

Tiago Fernandes de Cantalice

Modelo de Lotka-Volterra com inclusão de termos perturbativos e capacitivos

Rio Claro
2012

Tiago Fernandes de Cantalice

Modelo de Lotka-Volterra com inclusão de termos perturbativos e capacitivos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, para a obtenção de Título de Bacharel em Física, na Área de Física.

Orientador: Roberto E. Lagos Monaco

Rio Claro
2012

530 Cantalice, Tiago
T551m Modelo de Lotka-Volterra com inclusão de termos
perturbativos e capacitivos / Tiago Cantalice. - Rio Claro :
[s.n.], 2012
66 f. : il., figs., gráfs., forms., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (bacharelado - Física) -
Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e
Ciências Exatas
Orientador: Roberto E. Lagos Monaco

1. Física. 2. Perturbação randômica. 3. Perturbação
periódica. I. Título.

Tiago Fernandes de Cantalice

Modelo de Lotka-Volterra com inclusão de termos perturbativos e capacitivos

Roberto E. Lagos Monaco 54 páginas

Trabalho de Conclusão de Curso - Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Departamento de Física.

1. Perturbação Randômica
2. Perturbação Periódica
3. Lotka-Volterra com termo capacitivo

I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".
Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Departamento de Física.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr.
Nome

Prof. Dr.
Nome

Tiago Fernandes de Cantalice

Roberto Lagos

Prof. Dr.
Nome do Orientador

Rio Claro, 14 de novembro de 2012.

Dedico a minha família, Vera Lúcia, Xavier e Talita Cantalice

Existem muitas hipóteses na ciência que são erradas.
Isso é perfeitamente correto;
elas são a abertura para descobrir o que é certo.
A ciência é um processo auto-corretivo.
Para serem aceitas,
novas idéias devem sobreviver aos mais rigorosos
padrões de evidência e escrutínio.

Carl Edward Sagan

Agradecimentos

E é em mais um término de uma fase que entendemos o quanto a vida passa num piscar de olhos. Agradeço a todas as pessoas que de alguma forma converteram toda a minha graduação em uma nova conquista. De forma especial, primeiramente agradeço a minha estrutura do ser, minha família. Senhor Xavier, dona Vera e senhorita Talita, obrigado por existirem na minha vida. Obrigado, pai, mãe e irmã por exatamente tudo que vocês fazem e fizeram por mim. Se torna um pouco impossível retribuir tudo que vocês me deram, mas acreditem, que dia após dia usarei tudo o que vocês me ensinaram para tentar ao menos retribuir deixando vocês, orgulhosos do filho e irmão que tem. Agradeço à todos os meus amigos, sim, amigos e não colegas de faculdade, que por aqui encontrei. Empire, Preco, Zóio, Peter, Skiter, Sassa, Xuxa, Alemão, Bapt, Salim, Bonani, Body, Ivan, Boleiro, Navarro, Créu, Obama, Bala, Cadeia, Presídio, Dinho, Sacudo, vocês tornaram tudo isso mais divertido, e tenho certeza que esta amizade não sucumbirá ao tempo ou à distância, pois vocês são o real significado da palavra amizade e isto tem um peso muito significativo na minha vida, obrigado por tudo, pessoal. Agradeço também ao meu orientador, Roberto E. Lagos por toda a paciência e pelos ensinamentos que fora me dado, muito obrigado professor. E é neste momento que tudo se apaga para que de forma calma e suave os focos de luz, lentamente, iluminem a pessoa pelo qual trouxe à mim, o significado do sentimento mais belo que um ser humano pode ter. Amor é o sentimento e Silvia Palotti Polizel é a pessoa. Obrigado, meu amor. Você de alguma forma torna minha vida um sonho, um mundo onde o seu sorriso meigo combate e derrota toda e qualquer tristeza que existe. Agradeço imensamente por você caminhar ao meu lado na estrada chamada vida. E lutarei para cada segundo que você estiver junto à mim, sejam os melhores e mais felizes momentos de sua vida. Você é meu amor, Silvia Palotti Polizel.

Resumo

Este trabalho de conclusão de curso tem como objetivo mostrar os efeitos das mudanças nas trajetórias das presas e dos predadores quando são incluídas perturbações e termos capacitivos no sistema de equações de Lotka-Volterra.

Para introdução do sistema Lotka-Volterra foi necessário um capítulo predecessor de Equações Diferenciais Não Lineares, com intuito de facilitar a compreensão dos resultados obtidos no decorrer do trabalho.

Nos capítulos seguintes são mostrados sequencialmente as soluções e discussões sobre os Modelos de Lotka-Volterra, o Modelo de Lotka-Volterra com Perturbação Randômica, Modelo de Lotka-Volterra com perturbação Periódica e inclusão do termo capacitivo em ambas perturbações.

Por fim, são mostradas as conclusões das discussões e soluções que foram feitas em todo o trabalho.

Palavras-chave: Lotka-Volterra, Perturbação Randômica, Perturbação Periódica

Abstract

Our purpose is to show the effects in the predator-prey trajectories due to parameter temporal perturbations and/or inclusion of capacitive terms in the Lotka Volterra Model. An introduction to the Lotka Volterra Model (chapter 2) required a brief review of nonlinear differential equations and stability analysis (chapter 1) , for a better understanding of our work. In the following chapters we display in sequence our results and discussion for the randomic perturbation case (chapter 3); periodic perturbation (chapter 4) and inclusion of capacitive terms (chapter 5). Finally (chapter 6) we synthesize our results

Keywords: Lotka-Volterra with capacitive term, Randomic Perturbation, Periodic Perturbation

Sumário

1	Equações Diferenciais Não-Lineares	1
1.1	Linearização próximo a uma solução de equilíbrio	2
1.2	Classificação dos pontos de equilíbrio	3
2	Modelo de Lotka Volterra	6
2.1	História	6
2.2	Modelo Predador-Presa	7
2.3	Análise dos Pontos de Equilíbrio	9
2.4	Lei de Volterra	10
2.4.1	Lei dos Ciclos Periódicos	10
2.4.2	A Lei das Médias	12
2.4.3	A Lei da Colheita	12
2.5	Solução Numérica	13
3	Perturbação Randômica	17
4	Perturbação Periódica	25
5	Capacidade	35
5.1	Modelo Lotka-Volterra	36
5.2	Randômico	38

5.3 Períódico	39
6 Considerações Finais	51
Referências Bibliográficas	54

Capítulo 1

Equações Diferenciais Não-Lineares

Para obter um estudo apurado das Equações Diferenciais Não-Lineares (EDOs Não-Lineares) primeiramente deve ser explicado o que são EDOs Lineares. Uma EDO Linear, é uma equação diferencial que possui a forma:

$$a_n(t)\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x(t) = u(t)$$

onde os coeficientes $a_i, i = 0, 1, \dots, n$, e a entrada u são funções da variável independente t .

- A EDO é chamada de homogênea se $u(t) = 0 \forall t$. Para funções $u(t)$ que não atendem esta condição, a EDO é chamada de não-homogênea.

- A EDO é chamada de linear, quando só aparecem as primeiras potências da função e das suas derivadas. Caso contrário, a EDO é chamada EDO Não Linear, que é a equação diferencial que estudaremos neste capítulo.

A teoria das equações diferenciais não lineares não é tão desenvolvida como das equações diferenciais lineares. Em certas circunstâncias, é possível usar métodos da teoria linear no estudo dos sistemas não lineares examinando o comportamento na vizinhança de movimentos conhecidos, um processo conhecido como linearização. Existem

duas básicas aproximações para sistemas não lineares, o qualitativo e o quantitativo. A aproximação qualitativa está ligada à característica geral do sistema na vizinhança de uma solução conhecida, e a aproximação quantitativa está ligado à análise das soluções obtidas através dos métodos de perturbação.

1.1 Linearização próximo a uma solução de equilíbrio

Considere um sistema Equações Diferenciais não-lineares de duas variáveis, x e y .

$$f(x,y) = \frac{dx}{dt} \quad g(x,y) = \frac{dy}{dt} \quad (1.1)$$

Expandindo as funções em série de Taylor, teremos:

$$f(x,y) = f(x_{ss},y_{ss}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{ss}(x - x_{ss}) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{ss}(y - y_{ss}) \quad (1.2)$$

$$g(x,y) = g(x_{ss},y_{ss}) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_{ss}(x - x_{ss}) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_{ss}(y - y_{ss}) \quad (1.3)$$

Consideremos uma pequena perturbação sobre as soluções $x(t)$ e $y(t)$.

$$x(t) = Ae^{\lambda t} + x_{ss} \quad y(t) = Be^{\lambda t} + y_{ss} \quad (1.4)$$

Desta forma, encontramos um sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} \lambda A = A \frac{\partial f}{\partial x} + B \frac{\partial f}{\partial y} \\ \lambda B = A \frac{\partial g}{\partial x} + B \frac{\partial g}{\partial y} \end{cases} \quad (1.5)$$

Representando na forma da matriz Jacobiana.

$$J(x; y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Atentando ao fato que $tr(J) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$ e $det(J) = (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial g}{\partial y}) - (\frac{\partial g}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y})$, podemos escrever o sistema de equações da seguinte forma:

$$(\lambda)^2 - (\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y})\lambda + (\frac{\partial f}{\partial x})(\frac{\partial g}{\partial y}) - (\frac{\partial g}{\partial x})(\frac{\partial f}{\partial y}) = 0 \quad (1.7)$$

Obtendo as soluções do tipo:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{tr(J)}{2} \pm \sqrt{(\frac{tr(J)}{2})^2 - det(J)} \quad (1.8)$$

1.2 Classificação dos pontos de equilíbrio

Utilizando a equação (1.8), podemos classificar os pontos de equilíbrio de acordo com os casos a seguir:

- $det(J) > (\frac{tr(J)}{2})^2$

Teremos os autovalores da forma: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Se $\alpha \neq 0$ as trajetórias descrevem uma espiral convergindo para um ponto fixo que se chama **foco**, fig. (1.1).

Estabilidade:

$\alpha > 0$, foco instável.

$\alpha < 0$, foco estável.

- $(\frac{tr(J)}{2})^2 > det(J)$

Teremos os autovalores da forma: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Este caso é caracterizado de **nó impróprio**, fig. (1.2).

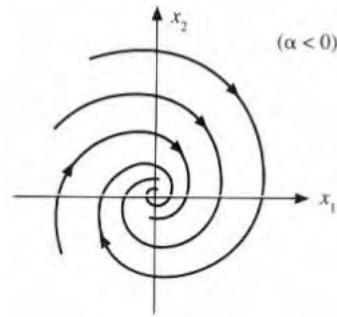


Figura 1.1: Respresentação gráfica de foco

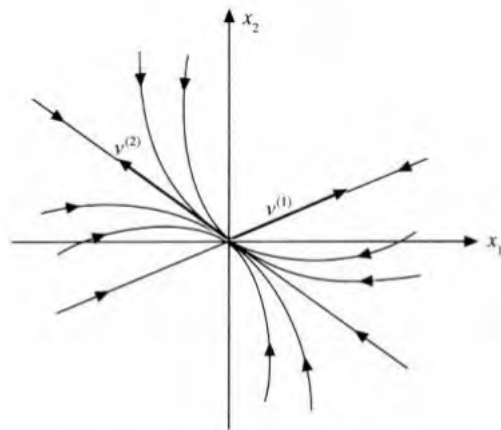


Figura 1.2: Representação Gráfica: nó impróprio

- $\frac{tr(J)}{2} = 0$

Teremos os autovalores da forma de $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$

Este caso é caracterizado como **centro**, fig (1.3).

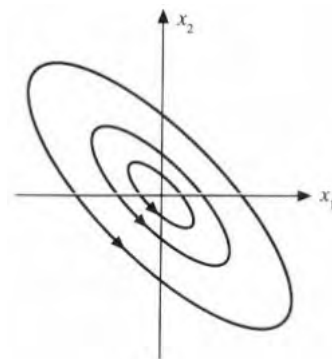


Figura 1.3: Representação gráfica de centro

- $(\frac{tr(J)}{2})^2 = det(J)$

Teremos autovalores da forma de $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Este caso é caracterizado como **nó próprio**, fig. (1.4).

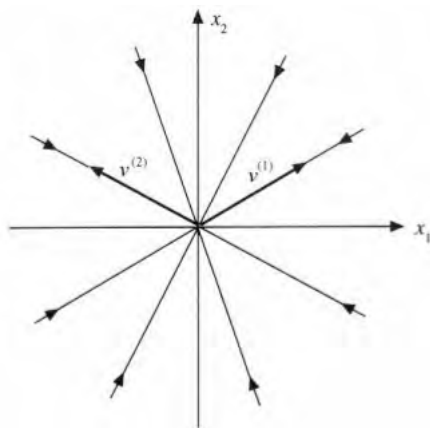


Figura 1.4: Respresentação Gráfica nó próprio

(Retirado do livro Zill, D. G. and Cullen, M. R)

Capítulo 2

Modelo de Lotka Volterra

2.1 História

Em 1926, Humberto D'Ancona, um biólogo italiano, completou o estudo estatístico da mudança das várias populações de peixes no norte do mar Adriático. Ele estimou que a população dos predadores durante os anos de 1910 a 1923 foi baseado nas espécies vendidas no mercado de peixes nos portos de Trieste e Fiume.

Porto	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Fiume	12%	21%	22%	21%	36%	27%	16%	16%	15%	11%
Trieste	14%	7%	16%	15%	–	18%	15%	13%	11%	10%

Tabela 2.1: Porcentagem do Predador no total de peixes capturados.

D'Ancona observou, contudo, a porcentagem do predador foi maior imediatamente depois da Primeira Guerra Mundial (1914-1918). Durante a Guerra a população de pescadores foi reduzida, desta forma, D'Ancona concluiu que a pesca reduzida causou a mudança da proporção de predadores para as presas. Ele formulou a hipótese que durante a guerra a comunidade de predador-presa não sofreu influência externa da predação do homem, logo observou-se o estado natural de relativa aumento de proporção do predador, pelo fato dos pescadores não interferirem no sistema. D'Ancona pediu

para seu cunhado, Vito Volterra (1860-1940), um famoso matemático da época, se havia algum modelo matemático para descrever tal sistema. Com os dados em mãos, Vito Volterra escreveu um par de equações. Simultaneamente a Volterra, de forma independente, Alfred James Lotka, matemático, químico e estatístico americano, em um artigo chamado: “in the theory of autocatalytic chemical reactions” em 1910, utilizou um par de equações diferenciais com o objetivo de modelar reações químicas oscilatórias. Em 1920, expandindo seu modelo, o usou para descrever “sistemas orgânicos” utilizando uma espécie de planta e herbívoros com exemplo. E em 1925, utilizou suas equações para analisar interações de predador-presa em seu livro de biomatemática. Com isto fora criado o Modelo chamado de Lotka-Volterra.

2.2 Modelo Predador-Presa

O modelo de predador e presa associa somente o crescimento natural ou decaimento natural e a interação mútua do predador-presa. As outras relações são assumidas como insignificantes. E é dado pelo seguinte modelo matemático:

$$\frac{dx}{dt} = (-\alpha + \gamma y)x \quad (2.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = (\beta - \delta x)y \quad (2.2)$$

Onde x é a população do predador, y é a população da presa e α , β , γ e δ são constantes positivas. A interação predador-presa é modelada pelos termos de ação conjunta proporcionais ao produto das duas populações. Assume-se que na ausência de predadores ($x = 0$), $y' = \beta y$, o número de presas cresce exponencialmente e na ausência de presas $y = 0$, $x' = -\alpha x$, a população de predadores tende a extinguir-se. Os termos lineares $-\alpha x$ e βy modelam o decaimento natural e o crescimento, respectivamente, do predador e da presa no caso em que um esteja isolado do outro. Nos termos dos produtos

γxy e $-\delta xy$ modelam os efeitos da interação nas taxas de mudança das duas espécies: alimento promove que a taxa de crescimento da população de predador cresça, enquanto servir-se como alimento diminui a taxa de crescimento da presa. As coordenadas dos pontos de equilíbrio são dadas quando ambas as populações não variam com o tempo, ou seja, quando:

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

dando-nos as equações:

$$(-\alpha + \gamma y)x = 0, \quad (\beta - \delta x)y = 0$$

Trazendo-nos duas soluções possíveis:

$$x = 0, \quad y = 0 \tag{2.3}$$

No caso (2.3), a extinção de ambas as espécies, e:

$$x = \frac{\beta}{\delta}, \quad y = \frac{\alpha}{\gamma} \tag{2.4}$$

(2.4), o caso representando os pontos fixos em que ambas as populações se sustentam. Portanto, os pontos de equilíbrio para o Modelo Predador Presa de Lotka-Volterra, são: $(0,0)$ $(\frac{\beta}{\delta}; \frac{\alpha}{\gamma})$

2.3 Análise dos Pontos de Equilíbrio

A Matriz Jacobiana do Modelo Predador é dada por:

$$J(x; y) = \begin{pmatrix} -\alpha + \gamma y & \gamma x \\ -\beta y & -\beta x + \delta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Para o ponto fixo $(0,0)$, temos a Matriz:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Os auto-valores encontrados para a $J(0,0)$ são:

$$\lambda_1 = -\alpha, \quad \lambda_2 = \delta$$

Observando os auto-valores, vemos que é um ponto crítico de sela. E para o ponto fixo $(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma})$, temos:

$$J(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\gamma\delta}{\beta} \\ \frac{-\alpha\beta}{\gamma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

E os auto-valores encontrados para $J(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma})$ são: $\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\delta}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\delta}$. Observando os auto-valores, vemos que o ponto pode ser de centro, caracterizando um sistema marginalmente estável, ou seja, aplicando qualquer perturbação, o estado inicial irá se diferenciar do estado final. Como provaremos com a Lei de Volterra.

2.4 Lei de Volterra

Volterra resumiu suas conclusões sobre as soluções e órbitas do sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (-\alpha + \gamma y)x \\ \frac{dy}{dt} &= (\beta - \delta x)y\end{aligned}$$

na forma de três leis. Sendo as constantes α, γ, β e δ positivas.

2.4.1 Lei dos Ciclos Periódicos

As flutuações das populações do predador e da presa são periódicas. O período depende dos valores das taxas de coeficientes do sistema de Eqs. (2.1) e (2.2) e do valor inicial. O período aumenta com a amplitude dos ciclos correspondentes.

Para encontrar a equação dos ciclos, dividimos a equação (2.1) pela equação (2.2), obtendo assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\beta y - \delta xy}{-\alpha x + \gamma xy} = \left(\frac{y}{-\alpha + \gamma y}\right)\left(\frac{\beta}{x} - \delta\right) \quad (2.8)$$

Separando as variáveis da equação acima, temos:

$$\left(\frac{\beta}{x} - \delta\right)dx + \left(\frac{\alpha}{y} - \gamma\right)dy = 0 \quad (2.9)$$

Integrando cada termo, vemos que as órbitas no quadrante da população é:

$$(\beta \ln x - \delta x) + (\alpha \ln y - \gamma y) = C \quad (2.10)$$

Onde C é uma constante. Se pegarmos a equação da órbita através do ponto (x_0, y_0) ,

onde x_0 e y_0 são positivos, então encontraremos o valor para C como abaixo.

$$(\beta \ln x_0 - \delta x_0) + (\alpha \ln y_0 - \gamma y_0) = C \quad (2.11)$$

Vamos escrever a equação das órbitas em termos de exponenciais.

$$\begin{aligned} (e^{\beta \ln x - \delta x})(e^{\alpha \ln y - \gamma y}) &= (e^{\beta \ln x_0 - \delta x_0})(e^{\alpha \ln y_0 - \gamma y_0}) \\ (e^{\beta \ln x} e^{-\delta x})(e^{\alpha \ln y} e^{-\gamma y}) &= (e^{\beta \ln x_0} e^{-\delta x_0})(e^{\alpha \ln y_0} e^{-\gamma y_0}) \\ (x^\beta e^{-\delta x})(y^\alpha e^{-\gamma y}) &= (x_0^\beta e^{-\delta x_0})(y_0^\alpha e^{-\gamma y_0}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

A equação (2.12) define a simples curva fechada para $(x_0, y_0) \neq (\frac{\beta}{\delta}; \frac{\alpha}{\gamma})$ dentro do quadrante da população, e o significado são os correspondentes $x = x(t)$ e $y = y(t)$ do sistema de Eqs. (2.1) e (2.2) que são de fato, periódicos. A figura abaixo mostra alguns destes ciclos.

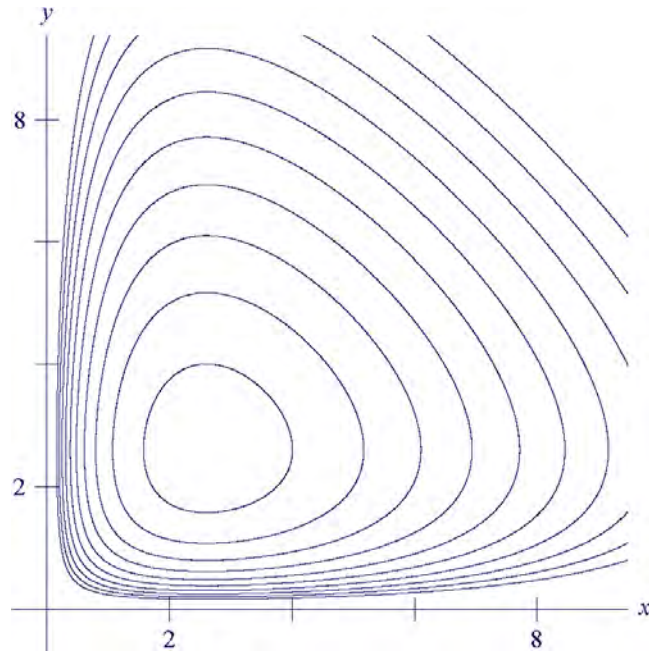


Figura 2.1: Exemplo de um Sistema Periódico.

2.4.2 A Lei das Médias

No sistema de Eq. (2.1) e (2.2), a média das populações de predador e presa sobre o período dos ciclos, são, respectivamente, $\frac{\beta}{\delta}$ e $\frac{\alpha}{\gamma}$. Vemos por que a Lei das Médias é verdadeira. Suponha que $x = x(t)$, $y = y(t)$ é uma solução não constante que define o ciclo de período T . A média das populações $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sobre um período é definida como

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (2.13)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt. \quad (2.14)$$

Vamos mostrar que $\bar{x} = \frac{\beta}{\delta}$. Primeiro, rearranjamos os termos da equação (2.2), obtemos:

$$x(t) = \frac{\beta}{\delta} - \frac{1y'(t)}{\delta y(t)} \quad (2.15)$$

Integrando cada lado da equação acima de 0 a T , dividindo por T , e usando (2.13) e (2.14).

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\beta}{\delta} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1y'(t)}{\delta y(t)} dt = \frac{\beta}{\delta} - \frac{1}{T} \frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{\delta} = \frac{\beta}{\delta}$$

pois $y(T) = y(0)$. Um argumento similar mostra que $\bar{y} = \frac{\alpha}{\gamma}$, e a validade das Lei das Médias é provada.

2.4.3 A Lei da Colheita

A terceira lei de Volterra explica o que acontece quando duas espécies são colhidas. Um simples modelo que acrescenta uma constante de colheita. Em que uma quantidade capturada por unidade de tempo é proporcional a população:

$$\begin{aligned}x' &= -\alpha x + \gamma xy - H_1 x = (-\alpha - H_1 + \gamma y)x \\y' &= \beta y - \delta xy - H_2 y = (\beta - H_2 - \delta x)y\end{aligned}\tag{2.16}$$

Os números positivos H_1 e H_2 são os coeficientes da colheita. Quando a colheita ocorre, os pontos de equilíbrio situados dentro do quadrante da população mudam para esquerda e para cima do $x = \beta/\delta$, $y = \alpha/\gamma$ para os pontos

$$x = (\beta - H_2)/\delta, \quad y = (\alpha + H_1)/\gamma\tag{2.17}$$

Isto assume que $H_2 < \beta$. Caso contrário, a colheita massiva da presa y não deixaria alimento suficiente para o predador, então o predador iria em direção a extinção. Pela Lei das Médias, a população média sobre qualquer ciclo são dadas pelas coordenadas dos pontos de equilíbrio. Como a colheita move o ponto de equilíbrio para cima e para a esquerda em relação ao ponto de equilíbrio original do quadrante da população, a colheita aumenta a população de presa, mas diminui a população de predadores. (Retirado dos livros Zill, D. G. and Cullen; Borelli, R. L. and Coleman).

Uma curiosidade ao assunto em questão, é um famoso mito à respeito do suicídio dos Leminguês, roedores que vivem no bioma ártico da tundra. Que ao contrário do mito, eles não se suicidam, e sim, ocorre por causa de explosões populacionais que surgem. (Texto retirado da Revista MundoEstranho)

2.5 Solução Numérica

Seja o sistema de equações diferenciais abaixo

$$\frac{dx}{dt} = (-1 + 0.1y)x \quad (2.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = (1 - 0.2x)y \quad (2.19)$$

Esse sistema representa um modelo predador-presa fictício, ele pode ser encontrado em Borelli, R. L. and Coleman, onde foram dados os seguintes valores para as constantes: $\alpha = 1$, $\gamma = 0.1$, $\beta = 1$ e $\delta = 0.2$, valores numéricos que serão usados em todo o decorrer do trabalho. Da seção (2.2) vemos que em $(0, 0)$ temos um ponto de sela e em $(5, 10)$ temos um centro. Integrando numericamente o sistema de equações diferenciais, Eq. (2.18) e Eq.(2.19), através de um algoritmo escrito em linguagem Fortran e usando o integrador RA15 Everhart, para diversas condições iniciais, obtemos o espaço de fase dado na Figura (2.2).

Pelo gráfico da Fig. (2.2) podemos ver claramente a dinâmica do modelo Lotka-Volterra, mostrando os ciclos em torno do ponto de equilíbrio $(5, 10)$ e o comportamento perto do ponto de sela $(0, 0)$, vale ressaltar que obtemos os mesmos resultados de Borelli, R. L. and Coleman . Seleccionamos algumas condições para se mostrar como evoluem no tempo, esses resultados são mostrados nos gráficos da Fig. (2.3).

Percebemos pelos gráficos da Fig. (2.3) que o sistema tem solução periódica. Na Fig. (2.3c) observamos a situação de equilíbrio, que corresponde ao centro no espaço de fase, esse equilíbrio é estável. Na Fig. (2.3b) no entorno do equilíbrio vemos que as amplitudes associadas não são bruscas quando comparadas com as situações que se distanciam do equilíbrio, como na Fig. (2.3a) e Fig. (2.3d).

Como existe uma periodicidade, podemos encontrar as frequências associadas a cada curva do espaço de fase. Seja a frequência dada por $\Omega_0 = 2\pi/T$, com $T = N\Delta t$, onde T é o período, N é o número de pontos e Δt é o passo de integração. Na Tabela (2.2) mostramos algumas frequências para as condições da Fig. (2.3).

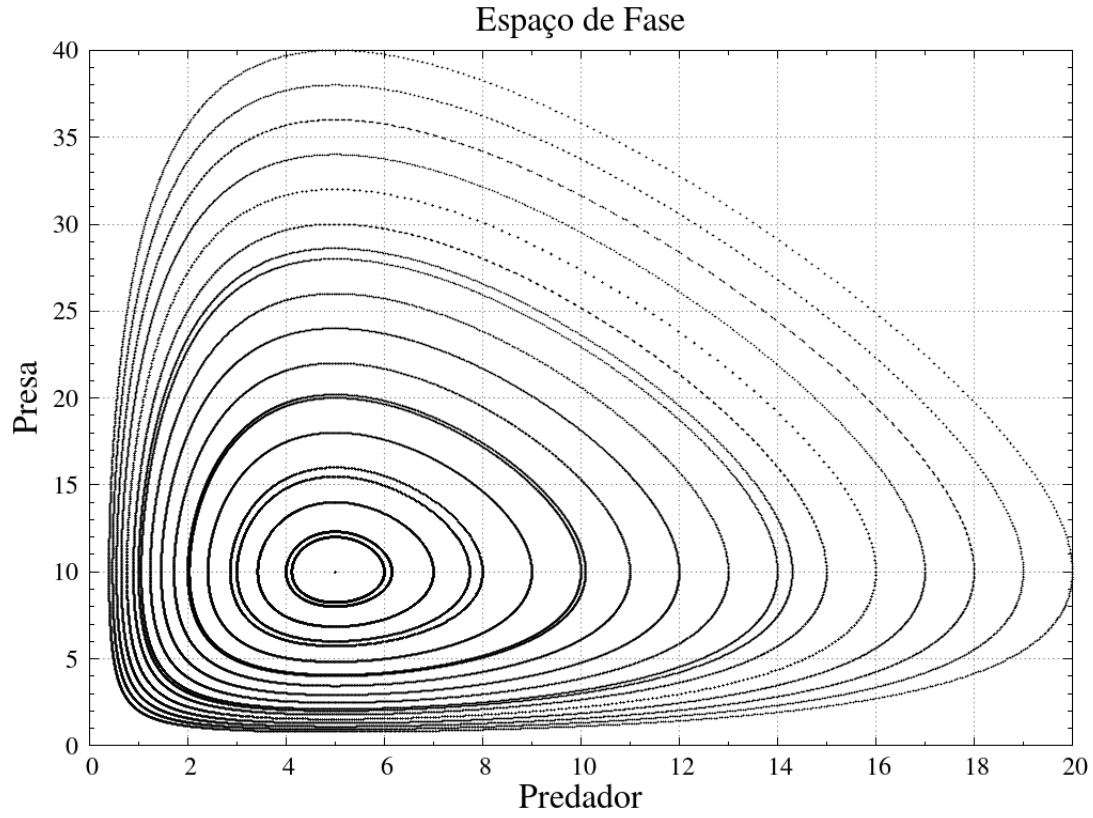


Figura 2.2: Espaço de fases para o sistema de Eqs. (2.1) e (2.2).

Condição inicial	Ω_0	T
$x_0 = 1, y_0 = 10$	0.8775	7.1599
$x_0 = 4, y_0 = 10$	0.9958	6.3099
$x_0 = 5, y_0 = 10$	1.0000	2π
$x_0 = 15, y_0 = 10$	0.8655	7.2599

Tabela 2.2: Frequências e Período de algumas condições iniciais.

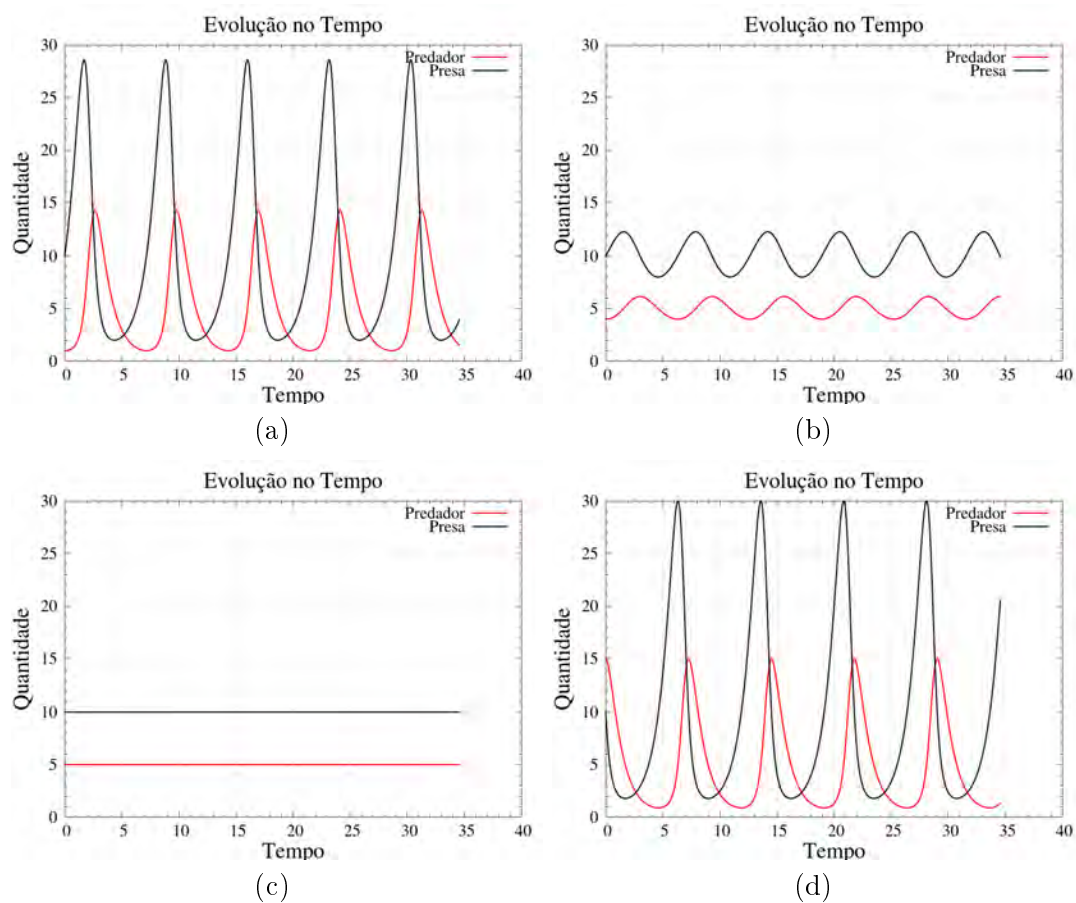


Figura 2.3: Gráficos da evolução no tempo para o predador e a presa. Condições iniciais: (a) $x_0 = 1, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 4, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (d) $x_0 = 15, y_0 = 10$.

Capítulo 3

Perturbação Randômica

Neste capítulo será modificado o sistema de equações diferenciais estudado na seção (2.5), Eqs. (2.18) e (2.19), adicionando perturbações com o intuito de estudar a dinâmica desse sistema perturbado. Supondo que a taxa de crescimento da população de presas seja controlada por um evento randômico, então β se tornará um termo randômico, escrevendo-o da seguinte forma:

$$\beta = \beta_0 + A(2\mathcal{R} - 1), \quad (3.1)$$

onde A será a amplitude da perturbação randômica, $\mathcal{R}$ é um número randômico que varia entre 0 e 1, na linguagem Fortran esse número randômico é gerado através da subrotina `call random_number(i)`. Com esta quantidade definida temos uma maneira de perturbar o sistema de equações diferenciais, Eqs. (2.18) e (2.19). Na Fig. (3.1) mostramos como se comporta a Eq. (3.1).

Começando com uma pequena amplitude, $A \ll \beta_0$, $A = 0.1$, o sistema de equações

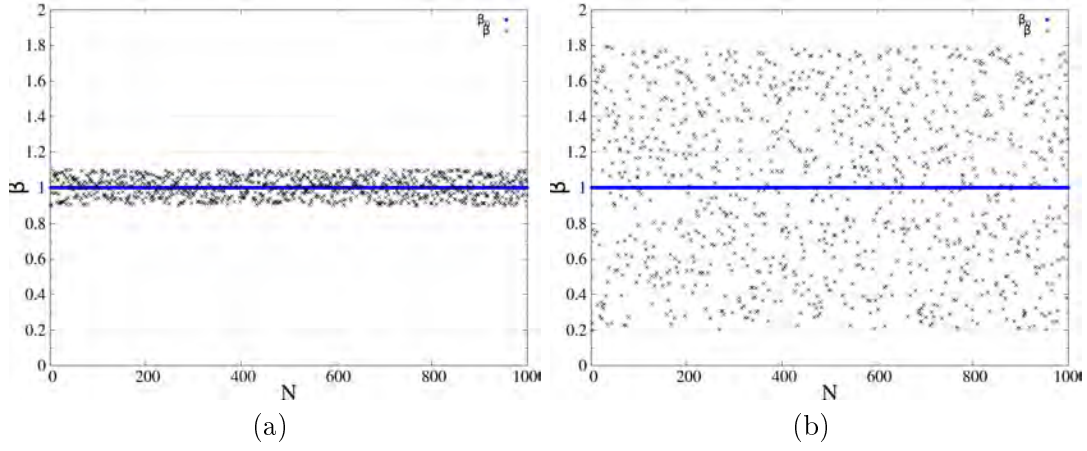


Figura 3.1: Comportamento da Eq. (3.1) para um valor de: (a) $\beta_0 = 1$ e $A = 0.1$. (b) $\beta_0 = 1$ e $A = 0.8$.

diferenciais, Eqs. (2.18) e (2.19) se tornam

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + 0.1y), \quad (3.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = y[1 + 0.1(2\mathcal{R} - 1) - 0.2x]. \quad (3.3)$$

Integrando numericamente o sistema de equações diferenciais, Eqs. (3.2) e (3.3) encontra-se os resultados mostrados nas figuras, Fig. (3.2), Fig. (3.3) e Fig. (3.4).

Comparando as Figs. (3.2a) e a Fig. (3.2b), observa-se que a perturbação randômica causa uma deformação em alguns picos, mas em média, ambos se assemelham. Para um tempo médio, Fig. (3.2c), observa-se que a perturbação randômica não causa tantos desvios. Para longos tempos, Fig. (3.2d), a perturbação randômica causa uma grande instabilidade para o sistema. Além disso, pode-se notar na Fig. (3.2d) que se o número de predadores e presas passam próximo da condição de equilíbrio do sistema de Eqs. (2.18) e (2.19), esse sistema tem a tendência de permanecer por um período ao redor do ponto de equilíbrio. Mas essa condição é necessariamente instável.

Ao se comparar a Fig. (3.3a) com a Fig. (3.3b) nota-se que o termo randômico

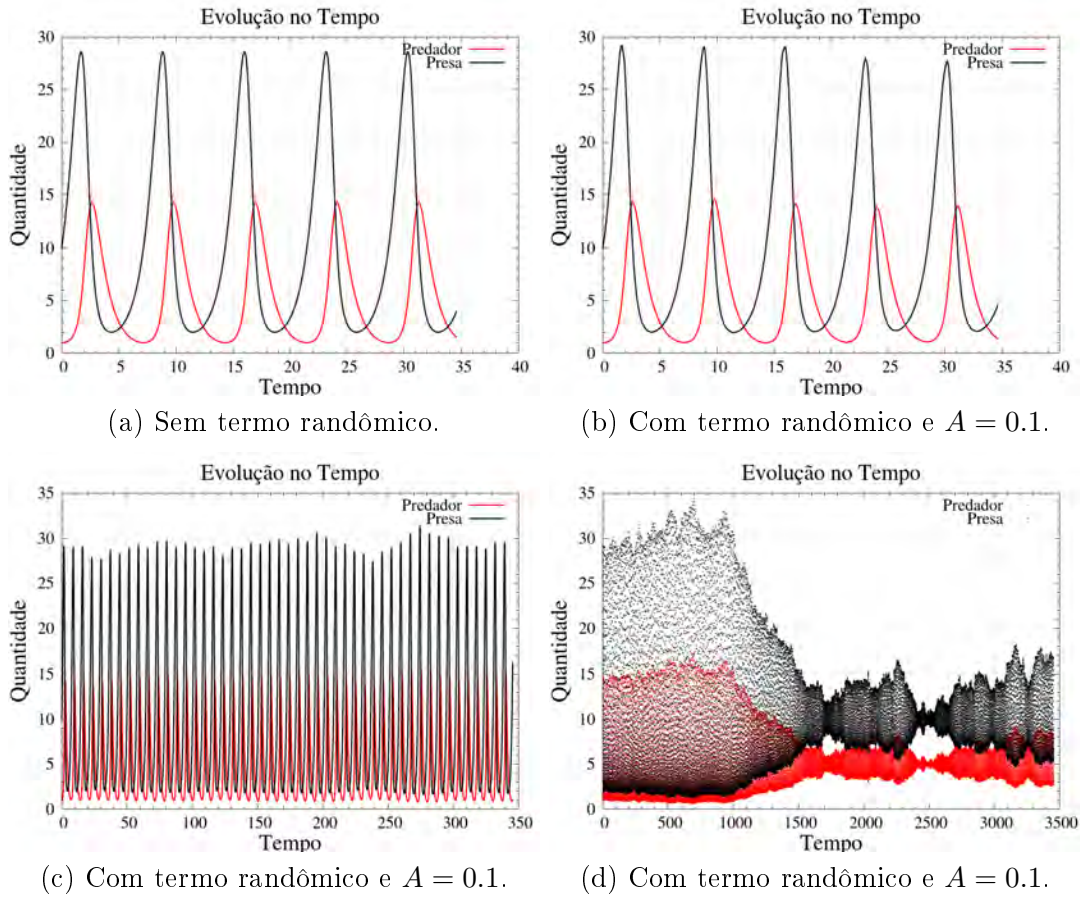


Figura 3.2: Gráficos da evolução no tempo para o predador e a presa, a condição inicial foi $x_0 = 1, y_0 = 10$. (a) Curto período de tempo. (b) Curto período de tempo. (c) Médio período de tempo. (d) Longo período de tempo.

causa uma perturbação perceptível na curva, porém a amplitude dessa perturbação não é demasiadamente grande. Para um tempo médio, Fig. (3.3c), nota-se que o termo randômico afeta de maneira significativa o sistema, desestabilizando-o por completo. E para longos tempos, Fig. (3.3d), o termo randômico torna o sistema instável.

Comparando a Fig. (3.4a) com a Fig. (3.4b), assim como na Fig. (3.2a) e Fig. (3.2b), observa-se que essa perturbação causa uma deformação em alguns picos, a não ser este efeito elas parecem iguais. Para um tempo médio, Fig. (3.4c), nota-se que essa

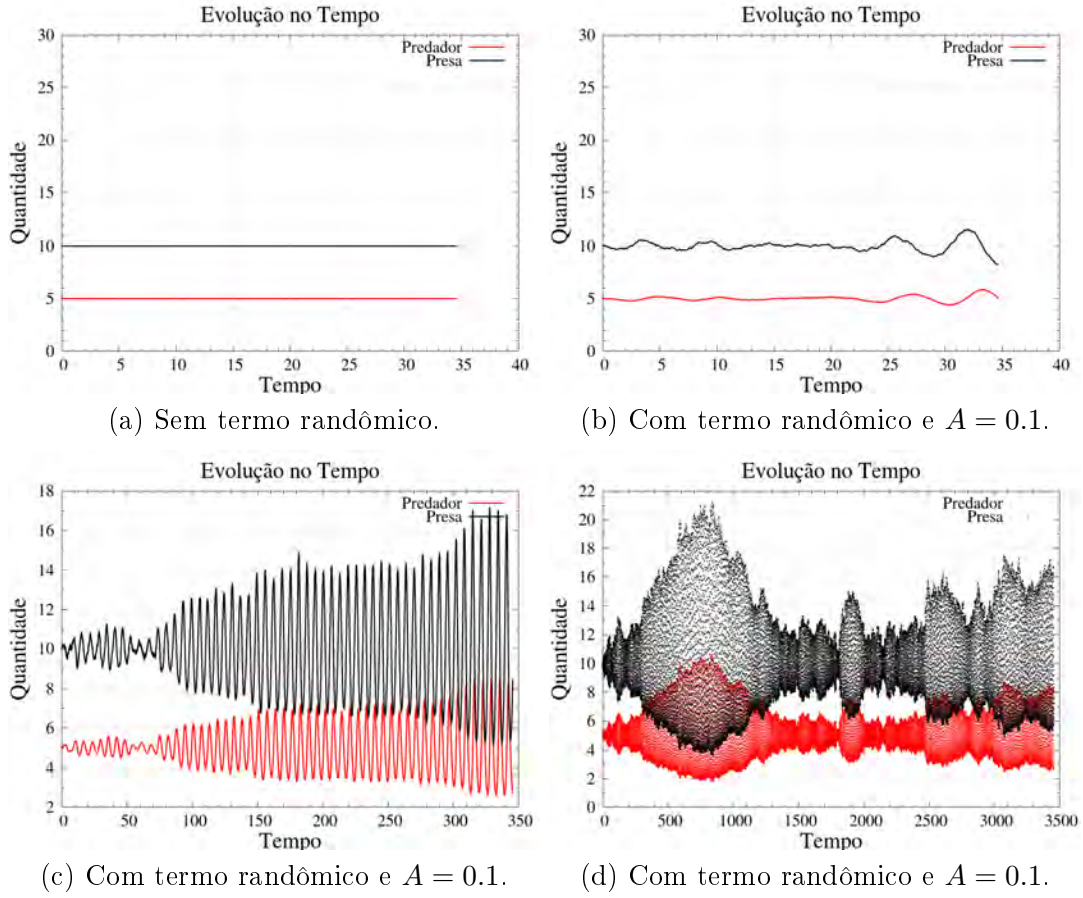


Figura 3.3: Gráficos da evolução no tempo para o predador e a presa, a condição inicial foi $x_0 = 5, y_0 = 10$. (a) Curto período de tempo. (b) Curto período de tempo. (c) Médio período de tempo. (d) Longo período de tempo.

perturbação tem uma tendência de convergir para uma situação de equilíbrio, mas para longos tempos, Fig. (3.2d), essa tendência não se confirma e o sistema é necessariamente instável. Pode-se ainda perceber na Fig. (3.4d) que entorno de $T = 1200$, o número de predadores e presas passam próximo da condição de equilíbrio do sistema de Eqs. (2.18) e (2.19), esse sistema fica por um curto período ao redor do ponto de equilíbrio.

Seja um ruído do tipo $A \lesssim \beta_0$, fazendo $A = 0.8$ o sistema de equações diferenciais, Eqs. (2.18) e (2.19) se tornam

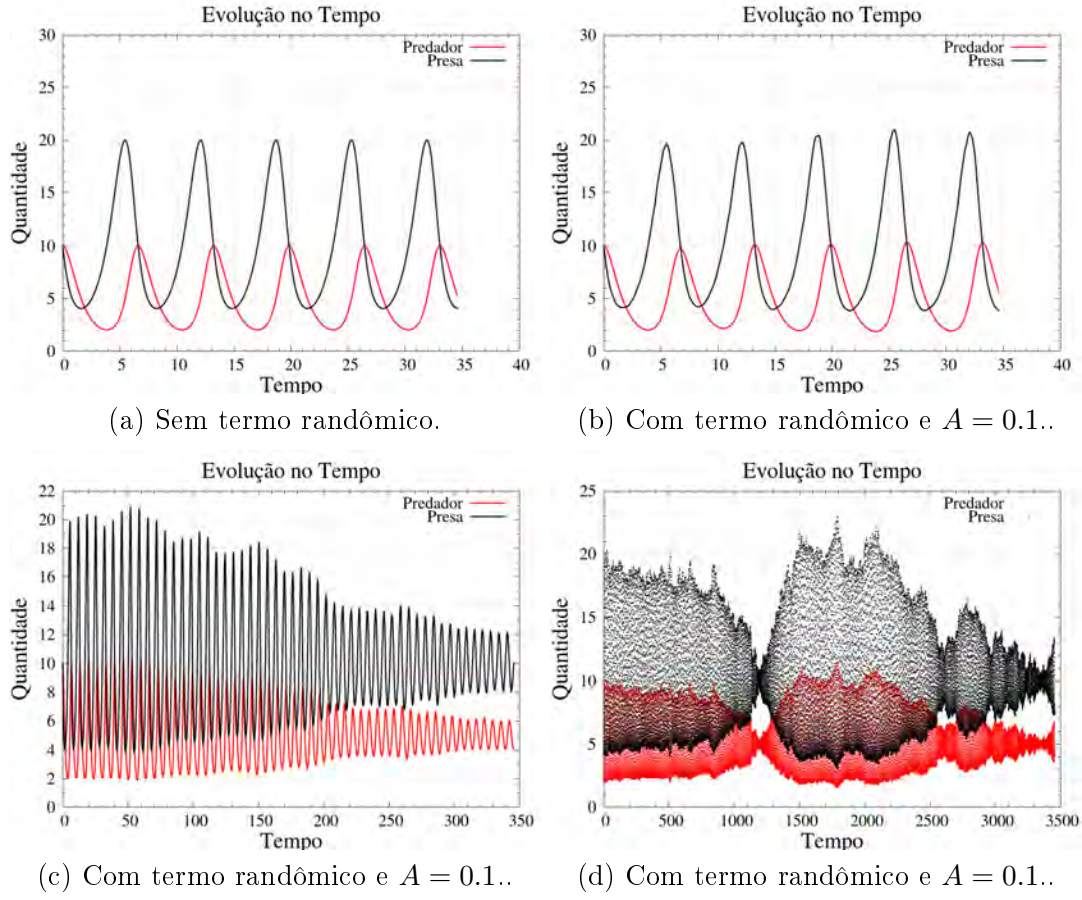


Figura 3.4: Gráficos da evolução no tempo para o predador e a presa, a condição inicial foi $x_0 = 10, y_0 = 10$. (a) Curto período de tempo. (b) Curto período de tempo. (c) Médio período de tempo. (d) Longo período de tempo.

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + 0.1y), \quad (3.4)$$

$$\frac{dy}{dt} = y[1 + 0.8(2\mathcal{R} - 1) - 0.2x]. \quad (3.5)$$

Integrando numericamente o sistema de equações diferenciais, Eqs. (3.4) e (3.5), obtém-se os resultados, mostrados na Fig. (3.5) e na Fig. (3.6).

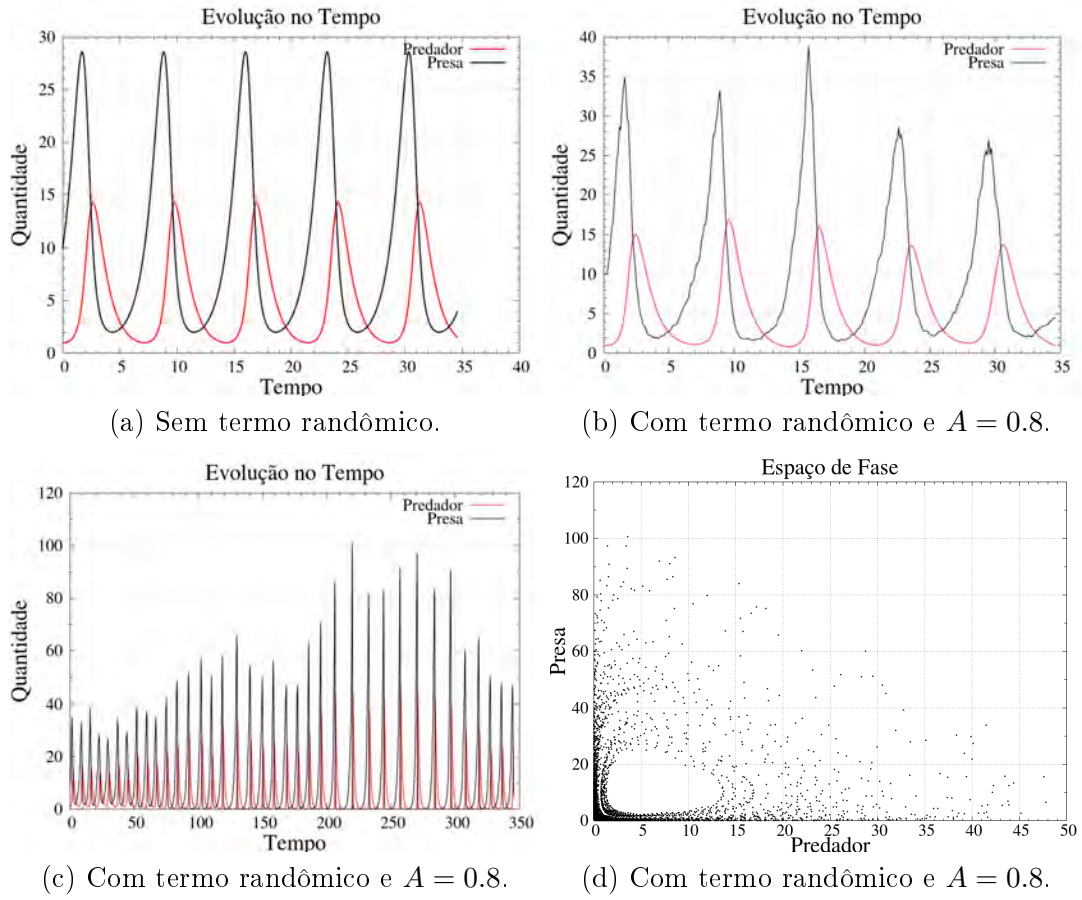
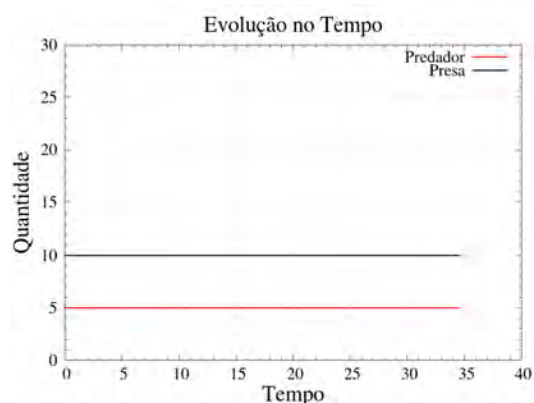


Figura 3.5: Gráficos da evolução no tempo para o predador e a presa, a condição inicial foi $x_0 = 1, y_0 = 10$. (a) Curto período de tempo. (b) Curto período de tempo. (c) Longo período de tempo. (d) Espaço de fase.

Comparando a Fig. (3.5a) com a Fig. (3.5b) nota-se que para $A = 0.8$ a perturbação é muito efetiva e em pouco tempo o sistema perde a estabilidade, tornando-se instável, esses resultados se confirmam na Fig. (3.5c) e no espaço de fase da Fig. (3.5d).

De acordo com a Fig. (3.6a), o sistema estaria em equilíbrio, mas devido ao termo randômico com $A = 0.8$, ele logo deixa o equilíbrio como mostrado na Fig. (3.6b). Em pouco tempo o sistema se torna instável, resultado confirmado pela Fig. (3.6c) e o espaço de fase da Fig. (3.6d).



(a) Sem termo randômico.

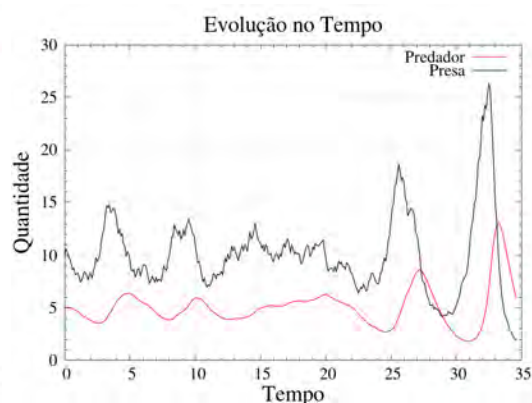
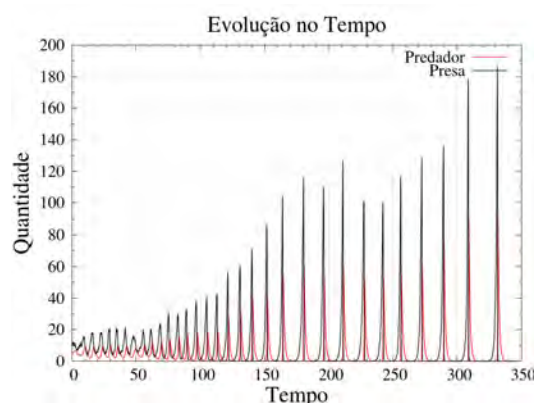
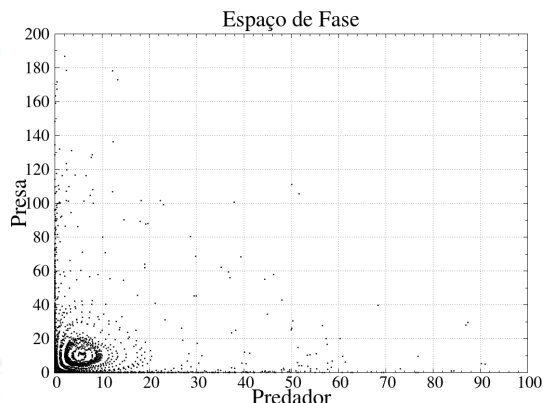
(b) Com termo randômico e $A = 0.8$.(c) Com termo randômico e $A = 0.8$.(d) Com termo randômico e $A = 0.8$.

Figura 3.6: Gráficos da evolução no tempo para o predador e a presa, a condição inicial foi $x_0 = 5, y_0 = 10$. (a) Curto período de tempo. (b) Curto período de tempo. (c) Longo período de tempo. (d) Espaço de fase.

Capítulo 4

Perturbação Periódica

Supondo que a taxa de crescimento da população de presas seja controlada por um termo que varia no tempo de forma periódica, escreve-se β como

$$\beta = \beta_0 + A \sin \Omega t, \quad (4.1)$$

onde A será a amplitude dessa perturbação periódica, β_0 uma constante e Ω um múltiplo de Ω_0 , mostrado na Tabela (2.2).

Como caráter ilustrativo na Fig. (4.1) mostra-se o comportamento de β para diversos parâmetros.

Definido β para o estudo do modelo Lotka-Volterra, escreve-se as equações de interação predador-presa como

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + 0.1y), \quad (4.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = y[\beta_0 + A \sin \Omega t - 0.2x]. \quad (4.3)$$

Onde $\beta_0 = 1$ para todas as situações estudadas e os parâmetros A e Ω serão escolhidos conforme mostrados na Fig. (4.1).

Começando o estudo com $A = 0.1$ e $\Omega = 0.1\Omega_0$, integrando as Eqs. (4.2) e (4.3) com os parâmetros mencionados, registra-se os resultados na Fig. (4.2).

Observa-se que para essas condições ($A = 0.1$ e $\Omega = 0.1\Omega_0$) o termo periódico não perturba o sistema, pois quando comparados os gráficos da Fig. (4.2) com os gráficos da Fig. (2.3) não nota-se diferenças perceptíveis.

Mantendo a amplitude como $A = 0.1$ e aumentando o valor da frequência para $\Omega = \Omega_0$ e integrando as equações diferenciais resultantes, obtém-se os gráficos da Fig. (4.3).

Esses gráficos mostram que mesmo com $\Omega = \Omega_0$, isto é, uma frequência igual à frequência do modelo sem perturbação, Eqs. (2.18) e (2.19), não observa-se variações consideráveis. Ainda assim, com muito esforço nota-se um pequeno deslocamento do ponto de equilíbrio no espaço de fase, Fig. (4.3d).

Considerando $A = 0.1$ e $\Omega = 100\Omega_0$ e integrando as equações resultantes temos os resultados registrados na Fig. (4.4). Nota-se que uma mudança significativa acontece em relação ao resultados anteriores, observando que o ponto de equilíbrio é deslocado para a direita no sentido de aumentar o número de predadores, o novo ponto de equilíbrio é um pouco acima de 5, veja Fig. (4.4d) e Fig. (4.4b), isto acontece também para outras condições iniciais, mostradas na Fig. (4.4).

Seja a condição de maior amplitude, $A = 0.8$, e também $\Omega = 0.1\Omega_0$, nessa situação quando integradas as equações diferenciais os resultados forcecem os gráficos da Fig. (4.5).

Nota-se que para essas condições ($A = 0.8$ e $\Omega = 0.1\Omega_0$) os resultados não variam dos obtidos para menor amplitude e mesma frequência, mostrando que a frequência tem um maior peso quando cria-se uma perturbação desse tipo no sistema. Os gráficos da Fig. (4.5) são muito parecidos com os da Fig. (4.2).

Considerando agora $A = 0.8$ e $\Omega = \Omega_0$, integrando as equações diferenciais resultantes, obtém-se os resultados na Fig. (4.6).

No gráfico da Fig. (4.6b) percebe-se pequenas oscilações nas curvas de presas e predadores, mostrando que para frequências e amplitudes maiores o sistema desloca-se a outro ponto de equilíbrio. O espaço de fase, Fig. (4.6d) confirma isso quando comparado com o espaço de fase da Fig. (4.5d).

Com os valores da amplitude e da frequência de $A = 0.8$ e $\Omega = 100\Omega_0$, respectivamente, temos que os resultados da integração do sistema de equações diferenciais são apresentados na Fig. (4.7).

Esses resultados nos mostram claramente que o sistema é afetado quando se introduz grandes valores de amplitude e frequência, evidenciando o deslocamento do ponto de equilíbrio para o entorno de 7, como mostra a Fig. (4.7d).

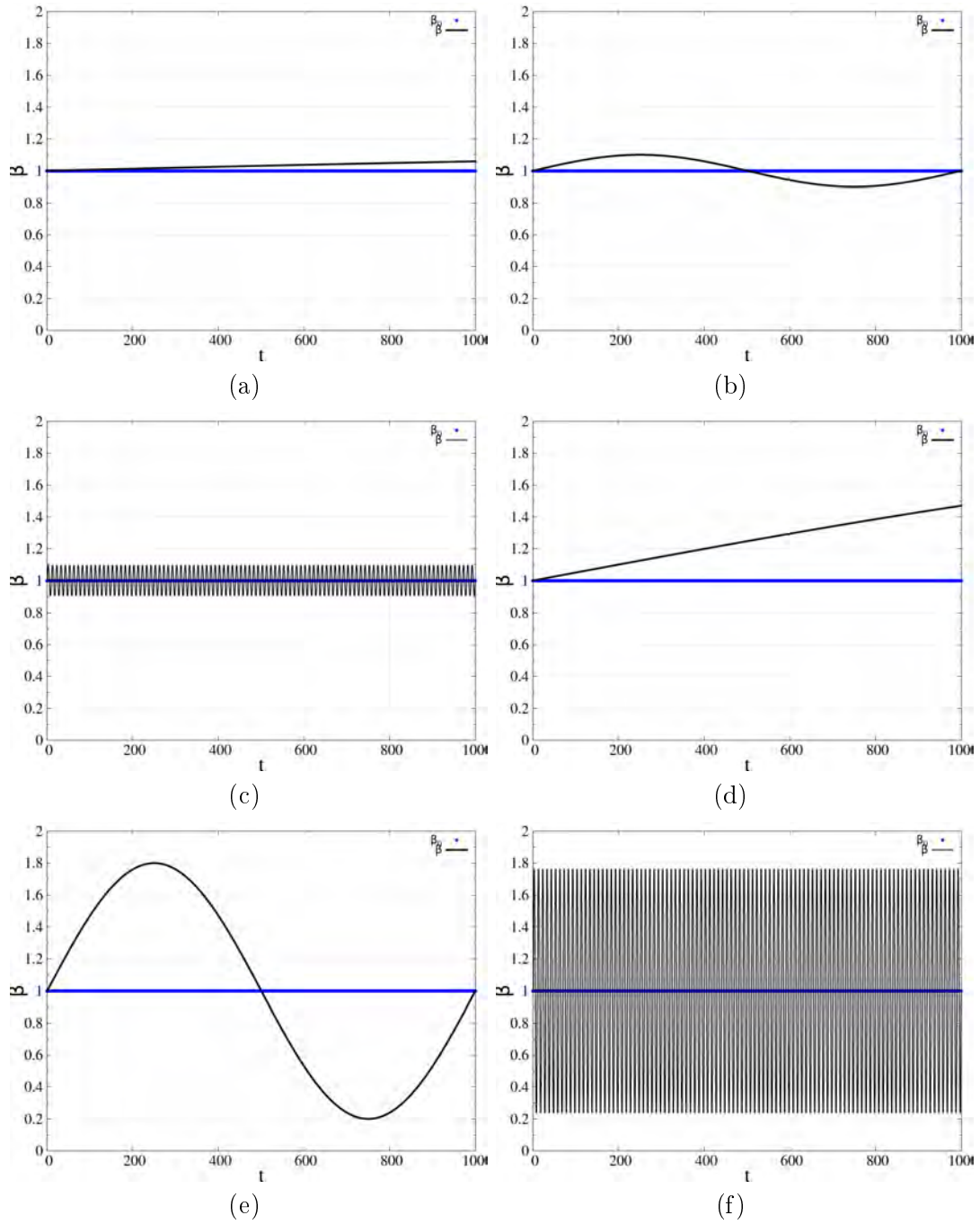


Figura 4.1: Comportamento da Eq. (4.1) para os parâmetros: (a) $A = 0.1$, $\beta_0 = 1$ e $\Omega = 0.1$. (b) $A = 0.1$, $\beta_0 = 1$ e $\Omega = 1$. (c) $A = 0.1$, $\beta_0 = 1$ e $\Omega = 100$. (d) $A = 0.8$, $\beta_0 = 1$ e $\Omega = 0.1$. (e) $A = 0.1$, $\beta_0 = 1$ e $\Omega = 1$. (f) $A = 0.1$, $\beta_0 = 1$ e $\Omega = 100$.

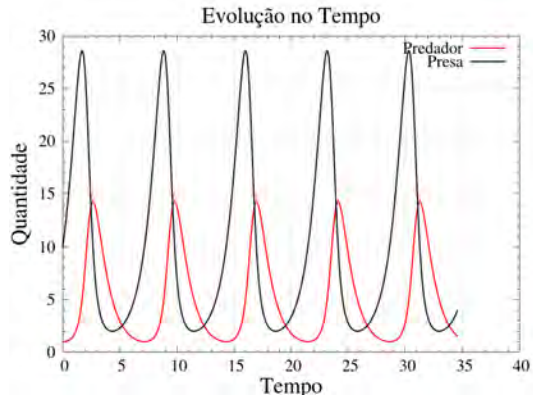
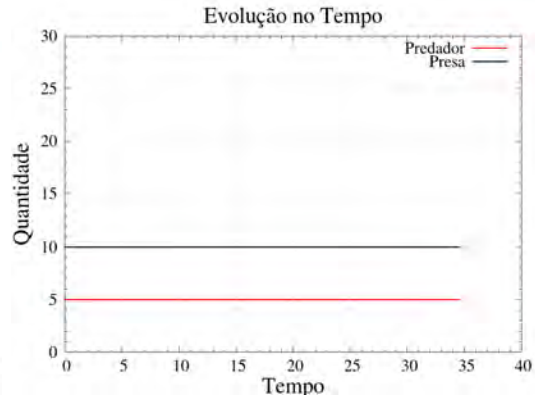
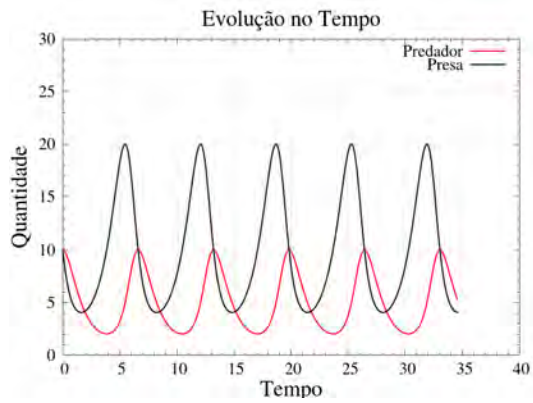
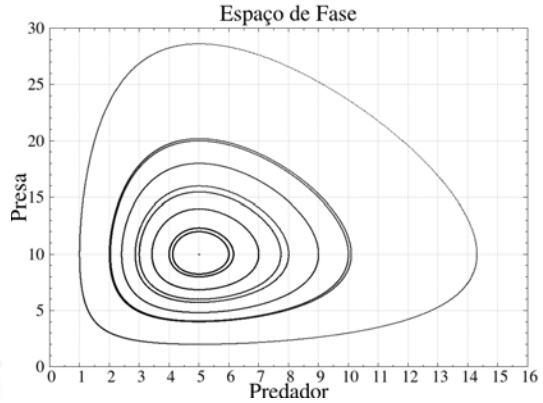
(a) $A = 0.1$ e $\Omega = 0.1\Omega_0$ (b) $A = 0.1$ e $\Omega = 0.1\Omega_0$ (c) $A = 0.1$ e $\Omega = 0.1\Omega_0$ (d) $A = 0.1$ e $\Omega = 0.1\Omega_0$

Figura 4.2: Modelo Lotka-Volterra com β conforme a Eq. (4.1) e condição inicial: (a) $x_0 = 1, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 10, y_0 = 10$. (d) Espaço de fase.

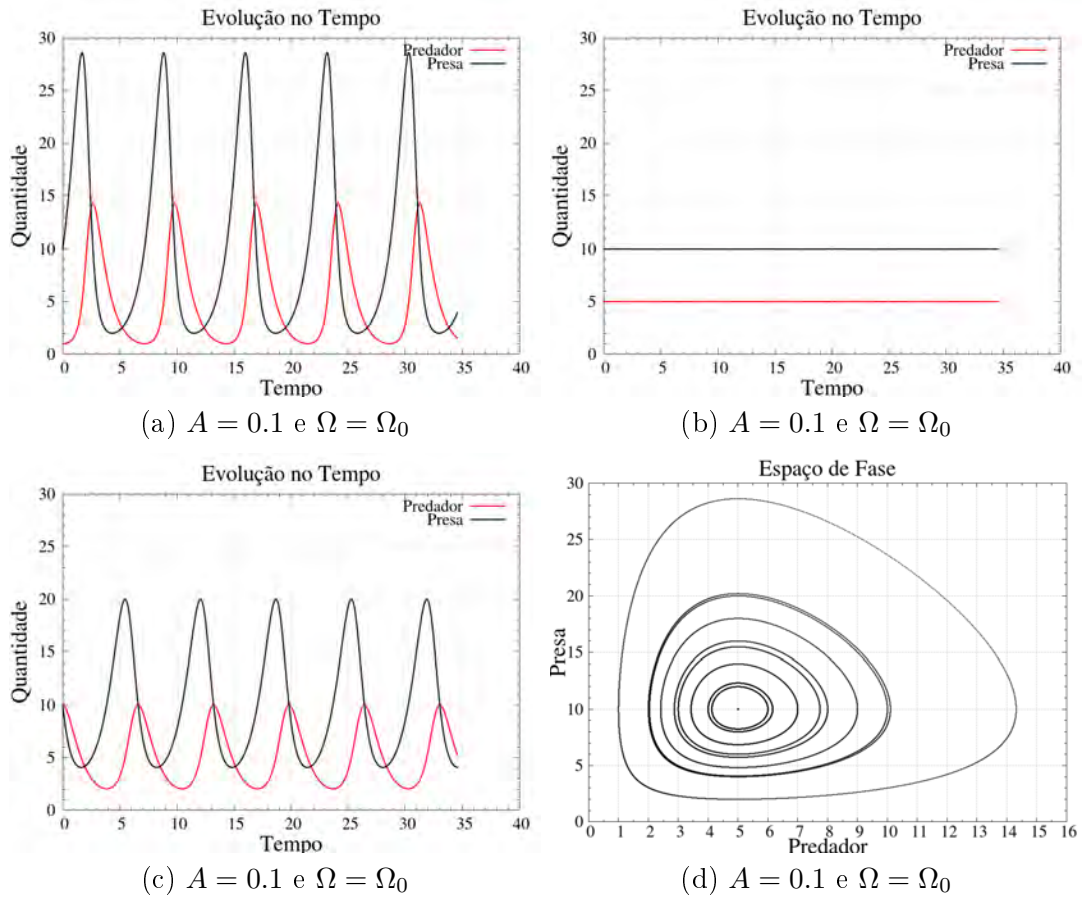


Figura 4.3: Modelo Lotka-Volterra com β conforme a Eq. (4.1) e condição inicial: (a) $x_0 = 1, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 10, y_0 = 10$. (d) Espaço de fase.

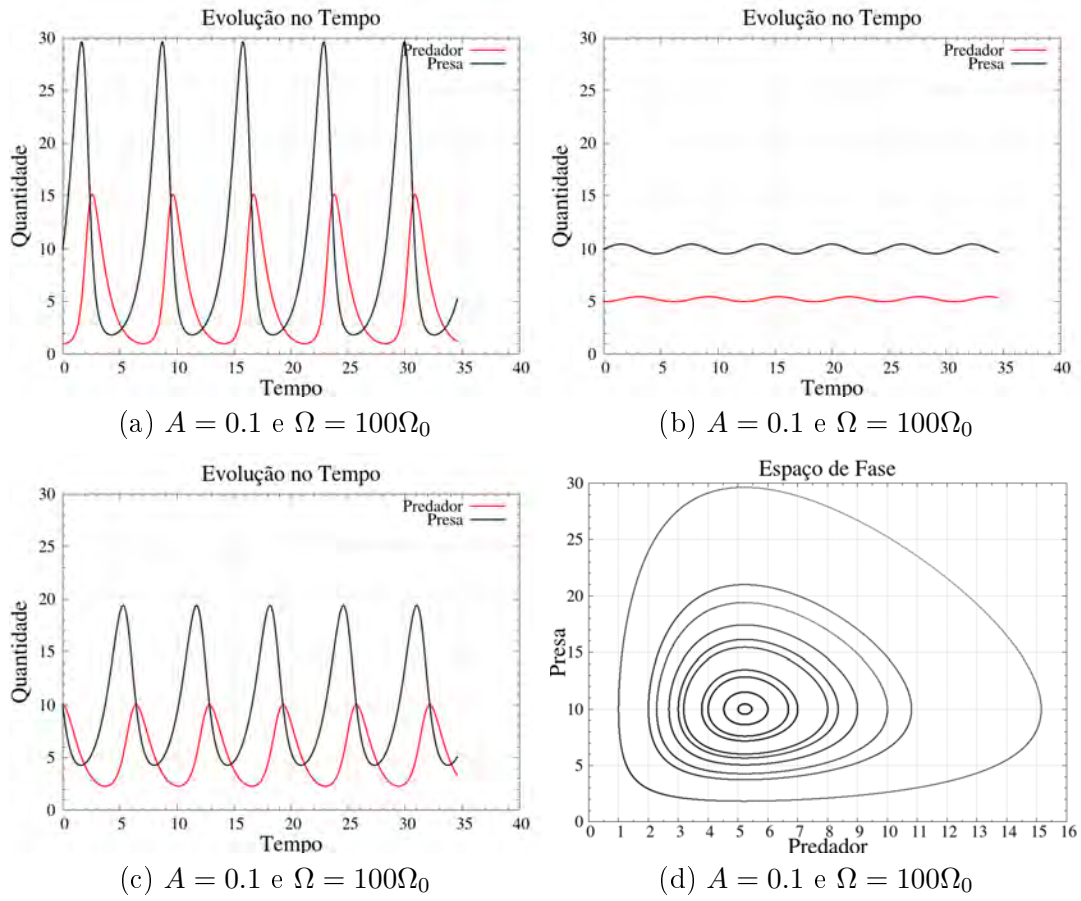


Figura 4.4: Modelo Lotka-Volterra com β conforme a Eq. (4.1) e condição inicial: (a) $x_0 = 1, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 10, y_0 = 10$. (d) Espaço de fase.

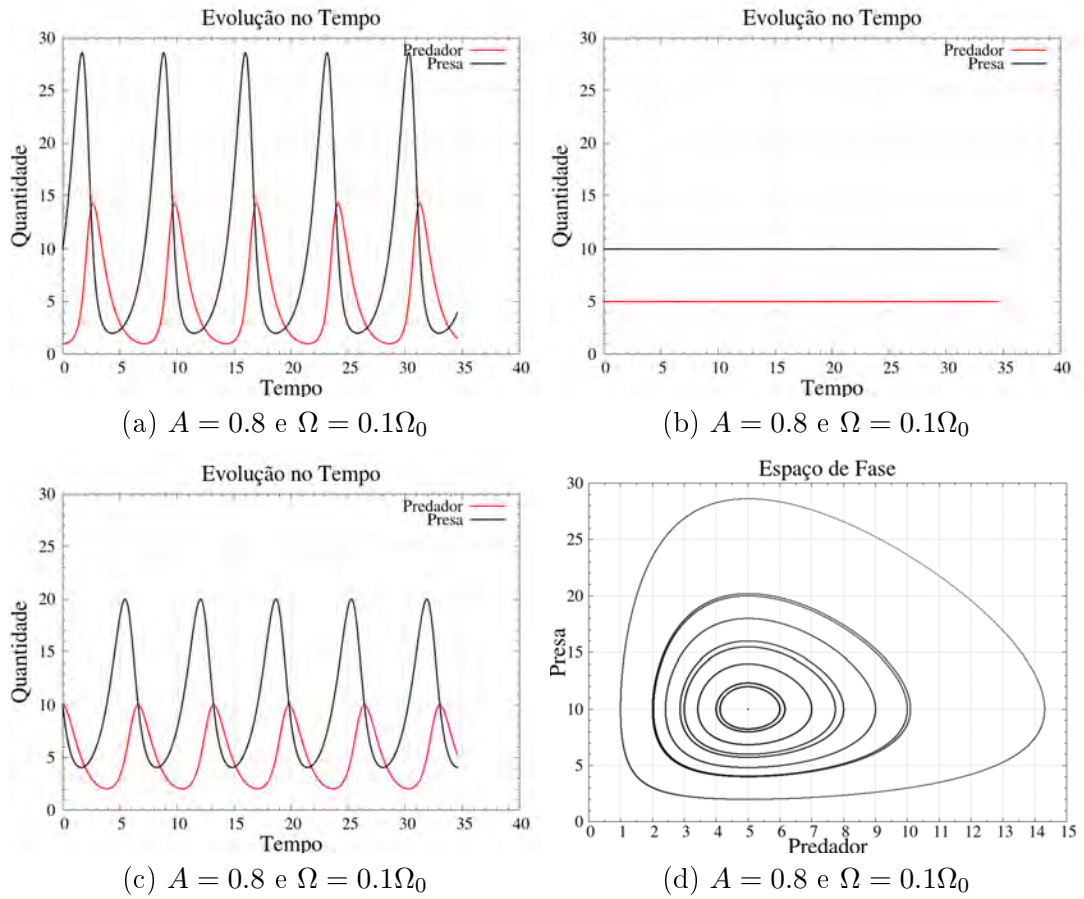


Figura 4.5: Modelo Lotka-Volterra com β conforme a Eq. (4.1) e condição inicial: (a) $x_0 = 1, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 10, y_0 = 10$. (d) Espaço de fase.

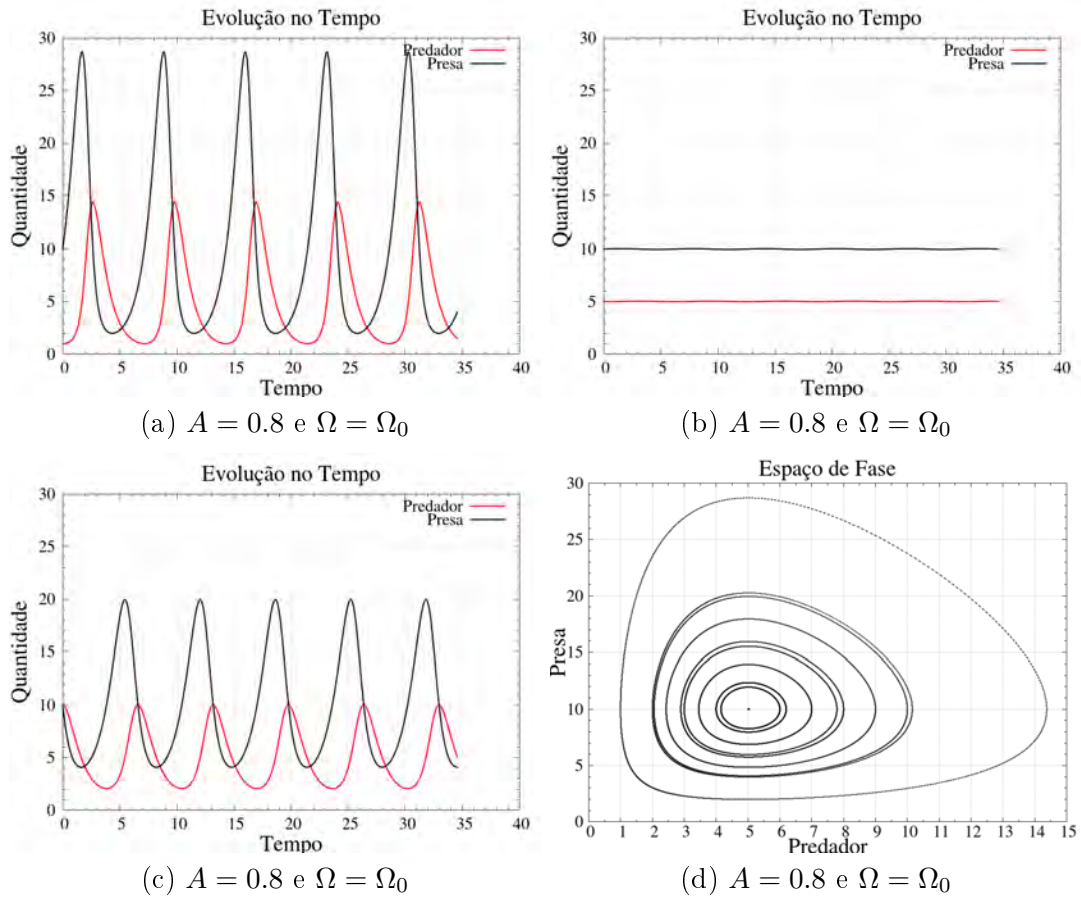


Figura 4.6: Modelo Lotka-Volterra com β conforme a Eq. (4.1) e condição inicial: (a) $x_0 = 1, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 10, y_0 = 10$. (d) Espaço de fase.

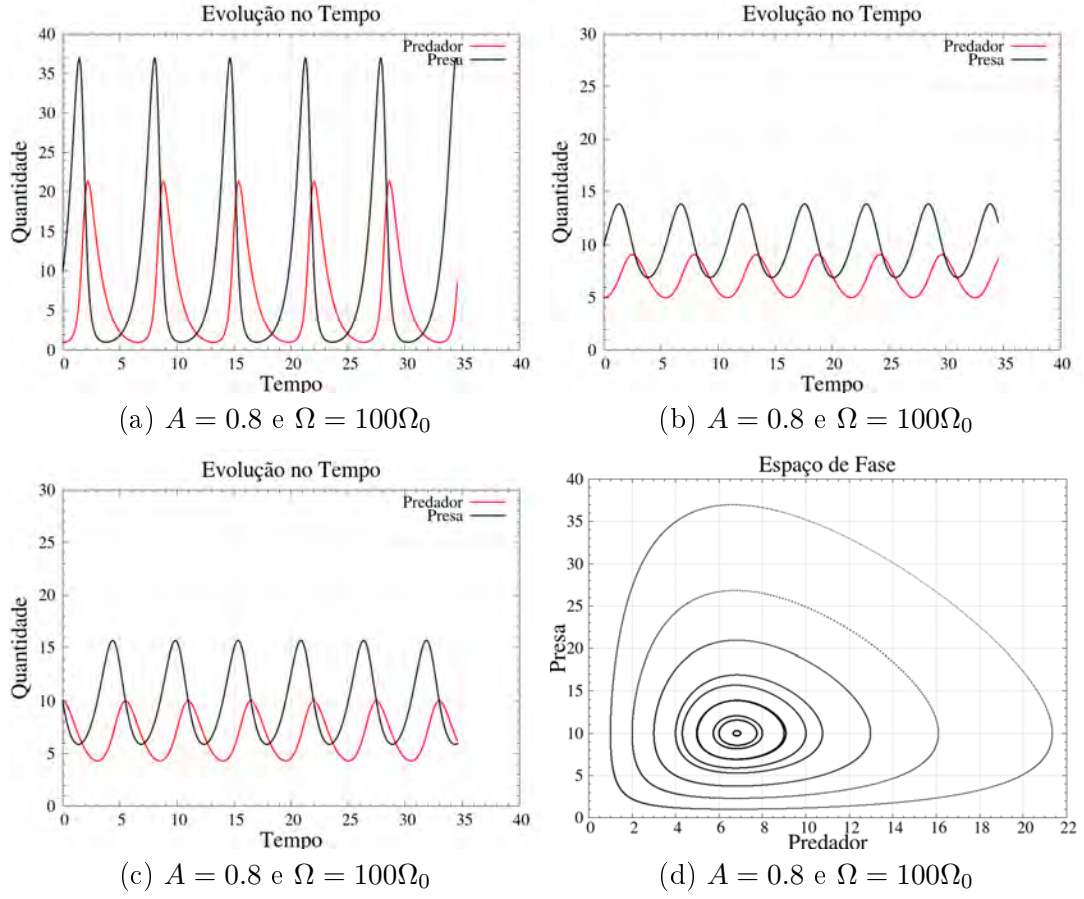


Figura 4.7: Modelo Lotka-Volterra com β conforme a Eq. (4.1) e condição inicial: (a) $x_0 = 1, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 10, y_0 = 10$. (d) Espaço de fase.

Capítulo 5

Capacidade

Neste capítulo estudaremos uma maneira de estabilizar os sistemas perturbados que foram estudados no Cap. (4) e Cap. (3).

Assumindo uma EDO do tipo:

$$\frac{dy}{dt} = ay - gy^2$$

Onde a e g são constantes positivas. Esta EDO é usada para a população de presas levando em conta a superlotação. A forma mais comum em que esta EDO surge é colocando $r = a$ e $K = a/g$ para obter a *equação logística*

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y/K)$$

A constante r é chamada de *constante de crescimento intrínseco* e mede a diferença entre a taxa de crescimento e morte por unidade de população se não houver superlotação. A constante positiva K é a *constante de saturação* ou *capacidade*. Como veremos em nosso trabalho, toda solução $y(t)$ aproximará K quando $t \rightarrow \infty$ se $y(0)$ é positivo. (Texto retirado do Livro Borrelli, R. L. and Coleman)

Adicionando o termo capacitivo para o Modelo Lotka-Volterra, da forma $-cy^2$,

podemos interpretá-lo como o fator que limita o quanto o ambiente suporta um certo número de presas. Quanto maior o termo da capacidade, menos o ambiente suportará o número de presas, como veremos nos exemplos abaixo. número de presas.

5.1 Modelo Lotka-Volterra

Quando introduzimos a capacidade para as equações do Modelo Lotka-Volterra estudado no Cap. (2), Eqs. (2.18) e (2.19), elas se tornam

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + 0.1y), \quad (5.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(1 - 0.2x - cy). \quad (5.2)$$

Os pontos críticos desse sistema em função da capacidade são $(0, 0)$, um ponto de sela e $(5 - 50c, 10)$ um centro.

Integrando a Eq. (5.1) para $c = 0.01$, temos que o centro será $(4.5, 10)$ os resultados estão nos gráficos da Fig. (5.1).

Podemos perceber pelos gráficos, Fig. (5.1a) e Fig. (5.1c), que depois de cerca de 100 unidades de tempo o sistema logo converge para o ponto de equilíbrio. No espaço de fase tanto da Fig. (5.1b) como na Fig. (5.1d) temos um atrator. A capacidade no sistema interferiu no sentido de levar todas as condições para um valor constante, podemos dizer que a capacidade tem um caráter de estabilizar o sistema. Interessante notar que o sistema perde a propriedade de ser periódico.

Ao se integrar a Eq. (5.1) para $c = 0.1$, o centro agora será $(0, 10)$ e os resultados estão registrados na Fig. (5.2).

Vemos que rapidamente o sistema vai para o ponto de equilíbrio, configurando que grandes valores de capacidade fazem com que o sistema seja brusco ao se encaminhar para o ponto de equilíbrio. Nas Figs. (5.2a) e (5.2b) vemos que todos os predadores morrem e o espaço de fase mostra que todas as condições tendem a um mesmo valor de

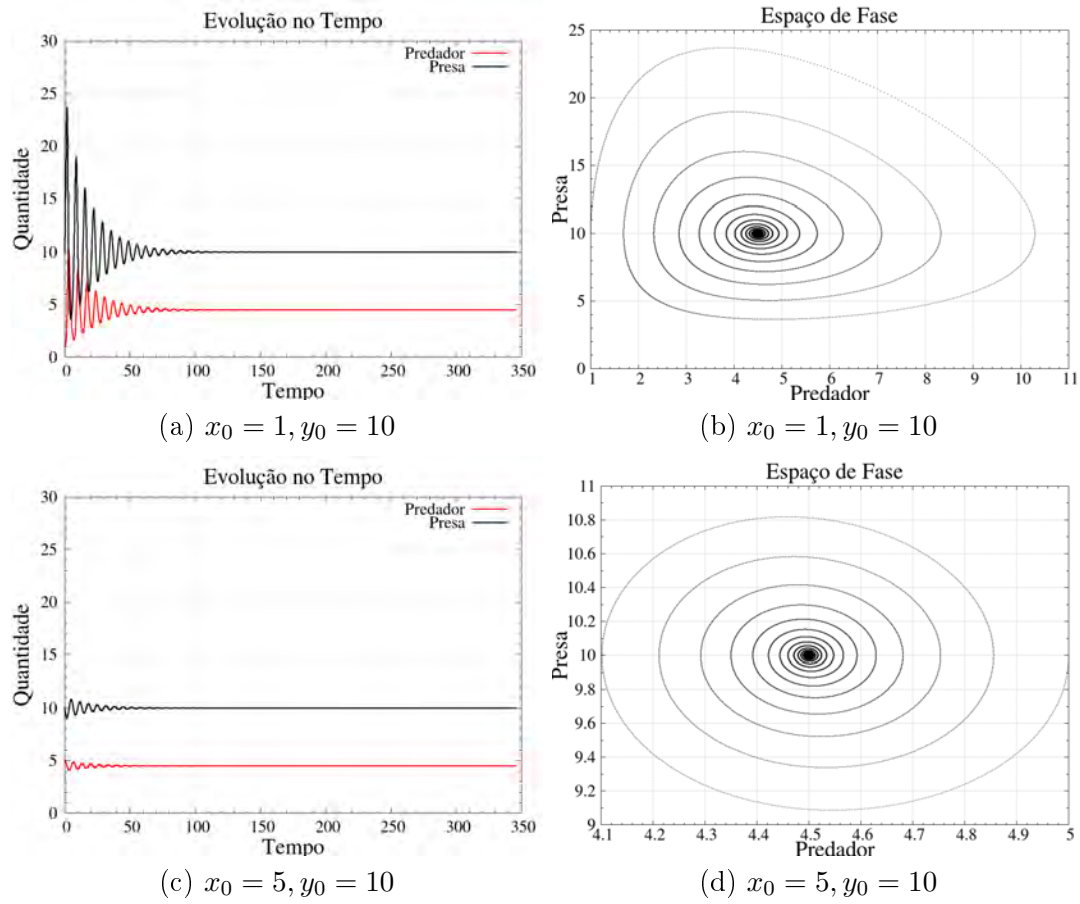


Figura 5.1: Modelo Lotka-Volterra com $c = 0.01$. (a)Evolução no Tempo. (b)Espaço de fase. (c)Evolução no Tempo. (d)Espaço de fase.

presas final.

5.2 Randômico

Agora consideremos o caso em que β é um número randômico, conforme foi visto na seção (3). As equações a serem integradas serão

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + 0.1y), \quad (5.3)$$

$$\frac{dy}{dt} = y[1 + A(2\mathcal{R} - 1) - 0.2x - cy]. \quad (5.4)$$

Seja a capacidade com o valor de $c = 0.01$ e o ruído com o valor de $A = 0.1$, integrando as Eqs. (5.3) e (5.4) com esses valores, mostramos os resultados na Fig. (5.3).

Podemos perceber que o sistema converge para os pontos de equilíbrio mostrados na seção (5.1). Em cerca de 100 unidades de tempo o sistema atinge o equilíbrio, diferentemente do que ocorria sem o termo da capacidade, a capacidade fez com que um modelo instável encontrasse uma certa estabilidade, pois ainda com a capacidade os valores de presas e predadores oscilam em torno do ponto de equilíbrio, isto pode ser visto claramente no espaço de fase, Fig. (5.3b) e Fig. (5.3d), onde temos uma grande concentração de pontos ao redor de (4.5, 10).

Tomando o valor para a capacidade de $c = 0.01$ e para o ruído o valor de $A = 0.8$, integrando as Eqs. (5.3) e (5.4) com os valores mencionados anteriormente, mostramos os resultados na Fig. (5.4).

Esses resultados mostram que mesmo para um ruído de $A = 0.8$ o sistema não diverge, mas em contrapartida o tamanho da amplitude de valores atingidos em torno do ponto de equilíbrio é maior, cerca de ± 5 em torno do número de presas e ± 2 em torno do número de predadores. Isto fica evidente nos gráficos do espaço de fase, Fig. (5.4b) e Fig. (5.4d).

O próximo passo é estudar o comportamento das Eqs. (5.3) e (5.4) para uma capacidade de $c = 0.1$ e ruído de $A = 0.1$, os resultados estão na Fig. (5.5).

Podemos dizer que os resultados se repetem para um valor maior da capacidade, isto é, o sistema não diverge, vai ao equilíbrio conforme a seção (5.1). Também temos que para diversas condições iniciais o valor de presas oscila em torno do equilíbrio, assim como o valor de predadores, mostrado an Fig. (5.5c).

Para um valor de capacidade de $c = 0.1$ e um ruído com valor de $A = 0.8$, temos os resultados mostrados na Fig. (5.6).

Esses resultados nos dizem que mesmo para um ruído com o valor de 0.8 o sistema tem comportamento semelhante ao da seção (5.1), o número de predadores vai à zero e o número de presas se mantêm ao redor do ponto de equilíbrio. Notemos que por causa do ruído ser grande temos uma variação maior em torno do ponto de equilíbrio chegando a cerca de ± 4 para presa, veja Fig. (5.6c).

5.3 Periódico

Considerando agora um β periódico como na Eq. (4.1), as Eqs. (4.2) e (4.3) com o termo da capacidade são

$$\frac{dx}{dt} = x(-1 + 0.1y), \quad (5.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = y[\beta_0 + A \sin \Omega t - 0.2x - cy]. \quad (5.6)$$

Seja um valor de $c = 0.01$ para a capacidade e um valor de $A = 0.1$ para a amplitude, na Fig. (5.7), mostramos os resultados da integração das equações diferenciais, Eqs. (5.5) e (5.6).

Nos gráficos mostrados, Fig. (5.7), vemos que os mesmos assumem caráter semelhante ao modelo estudado no (5.1), isto é, eles tendem ao ponto de equilíbrio para as condições de $\Omega = 0.1\Omega_0$ e $\Omega = \Omega_0$, já para $\Omega = 100\Omega_0$ vemos que o ponto de equilíbrio se deslocou. A perturbação periódica não era tão efetiva quanto a perturbação randômica, por isso o comportamento assemelha-se ao do Modelo Lotka-Volterra, como

já foi mencionado.

Aumentando o tamanho do ruído para o valor de $A = 0.8$ e mantendo o valor da capacidade como $c = 0.01$, registramos os resultados da integração das equações diferenciais resultantes na Fig. (5.8).

Devido ao valor da amplitude ser maior podemos notar com mais clareza o deslocamento do ponto de equilíbrio para os diferentes valores de Ω , o maior efeito se dá quando $\Omega = 100\Omega_0$, Fig. (5.8), pois ele passa de 4.5 para 6.5.

Cosiderando agora uma capacidade de $c = 0.1$ e uma amplitude de $A = 0.1$, na Fig. (5.9) mostramos os resultados da solução numérica das equações diferenciais.

Para as frequências de $\Omega = 0.1\Omega_0$ e $\Omega = \Omega_0$ vemos que o número de predadores vai a zero para diversas condições iniciais, enquanto para uma frequência de $\Omega = 100\Omega_0$, diferente do esperado, o número de predadores não vai a zero, a explicação se deve ao fato do equilíbrio se deslocar tamanho suficiente para que as condições não sejam suficientes para que o número de predadores vá a zero. Ainda assim o equilíbrio das presas continua sendo em 10.

Agora para um valor de amplitude de $A = 0.8$ e capacidade de $c = 0.1$, vejamos os resultados da solução numérica das equações diferenciais na Fig. (5.10).

De acordo com os gráficos vemos que para as frequências $\Omega = 0.1\Omega_0$ e $\Omega = \Omega_0$ o novo valor da amplitude não altera significativamente os resultados anteriores, por outro lado, para o caso de frequência $\Omega = 100\Omega_0$ temos um efeito singular, para a amplitude $A = 0.8$ os predadores não morrem, mas tendem a um equilíbrio, na Fig. (5.10d) temos um aumento ao redor dos pontos de equilíbrio e percebemos que o ponto final de equilíbrio é diferente para cada condição inicial, cada cor no gráfico representa uma condição inicial. Esse fenômeno não foi observado em nenhum outro modelo estudado neste trabalho.

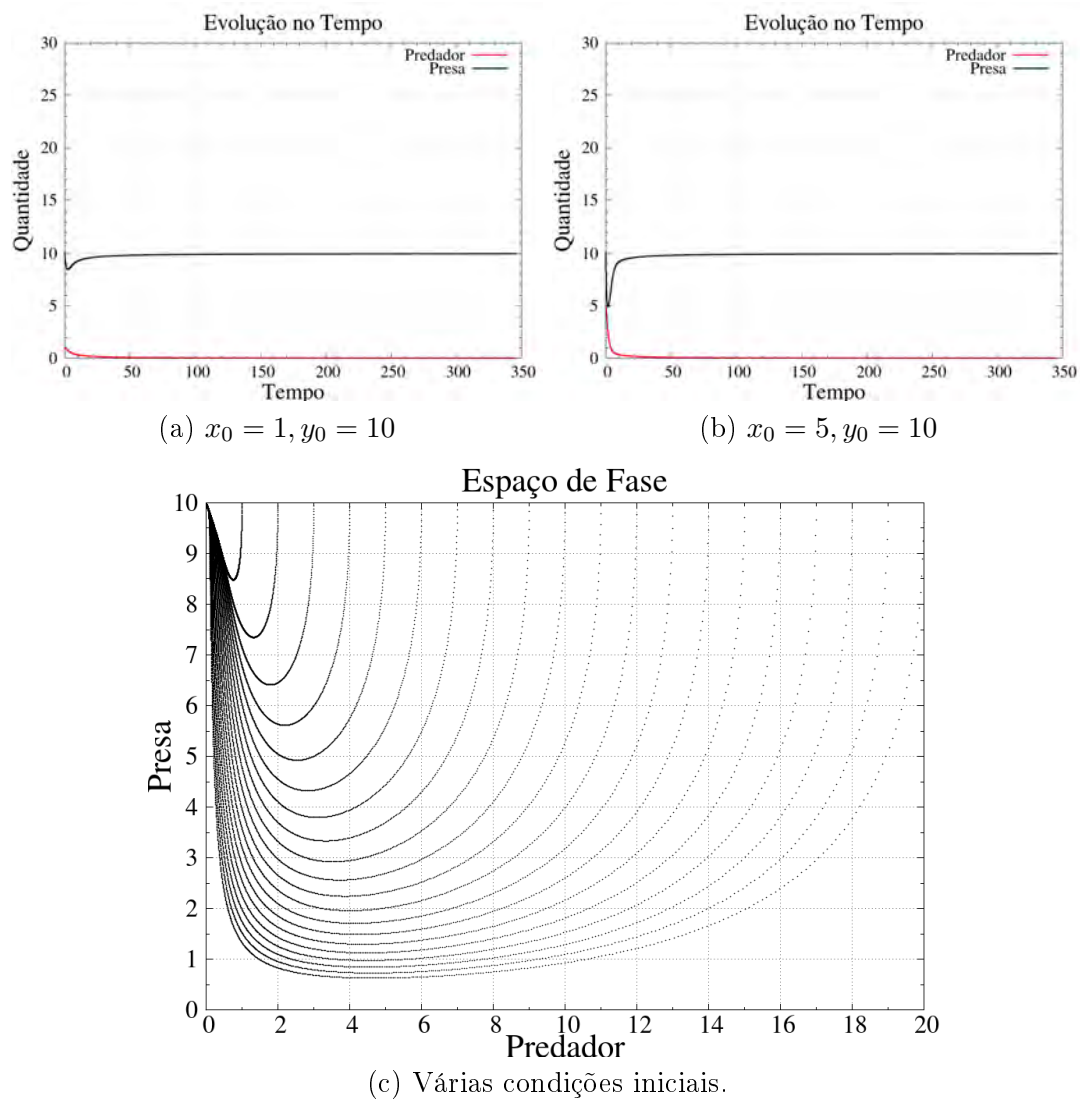


Figura 5.2: Modelo Lotka-Volterra com $c = 0.1$. (a) Evolução no Tempo. (b) Evolução no Tempo. (c) Espaço de fase.

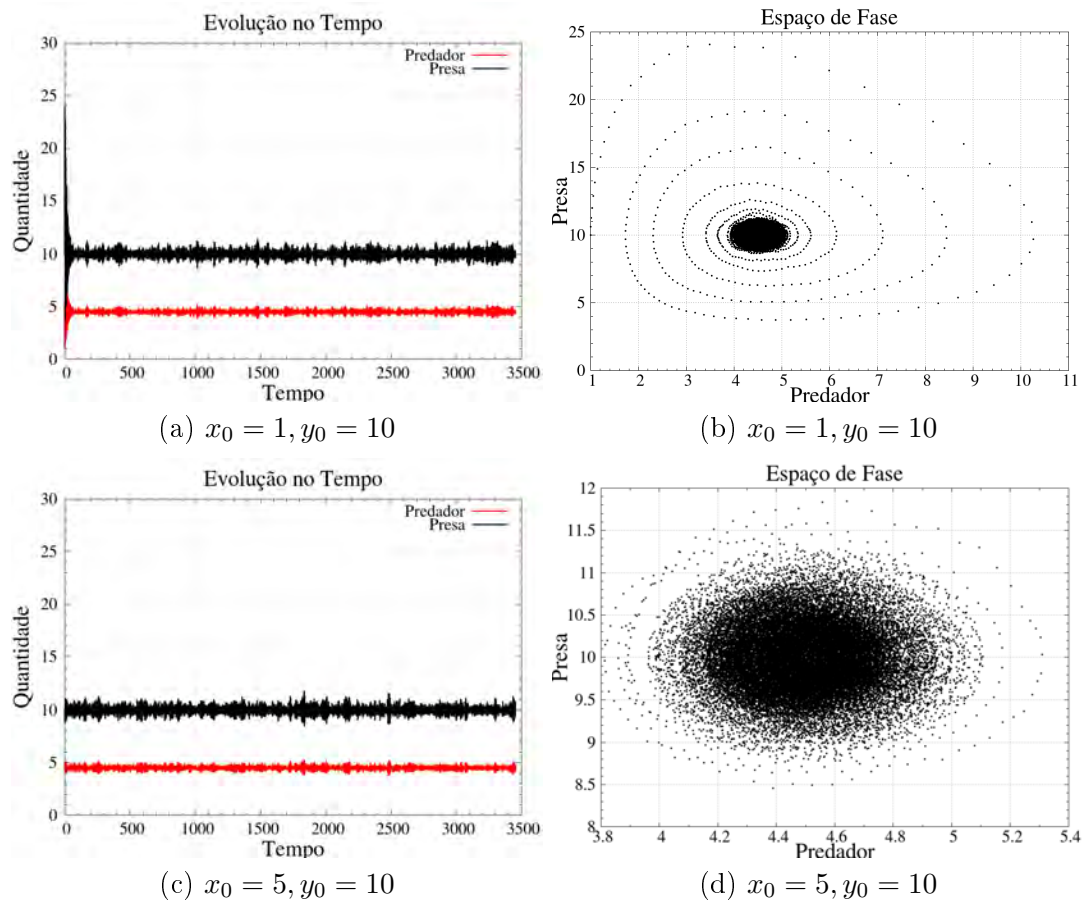


Figura 5.3: Modelo com perturbação randômica e $c = 0.01$ e $A = 0.1$. (a) Evolução no tempo. (b) Espaço de fase. (c) Evolução no tempo. (d) Espaço de fase.

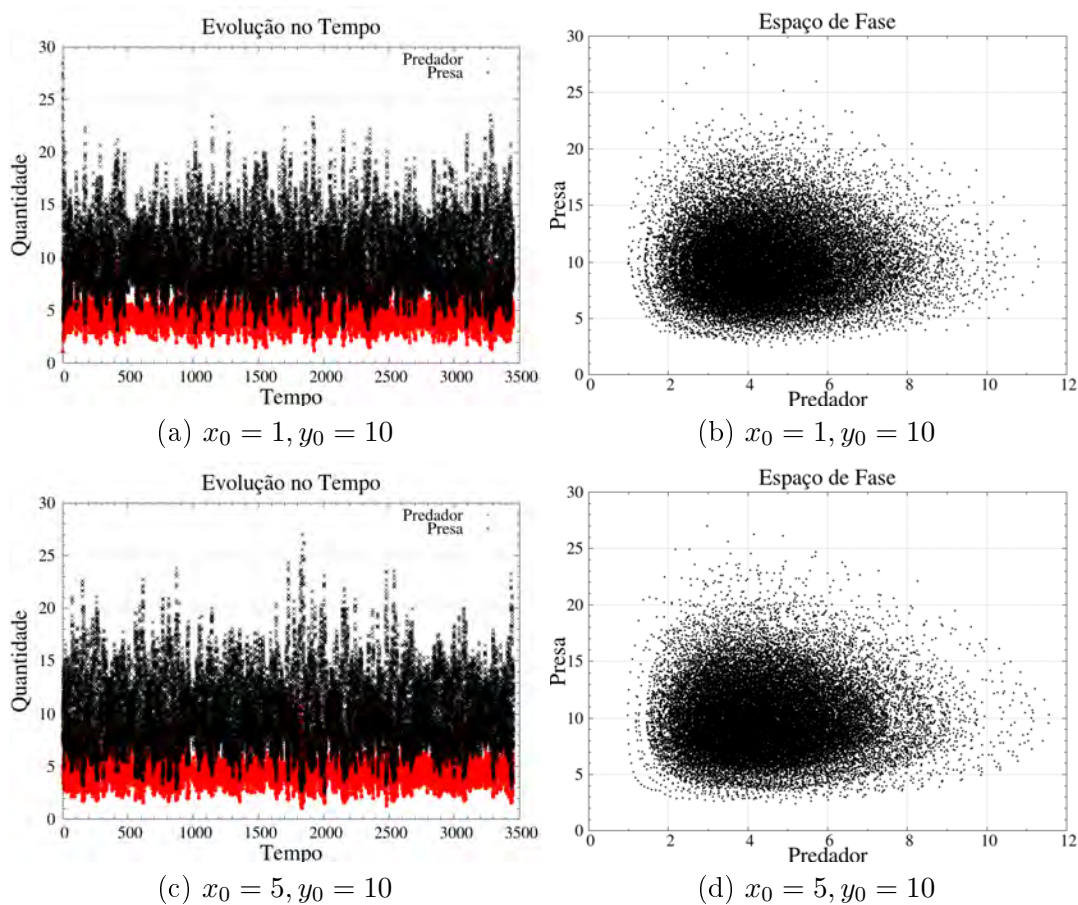


Figura 5.4: Modelo com perturbação randômica e $c = 0.01$ e $A = 0.8$. (a) Evolução no tempo. (b) Espaço de fase. (c) Evolução no tempo. (d) Espaço de fase.

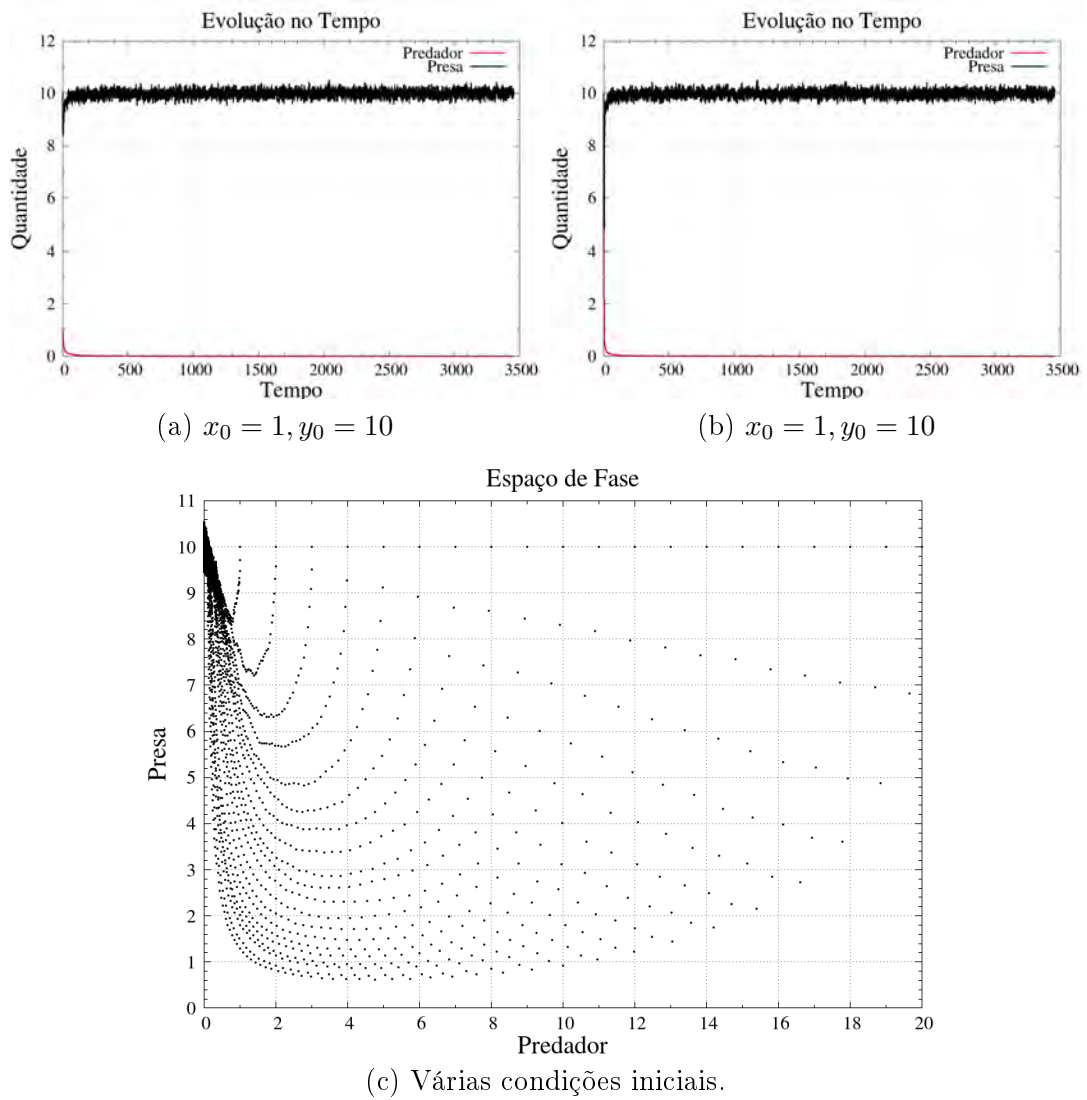


Figura 5.5: Modelo com perturbação randômica e $c = 0.1$ e $A = 0.1$. (a) Evolução no tempo. (b) Evolução no tempo. (c) Espaço de fase.

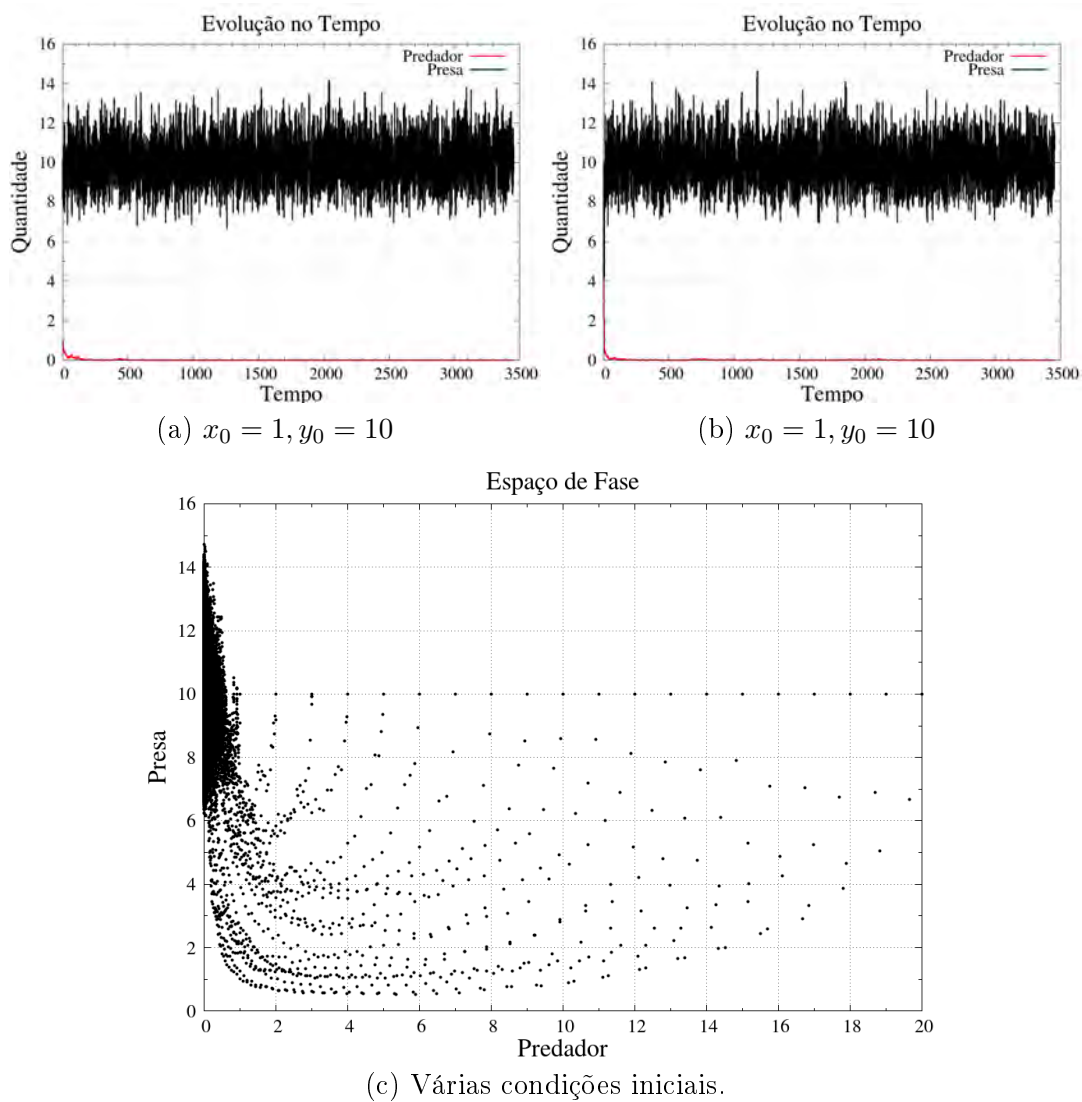


Figura 5.6: Modelo com perturbação randômica e $c = 0.1$ e $A = 0.8$. (a) Evolução no tempo. (b) Evolução no tempo. (c) Espaço de fase.

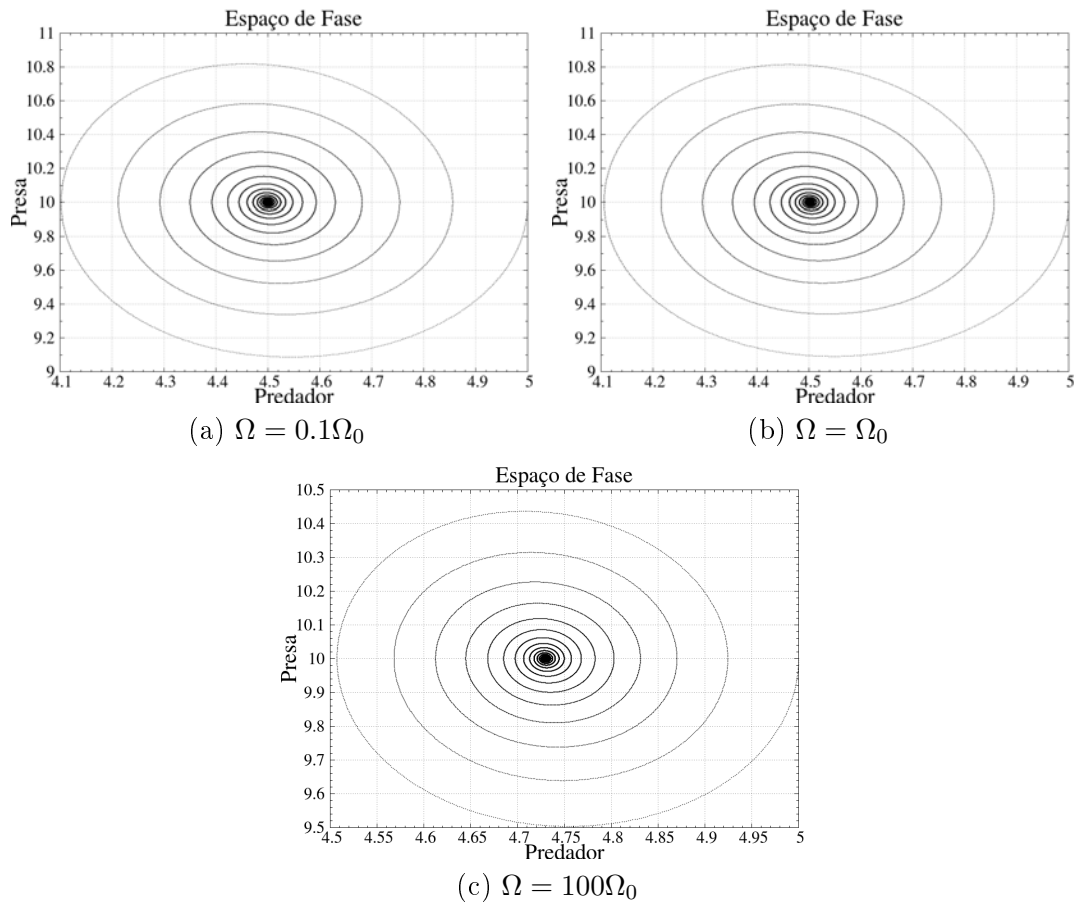


Figura 5.7: Modelo periódico com $c = 0.01$ e $A = 0.1$. (a) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 5, y_0 = 10$.

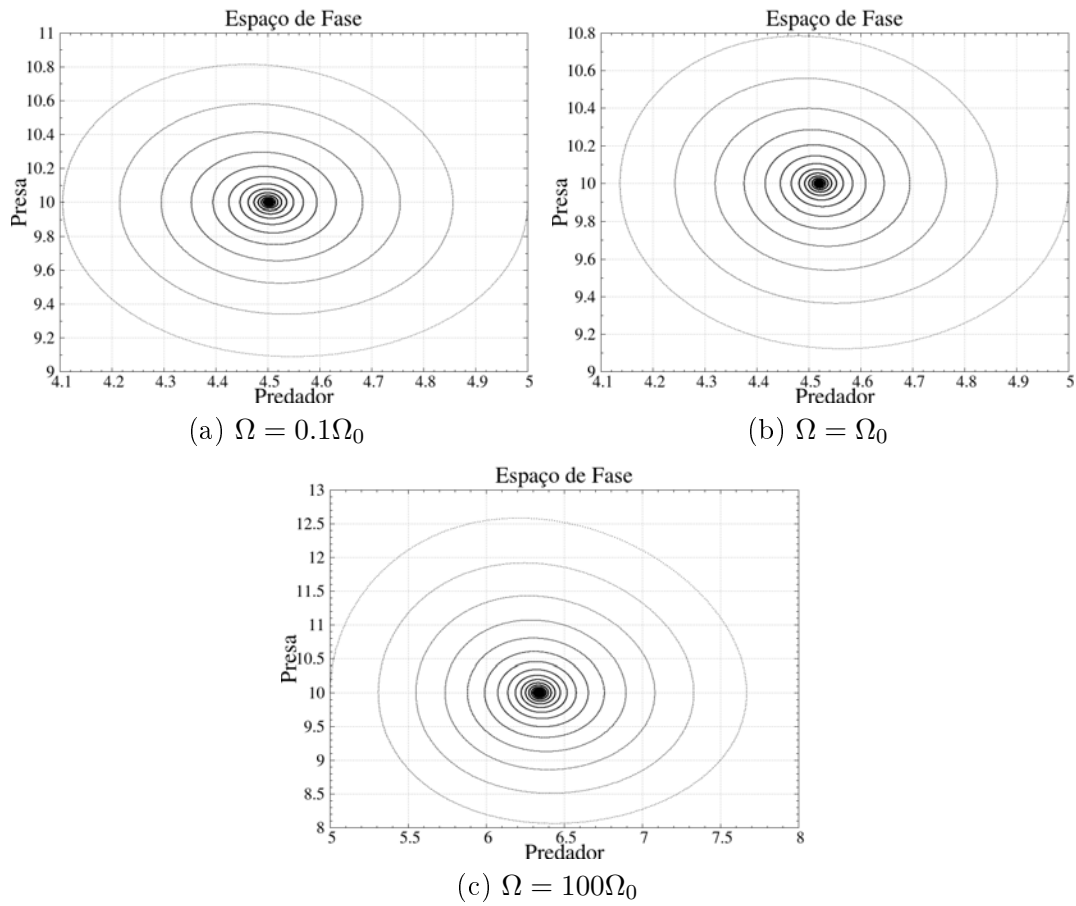


Figura 5.8: Modelo periódico com $c = 0.01$ e $A = 0.8$. (a) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (b) $x_0 = 5, y_0 = 10$. (c) $x_0 = 5, y_0 = 10$.

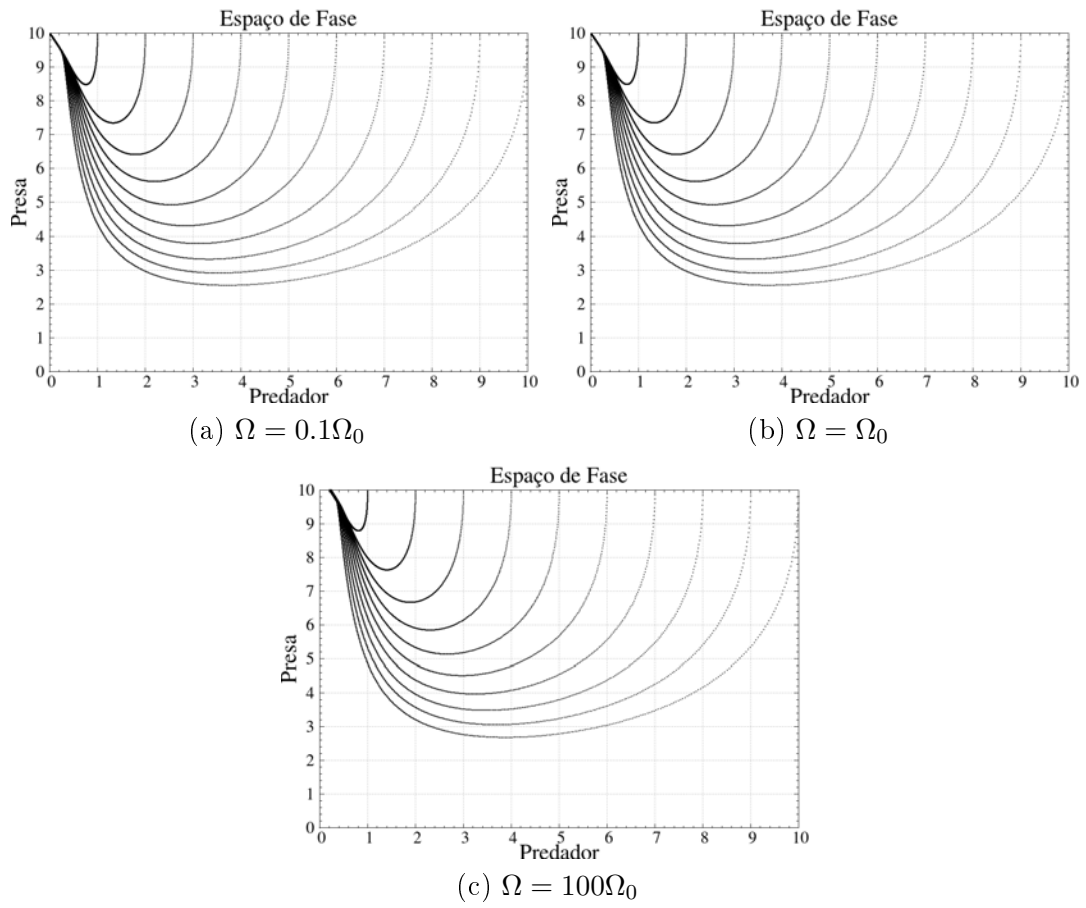


Figura 5.9: Modelo periódico com $c = 0.1$ e $A = 0.1$. (a) Várias condições iniciais. (b) Várias condições iniciais. (c) Várias condições iniciais.

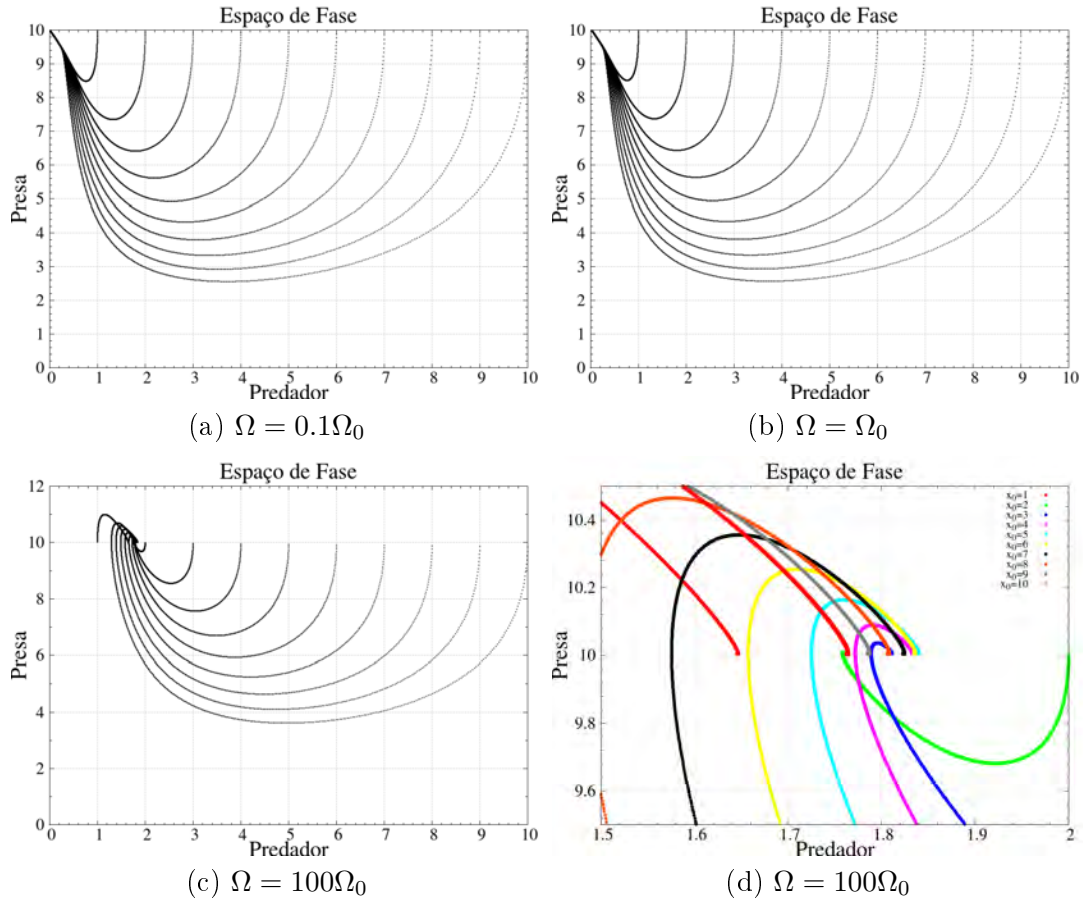


Figura 5.10: Modelo periódico com $c = 0.1$ e $A = 0.8$. (a) Várias condições iniciais. (b) Várias condições iniciais. (c) Várias condições iniciais. (d) Várias condições iniciais e com aumento ao redor dos pontos de equilíbrio.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, conclui-se que as perturbações no crescimento da população da presa, de modo geral, afetam de forma significativa o sistema de Lotka-Volterra, que em sua forma original, é um sistema marginalmente estável, ou seja, aplicando qualquer perturbação, o estado inicial irá se diferenciar do estado final. Desta forma, notamos que nos capítulos onde foram aplicadas as perturbações, formam-se casos de instabilidades ou deslocamento do seu ponto de equilíbrio. Enquanto que adicionando o termo capacitivo para ambas as equações perturbadas, tem-se que é possível manipular este sistema para torná-lo estável, pois observamos que com a inclusão do termo capacitivo, não importa a condição inicial que damos ao sistema, ele sempre convergirá a um ponto. Existem parâmetros, que neste caso, são as frequências e amplitudes das perturbações que aceleram ou retardam o tempo que o sistema Lotka-Volterra irá divergir. De forma óbvia, quanto maior for a perturbação, mais teremos os estados distantes de sua estabilidade. Para uma avaliação mais apurada de como estes parâmetros modificam o sistema, os falaremos de forma mais minuciosa abaixo:

Na perturbação randômica, para duas Amplitudes diferentes do termo randômico, inseriu-se diversas quantidades para a população de predadores, mantendo a população de presas.

- Primeiro caso da Amplitude: $A \ll \beta_0$, $A = 0.1$

A instabilidade mostra-se discreta para tempos curtos, porém a medida que o tempo torna-se mais longo, mais observa-se o comportamento de um sistema caminhando para a instabilidade.

- Segundo caso da Amplitude: $A \lesssim \beta_0$, fazendo $A = 0.8$

Para este caso, a instabilidade mostra-se para um tempo muito mais curto, o sistema em pouco tempo perde completamente a sua estabilidade.

Na perturbação periódica, de forma semelhante a perturbação randômica, a avaliação fora feita para duas Amplitudes diferentes, inserindo-se diversas quantidades e frequências de crescimento da população de predadores, mantendo a população de presas. Para esta perturbação, ficou evidente que a amplitude não fora tão significativa para a perturbação do sistema de Lotka-Volterra. Pois observou-se que tanto para grandes ou pequenas amplitudes, a variável que realmente afetara o sistema de forma concreta fora a frequência. Para frequências próximas ou iguais a frequência inicial, observou-se de forma quase imperceptível um pequeno deslocamento no ponto de equilíbrio, já para o caso de uma frequência muito maior que a frequência inicial, observou-se um deslocamento perceptível do ponto de equilíbrio do sistema.

Introduzindo a capacidade nas equações diferenciais do Modelo Lotka-Volterra, observa-se que todas as condições iniciais convergem para um único ponto de equilíbrio. No caso em que o termo capacitivo assume um baixo valor, tanto o número de predadores como número de presas se tornam constantes. No caso em que o termo capacitivo assume um grande valor, o número de predadores vai a zero e o número de presas vai a uma constante. Para o caso randômico junto ao termo capacitivo, o sistema tende a se estabilizar ao redor da condição de equilíbrio do Modelo Lotka-Volterra, neste caso o amplitude do ruído determina o tamanho da variação em torno do equilíbrio. Para o caso periódico relacionado com o termo capacitivo, para baixos valores de frequência e amplitude o sistema se comporta como o Modelo Lotka-Volterra, para maiores fre-

quências o ponto de equilíbrio do Modelo Lotka-Volterra é deslocado. O desvio maior ocorre quando temos altas amplitudes e frequências, tanto para alto valor quanto para baixo valor capacitivo.

Desta forma, este trabalho é precursor e necessário para construir as apropriadas generalizações do modelo Lotka-Volterra, e estudar assim as condições de estabilidade das novas componentes do modelo quando submetido a termos capacitivos e perturbativos.

Referências Bibliográficas

- Borrelli, R. L. and Coleman, C. S. (1998). *Differential Equations - A Modeling Perspective*. New York: John Wiley.
- Everhart, E. (1985). An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings. *In Dynamics of Comets: Their origin and evolution*, pages 185–202.
- Mundo Estranho. (2003). Por que os Leminguês se atiram no mar?. <http://mundoestranho.abril.com.br/materia/por-que-os-lemingues-se-atiram-no-mar>, acessado dia 02/12/2012, às 13:57h *Editora Abril*, 2003.
- Haemig, P. D. (2011). Leis da Ecologia Populacional. *ECOLOGIA.INFO*, 23.
- R. E. Lagos (2003). Oscilações, Estabilidade e Sistemas Dissipativos. *Apostila IGCE UNESP Rio Claro*, 2003.
- Zill, D. G. and Cullen, M. R. (2008). *Equações Diferenciais*, volume 2. São Paulo: Pearson/Makron Books.