



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**

**MÁRCIO SOARES JÚNIOR**

**MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA**  
**A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES**

Guaratinguetá  
2012

MÁRCIO SOARES JÚNIOR

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

Trabalho de Graduação  
apresentado ao Conselho de Curso  
de Graduação em Licenciatura em  
Matemática da Faculdade de  
Engenharia do Campus de  
Guaratinguetá, Universidade  
Estadual Paulista, como parte dos  
requisitos para obtenção do  
diploma de Graduação em  
Licenciatura em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Alexandre de Oliveira

Guaratinguetá  
2012

S676m Soares Júnior, Márcio  
Modelagem Matemática Aplicada a Precificação de Opções /  
Márcio Soares Júnior – Guaratinguetá: [s.n], 2012.  
43 f.: il.  
Bibliografia: f. 42-43

Trabalho de Graduação em Licenciatura em Matemática –  
Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de  
Guaratinguetá, 2012.  
Orientador: Prof. Dr. Francisco Alexandre de Oliveira

1. Matemática    2. Modelagem de dados



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

MÁRCIO SOARES JÚNIOR

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO  
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE  
"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"  
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA.

Prof.ª. Dr.ª. Ana Paula Marins Chiaradia

Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Francisco Alexandre de Oliveira

Orientador/UNESP-FEG

Prof.ª. Dr.ª. Ana Paula Marins Chiaradia

UNESP-FEG

Prof. Dr. José Roberto Dale Luche

UNESP-FEG

Dezembro de 2012.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho a todos aqueles que acreditam que a educação é o caminho mais rápido para se alcançar um mundo melhor.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a DEUS, fonte de todo conhecimento e esperança.

A minha família, em especial a minha mãe, Janete Regina de Toledo, pelas orações e por sempre acreditar e apoiar-me na busca de mais um ideal.

A minha noiva, Monique Silva do Nascimento pelas orações, compreensão, paciência e apoio nos momentos mais difíceis.

Aos amigos da UNESP, em especial Higor Maciel Martins, por esses anos de lutas e conquistas.

Ao meu orientador, Professor Doutor Francisco Alexandre de Oliveira, minha inspiração como educador, por todo o apoio durante a elaboração deste trabalho sempre com paciência e prontidão.

“Os números governam o mundo”.

Platão

SOARES JÚNIOR, M. **Modelagem Matemática Aplicada a Precificação de Opções**. 2012. 43 f. Trabalho de Graduação (Licenciatura em Matemática) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

## RESUMO

Os modelos matemáticos são fundamentais para se determinar os preços teóricos de opções e analisar se estão superestimados ou subestimados. Essas informações influenciam fortemente nas operações realizadas pelo investidor. Logo, é necessário que o modelo empregado apresente alto grau de confiabilidade e seja condizente com a realidade do investimento ao qual ele se destina. Neste sentido, esse Trabalho de Conclusão de Curso tem como objetivo aplicar as etapas da Modelagem Matemática na Precificação de Opções, para tomada de decisões no investimento de uma usina hidrelétrica. Foi utilizada a Simulação de Monte Carlo, com Método Hipercubo Latino, para determinação da volatilidade dos retornos do projeto. Com a finalidade de validar o modelo proposto, compararam-se os resultados encontrados pelo Modelo Binomial, o qual se caracteriza por ser um dos modelos mais utilizados nesse tipo de investimento. Os resultados apurados reforçam as hipóteses de que a Modelagem Matemática com o Modelo Binomial é fundamental para tomada de decisão de investimento na Usina Hidrelétrica.

**Palavras-chave:** Opções reais, Modelagem Matemática, Simulação de Monte Carlo LHS



Soares Júnior, M. **Applied Mathematical Modeling Pricing Options**. 2012. 43 f. Graduate Work (Degree in Matemática) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

## **ABSTRACT**

The mathematical models are critical to determine theoretical prices of options and analyze whether they are overrated or underrated. This information strongly influence in operations carried out by the investor. Therefore, it is necessary that the employee model present high degree of reliability and be consistent with the reality of investment to which it is intended. In this sense, this dissertation aims to apply the steps of mathematical modeling in the Pricing of options for decision making in the investment of a hydroelectric power plant. Was used a Monte Carlo simulation, with the Latin Hypercube Method, to determine the volatility of returns of the project. In order to validate the proposed model, compared to the results found by the Binomial Model, which is one of the models most used in this type of investment. The results reinforce the hypothesis that the mathematical modeling with the Binomial Model is critical to investment decision-making in hydroelectric power.

**Keywords:** Real Options, Mathematical Modeling, Monte Carlo Simulation Latin Hypercube Sampling

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| FIGURA 1 – Esquema Binomial .....                                                                                  | 18 |
| FIGURA 2 – Etapas sugeridas para se realizar um processo de Modelagem Matemática .....                             | 23 |
| FIGURA 3 – Histograma dos retornos da BB Small Cap .....                                                           | 25 |
| FIGURA 4 – Fluxo de caixa para os primeiros cinco anos .....                                                       | 30 |
| FIGURA 5 – Fluxo de caixa para os trinta e cinco anos .....                                                        | 30 |
| FIGURA 6 – Esquema da simulação de Monte Carlo .....                                                               | 32 |
| FIGURA 7 – Combinação de 50 valores de duas variáveis aleatórias pelo método de amostragem aleatória Simples ..... | 34 |
| FIGURA 8 – Combinação de 50 valores de duas variáveis aleatórias pelo método de Hipercubo Latino .....             | 34 |
| FIGURA 9 – Distribuição do retorno do projeto .....                                                                | 35 |
| FIGURA 10 – Árvore de eventos .....                                                                                | 36 |
| FIGURA 11 – Step 4 da árvore de decisões .....                                                                     | 37 |

## **LISTA DE TABELAS**

TABELA 1 – Variáveis no Projeto de Usina .....28

TABELA 2 – Parâmetros do Modelo Binomial .....36

## SUMÁRIO

|                                                                                        |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO .....</b>                                                     | <b>13</b> |
| 1.1 Considerações Iniciais.....                                                        | 13        |
| 1.2 Objetivo Geral.....                                                                | 13        |
| 1.2.1 Objetivo Específico.....                                                         | 14        |
| 1.3 Método de Pesquisa .....                                                           | 14        |
| 1.4 Estrutura do Trabalho.....                                                         | 14        |
| <br><b>CAPÍTULO 2 OPÇÕES REAIS .....</b>                                               | <b>15</b> |
| 2.1 Considerações Iniciais.....                                                        | 15        |
| 2.2 Definições de Opções.....                                                          | 15        |
| 2.3 Precificação de Opções .....                                                       | 16        |
| 2.3.1 Modelo Binomial .....                                                            | 16        |
| 2.4 Considerações Finais.....                                                          | 18        |
| <br><b>CAPÍTULO 3 MODELAGEM MATEMÁTICA .....</b>                                       | <b>19</b> |
| 3.1 Introdução .....                                                                   | 19        |
| 3.2 Modelos Matemáticos .....                                                          | 19        |
| 3.3 Modelagens Matemática .....                                                        | 22        |
| 3.4 Etapas da Modelagem Matemática .....                                               | 23        |
| 3.5 Exemplos das etapas da Modelagens Matemática .....                                 | 24        |
| 3.6 Considerações Finais.....                                                          | 26        |
| <br><b>CAPÍTULO 4 MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A PRECIFICAÇÃO DE<br/>OPÇÕES .....</b> | <b>27</b> |
| 4.1 Considerações iniciais.....                                                        | 27        |
| 4.2 Definição do Problema.....                                                         | 28        |

|                                                                                     |        |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 4.3 Simplificação e formulação de hipóteses.....                                    | 28     |
| 4.4 Dedução do problema matemático.....                                             | 29     |
| 4.4.1 Simulação de Monte Carlo e Amostragem Hypercubo Latino .....                  | 31     |
| 4.4.1.1 Amostragem estratificada – aplicação do método hypercubo latino (LHS) ..... | 33     |
| 4.4.1.2 Formulação do problema Matemático.....                                      | 34     |
| 4.5 Resolução do problema matemático .....                                          | 35     |
| 4.6 Validação .....                                                                 | 39     |
| 4.7 Aplicação do Modelo .....                                                       | 39     |
| <br><b>CAPÍTULO 5 CONCLUSÕES</b> .....                                              | <br>40 |
| 5.1 Conclusões .....                                                                | 40     |
| 5.2 Sugestões para Futuros Trabalhos.....                                           | 40     |
| 5.3 Considerações Finais.....                                                       | 41     |
| <br><b>REFERÊNCIAS</b> .....                                                        | <br>42 |

# **CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO**

## **1.1 Considerações Iniciais**

A modelagem matemática constitui uma abordagem importante no processo de avaliação e tomada de decisão. Tal abordagem não consiste somente em transformar em variáveis as informações contidas em um problema. Uma das principais características da modelagem matemática é estabelecer um processo para obter uma descrição, através de símbolos matemáticos, de um determinado fenômeno. Ao final, é obtido um modelo válido para obter informações sobre o fenômeno.

Um fenômeno cada vez mais crescente no mercado de energia brasileira é a participação de capital privado no segmento de geração. Isto não é só desejado mas estimulado pelos dirigentes do setor. No entanto, para tais investidores participarem do mercado é necessário que o retorno seja, no mínimo, igual à expectativa do investidor. Neste contexto, as abordagens por Teoria das Opções assumem um papel importante. A opção real dá ao seu detentor o direito, mas não a obrigação. Deste modo, o investidor possui o direito, mas não a obrigação de investir em mercados de energia, podendo aplicar o seu dinheiro em qualquer outro investimento.

Na Teoria de Opções, existem diversas técnicas para a sua avaliação, as mais utilizadas são: Método de Black & Scholes e Binomial. O método de Black & Scholes não será utilizado neste trabalho, pois se aplica em ativos financeiros de maior liquidez. No entanto, independente do método escolhido, é necessário definir uma abordagem para modelagem matemática para precificação das opções. A proposta deste trabalho é utilizar as etapas da modelagem matemática, proposta por FABRINI (2011), para precificar as opções que modelam o investimento na usina hidrelétrica com os dados adaptados de NORONHA (2006).

A contribuição deste trabalho, dentre os já publicados com este tema, esta na utilização, em uma das etapas, da amostragem de baixa discrepância ou *Latin Hypercube Sampling (LHS)* para determinar a volatilidade do fluxo de caixa, que é uma variável intermediária na precificação de opções.

## **1.2 Objetivo Geral**

O objetivo geral deste trabalho consiste em aplicar as etapas da modelagem matemática para precificação de opções para tomada de decisão em investimentos.

### **1.2.1 Objetivos específicos**

- Aplicar a modelagem matemática na teoria de Precificação de Opções para auxiliar a decisão de investimento em usina hidrelétrica.
- Utilizar a simulação de Monte Carlo, com o método Hipercubo Latino, para determinação da volatilidade dos retornos do projeto.

## **1.3 Método de Pesquisa**

A pesquisa é de natureza aplicada e exploratória. O método de pesquisa utilizado é a Simulação. A tendência em classificar a pesquisa como Estudo de caso está descartado, visto que a teoria de opções reais aplicada ao setor de energia não é um assunto inédito.

A revisão bibliográfica sobre modelagem matemática foi à primeira etapa da pesquisa. A definição e escolha da Teoria das Opções Reais como tema de aplicação, constitui a segunda etapa, uma vez que a maioria dos trabalhos sobre opções reais não apresentam uma preocupação com este enfoque. Foram pesquisados vários trabalhos publicados, para melhor entendimento da avaliação de investimentos através da Teoria de Opções. Finalmente, a aplicação no setor de energia exemplifica como esta abordagem metodológica funciona na prática.

## **1.4 Estrutura do Trabalho**

A pesquisa está dividida em cinco capítulos. No primeiro capítulo são apresentadas a introdução, objetivos e a justificativa para o desenvolvimento do trabalho. A abordagem a Teoria das Opções é realizada no segundo capítulo, destacando os tipos de opções e o tratamento matemático das variáveis. A questão da modelagem matemática é apresentada no terceiro capítulo. A questão da precificação das Opções e os modelos são apresentados no quarto capítulo. Neste capítulo, a modelagem matemática para a precificação de opções pelo método binomial é utilizada para auxiliar a decisão de investir em uma usina de geração hidrelétrica, sob condições de incerteza no preço da energia e na taxa de juros. As conclusões e sugestões para futuros trabalhos são apresentadas no quinto capítulo.

## **CAPÍTULO 2 – OPÇÕES REAIS**

### **2.1 Considerações Iniciais**

Este capítulo apresenta as definições básicas da teoria das opções. Além disso, serão apresentadas as metodologias de precificação das opções através do modelo de árvores binomiais.

### **2.2 Definição de Opções**

Opções são contratos de compra ou venda de ativos, cujo preço depende do valor do ativo objeto. A opção de compra ou venda pode ser do tipo americana ou européia. As opções européias só podem ser exercidas na data de expiração da opção, enquanto que as opções americanas podem ser exercidas em qualquer instante durante a vida da opção.

Para FABRINI (2011), a metodologia de Opções Reais é uma abordagem sistemática e de solução integrada, que utiliza a teoria financeira, análise econômica de investimentos, ciência de administração e de decisões, estatística e modelagem econométrica, na aplicação da teoria de opções para avaliação/valoração de ativos físicos reais, em oposição de ativos financeiros. Toda a análise de Opções Reais está inserida em um ambiente de negócios incerto e dinâmico, no qual as decisões são flexíveis, no contexto de tomada de decisões estratégicas de investimentos de capital, na valorização das oportunidades de investimento e nas projeções de capital (DOMINGUES, 2003).

As opções podem ser classificadas em dois tipos: Opções de compra (*call option*) e opções venda (*put option*).

Uma opção de compra é um direito que o detentor do contrato tem de comprar o ativo objeto por um preço do exercício preestabelecido, em uma data futura determinada pela equação:

$$C_t = \text{Max}(S_t - K; 0) \quad (2.1)$$

sendo  $C_t$  o valor da opção,  $t$  é a data de vencimento,  $S_t$  é o preço do ativo objeto e  $K$  é o preço do exercício.

Por outro lado, a opção de venda dá seu detentor o direito de vender o ativo objeto pelo preço de exercício em uma data futura. A função de remuneração de opção de venda, no vencimento, é dada pela equação:



$$P_t = \text{Max}(K - S_t; 0) \quad (2.2)$$

sendo  $P_t$  o valor da opção de venda em  $t$ .

## 2.3 Precificação de Opções

O objetivo de se encontrar um preço teórico para as opções é avaliar se cada contrato está sendo negociado de forma sobre ou subavaliada (PINTO, 2009). O trabalho de determinar o preço de uma opção, conhecido como precificação de opção, é um dos problemas centrais abordados pela teoria de opções (FABRINI, 2011). Nesse sentido, profissionais de finanças e pesquisadores têm dedicado razoável esforço para desenvolver modelos que permitam estimar um preço teórico aos contratos negociados. A esses modelos teóricos dá-se o nome de modelos de precificação.

### 2.3.1 Modelo Binomial

Em 1979 foi proposto por Cox, Ross e Rubinstein, um modelo alternativo do Black & Scholes, no qual envolve a construção de uma árvore binomial, representada através de gráfico o comportamento de um determinado ativo ao longo do prazo de exercício da opção. Parte da premissa de que o preço do ativo segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB), que obedece a uma equação diferencial, cuja solução é um modelo exponencial. A cada intervalo de tempo, existem dois movimentos possíveis: um de subida e outro de descida, definidos de acordo com suas probabilidades individuais (FONSECA, 2009).

Supõe-se que “ $S_0$ ” seja o preço do ativo hoje. Durante um intervalo de tempo “ $t$ ”, que é o tempo de expiração da opção, na data de vencimento o preço desse ativo pode assumir dois valores, de acordo com o movimento observado, ou seja, o valor do ativo pode aumentar ou diminuir, por um fator “ $u$ ” ou “ $d$ ”, se ocorrer um movimento de subida ou descida, respectivamente.

Foi definido, portanto, que “ $p$ ” é a probabilidade de ocorrer os movimentos de subida e “ $1-p$ ” a probabilidade de ocorrer movimentos de descida e que o retorno desse ativo equivale à taxa livre de risco. Nesse sentido, a premissa adotada para o modelo é a da avaliação neutra ao risco, pela qual os fluxos de caixa futuros são trazidos valor

presente pela taxa livre de risco, desde que o ajuste ao risco seja ponderado pelas probabilidades “ $p$ ” e “ $1-p$ ”.

Os parâmetros dos movimentos de subida e de descida, “ $u$ ” e “ $d$ ”, respectivamente, são definidos considerando-se a volatilidade “ $\sigma$ ” do valor do ativo subjacente e para um determinado intervalo de tempo “ $\Delta t$ ”. Dessa forma, tem-se que:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (2.3)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (2.4)$$

O valor esperado do ativo ( $V$ ), no tempo  $t$ , é uma função da probabilidade “ $p$ ” de alcançar o melhor cenário e “ $1-p$ ” de atingir o pior cenário, designado  $uS_0$  e  $dS_0$ , respectivamente, e calculado por :

$$V = p.uS_0 + (1-p).dS_0 \quad (2.5)$$

O valor do ativo na data de hoje é:

$$S_0 = \frac{p.uS_0 + (1-p).dS_0}{(1+i)^t} \quad (2.6)$$

Na Equação (2.4), a taxa de juros,  $i$ , é o custo de capital do investidor, ou seja, o quanto custa o recurso capital para o investidor.

Na Equação (2.5) é apresentada a equação para determinar o valor da opção em um instante  $t_0$ .

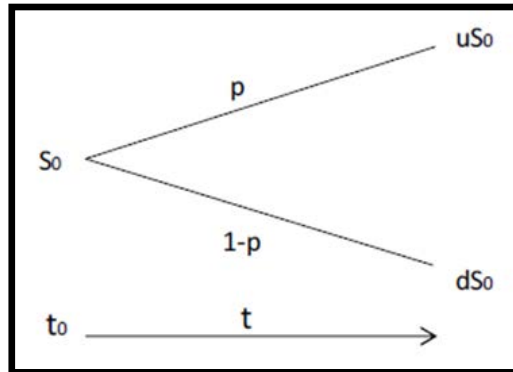
$$S_0 = \frac{p.uS_0 + (1-p).dS_0}{(1+r_f)^t} - k \quad (2.7)$$

sendo:

$r_f$  = taxa livre de risco.

$k$  = preço de exercício da opção, referenciado ao tempo  $t_0$ .

O modelo Binomial é um mecanismo que facilita o monitoramento das etapas do detentor da opção, visando melhor à análise do ambiente. A Figura 1 apresenta o esquema binomial.



**Figura 1 – Esquema binomial**

## **2.4 Considerações Finais**

A teoria de opções é uma abordagem cada vez mais utilizada em análise de investimentos. Este capítulo abordou de forma resumida as principais características e os métodos utilizados para a precificação de opções. No capítulo seguinte é apresentada uma proposta de modelagem matemática a ser aplicada em precificação de opções.

## ***CAPÍTULO 3 – MODELAGEM MATEMÁTICA***

### **3.1 Introdução**

O homem procura cada vez mais compreender os fenômenos e as leis da natureza, prever os comportamentos destes fenômenos e leis criando conceitos que expliquem os acontecimentos do cotidiano.

Nesta trajetória, o homem constatou um grandioso instrumento que contribui para a compreensão destes fenômenos: a Matemática, com a qual ele cria modelos para representar situações concretas, muitas vezes, não é possível de serem analisadas na sua forma original.

A área da Matemática cujo objetivo é analisar e manipular fatos reais do cotidiano, criando modelos que permitam essa análise é denominado de Modelagem Matemática.

Neste capítulo, apresentaremos os conceitos de modelo matemático e o que se entende por Modelagem Matemática. A seguir trataremos das etapas da Modelagem Matemática e sua conclusão.

### **3.2 Modelos Matemáticos**

Os Modelos Matemáticos são fundamentais em diversas áreas do conhecimento humana, como: Matemática, Economia, Física, Química, Biologia, Psicologia, Comunicação, Demografia, Astronomia, Engenharia, etc.

No cotidiano é notável que muitos problemas práticos necessitem dos modelos matemáticos e muitas vezes, as situações são muito diferentes, mas a abordagem e a filosofia subjacentes são as mesmas.

O Modelo Matemático pode ser definido como uma representação de um sistema real, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem às modificações no mesmo.

O Modelador pode aplicar suas técnicas a um grande número de problemas. Por exemplo, o estudo da análise ambiental nas proximidades de um rio, a forma da asa de um avião, um sistema econômico, uma cultura agrícola, um estudo populacional, um

estudo físico, e até mesmo um sistema matemático como o conjunto dos números naturais.

Serão apresentadas algumas definições de Modelo Matemático:

Modelo Matemático é um sistema axiomático consistindo de termos indefinidos que são obtidos pela abstração e qualificação de ideias essenciais do mundo real. (MAKI e THOMPSON, 1973, p. 14, GAZZETTA).

Modelo matemático é uma estrutura Matemática que descreve aproximadamente as características de um fenômeno em questão. (SWETZ, 1992, p. 65, GERTNER).

O Modelo Matemático é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espírito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacionar com algo já conhecido, efetuando deduções. (GRANJER, 1997, p. 78, BIEMBENGUT).

Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de Modelo Matemático. (BIEMBENGUT, 1997, p. 89).

Modelo matemático de um fenômeno é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduzem de alguma forma, o fenômeno em questão. (BASSANEZI, 1997, p. 65).

De acordo com as definições dos autores, podemos concluir que o Modelo Matemático pode ser formulado em termos familiares, tais como, expressões numéricas ou fórmulas, diagramas, gráficos ou representações geométricas, equações algébricas, tabelas, e outros. O modelo é proveniente de aproximações realizadas para entender melhor um fenômeno e, nem sempre, tais aproximações condizem com a realidade.

Os Modelos Matemáticos são classificados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e o tipo de matemática utilizada:

- a) Modelo Linear ou Não Linear, conforme as características das equações;

- b) Modelo Estático, quando representa a forma do objeto que não varia, como a equação de uma circunferência ou Modelo Dinâmico quando permite avaliar estágios da situação em estudo como, por exemplo, crescimento de uma população, análise de consumo, temperatura, avanço de epidemias, etc.
- c) Modelo Educacional, quando é fundamentado um número pequeno ou hipótese simples, muitas vezes com soluções analíticas. O método utilizado pelo modelo envolve a investigação de uma ou duas variáveis, isoladas da complexidade das outras relações fenomenológicas. Geralmente esses modelos não representam a realidade com o grau de confiabilidade adequada para se fazer previsões.

Na construção de um Modelo Matemático proposto por DAVIS e HERSH (1985), são destacados os principais objetivos:

- 1) obter respostas sobre o que acontecerá no mundo físico;
- 2) influenciar a experimentação ou as observações posteriores;
- 3) promover o progresso e a compreensão conceituais;
- 4) auxiliar a axiomatização da situação física; e,
- 5) incentivar a Matemática e a arte de fazer modelos Matemáticos.

É notável que a trajetória para se chegar a um Modelo Matemático não são triviais, será necessária muita dedicação para se adquirir resultado na representação matemática. O modelo dependerá da situação analisada, das variáveis selecionadas e dos recursos disponíveis, passando por um processo denominado Modelagem Matemática.

### 3.3 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática é um processo dinâmico, onde, partindo-se de um problema real, associado a um conjunto de hipóteses, é obtido um modelo que forneça possíveis soluções para o problema.

Segundo Bassanezi, Modelagem Matemática:

"consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real..." (BASSANEZI, 2002, p.16).

Segundo D'Ambrósio, Modelagem Matemática:

"é o processo mediante o qual se definem as estratégias da ação do sujeito sobre a realidade é o que denomina modelagem, isto é, o caminho da criação do modelo..." (D'Ambrósio, 1986).

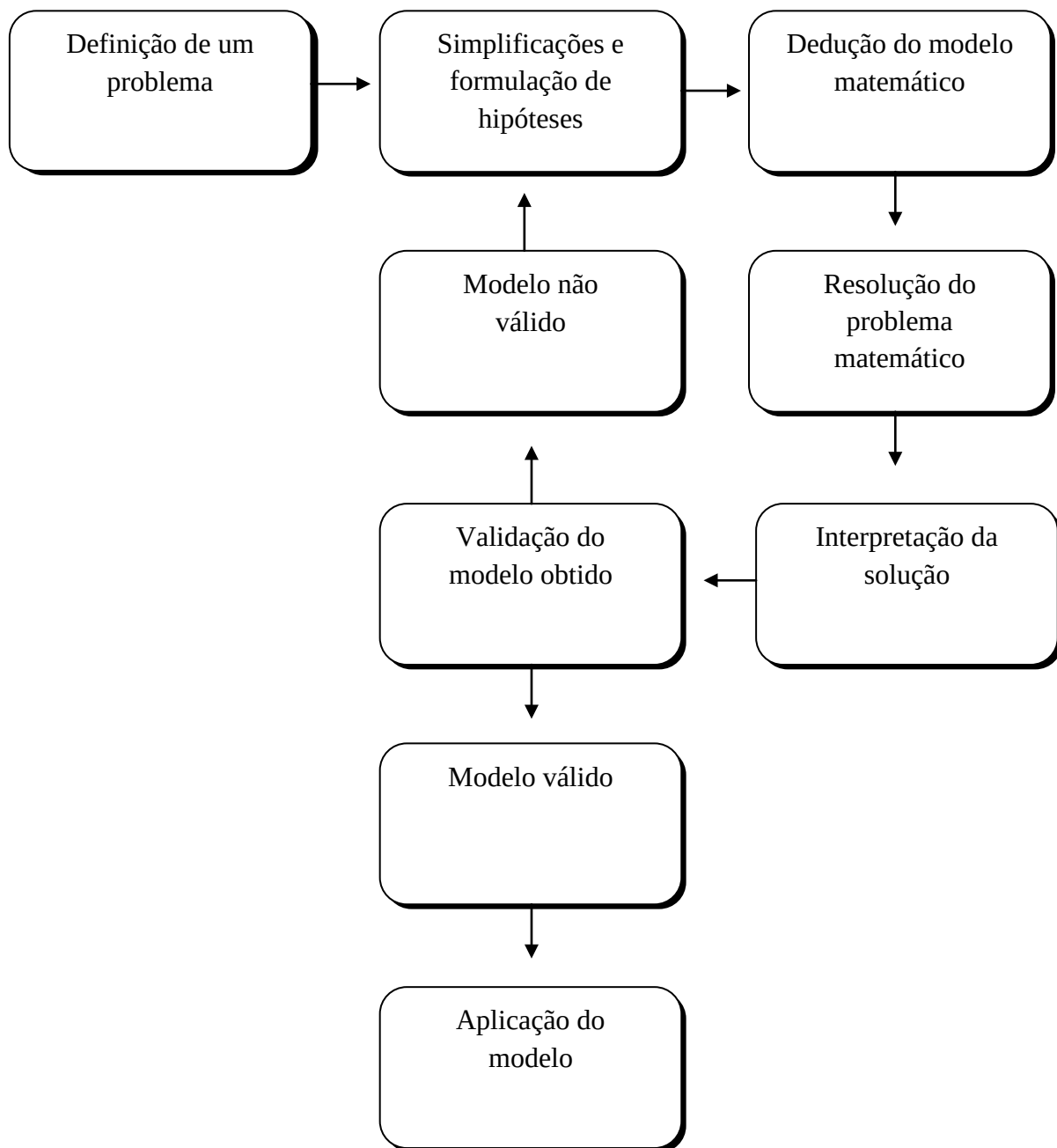
Segundo Berry e Houston, Modelagem Matemática:

"é o processo de abordagem de um problema real, incluindo a formulação do modelo, cujo objetivo é resolução do problema..." (Berry e Houston, 1995).

Essas palavras dos autores nos mostram que a Modelagem Matemática é um método científico de pesquisa cujo objetivo: interpretar e compreender os acontecimentos do cotidiano. O Modelador deve possuir habilidades e criatividade principalmente matemáticas para desenvolver os processos necessários. O processo procura coligar a teoria e a prática de diversas áreas, motivando o seu usuário o entendimento da realidade a sua volta e na busca de meios para atuar sobre esta realidade.

A modelagem é eficiente a partir do momento que clarificamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele. Aplicar um bom modelo é preciso um bom conhecimento matemático e equilíbrio entre intuição e criatividade. A Matemática apurada coligada à experiência e criatividade do modelador, colabora para que este tenha uma visão mais ampla da tendência dos dados, e consiga visualizar, mesmo que superficialmente, possíveis soluções para o problema em estudo.

### 3.4 Etapas da Modelagem Matemática



**Figura 2 – Etapas sugeridas para se realizar um processo de Modelagem Matemática.**

Fonte (Almeida, 2002 *apud* Ferruzzi, 2003).

**Definição de um problema:** É a etapa inicial importante, pois se faz necessário constatar com clareza o problema a ser estudado. Ao definir a situação a ser



estudado, o modelador realizará pesquisas e coletas de dados sobre o tema para a possível solução. Geralmente são feitas pesquisas bibliográficas e/ou com auxílio de profissionais do ramo.

**Simplificação e formulação de hipótese:** Nesta etapa os dados coletados serão analisados e apurados de forma a conservar as particularidades do problema. As variáveis apuradas serão simplificadas pelo fato de muitas vezes não serem possíveis de representar por meio de uma equação ou sistema de equações, o problema estudado de forma original, com todas as variáveis. É fundamental que o modelador saiba simplificar para que os dados não sejam omitidos.

**Dedução do modelo matemático:** Nesta etapa ocorre a transformação da linguagem do problema para a linguagem matemática. As representações matemáticas poderão ser feitas através de fórmulas, gráficos, tabelas, equações, sistemas de equações, etc. Neste momento a intuição é fundamental.

**Resolução do problema matemático:** É a etapa em que os recursos da matemática são utilizados para solucionar o problema matemático formulado.

**Validação:** É a etapa em que a aprovação do modelo é analisada, através de comparações de dados originais com os dados fornecidos pelo modelo. Caso o modelo não seja válido, deve-se retornar à formulação de hipóteses e simplificações e reiniciar a etapa. O grau de aproximação é a causa decisiva na validação do modelo ou não. O grau de precisão do modelo varia conforme a sua aplicação.

**Aplicação do modelo:** O modelo válido será utilizado para compreender, explicar, analisar, prever ou decidir sobre a realidade em estudo. Nesta etapa concede o intervir, o exercitar, o manejar situações associadas à solução do problema. Estas fases não representam regras gerais, mas compõem uma sequência de procedimentos que possam proporcionar sucesso no estudo de problemas por meio da Modelagem Matemática.

### 3.5 Exemplos das Etapas da Modelagem Matemática

**Exemplo:** Ações BB Small Caps

**Definição de Problema:** Definir o risco presente no investimento nas ações BB Small Caps;

**Simplificações e Formulação de Hipóteses:** O risco será calculado por medida de dispersão;

**Dedução do Modelo Matemático:** Construção da fórmula da variância;

**Resolução do Problema Matemático:** Aplicação da fórmula da variância;

**Interpretação da Solução:** A variância não é boa medida de risco, pois consideram riscos os valores acima da média;

**Validação do Modelo Obtido:** Modelo não válido;

**Simplificações e Formulação de Hipóteses:** O risco deve estar ligado à expectativa de perdas;

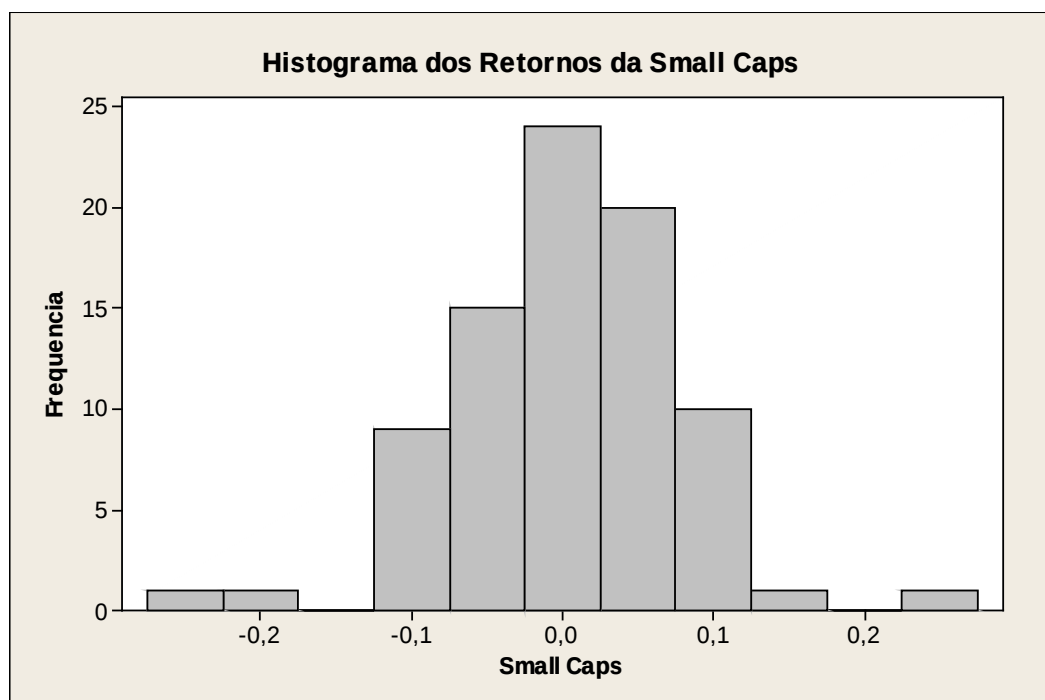
**Dedução do Modelo Matemático:** Risco associado ao Quartil inferior à média;

**Resolução do Problema Matemático:** Montar a distribuição empírica de probabilidades. Achar a probabilidade em que o risco se localiza no Quartil em que o retorno é menor que zero;

**Interpretação da Solução:** O risco assim calculado realmente da noção de perda;

**Validação do Modelo Obtido:** Modelo Válido;

**Aplicação:** A estrutura pode ser aplicada a outros fundos de investimentos.



**Figura 3 – Histograma dos retornos da BB SmallCap.**

### **3.6 Considerações Finais**

Neste capítulo, vimos que a modelagem matemática é o ato de transformar problemas da realidade em linguagens matemáticas. Um bom Modelador deve possuir habilidades e criatividade para coligar a teoria e a prática de diversas áreas. A Modelagem Matemática é constituída de etapas que deverão ser analisadas separadamente.

Veremos no próximo capítulo, a modelagem matemática aplicada à precificação de opções.

## ***CAPÍTULO 4 – MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA A PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES***

### **4.1 Considerações Iniciais**

A modelagem matemática descrita no capítulo três é aplicada, neste capítulo, à análise de investimento em geração hidrelétrica. As abordagens tradicionais utilizam a metodologia de Fluxo de caixa descontado, no entanto, esta metodologia não contempla as alternativas de transferir os direitos de concessão ou abandonar o projeto. Esta flexibilidade gerencial é modelada através da teoria das opções reais, uma técnica que vem sendo adotada cada vez mais na análise de investimentos. A aplicação realizada foi baseada no trabalho desenvolvido por NORONHA *et al.* (2006). O investimento consiste na construção de uma usina hidrelétrica, que ficará em operação durante trinta e quatro anos. Um período de avaliação tão longo como estes, é cercado de incertezas: a variação no preço que afetará as receitas, os impostos, as mudanças na própria dinâmica do mercado de energia. Todas estas incertezas caracterizam um investimento sob condições de risco.

O investimento consiste em aplicar uma parcela inicial de R\$ 1.000.000,00 para estudos ambientais. Outra parcela para o projeto da usina no valor de R\$ 6.000.000,00 deve ser aplicada. Finalmente, a própria construção da usina que requer um gasto de R\$ 297.000.000,00 divididos em três parcelas: a primeira de R\$ 29.700.000,00 e duas outras de R\$ 133.650.000,00. Além disso, o investidor tem a oportunidade de financiar setenta por cento do gasto da construção através das linhas de crédito do Banco Nacional de Desenvolvimento Social (BNDS). A análise por opções composta nos indica que o investimento inicial de R\$ 1.000.000,00 cria o direito de investir R\$ 6.000.000,00 no prazo de um ano, e o exercício desta opção cria a opção de investir R\$ 297.000.000,00 (em três estágios) para a construção da hidrelétrica ou abandonar o projeto e transferir os direitos de concessão por um valor estipulado de R\$ 50.000.000,00. Deste modo, é aplicada a modelagem matemática para definição e precificação de opções, no sentido de auxiliar o processo de tomada de decisão por parte do investidor.

## 4.2 Definição do problema

O problema consiste em determinar ou precificar o valor das opções a serem exercidas em cada estágio que compõem o período de investimento. A tabela 1 apresenta as variáveis utilizadas no modelo.

**Tabela 1 – Variáveis no projeto da usina.**

| Item                                       | Valor            |
|--------------------------------------------|------------------|
| Potência Instalada (MW)                    | 240              |
| Geração Média de Energia (MWh/ano)         | 1.156.320        |
| Custo de Geração e Manutenção (R\$/MWh)    | 7,25             |
| Preço Médio de Energia (R\$/MWh)           | 128              |
| Investimento Estudos Ambientais            | R\$ 1.000.000,00 |
| Investimento Projeto                       | R\$ 6.000.000,00 |
| Capital de Giro                            | R\$ 1.000.000,00 |
| Depreciação Anual                          | 4%               |
| Taxa de juros do setor                     | 14%              |
| Alíquota Imposto Renda Contribuição Social | 35%              |

Na literatura sobre opções, um modelo muito utilizado na precificação de opções é o modelo de Black & Scholes. Entretanto, este modelo não será aplicado neste caso de investimento, pois supõe uma série de hipóteses não suportadas em casos de ativos não financeiros, como é o caso da geradora de energia. O modelo utilizado nesta aplicação é o Binomial, pois é que apresenta melhor desempenho na avaliação de ativos não financeiros, tal como a avaliação de investimentos em hidrelétricas.

## 4.3 Simplificação e formulação de hipóteses

Segundo FABRINI (2011), o objetivo de se encontrar um preço teórico para as opções é avaliar se cada contrato está sendo negociado de forma sobre ou subavaliada. Esta é uma tarefa importante para a definição do comportamento do mercado, que exerce influência direta sobre as operações de hedge, especulação e arbitragem. No caso da avaliação do investimento em hidrelétrica, consiste em avaliar, em cada estágio o valor da opção, cujo preço, fixado em R\$ 50.000.000,00, é o valor presente das receitas após os gastos realizados com os projetos e os estudos ambientais. Para os próximos períodos deve-se comparar com um portfólio de ativo livre de risco, neste exemplo, uma aplicação de 5% ( $r_f$ ).

#### 4.4 Dedução do problema matemático

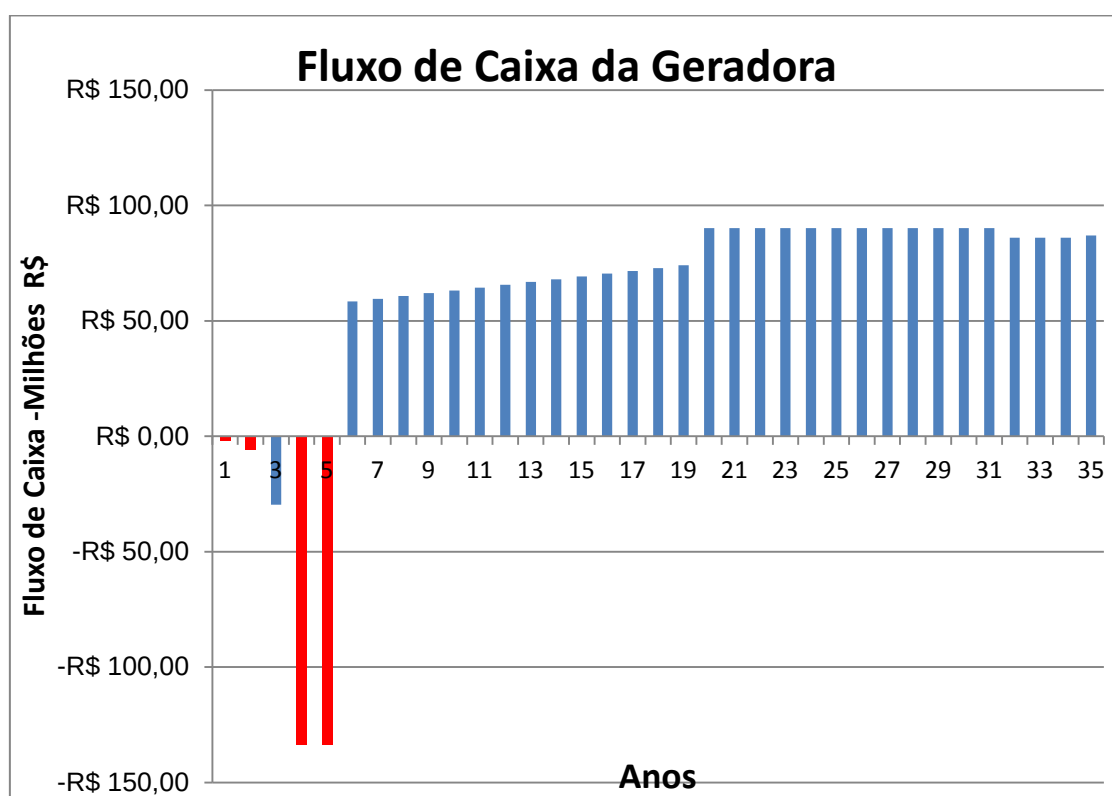
Nesta etapa, serão definidas as relações matemáticas entre as variáveis desenvolvidas anteriormente. Para a modelagem matemática, são realizadas as seguintes etapas, definidas no trabalho de NORONHA (2006) na abordagem binomial para avaliação de opções reais.

- Aplicação do método do Fluxo de Caixa Descontado (FCD) para avaliação do valor presente do projeto para o caso base adotado;
- Modelagem das incertezas do projeto e execução de uma simulação Monte Carlo para combinar todas as incertezas numa única fonte de incerteza e determinar a volatilidade do projeto.
- Construção de uma árvore binomial, para modelar a dinâmica do valor do projeto. Esta árvore de eventos exibe o conjunto de valores que o ativo objeto pode assumir através do tempo, sob cenários de mercado plausíveis.
- Incorporação das flexibilidades, através da elaboração de uma árvore de decisão, cujos nós modelamos as opções reais do projeto. O valor da opção real é obtido avaliando-se os *payoffs* da árvore de decisão por meio de probabilidades neutras ao risco.

A figura 4 apresenta o desenvolvimento do fluxo de caixa descontado período a período. O investimento em cada período consiste nos gastos realizados nos quatro primeiros anos. A receita bruta de vendas consiste no montante de energia produzida multiplicada pelo preço, os custos consistem nos gastos para produção de energia multiplicada pelo montante de energia produzido. Finalmente são retirados os impostos e é apurado o fluxo de caixa. O gráfico apresenta a evolução do fluxo de caixa para os trinta e cinco anos.

|                                  | 0                        | 1                        | 2                         | 3                          | 4                          | 5                         |
|----------------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| <b>Receita Bruta de Vendas</b>   |                          |                          |                           |                            |                            | R\$ 148.008.960,00        |
| (-) Custos Variáveis             |                          |                          |                           |                            |                            | R\$ 15.783.768,00         |
| <b>Lucro Bruto</b>               |                          |                          |                           |                            |                            | <b>R\$ 132.225.192,00</b> |
| (-) Despesas Financeiras         |                          |                          |                           | -R\$ 25.987.500,00         | -R\$ 25.987.500,00         | -R\$ 25.987.500,00        |
| (-) Depreciação                  |                          |                          |                           |                            |                            | -R\$ 11.880.000,00        |
| <b>Lucro Operacional</b>         |                          |                          |                           |                            |                            | <b>R\$ 94.357.692,00</b>  |
| (+) Receitas não Operacionais    |                          |                          |                           |                            |                            |                           |
| <b>Lucro antes do IR</b>         |                          |                          |                           |                            |                            | <b>R\$ 94.357.692,00</b>  |
| (-) IRPJ/CSLL ou Simples         |                          |                          |                           |                            |                            | -R\$ 33.025.192,20        |
| <b>Lucro Líquido</b>             |                          |                          |                           |                            |                            | <b>R\$ 61.332.499,80</b>  |
| (-) Amortização                  |                          |                          |                           |                            |                            | -R\$ 14.850.000,00        |
| (+) Depreciação                  |                          |                          |                           |                            |                            | R\$ 11.880.000,00         |
| (+) Resultado não operacional    |                          |                          |                           |                            |                            |                           |
| (+) Liberação para Financiamento |                          |                          | R\$ 207.900.000,00        |                            |                            |                           |
| (-) Investimento                 | -R\$ 2.000.000,00        | -R\$ 6.000.000,00        | -R\$ 29.700.000,00        | -R\$ 133.650.000,00        | -R\$ 133.650.000,00        | R\$ 58.362.499,80         |
| <b>Fluxo de Caixa</b>            | <b>-R\$ 2.000.000,00</b> | <b>-R\$ 6.000.000,00</b> | <b>R\$ 178.200.000,00</b> | <b>-R\$ 159.637.500,00</b> | <b>-R\$ 159.637.500,00</b> | <b>R\$ 58.362.499,80</b>  |

**Figura 4 – Fluxo de caixa para os primeiros cinco anos.**



**Figura 5 – Fluxo de caixa para os trinta e cinco anos.**

O fluxo de caixa pode ser avaliado, primeiramente, através do método de fluxo de caixa descontado (FCD), sendo o método mais empregado o Valor Presente Líquido (VPL). Este método consiste em trazer para a data zero todos os fluxos de caixa, descontados por uma taxa de juros (custo de capital do setor) e subtrair do investimento,

se o *VPL* é positivo o investimento é viável, do contrário inviável. A Equação (4.1) apresenta a definição do *VPL*.

$$VPL = \sum_{t=0}^n \frac{FC_t}{(1+i)^t} \quad (4.1)$$

sendo: *t*- duração do projeto; *i* – Taxa de juros ou custo de capital do setor.

Para esta aplicação, a taxa de juros é 14% e o *VPL* é de **R\$ 207.362.284,06**. O investidor vai aplicar na geradora, pois o *VPL* é positivo. No entanto, como o projeto tem uma duração de trinta e quatro anos, existe incerteza em relação ao preço e às taxas de juros. Esta incerteza pode ser modelada via Simulação de Monte Carlo. Para esta aplicação é utilizada a Simulação de Monte Carlo, via Hipercubo Latino.

#### **4.4.1 Simulação de Monte Carlo e Amostragem Hipercubo Latino**

A técnica de simulação de Monte Carlo pode ser útil auxiliando as técnicas de decisões de investimentos (DIAS, 1996; HAAS, 1997). A simulação calcula o valor esperado e a dispersão (desvio padrão) de uma variável (fluxo de caixa etc.) considerando a faixa de variação e a distribuição de probabilidades de um conjunto de parâmetros incertos.

O método de simulação de Monte Carlo gera continuamente e aleatoriamente números a fim de criar vários eventos possíveis. Essa geração “randômica” isenta os números de uma inclinação mais otimista ou pessimista do autor da projeção. Cada geração de novos valores corresponde a um evento ou cenário provável de ocorrer, que é inserido na distribuição de probabilidade. A disposição desses eventos em uma distribuição possibilita a avaliação da probabilidade de ocorrência de cada evento, através de medidas de estatística descritiva, como a média e o desvio padrão (BRUNI *et al.*, 1998).

Em uma projeção, identificam-se as variáveis que serão geradas aleatoriamente. As variáveis aleatórias normalmente apresentam seus possíveis valores dentro de uma faixa identificada por um valor mínimo e um máximo. Além dessas variáveis, existem variáveis independentes que, ou são constantes (desvio padrão igual a zero) ou variam (desvio padrão diferente de zero), independentemente das variáveis inicialmente identificadas.



Conforme SALIBY e PACHECO (2002), outras variáveis podem ser diagnosticadas como dependentes das variáveis a serem geradas aleatoriamente. Os primeiros passos para identificar as variáveis, é definir uma relação de proporcionalidade entre elas e as variáveis independentes, assim em cada geração aleatória de valores, as variáveis dependentes terão automaticamente seus valores gerados.

Após a caracterização de cada variável do problema, inicia-se uma geração de números aleatórios, respeitando a faixa adotada para cada variável independente. Faz-se interessante ressaltar que essa geração pode ser efetuada através de tabelas de números aleatórios ou mais comumente através de geração computacional. Os recursos computacionais disponíveis atualmente permitem que esse método seja facilmente utilizado e seus resultados sejam apresentados de várias formas, inclusive graficamente.

Existem vários softwares específicos ou mesmo as planilhas eletrônicas disponíveis no mercado possibilitam sua implementação nas projeções financeiras. Uma vez gerados os valores para as variáveis independentes, pode-se automaticamente calcular os valores das variáveis dependentes, através das relações percentuais firmadas entre elas. A figura 5 apresenta um resumo de funcionamento do método de Monte Carlo.

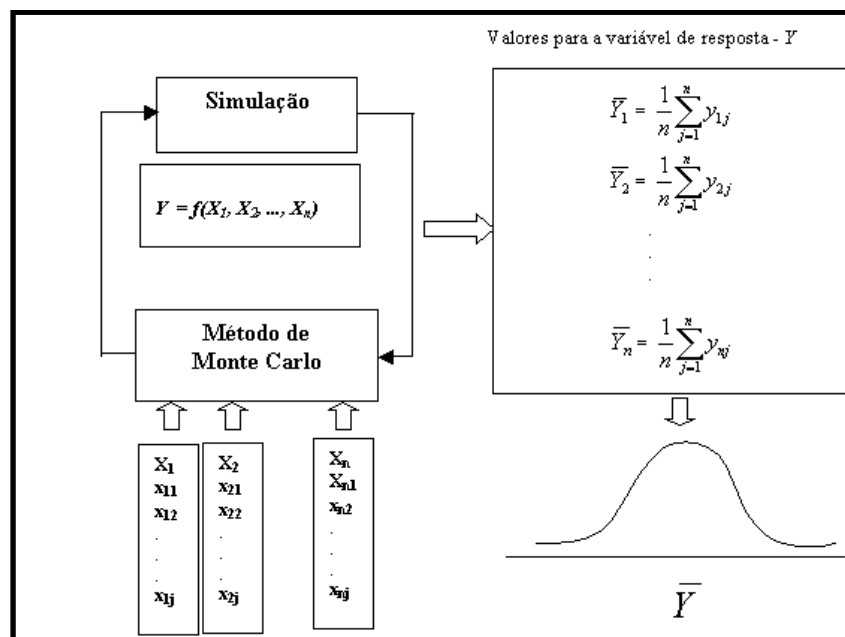


Figura 6 – Esquema da Simulação de Monte Carlo.

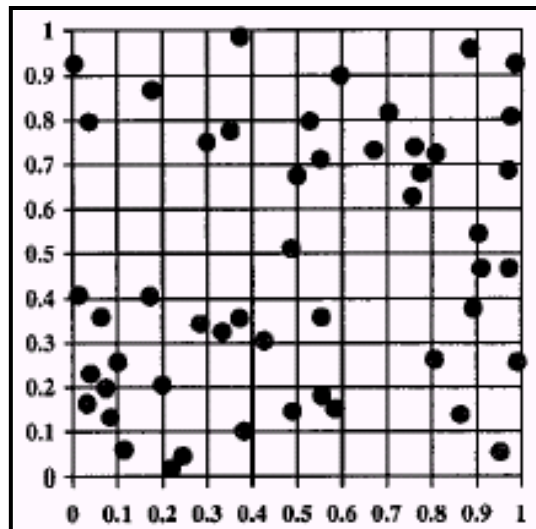
#### 4.4.1.1 Amostragem estratificada – aplicação do método hipercubo latino (LHS)

O método de amostragem hipercubo latino foi desenvolvido por McKay, Conover, e Beckman (1979), como uma técnica de amostragem, de modo a obter estimativas mais precisas. A base da LHS é a estratificação completa da distribuição das variáveis de entrada do modelo de simulação, de acordo com uma seleção aleatória dentro de cada extrato (SALIBY e PACHECO, 2002).

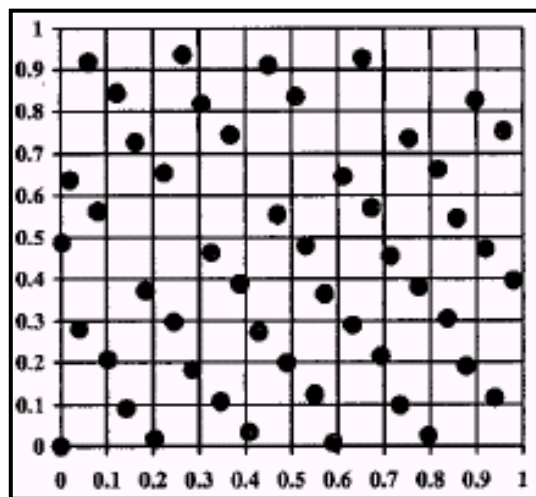
A amostragem de hipercubo latino é feita dividindo-se a faixa de valores de cada variável independente  $X_1, \dots, X_k$  em  $n$  (número de elementos da amostra) extratos de igual probabilidade de ocorrência. A decisão de qual valor a ser escolhido continua sendo realizada de maneira aleatória. Deste modo, é gerado aleatoriamente o vetor  $R$ . Contudo, o número aleatório não mais corresponde ao valor da probabilidade acumulada diretamente, mas é feito um ajuste para que essa probabilidade esteja dentro de cada extrato. Deste modo, o valor da variável aleatória é dado pela equação 4.2, sendo gerados  $n$  valores para cada variável aleatória (SALIBY e PACHECO, 2002; FISHIMAN, 1996).

$$X_i = F^{-1} \left[ \frac{(i-1 + R_i)}{n} \right] \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.2)$$

Os  $n$  valores obtidos, por esta equação, para a variável aleatória  $X_1$  são combinados aleatoriamente com os  $n$  valores de  $X_2$ . Estes  $n$  pares são combinados aleatoriamente com os valores de  $X_3$ , formando um conjunto. Um modo conveniente de interpretar a amostragem hipercubo latino é como sendo uma matriz, de ordem  $n$  (números de elementos da amostra) x  $k$  (números de variáveis independentes), onde a  $i^{th}$  linha contém os valores específicos de cada uma das  $k$  variáveis de entrada a ser utilizada na  $i^{th}$  rodada de simulação. O efeito da abordagem LHS em relação ao método de amostragem aleatória simples pode ser comparado de acordo com a figura 6 apresenta a amostragem aleatória simples para a combinação de duas variáveis aleatória. Já a figura 7 apresenta a combinação aleatória destas duas variáveis pelo método de hipercubo latino.



**Figura 7** – Combinação de 50 valores de duas variáveis aleatórias pelo método de amostragem aleatória simples (SALIBY e PACHECO, 2002).



**Figura 8** – Combinação de 50 valores de duas variáveis aleatórias pelo método de hipercubo latino (SALIBY e PACHECO, 2002).

Com o método LHS é possível modelar a dispersão do retorno do projeto, utilizando-se um número menor de iterações e de simulações.

#### 4.4.1.2 Formulação do problema Matemático

Com a técnica de simulação a ser utilizada escolhida, a formulação matemática para a precificação de opções depende da volatilidade dos retornos do projeto (que constitui o desvio padrão dos retornos considerando o preço e a taxa de juros ou custo de capital como variáveis aleatórias). Neste contexto, foi definida a variável  $Y$  que representa a variação percentual do valor do projeto. Esta variável, também é aleatória, assumindo valores:  $y_1, \dots, y_b, \dots, y_n$  dados pela equação 4.3.

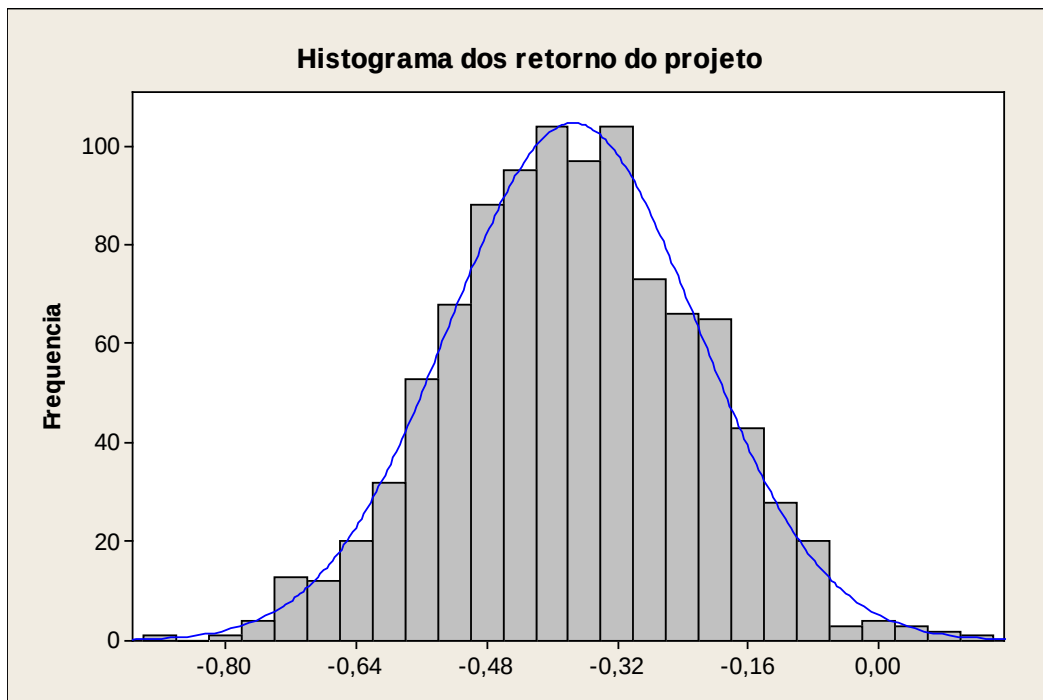
$$y_j = \frac{(VP_j + FC_j)}{VP_0} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.3)$$

sendo:

$$VP_j = \left( \sum_{t=2}^n \frac{FC_t}{(1+i)^t} \right)_j \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$VP_0 = \sum_{t=0}^n \frac{(FC_t)}{(1+i)^t} \quad t = 1, 2, 3, \dots, n$$

Com a utilização do Excel®, é possível realizar a Simulação de Monte Carlo LHS, considerando que o preço da energia é uma variável aleatória com distribuição Normal com média 128 e desvio padrão de 30. Já a taxa de juros, foi considerada normalmente distribuída, com média 14% e desvio padrão de 3%. A figura 8 apresenta a distribuição dos retornos do projeto após 1000 iterações de simulação.



**Figura 9 – Distribuição do retorno do projeto.**

#### 4.5 Resolução do problema matemático

Para a solução do problema de precificação, pode-se utilizar a abordagem binomial. Sendo necessário definir alguns parâmetros, conforme é apresentado na tabela 2 (COPELAND & ANTIRAKOV, 2001).

**Tabela 2 – Parâmetros do modelo binomial.**

|                             | <b>Opção 1</b>     | <b>Opção 2</b>     |
|-----------------------------|--------------------|--------------------|
| Estágios da Árvore $N$      | 4                  |                    |
| Expiração (anos) $y$        | 1                  | 3                  |
| Volatilidade $\sigma$       | 15%                |                    |
| Taxa Livre de Risco $r_f$   | 5%                 |                    |
| $V_P$ do ativo-objeto $V_0$ | R\$ 279.775.309,07 |                    |
| Investimento $X$            | R\$ 6.000.000,00   | R\$ 284.744.842,11 |
| Investimento Inicial        | R\$ 2.000.000,00   |                    |
| <i>Salvage Value</i>        | R\$ 50.000.000,00  |                    |

Além disso, se devem considerar as seguintes variáveis auxiliares na confecção do modelo:

$$\Delta t = \frac{y}{N} = 1$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (4.4)$$

$$d = \frac{1}{u}$$

As duas últimas variáveis modelam, respectivamente, a taxa de crescimento do ativo-objeto e a taxa de redução do ativo-objeto. Neste caso, os valores são:  $u=1,16183$  e  $d=0,860707$ . O próximo passo é construir a árvore de eventos, figura 9, obtida facilmente começando a partir do *step 0* (Valor presente do projeto) e multiplicando-se cada elemento anterior por  $u$  e o restante por  $d$ .

| <b>Step 0</b> | <b>Step 1</b> | <b>Step 2</b> | <b>Step 3</b> | <b>Step 4</b> |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| R\$ 279,78    | R\$ 325,05    | R\$ 377,66    | R\$ 438,78    | R\$ 509,78    |
|               | R\$ 240,80    | R\$ 279,78    | R\$ 325,05    | R\$ 438,78    |
|               |               | R\$ 207,26    | R\$ 240,80    | R\$ 377,66    |
|               |               |               | R\$ 178,39    | R\$ 325,05    |
|               |               |               |               | R\$ 279,78    |

**Figura 10 – Árvore de eventos (os valores devem ser multiplicados por 1.000.000).**

Na verdade, esta árvore mostra a evolução do valor da geradora em cada estágio do projeto. A partir da árvore de eventos da figura 9, é possível construir a árvore de decisões, que constitui o valor da opção de investir em cada etapa do projeto da

hidrelétrica. Para a determinação desta árvore, são realizados os seguintes procedimentos:

- A opção de investimento em uma das etapas do projeto pode ser analisada como uma opção de compra americana, com preço de exercício,  $X$ , equivalente ao investimento a ser realizado. Para a opção americana, quando o valor presente do projeto calculado no nó correspondente da árvore de eventos for maior que o valor investido, a opção deve ser exercida e seu valor é  $V-X$ , de modo contrário a opção não deve ser exercida e seu valor é zero. A equação 4.5 apresenta como se determina o Valor da Opção,  $V_{OR}$ , através do valor presente da árvore de eventos,  $VP$ , e o preço de exercício da opção,  $X$ .

$$V_{OR} = \text{Max}(V - X, 0) \quad (4.5)$$

Para o *step 4*, por exemplo:

$$V_{OR} = \text{Max}(509.783.850,55 - 284.744.842,11; 0)$$

$$V_{OR} = \text{R\$}225.039.008,44$$

Com a repetição deste procedimento para as demais células do *step 4*, é obtida a última coluna da árvore de decisão, conforme a figura 10.

| Step 4             |
|--------------------|
| R\$ 225.039.008,44 |
| R\$ 154.030.184,32 |
| R\$ 92.912.322,99  |
| R\$ 40.307.692,25  |
| R\$ 0,00           |

**Figura 11 – Step 4 da árvore de decisões.**

- Para *Step 1* ao 3, é utilizado o método do portfólio replicado para estimar o valor do projeto.

$$V_{OR} = \text{Max}(V - X, \text{Portfolio}) \quad (4.6)$$

O portfólio replicado consiste em  $m$  unidades do ativo replicante, e  $B$  unidades do título de dívida sem risco, sendo calculado através da equação 4.7

$$Portfolio = mV + B$$

$$m = \frac{C_u - C_d}{V_u - V_d} \quad (4.7)$$

$$B = \frac{C_d - mV_d}{(1 + r_f)}$$

Para o *step 3*, temos:

$$m = \frac{225.039.088,44 - 154.030.184,32}{509.783.850,55 - 438.775.026,42} = 1,00$$

$$B = \frac{154.030.184,32 - 1 * 438.775.026,42}{(1 + 0,05)} = -271.185.563,91$$

Logo:

$$Portfolio = 1 * 325.052.534,35 - 271.185.563,91$$

$$Portfolio = 53.866.970,44$$

Assim:

$$V_{OR} = \text{Max}(325.052.534,55 - 284.744.842,11; 53.866.970,44)$$

$$V_{OR} = 53.866.970,44$$

- Os valores definidos, agora são utilizados para verificar a flexibilidade gerencial, considerando a possibilidade de investir 6 milhões. Nesta etapa, será utilizada a seguinte análise:

$$V_{OR} = \text{Max}(V - X; \text{SalvageValue} - X - V; 0) \quad (4.8)$$

Para o *step 1*, vem:

$$V_{OR} =$$

$$\text{Max}(215.547.174,16 - 6.000.000,00; 50.000.000,00 - 6.000.000,00 - 25.547.000,00; 0)$$

$$V_{OR} = 209.547.174,00$$

Subtraindo o valor de capital de giro de R\$ 1.000.000,00 pode-se encontrar o valor de R\$ 209.547.174,00 que corresponde ao valor do projeto, com flexibilidade. Na verdade, este valor é superior ao *VPL* de R\$ 207.362.242,00 mostrando que a modelagem por opções considera um ganho superior devido a flexibilidade conferida ao investidor.

#### **4.6 Validação**

O modelo de precificação por binomial é método já consolidado na teoria de opções financeiras e foi aplicado neste exercício para determinar a possibilidade de investir ou não na geradora. A característica que diferencia este trabalho é a utilização da simulação de Monte Carlo, através da Amostragem estratificada LHS.

#### **4.7 Aplicação do Modelo**

Com a aplicação da abordagem, o que o investidor espera é verificar se investe ou não na geradora. Como a análise considerando a possibilidade de transferir o direito de concessão resultou em um valor de R\$ 209.547.174,00 (incluindo as incertezas no preço e na taxa de juros) esta é a decisão mais acertada. Deste modo, antes de investir na construção da usina, e já tendo investido um total de R\$ 6.000.000,00 o melhor é vender o direito de concessão e apurar um ganho de R\$ 50.000.000,00.



## ***CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES***

### **5.1 CONCLUSÕES**

O trabalho apresentou a aplicação da modelagem matemática para a decisão em investimentos em geração hidrelétrica, por meio de opções reais. A aplicação em mercados de energia elétrica é importante, pois desde 2004 o governo vem demandando programas de incentivo a expansão do segmento de geração. As conclusões que podem ser retiradas com este trabalho são as seguintes:

- A modelagem matemática constitui uma ferramenta capaz de organizar de uma maneira mais clara e eficiente os problemas de tomada de decisão em análise de investimento. Este fato pode ser percebido já nas primeiras etapas ao se definir de forma qualitativa o problema. A operacionalização, que constitui em definir em variáveis os itens qualitativos, se torna mais clara, ou seja, “quem” se relaciona com o “que”.
- As Teorias de Opções não é algo trivial e constitui um elemento de análise não linear dentro da literatura financeira. Com a aplicação da modelagem matemática suas etapas ficam facilitadas, bem como a análise de opções encadeadas, tal como foi apresentada na aplicação do quarto capítulo.
- A aplicação da Simulação de Monte Carlo *LHS* proporcionou uma rápida convergência na determinação da volatilidade dos retornos do projeto. Este fato é importante, visto que em várias aplicações na literatura não é utilizada esta amostragem de baixa discrepância.

### **5.2 SUGESTÕES PARA FUTUROS TRABALHOS**

As sugestões para as futuras pesquisas incluem:

- A definição de um software que seja programado com base na modelagem matemática tal como o abordado neste trabalho, para a automatização do método.
- A utilização da modelagem matemática para definição da métrica de risco coerente. Atualmente está em discussão qual seria a métrica de risco mais consistente, pois a variância e o desvio padrão são questionados como métrica de risco. No entanto, são necessários estudos para verificar como modelar esta métrica, considerando os vários tipos de ativos existentes.

- A proposta anterior também pode ser estendido para os métodos de otimização e formação de portfólios eficientes. Existem diversas formas de obter os portfólios eficientes. No entanto, é necessário estudo para modelagem das variáveis e definição dos métodos para otimização de carteiras de ativos. Principalmente, quando os ativos candidatos são de diversas naturezas (opções, fundo de ações, fundo de renda fixa).

### **5.3 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Com a aplicação desta pesquisa, se pode contribuir com a Teoria de Opções para tomada de decisão em investimentos. A intenção não é esgotar o assunto, mas fornecer argumentos para futuras pesquisas e verificar como a abordagem matemática pode ser utilizada como importante ferramenta nas diversas áreas, principalmente a financeira.

## REFERÊNCIAS

- BASSANEZZI, RODNEY CARLOS. *Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.
- BELTRAMI, M., *Precificação de opções sobre ações por modelos de support vector*. Dissertação. Universidade Federal do Paraná. 2009. Curitiba – PR.
- BERRY, J., HOUSTON, K. (1995). *Mathematical Modelling*. London: Edward Arnold, 142 p.
- BIEMBENGUT, M. S. (1997). *Qualidade de Ensino de Matemática na Engenharia: uma proposta metodológica e curricular*. Florianópolis: UFSC, 1997. Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas.
- BRUNI, A. L. *Risco, retorno e equilíbrio : uma análise do modelo de precificação de ativos financeiros na avaliação de ações negociadas na Bovespa (1988-1996)*. Projeto de pesquisa para a elaboração de dissertação de mestrado, apresentado à Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo. 1998.
- COPELAND, T., ANTIKAROV, V., *Opções Reais: Um Novo Paradigma para Reinventar a Avaliação de Investimentos*. Rio de Janeiro: Campus, 2001.
- D'AMBRÓSIO, U. (1986). *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: Unicamp.
- DIAS, M. A. G. *Investimento sob Incerteza em Exploração de Petróleo*. Dissertação (Mestrado em Eng. Industrial), PUC, Rio de Janeiro, agosto de 1996.
- DOMINGUES, E. G., *Análise de risco para otimizar carteiras de ativos físicos em geração de energia elétrica*. Tese apresentada ao programa de pós-graduação em Engenharia Elétrica. UNIFEI. Itajubá/MG. 2003.
- FABRINI, K.L., *Teoria das opções reais: uma abordagem para análise de investimentos em expansão do setor elétrico*. Dissertação. Universidade Federal de Minas Gerais. 2011. Belo Horizonte – MG.
- FERRUZZI, E. C. (2003) *A Modelagem Matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos Cursos Superiores de Tecnologia*. Dissertação. Mestrado em Engenharia de Produção. UFSC. Florianópolis - SC.
- FISHMAN, G. S. *Monte Carlo - Concepts, Algorithms and Applications*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag. New York. 1996.

FONSECA, E. V. Del NEGRO (2009) ***Comparação entre simulações pelo Movimento Geométrico Browniano e Movimento de Reversão à Média no cálculo do Fluxo de Caixa at Risk do departamento de downstream de uma empresa de petróleo.*** Dissertação. Universidade Federal do Rio de Janeiro. COPPEAD-UFRJ. Rio de Janeiro - RJ.

GERARDINI, L. (2011) ***Modelagem Matemática – Sistemas de Amortizações, Uma Experiência com Jovens e Adultos.*** Dissertação. Mestrado em Educação Matemática. UNIBAM. São Paulo - SP.

HAAS, C. N. ***Importance of Distributional Form in Characterizing Inputs to Monte Carlo Risk Assessments.*** Risk Analysis, Vol. 17, No.1, Elsevier Science, 1997.

LEAL, S. (1999) ***Modelação Matemática uma Proposta Metodológica para o Curso de Economia.*** Dissertação. Mestrado em Engenharia de Produção. UFSC. Florianópolis - SC.

NORONHA, J.C.C., LIMA, J.W.M., FERREIRA, T. G.L., ***Análise de investimentos em geração hidráulica utilizando a teoria das opções reais.*** V Congresso Brasileiro de Planejamento Energético (CBPE). 31 de Maio a 2 de Junho de 2006. Brasília – DF.

PINTO, C. D. B. (2009) ***Modelagem de opções reais com processos de reversão à média em tempos discretos: uma aplicação na indústria brasileira de etanol.*** Tese. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. PUC-RJ. Rio de Janeiro – RJ.

RIBEIRO, M, H. (2009) ***O Ensino de Cônicas Através da Resolução de Problemas e da Modelagem Matemática.*** TCC. Licenciatura em Matemática. UNESP. Guaratinguetá - SP.

SALIBY, E., PACHECO, F. ***An empirical evaluation of sampling methods in risk analysis simulation: Quasi-Monte Carlo, descriptive sampling, and latin Hypercube sampling.*** Proceedings of the 2002 Winter simulation Conference. IEEE.

SILVA, J, M, T, F. (2005) ***A Modelagem Matemática Aplicada no Ensino Médio.*** TCC. Licenciatura em Matemática. UNESP. Guaratinguetá - SP.