



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.001/02

Ok

Mecânica Quântica Supersimétrica

José Lauro Strapasson

Orientador

Nathan Jacob Berkovits



Dezembro de 2001

Agradecimentos

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pela bolsa concedida. Ao Professor Nathan Jacob Berkovits pela orientação. Agradeço ao Instituto de Física Teórica, IFT, à todos os que foram meus professores e colegas no instituto, ao Professor Rafael de Lima Rodrigues da Universidade Federal da Paraíba e aos meus familiares entre eles meus irmãos Reinaldo, Rogério e Maria Aparecida. Agradeço de modo especial a minha mãe Olívia sem a qual não teria conseguido realizar esse curso. Agradeço também à Carlos Henrique Patsko e ao Fabiano Manoel de Andrade pela ajuda com o $\text{\LaTeX}$ e também com o software Maple a aos funcionários do IFT, de modo particular à Rosane Simões de Castro, Luzinete Aparecida Martins e Maria José Trombini de Sousa. Por último mas não em último agradeço à Deus por me dar a vida e portanto a oportunidade de estudar Física.

Resumo

Neste trabalho fizemos uma revisão dos princípios da Mecânica Quântica Supersimétrica. Trabalhamos preferencialmente na descrição de Schrödinger e representação das coordenadas. O estudo da Mecânica Quântica Supersimétrica foi feito predominantemente em 1 dimensão embora tenha havido exceções. Durante essa dissertação abordamos o formalismo hamiltoniano na descrição de Schrödinger.

Palavras Chaves: Supersimetria; Mecânica Quântica.

Áreas do conhecimento: 1.0503.01-3 Teoria Geral de Partículas e Campos.

Abstract

In this work we have written a review of the principles of Supersymmetric Quantum Mechanics. We worked preferentially in the Schrodinger picture and in the coordinate representation. The study of Supersymmetric Quantum Mechanics was done predominantly in 1 dimension although there were some exceptions. During this dissertation we use the hamiltonian formalism in the Schrodinger's picture.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Motivações	1
1.2	Introdução à Mecânica Quântica Supersimétrica	2
1.3	Plano de Estudo	4
2	Formalismo Hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica	6
2.1	Formalismo Hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica	6
2.2	Hierarquia de Hamiltonianos	10
2.3	Invariância de Forma	12
2.4	Invariância de forma em dois passos	14
3	Quebra de Supersimetria	19
3.1	Simetrias internas e Supersimetria	19
3.2	Quebra de Supersimetria em Mecânica Quântica	22
4	Exemplos	26
4.1	Construção de novos potenciais solúveis a partir de outros	26
4.2	O oscilador harmônico supersimétrico	28
4.3	Supersimetria e potenciais de poço duplo	32
4.4	Um exemplo de aplicação de MQS em teoria de cordas	37
4.5	Construindo potenciais a partir de uma suposta função de onda	41
5	Supersimetria e a Equação de Pauli	47
5.1	Supersimetria e a equação de Pauli	47
6	Mecânica Quântica Supersimétrica e o Superespaço	52
6.1	Super Espaço	52
6.2	M. Q. SUSI no Superespaço	53
7	Conclusão	61

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivações

Mecânica Quântica Supersimétrica é justamente uma aplicação de Supersimetria (uma simetria que relaciona bósons e férmions) com Mecânica Quântica.

Criada originalmente por Witten [1] essa teoria foi usada de início para compreender melhor a quebra dinâmica de supersimetria. O criador da Mecânica Quântica Supersimétrica (MQS) a usou de início para compreender melhor esse fenômeno que tem que estar presente em todas as outras teorias supersimétricas, e estas foram feitas justamente para se entender a natureza.

Mas existe algum outro motivo para estudarmos Mecânica Quântica Supersimétrica? Como todos sabemos o objetivo da ciência é compreender o mundo a nossa volta. A Física como ciência esta ligada intimamente à compreensão da natureza. Embora toda ciência seja apenas teoria a Física é uma ciência experimental por excelência, quer dizer, as teorias físicas estão intimamente relacionadas com a experimentação sendo que a experimentação decide se uma determinada teoria irá sobreviver ou não.

Dentre todas as subáreas da Física, nenhuma delas apresentou tanto sucesso em explicar a natureza quanto a Mecânica Quântica. Tudo, desde um dispositivo eletrônico, como um relógio digital de pulso ou mesmo o simples fato de estarmos vivos está em perfeita concordância com a Mecânica Quântica.

Supersimetria ainda não obteve o mesmo sucesso da Mecânica Quântica, ainda não se sabe se a mesma descreve a natureza ou não. Assim podemos dizer que Mecânica Quântica Supersimétrica é uma união do rigorosamente certo com o que ainda é duvidoso. Poderá essa união ser feliz? Esperamos nós que sim e que os frutos dessa união nos levem não a questionarmos as certezas da Mecânica Quântica, ainda que questionar seja sempre bom, mas sim nos ajude a eliminar as duvidas sobre supersimetria.

Por que estudar Mecânica Quântica Supersimétrica? Se ainda não respondemos essa pergunta ela poderia ser respondida de muitas formas: Testar supersimetria, facilitar cálculos em Mecânica Quântica, compreender melhor fenômenos presentes tanto em supersimetria, como por exemplo a quebra de supersimetria, como fenômenos presentes em Mecânica Quântica e quem sabe descobrir novos fenômenos identificáveis somente na união dessas duas teorias.

Ao longo dessa dissertação o caro leitor poderá ver se fomos felizes ou não.

1.2 Introdução à Mecânica Quântica Supersimétrica

A Mecânica Quântica é o ramo da Física que estuda o comportamento de corpos de escala muito pequena, da ordem de tamanho de átomos e de seus constituintes. Na verdade o estudo desses objetos engloba Física Nuclear, Física Atômica, Física de partículas num conjunto que antigamente seria chamado de Física Quântica e a Mecânica Quântica propriamente dita não se preocuparia tanto com esses objetos em si com a “Mecânica” que eles obedecem.

Uma das principais equações da Mecânica Quântica é a chamada Equação de Schrödinger independente do tempo. Se H for o hamiltoniano de Schrödinger essa equação pode ser escrita como

$$H\psi = E\psi,$$

onde E é a energia de uma dada partícula ψ que é chamada de função de onda na Mecânica ondulatória, num dado ponto e tal que $|\psi|^2$ é interpretado como sendo a probabilidade de se encontrar a partícula naquele dado ponto.

Mas o que vem a ser supersimetria? Na natureza existem diversos tipos de partículas, as mais conhecidas são os elétrons, prótons, neutrons, fótons, etc. As partículas podem ser classificadas em duas categorias, os bósons e os férmions.

Os férmions, que são por exemplo os elétrons, prótons, neutrons, etc, são partículas que possuem algumas características peculiares como por exemplo obedecerem a chamada Estatística de Fermi-Dirac, o princípio de exclusão de Pauli (dois férmions não podem ocupar dois estados idênticos), etc;

Os bósons obedecem a chamada Estatística de Bose-Einstein e por não obedecerem nenhum tipo de princípio de exclusão podem dar origem a condensados.

Quando descrevemos bósons e férmions matematicamente as quantidades que os representam e que de agora em diante por abuso de linguagem serão chamadas simplesmente de bósons e férmions, obedecem propriedades interessantes.

Bósons comutam entre si e com qualquer outra coisa. Já férmions anticomutam entre si.

Seja A e B dois bósons. Então dizer que eles comutam significa que

$$[A, B] \equiv AB - BA = 0,$$

onde $[A, B]$ é o chamado comutador de A com B. Uma consequência imediata da propriedade comutação é que $AB = BA$. Como da para ver os números naturais, reais, complexos, etc são bósons. O produto de dois bósons é sempre um bóson.

Já se C e D forem dois férmions dizer que eles anti-comutam significa que

$$\{C, D\} = [C, D]_+ \equiv CD + DC = 0$$

onde $\{C, D\}$ ou $[C, D]_+$ é o chamado anti-comutador de C com C. Uma consequência imediata da propriedade anti-comutação é que $CD = -DC$. Pode-se mostrar facilmente que o produto de dois férmions é sempre um bóson e que o quadrado de um férmion é nulo.

Supersimetria é justamente uma simetria, isto é, uma propriedade de invariância, que relaciona bósons com férmions e vice-versa.

Sendo Q o operador de supersimetria, isto é, o operador que gera a transformação de supersimetria, e $|boson\rangle$ um estado bosonico qualquer no aniquilado por Q e $|fermion\rangle$ um estado fermionico igualmente não aniquilado por Q temos então

$$|boson\rangle = Q|fermion\rangle$$

e da mesma maneira

$$|fermion\rangle = Q|boson\rangle.$$

Como Q é uma simetria ele comuta com o hamiltoniano e daí da equação de autovalores vemos que os autovalores são os mesmos para estados bosonicos e fermionicos donde sai que SUSI implica na existência de bósons de férmions de mesma massa.

Se x e θ forem variáveis bosonicas e fermionicas respectivamente uma transformação típica de SUSI seria

$$x' = x + i\theta\epsilon$$

$$\theta' = \theta + \epsilon$$

onde ϵ é um parâmetro fermionico. Como da para ver SUSI parece uma translação, só que mistura bósons com férmions.

1.3 Plano de Estudo

Nessa dissertação iremos apresentar e rever os fundamentos da Mecânica Quântica Supersimétrica (M.Q.S.) [1]. Mecânica Quântica Supersimétrica como etimologicamente o nome sugere é uma aplicação de Supersimetria a ciência da Mecânica Quântica. Onde supersimetria é uma simetria que relaciona bosons e férmions.

Durante nosso trabalho iremos seguir principalmente o artigo de revisão [2]. Nos capítulos 2 e 3 iremos desenvolver os fundamentos da teoria e nos seguintes veremos exemplos de aplicação.

No capítulo 2 primeiramente vemos o formalismo hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica. Quer dizer, ao invés de abordarmos Mecânica Quântica usando lagrangianos ou integral ação iremos usar operadores hamiltonianos. O conceito de lagrangiano e integral ação é apresentado apenas para motivar a idéia de simetria sendo depois abandonado. Ainda no capítulo 2 vemos como é possível construir toda uma hierarquia de hamiltonianos parceiros supersimetricos cujos os níveis de energia estão relacionados uns com outros. Vemos também o conceito de invariância de forma e invariância de forma em dois passos e entendemos assim como dois potenciais podem ser invariantes de forma e deste modo terem seus autovalores relacionados.

No capítulo 3 vemos o conceito de quebra de supersimetria seguindo principalmente [1]. Nesse capítulo justificamos o porque do interesse em se estudar a quebra de supersimetria em teorias de campo e o porque desse interesse se manter em Mecânica Quântica Supersimétrica.

No capítulo 4 em diante começamos os exemplos. No capítulo 4 vemos a construção de novos potenciais solúveis a partir de outros também solúveis, onde seguimos basicamente [2].

Em seguida vemos o Oscilador Harmônico Supersimétrico. O Oscilador Harmônico é um dos exemplos de maior aplicação em Física e nessa parte abordamos ele usando supersimetria.

Finalmente seguindo [11] vemos aplicações de Mecânica Quântica Supersimétrica a potenciais de poço duplo e um caso de aplicação a Teoria de Supercordas [10]. No que diz respeito aos potenciais de poço duplo vemos como supersimetria permite calcular a amplitude de tunelamento com vantagens sobre o método WKB usual.

Ainda no capítulo 4 vemos como construir potenciais a partir de uma suposta função de onda para o estado fundamental usando supersimetria, ou seja, fazendo o caminho inverso. Essa parte foi minha única contribuição original para essa dissertação sendo o resto revisão.

No capítulo 5 abordamos o uso de supersimetria com a equação de Pauli.

Por ultimo, no capítulo 6, vemos algo sobre Mecânica Quântica Supersimétrica no Super espaço.

Com essa apresentação não estamos evidentemente esgotando o assunto. Existem muitos tópicos de Mecânica Quântica Supersimétrica ou relatados com ela que não são cobertos tais como formalismo lagrangiano e de integrais de trajetória, teorias de perturbação, potenciais com singularidades, Mecânica Quântica Parasupersimetrica, Ortosupersimetrica, etc.

Capítulo 2

Formalismo Hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica

2.1 Formalismo Hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica

Um sistema físico pode ser descrito por sua hamiltoniano

$$H = T + V, \quad (2.1)$$

onde T é a energia cinética e V a energia potencial. Uma simetria é qualquer tipo de invariância presente numa teoria física. Na verdade pode-se ser pensada como uma transformação que não altera o sistema físico. Existem diversos tipos de simetria, tais como paridade (invariância sobre $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$), reversão temporal ($t \rightarrow -t$), conjugação de carga ($q \rightarrow -q$), isospin (próton troca para neutron e vice versa), etc. As simetrias podem ser classificadas em simetrias internas e simetrias externas. Simetrias internas são simetrias que não possuem nada relacionado com espaço tempo enquanto as outras são externas. Como explicarei mais adiante supersimetria é uma simetria externa. O chamado gerador de simetria é quem provoca a variação das grandezas físicas envolvidas e ele comuta com o hamiltoniano.

$$[Q, H] = 0. \quad (2.2)$$

Supersimetria é então um tipo de simetria que relaciona graus de liberdade fermionicos (que anticomutam) com graus de liberdade bosonicos (que comutam), e que parece ser um dos ingredientes fundamentais para uma teoria de unificação.

Fica mais fácil estudar a álgebra de supersimetria no caso mais familiar da Mecânica Quântica sendo que o ponto de maior interesse é a quebra de supersimetria, isto porque supersimetria não é vista diretamente na natureza. Essa preocupação não se deve evidentemente a Mecânica Quântica mas sim as teorias de campo supersimétricas que prevêm coisas como o fato de haver férmions e bósons de massa

igual. Em Mecânica Quântica a situação é toda outra, sendo que SuSi aparece apenas como uma espécie de dispositivo matemático que permite resolver velhos problemas de outra forma mas sem predizer nada de novo. A preocupação com a quebra é mantida para funcionar de laboratório para outras teorias supersimétricas.

A álgebra de supersimetria * é.

$$\{Q, Q^+\} = H, \{Q, Q\} = \{Q^+, Q^+\} = [H, Q] = [Q, H] = 0, \quad (2.3)$$

onde o operador Q é chamado de operador de supersimetria cujo o comutador dele com uma dada grandeza resulta na variação dessa grandeza por transformação dele sobe supersimetria.

A Mecânica Quântica Supersimétrica também permite obter soluções exatas para diversos potenciais da Mecânica Quântica.

Como dá para ver na equação acima o anticomutador do operador gerador de supersimetria com seu conjugado hermitiano gera o operador momento. O operador momento é justamente o gerador das translações, assim sendo, supersimetria esta relacionada com espaço-tempo e portanto não é uma simetria interna mas sim uma simetria externa.

Agora iremos apresentar as principais idéias da MQS. O nosso ponto de partida é a Mecânica Quântica comum, i.e, não supersimétrica cuja equação fundamental para o caso não relativístico é a Equação de Schrödinger. Essa equação na representação das coordenadas para uma partícula e em 1 dimensão é escrita como

$$H\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (2.4)$$

A equação acima na verdade é a Equação de Schrödinger independente do tempo que corresponde ao caso mais usual onde V , isto é, a energia potencial, ou simplesmente potencial como se chama usualmente, não depende do tempo.

$\hbar$ é a constante de Planck h dividida por 2π . A constante de Planck h relaciona a energia de um fóton com a frequência da radiação pela forma tradicional $E = h\nu$.

A equação de Schrödinger independente do tempo é no fundo uma consequência da conservação da Energia que nesse caso em síntese implica que $H = T + V = E$, onde T é a energia cinética e V é a energia potencial (ou simplesmente potencial). Em Mecânica Quântica T e V assumem a forma de operadores que atuando sob a chamada função de onda ψ resulta na equação 2.4.

ψ em si não possui interpretação física. No entanto seu módulo ao quadrado, desde que ψ esteja normalizada, é interpretado como a probabilidade de achar a partícula descrita pela equação na posição x .

*Para mais dimensões o anticomutador de Q com Q^+ dá o operador momento.

Vamos considerar o estado fundamental supondo que a energia do mesmo seja nula.

O potencial a partir da equação 2.4 pode então ser escrito como

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(x)}{\psi_0(x)}, \quad (2.5)$$

onde apenas introduzimos o rótulo 1 para diferenciar de um outro potencial que iremos definir mais tarde. ψ_0 é a função de onda ψ para o estado fundamental caracterizado por $E = 0$.

Supersimetria como veremos mais a frente permite escrever o Hamiltoniano como sendo o produto do conjugado hermitiano de um operador por ele mesmo. Faz-se

$$H_1 \equiv A^\dagger A. \quad (2.6)$$

Veremos mais a frente como isso provem da condição de supersimetria. Esse operador A com o qual podemos fatorizar o Hamiltoniano é definido como sendo a soma de uma função do operador momento com uma outra função da coordenada. Fazemos

$$A^\dagger \equiv \frac{-\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad A \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x). \quad (2.7)$$

Essa definição é coerente com o que esperaríamos pois o Hamiltoniano H também é composto de duas partes. Uma cinética que é função do momento e uma parte constituída pelo potencial que depende só da coordenada. Assim é natural que separemos o operador A da mesma maneira. É claro que $W(x)$ está relacionado com o potencial e é daí que provem o nome de superpotencial.

Também é claro que nem sempre poderemos fatorizar o Hamiltoniano dessa forma. Só poderemos fazer quando a condição de supersimetria assim o permitir.

É importante também ressaltar que esses operadores estão relacionados com operadores de aniquilação ou criação normalmente presentes na Mecânica Quântica.

O superpotencial $W(x)$ que como podemos ver é evidentemente hermitiano pode ser escrito em termos da função de onda como:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)}. \quad (2.8)$$

Obs: É só ver que essa expressão para $W(x)$ satisfaz

$$A\psi_0(x) = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \right) \psi_0(x) = 0,$$

onde, como dissemos A atua como um operador de aniquilação.

Usando ainda as expressões de A e $A^\dagger$ em termos de $W(x)$ podemos escrever H_1 como sendo

$$H_1 = A^\dagger A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x),$$

que nos permite identificar o potencial como sendo

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (2.9)$$

Essa expressão nos será de particular valia pois nos permite relacionar o superpotencial com o potencial cujo o espectro estamos interessados em saber. Para fazer isso podemos definir um novo Hamiltoniano H_2 como sendo

$$H_2 \equiv AA^\dagger, \quad (2.10)$$

que por sua vez também tem um termo cinético e um potencial V_2 que pode ser escrito como função do superpotencial como se fazia para V_1

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x). \quad (2.11)$$

Definimos o Hamiltoniano total em termos de H_1 e H_2 como:

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

ou seja

$$H = \begin{bmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Também podemos escrever o Hamiltoniano em termos de operadores Q e $Q^\dagger$ da seguinte maneira

$$H = QQ^\dagger + Q^\dagger Q = \{Q, Q^\dagger\}. \quad (2.14)$$

Isso é justamente a condição de supersimetria e Q é a carga supersimétrica ou gerador de supersimetria. Essa definição é idêntica a $H_1 = A^\dagger A$ e $H_2 = AA^\dagger$ desde que identifiquemos Q e $Q^\dagger$ como

$$Q = A\sigma_-, \quad (2.15)$$

e

$$Q^\dagger = A^\dagger\sigma_+, \quad (2.16)$$

onde

$$\sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Assim dizer que $H = QQ^+ + Q^+Q$ é idêntico a dizer que $H_1 = A^+A$ e $H_2 = AA^+$ desde que Q e A estejam relacionados dessa maneira.

Ambos os Hamiltonianos possuem o mesmo espectro positivo ou seja, os níveis de energia positivos obtidos da resolução do problema de autovalores de ambos os hamiltonianos H_1 e H_2 possuem uma mesma configuração de valores possíveis de modo que se conhecermos os autovalores da energia para um dos hamiltonianos saberemos o mesmo para o outro.

Um exercício interessante é, dado um potencial qualquer que sabemos resolver e cujo o auto valor da energia no estado fundamental é não nulo, é definir um hamiltoniano H_1 como sendo

$$H_1 = H - E_0, \quad (2.19)$$

assim podemos obter uma nova hamiltoniano satisfazendo tudo que foi dito anteriormente que valia para o caso do autovalor da energia ser zero.

2.2 Hierarquia de Hamiltonianos

No item anterior vimos como dado um hamiltoniano H_1 fatorizavel na forma $H_1 = A^+A$ poderíamos definir um outro hamiltoniano H_2 parceiro supersimétrico de H_1 . Veremos agora como estender essa idéia para criarmos novos hamiltonianos. A vantagem desse método é que com isso poderemos saber todos os autolavores de H_1

Seja um hamiltoniano H_1 dado por

$$H_1 = A_1^+ A_1 + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x), \quad (2.20)$$

com

$$A_1 = \frac{d}{dx} + W_1(x), A_1^+ = -\frac{d}{dx} + W_1(x), \quad (2.21)$$

onde também

$$W_1(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{d \ln \psi_0^1}{dx} \quad (2.22)$$

e onde já fizemos $\hbar = 2m = 1$.

O parceiro supersimétrico é dado por

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x). \quad (2.23)$$

Agora introduziremos a notação $E_n^{(m)}$ com n indicando o nível de energia e m se referindo a ordem hierárquica do hamiltoniano.

Os níveis de energia estão relacionados por

$$E_{n+1}^{(1)} = E_n^{(2)} \quad (2.24)$$

e as funções de onda por

$$\psi_n^{(2)} \propto A_1 \psi_{n+1}^{(1)}. \quad (2.25)$$

A idéia da hierarquia de hamiltonianos surge agora. Como visto fizemos

$$H_2 = A_1 A_1^+ + E_0^{(1)},$$

então agora definimos A_2 tal que

$$H_2 = A_2^+ A_2 + E_1^{(1)}, \quad (2.26)$$

onde analogamente ao que tínhamos antes tem-se

$$A_2 = \frac{d}{dx} + W_2(x), \quad A_2^+ = -\frac{d}{dx} + W_2(x) \quad (2.27)$$

e

$$W_2(x) = -\frac{d \ln \psi_0^{(2)}}{dx}. \quad (2.28)$$

Dai podemos definir H_3 como sendo

$$H_3 = A_2 A_2^+ + E_1^{(1)} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x) \quad (2.29)$$

e assim por diante. Os níveis de energia satisfazem

$$E_n^{(3)} = E_{n+1}^{(2)} \quad (2.30)$$

e as funções de onda satisfazem

$$\psi_n^{(3)} \propto A_2 \psi_{n+1}^{(2)} \quad (2.31)$$

ou

$$\psi_n^{(3)} \propto A_2 A_1 \psi_{n+2}^{(1)} \quad (2.32)$$

e assim por diante. Podemos definir toda uma hierarquia de hamiltonianos que possuem níveis de energia relatos. Se H_1 possui P níveis então podemos construir P hamiltonianos.

Na figura 2.2 vemos a relação entre os diferentes níveis de energias de um conjunto hierárquico de hamiltonianos.

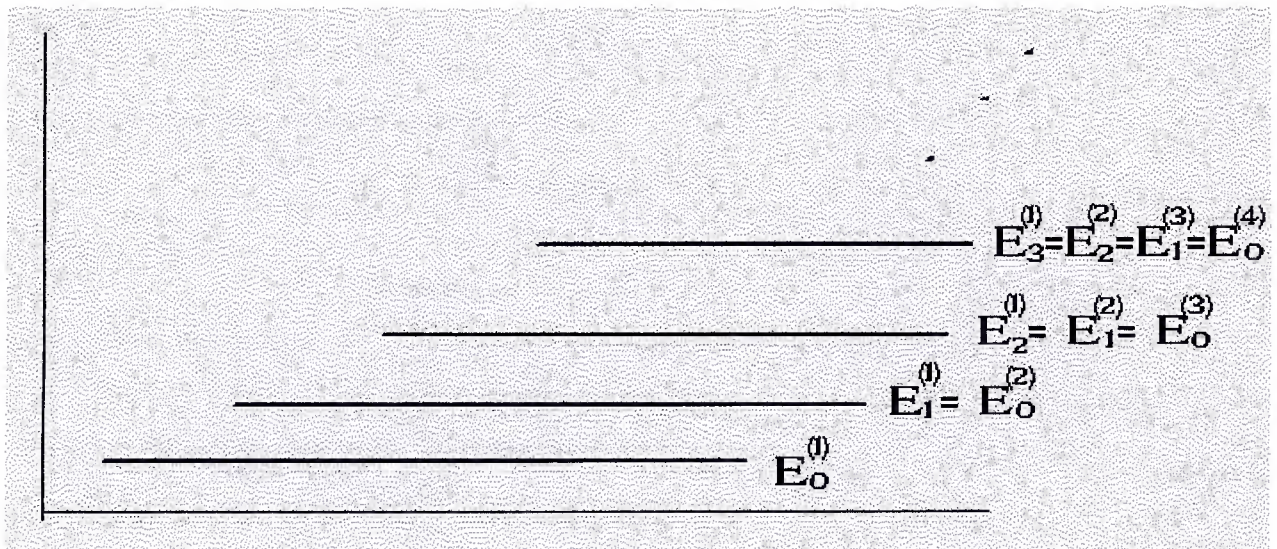


Figura 2.1: Autovalores de um conjunto hierárquico de hamiltonianos parceiros supersimétricos

2.3 Invariância de Forma

Dois potenciais supersimetricamente associados $V_2(x)$ e $V_1(x)$ são ditos invariantes de forma se puderem ser escritos como

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1), \quad (2.33)$$

onde a_1 é apenas um conjunto de parâmetros e $a_2 = f(a_1)$.

Dado um hamiltoniano H_1 com p estados ligados vimos na parte sobre hierarquia de hamiltonianos que podemos construir $p-1$ novos hamiltonianos totalizando assim p hamiltonianos. O hamiltoniano p tem o autovalor de nível $n=0$ igual ao autovalor $n+1$ do hamiltoniano $p-1$. Assim, usando a hierarquia de hamiltonianos e a invariância de forma podemos construir todo o espectro de H_1 .

Dado um conjunto hierárquico de hamiltonianos H_s com $s = 1, 2, 3, \dots$ a partir da condição da invariância de forma 2.33 podemos escrever

$$H_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \quad (2.34)$$

onde a_k é a função f aplicada $k-1$ vezes em a_1 . Ou seja, $a_2 = f(a_1)$, $a_3 = f(a_2) = f(f(a_1))$ e assim por diante.

Agora vejamos uma verificação da equação 2.34. Supondo $s = 1$ obtemos diretamente

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_1),$$

que era o esperado. Supondo agora $s = 2$

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_2) + R(a_1)$$

e usando que

$$V_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + R(a_1),$$

temos diretamente que

$$H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_1),$$

que era o esperado. Agora verifiquemos para $s = 3$.

$$H_3 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x, a_3) + R(a_1) + R(a_2).$$

Podemos escrever em analogia com 2.33 que

$$V_2(x; a_2) = V_1(x; a_3) + R(a_2),$$

onde só fizemos $a_1 \rightarrow a_2$ e $a_3 \rightarrow a_3$.

Também em analogia com 2.33 podemos escrever

$$V_3(x; a_1) = V_2(x; a_2) + R(a_1),$$

onde fizemos $V_1 \rightarrow V_2$ e $V_1 \rightarrow V_2$. Substituindo V_2 da última expressão na primeira e depois substituindo na expressão de H_3 obtemos

$$H_3 = -\frac{d^2}{dx^2} + V_3(x; a_1),$$

que era o esperado, e assim por diante.

Fazendo $s + 1$ temos evidentemente a partir de 2.34

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1(x; a_{s+1}) + \sum_{k=1}^s R(a_k) \quad (2.35)$$

ou aplicando a invariância de forma para V_1 e V_2

$$H_{s+1} = -\frac{d^2}{dx^2} + V_2(x; a_s) + \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k). \quad (2.36)$$

H_s e H_{s+1} são parceiros supersimétricos. Eles possuem estados ligados idênticos exceto pelo nível fundamental de H_s . De 2.34 fica claro que esse autovalor vale

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R(a_k), \quad (2.37)$$

onde temos que $E_0^1 = 0$.

Partindo agora de H_s para H_{s-1} e assim por diante fica claro que o espectro completo de H_1 é dado por

$$E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n R(a_k). \quad (2.38)$$

2.4 Invariância de forma em dois passos

Considere o caso de dois superpotenciais $W(x; a_1)$ e $\tilde{W}(x; a_1)$ e que supersimetria não seja quebrada. De W podemos obter V_1 e V_2 e de $\tilde{W}$ podemos obter $\tilde{V}_1$ e $\tilde{V}_2$. Suponha que V_1 e V_2 estejam relacionados apenas por uma constante aditiva.

$$V_2(x; a_1) = \tilde{V}_1(x; a_1) + R(a_1), \quad (2.39)$$

invariância de forma em dois passos significa que

$$\tilde{V}_2(x; a_1) = V_1(x; a_2) + \tilde{R}(a_1). \quad (2.40)$$

Quando isso ocorre, os autovalores e autofunções de $V_1(x; a_1)$ podem ser obtidos algebricamente. Da equação 2.39 vemos que

$$E_n^{(2)}(a_1) = \tilde{E}_n^{(1)} + R(a_1),$$

onde lembre-mos que n indica o nível de excitação e (1) e (2) se refere ao potencial. Para $n = 0$ temos

$$E_1^{(1)}(a_1) = R(a_1), \quad (2.41)$$

onde já usamos o fato de SUSI não ser quebrada, isto é, $\tilde{E}_0^{(1)} = E_0^{(1)} = 0$ e que os níveis estão relacionados por

$$E_n^{(2)}(a_1) = E_{n+1}^{(1)}(a_1) \quad (2.42)$$

e o mesmo para os oriundos de $\tilde{W}$. Da condição de invariância de forma em dois passos 2.40 chegamos a

$$\tilde{E}_n^{(2)} = E_n^{(1)}(a_2) + \tilde{R}(a_1) \quad (2.43)$$

e a partir dessas equações chegamos a

$$E_{n+1}^{(1)} = E_{n-1}^{(1)} + R(a_1) + \tilde{R}(a_1). \quad (2.44)$$

Vamos mostrar isso.

De $E_n^{(2)}(a_1) = E_{n+1}^{(1)}(a_1)$ e de 2.43 temos evidentemente que

$$E_{n+1}^{(1)}(a_1) = E_n^{(2)}(a_1) = \tilde{E}_n^{(1)}(a_1) + R(a_1),$$

mas

$$\tilde{E}_n^{(2)}(a_1) = \tilde{E}_{n+1}^{(1)}(a_1)$$

e portanto

$$\tilde{E}_{n-1}^{(2)}(a_1) = \tilde{E}_n^{(1)}(a_1),$$

substituindo temos

$$E_{n+1}^{(1)}(a_1) = \tilde{E}_{n-1}^{(2)}(a_1) + R(a_1).$$

Mas como

$$\tilde{E}_n^{(2)} = E_n^{(1)}(a_2),$$

temos

$$\tilde{E}_{n-1}^{(2)} = E_{n-1}^{(1)}(a_2).$$

Substituindo obtemos

$$E_{n+1}^{(1)} = E_{n-1}^{(1)} + R(a_1) + \tilde{R}(a_1),$$

que é justamente 2.44.

Resolvendo 2.44 recursivamente ($n = 1, 2, 3, \dots$) temos

Para $n = 1$

$$E_2^{(1)}(a_1) = E_0^{(1)} + R(a_1) + R(\tilde{a}_1),$$

mas $E_0^{(1)}(a_2) = 0$, então

$$E_2^{(1)}(a_1) = R(a_1) + \tilde{R}(a_1).$$

Para $n = 2$

$$E_3^{(1)}(a_1) = E_1^{(1)}(a_2) + R(a_1) + \tilde{R}(a_1),$$

mas $E_1^{(1)}(a_2) = R(a_2)$, logo

$$E_3^{(1)} = R(a_1) + \tilde{R}(a_1) + R(a_2).$$

Para $n = 3$

$$E_4^{(1)}(a_1) = E_2^{(1)}(a_2) + R(a_1) + \tilde{R}(a_1)$$

e usando que $E_2^{(1)}(a_2) = R(a_2) + \tilde{R}(a_2)$ temos

$$E_4^{(1)}(a_1) = R(a_2) + \tilde{R}(a_2) + R(a_1) + \tilde{R}(a_1),$$

então

$$E_4^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^2 [R(a_k) + \tilde{R}(a_k)].$$

Para $n = 4$ temos

$$E_5^{(1)} = E_3^{(1)}(a_2) + R(a_1) + \tilde{R}(a_1),$$

$$E_5^{(1)} = R(a_2) + \tilde{R}(a_2) + R(a_1) + \tilde{R}(a_1)$$

ou ainda

$$E_5^{(1)} = \sum_{k=1}^2 (R(a_k) + \tilde{R}(a_k)) + R(a_2).$$

Generalizando os resultados acima temos

$$E_{2n}^{(1)} = \sum_{k=1}^n [R(a_k) + \tilde{R}(a_k)], \quad E_{2n+1}^{(1)} = \sum_{k=1}^n [R(a_k) + \tilde{R}(a_k)] + R(a_n + 1), \quad (2.45)$$

ou seja, já sabemos todos os autovalores de H_1 .

As funções de onda dos estados ligados de $V_1(x; a_1)$, isto é, $\psi_n^{(1)}(x; a_1)$ podem também serem construídas em termos $\psi_0^{(1)}(x; a_1)$ e $\tilde{\psi}_0^{(1)}(x; a_1)$.

A partir de 2.39 segue que

$$\psi_{n+1}^{(1)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \psi_n^{(2)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \tilde{\psi}_n^{(1)}(x; a_1). \quad (2.46)$$

Vamos mostrar isso.

Sabemos que

$$\psi_{n+1}^{(1)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \psi_n^{(2)}(x; a_1),$$

mas de 2.39 vemos que $V_2(x; a_1)$ e $\tilde{V}_1(x; a_1)$ diferem apenas por uma constante aditiva, então é claro que $\psi_n^{(2)}(x; a_1) \propto \tilde{\psi}_n^{(1)}(x; a_1)$ e substituindo temos 2.46

Enquanto da equação 2.40 nos temos que

$$\tilde{\psi}_{n+1}^{(1)} \propto \tilde{A}^+(x; a_1) \tilde{\psi}_n^{(2)}(x; a_1) \propto \tilde{\psi}_n^{(1)}(x; a_2). \quad (2.47)$$

Isso pode ser visto lembrando que

$$\tilde{\psi}_{n+1}^{(1)} \propto \tilde{A}^+(x; a_1) \tilde{\psi}_n^{(2)},$$

mas de 2.40 vemos que $\tilde{V}_2(x; a_1)$ e $\tilde{V}_1(x; a_2)$ diferem apenas por uma constante aditiva, logo $\tilde{\psi}_n^{(2)}(x; a_1) \propto \tilde{\psi}_n^{(1)}(x; a_2)$, substituindo obtêm-se 2.47.

Combinando 2.46 e 2.47 obtemos

$$\psi_{n+2}^{(1)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1) \psi_n^{(1)}(x; a_2). \quad (2.48)$$

Vamos mostrar isso.

De 2.47 temos

$$\tilde{\psi}_{n+1}^{(1)} \propto \tilde{A}^+(x; a_1) \psi_n^{(1)},$$

fazendo $n + 1 \rightarrow n$ tem-se

$$\tilde{\psi}_n^{(1)} \propto \tilde{A}^+(x; a_1) \psi_{n-1}^{(1)},$$

substituindo isso em 2.46 e fazendo $n \rightarrow n + 1$ temos 2.48.

Agora aplicamos a expressão 2.48 recursivamente de modo análogo ao que fizemos para os autovalores, só que agora começando com $n = 0$.

Para $n = 0$ temos diretamente que

$$\psi_2^{(1)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1) \psi_0^{(1)}(x; a_2).$$

Para $n = 1$ temos

$$\psi_3^{(1)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1) \psi_1^{(1)},$$

mas de 2.46 sabemos que

$$\psi_1^{(1)}(x; a_2) \propto A^+(x; a_2) \tilde{\psi}_0^{(1)}(x; a_2),$$

substituindo temos

$$\psi_3^{(1)}(x; a_1) \propto [A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1)] A^+(x; a_2) \tilde{\psi}_0^{(1)}(x; a_2).$$

Para $n = 2$ temos

$$\psi_4^{(1)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1) \psi_2^{(1)}(x; a_2),$$

mas $\psi_2^{(1)}(x; a_2)$ é idêntico à $\psi_2^{(1)}(x; a_1)$ bastando trocar o índice de a , assim

$$\psi_2^{(1)}(x; a_2) \propto A^+(x; a_2) \tilde{A}^+(x; a_2) \psi_0^{(1)}(x; a_3),$$

substituindo

$$\psi_4^{(1)}(x; a_1) \propto A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1) A^+(x; a_2) \tilde{A}^+(x; a_2) \psi_0^{(1)}(x; a_3).$$

Para $n = 3$ temos

$$\psi_5^{(1)} \propto A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1) \psi_3^{(1)}(x; a_2),$$

bem

$$\psi_3^{(1)}(x; a_2) \propto [A^+(x; a_2) \tilde{A}^+(x; a_2)] A^+(x; a_3) \tilde{\psi}_0^{(1)}(x; a_3).$$

Substituindo temos

$$\psi_5^{(1)} \propto [A^+(x; a_1) \tilde{A}^+(x; a_1)] [A^+(x; a_2) \tilde{A}^+(x; a_2)] A^+(x; a_3) \tilde{\psi}_0^{(1)}(x; a_3)$$

e assim por diante.

Generalizando temos

$$\psi_{2n}^{(1)} \propto [A^+(x; a_1)\tilde{A}^+(x; a_1)]\dots[A^+(x; a_n)\tilde{A}^+(x; a_n)]\psi_0^{(1)}(x; a_{n+1}) \quad (2.49)$$

e

$$\psi_{2n+1}^{(1)} \propto [A^+(x; a_1)\tilde{A}^+(x; a_1)]\dots[A^+(x; a_n)\tilde{A}^+(x; a_n)]\tilde{A}^+(x; a_{n+1})\tilde{\psi}_0^{(1)}(x; a_{n+1}). \quad (2.50)$$

Então, usando invariância de forma em 2 passos, caso ela ocorra, podemos construir expressões analíticas para todos os autovalores e autofunções do potencial V_1 .

Capítulo 3

Quebra de Supersimetria

3.1 Simetrias internas e Supersimetria

Aqui falaremos um pouco sobre quebra de Supersimetria. Veja por exemplo [1]. Uma das implicações da Supersimetria é que para cada bóson existe um férmion de mesma massa e vice-versa, $m_b = m_f$. Como sabemos isso não é observado na natureza (na natureza toda massa se deve aos férmions, particularmente aos prótons e neutrons) assim a supersimetria deve ser quebrada abaixo de um certo nível de energia que não é observado ordinariamente na natureza (dai mais uma das importâncias de aceleradores de partículas com energias cada vez maiores). É simples entender o porque desse limite de energia. Já que para que supersimetria não seja quebrada deve haver bósons e férmions de mesma massa e isso não ocorre ordinariamente, é preciso que exista algum mecanismo para dar massa para determinadas partículas e isso implica num regime de altas energias.

Para cada simetria continua que se quebra tem-se a criação de uma partícula de mesma estatística. Supersimetria é uma simetria fermionica assim a quebra de uma supersimetria gera um férmion. Na verdade, no caso de teoria de campos, se trata de um férmion sem massa chamado férmion de Goldstone. A simples existência de um férmion sem massa não implica que SUSI seja quebrada pois um férmion de Goldstone não é um simples férmion sem massa mas sim um férmion oriundo da quebra de supersimetria. Aqui nós estaremos particularmente interessados na quebra espontânea de supersimetria, i.e., quando o vácuo não possui a simetria.

Quando o vácuo tem essa simetria a energia de vácuo é nula.

$$\langle 0|H|0 \rangle = 0. \quad (3.1)$$

Antes de continuarmos devo dar uma palavra sobre o que vem a ser o gerador de supersimetria. Para cada transformação que se tem existe um gerador que produz as transformações das grandezas envolvidas. Para uma dada grandeza X presente

na ação a variação dessa grandeza por transformação de supersimetria como para qualquer outra simetria é dada por

$$\delta X = [X, Q]. \quad (3.2)$$

onde Q é o gerador da simetria, no caso supersimetria. A supersimetria é justamente definida através das propriedades do gerador. Q é tal que satisfaz

$$\{Q, Q^+\} = H. \quad (3.3)$$

A partir da expressão acima chega-se a expressão já vista

$$H = QQ^+ + Q^+Q,$$

dai provem que se o vácuo tem a simetria, i.e., $Q|0\rangle = 0$ então $\langle 0|H|0\rangle = 0$.

Uma pergunta que poderia ser feita é a seguinte. Por que estudar a quebra de supersimetria em Mecânica Quântica se a mesma não é uma teoria de campo que descreve partículas e sim uma teoria de uma única partícula? A resposta é a seguinte: Em teoria de campos é um tanto difícil entender quando supersimetria é quebrada não perturbativamente, assim a M. Q. Supersimétrica pode ser usada como um teste para achar diferentes métodos para entender a quebra não perturbativa de supersimetria.[2]. Isso será nossa maior motivação para o estudo da quebra de supersimetria.

Uma coisa interessante que podemos ver facilmente nesse formalismo hamiltoniano é que se Supersimetria é quebrada o estado fundamental é degenerado. Supõem que seu estado fundamental seja $|0\rangle$ e que o mesmo não seja invariante sobe supersimetria (susi quebrada), i.e:

$$Q|0\rangle = |\beta\rangle \neq 0. \quad (3.4)$$

Mas sabemos por definição que

$$H|0\rangle = E_0|0\rangle. \quad (3.5)$$

Atuando nisso com Q e usando que $[H, Q] = 0$ temos:

$$HQ|0\rangle = E_0Q|0\rangle, \quad (3.6)$$

ou

$$HQ|0\rangle = E_0|\beta\rangle, \quad (3.7)$$

mas $HQ|0\rangle = H|\beta\rangle$, logo

$$H|\beta\rangle = E_0|\beta\rangle \quad (3.8)$$

e comparando isso com 3.5 vemos que $|0\rangle$ e $|\beta\rangle$ são estados degenerados de energia E_0 .

Podemos nos perguntar qual seriam as diferenças entre a quebra de Supersimetria e a de uma simetria interna qualquer. Como dissemos supersimetria é quebrada quando o estado fundamental não tem energia zero. Na Figura 3.1 temos um potencial em termos de um campo ϕ . A energia de estado fundamental corresponde ao valor mínimo de V . No caso esse valor é diferente de zero e nesse sistema supersimetria é quebrada enquanto uma simetria interna pode não ser quebrada pois o vácuo se localiza em um ponto simétrico.

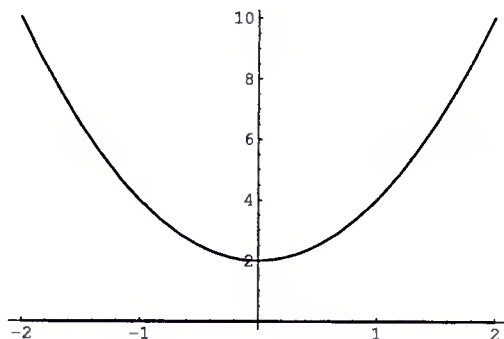


Figura 3.1: Gráfico de $V(x)$ mostrando supersimetria quebrada. A nível de árvore energia do estado fundamental é o mínimo do potencial que nesse caso é diferente de zero.

No entanto no caso da Figura 3.2 simetrias internas provavelmente não são quebradas. Pois o vácuo está localizado num ponto simétrico.

Supersimetria implica necessariamente que o vácuo tem a simetria e que o estado de vácuo tem energia zero. Na Figura 3.2 o valor mínimo do potencial nulo corresponde a um estado de energia fundamental de energia zero e portanto supersimetria não é quebrada.

Poderíamos nos perguntar como correções quânticas seriam capazes de mudar um gráfico do tipo Figura 3.1 num do tipo Figura 3.2 e vice-versa. Bem, se supersimetria é quebrada a nível de árvore como na Figura 3.1, correções infinitesimais não podem transformar esse gráfico num como o da Figura 3.2. No entanto se partirmos de um caso com supersimetria não quebrada pequenas correções podem levar a um valor de vácuo com energia não nula e portanto supersimetria quebrada.

Já no caso da Figura 3.3 há dois estados de vácuo a nível de árvore. Portanto o vácuo não está localizado num ponto simétrico e portanto simetrias internas são

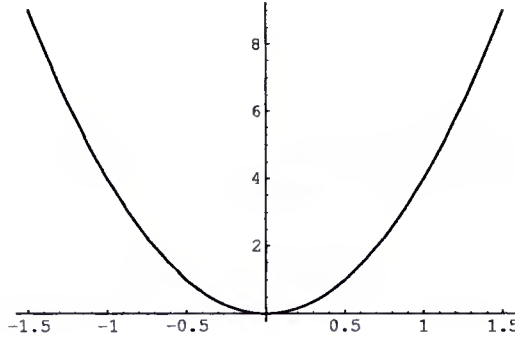


Figura 3.2: Supersimetria não quebrada a nível de árvore.

quebradas. No entanto a energia de estado fundamental de ambos os vácuos é nula e portanto supersimetria é não quebrada a nível de árvore. Correções quânticas irão mostrar qual é o vácuo real.

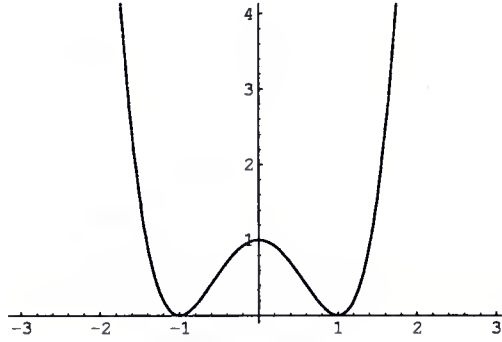


Figura 3.3: Supersimetria não quebrada a nível de árvore, simetrias internas possivelmente quebradas

3.2 Quebra de Supersimetria em Mecânica Quântica

Agora seguindo [1] veremos como funciona a quebra de Supersimetria em Mecânica Quântica Supersimétrica. No Capítulo 2 vimos como relacionar o potencial V_- com o Superpotencial. Desprezando correções quânticas, isto é, o termo com $\hbar$ o potencial passa a ser simplesmente W^2 .

O mínimo de energia passa a ser o mínimo de W^2 e portanto o número de estados

fundamentais a nível de árvore passa a ser igual ao número de soluções da equação $W(x) = 0$.

Consideraremos o caso em que $|W(x)| \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \pm\infty$ para garantir que tenhamos estados discretos.

Assim, podemos fazer alguns gráficos para diferentes escolhas de W .

Suponha que $W(x)$ tenha um simples zero em $x = x_0$ tal que

$$W(x) = (x - x_0)\lambda + \dots, \quad (3.9)$$

para um dado λ .

O hamiltoniano é então

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \lambda^2(x - x_0)^2 + \hbar\lambda\sigma_3), \quad (3.10)$$

mais termos de ordem maior em $(x - x_0)$.

A expressão acima para o hamiltoniano é obtida simplesmente pela substituição de H_1 e H_2 em termos do superpotencial em 2.12.

Fazendo uma mudança de variável do tipo $y = x - x_0$ vemos que os dois primeiros termos desse hamiltoniano correspondem a um oscilador harmônico com $m = 1$ e $\omega^2 = \lambda^2$ e que portanto tem energia de estado fundamental igual a $\frac{1}{2}\hbar|\lambda|$. O último termo, não esquecendo do fator $1/2$ que multiplica tudo é $\frac{1}{2}\hbar\lambda\sigma_3$ e tem autovalores $\pm\frac{1}{2}\hbar\lambda$. Assim escolhendo o autovalor de σ_3 que minimiza a energia de estado fundamental temos $\frac{1}{2}\hbar|\lambda| - \frac{1}{2}\hbar|\lambda| = 0$ que é um exemplo de cancelamento das contribuições de bósons e férmions para a energia de estado fundamental.

Sabemos que a nível de árvore o número de estados fundamentais é igual ao número de zeros de $W(x)$. Mas numa teoria exata se o número de zeros de $W(x)$ for ímpar há somente um estado supersimétrico que é o vácuo real da teoria. Já se o número de zeros de $W(x)$ for par então numa teoria exata não há nenhum estado supersimétrico e supersimetria é espontaneamente quebrada.

Assim saber quando supersimetria é espontaneamente quebrada ou não se torna um problema simples.

Mostraremos isso seguindo Witten. Para mostrar isso basta lembrar que o vácuo é definido como

$$Q_1\psi = 0,$$

onde a carga supersimétrica Q_1 [†] pode ser escrita como

[†]Nós em geral escrevemos a álgebra N=2 na MQS em termos de Q e Q^+ . Agora seguimos o autor que usou $\{Q_i, Q_j\} = \delta_j^i H$ e de modo que $Q_1^2 = Q_2^2 = H$ onde Q_1, Q_2 podem ser escritas como $Q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x p + \sigma_y W(x))$ e $Q_2 = \frac{1}{2}(\sigma_y p - \sigma_x W(x))$.

$$Q_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x p + \sigma_y W(x)),$$

mas como $Q\psi = 0$ temos

$$\sigma_x p \psi = -\sigma_y W(x) \psi.$$

Multiplicando isso por σ_x , usando que $\sigma_x^2 = 1$, $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$ e que $p_x = -i\hbar d/dx$ temos

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{\hbar} W(x) \sigma_3 \psi(x),$$

cuja solução, que pode ser verificada facilmente por substituição, é

$$\psi(x) = \left(\exp \int_0^x dx' \frac{W(x')}{\hbar} \sigma_3 \right) \psi(0).$$

Como tínhamos assumido que $|W(x)| \rightarrow \infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$ temos que se $W(x)$ tem um numero ímpar de zeros o sinal de $W(x)$ para $x \rightarrow \infty$ é oposto do sinal de $W(x)$ para $x \rightarrow -\infty$. Já se $W(x)$ não tem zeros ou tem número par de zeros então o sinal de então o sinal de $W(x)$ é o mesmo tanto para $x \rightarrow \infty$ como para $x \rightarrow -\infty$.

Consideremos que $W(x)$ tenha número par de zeros. suponha que por exemplo $W(x) \sim x^4$ para grandes valores de x . Então

$$\int_0^x dx' W(x') \sigma_3 \sim \frac{x^5}{5} \sigma_3,$$

nesse caso nenhuma escolha de $\psi(0)$ torna a função $\psi(x)$ normalizável.

Suponha que

$$\sigma_3 \psi(0) = +\psi(0),$$

isto pois σ_3 tem autovalores $+1$ e -1 .

Fazendo

$$\int_0^x dx' \frac{W(x')}{\hbar} \sigma_3 = A,$$

e usando que

$$\exp(A\sigma_3) = \cosh A + \sigma_3 \sinh A,$$

temos então

$$e^{A\sigma_3} \psi(0) = (\cosh A + \sinh A) \psi(0),$$

que diverge para $x \rightarrow +\infty$ uma vez que $A = x^5/\hbar$ também vai para infinito junto com x .

Para

$$\sigma_3\psi(0) = -\psi(0),$$

temos

$$e^{A\sigma_3}\psi(0) = (\cosh A - \sinh A)\psi(0),$$

que embora converja para $x \rightarrow +\infty$ diverge para $x \rightarrow -\infty$.

Assim, se há um número par de zeros de $W(x)$ não há nenhum estado supersimétrico.

Suponha agora que haja um número ímpar de zeros para $W(x)$. Por exemplo $W(x) \sim x^3$ para x grande. Então

$$\int_0^x dx' W(x') \sigma_3 \sim \frac{x^4}{4} \sigma_3,$$

então se

$$\sigma_3\psi(0) = -\psi(0),$$

temos que

$$e^{A\sigma_3}\psi(0) = (\cosh A - \sinh A)\psi(0),$$

que converge tanto para $x \rightarrow +\infty$ como para $x \rightarrow -\infty$ uma vez que $A = \frac{x^4}{4\hbar}$ é uma função par de x e que para valores grandes de A vale que $\cosh A = \sinh A$.

Então $\psi(0)$ é o único estado fundamental da teoria.

Nós fizemos isso seguindo o artigo original do Witten [1] com exemplos para $W(x) \sim x^3$ e para $W(x) \sim x^4$ para valores grandes de x e com x^3 e x^4 tendo 3 e 4 zeros iguais respectivamente. Mas é claro que para um $W(x)$ qualquer isso continua válido uma vez que o que importa é se a integral de $W(x)$ é uma função par ou ímpar. Isso poderia ser feito perfeitamente da mesma maneira para casos onde o termo dominante fosse proporcional a x^{2n} ou x^{2n+1} .

Capítulo 4

Exemplos

4.1 Construção de novos potenciais solúveis a partir de outros

A idéia é começar com uma equação de Schrödinger cuja solução é conhecida exatamente e ver o que acontece com ela sob uma transformação de coordenadas. O objetivo é construir uma nova equação de Schrödinger igualmente solúvel. Para uma revisão mais detalhada disso veja por exemplo [2]. Mas o que isso tem haver com supersimetria? Como citado em [2] e mostrado em suas referências se os potenciais não transformados forem invariantes de forma os novos potenciais obtidos serão também. Vejamos como isso funciona em 1 dimensão.

Considere a equação de Schrödinger independente do tempo

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi_n(x) + [E_n - V(x)]\psi_n(x) = 0. \quad (4.1)$$

Agora fazemos a transformação de coordenadas de x para z definida por

$$f(z) = \frac{dz}{dx}. \quad (4.2)$$

Veja que isso implica em

$$\frac{d}{dx} = f \frac{d}{dz}, \quad (4.3)$$

pois

$$f \frac{d}{dz} = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = \frac{d}{dx}.$$

Fazendo a transformação temos

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \right) \rightarrow f \frac{d}{dz} \left(f \frac{d}{dz} \right),$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \rightarrow f^2 \frac{d^2}{dz^2} + f \frac{df}{dz} \frac{d}{dz} = f^2 \frac{d^2}{dz^2} + f f' \frac{d}{dz}.$$

Substituindo isso na equação de Schrödinger temos

$$f^2 \frac{d^2}{dz^2} \psi_n(x) + f f' \frac{d}{dz} \psi_n(x) + [E_n - V(x)] \psi_n(x) = 0,$$

dividindo tudo por $-f^2$ e pondo ψ em evidência temos

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{f'}{f} \frac{d}{dz} + \frac{[V - E_n]}{f^2} \right\} \psi_n = 0. \quad (4.4)$$

Queremos que isso se torne uma equação de Schrödinger para um novo potencial. Como a equação de Schrödinger independente do tempo não possui derivadas primeiras devemos fazer com que a derivada que aparece em relação a coordenada z desapareça.

Para fazer isso fazemos

$$\psi = f^{-1/2} \bar{\psi}.$$

Substituindo isso em 4.4 temos

$$\left\{ -\frac{d^2}{dz^2} - \frac{f'}{f} \frac{d}{dz} + \frac{[V - E_n]}{f^2} \right\} (f^{1/2} \psi_n) = 0$$

ou

$$-\frac{d^2}{dz^2} (f^{-1/2} \bar{\psi}) - \frac{f'}{f} \frac{d}{dz} (f^{-1/2} \bar{\psi}) + \frac{[V - E_n]}{f^2} f^{-1/2} \bar{\psi} = 0.$$

Efetuando as contas temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right) f^{-5/2} f'^2 \bar{\psi} + \frac{1}{2} f^{-3/2} f'' \bar{\psi} + \frac{1}{2} f^{-3/2} f' \frac{d\bar{\psi}}{dz} + \frac{1}{2} f^{-3/2} f' \frac{d\bar{\psi}}{dz} - f^{-1/2} \frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} + \frac{1}{2} f'^2 f^{-5/2} \bar{\psi} \\ & - f' f^{-3/2} \frac{d\bar{\psi}}{dz} + [V - E_n] f^{-5/2} \bar{\psi} = 0 \end{aligned}$$

ou

$$-\frac{1}{4} f'^2 f^{-5/2} \bar{\psi} + \frac{1}{2} f^{-3/2} f'' \bar{\psi} - f^{-1/2} \frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} + [V - E_n] f^{-5/2} \bar{\psi} = 0.$$

Multiplicando isso por $f^{1/2}$ podemos reconhecer claramente uma equação do tipo

$$-\frac{d^2}{dz^2} \bar{\psi} + \bar{V} \bar{\psi} = 0,$$

com

$$\bar{V} = -\frac{1}{4} \frac{f'^2}{f^2} + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} + \frac{[V - E_n]}{f^2}.$$

Adicionando um termo $\epsilon_n \bar{\psi}$ nos dois lados da equação temos

$$-\frac{d^2}{dz^2} \bar{\psi} + [\bar{V} + \epsilon_n] \bar{\psi} = \epsilon_n \bar{\psi}. \quad (4.5)$$

Veja que o potencial não é $\bar{V}$ mas sim $\bar{V} + \epsilon_n$. Como é sabido o potencial não pode depender do nível de excitação da função de onda. Ou seja, para que 4.5 seja uma equação de Schrodinger é preciso que $\bar{V} + \epsilon_n$ seja independente de n .

4.2 O oscilador harmônico supersimétrico

Aqui discutiremos um pouco o oscilador harmônico supersimétrico. Veja por exemplo [2]. Um oscilador harmônico pode ser pensado classicamente como sendo uma massa m presa a extremidade de uma mola de constante elástica k que pode ser esticada numa direção que podemos chamar de X' .

A energia cinética desprezando a massa da mola é dada por

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{P'^2}{2m}, \quad (4.6)$$

e a energia potencial

$$V = \frac{1}{2} k X'^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 X'^2. \quad (4.7)$$

O Hamiltoniano do sistema então pode ser escrito como

$$H' = T + V = \frac{P'^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X'^2. \quad (4.8)$$

Agora vamos fazer todas as quantidades se tornarem adimensionais usando as seguintes definições.

$$H = (\hbar \omega)^{-1} H' \quad (4.9)$$

$$X = (\hbar / 2m\omega)^{-1/2} X' \quad (4.10)$$

$$P' = (2m\hbar\omega)^{-1/2} P \quad (4.11)$$

Nessas novas coordenadas o Hamiltoniano fica

$$H = (P^2 + 1/4 X^2) \quad (4.12)$$

e as variáveis X e P como veremos também obedecem

$$[X, P] = 1.$$

Agora se introduz os operadores de criação e aniquilação. Normalmente tem-se

$$a = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \left(X' + i \frac{P'}{m\omega}\right). \quad (4.13)$$

Nas novas coordenadas obtêm-se

$$a = (X/2 + iP), \quad a^+ = (X/2 - iP). \quad (4.14)$$

Definimos o operador número de partículas da forma usual como sendo

$$N = a^+ a, \quad (4.15)$$

usando que

$$[X', P'] = P'X' - X'P' = i\hbar, \quad (4.16)$$

temos que

$$[X, P] = 1, \quad (4.17)$$

e daí obtêm-se as seguintes relações

$$[a, a^+] = 1, \quad [N, a] = -a, \quad [N, a^+] = a^+. \quad (4.18)$$

Lembrando da definição de a e a^+ e somando eles tem-se

$$a + a^+ = X, \quad (4.19)$$

e subtraindo temos

$$P = 1/2i(a^+ - a). \quad (4.20)$$

Substituindo isso em H e usando a definição de N obtemos

$$H = N + 1/2. \quad (4.21)$$

Como é usual o operador a aniquila o vácuo e você pode construir qualquer estado aplicando a^+ sucessivamente sobre o vácuo. No caso do oscilador harmônico supersimétrico nós temos os operadores Q e Q^+ já mencionados que satisfazem

$$H = QQ^+ + Q^+Q. \quad (4.22)$$

Naturalmente se temos H expresso em termos de a e a^+ e agora H expresso em termos de Q e Q^+ podemos querer expressar Q e Q^+ em termos de a e a^+ . Particularmente o que se faz é

$$Q = a\sigma_-, \quad (4.23)$$

$$Q^+ = a^+\sigma_+, \quad (4.24)$$

onde novamente usamos

$$\sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vê-se imediatamente que

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Agora convêm fazer a seguinte definição.

$$\psi = \sigma_+, \quad (4.26)$$

$$\psi^+ = \sigma_-. \quad (4.27)$$

Vemos facilmente que

$$\{\psi^+, \psi\} = 1$$

e

$$\{\psi^+, \psi^+\} = \{\psi, \psi\} = 0$$

e também

$$[\psi, \psi^+] = \sigma_3.$$

Podemos usar os operadores σ_+ e σ_- como operadores de aniquilação e criação para férmions. Também da maneira que definimos segue claramente que $\psi^+{}^2 = 0$.

Se tivermos um estado com n_b bósons e n_f férmions dado por $|n_b, n_f\rangle$ vale as seguintes relações

$$a|n_b, n_f\rangle = |n_b - 1, n_f\rangle, \quad (4.28)$$

$$a^+|n_b, n_f\rangle = |n_b + 1, n_f\rangle, \quad (4.29)$$

$$\psi|n_b, n_f\rangle = |n_b, n_f - 1\rangle, \quad (4.30)$$

$$\psi^+|n_b, n_f\rangle = |n_b, n_f + 1\rangle. \quad (4.31)$$

A expressão obtida para o Hamiltoniano é só um caso particular da expressão geral do Hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica. Por falar nisso vejamos qual é essa expressão geral.

Podemos escrever o operador de supersimetria da seguinte maneira

$$\begin{aligned} Q^* &= (P + iW)\psi^*, \\ Q &= (P - iW)\psi. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Como vimos supersimetria nos permite escrever o hamiltoniano como sendo

$$H = Q^*Q + QQ^*.$$

Substituindo Q e Q^* nessa expressão e lembrando do velho artifício de atuar numa função arbitrária escrevemos

$$H\phi = [(p + iW)\psi^*][(p - iW)\psi]\phi + [(p - iW)\psi][(p + iW)\psi^*]\phi.$$

Lembrando que nessa expressão somente p é um operador e que na representação das coordenadas (que é o que sempre estamos utilizando) vale que $p = -i\frac{d}{dx}$ chegamos rapidamente a:

$$H = p^2 + W(x)^2 - [\psi, \psi^*]W'(x) \quad (4.33)$$

que é a expressão geral do hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica e é consistente com a que tínhamos em termos de H_1 e H_2 . No caso particular do oscilador harmônico temos

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}[\psi, \psi^*] \quad (4.34)$$

ou seja, $W = \frac{x}{2}$.

Vejamos como mostrar isso.

A equação de Schrödinger independente do tempo com $2m = \hbar = 1$ fica

$$\psi'' + (E - V)\psi = 0.$$

Para o oscilador harmônico temos $V = \frac{1}{2}x^2$, $E_0 = \frac{1}{2}$ e $\psi_0 = Ce^{-\frac{1}{4}x^2}$. Logo

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi'_0}{\psi_0(x)} = -\frac{\psi'_0}{\psi_0(x)},$$

como

$$\psi'_0 = Ce^{-\frac{1}{4}x^2} \left(-\frac{1}{2}\right)x = -\frac{1}{2}x\psi_0(x),$$

então

$$W(x) = \frac{1}{2}x.$$

Observe que para determinarmos o superpotencial ψ_0 não precisa estar normalizada. Agora vamos determinar os hamiltonianos supersimétricos associados H_1 e H_2 . Nós vimos que

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}[\psi, \psi^*],$$

então

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Como definimos

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{bmatrix},$$

temos

$$H_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}, \quad H_2 = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}. \quad (4.35)$$

Agora vamos comparar esse resultado com o que se obtêm usando

$$H_1 = A^+ A,$$

$$H_2 = A A^+.$$

Sabemos que

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)$$

e

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x),$$

então fazendo $2m = 1$ e $\hbar = 1$ temos

$$H_1 = \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right)\left(\frac{d}{dx} + W(x)\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - W'(x)$$

e

$$H_2 = \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right)\left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right) = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + W'(x),$$

que é exatamente o mesmo resultado obtido em 4.35 usando $W = \frac{1}{2}x$.

4.3 Supersimetria e potenciais de poço duplo

Um outro exemplo interessante de aplicação de Mecânica Quântica Supersimétrica é no caso de um poço de potencial duplo [11]. Figura 4.1. Mas por que estudarmos o poço duplo? É porque assim como o oscilador harmônico esse é um exemplo de grande aplicação em Física. Uma coisa interessante que se vê quando se estuda o poço duplo usando Mecânica Quântica é o tunelamento de uma partícula confinada no poço e que é de grande interesse para a Física.

Podemos considerar a função de onda do estado fundamental para um poço duplo como sendo

$$\psi_0(x) \propto e^{-(x-x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2}. \quad (4.36)$$

Com isso podemos calcular o superpotencial que é dado por [†]

$$W(x) = -\frac{\psi_0'}{\psi_0},$$

[†]Já igualando as constantes à unidade.

substituindo a função de onda expressão acima obtemos

$$W(x) = \frac{2(x - x_0)e^{-(x-x_0)^2} + 2(x + x_0)e^{-(x+x_0)^2}}{e^{-(x-x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2}},$$

que separando os x dos x_0 e efetuando os quadrados nas exponenciais e com um pouco de álgebra resulta em

$$W(x) = 2x - 2x_0 \tanh(2xx_0). \quad (4.37)$$

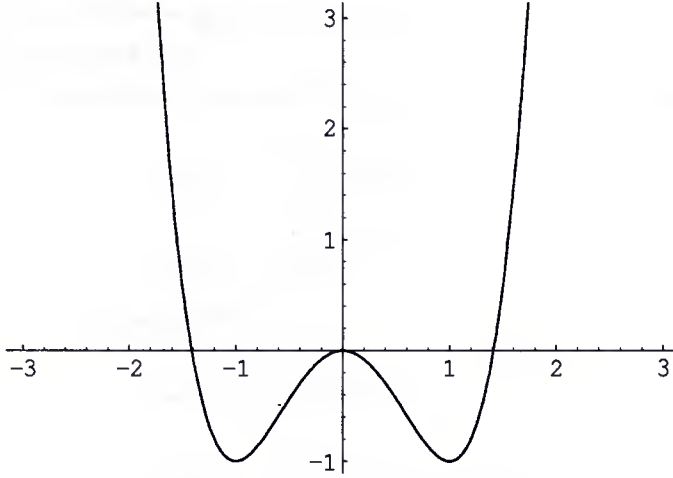


Figura 4.1: Potencial de poço duplo

Sabendo o superpotencial podemos obter diretamente os potenciais associados, V_- e V_+ usando

$$V_-(x) = W^2 - \frac{dW}{dx}$$

e

$$V_+(x) = W^2 + \frac{dW}{dx}.$$

Obtemos

$$V_-(x) = 4(x - x_0 \tanh(2xx_0))^2 - (1 - 2x_0^2 \operatorname{sech}^2(2xx_0)) \quad (4.38)$$

e

$$V_+(x) = 4(x - x_0 \tanh(2xx_0))^2 + (1 - 2x_0^2 \operatorname{sech}^2(2xx_0)). \quad (4.39)$$

O primeiro potencial descreve exatamente um poço duplo enquanto o outro é o potencial supersimétrico associado e que possui o mesmo espectro que o primeiro.

Em [11] Keung, Kovacs e Sukhatme usaram a técnica de Mecânica Quântica Supersimétrica para avaliar a quantidade $t = E_1 - E_0$, i.e, a diferença entre a energia do primeiro nível excitado e a energia de estado fundamental do poço duplo que esta relacionada com a frequencia de tunelamento do referido sistema.

Essa diferença de energia pode ser escrita como [15]

$$t = E_1 - E_0 = 4\chi(0)\chi'(0), \quad (4.40)$$

onde $\chi(x)$ é a função de onda para um único poço

Vejamos como mostrar isso.

As funções de onda para o estado fundamental e primeiro excitado podem ser escritas como

$$\chi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi(x) + \chi(-x)],$$

$$\chi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi(x) - \chi(-x)].$$

Para as derivadas temos também

$$\chi'_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi'(x) - \chi'(-x)],$$

$$\chi'_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi'(x) + \chi'(-x)].$$

A função $\chi(x)$ é a parte da função de onda correspondente a um único poço $x > 0$ assim $\chi(-x)$ é pequeno para x tendendo a infinito, logo podemos escrever

$$\int_0^\infty \chi_0(x)\chi_1(x)dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty [\chi^2(x) - \chi^2(-x)]dx \approx \frac{1}{2} \int_0^\infty \chi^2(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Bem, a equação de Schrödinger independente do tempo

$$\psi'' + (2m/\hbar^2)(E - U)\psi = 0$$

onde U é o potencial e com $2m = \hbar = 1$ fica

a) Para χ_0

$$\chi''_0 + (E_0 - U)\chi_0 = 0,$$

que implica

$$E_0\chi_0 = U\chi_0 - \chi''_0.$$

b) Para χ_1

$$\chi''_1 + (E_1 - U)\chi_1 = 0,$$

que implica

$$E_0\chi_1 = U\chi_1 - \chi_1''.$$

Multiplicando b) por χ_0 e subtraindo disso a) vezes χ_1 temos

$$E_1\chi_0\chi_1 - E_0\chi_0\chi_1 = -\chi_1''\chi_0 + \chi_0''\chi_1$$

e usando a integral calculada anteriormente e que

$$\chi_0(0) = \sqrt{2}\chi(0),$$

$$\chi_1'(0) = \sqrt{2}\chi'(0),$$

$$\chi_0'(0) = \chi_1(0) = 0,$$

e integrando por partes obtêm-se

$$E_1 - E_0 = 4\chi(0)\chi'(0).$$

Usando o potencial $V_+(x)$ Keung, Kovacs e Sukhatme [11] calcularam perturbativamente o valor da diferença $t = E_1 - E_0$ obtendo resultados melhores do que com métodos tradicionais. Na tabela 4.1 reproduzimos os resultados deles. Veja que para Runge-Kutta não há solução para todos os valores de y .

O método que eles usaram foi escrever um solução para a equação de Schrodinger com o potencial $V_0(x)$

$$V_0(x) = V_+(x) - 4\psi_0^2(0)\delta(x),$$

tratando a quantidade $-4\psi_0^2(0)\delta(x)$ como sendo uma perturbação.

Nessa expressão que é a equação 13 do artigo deles $\psi_0(x) \propto e^{-(x-x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2}$. Ela apareceu devido a solução da equação de Schrödinger para $V_+(x)$ ter um discontinuidade na origem.

Dai eles usaram a Teoria de Perturbação Logaritimica [14].

A idéia da Teoria de Perturbação Logaritimica, que exporemos brevemente aqui, é mais ou menos o seguinte.

Começa-se com a equação de Scrödinger para o potencial com a perturbação

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + [V_0(x) + gV_1(x)]\psi(x) = E\psi(x),$$

onde $V_1(x)$ é a perturbação.

Tenta-se uma solução da forma

Tabela 4.1: De [11] Comparando valores de t usando Susi com os valores obtidos com calculos numéricos de Runge Kutta. Para o potencial $V_-(x) = -yx^2 + x^4$.

y	Runge-Kutta	3ª ordem	2ª ordem	1ª ordem
0.5	2.464	2.451	2.324	3.355
1	2.177	2.168	2.063	2.923
2	1.575	1.573	1.513	2.025
3	0.9712	0.9712	0.9520	1.160
4	0.4624	0.4624	0.4605	0.5033
5	0.1595	0.1595	0.1594	0.1632
6	0.0414	0.0414	0.0414	0.0416
7	8.65×10^{-3}	8.65×10^{-3}	8.65×10^{-3}	8.65×10^{-3}
8	1.52×10^{-3}	1.52×10^{-3}	1.52×10^{-3}	1.52×10^{-3}
9	2.28×10^{-4}	2.28×10^{-4}	2.28×10^{-4}	2.28×10^{-4}
10	2.86×10^{-5}	2.98×10^{-5}	2.98×10^{-5}	2.98×10^{-5}
11		3.43×10^{-6}	3.43×10^{-6}	3.43×10^{-6}
12		3.51×10^{-7}	3.51×10^{-7}	3.51×10^{-7}

$$\psi(x) = e^{S(x)}, \quad S(x) = \ln \psi(x).$$

Obs: É daí que provem o nome de perturbação logaritimica. Substituindo obtêm-se a equação de Riccati

$$-\frac{\hbar^2}{2m}[S''(x) + S'(x)^2] + V_0(x) + gV_1(x)\psi(x) = E.$$

Dai expandimos o auto valor de equação e a derivada de $S(x)$ da seguinte forma

$$E = E_0 + gE_1 + g^2E_2 + \dots,$$

$$S'(x) = C_0(x) + gC_1(x) + g^2C_2(x) + \dots$$

Substitui-se isso na equação de Riccati e igualando ordem a ordem obtêm-se

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} V_1(x)|\psi_0(x)|^2 dx,$$

$$E_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} C_1^2(x)|\psi_0(x)|^2 dx,$$

onde

$$C_1(x)|\psi_0(x)|^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \int_{-\infty}^x [V_1(x') - E_1] \psi_0(x')^2 dx'.$$

Como estou apenas apresentando o resultado deles não nos prolongaremos muito nisso. No caso deles essas quantidades assumiram os valores

$$E^{(1)} = \frac{1}{2\xi(0)}, \quad \xi = \int_x^\infty \phi^2(x') dx',$$

$$E^{(2)} = -2 \int_0^\infty \left[\frac{E^{(1)} \xi(x')}{\phi(x')} \right]^2 dx'.$$

Onde ϕ é uma solução que eles encontraram para o potencial V_+ . Isso tudo ilustra como o uso de Supersimetria pode favorecer cálculos numéricos envolvendo a equação de Schrödinger.

4.4 Um exemplo de aplicação de MQS em teoria de cordas

Uma coisa interessante de M.Q. SUSI é que ela torna mais fácil a resolução de equação tipo Schrödinger. Como esse método você pode considerar resolver uma equação diferencial de primeira ordem ao invés de resolver uma de segunda.

Considere a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$H\psi = E\psi, \tag{4.41}$$

para o Hamiltoniano [10]

$$H_l = -\frac{d^2}{d\tau^2} + (l^2 - l(l+1)\text{sech}^2\tau). \tag{4.42}$$

Esse hamiltoniano surgiu no artigo [10] no contexto de teoria de cordas. Aqui iremos nos limitar a parte de supersimetria com Mecânica Quântica que o que nos interessa mas o autor nesse artigo estuda o espectro de flutuação de “lump” de uma teoria escalar Φ^3 em $p+2$ dimensões espaço temporais.

A teoria é chamada de Φ^3 devido ao potencial

$$V(\Phi) = \frac{1}{3}(\Phi - 1)^2(\Phi + \frac{1}{2}) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\Phi^2 + \frac{1}{3}\Phi^3$$

A solução de “lump” descreve uma p-brana onde uma brana é uma superfície ou hiper-superfície onde cordas abertas terminam. Eu não pretendo me reter muito nesse assunto pois não é o objetivo desse trabalho. O fato é que o autor precisou resolver uma equação tipo schrörefinger e usou MQS.

M.Q. Susi nos diz que podemos escrever um hamiltoniano como o produto de dois operadores A^+ e A .

No caso temos

$$H_l = A_l^+ A_l, \quad (4.43)$$

com

$$A_l = l \tanh \tau + \frac{d}{d\tau}, \quad A_l^+ = l \tanh \tau - \frac{d}{d\tau}. \quad (4.44)$$

Vejamos rapidamente como $A_l^+ A_l$ reproduz H

$$\begin{aligned} A_l^+ A_l &= (l \tanh \tau - \frac{d}{d\tau})(l \tanh \tau + \frac{d}{d\tau}), \\ &= l^2 \tanh^2 \tau - \frac{d^2}{d\tau^2} + l \tanh \tau \frac{d}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}(l \tanh \tau), \\ &= l^2 \tanh^2 \tau - \frac{d^2}{d\tau^2} - l \frac{d}{d\tau}(\tanh \tau), \end{aligned} \quad (4.45)$$

Assim

$$A_l^+ A_l = l^2 \tanh^2 \tau - \frac{d^2}{d\tau^2} - l \frac{d}{d\tau}(\tanh \tau).$$

Usando que

$$\tanh^2(x) = 1 - \operatorname{sech}^2(x),$$

e que $d/dx \tanh(x) = \operatorname{sech}^2$ temos

$$\begin{aligned} A_l^+ A_l &= l^2(1 - \operatorname{sech}^2(\tau)) - \frac{d^2}{d\tau^2} - l \operatorname{sech}^2 \tau, \\ &= -\frac{d^2}{d\tau^2} + (l^2 - l(l+1)\operatorname{sech}^2 \tau), \end{aligned}$$

que é igual a H_l , como queríamos mostrar.

O estado fundamental é o estado de energia nula e todos os outros estados tem energia maior que zero, ou seja, não há estados de energia negativa. O que me assegura isso é o fato de termos escrito o hamiltoniano como soma de quadrados de cargas supersimétricas.

Assim temos para o estado fundamental

$$H_l \psi_0^{(l)} = 0, \quad (4.46)$$

o que implica em

$$A_l^+ A_l \psi_0^{(l)} = 0,$$

logo

$$A_l \psi_0^{(l)} = 0 \quad (4.47)$$

e lembrando que

$$A_l = l \tanh \tau + \frac{d}{d\tau} \quad (4.48)$$

temos

$$\left(\frac{d}{d\tau} + l \tanh \tau\right) \psi_0^l = 0. \quad (4.49)$$

Essa é uma equação diferencial de primeira ordem cuja solução é

$$\psi_0^l(\tau) = N_{(0)} \text{sech}^l(\tau). \quad (4.50)$$

Veja como mostrar isso.

$$\frac{d}{d\tau}(\psi_0^l(\tau)) = N_0 \frac{d}{d\tau}(\text{sech}^l(\tau)) = -N_0(l) \text{sech}^{l-1}(\tau) \text{sech}(\tau) \tanh(\tau),$$

isso porque $d/dx \text{ sech}(x) = -\text{sech}(x) \tanh(x)$, então

$$\frac{d}{d\tau}(\psi_0^l(\tau)) = -N_0(l) \text{sech}^l(\tau) \tanh(\tau) = l \tanh(\tau) \psi_0^l,$$

e que evidentemente satisfaz 4.49.

Como disse antes achamos o estado fundamental do dado hamiltoniano não resolvendo a equação diferencial de Schrödinger que é de segunda ordem mas sim resolvendo uma equação de primeira ordem.

Agora podemos mostrar também que ao aplicarmos novamente o operador a^+ sobre os estado ψ_0^l obtemos os outros estados excitados.

Para isso primeiramente vamos mostrar que

$$H_{l-1} = a_l a_l^+ - (2l - 1). \quad (4.51)$$

Nós iniciamos com o Hamiltoniano 4.42

$$H_l = -\frac{d^2}{d\tau^2} + (l^2 - l(l+1)\text{sech}^2\tau),$$

fazendo $l \rightarrow l-1$ ficamos com

$$H_{l-1} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + ((l-1)^2 - (l-1)l\text{sech}^2\tau),$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{d^2}{d\tau^2} + (l^2 - 2l + 1 - (l-1)l\text{sech}^2\tau), \\
&= -\frac{d^2}{d\tau^2} + (l^2 - (2l-1) - (l-1)l\text{sech}^2\tau), \\
&= -\frac{d^2}{d\tau^2} + (l^2 - (l-1)l\text{sech}^2\tau) - (2l-1).
\end{aligned}$$

Para que isso seja coerente com 4.51 devemos ter

$$A_l A_l^+ = -\frac{d^2}{d\tau^2} + (l^2 - (l-1)l\text{sech}^2\tau). \quad (4.52)$$

O que de fato é verdade, vejamos.

$$A_l A_l^+ = (l \tanh \tau + \frac{d}{d\tau})(l \tanh \tau - \frac{d}{d\tau}),$$

ou

$$A_l A_l^+ = l^2 \tanh^2 \tau - \frac{d^2}{d\tau^2} + l \frac{d}{d\tau}(\tanh \tau),$$

e usando ainda que

$$\frac{d}{dx} \tanh x = \text{sech}^2 x,$$

temos

$$A_l A_l^+ = l^2 \tanh^2 \tau - \frac{d^2}{d\tau^2} + l \text{sech}^2 \tau$$

e usando ainda que

$$\tanh^2 x = 1 - \text{sech}^2 x$$

temos

$$\begin{aligned}
A_l A_l^+ &= l^2(1 - \text{sech}^2 \tau) - \frac{d^2}{d\tau^2} + l \text{sech}^2 \tau, \\
&= -\frac{d^2}{d\tau^2} + l^2 - l^2 \text{sech}^2 \tau + l \text{sech}^2 \tau, \\
&= -\frac{d^2}{d\tau^2} + l^2 + (-l^2 + l) \text{sech}^2 \tau, \\
&= -\frac{d^2}{d\tau^2} + l^2 - l(l-1) \text{sech}^2 \tau,
\end{aligned}$$

que era exatamente 4.52 e com isso 4.51 também fica mostrada.

Considere agora o seguinte

$$H_l(A_l^+ \psi) = A_l^+ A_l(A_l^+ \psi) = A_l^+ A_l A_l^+ \psi,$$

mas de 4.51 que acabamos de mostrar temos $A_l A_l^+ = H_{l-1} + (2l-1)$.

Então

$$\begin{aligned}
H_l(A_l^+\psi) &= A_l^+(H_{l-1} + (2l-1))\psi \\
&= A_l^+E_{l-1}\psi + (2l-1)A_l^+\psi \\
&= (E_{l-1} + (2l-1))A_l^+\psi \\
&= E_l(A_l^+\psi).
\end{aligned}$$

Logo, se ψ é autofunção de H_{l-1} com energia E_{l-1} , $A_l^+\psi$ é autofunção de H_l .

E ainda se você fizer $l-1 \rightarrow l$ você automaticamente tem que se ψ é autofunção de H_l então $A_{l+1}^+\psi$ passa a ser autofunção de H_{l+1} . Veja que o índice que H é o mesmo do operador A^+ que gera o autofunção de H .

Podemos resumir isso assim:

$$\psi_{n+1}^{(l)} \sim A_l^+\psi_n^{(l-1)} \quad (4.53)$$

ou

$$\psi_{n+1}^{(l+1)} \sim A_{l+1}^+\psi_n^{(l)} \quad (4.54)$$

4.5 Construindo potenciais a partir de uma suposta função de onda

O que segue agora é um calculo bem simples que fiz e que mostra como é possível fazer o inverso do que se faz em Mecânica Quântica usando supersimetria. Ao invés de começarmos com um dado potencial e acharmos a função de onda para um dado autovalor nós começamos com alguma função de onda que tenha o comportamento desejado de uma função de onda, isto é, seja bem comportada, vá a zero no infinito, etc, e daí usando supersimetria obtemos potenciais para os quais tais funções sejam as funções de onda para o estado fundamental com energia zero. O interessante disso e o que me levou a adicionar isso a essa dissertação, é que é possível construir infinitos potenciais diferentes para os quais sabemos as funções de onda do estado fundamental. Os infinitos potenciais que podemos construir não são invariantes de forma porque todos possuem os mesmos autovalores de estado fundamental, enquanto se fossem invariantes de forma teriam o mesmo espectro diferindo a penas e justamente pelo estado fundamental. Dado $A = \frac{d}{dx} + W(x)$, eu devo saber resolver uma equação do tipo

$$A\psi_0 = 0.$$

Sabendo isso eu tenho ψ_0 e sei que $A^+ = -\frac{d}{dx} + W(x)$. Dai posso construir todos os autovalores e autofunções de $H = A^+A$.

A equação que devo saber resolver é:

$$\psi_0'(x) + W(x)\psi_0(x) = 0,$$

onde $\psi_0(x)$ deve ser quadrado integrável.

Agora vou fazer ao contrário. Ao invés de começar com $W(x)$ e tentar resolver aquela equação eu começo com um $\psi_0(x)$ que seja solução da equação para um W obvio.

Vemos facilmente que para

$$\psi_0(x) = Ce^{-x^2},$$

temos

$$\psi_0'(x) = -2xCe^{-x^2},$$

que satisfaz aquela equação bastando ter $W(x) = 2x$.

Isso já vimos e é o oscilador harmônico a menos de um fator.

O que estamos fazendo no fundo é apenas achar $W(x)$ usando $W(x) = \frac{-\psi_0'}{\psi_0}$.

Suponha agora que eu tenha a função de onda

$$\psi_0(x) = e^{-x^4},$$

onde não nos preocupamos em normaliza-la.

Fazendo a conta temos que

$$W(x) = 4x^3$$

e portanto $V_- = W^2 - W'$ fica

$$V_-(x) = 16x^6 - 12x^2,$$

então sabemos que a equação de Schrödinger para o potencial $16x^6 - 12x^2$ tem solução $\psi_0(x) = e^{-x^4}$ com $E = 0$.

Vejamos como mostrar isso.

$$\psi_0''(x) - V\psi(x) = 0,$$

$$\psi_0'(x) = -4x^3e^{-x^4},$$

$$\psi_0''(x) = 16e^{-x^4}x^6 - 12e^{-x^4}x^2 = (16x^6 - 12x^2)\psi_0(x),$$

então de fato $\psi_0''(x) - V\psi(x) = 0$.

Suponha agora que eu tenha algo da forma

$$\psi_0(x) = e^{-x^6},$$

então $W(x) = -6x^5$ e $\psi_0(x) = e^{-x^6}$ é autofunção de energia zero de

$$V_-(x) = 36x^{10} + 30x^4.$$

Agora vamos generalizar.

Considere

$$\psi_0(x) = e^{-x^{2n}},$$

temos que

$$\psi'_0(x) = e^{-x^{2n}}(-2n)x^{2n-1},$$

o que implica em

$$W(x) = 2nx^{2n-1}$$

e portanto

$$V_-(x) = 4n^2x^{4n-2} - 2n(2n-1)x^{2n-2}.$$

Ou seja, estamos diante de infinitos potenciais solúveis para $n = 1, 2, 3, \dots$ e cujos os estados fundamentais tem energia nula e autofunção $\psi_0(x) = e^{-x^{2n}}$. De fato isso satisfaz a equação de Schrödinger.

Vejamos agora um outro exemplo.

Suponha que eu tenha

$$\psi_0(x) = e^{-|x|},$$

então

$$\psi'_0(x) = e^{-|x|}(-1)\frac{d}{dx}|x|.$$

Bem, para $x > 0$

$$\psi'_0(x) = e^{-|x|}(-1),$$

mas para $x < 0$

$$\psi'_0(x) = e^{-|x|},$$

então temos que o superpotencial é do tipo

$$W(x) = -1,$$

para $x > 0$ e

$$W(x) = 1,$$

para $x < 0$.

$W(x)$ também pode ser escrito como

$$W(x) = -S(x) + S(-x).$$

Então

$$W^2(x) = 1$$

e

$$W'(x) = -2\delta(x).$$

Logo $\psi_0(x)$ é solução de energia nula de

$$V_-(x) = 1 + 2\delta(x).$$

Vejamos como mostrar isso.

$$\psi_0' = e^{-|x|}(-S(x) + S(-x))$$

e portanto

$$\psi_0'' = e^{-|x|}(-S(x) + S(-x))^2 - 2\delta(x)e^{-|x|}.$$

O potencial que tínhamos era $V_-(x) = 1 + 2\delta(x)$ e portanto para $x < 0$ temos

$$V_-(x) = 1$$

e $\psi_0'' = e^{-|x|}$ o que implica que a equação $\psi_0'' - V_-\psi_0(x) = 0$ é satisfeita.

O potencial $V_-(x) = 1 + 2\delta(x)$ para $x > 0$ também fica

$$V_-(x) = 1$$

e $\psi_0'' = e^{-|x|}$ de novo o que implica que a equação $\psi_0'' - V_-\psi_0(x) = 0$ é satisfeita.

Suponha agora que

$$\psi_0(x) = e^{-|x|^3}.$$

Nesse caso $W(x) = -\psi_0'(x)/\psi_0(x)$ se calcula usando que

$$\psi_0' = -3x^2\psi_0(x)(S(x) - S(-x)),$$

obtemos

$$W(x) = -3x^2(S(x) - S(-x)).$$

Lembrando que

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) + W'(x),$$

temos

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + 9x^4 - 6x(S(x) - S(-x)) - 6x^2\delta(x).$$

Então $\psi_0(x) = e^{-|x|^3}$ é a autofunção de energia zero desse hamiltoniano. Veja como mostrar isso.

$$\psi_0'(x) = -3x^2\psi_0(x)(S(x) - S(-x))$$

e

$$\psi_0''(x) = -6x\psi_0(x)(S(x) - S(-x)) - 3x^2\psi_0'(x)(S(x) - (-x)) - 6x^2\psi_0(x)\delta(x)$$

ou

$$\psi_0''(x) = -6x\psi_0(x)(S(x) - S(-x)) + 9x^4\psi_0(x) - 6x^2\psi_0(x)\delta(x),$$

logo $\psi_0(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger para aquele hamiltoniano.

Generalizemos agora.

Suponha que

$$\psi_0(x)_n = e^{-|x|^{2n+1}},$$

então

$$\psi_0'(x)_n = \psi_0(x)_n(-1)x^{2n}(2n+1)(S(x) - S(-x))$$

e portanto

$$W_n(x) = -x^{2n}(2n+1)(S(x) - S(-x)),$$

fazendo as contas temos

$$W_n^2(x) = x^{4n}(2x+1)^2,$$

$$W_n'(x) = -2nx^{2n-1}(2n+1)(S(x) - S(-x)) - x^{2n}(2n+1)2\delta(x).$$

Assim temos

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^{4n}(2n+1)^2 - 2n(2n+1)x^{2n-1}x^{2n-1}(S(x) - S(-x)) - 2x^{2n}(2n+1)\delta(x).$$

Assim $\psi_0(x)_n = e^{-|x|^{2n+1}}$ é solução de energia zero para esse hamiltoniano.

Vejamos como mostrar isso.

$$\psi_0'(x)_n = \psi_0(x)_n(-1)x^{2n}(2n+1)(S(x) - S(-x)),$$

$$\begin{aligned}\psi_0''(x)_n &= \psi_0'(x)_n(-1)x^{2n}(2n+1)(S(x)-S(-x))-2n\psi_0(x)_nx^{2n-1}(2n+1)(S(x)-S(-x)) \\ &\quad -\psi_0(x)_nx^{2n}(2n+1)2\delta(x)\end{aligned}$$

ou

$$\psi_0''(x)_n = \psi_0'(x)_nx^{4n}(2n+1)-2n\psi_0'(x)_n(2n+1)x^{2n-1}x^{2n-1}(S(x)-S(-x))-\psi_0'(x)_n2x^{2n}(2n+1)\delta(x)$$

Logo evidentemente $\psi_0(x)_n$ satisfaz a equação de Schrödinger para o dado hamiltoniano.

Capítulo 5

Supersimetria e a Equação de Pauli

Até agora vimos Mecânica Quântica Supersimétrica em 1 dimensão usando o bastante conhecido hamiltoniano de Schrödinger. Agora nesse capítulo veremos como usar a Mecânica Quântica Supersimétrica não mais com o hamiltoniano de Schrödinger mas com hamiltoniano de Pauli.

5.1 Supersimetria e a equação de Pauli

Até agora vimos o caso de Mecânica Quântica em 1 dimensão usando o hamiltoniano de Schrödinger. Agora vejamos como usar SUSI com a equação de Pauli que trata de uma partícula carregada num campo externo. Um problema genuinamente bi-dimensional.

Fazendo $\hbar = c = 2m = 1$ o hamiltoniano fica

$$H = (p_x + A_x)^2 + (p_y + A_y)^2 + \frac{g}{2}(\vec{\nabla} X \vec{A})_z \sigma_z. \quad (5.1)$$

As supercargas Q^1 e Q^2 definidas em [17] e [18] como

$$Q^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-(p_y + A_y)\sigma_x + (p_x + A_x)\sigma_y]Q^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[(p_x + A_x)\sigma_x + (p_y + A_y)\sigma_y], \quad (5.2)$$

junto com o hamiltoniano satisfazem a superalgebra seguinte (desde que g seja igual a 2).

$$\{Q^\alpha, Q^\beta\} = \delta^{\alpha\beta} H, \quad [H, Q^\alpha] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2. \quad (5.3)$$

Vejamos como mostrar isso.

Para $\alpha = \beta = 1$

$$\{Q^1, Q^1\} = 2Q^1Q^1,$$

$$Q^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[-(p_y + A_y)\sigma_x + (p_x + A_x)\sigma_y],$$

$$2Q^1Q^1 = (p_y + A_y)^2 + (p_x + A_x)^2 - (p_y + A_y)\sigma_x(p_x + A_x)\sigma_y - (p_x + A_x)\sigma_y(p_y + A_y)\sigma_x.$$

Lembrando que $\sigma_x\sigma_y = i\sigma_z$ e $\sigma_y\sigma_x = -i\sigma_z$,

$$2Q^1Q^1 = (p_y + A_y)^2 + (p_x + A_x)^2 - i(p_y + A_y)(p_x + A_x)\sigma_z + i(p_x + A_x)(p_y + A_y)\sigma_z,$$

identificando $ip_y = \frac{\partial}{\partial y}$ e $ip_x = \frac{\partial}{\partial x}$ e lembrando que p_x ou p_y atuando em σ_z dá zero, pois σ_z é uma constante, temos

$$2Q^1Q^1 = (p_x + A_x)^2 + (p_y + A_y)^2 - i(p_y + A_y)A_x\sigma_z + i(p_x + A_x)A_y\sigma_z,$$

$$2Q^1Q^1 = (p_x + A_x)^2 + (p_y + A_y)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x\right)\sigma_z,$$

que é exatamente H, lembrando só que

$$[\vec{\nabla} \times \vec{A}]_z = \frac{\partial}{\partial x}A_y - \frac{\partial}{\partial y}A_x.$$

Veja que isso só funciona pondo $g = 2$!

Mostra-se da mesma forma que

$$\{Q^2, Q^2\}, \quad \{Q^1, Q^2\} = \{Q^2, Q^1\} = 0.$$

Também é satisfeito que $[H, Q^\alpha] = 0$

Veja como mostrar isso.

$$[H, Q^1] = [2Q^1Q^1, Q^1] = 0,$$

$$[H, Q^2] = [2Q^2Q^2, Q^2] = 0.$$

Bem, vamos considerar o caso particular em que

$$A_y(x, y) = 0, \quad A_x(x, y) = W(y). \quad (5.4)$$

Por enquanto, W (o superpotencial), é só uma função qualquer de y.

O hamiltoniano de Pauli fica

$$\begin{aligned}
H &= (p_x + A_x)^2 + (p_y + A_y)^2 + (\vec{\nabla} X \vec{A})_z \sigma_z, \\
&= p_x^2 + (p_y + W(y))^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \right) \sigma_z, \\
&= p_x^2 + (p_y + W(y))^2 - W'(y) \sigma_z.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Como H não possui dependência em x , a parte da coordenada x corresponde à apenas uma fase para a função de onda $\tilde{\psi}$ que pode então ser fatorizada na seguinte forma

$$\tilde{\psi}(x, y) = e^{ikx} \psi(y),$$

onde k é o autovalor do momento na direção x .

A equação de movimento para $\psi(y)$ pode ser calculada da seguinte maneira

$$H\tilde{\psi} = E\tilde{\psi},$$

$$[(p_x + W(y))^2 + p_y^2 - W'(y) \sigma_z](e^{ikx} \psi(y)) = E e^{ikx} \psi(y),$$

$$[(p_x^2 + W^2(y)p_x + 2W(x)p_x + p_y^2 - W'(y) \sigma_z](e^{ikx} \psi(y)) = E e^{ikx} \psi(y).$$

Lembrando que

$$p_x = -i \frac{d}{dx},$$

$$p_x^2 = -\frac{d^2}{dx^2},$$

temos

$$-\frac{d^2}{dy^2} \psi(y) + k^2 \psi(y) + W^2(y) \psi(y) + 2wk \psi(y) - W'(y) \sigma \psi(y) = E \psi$$

ou

$$-\frac{d^2}{dy^2} \psi(y) + (W + k)^2 \psi(y) - W'(y) \sigma \psi(y) = E \psi, \tag{5.6}$$

onde $\sigma = (\pm 1)$ é os autovalores de σ_z .

O problema que era em duas dimensões se tornou um problema em uma única dimensão y , onde $W + k$ é o superpotencial e W' a derivada do mesmo.

Suponha que tenhamos

$$W(y) = \omega_c y + c_1, \tag{5.7}$$

lembrando que o potencial é algo do tipo $V \cong W^2$, então o potencial (energia potencial) é uma função quadrática em y que é o que caracteriza um campo magnético constante.

Os níveis de energia são conhecidos como níveis de Landau e são dados por

$$E_n = (2n + 1 + \sigma)\omega_c, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.8)$$

Vejamos como mostrar isso.

Substituindo $W' = \omega_c$ e definindo $z \equiv W(y) + k = \omega_c y + c_1 + k$ em 5.6 temos

$$\left[-\omega_c^2 \frac{d^2}{dz^2} + z^2 - \omega_c \sigma \right] = E_n \psi(z),$$

onde se usou que

$$\frac{1}{dy} = \omega_c \frac{1}{dz}.$$

Podemos escrever essa expressão como

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\omega_c} \right] \psi(z) = \frac{[E_n + \omega_c \sigma]}{2\omega_c^2} \psi(z).$$

O lado esquerdo da expressão acima corresponde a um oscilador harmônico com $\hbar = m = 1$ e $\omega^2 = 1/\omega_c^2$ e cujos autovalores são $(n + 1/2)\omega = (n + 1/2)/\omega_c$. Portanto

$$(n + 1/2) \frac{1}{\omega_c} = \frac{[E_n + \omega_c \sigma]}{2\omega_c^2},$$

que resulta em 5.8.

Suponha que escolhamos um caso particular onde

$$A_x = \omega_c y f(\rho), \quad A_y = -\omega_c x f(\rho), \quad (5.9)$$

onde $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Assim lembrando que $\vec{B} = \vec{\nabla} X \vec{A}$ a componente z do campo magnético fica

$$B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x = -2\omega_c f(\rho) - \omega_c \rho f'(\rho),$$

que é um conta bastante elementar bastando lembrar que $\partial_x \rho = x/\rho$ e $\partial_y \rho = y/\rho$

Com isso o hamiltoniano 5.1 fica

$$H = - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) + \omega_c \rho^2 f^2 - 2\omega_c f L_z - (2\omega_c f + \omega_c \rho f') \sigma_z, \quad (5.10)$$

onde para mostrar isso é só lembrar que $\vec{L} = \vec{r} X \vec{P}$ e $L_z = x p_y - y p_x$ e que estamos fazendo $g = 2$.

Dada a simetria do problema podemos por isso em coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$ e no qual podemos fatorizar a função de onda como

$$\psi(\rho\phi) = R(\rho)e^{im\phi}/\sqrt{\rho},$$

onde o termo $1/\sqrt{\rho}$ é posto para eliminar uma derivada primeira e $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ é o autovalor de $L_z = \partial/\partial\phi$.

Substituindo ψ e usando que para o termo radial vale que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\psi = (R''\rho^{-1/2} + \frac{1}{4}R\rho^{-5/2} - m^2R\rho^{-5/2})e^{im\phi},$$

e eliminando a exponencial e multiplicando tudo por $\rho^{1/2}$ temos que a equação para R é

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} + \omega_c^2\rho^2f^2 - 2\omega_cf m - (2\omega_cf + \omega_c\rho f'(\rho))\sigma + \frac{m^2 - 1/4}{\rho^2}\right]R(\rho) = ER(\rho), \quad (5.11)$$

onde σ são os autovalores de σ_z .

Para o caso em que $f(\rho) = 1$ o espectro pode ser resolvido analiticamente. De acordo com [2] os autovalores são

$$E_n = 2(n + m + |m|)\omega_c; n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

que é mais um problema de níveis de Landau e que se mostra da mesma maneira como mostrei em detalhes 5.8.

Capítulo 6

Mecânica Quântica Supersimétrica e o Superespaço

O conceito de superespaço nos veremos logo adiante. Mas antes convém perguntar. Por que estudar Mecânica Quântica Supersimétrica no superespaço? É que se pode pensar que Mecânica Quântica Supersimétrica é um caso degenerado de uma teoria de campo supersimétrica. O uso do superespaço é muito comum em teorias de campo supersimétricas porque providencia uma descrição elegante e compacta das representações de supersimetria [5]. Elas simplificam adições e multiplicações das representações de supersimetria [5] e são também muito úteis para a construção de lagrangianas de interação [5].

Aqui não vou me preocupar de modo algum com teorias de campo e também não vou abordar formalismo lagrangiano, apesar do mesmo poder ser desenvolvido no caso de supersimetria em Mecânica Quântica, mas veremos apenas algo sobre superespaço em Mecânica Quântica Supersimétrica. Desde sua criação a Mecânica Quântica Supersimétrica foi pensada como um exemplo para adquirir melhor entendimento justamente sobre teorias de campo, assim o estudo de superespaço em Mecânica Quântica Supersimétrica me parece plenamente justificado.

6.1 Super Espaço

Seja por exemplo a variável bosônica x as fermionicas θ e $\bar{\theta}$, na verdade θ e $\bar{\theta}$ são espinores de dois índices cujas as componentes são fermionicas. Um elemento do superespaço é designado por $z = z(x, \theta, \bar{\theta})$ sendo o superespaço definido como o conjunto de todos os elementos possíveis. Em termos dessas variáveis o supercampo Φ mais genérico possível é dado por [5]

$$\Phi = f(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta m(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\bar{m}(x)n(x) + \theta\bar{\theta}v(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\theta\theta\psi(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}d(x), \quad (6.1)$$

ou seja, todas as combinações possíveis de θ e $\bar{\theta}$ até na potencia máxima 2. Isso pois aqui θ é espinor de 2 índices e quando você calcula coisas em potencias de θ igual a 3 ou maiores sempre aparecem componentes ao quadrado que por serem fermionicas se anulam.

Um supercampo nada mais é do que uma função do superespaço que pode ser escrito em termos de componentes θ e $\bar{\theta}$. Alguns tipos importantes de supercampo são os supercampos escalares o chiriais, que são invariantes sobre SUSI, e que satisfazem $\bar{D}\Phi = 0$, onde $\bar{D}$ é uma derivada covariante associada a supersimetria, supercampo vetorial, que satisfaz $\Phi^\dagger = \Phi$, etc;

6.2 M. Q. SUSI no Superespaço

A idéia esta relacionada com a descrição da integral ação em termos de dadas variáveis. Seja a integral ação

$$S = \int dt L.$$

A lagrangiana é função de variáveis bosonicas e variáveis fermionicas. Quando descrevemos no Superespaço escrevemos a lagrangiana em termos do super campo que é função das variáveis bosonicas e fermionicas. A vantagem é que conseguimos escrever ações com supersimetria manifesta. Aqui supersimetria manifesta quer dizer que não precisamos fazer nada para ver que a lagrangiana é supersimétrica.

No caso da Mecânica Quântica Supersimétrica o supercampo é definido em termos das coordenadas x_n e Q_α onde x_n são as coordenadas (que para nós são variáveis bosonicas) e Q_α são variáveis fermionicas. No nosso caso $D = 1$ temos que $x_n = X_n(t)$ de modo que a coordenada pode ser substituída por t . Para nós Q_α serão θ e θ^* e que satisfazem

$$\delta t = i(\epsilon^*\theta - \epsilon\theta^*),$$

$$\delta\theta = \epsilon,$$

$$\delta\theta^* = \epsilon^*,$$

onde ϵ e ϵ^* são parâmetros fermionicos.

O operador de supersimetria para esse caso é dado por

$$i(\epsilon^*Q^* + Q\epsilon), \quad (6.2)$$

onde Q e Q^* são dadas por

$$Q = i\partial_\theta - \theta^* \partial_t,$$

$$Q^* = -i\partial_{\theta^*} + \theta^* \partial_t,$$

sendo que ∂_t quer dizer $\partial/\partial t$ tal que uma grandeza $A(t, \theta, \theta^*)$ varia sobe transformação de SUSI como

$$A \rightarrow A + i[\epsilon^* Q^* + Q \epsilon, A]. \quad (6.3)$$

As cargas Q e Q^* obedecem a álgebra usual de Mecânica Quântica Supersimétrica

$$\{Q, Q^*\} = 2i\partial_t = 2H,$$

$$[Q, H] = 0.$$

Agora vejamos como mostrar tudo isso.

Mostremos primeiro que

$$\{Q, Q^*\} = 2i\partial_t.$$

Dado um Φ arbitrário que usaremos só para facilitar a conta temos

$$\{Q, Q^*\}\Phi = 2i\partial_t\Phi,$$

então

$$\{Q, Q^*\}\Phi = \{i\partial_\theta - \theta^* \partial_t, -i\partial_{\theta^*} + \theta^* \partial_t\}\Phi,$$

$$\{Q, Q^*\}\Phi = \{i\partial_\theta, -i\partial_{\theta^*}\}\Phi + \{i\partial_\theta, \theta^* \partial_t\}\Phi + \{-\theta^* \partial_t, -i\partial_{\theta^*}\}\Phi + \{-\theta^* \partial_t, \theta^* \partial_t\}\Phi = 2i\partial_t\Phi.$$

O primeiro e o último anti-comutador na expressão acima nós simplesmente jogamos fora pois férmions anticomutam. Já os outros dois não podem sair de forma tão simples pois as derivadas presentes atuam em elementos dos próprios comutadores. Ficamos com

$$\{i\partial_\theta, \theta^* \partial_t\}\Phi + \{-\theta^* \partial_t, -i\partial_{\theta^*}\}\Phi = 2i\partial_t\Phi,$$

que é o mesmo que

$$i\partial_\theta \partial_t \Phi + i\theta \partial_t \partial_\theta \Phi + i\theta^* \partial_t \partial_{\theta^*} \Phi + i\partial_{\theta^*} \theta^* \partial_t = 2i\partial_t \Phi,$$

$$i\partial_t \Phi - i\theta \partial_\theta \partial_t \Phi + i\theta \partial_\theta \partial_t \Phi + i\theta^* \partial_t \partial_{\theta^*} \Phi + i\partial_t \Phi - i\theta^* \partial_t \partial_{\theta^*} \Phi = 2i\partial_t \Phi,$$

onde temos usado que $\partial_\theta \theta \Phi = \Phi - \theta \partial_\theta \Phi$.

$$2i\partial_t \Phi = 2i\partial_t \Phi.$$

Como queríamos mostrar.

Agora vejamos como mostrar que dado um supercampo $A(t, \theta, \theta^*)$ ele transforma como

$$\delta A = i[\epsilon^* Q^* + Q\epsilon, A],$$

ou seja, que $i(\epsilon^* Q^* + Q\epsilon)$ é o gerador de supersimetria, onde as cargas supersimétricas Q e Q^* são dadas por

$$Q = i\partial_\theta - \theta^* \partial_t, Q^* = -i\partial_{\theta^*} + \theta \partial_t.$$

O supercampo mais genérico que podemos escrever com essas variáveis é

$$A(t, \theta, \theta^*) = a(t) + \psi(t)\theta + \chi(t)\theta^* + d(t)\theta\theta^*,$$

onde $\psi(t)$ e $\chi(t)$ são funções fermionicas para garantir que A seja bosonico. Na verdade $\chi(t)$ deve ser igual a $\psi^*(t)$. A expansão para em $\theta\theta^*$ pois tanto θ como θ^* são variáveis fermionicas e portanto $\theta^2 = \theta^{*2} = 0$.

Como não estou preocupado em fazer uma demonstração rigorosa mas sim apenas uma verificação vou considerar o caso particular em que $a(t) = t$, $\psi(t) = \chi(t) = \psi = cte$ (real), $d(t)=1$.

Então nosso supercampo fica

$$A(t, \theta, \theta^*) = t + \psi\theta + \psi\theta^* + \theta\theta^*.$$

Na verdade dava para fazer $a(t) = 0$, mas não fazemos isso para não deixar nossa verificação muito fraca.

Das transformações de t , θ e θ^* sobe SUSI temos diretamente que

$$\delta A = -i(\theta^* \epsilon - \epsilon^* \theta) + \psi\epsilon + \psi\epsilon^* + \epsilon\theta^* + \theta\epsilon^*.$$

Vamos guardar esse resultado.

Ele deve ser consistente com

$$\delta A = i[\epsilon^* Q^* + Q\epsilon, A].$$

Façamos a conta.

$$\delta A = i[\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} - \theta^* \partial_t) + (i\partial_\theta - \theta^* \partial_t)\epsilon, A].$$

$$\delta A = i[\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} - \theta^* \partial_t)\epsilon, A] + i[(i\partial_\theta - \theta^* \partial_t)\epsilon, A].$$

O primeiro termo é

$$\begin{aligned}
[\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A] &= [\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} - \theta^*\partial_t), \epsilon, t + \psi\theta + \psi\theta^* + \theta\theta^*], \\
[\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A] &= [-i\epsilon^*\partial_{\theta^*}, t + \psi\theta + \psi\theta^* + \theta\theta^*] + [\epsilon^*\theta\partial_t, t + \psi\theta + \psi\theta^* + \theta\theta^*], \\
[\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A] &= [-i\epsilon^*\partial_{\theta^*}, \psi\theta^* + \theta\theta^*] + [\epsilon^*\theta\partial_t, t],
\end{aligned}$$

onde usamos que variáveis bosônicas comutam com qualquer coisa. No entanto o termo t e outros no comutador foram mantidos devido as derivadas atuarem sobre eles. Para facilitar a conta suponha que tudo atue numa função arbitrária Φ .

$$[\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A]\Phi = [-i\epsilon^*\partial_{\theta^*}, \psi\theta^*]\Phi + [-i\epsilon^*\partial_{\theta^*}, \theta\theta^*]\Phi + \epsilon^*\theta\partial_t t\Phi - t\epsilon^*\theta\partial_t\Phi.$$

Usando que

$$\partial_t t\Phi = \Phi + t\partial_t\Phi$$

e

$$\partial_{\theta^*}\theta^*\Phi = \Phi - \theta^*\partial_{\theta^*}\Phi$$

temos que

$$[\epsilon^*(-i\partial_{\theta^*} + \theta\partial_t), A] = i\epsilon^*\psi + i\epsilon^*\theta + \epsilon^*\theta.$$

O segundo termo é

$$[(i\partial_{\theta} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A] = [(i\partial_{\theta} - \theta^*\partial_t)\epsilon, t + \psi\theta + \psi\theta^* + \theta\theta^*],$$

ou

$$[(i\partial_{\theta} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A] = [i\partial_{\theta}\epsilon, \psi\theta + \theta\theta^*] + [-\theta^*\partial_t\epsilon, t],$$

onde novamente mantivemos alguns termos bosônicos em virtude das derivadas. Atuando tudo num Φ arbitrário temos

$$[(i\partial_{\theta} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A]\Phi = [i\partial_{\theta}\epsilon, \psi\theta]\Phi + [i\partial_{\theta}\epsilon, \theta\theta^*]\Phi + [-\theta^*\partial_t\epsilon, t]\Phi,$$

abrindo isso e usando novamente as expressões para termos $\partial_t t\Phi$ e $\partial_{\theta^*}\theta^*\Phi$ temos que

$$[(i\partial_{\theta} - \theta^*\partial_t)\epsilon, A] = i\epsilon\psi - i\epsilon\theta^* - \theta^*\epsilon.$$

Substituindo ambos os termos temos que

$$\delta A = -i(\theta^*\epsilon - \epsilon^*\theta) - \epsilon^*\psi - \epsilon^*\theta - \epsilon\psi + \epsilon\theta^*,$$

que é exatamente igual ao resultado obtido usando a transformação de supersimetria para as componentes e era o que queríamos mostrar.

Embora não abordamos SUSI em formalismo Lagrangiano, devido a importância desse assunto vejamos como construir a lagrangiana.

Antes de mais nada o supercampo real mais genérico que podemos construir com as variáveis dadas é

$$\Phi(x, \theta, \theta^*) = x(t) + i\theta\psi(t) - i\psi^*\theta^* + \theta\theta^*D(t), \quad (6.4)$$

onde real quer dizer $\Phi^* = \Phi$. Sobre transformação de SUSI a seguinte derivada é invariante

$$D_\theta = \partial_\theta - i\theta^*\partial_t. \quad (6.5)$$

Para verificar que essa derivada é mesmo invariante sobre SUSI basta mostrar que

$$[\epsilon^*Q^* + Q\epsilon, D_\theta] = 0,$$

que é verdade pois tanto o comutador $[\epsilon^*Q^*, D_\theta]$ como o $[Q\epsilon, D_\theta]$ são nulos.

Para o primeiro comutador é só ver que.

$$[\epsilon^*Q^*, D_\theta] = [\epsilon(-i\partial_{\theta^*} + \theta\partial_t), \partial_\theta - i\theta^*\partial_t].$$

$$[\epsilon^*Q^*, D_\theta] = -[\epsilon^*\partial_{\theta^*}, \theta^*\partial_t] + [\epsilon^*\theta\partial_t, \partial_\theta],$$

onde a presença de ϵ^* criando um termo bosonico nos permitiu eliminar dois comutadores. Temos então

$$[\epsilon^*Q^*, D_\theta] = -\epsilon^*\partial_{\theta^*}\partial_t + \theta^*\partial_t\epsilon^*\partial_{\theta^*} + \epsilon^*\theta\partial_t\partial_\theta - \partial_\theta\epsilon^*\theta\partial_t = 0,$$

onde na passagem acima, que não é tão direta como pode parecer, deve-se tomar cuidado com as derivadas atuando em θ e θ^* .

Já $[Q\epsilon, D_\theta]$ é trivialmente nulo.

$$[Q\epsilon, D_\theta] = [(i\partial_\theta - \theta^*\partial_t)\epsilon, (\partial_\theta - i\theta^*\partial_t)] = 0.$$

Portanto essa derivada é realmente invariante sobre SUSI.

Atuando com ela no campo Φ obtemos diretamente

$$D_\theta\Phi = i\psi(t) + \theta^*D(t) - i\theta^*\dot{x} + \theta^*\dot{\psi}. \quad (6.6)$$

Pode-se definir igualmente

$$D_{\theta^*} = \partial_{\theta^*} + i\theta\partial_t, \quad (6.7)$$

que evidentemente também é invariante sobre SUSI até porque as transformações de SUSI são invariantes sobre a conjugação.

Atuando com ela num campo Φ^* temos diretamente

$$D_{\theta^*}\Phi^* = [D_{\theta}\Phi]^* = -i\dot{\psi}^*(t) + \theta D(t) + i\theta\dot{x} + \theta^*\theta\dot{\psi}^*$$

A ação invariante mais geral possível é

$$S = \int dt d\theta^* d\theta \left(\frac{1}{2} |D_{\theta}\Phi|^2 - f(\Phi) \right), \quad (6.8)$$

sendo que a derivada aparece somente quadraticamente não aparecendo termo em primeira potencia porque é preciso que a ação seja bosonica e se tem um supercampo bosonico. Pode-se também substituir as componentes e escrever a ação em termos de componentes e faremos isso mais adiante mas antes só demos uma palavra sobre a integração nas variaves fermionicas presente nessa ação acima.

Essa integração sobre as variáveis fermionicas ou grassmanianas é conhecida como integração de Berezin e satisfaz

$$\int \theta d\theta = \int \theta^* d\theta^* = 1.$$

e também

$$\int d\theta = \int d\theta^* = 0$$

A primeira expressão é uma definição. Já para mostrar a segunda lembremos que integrais ordinárias são invariantes sobre translação, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+a) dx.$$

Queremos que isso permaneça válido para integrais fermionicas e portanto escrevemos

$$\int f(\theta) d\theta = \int f(\theta + \alpha) d\theta.$$

Qualquer função de uma variável fermionica pode ser escrita como

$$f(\theta) = \alpha + \theta\beta,$$

onde α e β são constantes fermionicas ou bosonicas mas de necessariamente estatísticas contrárias.

Então considerando a integração de uma função $f(\theta)$ e usando a invariância de translação para uma translação de uma quantia γ qualquer temos

$$\int d\theta[\alpha + \theta\beta] = \int d\theta[\alpha + \theta\beta + \gamma\beta],$$

logo

$$\int d\theta\gamma\beta = 0$$

como $\gamma\beta$ é uma constante ela sai da integral e temos portanto

$$\int d\theta = \int d\theta^* = 0.$$

Isso implica que dada uma função qualquer f a integral dela é

$$\int d\theta f = \frac{\partial}{\partial\theta} f,$$

ou seja, a integral passa a ser equivalente a uma derivada. É claro que esse tipo de integral não respeita o princípio fundamental do cálculo. Para saber mais sobre integração de Berezin veja por exemplo [20].

Vamos agora escrever a ação em compontes.

O termo $f(\Phi)$ pode ser expandido em série de Taylor da seguinte maneira

$$f(\Phi) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \dots,$$

onde $x = x(t)$ e $h = \Phi - x = i\theta\psi - i\psi^*\theta^* + \theta\theta^*D(t)$ e por isso a expansão para em h^2 .

Assim

$$\int d\theta d\theta^* f(\Phi) = f(\Phi) |_{\theta\theta^*} = Df' + \frac{1}{2}f''(h^2) |_{\theta\theta^*}$$

e sabendo que

$$h^2 |_{\theta\theta^*} = 2\psi\psi^*,$$

temos

$$\int d\theta d\theta^* f(\Phi) = Df'(x) + f''(x)\psi\psi^*.$$

Já o termo com as derivadas é

$$\frac{1}{2} | D_{\theta}\Phi |^2 |_{\theta\theta^*} = \frac{1}{2}(D_{\theta}\Phi)^*(D_{\theta}\Phi) |_{\theta\theta^*} = \frac{x^2}{2} + \frac{i}{2}(\psi\dot{\psi}^* - \dot{\psi}\psi^*) + \frac{D^2}{2}.$$

Juntando os dois termos temos que a ação fica

$$S = \int dt \left[\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{i}{2}(\psi\dot{\psi}^* - \dot{\psi}\psi^*) + \frac{D^2}{2} + Df' + f''\psi\psi^* \right]. \quad (6.9)$$

Esse resultado acima pode ser encontrado não em 2 mas sim no apêndice de 3.

Note que com uma identificação do tipo

$$D = -f'(x) = W(x),$$

e supondo que os ψ 's sejam constantes nós obtemos uma ação caracterizada por um potencial que a menos de fatores é do tipo $W^2 - W'$ e que é exatamente o que chamavamos de V_1 no formalismo hamiltoniano.

Capítulo 7

Conclusão

Neste trabalho nós pudemos ver vários aspectos da Mecânica Quântica Supersimétrica. Vimos o formalismo hamiltoniano da Mecânica Quântica Supersimétrica, a construção de hierarquias de hamiltonianos, vimos os conceitos de invariância de forma e invariância de forma em dois passos.

Também apresentamos o conceito de quebra de simetria e vimos as diferenças entre quebra de supersimetria e de uma simetria ordinária e o porque da importância disso mesmo em Mecânica Quântica.

Depois vimos diversos exemplos de aplicações de Mecânica Quântica Supersimétrica como a construção de novos potenciais solúveis a partir de um dado solúvel conhecido.

Vimos o oscilador harmônico supersimétrico e os potenciais de poço duplo que são de grande importância em Física. Também vimos como fazer o caminho inverso usando supersimetria para achar equações de Schrödinger para uma dada suposta função de onda.

Também vimos supersimetria e a equação de Pauli e Mecânica Quântica Supersimétrica no Superespaço.

Em momento algum tive a intenção de ser completo. Diversos tópicos não foram abordados durante esse trabalho. Poderíamos destacar entre eles os seguintes. O estudo de superpotenciais singulares [2], isto é, que apresentam pontos de singularidade, formalismo de integrais de trajetória para a Mecânica Quântica Supersimétrica [2], Supersimetria e a aproximação WKB, hamiltonianos isoespectrais [2], Supersimetria e a equação de Dirac [2], Mecânica Quântica Parasupersimétrica e Ortosupersimétrica, Supersimetria e Física atômica [21][22], Física Nuclear [23][24], aplicações à matéria condensada, teoria de grupos, potenciais quase solúveis [25][26], quebra de supersimetria e instantons e muitos outros.

As perspectivas de estudo de agora em diante, além do estudo dos tópicos omitidos, são muito vastas. Como sabemos supersimetria ainda não foi observada na

natureza. Assim sendo o estudo de aplicações à Física Nuclear, Física Atômica, extensões supersimétricas do modelo padrão poderão talvez nos dizer se supersimetria é uma simetria da natureza embora em caso negativo a afirmação contrária continuaria sendo difícil.

No tocante a Mecânica Quântica Supersimétrica propriamente dita tem-se também um vasto material desde a obtenção de novos potenciais solúveis, o cálculo ou resolução de problemas que ainda não tenham sido resolvidos analiticamente até uma melhor compreensão de fenômenos presentes em Mecânica Quântica como por exemplo tunelamento e assim por diante.

Eu particularmente considero que o estudo de Mecânica Quântica Supersimétrica em mais dimensões, em especial em $3 + 1$ dimensões ou mais, poderia nos revelar novos fatos ainda desconhecidos em uma abordagem puramente unidimensional.

Além disso podemos esperar que Mecânica Quântica Supersimétrica encontre ainda novas aplicações como de fato ocorreu no início. Surgindo como um exemplo para o estudo de quebra de supersimetria ela encontrou várias novas aplicações próprias como a caracterização de potenciais, construção de novos potenciais, etc.

Não seria de se estranhar que Mecânica Quântica Supersimétrica possa encontrar ainda novas aplicações desconhecidas e que possa nos dizer algo sobre questões fundamentais ainda em aberto.

Por exemplo, teria a Mecânica Quântica Supersimétrica algo a nos dizer sobre a transição do limite quântico para o clássico e vice-versa? Teria algo a nos dizer sobre a interpretação probabilística da Mecânica Quântica? Assunto este amplamente abandonado mais devido a morte dos pioneiros do que a uma conclusão definitiva e que de modo algum esta terminado. Mecânica Quântica Supersimétrica teria algo a nos dizer sobre caos?

Enfim, todo o mundo a nossa volta urge por ser explicado e Mecânica Quântica Supersimétrica é mais uma ferramenta para a compreensão do universo sendo que sua importância somente o tempo nos dirá.

Apêndice A

Convenções

Durante essa dissertação temos usado algumas constantes como a velocidade da luz no vácuo $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ e que muitas vezes temos igualado a 1. Temos usado muito a constante

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

onde $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ é a chamada constante de Planck.

Em muitos casos temos feito $\hbar = 1$ mas em geral dizemos quando isso ocorre.

Para as matrizes de Pauli temos usado

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Como trabalhamos quase sempre na representação das coordenadas e descrição de Schrödinger temos feito em geral a identificação

$$P_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

e ainda

$$\vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

e ainda as vezes usamos isso com já com $\hbar = 1$.

Referências

- [1] E. Witten, Nucl. Phys. B188 (1981) 513.
- [2] F. Cooper, A. Khare, U Sukhatame; Supersymmetry and Quantum Mechanics, hep-th - 9405029 v2 5 May 94.
- [3] F. Cooper, B. Freedman, Aspects of Supersymmetric Quantum Mechanics, Annals of Physics 146, 262-288 (1983).
- [4] B. Freedman, F. Cooper, A Review of Supersymmetric Quantum Mechanics, F. Physica 15D (1985) 138-146.
- [5] J. Wess, J. Bagger. Supersymmetry and Supergravity. Princeton University Press. 1983.
- [6] E. Drigo Filho, Supersimetria em Mecânica Quântica. Rev. Brasileira Ens. Física, volume 19, Número 1, pg 152, Março de 1997
- [7] R. Rodrigues, A. Vaidya, Supersimetria: da Mecânica Clássica à Mecânica Quântica. Rev. Brasileira Ens. Física, volume 19, Número 4, pg 374, Dezembro de 1997.
- [8] E. Merzbacher, Quantum Mechanics, Wiley, 1998
- [9] J. J. Sakuray, Modern Quantum Mechanics, Benjamin/Cumminings, 1994
- [10] B. Zwiebach. A Solvable Toy Model for Tachyon Condensation in String Field Theory. hep-th/0008227.
- [11] W. Keung, E. Kovacs, U. Sukhatme, Supersymmetry and Double-Well Potentials. U.. Physical Review Letters, volume 60, Number I, 1988.
- [12] S. Coleman. Aspects of Symmetry, Cambridge Univ. Press, New York, 1985.
- [13] P. Kumar, M. Ruiz-Altaba, and B.S. Thomas. Tunneling Exchange, Supersymmetry, and Riccati Equations. Physical Review Letters, 57, 1986.

- [14] T. Imbo and U. Sukhatme, Logarithmic perturbation expansions in nonrelativistic quantum mechanics, *Physical Review Letters*, 54, 2184 (1985)
- [15] L. Landau, E. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Pergamon, NY, 1977.
- [16] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, 1965.
- [17] M. Cumbrrughe and V. Rittenberg. *Ann. Phys.* 151. (1983)99
- [18] A. Khare and J. Maharana, *Nucl. Phys.* B244(1984) 409
- [19] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 1990.
- [20] P. Srivastava. *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: An Introuction*. Adam Hilger 1986.
- [21] A. Kostelecky and M.M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* 53 (1984) 2285, *Phys. Rev.* A32 (1985) 1293,3243, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 96.
- [22] A. R. P. Rau, *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) 95.
- [23] D. Baye, *Phys. Rev. Lett.* 58 (1987) 2738.
- [24] F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.* 44 (1980) 772; *Physica D15* (1985) 85 and references therein; R. Casten, *Physica D15* (1985) 99.
- [25] M. Shifman, *Int. Jour. Mod. Phys.* A4 (1989) 2897.
- [26] A. Turbiner and A. Usheridze, *Phys. Lett.* A126 (1987) 181, A. Turbiner, *Sov. Phys. JETP* 67 (1988) 230 ; *Comm. Math. Phys.* 118 (1988) 467.

