = [\varphi(0)]^2 + a\displaystyle\int_{-h}^{0} \varphi^2(\theta)d\theta$ e $\gamma(r) = r^2$ então a condição (1) do Corolário está satisfeita.

Mostremos que a condição (2) também está satisfeita.

Seja $x(t)$ uma solução da equação acima, então

$$v(x_t) = x^2(t) + \int_{-h}^{0} x^2(t+\theta)d\theta = x^2(t) + a\int_{t-h}^{t} x^2(s)ds\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\dot{v}(x_t) = 2x(t).\dot{x}(t) + a[x^2(t) - x^2(t-h)] = \\
2x(t)[-ax(t) + b(t).x(t-h)] + a[x^2(t) - x^2(t-h)] = \\
-2ax^2(t) + 2b(t)x(t-h) + ax^2(t) - ax^2(t-h) = \\
-ax^2(t) - ax^2(t-h) + 2b(t).x(t)x(t-h) \overset{(a)}{\leq} \\
-ax^2(t) - ax^2(t-h) + |b(t)|[x^2(t) + x^2(t-h)] = \\
-a[x^2(t) + x^2(t-h)] + |b(t)|[x^2(t) + x^2(t-h)] = \\
(-a + |b(t)|)(x^2(t) + x^2(t-h)) \leq \\
-\sigma[x^2(t) + x^2(t-h)] \leq -\sigma.x^2(t).
\end{aligned}$$

De fato a desigualdade (a) acontece pois:

i) Note que para t tal que $b(t) \geq 0 \Rightarrow |b(t)| = b(t)$.

Temos

$$\begin{aligned}
[x(t) - x(t-h)]^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(t) - 2x(t)x(t-h) + x^2(t-h) \geq 0 \Rightarrow \\
x^2(t) + x^2(t-h) \geq 2x(t)x(t-h)\,.
\end{aligned}$$

Assim $2b(t)x(t)x(t-h) = b(t)[2x(t)x(t-h)] \leq |b(t)|[x^2(t) + x^2(t-h)]$.

ii) E para t tal que $b(t) < 0 \Rightarrow |b(t)| = -b(t)$.

Temos

$$\begin{aligned}
[x(t) + x(t-h)]^2 \geq 0 \Rightarrow x^2(t) + 2x(t)x(t-h) + x^2(t-h) \geq 0 \Rightarrow \\
x^2(t) + x^2(t-h) \geq -2x(t)x(t-h)\,.
\end{aligned}$$

Assim $2b(t)x(t)x(t-h) = -b(t)[-2x(t)x(t-h)] \leq |b(t)|[x^2(t) + x^2(t-h)]$.

Agora, basta tomar $\Gamma(r) = \sigma r^2$.

Portanto, $x = 0$ é globalmente assintoticamente estável.

6 Conclusão

Com este trabalho percebemos algumas diferenças entre as equações diferenciais ordinárias e as equações diferenciais com retardamento. Podemos citar o caso do espaço das condições iniciais dado pelo $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ no caso das EDRs, que é um espaço de dimensão infinita, enquanto das EDOs é $\mathbb{R}^n$, espaço de dimensão finita. Vimos também que as soluções distintas de uma mesma EDR podem, diferentemente do caso ordinário, se interceptarem em infinitos pontos. Porém, pelo Teorema de Existência e Unicidade para EDR, se elas se interceptarem em qualquer intervalo de comprimento igual ao retardo elas serão as mesmas.

Embora não tenhamos realizado as aplicações das EDRs, foi observado durante as discussões que o retardo é essencial para descrever fenômenos que levam em conta informações do passado, como por exemplo, tempo de gestação no estudo de dinâmica populacional.

No trabalho do Professor Nelson, também são abordados os sistemas autônomos e sistemas lineares perturbados com respeito à estabilidade. Esses temas não foram desenvolvidos neste trabalho, porém o leitor interessado em dar continuidade ao estudo do trabalho do Prof. Nelson pode fazê-lo, consultando [8].

Referências

[1] Badin, M. G. Um olhar sobre as contribuições do professor nelson onuchic para o desenvolvimento da matemática no brasil. Master's thesis, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro–SP, 2006.

[2] Halanay, A. *Differential equations: Stability, oscillations, time lags.* Academic Press, New York, 1966.

[3] Hale, J. K. *Ordinary differential equations*, second ed. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Huntington, N.Y., 1980.

[4] Lima, E. L. *Espaços métricos*, vol. 4 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

[5] Oliveira, C. G. *Introdução à Análise Funcional*, 2ª ed. IMPA, 2009.

[6] Onuchic, N. *Estruturas Uniformes sobre P-Espaços e Aplicaç oes da Teoria destes Espaços em Topologia Geral.* PhD thesis, FFCL – USP, 1957.

[7] Onuchic, N. On the Nachbin uniform structure. *Proc. Amer. Math. Soc. 11* (1960), 177–179.

[8] Onuchic, N. Equações diferenciais com retardamento. Tech. rep., ICMSC-USP, São Carlos, 1971.

[9] Perko, L. *Differential equations and dynamical systems*, second ed., vol. 7 of *Texts in Applied Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1996.