UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Resolvendo equações polinomiais com equações diferenciais ordinárias

Bruna da Silva Araujo

Orientador: Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional

Bauru, Fevereiro de 2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da UNESP

Resolvendo equações polinomiais com equações diferenciais ordinárias

Bruna da Silva Araujo

Orientador: Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da UNESP para obtenção do título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional.

Bauru, Fevereiro de 2025

A663r

Araujo, Bruna da Silva
Resolvendo equações polinomiais com equações diferenciais ordinárias / Bruna da Silva Araujo. -- Bauru, 2025
70 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Pedro Toniol Cardin

1. Equação polinomial. 2. Equação diferencial ordinária. 3. Equações de Abel. 4. Integrais elípticas e hiperelípticas.. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Dados fornecidos pelo autor(a).

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Resolvendo equações polinomiais com equações diferenciais ordinárias

AUTORA: BRUNA DA SILVA ARAUJO

ORIENTADOR: PEDRO TONIOL CARDIN

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente
PEDRO TONIOL CARDIN
Data: 28/02/2025 18:31:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. PEDRO TONIOL CARDIN (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Documento assinado digitalmente
MARCELO MESSIAS
Data: 01/03/2025 09:55:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. MARCELO MESSIAS (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciencias e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Documento assinado digitalmente
CLEONICE FATIMA BRACCIALI
Data: 28/02/2025 19:07:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. CLEONICE FATIMA BRACCIALI (Participaçao Virtual)
Departamento de Matemática / Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - campus de São José do Rio Preto

Presidente Prudente, 26 de fevereiro de 2025

Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem o apoio de tantas pessoas que estiveram ao meu lado em diferentes momentos da minha vida.

Primeiramente, agradeço à minha noiva, Marina, cujo companheirismo, amor, carinho e incentivo constantes foram fundamentais para superar os desafios ao longo do curso de graduação e pós-graduação. Sua presença foi e continua sendo um pilar essencial em minha trajetória.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram a estudar e nunca mediram esforços para apoiar minhas escolhas acadêmicas, minha eterna gratidão. Aos meus sogros, cuja generosidade e apoio ultrapassaram qualquer expectativa. Vocês não apenas me acolheram como parte da família, mas também me proporcionaram a segurança e a tranquilidade necessárias para seguir em frente com confiança.

Aos professores que, ao longo dos anos, se tornaram amigos, minha mais sincera gratidão. Suas palavras de encorajamento e seu entusiasmo pela ciência foram fundamentais para minha formação. Gostaria de deixar um agradecimento especial às professoras de Matemática do ensino fundamental e médio, Profa. Ângela e Profa. Silvana, cujas aulas e dedicação reforçaram meu encantamento pela beleza dos números e pela profundidade do raciocínio lógico. Embora não tenham sido as únicas responsáveis por essa paixão, suas influências marcaram profundamente o caminho que escolhi seguir.

Além do apoio pessoal e acadêmico, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, cujo incentivo foi essencial para a realização desta pesquisa.

"O saber não ocupa lugar e quanto
mais sabemos mais aprendemos."
Atílio T. de Araujo (meu bisavô)

Resumo

Esta dissertação investiga a aplicação de equações diferenciais ordinárias (EDOs) na resolução de equações polinomiais de diferentes graus. O foco principal do trabalho está nas raízes de equações polinomiais de grau n, tratadas como funções de uma variável dependente do termo independente do polinômio. Com base no artigo recente [5], os resultados apresentados mostram que essas funções satisfazem uma variedade de EDOs, o que permite explorar soluções analíticas para equações polinomiais de diferentes graus. O estudo apresenta como o uso de EDOs não só permite recuperar soluções clássicas, como a fórmula babilônica para equações quadráticas e a fórmula de Cardano para equações cúbicas, mas também oferece novas abordagens para polinômios de grau superior. Essa abordagem reforça a interconexão entre álgebra e análise, proporcionando uma visão mais profunda e moderna sobre a resolução de equações polinomiais.

Palavras-Chave: *Equação polinomial, Equação diferencial ordinária, Equações de Abel, Integrais elípticas e hiperelípticas.*

Abstract

This dissertation investigates the application of ordinary differential equations (ODEs) in solving polynomial equations of different degrees. The main focus of the work is on the roots of polynomials of degree n, treated as functions of a variable dependent on the independent term of the polynomial. Based on the recent paper [5], the results presented show that these functions satisfy a variety of ODEs, which allows for the exploration of analytical solutions to polynomial equations of different degrees. The study demonstrates how the use of ODEs not only recovers classical solutions, such as the Babylonian formula for quadratic equations and Cardano's formula for cubic equations, but also offers new approaches for higher-degree polynomials. This approach reinforces the interconnection between algebra and analysis, providing a deeper and more modern perspective on the resolution of polynomial equations.

Keywords: *Polynomial equation, Ordinary differential equation, Abel equations, Elliptic and hyperelliptic integrals.*

Sumário

Resumo **5**

Abstract **7**

Introdução **11**

1 Preliminares **13**
1.1 Noções básicas sobre polinômios 13
1.2 Noções básicas sobre EDOs 15
1.3 Noções básicas sobre funções hipergeométricas 16

2 Resolvendo equações polinomiais com EDOs **19**
2.1 Abordagem do problema 19
2.2 Resultados principais 20
2.3 Prova dos resultados principais 22

3 Aplicações **29**
3.1 Equação quadrática 29
3.1.1 Aplicação do Teorema 3 para $n = 2$ 30
3.1.2 Detalhando a EDO (2.8) do Corolário 3 para $n = 2$ 31
3.2 Equação cúbica 32
3.2.1 Aplicação do Teorema 3 para $n = 3$ 33
3.2.2 Desenvolvendo os Teoremas 4 e 5 para $n = 3$ 35
3.3 Equação quártica 37
3.3.1 Aplicação do Teorema 3 para $n = 4$ 38
3.3.2 Desenvolvendo os Teoremas 4 e 5 para $n = 4$ 40
3.4 Equação quíntica 42
3.5 Considerações finais 42

Referências **45**

A Códigos desenvolvidos no Wolfram Mathematica 14.0 **47**
A.1 Código correspondente a equação polinomial de grau 3 (trinomial e não trinomial) 47
A.2 Código correspondente a equação polinomial de grau 4 55
A.3 Código correspondente à equação polinomial de grau 5 60

Introdução

A resolução de equações polinomiais, desde suas formas mais simples até as de graus superiores, tem sido um dos pilares da matemática pura e aplicada ao longo dos séculos. De métodos clássicos e geométricos até técnicas algébricas avançadas, os matemáticos buscaram diferentes abordagens para entender e solucionar essas equações. No entanto, apesar dos progressos históricos, as equações polinomiais de grau elevado ainda apresentam desafios significativos, especialmente no que diz respeito à obtenção de soluções gerais e analíticas.

Desde as primeiras civilizações, como no Antigo Egito e na Mesopotâmia, os matemáticos já estavam envolvidos em resolver problemas relacionados a áreas e volumes, que podiam ser representados por equações polinomiais simples. No entanto, como descrito em [4], foi com o desenvolvimento da álgebra durante a Grécia Antiga, em especial com Diofanto de Alexandria no século III E.C., que os alicerces para a resolução de equações mais complexas começaram a ser lançados.

Segundo Howard Eves [4, p. 302-308], o grande avanço na resolução de equações polinomiais ocorreu no Renascimento, quando matemáticos como Gerolamo Cardano, François Viète e Rafael Bombelli começaram a sistematizar métodos para resolver equações de segundo e terceiro grau. Cardano, com sua obra "Ars Magna"(1545), foi um dos pioneiros na resolução de equações cúbicas.

Nos últimos anos, a interseção entre análise e álgebra tem aberto novas perspectivas para a resolução de problemas matemáticos complexos. Uma dessas interseções se dá no uso de equações diferenciais ordinárias (EDOs), que, apesar de sua origem em contextos distintos, demonstraram ser uma ferramenta poderosa no estudo de polinômios. O presente trabalho propõe uma exploração dessa conexão, estudando como as EDOs podem ser aplicadas para encontrar soluções para equações polinomiais de diversos graus, desde os mais simples até os mais elevados.

Nesta dissertação vamos explorar os resultados sobre equações polinomiais que podem ser obtidos utilizando como ferramenta principal as EDOs. Especificamente, buscamos estudar as raízes de uma família de polinômios de grau n,

$$P(x) = R(x) - q, \qquad q \in \mathbb{R},$$

onde $R(x)$ é um polinômio mônico de grau n tal que $R(0) = 0$ e $R'(0) \neq 0$, quando tratadas como funções de uma variável dependente do termo independente q do polinômio. Esta raiz, como uma função de q, a qual denotamos por $x(q)$, é o foco do estudo presente. Um dos objetivos desta dissertação é estudar as EDOs satisfeitas por $x(q)$, tendo como base o recente artigo [5] dos autores Armengol Gasull e Hector Giacomini.

Dessa forma, este estudo contribui para a integração de diferentes áreas da matemática, possibilitando uma nova perspectiva para a resolução de equações polinomiais e evidenciando métodos diferentes que podem ser explorados em futuras pesquisas e aplicações. De fato, essa abordagem permite uma nova interpretação, onde as raízes podem ser obtidas através de técnicas de EDOs, ampliando o alcance das metodologias tradicionais.

Com o desenvolvimento deste trabalho percebemos como as EDOs podem não apenas recuperar soluções conhecidas, mas também fornecer novas abordagens para equações polinomiais de grau superior. Espera-se que as técnicas descritas possam ser aplicadas de forma ampla, não só no campo da álgebra, mas também em outras áreas da matemática aplicada e computacional. Este trabalho também visa fornecer uma referência relevante sobre o tema, com a expectativa de que os resultados e as técnicas exploradas inspirem novas investigações e se mostrem aplicáveis em contextos diversos, ampliando a compreensão das soluções de equações polinomiais e fomentando avanços em outras áreas da matemática.

A seguir, fornecemos uma descrição dos capítulos da dissertação.

Inicialmente, no Capítulo 1, são apresentados os conceitos fundamentais necessários para o desenvolvimento do trabalho, incluindo noções básicas sobre equações polinomiais, EDOs e funções hipergeométricas, os quais oferecem uma base teórica sólida para as discussões subsequentes.

Em seguida, no Capítulo 2, a abordagem utilizada para solucionar equações polinomiais é apresentada. Esse capítulo inclui a descrição da metodologia adotada, bem como os resultados principais, os quais são enunciados e rigorosamente demonstrados, evidenciando a precisão e a aplicabilidade do método.

As implicações práticas dos resultados estudados no Capítulo 2 são então discutidas, aplicando os métodos desenvolvidos para resolver equações polinomiais de graus 2, 3, 4 e 5. Cada caso é analisado em detalhe no Capítulo 3, com o capítulo sendo finalizado com considerações que sintetizam os avanços proporcionados pelo estudo.

Por fim, no Apêndice A, são apresentados os códigos utilizados para verificação dos cálculos relacionados aos resultados principais. Esses códigos foram implementados através do software Wolfram Mathematica 14.0 e desempenharam um papel essencial na validação computacional dos resultados.

Com essa organização, espera-se fornecer uma abordagem relevante ao estudo das equações polinomiais, evidenciando a potência de métodos baseados em EDOs e funções hipergeométricas para a resolução de problemas matemáticos clássicos.

Capítulo

1

Preliminares

Neste capítulo, revisamos os conceitos fundamentais que servirão de base para o desenvolvimento deste trabalho. Iniciamos com uma breve exposição sobre polinômios e suas principais propriedades, seguindo as referências [8, 6]. Em seguida, utilizando livros clássicos, como [3, 11], abordaremos noções básicas sobre equações diferenciais ordinárias (EDOs), as quais desempenham um papel crucial em nossa análise subsequente. Por fim, a partir de [10], apresentamos conceitos introdutórios sobre funções hipergeométricas, que constituem as soluções abordadas neste estudo. A introdução a esses tópicos é essencial para contextualizar as ferramentas matemáticas utilizadas ao longo deste estudo.

1.1 Noções básicas sobre polinômios

Definição 1. *Seja $\mathbb{K}$ um anel comutativo sem divisores de zero.*

i) *$\mathbb{K}$ é chamado de **corpo** se todo elemento de $\mathbb{K}$ diferente de zero tem elemento inverso.*

ii) *Um **polinômio** P de uma variável sobre $\mathbb{K}$ é uma expressão do tipo*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

onde $a_i \in \mathbb{K}$ são os coeficientes do polinômio P correspondentes aos termos x^i, e n é um número inteiro não negativo.

iii) *O **grau** de um polinômio $P(x)$, denotado por $\deg(P(x))$, é definido como o maior valor de n para o qual $a_n \neq 0$.*

iv) *Um polinômio $P(x)$ é dito **mônico** se o coeficiente do termo de maior grau for igual a 1.*

Observação 1. *É possível mostrar que o conjunto de todos os polinômios sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de adição e multiplicação de polinômios forma um anel, o qual representaremos por $\mathbb{K}[x]$.*

Conforme discutido em [8, p. 40-44], as equações polinomiais podem ser manipuladas por operações básicas e possuem diversas propriedades que estendem a aritmética de números para elementos em $\mathbb{K}[x]$.

Proposição 1 (Algoritmo da Divisão)**.** *Dados dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$ com $D(x) \neq 0$, existem polinômios únicos $Q(x)$ e $R(x)$, chamados de* ***quociente*** *e* ***resto****, respectivamente, tais que*

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x),$$

com $\deg(R(x)) < \deg(D(x))$*. Quando $R(x) = 0$ dizemos que $D(x)$ é um divisor de $P(x)$.*

Definição 2 (Irredutibilidade)**.** *Um polinômio $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é* ***irredutível*** *se a seguinte condição for satisfeita: Se $P(x) = Q(x) \cdot D(x)$, com $Q(x), D(x) \in \mathbb{K}[x]$, então $Q \in \mathbb{K}$ ou $D \in \mathbb{K}$.*

O conceito de irredutibilidade é essencial na teoria de polinômios, pois permite compreender a estrutura dos elementos em $\mathbb{K}[x]$ de maneira análoga à decomposição em fatores primos nos números inteiros. Um polinômio irredutível em $\mathbb{K}[x]$ desempenha o papel de "primo" no anel de polinômios. Conforme destacado em [8, p. 159], a irredutibilidade e os zeros de polinômios são ferramentas fundamentais para resolver problemas algébricos e analisar propriedades de extensões de corpos.

Teorema 1. *Seja $P(x)$ um polinômio não constante com coeficientes no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Então $P(x)$ tem pelo menos um zero em $\mathbb{C}$.*

Esse teorema garante que qualquer polinômio em $\mathbb{C}[x]$ pode ser fatorado como um produto de polinômios de grau 1, o que será de grande importância para as análises em capítulos posteriores.

A seguir, introduzimos ferramentas fundamentais para a análise de polinômios, como a matriz de Sylvester e o conceito de resultante, conforme apresentado em [7, p. 146].

Definição 3. *Sejam $\mathbb{K}[x]$ um anel comutativo e P, Q dois polinômios em $\mathbb{K}[x]$,*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad e \qquad Q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

de graus n e m, respectivamente. A matriz de ordem $(n+m) \times (n+m)$,

$$\mathrm{Syl}(P,Q) = \begin{pmatrix} a_n & & & & b_m & & & & \\ a_{n-1} & a_n & & & b_{m-1} & b_m & & & \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & a_n & \vdots & b_{m-1} & \ddots & & \\ \vdots & a_{n-2} & \ddots & a_{n-1} & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2} & b_1 & \vdots & \vdots & \ddots & b_{m-1} \\ a_1 & \vdots & \vdots & \vdots & b_0 & b_1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \vdots & \vdots & & b_0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & a_0 & \ddots & a_1 & & & \ddots & \ddots & b_1 \\ & & \ddots & a_0 & & & & \ddots & b_0 \end{pmatrix}.$$

é chamada ***matriz de Sylvester*** *de P e Q. Observe que essa matriz possui m colunas com os coeficientes de P e n colunas com os coeficientes de Q*

Definição 4. *O* ***resultante*** *de P e Q, denotado por $\mathrm{Res}(P,Q)$ é o determinante da matriz de Sylvester, ou seja, $\mathrm{Res}(P,Q) = \det(\mathrm{Syl}(P,Q))$.*

Como o determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta, podemos reescrever o resultante de P e Q como sendo $\mathrm{Res}(P,Q) = \det(\mathrm{Syl}(P,Q)^t)$, onde $\mathrm{Syl}(P,Q)^t$ indica a transposta da matriz de Sylvester, ou seja,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 & a_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_1 & b_0 & & & & \\ & b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_1 & b_0 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_m & b_{m-1} & \dots & \dots & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Observe que o resultante é expresso pelo determinante de uma matriz com coeficientes em $\mathbb{K}$, logo $\mathrm{Res}(P,Q) \in \mathbb{K}$. Como veremos a seguir, um uso comum do resultante é na caracterização de quando um polinômio $P(x)$ tem um zero múltiplo. Para isso, definimos o discriminante, conforme apresentado em [6, p. 60].

Definição 5. *O discriminante de $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ é definido como*

$$\mathrm{dis}_x(P(x)) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_n} \mathrm{Res}(P, P'),$$

onde P' é a derivada de P em relação à variável x.

Observação 2. *Uma consequência das propriedades do resultante é que um polinômio P possui um zero múltiplo se, e somente se, $\mathrm{dis}_x(P(x)) = 0$. De fato, para um polinômio P ter um zero múltiplo, P e sua derivada P' compartilham um zero em comum.*

1.2 Noções básicas sobre EDOs

Definição 6. *Uma **equação diferencial ordinária (EDO)** é uma equação que envolve uma função real desconhecida e uma ou mais de suas derivadas, a qual pode ser expressa em sua forma geral como:*

$$F(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

*onde F é uma função de classe C^r definida no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+2}$. A **ordem** de uma EDO é definida como sendo a maior ordem da derivada presente na equação.*

Em (1.1), t é a variável independente e x é a variável dependente, pois x varia em função de t. Uma função x definida em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é considerada uma solução de (1.1) se x possuir derivadas até ordem n e satisfazer a equação (1.1). Conforme [11, p.2] e [3, p.15], a equação é classificada como ordinária porque envolve derivadas com relação a uma única variável independente, t.

Definição 7. *Uma EDO (1.1) é dita **autônoma** se a função F não depender explicitamente da variável independente t, ou seja, se puder ser escrita na forma:*

$$F(x, x', x'', \dots, x^{(n)}) = 0.$$

*Caso contrário, a EDO é chamada de **não autônoma** [11, p.38].*

Definição 8. *A EDO (1.1) é dita* ***linear*** *se F for uma função linear nas variáveis $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$, ou seja, se puder ser expressa na forma*

$$a_n(t)x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = g(t),$$

onde $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_n(t)$ e $g(t)$ são funções conhecidas.

Por outro lado, uma **EDO não linear** é aquela que não satisfaz a propriedade acima. Exemplos importantes de EDOs não lineares incluem as equações de Riccati e Abel.

Definição 9. *A* ***equação de Riccati*** *é uma EDO não-linear de primeira ordem da forma*

$$x' = a(t) + b(t)x + c(t)x^2,$$

onde $a(t), b(t)$ e $c(t)$ são funções conhecidas.

Definição 10. *Dado $m \in \mathbb{N}$ com $m > 0$, uma* ***EDO de Abel*** *de grau m é uma EDO real de primeira ordem, não autônoma, que pode ser expressa na forma*

$$x' = a_m(t)x^m + a_{m-1}(t)x^{m-1} + \cdots + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t), \tag{1.2}$$

onde $a_0(t), a_1(t), \ldots, a_m(t)$ são funções conhecidas.

Observação 3. *Note que para $m = 1$ e $m = 2$ na Definição 10, as equações (1.2) tornam-se uma EDO linear e uma EDO de Riccati, respectivamente. Para os diferentes valores de m, as equações (1.2) representam uma classe importante de EDOs com propriedades distintas e soluções que geralmente requerem métodos específicos de análise.*

Por fim, na teoria das EDOs, encontramos diversos resultados clássicos que são essenciais para o estudo de suas soluções. Destacamos a seguir, o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções, conforme [3, p.52].

Teorema 2 (Existência e Unicidade)**.** *Considere a EDO*

$$x' = f(t, x), \tag{1.3}$$

com f e $\partial f/\partial x$ contínuas em uma região $R \subset \mathbb{R}^2$. Então, para qualquer ponto $(t_0, x_0) \in R$, existe um intervalo I contendo t_0 e uma única solução $x = \phi(t)$ de (1.3) definida em I, tal que $\phi(t_0) = x_0$.

1.3 Noções básicas sobre funções hipergeométricas

Uma **função hipergeométrica** é uma solução de uma equação diferencial linear de ordem dois, cuja série de potências associada possui coeficientes definidos por uma razão envolvendo expressões algébricas simples. As funções hipergeométricas são utilizadas em diversos campos, como na resolução de equações diferenciais.

Considerando a **série hipergeométrica**

$$1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}z^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}z^3 + \cdots$$

do ponto de vista de sua convergência. Segundo Whittaker e Watson em [10, p. 281], a série define uma função que é analítica quando $|z| < 1$.

Ainda, conforme [10, p. 281], essa função possui um ponto de ramificação em $z = 1$ e que, se for feito um corte (ou seja, uma barreira intransponível) de $+1$ até $+\infty$ ao longo do eixo real, a função será analítica e de valor único em toda a região cortada do plano. A função será denotada por ${}_2F_1(a, b; c; z)$, que possui dois parâmetros no numerador e um no denominador.

Muitas funções importantes empregadas na Análise podem ser expressas por meio de funções hipergeométricas. Assim, obtêm-se:

$$(1+z)^n = {}_2F_1(-n, \beta; \beta; -z),$$
$$\log(1+z) = z\, {}_2F_1(1, 1; 2; -z),$$
$$e^z = \lim_{\beta\to\infty} {}_2F_1(1, \beta; 1; z/\beta).$$

O valor de ${}_2F_1(a, b; c; 1)$ quando $R(c - a - b) > 0$. Conforme em [10, p. 281], podemos verificar que, considerando os coeficientes de x^n nas diversas séries, que se $|x| < 1$, então

$$c\{c - 1 - (2c - a - b - 1)x\}\, {}_2F_1(a, b; c; x) + (c - a)(c - b)x\, {}_2F_1(a, b; c + 1; x)$$

$$= c(c - 1)(1 - x)\, {}_2F_1(a, b; c - 1; x)$$
$$= c(c - 1)\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1})x^n\right\},$$

onde u_n é o coeficiente de x^n em ${}_2F_1(a, b; c - 1; x)$. Agora, faça $x \to 1$. De acordo com [10, p. 282], o lado direito tende a zero se $1 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1})$ convergir para zero, ou seja, se $u_n \to 0$, o que ocorre quando $R(c - a - b) > 0$. Também, em [10, p. 282], o lado esquerdo tende a

$$c(a + b - c)\, {}_2F_1(a, b; c; 1) + (c - a)(c - b)\, {}_2F_1(a, b; c + 1; 1),$$

sob a mesma condição; e, portanto,

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{(c - a)(c - b)}{c(c - a - b)}\, {}_2F_1(a, b; c + 1; 1)$$

repetindo esse processo, vemos que

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \left\{\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c - a + n)(c - b + n)}{(c + n)(c - a - b + n)}\right\} {}_2F_1(a, b; c + m; 1),$$
$$= \left\{\lim_{m\to\infty}\prod_{n=0}^{m-1}\frac{(c - a + n)(c - b + n)}{(c + n)(c - a - b + n)}\right\} \lim_{m\to\infty} {}_2F_1(a, b; c + m; 1),$$

Se esses dois limites existirem, conforme em [10, p. 282], o primeiro limite é $\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$, se c não for um número inteiro negativo, onde Γ representa a função gama (veja [10, p. 238]), e, se $u_n(a, b, c)$ for o coeficiente de x^n em ${}_2F_1(a, b; c; x)$, e $m > |c|$, obtêm-se:

$$|{}_2F_1(a, b; c + m; 1) - 1| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|u_n(a, b, c + m)|$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} u_n(|a|, |b|, m - |c|)$$
$$< \frac{|ab|}{m - |c|}\sum_{n=0}^{\infty} u_n(|a| + 1, |b| + 1, m + 1 - |c|).$$

Agora, a última série converge, quando $m > |c| + a + |b| - 1$ e é uma função positiva decrescente de m. Portanto, como $\{m - |c|\}^{-1} \to 0$, temos

$$\lim_{m\to\infty} {}_2F_1(a, b; c + m; 1) = 1,$$

e, por fim

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)},$$

onde Γ representa a função gama.

Capítulo

2

Resolvendo equações polinomiais com EDOs

Neste capítulo apresentamos os principais resultados estudados nesta dissertação, os quais têm origem no recente artigo [5] dos autores Armengol Gasull e Hector Giacomini. Inicialmente, uma visão geral da abordagem adotada em [5] para a resolução de equações polinomiais usando equações diferenciais ordinárias é fornecida. Posteriormente, os resultados principais são apresentados, assim como suas respectivas demonstrações. Como veremos, a fim de simplificar a análise e explorar propriedades específicas, uma classe genérica de polinômios reais será considerada, a qual é representativa de uma classe mais ampla de polinômios, facilitando a identificação de padrões e a obtenção de resultados significativos.

2.1 Abordagem do problema

Seja $R(x)$ um polinômio mônico de grau n tal que $R(0) = 0$ e $R'(0) \neq 0$, e considere a equação polinomial de grau n dada por

$$P(x) = R(x) - q = 0, \qquad q \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

O objetivo será encontrar uma expressão local explícita da solução analítica $x(q)$ de (2.1) tal que $\lim_{q \to 0} x(q) = 0$, que existe e é único pelo Teorema da Função Implícita, uma vez que $R'(0) \neq 0$. De fato, denotando $f(x, q) = R(x) - q$, temos que

$$f(0,0) = R(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = R'(0) \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema da Função Implícita, existe V um aberto de $\mathbb{R}^2$ contendo $(0,0)$ tal que

i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, q) = R'(x) \neq 0$ para $(x, q) \in V$

ii) Para todo q próximo de 0, existe um único $x = x(q)$ tal que $(x(q), q) \in V$ e $f(x(q), q) = R(x(q)) = 0$.

Consideremos agora F um difeomorfismo qualquer tal que $F(0) = 0$. Então de (2.1), segue que

$$F(R(x(q))) = F(q).$$

Derivando em relação a q, obtemos

$$F'(R(x(q)))R'(x(q))x'(q) = F'(q),$$

e multiplicando ambos os lados por $G(R(x(q))) = G(q)$, sendo G uma função contínua arbitrária, a seguinte EDO com variáveis separáveis para $x(q)$ é obtida

$$G(R(x(q)))F'(R(x(q)))R'(x(q))x'(q) = G(q)F'(q),$$

com a condição inicial $x(0) = 0$. A EDO anterior pode ser facilmente resolvida, dando origem a

$$\phi(x) := \int_0^x G(R(s))F'(R(s))R'(s)\,ds = \int_0^q G(t)F'(t)\,dt =: \varphi(q). \tag{2.2}$$

A nova equação $\phi(x) = \varphi(q)$, a qual é equivalente a $R(x) = q$, permite obter $x = \phi^{-1}(\varphi(q))$, sendo $\phi^{-1}\circ\varphi$ uma função composta explícita que não é trivialmente equivalente a $x = R^{-1}(q)$. O ponto chave é escolher F de modo que ocorra algum cancelamento em $F'(R(x))R'(x)$. Como veremos, este cancelamento desejado pode ser obtido a partir da Proposição 2.

2.2 Resultados principais

Nesta seção, apresentamos os principais resultados estudados na dissertação, baseados no trabalho de Gasull e Giacomini [5]. As respectivas demonstrações serão detalhadas na Seção 2.3.

Proposição 2 ([5]). *Seja $P(x) = R(x) - q$ um polinômio real de grau $n \geqslant 2$, com $R(0) = 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Defina $D(q) = \mathrm{dis}_x(P(x))$ um polinômio na variável q. Então*

$$D(R(x)) = (R'(x))^2 U(x) = (P'(x))^2 U(x) \tag{2.3}$$

para algum polinômio U de grau $(n-1)(n-2)$. Além disso, se todas as raízes de R forem simples, $U(0) \neq 0$.

O próximo teorema estabelece que uma raiz de uma equação polinomial $P(x) = R(x) - q = 0$, para q em uma vizinhança de 0, pode ser expressa em termos de funções hiperelípticas e suas inversas. Como veremos na Observação 4, a restrição de que todas as raízes de R são simples pode ser removida, obtendo um resultado semelhante. Este resultado, embora semelhante, é uma generalização do resultado apresentado por Betti em [2].

Teorema 3 ([5]). *Seja $P(x) = R(x) - q$ um polinômio real de grau $n \geqslant 2$, com $R(0) = 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Defina $D(q) = \mathrm{dis}_x(P(x))$ um polinômio na variável q e suponha que todas as raízes de R são simples. Defina os polinômios $\mathcal{D}(q) = \mathrm{sgn}(D(0))D(q)$ e $\mathcal{U}(x) = \mathcal{D}(R(x))/(R'(x))^2$. Então, as funções $\phi(x)$ e $\varphi(q)$ definidas em (2.2) assumem a seguinte forma,*

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \mathrm{sgn}(R'(0)) \int_0^x \frac{G(R(s))}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}} ds \\ \varphi(q) &= \int_0^q \frac{G(t)}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}} dt \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde G é qualquer função contínua que satisfaz $G(0) \neq 0$. Além disso, em uma vizinhança de 0, ϕ é invertível e

$$x = \phi^{-1}(\varphi(q))$$

é uma raiz de $P(x) = 0$ que vai para 0 quando q tende para 0. Em particular, se G é polinomial, ϕ e φ são integrais elípticas ou hiperelípticas.

A título de ilustração, nas Seções 3.1 e 3.2 do Capítulo 3, o Teorema 3 é aplicado aos casos de baixo grau. Em particular, para $n = 2$ e $n = 3$, as fórmulas babilônica e de Cardano são obtidas, respectivamente. Na Seção 3.3, a aplicação do Teorema 3 é ilustrada ao caso de polinômios quárticos. Por fim, na Seção 3.4, o Teorema 3 é usado para reproduzir os resultados de Betti [2] em relação as equações quínticas.

A seguir, apresentamos o segundo resultado principal estudado na dissertação.

Teorema 4 ([5]). *Seja $P(x) = R(x) - q$ uma equação polinomial real de grau $n \geqslant 2$, com $R(0) = 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Considere $x(q)$ uma das raízes da equação, definida em uma vizinhança de 0, que tende a zero quando q tende a zero. Então $x(q)$ satisfaz a EDO de Abel generalizada de grau $m = n - 1$, onde $a_j(q), j = 0, 1, \ldots, n-1$ são funções racionais com coeficientes dependendo dos coeficientes de R.*

Uma consequência direta deste resultado é o seguinte corolário.

Corolário 1 ([5]). *Seja $P(x) = R(x) - q$ uma equação polinomial real quadrática, cúbica ou quártica com $R(0) = 0$. Considere $x(q)$ uma das raízes desta equação, definida em uma vizinhança de 0, que tende a zero quando q tende a 0. Então $x(q)$ satisfaz, respectivamente, uma EDO linear, uma EDO de Riccati ou uma EDO de Abel cujos coeficientes são funções racionais em q.*

As EDOs explícitas para os casos $n = 2, 3, 4$ e P na forma canônica $P(x) = x^n + px - q$ são dadas no Capítulo 3.

Uma segunda consequência dos resultados anteriores é o seguinte teorema.

Teorema 5 ([5]). *Seja $P(x) = R(x) - q$ uma equação polinomial real de grau $n \geqslant 2$, com $R(0) = 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Considere $x(q)$ uma das raízes da equação, definida em uma vizinhança de 0, que tende a zero quando q tende a 0. Então $x = x(q)$ satisfaz uma EDO linear de ordem $(n-1)$,*

$$b_{n-1}(q)x^{(n-1)} + b_{n-2}(q)x^{(n-2)} + \cdots + b_1(q)x' + b_0(q)x + b_n(q) = 0,$$

onde as funções $b_j(q)$ são polinômios em q, com coeficientes dependendo dos coeficientes de R.

Como veremos, a prova do Teorema 5 fornece um algoritmo construtivo para obter todas as funções b_j. Além disso, quando $P(x) = 0$ é uma equação trinomial da forma $P(x) = x^n + px - q = 0$, usando alguns raciocínios adicionais, as funções b_j podem ser simplificadas. Isso será explorado no Capítulo 3, onde tais coeficientes para $n \leqslant 5$ serão obtidos. Também, usando o Teorema 5 para $n = 3$, a fórmula de Cardano é recuperada novamente. Nesse caso, usando mudanças de variáveis adequadas, veremos que a equação diferencial correspondente pode ser escrita como a equação do oscilador harmônico. Por fim, também no Capítulo 3, duas expressões diferentes da solução $x(q)$ para o caso de polinômios quárticos é apresentada, uma em termos de funções hipergeométricas e outra na forma clássica.

2.3 Prova dos resultados principais

Nesta seção, as demonstrações dos principais resultados abordados na seção anterior serão apresentadas. Tais demonstrações foram obtidas no artigo [5], no entanto, ao longo do desenvolvimento a seguir, fornecemos um nível maior de detalhes matemáticos, a fim de esclarecer os passos envolvidos e garantir maior rigor na apresentação.

Prova da Proposição 2. Como o polinômio $P(x) = R(x) - q$ tem grau n, então $P' = R'$ tem grau $n-1$. A prova é realizada no caso em que todas as suas raízes em $\mathbb{C}$, as quais denotamos por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, são diferentes e, além disso, $R(\alpha_j) \neq R(\alpha_k)$ a menos que $j = k$. O resultado geral decorre deste caso genérico.

Considere o sistema

$$\begin{cases} P(x) = R(x) - q = 0, \\ P'(x) = R'(x) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Lembre-se que, a menos de uma constante não-nula, o discriminante entre P e P' é dado pelo resultante. Logo, pelas propriedades do resultante sabemos que $D(q)$ é um polinômio de grau $n-1$ na variável q e, além disso, $D(q)$ se anula para todos os valores de q para os quais o sistema acima é compatível. Assim, o sistema (2.5) é compatível se, e somente se, $q = R(\alpha_j), j = 1, \ldots, n-1$. De fato, podemos verificar que como $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ são soluções da segunda equação, se o sistema (2.5) é compatível, então tais valores também são soluções da primeira equação, ou seja, $P(\alpha_j) = R(\alpha_j) - q = 0$, para $j = 1, \ldots, n-1$ o que implica $q = R(\alpha_j)$, para $j = 1, \ldots, n-1$. Reciprocamente, se $q = R(\alpha_j)$, para $j = 1, \ldots, n-1$, temos que tais valores são soluções da primeira equação em (2.5), mas esses valores também são soluções da segunda equação, logo o sistema é compatível. Dessa forma,

$$D(q) = K(q - R(\alpha_1))(q - R(\alpha_2)) \cdots (q - R(\alpha_{n-1})),$$

onde $K \neq 0$. Considere o polinômio $Q(x) = D(R(x))$ de grau $n(n-1)$, o qual é dado por

$$Q(x) = D(R(x)) = K(R(x) - R(\alpha_1))(R(x) - R(\alpha_2)) \cdots (R(x) - R(\alpha_{n-1})).$$

Então, podemos observar que $Q(\alpha_j) = D(R(\alpha_j)) = 0$. Além disso, como $Q'(x) = D'(R(x))R'(x)$, então $Q'(\alpha_j) = D'(R(\alpha_j))R'(\alpha_j) = 0$, pois $R'(\alpha_j) = 0$ para $j = 1, \ldots, n-1$. Também, como

$$Q''(x) = D''(R(x))(R'(x))^2 + D'(R(x))R''(x),$$

temos $Q''(\alpha_j) = D'(R(\alpha_j))R''(\alpha_j) \neq 0$ já que os α_j são zeros simples de $R'(x)$. Isso implica que todos os α_j são zeros duplos de $Q(x)$, com isso, vale (2.3). Assim, como $(R'(x))^2$ tem grau $2(n-1)$ e $U(x)$ tem grau $(n-1)(n-2)$, o polinômio $D(R(x)) = (R'(x))^2 U(x)$ tem grau $n(n-1)$.

Finalmente, uma vez que $D(0) = C\mathrm{Res}(R, R')$, com $C \neq 0$, a hipótese de que todos os zeros de R são simples é equivalente a $D(0) \neq 0$. Visto que $R'(0) \neq 0$, temos que $U(0) \neq 0$ e isso conclui a demonstração. ■

Prova do Teorema 3. Para ajudar no entendimento da demonstração, iniciamos recordando a igualdade (2.2),

$$\phi(x) = \int_0^x G(R(s))F'(R(s))R'(s)\,ds = \int_0^q G(t)F'(t)\,dt = \varphi(q). \tag{2.6}$$

Considere a função

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(s)}}\, ds,$$

a qual é um difeomorfismo local em 0, pois $\mathcal{D}(0) = \operatorname{sgn}(D(0))D(0) > 0$ e, como consequência, $F'(0) = 1/\sqrt{\mathcal{D}(0)} \neq 0$. Então, pela Proposição 2,

$$F'(R(s)) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(R(s))}} = \frac{1}{\sqrt{(R'(s))^2\mathcal{U}(s)}} = \frac{1}{|R'(s)|\sqrt{\mathcal{U}(s)}} = \frac{\operatorname{sgn}(R'(0))}{R'(s)\sqrt{\mathcal{U}(s)}} \tag{2.7}$$

e, assim, (2.6) torna-se,

$$\phi(x) = \operatorname{sgn}(R'(0)) \int_0^x \frac{G(R(s))}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}}\, ds = \int_0^q \frac{G(t)}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}}\, dt = \varphi(q).$$

Observe que $\varphi'(0) = G(0)/\sqrt{\mathcal{D}(0)} \neq 0$. Portanto, φ é um difeomorfismo local em 0. O mesmo acontece com ϕ, porque $\phi'(0) = \operatorname{sgn}(R'(0))G(0)/\sqrt{\mathcal{U}(0)} \neq 0$. Assim, $x = \phi^{-1}(\varphi(q))$. Isso conclui a demonstração. ■

A próxima observação apresenta uma situação em que algumas das hipóteses do Teorema 3 não são satisfeitas.

Observação 4. *No Teorema 3, a hipótese de que todas as raízes de $R(x)$ são simples é utilizada para garantir que $R'(0) \neq 0$ e $D(0) \neq 0$. Essas condições, juntamente com a hipótese de que $G(0) \neq 0$, asseguram que as funções definidas pelas integrais hiperelípticas $\phi(x)$ e $\varphi(q)$ sejam localmente invertíveis em 0. Se, por outro lado, a invertibilidade não é exigida, ainda é possível obter a igualdade $\phi(x) = \varphi(q)$, com essas funções definidas como em (2.4). Nesse caso, o valor $\operatorname{sgn}(R'(0))$ deve ser substituído pelo sinal de $R(s)$ para s no intervalo contendo 0 e x.*

Além disso, se $R'(0) = 0$, isto é, quando a equação polinomial $R(x) = q$ na vizinhança de $x = 0$ assume a forma $R(x) = x^k + O(x^{k+1}) = q$, para algum $k \geqslant 2$, o Teorema da Preparação de Weierstrass garante que essa equação pode ser resolvida localmente por k soluções suaves $x_j(q)$, para $j = 1, \ldots, k$, cada uma correspondente a um ramo da solução. Cada um desses ramos $x_j(q)$ satisfaz a EDO associada ao problema, resultando na igualdade $\phi(x) = \varphi(q)$ com as funções definidas em (2.4). Ramos semelhantes também surgem ao tentar inverter ϕ. Para mais detalhes sobre o Teorema da Preparação de Weierstrass veja, por exemplo, [1].

A seguir, dois corolários dos resultados anteriores serão apresentados, os quais serão utilizados nas demonstrações dos Teoremas 4 e 5. Observe que, a partir do primeiro corolário, as funções definidas pelas integrais hiperelípticas dadas no Teorema 3 são substituídas por primitivas de funções racionais.

Corolário 2 ([5]). *Seja $P(x) = R(x) - q$ um polinômio real de grau $n \geqslant 2$, com $R(0) = 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Defina $D(q) = \operatorname{dis}_x(P(x))$ e suponha que todas as raízes de R são simples. Defina o polinômio $U(x) = D(R(x))/(R'(x))^2$ e as funções*

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{H(R(s))}{R'(s)U(s)}\, ds \qquad e \qquad \Psi(q) = \int_0^q \frac{H(t)}{D(t)}\, dt,$$

onde H é qualquer função contínua que satisfaz $H(0) \neq 0$. Então, em uma vizinhança de 0, Φ é invertível e

$$x = \Phi^{-1}(\Psi(q))$$

é uma raiz de $P(x) = 0$ que vai para 0 quando q tende para 0.

Em particular, se H é um polinômio, Φ e Ψ são primitivas de funções racionais.

Demonstração. No Teorema 3 tome,

$$G(t) = \frac{H(t)}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}}.$$

Observe que, usando (2.7) obtemos

$$G(R(s)) = \frac{H(R(s))}{\sqrt{\mathcal{D}(R(s))}} = \frac{\operatorname{sgn}(R'(0))H(R(s))}{R'(s)\sqrt{\mathcal{U}(s)}}.$$

Portanto,

$$\operatorname{sgn}(R'(0))\frac{G(R(s))}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}} = (\operatorname{sgn}(R'(0)))^2\frac{H(R(s))}{R'(s)\left(\sqrt{\mathcal{U}(s)}\right)^2} = \operatorname{sgn}(U(0))\frac{H(R(s))}{R'(s)U(s)}.$$

De forma similar,

$$\frac{G(t)}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}} = \frac{H(t)}{\left(\sqrt{\mathcal{D}(t)}\right)^2} = \operatorname{sgn}(D(0))\frac{H(t)}{D(t)} = \operatorname{sgn}(U(0))\frac{H(t)}{D(t)}.$$

Substituindo ambas as expressões em (2.4) obtemos que $\Phi(x) = \Psi(q)$ e o corolário segue. De fato,

$$\phi(x) = \operatorname{sgn}(R'(0))\int_0^x \frac{G(R(s))}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}}ds = \operatorname{sgn}(U(0))\int_0^x \frac{H(R(s))}{R'(s)U(s)}ds$$

e

$$\varphi(q) = \int_0^q \frac{G(t)}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}}dt = \operatorname{sgn}(U(0))\int_0^q \frac{H(t)}{D(t)}dt$$

e como $\phi(x) = \varphi(q)$ temos que

$$\operatorname{sgn}(U(0))\int_0^x \frac{H(R(s))}{R'(s)U(s)}ds = \operatorname{sgn}(U(0))\int_0^q \frac{H(t)}{D(t)}dt$$

o que implica

$$\int_0^x \frac{H(R(s))}{R'(s)U(s)}ds = \int_0^q \frac{H(t)}{D(t)}dt,$$

ou seja, $\Phi(x) = \Psi(q)$. ■

O próximo corolário é uma versão da Observação 4 nesta situação. Note que a hipótese de que todas as raízes de R são simples não é necessária.

Corolário 3 ([5]). *Seja $P(x) = R(x) - q$ um polinômio real de grau $n \geqslant 2$, com $R(0) = 0$ e $q \in \mathbb{R}$. Defina $D(q) = \operatorname{dis}_x(P(x))$. Considere $x = x(q)$ uma raiz de $P(x) = 0$ que vai para 0 quando q tende para 0. Então,*

$$x' = \frac{R'(x)U(x)}{D(q)}, \tag{2.8}$$

onde U é o polinômio $U(x) = D(R(x))/(R'(x))^2$.

Demonstração. Pelo Teorema da Preparação de Weierstrass (veja, [1]), a curva algébrica de equação $P(x) = R(x) - q = 0$, localmente em torno de $(x, q) = (0, 0)$, tem até n ramos

suaves $x = x(q)$, onde cada ramo representa uma solução da equação que passa pelo ponto $(x, q) = (0, 0)$. Para cada ramo $x = x(q)$, temos que $R(x(q)) = q$. Logo,

$$R'(x(q))x'(q) = 1.$$

Agora, pela Proposição 2, tem-se que $D(R(x)) = (R'(x))^2 U(x)$ e como $R(x) = q$ podemos considerar $D(R(x)) = D(q)$. Portanto, substituindo na expressão para $x'(q)$, obtemos

$$x'(q) = \frac{1}{R'(x(q))} = \frac{R'(x(q))U(x(q))}{D(q)}.$$

Isso completa a prova da expressão desejada para $x'(q)$. ■

As aplicações dos resultados acima referentes à equação polinomial de grau $n \leqslant 5$ são apresentadas no Capítulo 3.

Prova do Teorema 4. Pelo Corolário 3, qualquer ramo de soluções $x = x(q)$ de $P(x) = R(x) - q = 0$ passando por $(x, q) = (0, 0)$ satisfaz a equação diferencial

$$x' = \frac{R'(x)U(x)}{D(q)},$$

onde $R'(x)U(x)$ é um polinômio de grau $(n-1)^2$ na variável x e $D(q)$ é um polinômio na variável q de grau $n-1$. Ao dividir $R'U$ por P, pelo algoritmo da divisão, $R'(x)U(x) = P(x)Q(x) + W(x)$, onde W é um polinômio em q e x de grau no máximo $n-1$ nesta última variável. Ou seja,

$$W(x) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j(q)x^j,$$

onde as funções $w_j(q)$ são polinômios em q. Portanto, uma vez que $P(x(q)) \equiv 0$, quando $x = x(q)$ vale que,

$$x' = \frac{R'(x)U(x)}{D(q)} = \frac{P(x)Q(x) + W(x)}{D(q)} = \frac{W(x)}{D(q)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{w_j(q)}{D(q)} x^j = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(q)x^j,$$

e isso conclui a demonstração. ■

No Capítulo 3, a EDO (2.8) será detalhada para as equações polinomiais de grau $n = 2, 3, 4$.

A seguir, a prova do Teorema 5 é apresentada e, no Capítulo 3, a aplicação desse resultado para as equações polinomiais de grau $n = 3, 4, 5$ é explorada. Em particular, a fórmula de Cardano é recuperada novamente, obtendo-a como uma solução particular da equação para o oscilador harmônico. Também, com auxílio do software Wolfram Mathematica 14.0, a solução de equações quárticas em termos de uma função hipergeométrica generalizada é obtida, a qual fornece uma expressão alternativa à fórmula algébrica clássica, também apresentada no Capítulo 3.

O próximo Lema será utilizado na demonstração do Teorema 5.

Lema 1 ([5]). *Seja $x(q)$ uma solução da equação polinomial $P(x) = R(x) - q = 0$ e considere $v(q) = A(x(q), q)/D^m(q)$, onde $m \geqslant 1$, $D(q) = dis_x(P(x))$ e A é um polinômio. Então $v'(q) = B(x(q), q)/D^{m+1}(q)$, para algum novo polinômio $B(x, q)$.*

Demonstração. Sendo $v(q)$ como enunciado, é possível obter $v'(q)$ da seguinte forma:

$$v'(q) = \frac{\frac{\partial A(x(q),q)}{\partial x}x'(q) + \frac{\partial A(x(q),q)}{\partial q}}{D^m(q)} - m\frac{A(x(q),q)D'(q)}{D^{m+1}(q)} = \frac{B(x(q),q)}{D^{m+1}(q)},$$

onde $B(x,q) = \frac{\partial A(x,q)}{\partial x}R'(x)U(x) + \frac{\partial A(x,q)}{\partial q}D(q) - mA(x,q)D'(q)$ e U é o polinômio definido pelo Corolário 3. ■

Prova do Teorema 5. Começamos como na prova do Teorema 4, lembrando que pelo Corolário 3 tem-se que

$$x' = \frac{R'(x)U(x)}{D(q)} =: \frac{c_1(x)}{D(q)},$$

onde c_1 é um polinômio em x de grau $(n-1)^2$. Observe que, aplicando o Lema 1 reiteradamente, definindo $v = x^{(k)}$, $k = 2, 3, \ldots$, é possível obter

$$x^{(k)} = \frac{C_k(x,q)}{D^k(q)}, \quad k \geqslant 2,$$

onde $C_k(x,q)$ são polinômios de graus crescentes em x, definidos recursivamente como

$$C_{k+1}(x,q) = \frac{\partial C_k(x,q)}{\partial x}R'(x)U(x) + \frac{\partial C_k(x,q)}{\partial q}D(q) - kC_k(x,q)D'(q),$$

e $C_1(x,q) = c_1(x)$. Como na prova do Teorema 4, pode-se escrever

$$C_k(x,q) = Q_k(x,q)P(x) + B_k(x,q), \quad k \geqslant 1,$$

onde cada B_k é um polinômio em q e x, de grau no máximo $n-1$ nesta última variável. Portanto, $x = x(q)$ satisfaz

$$x^{(k)} = \frac{B_k(x,q)}{D^k(q)} = \sum_{j=0}^{n-1} b_{k,j}(q)x^j, \quad k \geqslant 1. \tag{2.9}$$

Para $k = 1$ esta EDO é do tipo Abel, conforme dado no Teorema 4.

Para obter uma equação diferencial linear de ordem $(n-1)$ usando (2.9) para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, como primeiro passo, prova-se que essas $n-1$ EDOs podem ser transformadas em $(n-2)$ EDOs, onde a expressão do lado esquerdo da igualdade, para cada uma dessas EDOs, é um polinômio de grau um nas variáveis x', x'', $\ldots$, $x^{(n-1)}$ e com coeficientes que são funções racionais de q, enquanto a expressão do lado direito da igualdade continua sendo um polinômio em x, mas com seu grau reduzido para $n-2$.

Se pelo menos $n-2$ das funções $b_{n-1,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, se anulam identicamente, a EDO já aparece em sua forma simplificada. Caso contrário, pelo menos dois deles, digamos $b_{n-1,i}$ e $b_{n-1,\ell}$, não são identicamente zero. Então, calculando $x^{(i)}/b_{n-1,i}(q) - x^{(\ell)}/b_{n-1,\ell}(q)$, cancela-se o termo x^{n-1} no correspondente lado direito, obtendo uma das novas relações desejadas. Fazendo o mesmo procedimento com vários pares de relações (2.9) satisfazendo que $b_{n-1,j} \neq 0$, obtemos as $n-2$ relações procuradas.

Partindo destas novas relações, combinando-as de forma semelhante, obtemos, para cada $m = 3, \ldots, n-1$, em cada etapa, $(n-m)$ EDOs, cuja expressão do lado direito da igualdade tem grau $n-m$ na variável x. A última etapa deste procedimento fornece a equação diferencial linear desejada. ■

Embora a EDO linear dada no Teorema 5 possa ser obtida, em geral, sua expressão é enorme. Para mostrar alguns exemplos, no próximo capítulo é apresentada essa EDO para o caso particular de equações polinomiais trinomiais

$$P(x) = x^n + px - q = 0, \tag{2.10}$$

quando $n = 3, 4, 5$. Como veremos, neste caso de polinômios trinomiais, o resultado da EDO tem uma expressão simples. Para o caso não trinomial, em geral, a EDO associada é não homogênea (ver Observação 6).

Observe também que para $n > 1$, próximo de $q = 0$, a solução de (2.10) é

$$x = x(q) = \frac{1}{p}q - \frac{1}{p^{n+1}}q^n + o(q^n).$$

Portanto, toda EDO linear de ordem $(n-1)$ apresentada no Capítulo 3 terá que ser resolvida com as condições iniciais

$$x(0) = 0, x'(0) = \frac{1}{p}, x''(0) = x'''(0) = \cdots = x^{(n-2)}(0) = 0. \tag{2.11}$$

Capítulo

3

Aplicações

Neste capítulo, os resultados principais abordados no capítulo anterior são aplicados para as equações polinomiais de grau $n = 2, 3, 4, 5$. Para cada valor de n, as particularidades das soluções e suas implicações no contexto do problema estudado serão exploradas, ilustrando como as técnicas e métodos desenvolvidos podem ser aplicados de maneira sistemática. Essas aplicações fornecem uma visão mais clara das generalizações feitas anteriormente e destacam a eficiência dos resultados obtidos em diferentes cenários. A aplicação dos resultados do Capítulo 2 segue o procedimento descrito no artigo [5], no entanto, ao longo do desenvolvimento, fornecemos um nível maior de detalhes matemáticos a fim de facilitar a compreensão dos passos envolvidos.

3.1 Equação quadrática

Howard Eves [4, p. 78] apresenta um problema babilônico que propõe determinar o lado de um quadrado, considerando que a diferença entre sua área e seu lado é o número (sexagesimal) 14,30. A solução apresentada descreve um processo em que se toma metade de 1 (0;30), calcula-se seu quadrado (0;15) e o soma a 14,30, resultando em 14,30;15, identificado como o quadrado de 29;30. Por fim, somando-se 0;30 a 29;30, obtém-se o valor 30, correspondente ao lado do quadrado.

Observação 5. *No sistema numérico sexagesimal usado pelos babilônios, o ponto e vírgula (;) é uma convenção moderna para separar as partes inteiras das partes fracionárias de um número, de forma análoga ao uso do ponto ou vírgula decimal no sistema decimal. Por exemplo, 14;30 indica o número 14 unidades inteiras e 30 unidades de 1/60 (ou 14 + 30/60 = 14,5 em decimal) e 0;30 indica 30 unidades de 1/60 (ou 0,5 em decimal). Veja [4, p. 36, 60-66].*

Silva [9, p. 17] apresenta o procedimento para resolução babilônica da equação quadrática $x^2 - px = q$, onde p e q são positivos, embora não necessariamente inteiros. O procedimento consiste em tomar a metade de p, elevar ao quadrado e somar esse valor em ambos os lados da equação. Assim,

$$x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

No lado esquerdo, a expressão pode ser fatorada como um quadrado perfeito:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os lados e somando $\frac{p}{2}$ obtemos

$$x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}.$$

Assim, os babilônios utilizavam a solução que fazia sentido para as situações práticas, como a determinação de dimensões de figuras geométricas, aplicando esse método para encontrar a solução correspondente.

3.1.1 Aplicação do Teorema 3 para $n = 2$

Nesta seção, a fórmula babilônica é derivada a partir dos resultados do Teorema 3. Considere $P(x) = x^2 + px - q$, com $p \neq 0$. Então, $P'(x) = R'(x) = 2x + p$,

$$D(q) = \operatorname{dis}_x(P(x)) = -\operatorname{Res}(P, P') = -\begin{vmatrix} 1 & p & -q \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 2 & p \end{vmatrix} = p^2 + 4q,$$

$$\mathcal{D}(q) = \operatorname{sgn}(D(0))D(q) = \operatorname{sgn}(p^2)D(q) = D(q)$$

e

$$\mathcal{D}(R(x)) = p^2 + 4(x^2 + px) = 4x^2 + 4px + p^2 = (2x + p)^2.$$

Então,

$$\mathcal{U}(x) = \frac{\mathcal{D}(R(x))}{(R'(x))^2} = \frac{(2x+p)^2}{(2x+p)^2} = 1.$$

Além disso, como $R'(0) = p$, segue da Equação (2.4) que, para $|q| < p^2/4$ e considerando $G = 1$,

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sgn}(R'(0))}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}}\, ds = \int_0^x \operatorname{sgn}(p)\, ds = \operatorname{sgn}(p)x,$$
$$\varphi(q) = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}}\, dt = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{p^2 + 4t}}\, dt,$$

substituindo $u = p^2 + 4t$ temos,

$$\int_0^q \frac{1}{\sqrt{p^2+4t}}\, dt = \int_0^q \frac{1}{4\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{4}\int_0^q u^{-\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{u}\Big|_0^q.$$

Logo,

$$\varphi(q) = \frac{1}{2}\sqrt{p^2+4t}\Big|_0^q = \frac{\sqrt{p^2+4q} - \sqrt{p^2}}{2}.$$

Então, pelo Teorema 3 obtemos a equação $\phi(x) = \varphi(q)$, que dá origem à fórmula babilônica:

$$\phi(x) = \varphi(q) \Rightarrow \operatorname{sgn}(p)x = \frac{\sqrt{p^2+4q} - |p|}{2} \Rightarrow x = \frac{-p + \operatorname{sgn}(p)\sqrt{p^2+4q}}{2}.$$

Ao usar o Corolário 2 em vez do Teorema 3, com $H = 1$, obtemos

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{R'(s)U(s)}\, ds = \int_0^x \frac{1}{R'(s)}\, ds = \int_0^x \frac{1}{2s+p}\, ds,$$

e

$$\Psi(q) = \int_0^q \frac{1}{D(t)}\,dt = \int_0^q \frac{1}{p^2+4t}\,dt$$

substituindo $v = 2s + p$ e $u = p^2 + 4t$ temos,

$$\int_0^x \frac{1}{2s+p}\,ds = \int_p^{2x+p} \frac{1}{2v}\,dv = \frac{1}{2}\ln(v)\Big|_p^{2x+p} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2x+p}{p}\right)$$

e

$$\int_0^q \frac{1}{p^2+4t}\,dt = \int_{p^2}^{p^2+4q} \frac{1}{4u}\,du = \frac{1}{4}\ln(u)\Big|_{p^2}^{p^2+4q} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{p^2+4q}{p^2}\right).$$

Ao usar $\Phi(x) = \Psi(q)$, obtemos a fórmula clássica:

$$\Phi(x) = \Psi(q) \Rightarrow 2\ln\left(\frac{2x+p}{p}\right) = \ln\left(\frac{p^2+4q}{p^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{2x+p}{p}\right)^2 = \frac{p^2+4q}{p^2}$$

$$\Rightarrow (2x+p)^2 = p^2+4q \Rightarrow 4x^2+4px-4q = 0 \Rightarrow x^2+px-q = 0.$$

Finalmente, observe que, embora a fórmula obtida para $x = x(q)$ seja válida quando $|q| < p^2/4$, sua natureza algébrica a torna válida para todos os valores de p e q.

3.1.2 Detalhando a EDO (2.8) do Corolário 3 para $n = 2$

Dando continuidade à análise do caso quadrático apresentada em [5], consideramos novamente a equação $P(x) = x^2 + px - q = 0$. Conforme visto anteriormente, o discriminante é dado por $D(q) = p^2 + 4q$, enquanto o polinômio $U(x)$ é constante, com $U(x) = 1$. Nessas condições, a solução $x(q)$ satisfaz a equação diferencial (2.8) que, para este caso, assume a forma

$$x' = \frac{R'(x)U(x)}{D(q)} = \frac{2x+p}{p^2+4q} = \frac{2}{p^2+4q}x + \frac{p}{p^2+4q}, \tag{3.1}$$

a qual é uma EDO linear.

Reescrevendo a EDO (3.1) como

$$\frac{dx}{dq} - \frac{2}{p^2+4q}x = \frac{p}{p^2+4q},$$

e multiplicando ambos os lados da EDO pelo fator de integração $(p^2+4q)^{-\frac{1}{2}}$ obtemos,

$$\frac{d((p^2+4q)^{-\frac{1}{2}}x)}{dq} = p(p^2+4q)^{-\frac{3}{2}}.$$

Integrando ambos os lados em relação a variável q

$$(p^2+4q)^{-\frac{1}{2}}x = p\int (p^2+4q)^{-\frac{3}{2}}dq,$$

e substituindo $u = p^2 + 4q$ no lado direito da equação, temos que

$$p\int (p^2+4q)^{-\frac{3}{2}}dq = \frac{p}{4}\int u^{-\frac{3}{2}}du = \frac{pu^{-\frac{1}{2}}}{-2} = -\frac{p}{2}(p^2+4q)^{-\frac{1}{2}} + c$$

para c uma constante. Assim,

$$(p^2+4q)^{-\frac{1}{2}}x = -\frac{p}{2}(p^2+4q)^{-\frac{1}{2}} + c.$$

Logo, substituindo $k = 2c$, obtemos a solução geral da EDO linear (3.1):

$$x(q) = \frac{-p + k\sqrt{p^2+4q}}{2}.$$

Ao usar a condição inicial $x(0) = 0$, chegamos novamente à solução babilônica

$$x(q) = \frac{-p + \operatorname{sgn}(p)\sqrt{p^2+4q}}{2}.$$

3.2 Equação cúbica

Segundo Howard Eves [4, p. 302] as equações polinomiais cúbicas foram resolvidas no século XVI por matemáticos italianos, entre os quais se destacaram Scipione del Ferro, Niccolò Fontana (Tartaglia) e Girolamo Cardano.

Como apresentado em [5], a equação polinomial cúbica $y^3 + by^2 + cy + d = 0$ pode ser transformada em uma forma mais simples. De fato, introduzindo a substituição $x = y + \frac{b}{3}$, o termo quadrático é eliminado, resultando em uma equação cúbica da forma

$$x^3 + px + q = 0, \tag{3.2}$$

em que os coeficientes p e q são adequados à transformação. Assume-se $p \neq 0$, pois, caso contrário, as soluções podem ser determinadas de forma direta.

Para resolver (3.2), procura-se uma solução na forma $x = u + v$. Substituindo essa expressão em (3.2), obtêm-se:

$$u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v) = 0.$$

Suponha que u e v satisfaçam simultaneamente as seguintes condições:

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad \text{e} \qquad 3uv + p = 0.$$

A partir da segunda condição, é possível isolar v e substituir na primeira, conduzindo a uma equação de segundo grau para $z = u^3$:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Resolvendo essa equação, e utilizando a relação $x = u - p/(3u)$, obtêm-se a famosa Fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

O procedimento descrito em [5] evidencia a engenhosidade da abordagem histórica de Cardano para a resolução de equações cúbicas.

3.2.1 Aplicação do Teorema 3 para $n = 3$

Nesta seção, a Fórmula de Cardano é derivada a partir dos resultados do Teorema 3. Conforme apresentado em [5], a seguinte forma de uma equação cúbica é considerada

$$P(x) = x^3 + px - q = 0. \tag{3.3}$$

Note que, contrastando com a notação usual em (3.2), na equação (3.3) aparece o sinal de menos na frente de q. Além disso, o caso trivial em que $p = 0$ é excluído, uma vez que as soluções, neste caso, são encontradas de forma direta.

Na notação do Teorema 3, com $P'(x) = R'(x) = 3x^2 + p$ temos,

$$D(q) = -\operatorname{Res}(P, P') = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & p & -q & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p & -q \\ 3 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & p \end{vmatrix} = -(4p^3 + 27q^2),$$

$$\mathcal{D}(q) = \operatorname{sgn}(D(0))D(q) = \operatorname{sgn}(-4p^3)(-(4p^3 + 27q^2)) = \operatorname{sgn}(p)(4p^3 + 27q^2),$$

e

$$\mathcal{D}(R(x)) = \operatorname{sgn}(p)(4p^3 + 27(x^3 + px)^2) = \operatorname{sgn}(p)(3x^2 + 4p)(3x^2 + p)^2,$$

Então,

$$\mathcal{U}(x) = \frac{\mathcal{D}(R(x))}{(R'(x))^2} = \frac{\operatorname{sgn}(p)(3x^2 + 4q)(3x^2 + p)^2}{(3x^2 + p)^2} = \operatorname{sgn}(p)(3x^2 + 4p).$$

Portanto, tomando $G = 1$, a equação $\phi(x) = \varphi(q)$ se escreve como,

$$\operatorname{sgn}(R'(0)) \int_0^x \frac{1}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}} ds = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}} dt$$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sgn}(p)}{\sqrt{\operatorname{sgn}(p)(3s^2 + 4p)}} ds = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn}(p)(4p^3 + 27t^2)}} dt. \tag{3.4}$$

Utilizando a relação entre primitivas das funções arcsinh e arcsin, obtêm-se as seguintes igualdades:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{Ay^2 + B}} dy = \begin{cases} \frac{\operatorname{arcsinh}(x\sqrt{A/B})}{\sqrt{A}}, & \text{quando} \quad A > 0, B > 0, \\ \frac{\operatorname{arcsin}(x\sqrt{-A/B})}{\sqrt{-A}}, & \text{quando} \quad A < 0, B > 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

onde a segunda igualdade é válida apenas para $|x| < \sqrt{-B/A}$. Assim, quando $p > 0$ em (3.4) obtemos que

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{3s^2 + 4p}} ds = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{27t^2 + 4p^3}} dt,$$

tomando $A = 3 > 0$ e $B = 4p > 0$ para a integral do lado esquerdo da igualdade anterior e $A = 27 > 0$ e $B = 4p^3 > 0$ para a integral do lado direito, aplicando a primeira igualdade de (3.5), segue que

$$\frac{\operatorname{arcsinh}(x\sqrt{3/4p})}{\sqrt{3}} = \frac{\operatorname{arcsinh}(q\sqrt{27/4p^3})}{\sqrt{27}} \Rightarrow \operatorname{arcsinh}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}\right),$$

aplicando sinh em ambos os lados da igualdade obtemos,

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{p}}x = \sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}\right)\right)$$

ou equivalentemente,

$$x = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}\right)\right). \tag{3.6}$$

Ao usar que $\operatorname{arcsinh}(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$ obtemos,

$$\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}(z)\right) = \sinh\left(\frac{1}{3}\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)\right),$$

dado que $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$, para $t = \frac{1}{3}\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$ temos,

$$\begin{aligned}\sinh\left(\frac{1}{3}\ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)\right) &= \frac{1}{2}\left(\left(e^{\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(e^{\ln\left(z+\sqrt{z^2+1}\right)}\right)^{-\frac{1}{3}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(z + \sqrt{z^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}}\right),\end{aligned}$$

então,

$$\sinh\left(\frac{1}{3}\operatorname{arcsinh}(z)\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{z + \sqrt{z^2+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{z + \sqrt{z^2+1}}}\right)$$

e portanto da Equação (3.6) obtêm-se,

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}, \tag{3.7}$$

isto é, a Fórmula de Cardano para a Equação (3.3).

Ao considerar o caso $p < 0$ e desenvolver o mesmo tipo de cálculo, mas usando a segunda igualdade em (3.5), chegamos a

$$x = \frac{2\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\right)\right). \tag{3.8}$$

De fato, quando $p < 0$ em (3.4) obtemos que

$$\int_0^x \frac{-1}{\sqrt{-3s^2 - 4p}}ds = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{-27t^2 - 4p^3}}dt,$$

tomando $A = -3 < 0$ e $B = -4p > 0$ para a integral do lado esquerdo da igualdade anterior e $A = -27 < 0$ e $B = -4p^3 > 0$ para a integral do lado direito, aplicando a segunda igualdade de (3.5), segue que

$$\begin{aligned}-\frac{\arcsin\left(x\sqrt{3/(-4p)}\right)}{\sqrt{3}} &= \frac{\arcsin\left(q\sqrt{27/(-4p^3)}\right)}{\sqrt{27}}\\ \Rightarrow \arcsin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2\sqrt{-p}}\right) &= -\frac{1}{3}\arcsin\left(-\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\right),\end{aligned}$$

sabendo que $\arcsin(-t) = -\arcsin(t)$ e aplicando sin em ambos os lados da igualdade obtemos,

$$\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{-p}}x = \sin\left(\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\right)\right)$$

ou equivalentemente, obtemos a Equação (3.8), que é semelhante a (3.6), mas para $p < 0$ e é válido apenas quando $|q| < \sqrt{-4p^3/27}$.

Em qualquer caso, assim como para as equações quadráticas, a natureza algébrica da fórmula (3.7) permite considerá-la para todos os valores de p e q.

3.2.2 Desenvolvendo os Teoremas 4 e 5 para $n = 3$

Dando continuidade à análise do caso cúbico apresentada em [5], a EDO (2.8) do Corolário 3 para a equação $P(x) = x^3 + px - q = 0$ é detalhada. Conforme visto anteriormente, temos que

$$D(q) = -(4p^3 + 27q^2) \qquad \text{e} \qquad U(x) = -(3x^2 + 4p).$$

Uma vez que $R'(x)U(x) = -(9x^4 + 15px^2 + 4p^2) = -9xP(x) - (6px^2 + 9qx + 4p^2)$ e $P(x(q)) \equiv 0$, temos que $x = x(q)$ satisfaz a equação de Riccati

$$x' = \frac{6px^2 + 9qx + 4p^2}{4p^3 + 27q^2} = \frac{6p}{4p^3 + 27q^2}x^2 + \frac{9q}{4p^3 + 27q^2}x + \frac{4p^2}{4p^3 + 27q^2}.$$

Utilizando o procedimento detalhado na prova do Teorema 5 obtemos $C_1(x, q) = -(6px^2 + 9qx + 4p^2)$. Então,

$$\begin{aligned}
C_2(x, q) &= \frac{\partial C_1(x, q)}{\partial x}R'(x)U(x) + \frac{\partial C_1(x, q)}{\partial q}D(q) - C_1(x, q)D'(q) \\
&= -9(-4p^3 - 27q^2)x + 54q(-4p^2 - 9qx - 6px^2) \\
&+ \frac{(-9q - 12px)(-4p^3 - 27(px + x^3)^2)}{p + 3x^2} \\
&= (72p^2 + 81qx + 108px^2)P(x) - 162pqx^2 + (12p^3 - 162q^2)x - 108p^2q.
\end{aligned}$$

Visto que $P(x(q)) \equiv 0$, obtemos $B_2(x, q) = -162pqx^2 + (12p^3 - 162q^2)x - 108p^2q$. Logo,

$$x'' = -\frac{162pq}{(4p^3 + 27q^2)^2}x^2 + \frac{12p^3 - 162q^2}{(4p^3 + 27q^2)^2}x - \frac{108p^2q}{(4p^3 + 27q^2)^2}.$$

Multiplicando x' e x'' por fatores apropriados para cancelar os termos de x^2, chegamos a EDO

$$(4p^3 + 27q^2)x'' + 27qx' - 3x = 0. \tag{3.9}$$

Para a verificação dos cálculos realizados na obtenção da EDO (3.9), veja o Apêndice A.1.

Vamos resolver (3.9) utilizando o procedimento apresentado em [5]. Introduzimos uma nova variável independente t, tal que $q = g(t)$, para alguma função suave g invertível em $t = 0$ e tal que $g(0) = 0$. Então $y(t) = x(g(t))$ é uma solução de uma nova EDO linear de segunda ordem em $y(t)$. Calculando as derivadas, sucessivamente, temos:

$$\begin{aligned}
y(t) &= x(g(t)) \\
y'(t) &= x'(g(t))g'(t) \Rightarrow x'(g(t)) = \frac{y'(t)}{g'(t)} \\
y''(t) &= x''(g(t))(g'(t))^2 + x'(g(t))g''(t) \\
&= x''(g(t))(g'(t))^2 + \frac{y'(t)g''(t)}{g'(t)} \Rightarrow x''(g(t)) = \frac{y''(t)}{(g'(t))^2} - \frac{y'(t)g''(t)}{(g'(t))^3}
\end{aligned}$$

assim, a EDO (3.9) se transforma na equação:

$$\frac{(4p^3+27(g(t))^2)}{(g'(t))^2}y''(t)+\left(\frac{27g(t)}{g'(t)}-\frac{(4p^3+27(g(t))^2)g''(t)}{(g'(t))^3}\right)y'(t)-3y(t)=0. \tag{3.10}$$

Observe que o coeficiente de $y''(t)$ para esta nova EDO é $(4p^3+27(g(t))^2)/(g'(t))^2$, queremos encontrar $g(t)$ que torne o coeficiente de y'' o mais simples possível. Portanto, conforme em [5], impomos

$$\frac{4p^3+27(g(t))^2}{(g'(t))^2}=\operatorname{sgn}(p)3. \tag{3.11}$$

Logo, (3.10) se escreve como:

$$y''(t)+\frac{\operatorname{sgn}(p)9g(t)-g''(t)}{g'(t)}y'(t)-\operatorname{sgn}(p)y(t)=0.$$

Resolvendo (3.11) para $g(t)$, obtemos que, quando $p\neq 0$, uma de suas soluções satisfazendo $g(0)=0$ e $g'(0)\neq 0$, é

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{3}}{9}p\sqrt{p}\,\sinh(3t), & \text{quando } p>0,\\[2ex] \dfrac{2\sqrt{3}}{9}p\sqrt{-p}\,\sin(3t), & \text{quando } p<0.\end{cases}$$

De fato, tomando essas g obtemos que (3.9) é transformada na equação simples

$$y''-\operatorname{sgn}(p)y=0.$$

Portanto, a solução geral de (3.9) é

$$x(q)=\begin{cases}C_1\sinh(g^{-1}(q))+C_2\cosh(g^{-1}(q)), & \text{quando } p>0,\\ C_1\sin(g^{-1}(q))+C_2\cos(g^{-1}(q)), & \text{quando } p<0,\end{cases}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias. Ao tomar as condições iniciais (2.11) e calculando $g^{-1}(q)$, obtemos

$$x(q)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\sinh\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{arcsinh}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{3}q}{p\sqrt{p}}\right)\right), & \text{quando } p>0,\\[2ex] \dfrac{2\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{1}{3}\arcsin\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{3}q}{p\sqrt{-p}}\right)\right), & \text{quando } p<0,\end{cases}$$

onde a segunda igualdade assume valores reais apenas para $|q|<\sqrt{-4p^3/27}$. Essas expressões coincidem com as obtidas anteriormente, veja (3.6) e (3.8), e nos levam novamente à Fórmula de Cardano.

Observação 6. *Para polinômios gerais (não na forma trinomial), pode-se ver que as equações diferenciais lineares dadas no Teorema 5 não são mais homogêneas. Isso já é o caso para polinômios de grau 2, veja (3.1). Como exemplo, para $x^3+sx^2+px-q=0$, a EDO associada é*

$$(4p^3+27q^2+18pqs-p^2s^2-4qs^3)x''+(27q+9ps-2s^3)x'-3x-s=0.$$

Quando $s=0$, a EDO acima se reduz a (3.9). Apresentamos o procedimento para obtenção dessa EDO no Apêndice A.1.

3.3 Equação quártica

De acordo com Howard Eves [4], a equação quártica foi resolvida por Ludovico Ferrari apenas alguns anos após a solução da equação cúbica. Essencialmente, sua abordagem baseia-se em alguns truques para completar quadrados que fazem uso intensivo da solução da equação cúbica. Uma versão simplificada e prática desse método, que também atende aos objetivos deste trabalho, será apresentada a seguir, conforme descrito em [5].

Por uma translação, qualquer equação quártica pode ser escrita como:

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \qquad q \neq 0, \tag{3.12}$$

onde descartamos o caso trivial $q = 0$, pois, nesse caso, a equação pode ser facilmente resolvida. Tentando obter quadrados completos em ambos os lados, escrevemos como

$$x^4 + (p + u^2)x^2 + \frac{(p + u^2)^2}{4} = u^2x^2 - qx - r + \frac{(p + u^2)^2}{4},$$

para algum u a ser determinado. Portanto, é natural impor que

$$-r + \frac{(p + u^2)^2}{4} = \frac{q^2}{4u^2} \Leftrightarrow Q(u) := u^6 + 2pu^4 + (p^2 - 4r)u^2 - q^2 = 0.$$

Uma vez que $q \neq 0$, qualquer valor de u que satisfaça a equação bi-cúbica acima é não-nulo. Portanto, para tal valor de u, a Equação (3.12) se escreve como

$$\left(x^2 + \frac{p + u^2}{2}\right)^2 = \left(ux - \frac{q}{2u}\right)^2.$$

Então as soluções da Equação (3.12) coincidem com as soluções das duas equações quadráticas

$$x^2 + \frac{p + u^2}{2} = \pm\left(ux - \frac{q}{2u}\right).$$

Ao resolvê-las, obtemos que as quatro soluções de (3.12) são

$$\frac{u}{2}\left(1 \pm \sqrt{-\frac{2q}{u^3} - \frac{2p}{u^2} - 1}\right), \qquad -\frac{u}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2q}{u^3} - \frac{2p}{u^2} - 1}\right),$$

onde u é qualquer solução de $Q(u) = 0$. Tomando $w = 1/u$, as soluções anteriores também podem ser escritas como

$$\frac{1}{2w}\left(1 \pm \sqrt{-2qw^3 - 2pw^2 - 1}\right), \qquad -\frac{1}{2w}\left(1 \pm \sqrt{2qw^3 - 2pw^2 - 1}\right),$$

onde w é qualquer solução da equação bi-cúbica

$$-q^2w^6 + (p^2 - 4r)w^4 + 2pw^2 + 1 = 0.$$

Em particular, para a equação quártica trinomial $x^4 + px - q = 0$, a solução $x(q)$ que tende a 0 quando q também tende a zero é

$$x(q) = \frac{1}{2w}(\sqrt{2pw^3 - 1} - 1), \tag{3.13}$$

onde $w = w(q)$ satisfaz $-p^2w^6 + 4qw^4 + 1 = 0$ e $w(0) = 1/\sqrt[3]{p}$.

De fato, uma prova simples de que a solução da equação $x^4+px-q=0$ é (3.13) pode ser feita da seguinte forma: escreva (3.13) como

$$S(x,w) := (2xw+1)^2+1-2pw^3=0$$

e observamos que

$$\mathrm{Res}(S, -p^2w^6+4qw^4+1) = -4096p^2(x^4+px-q)^3,$$

onde Res denota o resultante visto na Definição 4. Portanto, quando $p \neq 0$, se w satisfaz simultaneamente $S(x,w)=0$ e $-p^2w^6+4qw^4+1=0$, o valor de x correspondente é um zero do polinômio quártico.

3.3.1 Aplicação do Teorema 3 para $n=4$

Segundo Gasull e Giacomini [5], é difícil recuperar a solução clássica para a equação quártica usando a abordagem de EDOs. Assim, iniciamos essa subseção com um exemplo particularmente simples.

Considere a equação quártica particular

$$P(x) = x^4-2x^3+2x^2-x-q=0. \tag{3.14}$$

Vamos aplicar o Teorema 3 com $G=-2$. Com $P'(x)=R'(x)=4x^3-6x^2+4x-1$ temos,

$$D(q) = \mathrm{Res}(P,P') = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 & -q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & -q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & -q \\ 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -(4q+1)^2(16q+3),$$

$$\mathcal{D}(q) = \mathrm{sgn}(D(0))D(q) = (4q+1)^2(16q+3),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(R(x)) &= (4(x^4-2x^3+2x^2-x)+1)^2(16(x^4-2x^3+2x^2-x)+3) \\ &= (2x^2-2x+1)^2(4x^2-4x+3)(4x^3-6x^2+4x-1)^2\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{U}(x) = \frac{\mathcal{D}(R(x))}{(R'(x))^2} = (2x^2-2x+1)^2(4x^2-4x+3).$$

Então,

$$\phi(x) = \mathrm{sgn}(R'(0))\int_0^x \frac{G(R(s))}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}}ds = \int_0^x \frac{2}{(2s^2-2s+1)\sqrt{4s^2-4s+3}}ds$$

e

$$\varphi(q) = \int_0^q \frac{G(t)}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}}dt = \int_0^q \frac{-2}{(4t+1)\sqrt{16t+3}}dt.$$

Resolvendo a integral indefinida correspondente a $\phi(x)$. Completando quadrados, $4s^2-4s+3=(2s-1)^2+2$ e substituindo $2s-1=u$, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{(2s^2-2s+1)\sqrt{4s^2-4s+3}}ds &= \int \frac{2}{(2s^2-2s+1)\sqrt{(2s-1)^2+2}}ds \\ &= \int \frac{1}{\left(\frac{(u+1)^2}{2}-u\right)\sqrt{u^2+2}}ds\end{aligned}$$

substituindo, agora, $u = \sqrt{2}\tan\theta$ e as relações existentes entre as funções trigonométricas, a integral anterior pode ser escrita como

$$\int \frac{2\cos\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta.$$

Logo, realizando a substituição $v = \sin\theta$, obtemos

$$\int \frac{2\cos\theta}{1+\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{2}{1+v^2}dv = 2\arctan v + c = 2\arctan(\sin\theta) + c,$$

como

$$2\arctan(\sin\theta) = 2\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right) = 2\arctan\left(\frac{2s-1}{\sqrt{(2s-1)^2+2}}\right)$$

obtemos,

$$\phi(x) = 2\arctan\left(\frac{2s-1}{\sqrt{(2s-1)^2+2}}\right)\Bigg|_0^x = 2\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-4x+3}}\right) + \frac{\pi}{3}$$

e

$$\varphi(q) = \int_0^q \frac{-2}{(4t+1)\sqrt{16t+3}}dt = -\arctan\left(\sqrt{16q+3}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

Por uma questão de brevidade, conforme apresentado em [5], ao introduzir as novas variáveis,

$$z = \frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-4x+3}} \qquad \text{e} \qquad w = \sqrt{16q+3},$$

pode-se observar que, dado z, os valores correspondentes de x podem ser obtidos resolvendo uma equação quadrática. Portanto, a equação $\phi(x) = \varphi(q)$ pode ser escrita como

$$\phi(x) = \varphi(q) \Rightarrow 2\arctan z = -\arctan w,$$

ou, equivalentemente, $\tan(2\arctan z) = -w$, que, usando a fórmula de arco duplo, obtemos

$$\frac{2z}{z^2-1} = w.$$

Assim, para cada w, o valor correspondente de z pode ser obtido novamente resolvendo uma nova equação quadrática $wz^2-2z-w=0$. Logo, como apresentado em [5], resolvendo duas equações quadráticas, a equação quártica (3.14) pode ser resolvida. De fato, essa é a particularidade da equação considerada e torna seu estudo mais fácil. Não há necessidade de resolver nenhuma equação cúbica para encontrar suas raízes. Suas quatro soluções são,

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1 \pm 2\sqrt{1+4q}}.$$

Agora, vamos explorar o que resulta essa abordagem quando a aplicamos a uma equação quártica geral. Lembre-se que de maneira semelhante ao que acontece com equações cúbicas, o caso quártico geral pode ser reduzido a

$$P(x) = x^4 + px - q = 0, \tag{3.15}$$

para algum $p, q \in \mathbb{R}$. Nesta situação, uma translação não é suficiente para chegar a (3.15) e, segundo [5] devem ser usadas as chamadas transformações de Tschirnhausen.

Se aplicarmos o Teorema 3 com $G = 1$, obtemos que

$$D(q) = \mathrm{Res}(P, P') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & p & -q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & p & -q & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & p & -q \\ 4 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & p \end{vmatrix} = -(27p^4 + 256q^3),$$

$$\mathcal{D}(q) = \mathrm{sgn}(D(0))D(q) = 27p^4 + 256q^3,$$

e

$$\mathcal{D}(R(x)) = 27p^4 + 256(x^4 + px)^3 = (4x^3 + p)^2(16x^6 + 40px^3 + 27p^2) = (R'(x))^2\mathcal{U}(x).$$

Portanto,

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{sgn}(R'(0))}{\sqrt{\mathcal{U}(s)}} ds = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{16s^6 + 40ps^3 + 27p^2}} ds$$

e

$$\varphi(q) = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}(t)}} dt = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{256t^3 + 27p^4}} dt.$$

A função $\phi(x)$ pode ser expressa como uma função de Appell, pois envolve uma integral com um denominador polinomial que pode ser decomposto em termos de séries hipergeométricas múltiplas, já a função $\varphi(q)$ pode ser expressa como uma função hipergeométrica. Portanto, essa abordagem não oferece resultados satisfatórios para obter as raízes da equação quártica em termos de radicais.

3.3.2 Desenvolvendo os Teoremas 4 e 5 para $n = 4$

Dando continuidade à análise do caso quártico apresentada em [5], consideremos a equação quártica $P(x) = x^4 + px - q = 0$, recordamos os resultados previamente obtidos para $D(q)$ e $U(x)$, dados por

$$D(q) = -(27p^4 + 256q^3) \qquad \text{e} \qquad U(x) = -(16x^6 + 40px^3 + 27p^2).$$

Detalhamos a EDO (2.8) do Corolário 3. Assim, o produto $R'(x)U(x)$ é dado por:

$$R'(x)U(x) = -(64x^9 + 176px^6 + 148p^2x^3 - 27p^3),$$

que pode ser reescrito como:

$$R'(x)U(x) = -(64x^5 + 112px^2 + 64qx)P(x) - (36p^2x^3 + 48pqx^2 + 64q^2x + 27p^3).$$

Logo, $x = x(q)$ satisfaz a EDO de Abel

$$x' = \frac{36p^2}{27p^4 + 256q^3}x^3 + \frac{48pq}{27p^4 + 256q^3}x^2 + \frac{64q^2}{27p^4 + 256q^3}x + \frac{27p^3}{27p^4 + 256q^3}. \tag{3.16}$$

Desenvolvendo o Teorema 5 para $n = 4$, por (3.16) sabemos que $C_1(x, q) = -(36p^2x^3 + 48pqx^2 + 64q^2x + 27p^3)$. Utilizando o procedimento detalhado na prova do Teorema 5 obtemos que:

$$\begin{aligned} C_2(x, q) &= \frac{\partial C_1}{\partial x}(x, q)R'(x)U(x) + \frac{\partial C_1}{\partial q}(x, q)D(q) - C_1(x, q)D'(q) \\ &= (6912p^2x^7 + 6144pqx^6 + 4096q^2x^5 + 12096p^3x^4 + 17664p^2qx^3 + 13312pq^2x^2 \\ &\quad + (3888p^4 + 4096q^3)x + 8640p^3q)P(x) - 13824p^2q^2x^3 + (324p^5 - 15360pq^3)x^2 \\ &\quad + (1296p^4q - 12288q^4)x - 10368p^3q^2. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
C_3(x,q) &= \frac{\partial C_2}{\partial x}(x,q)R'(x)U(x) + \frac{\partial C_2}{\partial q}(x,q)D(q) - 2C_2(x,q)D'(q) \\
&= (2654208p^2q^2x^7 + (-41472p^5 + 1966080pq^3)x^6 + (-82944p^4q + 786432q^4)x^5 \\
&\quad + 4644864p^3q^2x^4 + (-72576p^6 + 6094848p^2q^3)x^3 + (-186624p^5q + 3342336pq^4)x^2 \\
&\quad + (1410048p^4q^2 + 786432q^5)x - 23328p^7 + 3096576p^3q^3)P(x) \\
&\quad + (668736p^6q - 9584640p^2q^4)x^3 + (1264896p^5q^2 - 9240576pq^5)x^2 \\
&\quad + (-29160p^8 + 2128896p^4q^3 - 5505024q^6)x + 501552p^7q - 7188480p^3q^4
\end{aligned}$$

Uma vez que $P(x(q)) \equiv 0$, obtemos $B_2(x,q)$ e $B_3(x,q)$. Logo,

$$x'' = -\frac{13824p^2q^2}{(27p^4+256q^3)^2}x^3 + \frac{(324p^5 - 15360pq^3)}{(27p^4+256q^3)^2}x^2 + \frac{(1296p^4q - 12288q^4)}{(27p^4+256q^3)^2}x - \frac{10368p^3q^2}{(27p^4+256q^3)^2}$$

e

$$\begin{aligned}
x''' = &-\frac{(668736p^6q - 9584640p^2q^4)}{(27p^4+256q^3)^3}x^3 - \frac{(1264896p^5q^2 - 9240576pq^5)}{(27p^4+256q^3)^3}x^2 \\
&- \frac{(-29160p^8 + 2128896p^4q^3 - 5505024q^6)}{(27p^4+256q^3)^3}x - \frac{501552p^7q - 7188480p^3q^4}{(27p^4+256q^3)^3}
\end{aligned}$$

Multiplicando x', x'' e x''' por fatores apropriados para cancelar os termos de x^3, chegamos a EDO

$$(27p^4 + 256q^3)x''' + 1152q^2x'' + 688qx' - 40x = 0, \tag{3.17}$$

a qual é a equação apresentada em [5]. Para a verificação dos cálculos realizados na obtenção da EDO (3.17), veja o Apêndice A.2

Para resolver as equações quárticas, conforme [5], é preciso encontrar a solução de (3.17) com as condições iniciais dadas em (2.11), isto é, $x(0) = x''(0) = 0$ e $x'(0) = 1/p$. Usando o software Wolfram Mathematica 14.0, chegamos a

$$x = x_1(q) = {}_3F_2\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{256q^3}{27p^4}\right)\frac{q}{p}$$

onde a função ${}_3F_2$ é uma série hipergeométrica com três parâmetros no numerador e dois no denominador. Essa solução indica que o comportamento de $x(q)$ é controlado por uma série convergente que pode ser usada para aproximar a solução em certos intervalos.

Como outro resultado para as equações quárticas, também apresentado em [5], por uma substituição direta é possível verificar que

$$x = x_2(q) = \frac{1}{2w(q)}\left(\sqrt{2pw^3(q) - 1} - 1\right),$$

onde $w = w(q)$ satisfaz $-p^2w^6 + 4qw^4 + 1 = 0$ e $w(0) = 1/\sqrt[3]{p}$, resolve a equação. Note que isso pode ser feito algebricamente pois existe a relação algébrica entre $x_2(q)$ e $w(q)$, $(2x_3w + 1)^2 = 2pw^3 - 1$, e $w(q)$ também satisfaz uma equação algébrica bi-cúbica, como apresentado no início desta seção, ver (3.13), para entender como a expressão x_2 é obtida.

Em particular, pelo Teorema de Existência e Unicidade 2 de soluções de uma EDO, deve-se ter que $x_1(q) = x_2(q)$, embora não seja fácil provar essas igualdades sem passar pelo fato da unicidade de soluções da EDO correspondente. É um desafio extrair a expressão da solução algébrica de (3.17) usando apenas a EDO associada.

3.4 Equação quíntica

Nesta seção, o resultado obtido por Betti [2] para equações quínticas é recuperado. Tal resultado afirma que a solução destas equações pode ser obtida em termos do inverso de uma integral elíptica. Segundo Betti [2], basta considerar a equação quíntica particular

$$P(x) = x^5 + 5x^3 - q.$$

Nesse caso, não é possível aplicar diretamente o Teorema 3, pois duas das hipóteses do teorema não se verificam. De fato, $R(x) = x^5 + 5x^3$ e, portanto, $R'(0) = 0$. Além disso, como veremos, utilizamos $G(x) = 5\sqrt{5}x$ e, assim, $G(0) = 0$. Para contornar isso, usaremos o resultado estendido explicado na Observação 4, o qual afirma que, nessa situação mais geral, vale $\phi(x) = \varphi(q)$ com ϕ e φ dado também em (2.4).

Seguindo a notação da Proposição 3, temos que

$$D(q) = 5^5 q^2(q^2 + 108) \qquad \text{e} \qquad U(x) = 5^3 x^2(x^2 + 5)^2(x^6 + 4x^4 - 8x^2 + 12).$$

Além disso, como explicado na Observação 4, $\operatorname{sgn}(R'(0))$ pode ser substituído por $+1$, uma vez que próximo a 0, R' é positivo, ou seja, $\mathcal{D}(q) = D(q)$ e $\mathcal{U}(x) = U(x)$.

Tomando $G(x) = 5\sqrt{5}x$, obtemos

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{s^2}{\sqrt{s^6 + 4s^4 - 8s^2 + 12}} ds \qquad \text{e} \qquad \varphi(q) = \int_0^q \frac{1}{5\sqrt{t^2 + 108}} dt.$$

Portanto, ao introduzir a nova variável $u = s^2$, a igualdade $\phi(x) = \varphi(q)$ se escreve como

$$\int_0^{x^2} \frac{u}{\sqrt{u(u^3 + 4u^2 - 8u + 12)}} du = \int_0^q \frac{2}{5\sqrt{t^2 + 108}} dt.$$

Esta expressão é exatamente aquela obtida por Betti em [2] e fornece uma raiz da equação quíntica considerada em termos de funções elementares e a inversa de uma integral elíptica.

A EDO para a equação polinomial trinomial de grau $n = 5$, como apresentado em (2.10), a partir dos Teoremas 4 e 5 pode ser obtida de forma semelhante às obtidas nas subseções 3.2.2 e 3.3.2 para $n = 3$ e 4, respectivamente. Realizando esse procedimento, conforme detalhamos no Apêndice A.3, obtêm-se a seguinte EDO:

$$(256p^5 + 3125q^4)x'''' + 31250q^3x''' + 73125q^2x'' + 31875qx' - 1155x = 0.$$

Usando o software Wolfram Mathematica 14.0, a seguinte solução é obtida

$$x(q) = {}_4F_3\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}; \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{3125q^4}{256p^5}\right)\frac{q}{p},$$

onde a função ${}_4F_3$ representa uma série hipergeométrica com quatro parâmetros no numerador e três no denominador. Essa solução evidencia como séries hipergeométricas desempenham um papel essencial na representação de soluções para equações de graus elevados, conectando a análise contemporânea a métodos clássicos e avançados.

3.5 Considerações finais

O presente trabalho abordou a resolução de equações polinomiais de diferentes graus, utilizando equações diferenciais ordinárias (EDOs) como ferramenta principal. O estudo se concentrou em explorar métodos analíticos clássicos, conectando soluções tradicionais

a técnicas contemporâneas, incluindo o uso de séries hipergeométricas e abordagens algébricas avançadas.

Inicialmente, revisamos métodos clássicos, como a fórmula babilônica para equações quadráticas e a Fórmula de Cardano para equações cúbicas. A partir dessas abordagens tradicionais, avançamos para a análise de equações polinomiais de graus superiores, onde se destacou o papel essencial das séries hipergeométricas na formulação de soluções analíticas.

Além de apresentar soluções para as equações polinomiais de grau $n = 2, 3, 4, 5$, o trabalho demonstrou como a abordagem proposta pode ser estendida para polinômios de graus arbitrários. Esse aspecto evidencia a aplicabilidade e versatilidade das EDOs como uma ferramenta poderosa no estudo das soluções de equações polinomiais, estabelecendo uma ponte entre a análise moderna e os métodos matemáticos clássicos.

O principal objetivo desta dissertação foi explorar os resultados que podem ser alcançados no estudo de equações polinomiais, utilizando EDOs como ferramenta central. Utilizamos como referência principal o recente artigo publicado [5] dos autores Armengol Gasull e Hector Giacomini. Os resultados apresentados ilustram que a abordagem utilizada não apenas recupera soluções conhecidas, mas também oferece novas perspectivas para abordar problemas algébricos de graus elevados. Com isso, contribui-se para o fortalecimento da conexão entre a teoria algébrica, a análise e a computação, destacando a importância dessas interações no desenvolvimento da matemática e suas diversas aplicações.

Espera-se que este trabalho inspire novas pesquisas e aplicações dos métodos estudados, seja na resolução de equações polinomiais de graus superiores, seja na extensão das técnicas a outras áreas da matemática aplicada e computacional.

Referências

[1] BEMM, P. C. F. J. **Curvas planas**: Fórmula de Noether e resolução de singularidades. 2016. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.

[2] BETTI, E. Un teorema sulla risoluzione analitica delle equazioni algebriche.**Ann. Sci. Math. Fisiche**, V , 10-17, 1854.

[3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

[4] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011.

[5] GASULL, A; GIACOMINI, H. Solving polynomials with ordinary differential equations. **Expositiones Mathematicae**, 39, 624-643, 2021.

[6] GELFAND, I. M.; KAPRANOV, M.; ZELEVINSKY, A. **Discriminants, resultants, and multidimensional determinants**. Boston: Birkhäuser Boston, 1994.

[7] JOUANOLOU, J. P. Le formalisme du résultant. **Advances in Mathematics**. 90(2), 117-263, 1991.

[8] NETO, A. C. M. **Tópicos de matemática elementar**: polinômios. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

[9] SILVA, F. C. S. **Equações do segundo grau**: uma perspectiva histórica e contextual. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de Goiás, Goiânia, 2023.

[10] WHITTAKER, E. T. **A course of modern analysis**. 3. ed. Cambrige: Cambridge University Press, 1920.

[11] ZILL, D. G. **A first course in differential equations with modeling applications**. 10. ed. Boston: Cengage Learning, 2012.

Apêndice

A

Códigos desenvolvidos no Wolfram Mathematica 14.0

Neste apêndice, apresentamos os códigos desenvolvidos no Wolfram Mathematica 14.0, utilizados para a verificação dos cálculos relacionados à aplicação dos Teoremas 4 e 5. Esses códigos foram implementados para assegurar a precisão dos cálculos realizados para polinômios trinomiais de grau 3, 4 e 5, bem como para polinômios não trinomiais de grau 3. As aplicações dos resultados gerados pelos códigos encontram-se detalhadas no Capítulo 3. A utilização do Mathematica permitiu validar os resultados obtidos e proporcionou uma abordagem algorítmica sólida, reforçando a aplicação prática dos teoremas apresentados.

A.1 Código correspondente a equação polinomial de grau 3 (trinomial e não trinomial)

Nesta seção, apresentamos os códigos desenvolvidos no Wolfram Mathematica 14.0 para a equação polinomial de grau 3, abrangendo tanto o caso trinomial quanto o não trinomial. Esses códigos foram implementados com o objetivo de validar a aplicação dos Teoremas 4 e 5, conforme descritos no Capítulo 3, Seção 3.2. A seguir, listamos as variáveis utilizadas nos códigos e suas correspondências com os elementos descritos na dissertação:

- A variável `dR` corresponde a $R'(x)$;
- A variável `Dq` corresponde ao discriminante, ou seja, $D(q)$;
- A variável `Drx` corresponde ao polinômio $D(R(x))$;
- A variável `Ux` corresponde ao polinômio $U(x)$;
- A variável `C1` corresponde ao polinômio $C_1(x, q)$, assim como a variável `C2` corresponde ao polinômio $C_2(x, q)$;
- A variável `d1x` corresponde a equação diferencial de ordem 1 em relação à variável dependente x, isto é, x'. Da mesma forma, `d2x` corresponde a equação diferencial x''.

Cada variável está associada diretamente aos polinômios e conceitos algébricos apresentados, facilitando a compreensão do código e sua aplicação prática.

In[∘]:=
```
(* Para n=3 *)
```

In[∘]:=
```
R[x] = x^3 + p x;
P[x] = R[x] - q;
dR = D[R[x], x]
```
derivada

Out[∘]=

$$p + 3 x^2$$

In[∘]:=
```
Dq = Discriminant[P[x], x]
```
discriminante

Out[∘]=

$$-4 p^3 - 27 q^2$$

In[∘]:=
```
(*Substituir R (x) em D (q),obtendo D(R(x))*)
```
derivada derivada

```
Rx = R[x];
Drx = Dq /. q → Rx
```

Out[∘]=

$$-4 p^3 - 27 \left(p x + x^3\right)^2$$

In[∘]:=
```
Ux = Drx / dR^2
```

Out[∘]=

$$\frac{-4 p^3 - 27 \left(p x + x^3\right)^2}{\left(p + 3 x^2\right)^2}$$

In[∘]:=
```
(*Note que*)
C1 = Expand[dR * Ux]
```
expande fatores

Out[∘]=

$$-\frac{4 p^3}{p + 3 x^2} - \frac{27 p^2 x^2}{p + 3 x^2} - \frac{54 p x^4}{p + 3 x^2} - \frac{27 x^6}{p + 3 x^2}$$

In[∘]:=
```
(*Dividindo C_1 por P(x)≡0*)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
```

$$\text{polynomial} = \left(-\frac{4 p^3}{p + 3 x^2} - \frac{27 p^2 x^2}{p + 3 x^2} - \frac{54 p x^4}{p + 3 x^2} - \frac{27 x^6}{p + 3 x^2}\right);$$

```
(*definindo o divisor*)
divisor = x^3 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
```
quociente e resto de polinômios

```
(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[∘]=

$$\left\{-9 x, -4 p^2 - 9 q x - 6 p x^2\right\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_1 da seguinte forma: *)
C1 = -4 p^2 - 9 q x - 6 p x^2;

(*Assim, com k=1, obtemos C_2 da seguinte forma: *)
C2 = D[C1, x] * dR * Ux + D[C1, q] * Dq - 1 * C1 * D[Dq, q]
```
derivada derivada derivada

Out[ ]=

$$-9\left(-4p^3-27q^2\right)x+54q\left(-4p^2-9qx-6px^2\right)+\frac{(-9q-12px)\left(-4p^3-27\left(px+x^3\right)^2\right)}{p+3x^2}$$

In[ ]:=
```
(*Dividindo C_2 por P(x)≡0*)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
```
$$\text{polynomial} = \left(-9\left(-4p^3-27q^2\right)x+54q\left(-4p^2-9qx-6px^2\right)+\frac{(-9q-12px)\left(-4p^3-27\left(px+x^3\right)^2\right)}{p+3x^2}\right);$$
```
(*definindo o divisor*)
divisor = x^3 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
```
quociente e resto de polinômios
```
(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\left\{72p^2+81qx+108px^2,\ -108p^2q+\left(12p^3-162q^2\right)x-162pqx^2\right\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_2 da seguinte forma: *)
C2 = -108 p^2 q + (12 p^3 - 162 q^2) x - 162 p q x^2;
```

In[ ]:=
```
(* Lembre-se que D(q)*)
                 derivada
Dq = -4 p^3 - 27 q^2;

(* Assim, as EDOs de ordem 1 e 2 são definidas da seguinte forma:*)
(* x' *)
C1 = -4 p^2 - 9 q x - 6 p x^2;
d1x = C1 / Dq;
(* x'' *)
C2 = -108 p^2 q + (12 p^3 - 162 q^2) x - 162 p q x^2;
d2x = C2 / Dq^2;

(* Multiplicando x' e x'' por fatores
 apropriados para cancelar o coeficiente de x^2*)
Simplify[(4 p^3 + 27 q^2) d2x + 27 q d1x]
simplifica
```

Out[ ]=

3 x

In[ ]:=
```
(*Para n=3, caso não trinomial *)
```

In[ ]:=
```
R[x] = x^3 + s x^2 + p x;
P[x] = R[x] - q;
dR = D[R[x], x]
```
derivada

Out[ ]=

$$p + 2 s x + 3 x^2$$

In[ ]:=
```
Dq = Discriminant[P[x], x]
```
discriminante

Out[ ]=

$$-4 p^3 - 27 q^2 - 18 p q s + p^2 s^2 + 4 q s^3$$

In[ ]:=
```
(*Substituir R(x) em D(q), obtendo D(R(x))*)
```
derivada derivada

```
Rx = R[x];
Drx = Dq /. q → Rx
```

Out[ ]=

$$-4 p^3 + p^2 s^2 - 18 p s \left(p x + s x^2 + x^3\right) + 4 s^3 \left(p x + s x^2 + x^3\right) - 27 \left(p x + s x^2 + x^3\right)^2$$

In[ ]:=
```
Ux = Drx / dR^2
```

Out[ ]=

$$\frac{-4 p^3 + p^2 s^2 - 18 p s \left(p x + s x^2 + x^3\right) + 4 s^3 \left(p x + s x^2 + x^3\right) - 27 \left(p x + s x^2 + x^3\right)^2}{\left(p + 2 s x + 3 x^2\right)^2}$$

In[ ]:=
```
(* Note que *)
C1 = Expand[dR * Ux]
```
expande fatores

Out[ ]=

$$-\frac{4 p^3}{p + 2 s x + 3 x^2} + \frac{p^2 s^2}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{18 p^2 s x}{p + 2 s x + 3 x^2} + \frac{4 p s^3 x}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{27 p^2 x^2}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{18 p s^2 x^2}{p + 2 s x + 3 x^2} + \frac{4 s^4 x^2}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{72 p s x^3}{p + 2 s x + 3 x^2} + \frac{4 s^3 x^3}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{54 p x^4}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{27 s^2 x^4}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{54 s x^5}{p + 2 s x + 3 x^2} - \frac{27 x^6}{p + 2 s x + 3 x^2}$$

In[ ]:=
```
(*Dividindo C_1 por P(x)≡0*)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
```

$$\text{polynomial} = \left(-\frac{4 p^3}{p+2 s x+3 x^2}+\frac{p^2 s^2}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{18 p^2 s x}{p+2 s x+3 x^2}+\frac{4 p s^3 x}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{27 p^2 x^2}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{18 p s^2 x^2}{p+2 s x+3 x^2}+\frac{4 s^4 x^2}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{72 p s x^3}{p+2 s x+3 x^2}+\frac{4 s^3 x^3}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{54 p x^4}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{27 s^2 x^4}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{54 s x^5}{p+2 s x+3 x^2}-\frac{27 x^6}{p+2 s x+3 x^2}\right);$$

```
(*definindo o divisor*)
divisor = x^3 + s x^2 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
```
quociente e resto de polinômios

```
(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\left\{-3 s-9 x,\ -4 p^2-3 q s+p s^2+\left(-9 q-7 p s+2 s^3\right) x+\left(-6 p+2 s^2\right) x^2\right\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_1 da seguinte forma: *)
C1 = -4 p^2 - 3 q s + p s^2 + (-9 q - 7 p s + 2 s^3) x + (-6 p + 2 s^2) x^2
```

Out[ ]=

$$-4 p^2-3 q s+p s^2+\left(-9 q-7 p s+2 s^3\right) x+\left(-6 p+2 s^2\right) x^2$$

In[ ]:=
```
(*Assim, com k=1, obtemos C_2 da seguinte forma: *)
C2 = D[C1, x] * dR * Ux + D[C1, q] * Dq - 1 * C1 * D[Dq, q]
```
derivada derivada derivada

Out[ ]=

$$\left(-4 p^3-27 q^2-18 p q s+p^2 s^2+4 q s^3\right)(-3 s-9 x)-\left(-54 q-18 p s+4 s^3\right)\left(-4 p^2-3 q s+p s^2+\left(-9 q-7 p s+2 s^3\right) x+\left(-6 p+2 s^2\right) x^2\right)+\frac{1}{p+2 s x+3 x^2}\left(-9 q-7 p s+2 s^3+2\left(-6 p+2 s^2\right) x\right)\left(-4 p^3+p^2 s^2-18 p s\left(p x+s x^2+x^3\right)+4 s^3\left(p x+s x^2+x^3\right)-27\left(p x+s x^2+x^3\right)^2\right)$$

In[ ]:=
```
(*Dividindo C_2 por P(x)≡0*)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
```

$$\text{polynomial} = \left(-\left(\left(-54\,q - 18\,p\,s + 4\,s^3\right)\left(-\frac{4\,p^3}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} + \frac{p^2\,s^2}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{18\,p^2\,s\,x}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} + \frac{4\,p\,s^3\,x}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{27\,p^2\,x^2}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{18\,p\,s^2\,x^2}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} + \frac{4\,s^4\,x^2}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{72\,p\,s\,x^3}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} + \frac{4\,s^3\,x^3}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{54\,p\,x^4}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{27\,s^2\,x^4}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{54\,s\,x^5}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{27\,x^6}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2}\right)\right) + \frac{1}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2}\left(\frac{4\,p^3\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} - \frac{p^2\,s^2\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{18\,p^2\,s\,x\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} - \frac{4\,p\,s^3\,x\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{27\,p^2\,x^2\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{18\,p\,s^2\,x^2\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} - \frac{4\,s^4\,x^2\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{72\,p\,s\,x^3\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} - \frac{4\,s^3\,x^3\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{54\,p\,x^4\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{27\,s^2\,x^4\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{54\,s\,x^5\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} + \frac{27\,x^6\,(2\,s + 6\,x)}{\left(p + 2\,s\,x + 3\,x^2\right)^2} - \frac{18\,p^2\,s}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} + \frac{4\,p\,s^3}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{54\,p^2\,x}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{36\,p\,s^2\,x}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} + \frac{8\,s^4\,x}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{216\,p\,s\,x^2}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} + \frac{12\,s^3\,x^2}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{216\,p\,x^3}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{108\,s^2\,x^3}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{270\,s\,x^4}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2} - \frac{162\,x^5}{p + 2\,s\,x + 3\,x^2}\right)\left(-4\,p^3 + p^2\,s^2 - 18\,p\,s\left(p\,x + s\,x^2 + x^3\right) + 4\,s^3\left(p\,x + s\,x^2 + x^3\right) - 27\left(p\,x + s\,x^2 + x^3\right)^2\right)\right);$$

```
(*definindo o divisor*)
divisor = x^3 + s x^2 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
```
quociente e resto de polinômios

```
(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\left\{108\,p^2 - 54\,q\,s - 36\,p\,s^2 + 2\,s^4 + \left(-162\,q + 270\,p\,s - 48\,s^3\right)x + \left(486\,p + 54\,s^2\right)x^2 + 432\,s\,x^3 + 324\,x^4,\ -108\,p^2\,q - 32\,p^3\,s - 54\,q^2\,s + 18\,p\,q\,s^2 + 16\,p^2\,s^3 + 2\,q\,s^4 - 2\,p\,s^5 + \left(12\,p^3 - 162\,q^2 - 216\,p\,q\,s - 66\,p^2\,s^2 + 60\,q\,s^3 + 32\,p\,s^4 - 4\,s^6\right)x + \left(-162\,p\,q - 54\,p^2\,s + 54\,q\,s^2 + 30\,p\,s^3 - 4\,s^5\right)x^2\right\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_2 da seguinte forma: *)
C2 = -108 p^2 q - 32 p^3 s - 54 q^2 s + 18 p q s^2 + 16 p^2 s^3 + 2 q s^4 - 2 p s^5 +
   (12 p^3 - 162 q^2 - 216 p q s - 66 p^2 s^2 + 60 q s^3 + 32 p s^4 - 4 s^6) x +
   (-162 p q - 54 p^2 s + 54 q s^2 + 30 p s^3 - 4 s^5) x^2;

(* Lembre-se que D(q)*)
                 derivada
Dq = -4 p^3 - 27 q^2 - 18 p q s + p^2 s^2 + 4 q s^3;

(* Assim, as EDOs de ordem 1 e 2 são definidas da seguinte forma:*)
(* x' *)
C1 = -4 p^2 - 3 q s + p s^2 + (-9 q - 7 p s + 2 s^3) x + (-6 p + 2 s^2) x^2;
d1x = C1 / Dq;
(* x'' *)
d2x = C2 / Dq^2;

(* Multiplicando x' e x'' por fatores
 apropriados para cancelar o coeficiente de x^2*)
Simplify[
simplifica
 (4 p^3 + 27 q^2 + 18 p q s - p^2 s^2 - 4 q s^3) d2x + (27 q + 9 p s - 2 s^3) d1x]
```

Out[ ]=

s + 3 x

A.2 Código correspondente a equação polinomial de grau 4

Nesta seção, apresentamos os códigos desenvolvidos no Wolfram Mathematica 14.0 para a equação polinomial trinomial de grau 4. Esses códigos foram implementados com o objetivo de validar a aplicação dos Teoremas 4 e 5, conforme descritos no Capítulo 3, Seção 3.3. A seguir, listamos as variáveis utilizadas nos códigos e suas correspondências com os elementos descritos na dissertação:

- A variável `dR` corresponde a $R'(x)$;
- A variável `Dq` corresponde ao discriminante, ou seja, $D(q)$;
- A variável `Drx` corresponde ao polinômio $D(R(x))$;
- A variável `Ux` corresponde ao polinômio $U(x)$;
- A variável `C1` corresponde ao polinômio $C_1(x, q)$, assim como a variável `C2` corresponde ao polinômio $C_2(x, q)$ e `C3` corresponde ao polinômio $C_3(x, q)$;
- A variável `d1x` corresponde à equação diferencial de ordem 1 em relação à variável dependente x, isto é, x'. Da mesma forma, `d2x` corresponde à equação diferencial x'' e `d3x` corresponde à equação diferencial x'''.

Cada variável está diretamente associada aos polinômios e conceitos algébricos apresentados, proporcionando clareza sobre a estrutura do código e sua relevância para a validação dos resultados discutidos no corpo da dissertação.

In[ ]:=
```
(*Para n=4  *)
```

In[ ]:=
```
R[x]  =  x^4 + p x;
P[x]  =  R[x] - q;
dR  =  D[R[x], x]
```
derivada

Out[ ]=

$$p + 4 x^3$$

In[ ]:=
```
Dq  =  Discriminant[P[x], x]
```
discriminante

Out[ ]=

$$-27 p^4 - 256 q^3$$

In[ ]:=
```
(*Substituir R(x)  em D(q), obtendo D(R(x))*)
```
derivada derivada

```
Rx = R[x];
Drx = Dq /. q → Rx
```

Out[ ]=

$$-27 p^4 - 256 \left(p x + x^4\right)^3$$

In[ ]:=
```
Ux = Drx / dR^2
```

Out[ ]=

$$\frac{-27 p^4 - 256 \left(p x + x^4\right)^3}{\left(p + 4 x^3\right)^2}$$

In[ ]:=
```
(* Note que *)
C1 = Expand[dR * Ux]
```
expande fatores

Out[ ]=

$$-\frac{27 p^4}{p + 4 x^3} - \frac{256 p^3 x^3}{p + 4 x^3} - \frac{768 p^2 x^6}{p + 4 x^3} - \frac{768 p x^9}{p + 4 x^3} - \frac{256 x^{12}}{p + 4 x^3}$$

In[ ]:=
```
(*Dividindo C_1 por P(x)≡0*)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
```

$$\text{polynomial} = \left(-\frac{27 p^4}{p + 4 x^3} - \frac{256 p^3 x^3}{p + 4 x^3} - \frac{768 p^2 x^6}{p + 4 x^3} - \frac{768 p x^9}{p + 4 x^3} - \frac{256 x^{12}}{p + 4 x^3}\right);$$

```
(*definindo o divisor*)divisor = x^4 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
```
quociente e resto de polinômios

```
(*Exibindo os resultados*){quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\left\{-64 q x - 112 p x^2 - 64 x^5,\ -27 p^3 - 64 q^2 x - 48 p q x^2 - 36 p^2 x^3\right\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_1 da seguinte forma: *)
C1 = -27 p^3 - 64 q^2 x - 48 p q x^2 - 36 p^2 x^3;

(* Assim, com k=1, obtemos C_2 da seguinte forma: *)
C2 = D[C1, x] * dR * Ux + D[C1, q] * Dq - 1 * C1 * D[Dq, q]
     derivada           derivada                derivada
```

Out[ ]=

$$\left(-27 p^4 - 256 q^3\right) \left(-128 q x - 48 p x^2\right) + 768 q^2 \left(-27 p^3 - 64 q^2 x - 48 p q x^2 - 36 p^2 x^3\right) + \frac{\left(-64 q^2 - 96 p q x - 108 p^2 x^2\right) \left(-27 p^4 - 256 \left(p x + x^4\right)^3\right)}{p + 4 x^3}$$

In[ ]:=
```
(* Dividindo C_2 por P(x)≡0 *)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)polynomial =
```

$$\left(\left(-27 p^4 - 256 q^3\right) \left(-128 q x - 48 p x^2\right) + 768 q^2 \left(-27 p^3 - 64 q^2 x - 48 p q x^2 - 36 p^2 x^3\right) + \frac{\left(-64 q^2 - 96 p q x - 108 p^2 x^2\right) \left(-27 p^4 - 256 \left(p x + x^4\right)^3\right)}{p + 4 x^3}\right);$$

```
(*definindo o divisor*)
divisor = x^4 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
                        quociente e resto de polinômios

(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\left\{8640 p^3 q + \left(3888 p^4 + 4096 q^3\right) x + 13\,312 p q^2 x^2 + 17\,664 p^2 q x^3 + 12\,096 p^3 x^4 + 4096 q^2 x^5 + 6144 p q x^6 + 6912 p^2 x^7,\ -10\,368 p^3 q^2 + \left(1296 p^4 q - 12\,288 q^4\right) x + \left(324 p^5 - 15\,360 p q^3\right) x^2 - 13\,824 p^2 q^2 x^3\right\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_2 da seguinte forma: *)
C2 = -10368 p^3 q^2 + (1296 p^4 q - 12288 q^4) x +
     (324 p^5 - 15360 p q^3) x^2 - 13824 p^2 q^2 x^3;

(* Assim, com k=2, obtemos C_3 da seguinte forma:*)
C3 = D[C2, x] * dR * Ux + D[C2, q] * Dq - 2 * C2 * D[Dq, q]
     derivada           derivada                derivada
```

Out[ ]=

$$\left(-27 p^4 - 256 q^3\right) \left(-20\,736 p^3 q + \left(1296 p^4 - 49\,152 q^3\right) x - 46\,080 p q^2 x^2 - 27\,648 p^2 q x^3\right) + 1536 q^2 \left(-10\,368 p^3 q^2 + \left(1296 p^4 q - 12\,288 q^4\right) x + \left(324 p^5 - 15\,360 p q^3\right) x^2 - 13\,824 p^2 q^2 x^3\right) + \frac{1}{p + 4 x^3} \left(1296 p^4 q - 12\,288 q^4 + 2 \left(324 p^5 - 15\,360 p q^3\right) x - 41\,472 p^2 q^2 x^2\right) \left(-27 p^4 - 256 \left(p x + x^4\right)^3\right)$$

In[ ]:=
```
(* Dividindo C_3 por P(x)≡0 *)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
polynomial = ((-27 p^4 - 256 q^3)
    (-20736 p^3 q + (1296 p^4 - 49152 q^3) x - 46080 p q^2 x^2 - 27648 p^2 q x^3) + 1536 q^2
    (-10368 p^3 q^2 + (1296 p^4 q - 12288 q^4) x + (324 p^5 - 15360 p q^3) x^2 - 13824 p^2 q^2 x^3) +
   1/(p + 4 x^3) (1296 p^4 q - 12288 q^4 + 2 (324 p^5 - 15360 p q^3) x - 41472 p^2 q^2 x^2)
    (-27 p^4 - 256 (p x + x^4)^3));

(*definindo o divisor*)
divisor = x^4 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
                        quociente e resto de polinômios

(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\{-23328\,p^7 + 3096576\,p^3 q^3 + (1410048\,p^4 q^2 + 786432\,q^5)\,x + (-186624\,p^5 q + 3342336\,p\,q^4)\,x^2 + (-72576\,p^6 + 6094848\,p^2 q^3)\,x^3 + 4644864\,p^3 q^2 x^4 + (-82944\,p^4 q + 786432\,q^4)\,x^5 + (-41472\,p^5 + 1966080\,p\,q^3)\,x^6 + 2654208\,p^2 q^2 x^7,\ 501552\,p^7 q - 7188480\,p^3 q^4 + (-29160\,p^8 + 2128896\,p^4 q^3 - 5505024\,q^6)\,x + (1264896\,p^5 q^2 - 9240576\,p\,q^5)\,x^2 + (668736\,p^6 q - 9584640\,p^2 q^4)\,x^3\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_3 da seguinte forma: *)
C3 =
  501552 p^7 q - 7188480 p^3 q^4 + (-29160 p^8 + 2128896 p^4 q^3 - 5505024 q^6) x +
   (1264896 p^5 q^2 - 9240576 p q^5) x^2 + (668736 p^6 q - 9584640 p^2 q^4) x^3;

(* Lembre-se que D(q)*)
                 derivada
Dq = -27 p^4 - 256 q^3;

(* Assim, as EDOs de ordem 1, 2 e 3 são definidas da seguinte forma:*)
(* x' *)
C1 = -27 p^3 - 64 q^2 x - 48 p q x^2 - 36 p^2 x^3;
d1x = C1 / Dq;
(* x'' *)
C2 = -10368 p^3 q^2 + (1296 p^4 q - 12288 q^4) x +
   (324 p^5 - 15360 p q^3) x^2 - 13824 p^2 q^2 x^3;
d2x = C2 / Dq^2;
(* x'''*)
C3 =
  501552 p^7 q - 7188480 p^3 q^4 + (-29160 p^8 + 2128896 p^4 q^3 - 5505024 q^6) x +
   (1264896 p^5 q^2 - 9240576 p q^5) x^2 + (668736 p^6 q - 9584640 p^2 q^4) x^3;
d3x = C3 / Dq^3;

(* Multiplicando x',
x'' e x''' por fatores apropriados para cancelar o coeficiente de x^3*)
Simplify[(256 q^3 + 27 p^4) * d3x + 1152 q^2 * d2x + 688 q * d1x]
simplifica
```

Out[ ]=

40 x

A.3 Código correspondente à equação polinomial de grau 5

Nesta seção, apresentamos os códigos desenvolvidos no Wolfram Mathematica 14.0 para a equação polinomial trinomial de grau 5. Esses códigos foram implementados com o objetivo de validar a aplicação dos Teoremas 4 e 5, conforme descritos no Capítulo 3, Seção 3.4. A seguir, listamos as variáveis utilizadas nos códigos e suas correspondências com os elementos descritos na dissertação:

- A variável `dR` corresponde a $R'(x)$;
- A variável `Dq` corresponde ao discriminante, ou seja, $D(q)$;
- A variável `Drx` corresponde ao polinômio $D(R(x))$;
- A variável `Ux` corresponde ao polinômio $U(x)$;
- A variável `C1` corresponde ao polinômio $C_1(x, q)$, assim como as variáveis `C2`, `C3` e `C4` correspondem aos polinômios $C_2(x, q)$, $C_3(x, q)$ e $C_4(x, q)$, respectivamente;
- A variável `d1x` corresponde à equação diferencial de ordem 1 em relação à variável dependente x, isto é, x'. Da mesma forma, `d2x`, `d3x` e `d4x` correspondem às equações diferenciais x'', x''' e x'''', respectivamente.

Cada variável está diretamente associada aos polinômios e conceitos algébricos apresentados, permitindo uma compreensão clara do código e demonstrando sua importância na validação dos resultados discutidos no corpo da dissertação.

In[ ]:=
```
(* Para n=5  *)
```

In[ ]:=
```
R[x] = x^5 + p x;
P[x]  = x^5 + p x - q;
dR  = D[R[x], x]
```
derivada

Out[ ]=

$$p + 5\,x^4$$

In[ ]:=
```
Dq  = Discriminant[P[x], x]
```
discriminante

Out[ ]=

$$256\,p^5 + 3125\,q^4$$

In[ ]:=
```
(*Substituir R(x)  em D(q), obtendo D(R(x))*)
```
derivada derivada

```
Rx = R[x];
Drx = Dq /. q → Rx
```

Out[ ]=

$$256\,p^5 + 3125\,\left(p\,x + x^5\right)^4$$

In[ ]:=
```
Ux  = Drx / (dR) ^2
```

Out[ ]=

$$\frac{256\,p^5 + 3125\,\left(p\,x + x^5\right)^4}{\left(p + 5\,x^4\right)^2}$$

In[ ]:=
```
(* Note que *)
dR = p + 5 x^4;
C1 =  Expand[dR * Ux]
```
expande fatores

Out[ ]=

$$\frac{256\,p^5}{p + 5\,x^4} + \frac{3125\,p^4\,x^4}{p + 5\,x^4} + \frac{12\,500\,p^3\,x^8}{p + 5\,x^4} + \frac{18\,750\,p^2\,x^{12}}{p + 5\,x^4} + \frac{12\,500\,p\,x^{16}}{p + 5\,x^4} + \frac{3125\,x^{20}}{p + 5\,x^4}$$

In[ ]:=
```
(*Dividindo C_1 por P(x)≡0*)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)polynomial =
```
$$\left(\frac{256\,p^5}{p+5\,x^4}+\frac{3125\,p^4\,x^4}{p+5\,x^4}+\frac{12\,500\,p^3\,x^8}{p+5\,x^4}+\frac{18\,750\,p^2\,x^{12}}{p+5\,x^4}+\frac{12\,500\,p\,x^{16}}{p+5\,x^4}+\frac{3125\,x^{20}}{p+5\,x^4}\right);$$

```
(*definindo o divisor*)
divisor = x^5 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
                        quociente e resto de polinômios

(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\left\{625\,q^2\,x+1125\,p\,q\,x^2+1525\,p^2\,x^3+625\,q\,x^6+1750\,p\,x^7+625\,x^{11},\ 256\,p^4+625\,q^3\,x+500\,p\,q^2\,x^2+400\,p^2\,q\,x^3+320\,p^3\,x^4\right\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_1 da seguinte forma:*)
C1 = 256 p^4 + 625 q^3 x + 500 p q^2 x^2 + 400 p^2 q x^3 + 320 p^3 x^4;

(* Assim, com k=1, obtemos C_2 da seguinte forma: *)
C2 = D[C1, x] * dR * Ux + D[C1, q] * Dq - 1 * C1 * D[Dq, q]
     derivada             derivada                derivada
```

Out[ ]=

$$\frac{\left(256\,p^5+3125\,q^4\right)\left(1875\,q^2\,x+1000\,p\,q\,x^2+400\,p^2\,x^3\right)-12\,500\,q^3\left(256\,p^4+625\,q^3\,x+500\,p\,q^2\,x^2+400\,p^2\,q\,x^3+320\,p^3\,x^4\right)+\left(625\,q^3+1000\,p\,q^2\,x+1200\,p^2\,q\,x^2+1280\,p^3\,x^3\right)\left(256\,p^5+3125\left(p\,x+x^5\right)^4\right)}{p+5\,x^4}$$

In[∘]:=
```
(* Dividindo C_2 por P(x)≡0 *)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
polynomial = ((256 p^5 + 3125 q^4) (1875 q^2 x + 1000 p q x^2 + 400 p^2 x^3) -
    12 500 q^3 (256 p^4 + 625 q^3 x + 500 p q^2 x^2 + 400 p^2 q x^3 + 320 p^3 x^4) +
    ((625 q^3 + 1000 p q^2 x + 1200 p^2 q x^2 + 1280 p^3 x^3) (256 p^5 + 3125 (p x + x^5)^4))/(p + 5 x^4));
(*definindo o divisor*)
divisor = x^5 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
                        quociente e resto de polinômios

(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[∘]=

$$\{1\,440\,000\,p^4 q^2 + (896\,000\,p^5 q + 390\,625\,q^5)\,x + (409\,600\,p^6 + 1\,328\,125\,p\,q^4)\,x^2 + 2\,828\,125\,p^2 q^3 x^3 + 3\,675\,000\,p^3 q^2 x^4 + 3\,270\,000\,p^4 q\,x^5 + (1\,952\,000\,p^5 + 390\,625\,q^4)\,x^6 + 1\,718\,750\,p\,q^3 x^7 + 2\,500\,000\,p^2 q^2 x^8 + 2\,900\,000\,p^3 q\,x^9 + 2\,240\,000\,p^4 x^{10} + 390\,625\,q^3 x^{11} + 625\,000\,p\,q^2 x^{12} + 750\,000\,p^2 q\,x^{13} + 800\,000\,p^3 x^{14},\ -1\,600\,000\,p^4 q^3 + (192\,000\,p^5 q^2 - 1\,562\,500\,q^6)\,x + (76\,800\,p^6 q - 2\,187\,500\,p\,q^5)\,x^2 + (20\,480\,p^7 - 2\,250\,000\,p^2 q^4)\,x^3 - 2\,000\,000\,p^3 q^3 x^4\}$$

In[∘]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_2 da seguinte forma: *)
C2 = -1600000 p^4 q^3 +
    (192000 p^5 q^2 - 1562500 q^6) x + (76800 p^6 q - 2187500 p q^5) x^2 +
    (20480 p^7 - 2250000 p^2 q^4) x^3 - 2000000 p^3 q^3 x^4;

(* Assim, com k=2, obtemos C_3 da seguinte forma:*)
C3 = D[C2, x] * dR * Ux + D[C2, q] * Dq - 2 * C2 * D[Dq, q]
     derivada           derivada              derivada
```

Out[∘]=

$$(256\,p^5 + 3125\,q^4)\,(-4\,800\,000\,p^4 q^2 + (384\,000\,p^5 q - 9\,375\,000\,q^5)\,x + (76\,800\,p^6 - 10\,937\,500\,p\,q^4)\,x^2 - 9\,000\,000\,p^2 q^3 x^3 - 6\,000\,000\,p^3 q^2 x^4) - 25\,000\,q^3\,(-1\,600\,000\,p^4 q^3 + (192\,000\,p^5 q^2 - 1\,562\,500\,q^6)\,x + (76\,800\,p^6 q - 2\,187\,500\,p\,q^5)\,x^2 + (20\,480\,p^7 - 2\,250\,000\,p^2 q^4)\,x^3 - 2\,000\,000\,p^3 q^3 x^4) + \frac{1}{p + 5\,x^4}\,(192\,000\,p^5 q^2 - 1\,562\,500\,q^6 + 2\,(76\,800\,p^6 q - 2\,187\,500\,p\,q^5)\,x + 3\,(20\,480\,p^7 - 2\,250\,000\,p^2 q^4)\,x^2 - 8\,000\,000\,p^3 q^3 x^3)\,(256\,p^5 + 3125\,(p\,x + x^5)^4)$$

In[ ]:=
```
(* Dividindo C_3 por P(x)≡0 *)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
polynomial = ((256 p^5 + 3125 q^4) (-4 800 000 p^4 q^2 + (384 000 p^5 q - 9 375 000 q^5) x +
      (76 800 p^6 - 10 937 500 p q^4) x^2 - 9 000 000 p^2 q^3 x^3 - 6 000 000 p^3 q^2 x^4) - 25 000 q^3
    (-1 600 000 p^4 q^3 + (192 000 p^5 q^2 - 1 562 500 q^6) x + (76 800 p^6 q - 2 187 500 p q^5) x^2 +
      (20 480 p^7 - 2 250 000 p^2 q^4) x^3 - 2 000 000 p^3 q^3 x^4) +
    1/(p + 5 x^4) (192 000 p^5 q^2 - 1 562 500 q^6 + 2 (76 800 p^6 q - 2 187 500 p q^5) x +
      3 (20 480 p^7 - 2 250 000 p^2 q^4) x^2 - 8 000 000 p^3 q^3 x^3) (256 p^5 + 3125 (p x + x^5)^4));

(*definindo o divisor*)
divisor = x^5 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
                        quociente e resto de polinômios

(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$\{73\,728\,000\,p^9\,q - 8\,100\,000\,000\,p^4\,q^5 + (19\,660\,800\,p^{10} - 5\,240\,000\,000\,p^5\,q^4 - 976\,562\,500\,q^8)\,x + (-2\,248\,000\,000\,p^6\,q^3 - 4\,492\,187\,500\,p\,q^7)\,x^2 + (504\,000\,000\,p^7\,q^2 - 11\,523\,437\,500\,p^2\,q^6)\,x^3 + (303\,360\,000\,p^8\,q - 19\,265\,625\,000\,p^3\,q^5)\,x^4 + (93\,696\,000\,p^9 - 19\,293\,750\,000\,p^4\,q^4)\,x^5 + (-12\,080\,000\,000\,p^5\,q^3 - 976\,562\,500\,q^7)\,x^6 + (432\,000\,000\,p^6\,q^2 - 5\,468\,750\,000\,p\,q^6)\,x^7 + (307\,200\,000\,p^7\,q - 11\,875\,000\,000\,p^2\,q^5)\,x^8 + (107\,520\,000\,p^8 - 16\,812\,500\,000\,p^3\,q^4)\,x^9 - 14\,000\,000\,000\,p^4\,q^3\,x^{10} + (120\,000\,000\,p^5\,q^2 - 976\,562\,500\,q^6)\,x^{11} + (96\,000\,000\,p^6\,q - 2\,734\,375\,000\,p\,q^5)\,x^{12} + (38\,400\,000\,p^7 - 4\,218\,750\,000\,p^2\,q^4)\,x^{13} - 5\,000\,000\,000\,p^3\,q^3\,x^{14},\ -1\,105\,920\,000\,p^9\,q^2 + 16\,500\,000\,000\,p^4\,q^6 + (83\,558\,400\,p^{10}\,q - 4\,260\,000\,000\,p^5\,q^5 + 8\,789\,062\,500\,q^9)\,x + (15\,728\,640\,p^{11} - 3\,216\,000\,000\,p^6\,q^4 + 16\,992\,187\,500\,p\,q^8)\,x^2 + (-2\,112\,000\,000\,p^7\,q^3 + 21\,093\,750\,000\,p^2\,q^7)\,x^3 + (-1\,382\,400\,000\,p^8\,q^2 + 20\,625\,000\,000\,p^3\,q^6)\,x^4\}$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_3 da seguinte forma: *)
C3 = -1105920000 p^9 q^2 + 16500000000 p^4 q^6 +
   (83558400 p^10 q - 4260000000 p^5 q^5 + 8789062500 q^9) x +
   (15728640 p^11 - 3216000000 p^6 q^4 + 16992187500 p q^8) x^2 +
   (-2112000000 p^7 q^3 + 21093750000 p^2 q^7) x^3 +
   (-1382400000 p^8 q^2 + 20625000000 p^3 q^6) x^4;

(* Assim, com k=3, obtemos C_4 da seguinte forma:*)
C4 = D[C3, x] * dR * Ux + D[C3, q] * Dq - 3 * C3 * D[Dq, q]
     derivada            derivada                derivada
```

Out[ ]=

$$\left(256 p^5 + 3125 q^4\right) \left(-2211840000 p^9 q + 99000000000 p^4 q^5 + \left(83558400 p^{10} - 21300000000 p^5 q^4 + 79101562500 q^8\right) x + \left(-12864000000 p^6 q^3 + 135937500000 p q^7\right) x^2 + \left(-6336000000 p^7 q^2 + 147656250000 p^2 q^6\right) x^3 + \left(-2764800000 p^8 q + 123750000000 p^3 q^5\right) x^4\right) - 37500 q^3 \left(-1105920000 p^9 q^2 + 16500000000 p^4 q^6 + \left(83558400 p^{10} q - 4260000000 p^5 q^5 + 8789062500 q^9\right) x + \left(15728640 p^{11} - 3216000000 p^6 q^4 + 16992187500 p q^8\right) x^2 + \left(-2112000000 p^7 q^3 + 21093750000 p^2 q^7\right) x^3 + \left(-1382400000 p^8 q^2 + 20625000000 p^3 q^6\right) x^4\right) + \frac{1}{p + 5 x^4} \left(83558400 p^{10} q - 4260000000 p^5 q^5 + 8789062500 q^9 + 2 \left(15728640 p^{11} - 3216000000 p^6 q^4 + 16992187500 p q^8\right) x + 3 \left(-2112000000 p^7 q^3 + 21093750000 p^2 q^7\right) x^2 + 4 \left(-1382400000 p^8 q^2 + 20625000000 p^3 q^6\right) x^3\right) \left(256 p^5 + 3125 \left(p x + x^5\right)^4\right)$$

In[ ]:=
```
(* Dividindo C_4 por P(x)≡0 *)

(*definindo o polinômio a ser dividido*)
polynomial = ((256 p^5 + 3125 q^4) (-2 211 840 000 p^9 q + 99 000 000 000 p^4 q^5 +
      (83 558 400 p^10 - 21 300 000 000 p^5 q^4 + 79 101 562 500 q^8) x +
      (-12 864 000 000 p^6 q^3 + 135 937 500 000 p q^7) x^2 +
      (-6 336 000 000 p^7 q^2 + 147 656 250 000 p^2 q^6) x^3 +
      (-2 764 800 000 p^8 q + 123 750 000 000 p^3 q^5) x^4) -
    37 500 q^3 (-1 105 920 000 p^9 q^2 + 16 500 000 000 p^4 q^6 +
      (83 558 400 p^10 q - 4 260 000 000 p^5 q^5 + 8 789 062 500 q^9) x +
      (15 728 640 p^11 - 3 216 000 000 p^6 q^4 + 16 992 187 500 p q^8) x^2 +
      (-2 112 000 000 p^7 q^3 + 21 093 750 000 p^2 q^7) x^3 +
      (-1 382 400 000 p^8 q^2 + 20 625 000 000 p^3 q^6) x^4) +
    1/(p + 5 x^4) (83 558 400 p^10 q - 4 260 000 000 p^5 q^5 + 8 789 062 500 q^9 +
      2 (15 728 640 p^11 - 3 216 000 000 p^6 q^4 + 16 992 187 500 p q^8) x +
      3 (-2 112 000 000 p^7 q^3 + 21 093 750 000 p^2 q^7) x^2 +
      4 (-1 382 400 000 p^8 q^2 + 20 625 000 000 p^3 q^6) x^3) (256 p^5 + 3125 (p x + x^5)^4));
(*definindo o divisor*)
divisor = x^5 + p x - q;

(*calculando o quociente e o resto*)
{quotient, remainder} = PolynomialQuotientRemainder[polynomial, divisor, x];
                        quociente e resto de polinômios

(*Exibindo os resultados*)
{quotient, remainder}
```

Out[ ]=

$$
\begin{aligned}
&\{10\,066\,329\,600\,p^{14} - 7\,357\,440\,000\,000\,p^{9}\,q^{4} + 77\,437\,500\,000\,000\,p^{4}\,q^{8} + \\
&\quad (-4\,187\,136\,000\,000\,p^{10}\,q^{3} + 50\,587\,500\,000\,000\,p^{5}\,q^{7} + 5\,493\,164\,062\,500\,q^{11})\,x + \\
&\quad (-1\,655\,808\,000\,000\,p^{11}\,q^{2} + 17\,587\,500\,000\,000\,p^{6}\,q^{6} + 31\,127\,929\,687\,500\,p\,q^{10})\,x^{2} + \\
&\quad (162\,816\,000\,000\,p^{12}\,q - 17\,692\,500\,000\,000\,p^{7}\,q^{5} + 91\,186\,523\,437\,500\,p^{2}\,q^{9})\,x^{3} + \\
&\quad (47\,972\,352\,000\,p^{13} - 20\,392\,800\,000\,000\,p^{8}\,q^{4} + 174\,580\,078\,125\,000\,p^{3}\,q^{8})\,x^{4} + \\
&\quad (-15\,883\,200\,000\,000\,p^{9}\,q^{3} + 189\,316\,406\,250\,000\,p^{4}\,q^{7})\,x^{5} + \\
&\quad (-8\,380\,416\,000\,000\,p^{10}\,q^{2} + 123\,150\,000\,000\,000\,p^{5}\,q^{6} + 5\,493\,164\,062\,500\,q^{10})\,x^{6} + \\
&\quad (165\,888\,000\,000\,p^{11}\,q - 11\,475\,000\,000\,000\,p^{6}\,q^{5} + 36\,621\,093\,750\,000\,p\,q^{9})\,x^{7} + \\
&\quad (55\,050\,240\,000\,p^{12} - 15\,216\,000\,000\,000\,p^{7}\,q^{4} + 99\,023\,437\,500\,000\,p^{2}\,q^{8})\,x^{8} + \\
&\quad (-14\,544\,000\,000\,000\,p^{8}\,q^{3} + 162\,304\,687\,500\,000\,p^{3}\,q^{7})\,x^{9} + \\
&\quad (-9\,676\,800\,000\,000\,p^{9}\,q^{2} + 144\,375\,000\,000\,000\,p^{4}\,q^{6})\,x^{10} + \\
&\quad (52\,224\,000\,000\,p^{10}\,q - 2\,662\,500\,000\,000\,p^{5}\,q^{5} + 5\,493\,164\,062\,500\,q^{9})\,x^{11} + \\
&\quad (19\,660\,800\,000\,p^{11} - 4\,020\,000\,000\,000\,p^{6}\,q^{4} + 21\,240\,234\,375\,000\,p\,q^{8})\,x^{12} + \\
&\quad (-3\,960\,000\,000\,000\,p^{7}\,q^{3} + 39\,550\,781\,250\,000\,p^{2}\,q^{7})\,x^{13} + \\
&\quad (-3\,456\,000\,000\,000\,p^{8}\,q^{2} + 51\,562\,500\,000\,000\,p^{3}\,q^{6})\,x^{14}, \\
&-534\,773\,760\,000\,p^{14}\,q + 51\,456\,000\,000\,000\,p^{9}\,q^{5} - 229\,687\,500\,000\,000\,p^{4}\,q^{9} + \\
&\quad (19\,377\,684\,480\,p^{15} - 6\,801\,408\,000\,000\,p^{10}\,q^{4} + \\
&\qquad 95\,287\,500\,000\,000\,p^{5}\,q^{8} - 76\,904\,296\,875\,000\,q^{12})\,x + \\
&\quad (-2\,973\,696\,000\,000\,p^{11}\,q^{3} + 98\,400\,000\,000\,000\,p^{6}\,q^{7} - 186\,767\,578\,125\,000\,p\,q^{11})\,x^{2} + \\
&\quad (-1\,218\,969\,600\,000\,p^{12}\,q^{2} + 83\,040\,000\,000\,000\,p^{7}\,q^{6} - 269\,531\,250\,000\,000\,p^{2}\,q^{10})\,x^{3} + \\
&\quad (-668\,467\,200\,000\,p^{13}\,q + 64\,320\,000\,000\,000\,p^{8}\,q^{5} - 287\,109\,375\,000\,000\,p^{3}\,q^{9})\,x^{4}\}
\end{aligned}
$$

In[ ]:=
```
(* Logo, podemos reescrever C_4 da seguinte forma:*)
C4 = -534 773 760 000 p^14 q + 51 456 000 000 000 p^9 q^5 -
   229 687 500 000 000 p^4 q^9 + (19 377 684 480 p^15 - 6 801 408 000 000 p^10 q^4 +
      95 287 500 000 000 p^5 q^8 - 76 904 296 875 000 q^12) x +
   (-2 973 696 000 000 p^11 q^3 + 98 400 000 000 000 p^6 q^7 - 186 767 578 125 000 p q^11)
    x^2 + (-1 218 969 600 000 p^12 q^2 + 83 040 000 000 000 p^7 q^6 -
      269 531 250 000 000 p^2 q^10) x^3 + (-668 467 200 000 p^13 q +
      64 320 000 000 000 p^8 q^5 - 287 109 375 000 000 p^3 q^9) x^4;

(* Lembre-se que D(q)*)
                 derivada
Dq = 256 p^5 + 3125 q^4;

(* Assim, as EDOs de ordem 1, 2, 3 e 4 são definidas da seguinte forma:*)
(* x' *)
C1 = 256 p^4 + 625 q^3 x + 500 p q^2 x^2 + 400 p^2 q x^3 + 320 p^3 x^4;
d1x = C1 / Dq;
(* x'' *)
C2 = -1 600 000 p^4 q^3 +
   (192 000 p^5 q^2 - 1 562 500 q^6) x + (76 800 p^6 q - 2 187 500 p q^5) x^2 +
   (20 480 p^7 - 2 250 000 p^2 q^4) x^3 - 2 000 000 p^3 q^3 x^4;
d2x = C2 / Dq^2;
(* x'''*)
C3 = -1 105 920 000 p^9 q^2 + 16 500 000 000 p^4 q^6 +
   (83 558 400 p^10 q - 4 260 000 000 p^5 q^5 + 8 789 062 500 q^9) x +
   (15 728 640 p^11 - 3 216 000 000 p^6 q^4 + 16 992 187 500 p q^8) x^2 +
   (-2 112 000 000 p^7 q^3 + 21 093 750 000 p^2 q^7) x^3 +
   (-1 382 400 000 p^8 q^2 + 20 625 000 000 p^3 q^6) x^4;
d3x = C3 / Dq^3;
(* x''''*)
d4x = C4 / Dq^4;

(* Multiplicando x', x'',
x''' e x'''' por fatores apropriados para cancelar o coeficiente de x^4*)
Simplify[(256 p^5 + 3125 q^4) * d4x +
simplifica
  (31 250 q^3) * d3x + (73 125 q^2) * d2x + (31 875 q) * d1x]
```

Out[ ]=

1155 x