UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

PRISCILA DE OLIVEIRA E SILVA

Métodos para encontrar retas tangentes ao longo da história

Guaratinguetá – SP
2021

Priscila de Oliveira e Silva

Métodos para encontrar retas tangentes ao longo da história

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Licenciatura em matemática.

Orientadora: Profª. Drª Elisangela Pavanelo.

Guaratinguetá – SP
2021

	Oliveira e Silva, Priscila de
O48m	Métodos para encontrar retas tangentes ao longo da história / Priscila de Oliveira e Silva – Guaratinguetá, 2021.
	54 f. : il.
	Bibliografia: f. 50-53
	Trabalho de Graduação em Matemática – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2021.
	Orientadora: Profª Drª Elizangela Pavanelo
	1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática - Pesquisa. 3. Matemática - história. I. Título.
	CDU 51

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

unesp UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

PRISCILA DE OLIVEIRA E SILVA

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE **"GRADUADO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"**

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Profª. Drª Silvia Maria Giuliatti
Coordenadora

BANCA EXAMINADORA:

Profª. Drª Elisangela Pavanelo
Orientadora/UNESP-FEG

Prof. Dr. Antonio Carlos de Souza
UNESP-FEG

Prof. Ms. Anderson Luís Pereira
Membro Externo

Março 2021

dedico este trabalho,
de modo especial, à minha família, por sempre
me apoiar e me dar forças para continuar.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, que esteve sempre presente em minhas orações;

à minha orientadora, *Prof. Drª. Elisangela Pavanelo* que jamais deixou de me incentivar. Sem a sua orientação, dedicação e auxílio, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível;

aos meus pais *Célio Lopes e Clementina Oliveira* que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos;

aos funcionários da Faculdade de Engenharia do Campos de Guaratinguetá pela dedicação e alegria no atendimento;

aos meus amigos *Andressa Nataly, Leandra Oliveira, Paloma Araújo, Giovanna Mariano, Érica Czigel, Higor Soares* e *Gabriela Santos,* que de forma singular e específica me auxiliaram e me apoiaram nessa realização, fazendo os meus dias mais felizes;

à minha amiga *Priscila Santos*, que tive a honra de compartilhar desde os melhores momentos nesses 5 anos, até os mais difíceis, sempre juntas! Uma amizade que a FEG proporcionou e que não tenho dúvida que vai ser para toda a vida;

à todos os professores da graduação que fizeram parte dessa jornada, em especial ao *Antonio Carlos* que esteve presente em todos os anos, uma pessoa incrível que além de todo seu conhecimento excede humildade, com toda certeza uma referência que levarei para a vida.

“Mil cairão ao teu lado, e dez mil, à tua direita, mas tu não serás atingido”.

Salmos 91:7

RESUMO

Este trabalho teve como intuito apresentar um estudo histórico dos diferentes métodos de se encontrar a reta tangente a uma curva, passando por um ponto qualquer. Para isso, ao final deste estudo, elaboramos uma apresentação, destacando a história desse conceito, para alunos da disciplina de História da Matemática, do curso de Licenciatura da Unesp de Guaratinguetá. Posterior à apresentação, disponibilizamos um questionário a eles que poderia nos proporcionar condições de discutir, "Modos pelos quais os alunos compreendem o processo histórico da matemática, no que refere ao estudo da reta tangente?", questão norteadora do nosso trabalho. Esta pesquisa se caracteriza como qualitativa, desenvolvida a partir de um estudo de caso, em que a análise dos dados foi realizada por meio da metodologia fenomenológica. Os dados foram obtidos a partir das respostas desses alunos a um formulário elaborado no aplicativo *Google Forms*. O movimento de análise nos conduziu à constituição de duas categorias: uma que destaca que os alunos compreendem esse processo histórico a partir da construção do conceito matemático; e outra que aponta essa compreensão a partir de uma evolução do conceito matemático. Entendemos que os alunos expressam argumentos de que os processos de descoberta e de desenvolvimento se constituem como caminhos importantes para a compreensão de um conceito matemático.

PALAVRAS-CHAVE: História da Matemática. Reta tangente. Construção do conceito. Evolução do conceito.

ABSTRACT

The objective of this work was to present a historical study of the different methods of finding the tangent line to a curve through any point. To this end, at the end of this study, we prepared a presentation, highlighting the history of this concept, for students of the History of Mathematics course, at the Unesp (São Paulo State University) in Guaratinguetá. After the presentation, we made a questionnaire available to them that could provide us with conditions to discuss, "Ways in which students understand the historical process of mathematics, regarding the study of the tangent line?", guiding question of our work. This research is characterized as qualitative, developed from a case study, in which data analysis was performed through phenomenological methodology. The data were obtained from the answers of these students to a form prepared in the Google Forms application. The analysis movement led us to the constitution of two categories: one that highlights that students understand this historical process from the construction of the mathematical concept; and another that points this understanding from an evolution of the mathematical concept. We understand that students express arguments that the processes of discovery and development are important paths to understanding a mathematical concept.

KEYWORDS: History of Mathematics. Tangent line. Construction of the concept. Evolution of the concept.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Método de Descartes..26
Figura 2- Método de Fermat...27
Figura 3- Método de Roberval 29
Figura 4- Método de Torricelli 30
Figura 5- Método de Barrow 31
Figura 6- Método de Pascal..34
Figura 7- Método de Leibiniz...36
Figura 8- Reta tangente à curva y=f(x)..39

LISTA DE QUADROS

Tabela 1- Análise Ideográfica 42
Tabela 2- Análise Nomotética..45

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 11
2. METODOLOGIA DE PESQUISA 13
2.1 PESQUISA QUALITATIVA 13
2.2 ESTUDO DE CASO COMO ABORDAGEM QUALITATIVA 15
3. MÉTODOS PARA ENCONTRAR A RETA TANGENTE A UMA CURVA DESENVOLVIDOS AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA 18
3.1 18
3.2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA 20
3.2. MÉTODOS DE EUCLIDES, ARQUIMEDES E APOLÔNIO 24
3.3 MÉTODO DE RENÉ DESCARTES (1596-1650) 25
3.4 MÉTODO DE PIERRE DE FERMAT (1607- 1665) 26
3.5 MÉTODO DE GILES PERSONNE DE ROBERVAL (1602-1675) 28
3.6 MÉTODO DE EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647) 29
3.7 ISAAC BARROW (1630-1677) 30
3.8 ISAAC NEWTON (1643-1727) 31
3.9 GOTTFRIED WIHELM LEIBNIZ (1646- 1716) 34
3.10 MÉTODO ATUAL 36
4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS: UM CAMINHO PELA INTERPRETAÇÃO FENOMENOLÓGICA 39
4.1 DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS ABERTAS 45
5. CONSIDERAÇOES FINAIS 48
REFÊRENCIAS 50
ANEXO A- QUESTIONÁRIO 53

1. INTRODUÇÃO

Em consonância com Mendes e Chaquiam (2016), nas últimas décadas, houve um aumento no desenvolvimento de pesquisas relacionadas às histórias de ciências em geral, em especial à História da Matemática. Para os autores, isso possui potencial para proporcionar um ambiente de melhoria no processo de ensino, consequentemente na aprendizagem de vários temas da matemática.

Essa melhoria, para esses autores, é constituída através de uma combinação do uso da História da Matemática com outros recursos didáticos e metodológicos. E isso, por sua vez, proporciona possibilidades de "[...] buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 80)".

Além disso, segundo os autores "[...] a História da Matemática, com seu enfoque epistemológico e metodológico, pode ser um fator contributivo para a formação de professores de Matemática [...]". (ARAMAN; BATISTA, 2017.p.385). Dessa forma, compreendemos que a inserção de conteúdos históricos e a sua evolução no ensino, pode possibilitar uma melhora do aprendizado de conceitos matemáticos, além de contribuir para a formação geral do indivíduo.

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), ao estudar um determinado conceito a partir de uma abordagem histórica, abrem-se possibilidades, facilitando para que o professor compreenda como aquele conceito foi sendo desenvolvido ao longo dos anos; quais são os elementos conceituais necessários para o seu entendimento; os pontos de maior dificuldade; sua importância tanto no passado quanto na atualidade; e quais eram as necessidades que levaram o homem até o desenvolvimento do conceito.

Nessa perspectiva, este trabalho, de cunho qualitativo, desenvolvido a partir de um estudo de caso, tem como objetivo geral apresentar um estudo acerca dos diferentes métodos de se encontrar a equação da reta tangente à uma curva, passando por um ponto qualquer, desenvolvidos ao longo da história.

A análise se deu a partir de uma metodologia fenomenológica, norteada pela seguinte interrogação: "Modos pelos quais os alunos compreendem o processo histórico da Matemática, no que refere ao estudo da reta tangente?"

Apresentamos no segundo capítulo os pressupostos teóricos relacionados à metodologia de pesquisa e abordagem escolhida, que se adequam aos objetivos e à característica do trabalho realizado.

Já, no terceiro capítulo, trazemos uma revisão bibliográfica com os principais métodos desenvolvidos para encontrar reta tangente à uma curva, desenvolvidos ao longo da História, juntamente com uma contextualização histórica desses métodos.

No capítulo apresentamos o movimento de análise dos dados produzidos a partir de respostas individuais a um formulário, com perguntas dissertativas, desenvolvido no *Google Forms*. Após a análise são apresentadas as discussões das categorias abertas constituídas: *construção* e *evolução do conceito matemático*.

E, por fim, trazemos as considerações finais a respeito da pesquisa e finalizamos com as referências bibliográficas.

2. METODOLOGIA DE PESQUISA

Neste capítulo, apresentaremos um estudo acerca da opção metodológica assumida nesta pesquisa, em consonância com os objetivos e pergunta norteadora do trabalho.

2.1 PESQUISA QUALITATIVA

Podemos considerar que pesquisa é uma forma do pesquisador procurar compreender algo que o inquieta, uma interrogação. Nesse sentido, "pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada". (BICUDO, 1993, p. 18). Pesquisar é o mesmo que "ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e, andar outra vez e outra ainda [...]". (MARTINS *apud* BICUDO, 1993, p.24).

O pesquisador se depara com algumas possibilidades para trilhar seu caminha investigativo, que é diversificado, pois há diferentes formas de interpretações em relação ao fenômeno pesquisado, podendo optar por diferentes abordagens metodológicas para o desenvolvimento e realização de sua pesquisa.

As pesquisas podem ser de cunho qualitativo ou quantitativo. De acordo com Richardson (1989, p. 70), "esses métodos se diferenciam não só pela sistemática pertinente a cada um deles, mas, sobretudo pela forma de abordagem do problema", ou seja, o método de pesquisa depende do estudo que se deseja realizar e da interrogação que o acompanha.

A Pesquisa Qualitativa, segundo Prestes (1989), refere-se às descrições detalhadas sobre comportamentos, pessoas, eventos e situações que podem ser observáveis. Os questionamentos são refinados e refletidos ao longo de todo o processo investigativo, para se transformarem em hipóteses de trabalho. Ainda, de acordo com a autora, a metodologia qualitativa busca precisão nas análises, mantendo equilíbrio entre o enfoque, a precisão e o alcance, contribuindo de forma significativa para a pesquisa educacional sendo seu objetivo fazer uma intervenção de fato, buscando entender as comunidades e suas necessidades.

De acordo com Bicudo (2012), a pesquisa qualitativa

> é um modo de proceder que permite colocar em relevo o sujeito do processo, não olhado de modo isolado, mas contextualizado social e culturalmente; mais do que isso e principalmente, de trabalhar concebendo-o como já sendo sempre junto ao mundo e, portanto, aos outros e aos respectivos utensílios dispostos na circunvizinhança existencial, constituindo-se, ao outro e ao mundo em sua historicidade. (BICUDO, 2012, p.17).

A mesma autora destaca que nessa abordagem de pesquisa se trabalha com a qualidade do objeto/observado ou fenômeno/percebido dependendo da postura assumida pelo pesquisador.

De acordo com Suassuna (2008) a pesquisa qualitativa responde a questões particulares, foca um nível de realidade que não pode ser quantificado trabalhando com um mundo de múltiplos significados, motivos, crenças, valores e atitudes. Para a autora em uma abordagem qualitativa, o pesquisador propõe interrogações que vão sendo discutidas durante a investigação, formulando e reformulando as hipóteses, para compreender as mediações e correlações entre os diversos objetos de reflexão e análise.

Neste estudo, que teve como objetivo apresentar diferentes métodos para encontrar a reta tangente a uma curva ao longo da história, percorrendo o caminho histórico, até chegarmos ao conceito de derivada que aprendemos atualmente optamos pela abordagem de pesquisa qualitativa.

Com isso entendemos que, as pesquisas que assumem uma metodologia qualitativa, levam em consideração diversos fatores, como por exemplo, buscar uma maior precisão em suas análises, em que as pessoas envolvidas e o contexto possuam um papel essencial no ato de pesquisar, possibilitando ao pesquisador apreender especificidades que a pesquisa de cunho quantitativo não proporciona.

Refletindo sobre a pesquisa na Educação Matemática Bicudo (1993) aponta que,

> A pesquisa em Educação Matemática não é uma pesquisa em Matemática, nem é uma pesquisa em Educação, embora trate de assuntos pertinentes a ambas, trabalhe com a Matemática e utilize-se de procedimentos concernentes ao modo de pesquisar próprios da Educação. (BICUDO, 1993, p.19).

Para a autora a Educação e a Matemática dialogam entre si, buscando juntas o conhecimento desejado, sendo assim “[...] não podem ser caladas, nem ser tomadas isoladamente ou uma sobrepor-se à outra”. (BICUDO, 2012, p.25).

Conforme Bicudo (1993), na Educação Matemática podem surgir preocupações “com o compreender a Matemática, com o fazer Matemática, com as interpretações elaboradas sobre os significados sociais, culturais e históricos da Matemática”. (BICUDO, 1993, p.19-20). Desta forma, as pesquisas elaboradas no campo da Educação Matemática trabalham em torno dessas preocupações.

Para Bicudo 2012 a pesquisa em Educação Matemática permite a compreensão da Matemática, o modo como ela é constituída e os seus significados no mundo, ajudando na compreensão da matemática, em si, e auxiliando na Educação por meio da ação político-pedagógica. Pesquisar em Educação Matemática é trabalhar com os conceitos de Educação e

Matemática de maneira que eles se entrelacem formando um elo.

Nesta pesquisa, trabalhamos com a História e com a Matemática, pois o nosso objetivo foi identificar e estudar os diferentes métodos de se encontrar a reta tangente a uma curva, passando por um ponto qualquer no decorrer da História, além de que depois deste estudo foi realizado uma discussão com os alunos da disciplina de História da Matemática para identificar a compreensão dos mesmos em relação ao processo histórico desse conceito.

2.2 ESTUDO DE CASO COMO ABORDAGEM QUALITATIVA

As pesquisas qualitativas podem ser desenvolvidas por meio de diferentes abordagens, o estudo de caso é uma delas. Para Freitas e Jabbour (2011) o propósito de um estudo de caso é reunir informações detalhadas e sistemáticas sobre um fenômeno.

Os autores abordam que o estudo de caso,

> É sustentado por um referencial teórico, que orienta as questões e proposições do estudo, reúne uma gama de informações obtidas por meio de diversas técnicas de levantamento de dados e evidências. (MARTINS, 2008 apud FREITAS; JABBOUR, 2011, p.11).

Para Ponte (2006) o estudo de caso se refere a

> Uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefatos. (PONTE, 2006, p.7).

O estudo de caso visa conhecer uma determinada entidade, sendo ela uma pessoa, uma instituição, um curso ou qualquer outra unidade social com o intuito de compreender em profundidade "o 'como' e os 'porquês' dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador" (PONTE, 2006, p.2).

De acordo com o autor, na Educação Matemática, os estudos de caso têm sido utilizados para investigar questões de aprendizagem dos alunos bem como do conhecimento e das práticas profissionais de professores, programas de formação inicial e contínua de professores, projetos de inovação curricular, novos currículos, entre outras (questões).

Um caso funciona, sobretudo, como um exemplo, podendo ser pela negativa, onde mostra um conjunto de tópicos perturbadores de uma realidade que se acreditava ser bem diferente, evidenciando como um dado programa ou situação constituem um fracasso em relação aos objetivos propostos mostrando o porquê, ou seja, trata-se de um contraexemplo, que nega aquilo que era dado como certo (PONTE, 2006).

Um determinado caso pode também ser um exemplo pela positiva, expondo "como certa realidade que nunca tinha sido vista, pode afinal existir em certas condições, ou mostrando como funciona uma situação particularmente bem sucedida" (PONTE, 2006, p.4).

Existe também o caso excepcional, pela sua raridade, em que a exploração proporciona um melhor conhecimento dos casos mais comuns. É a estratégia do estudo do "caso raro", como exemplifica Damásio (1995 *apud* PONTE, 2006).

Um caso pode ser ainda, relativamente neutro, ou seja, nem totalmente positivo, nem totalmente negativo. "Nesta situação, o caso tem interesse na medida em que nos revela algo de novo e surpreendente relativamente ao objeto de estudo". (PONTE, 2006, p.5).

Os estudos de casos podem ter diversos propósitos. Como trabalho de investigação, podem ser essencialmente exploratórios, com intuito de obter informação preliminar acerca do respectivo objeto de interesse. Podem ser fundamentalmente descritivos, tendo como objetivo principal descrever, ou seja, dizer simplesmente "como é" o caso estudado. E, também, podem ser analíticos, com o propósito de problematizar o seu objeto, construindo ou desenvolvendo uma nova teoria ou confrontá-la com teoria já existente, conforme Ponte (2006).

Um estudo de caso pode seguir uma de duas perspectivas essenciais sendo elas, a perspectiva interpretativa, na qual procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes ou uma perspectiva pragmática, que tem como intuito fundamental proporcionar uma perspectiva global, completa e coerente do objeto de estudo, através do ponto de vista do investigador (PONTE, 2006).

De modo geral, um estudo de caso começa com hipóteses de trabalho preliminares, que vão sendo reformuladas à medida que a investigação avança.

Assim, a pesquisa desenvolvida neste trabalho é caracterizada como qualitativa, pois teve como objetivo: 1) realizar um estudo sobre os diferentes métodos de se encontrar a equação da reta tangente desenvolvidos ao longo da história; 2) elaborar uma apresentação desse estudo, destacando aspectos históricos desse conceito; 3) elaborar um questionário e propor a alunos de um curso de Licenciatura em Matemática (disciplina de História da Matemática) de modo que nos permita explicitar os modos pelos quais os alunos compreendem o conceito matemático de retas tangentes ao discutir os aspectos históricos desse conceito.

O estudo de caso se caracteriza por apresentarmos o estudo realizado sobre a história dos métodos de encontrar a reta tangente a uma curva aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, especificamente, na disciplina de

História da Matemática, com o objetivo de discutirmos como eles compreendem esse processo histórico.

De acordo com as definições de Ponte (2006), essa pesquisa se caracteriza como um estudo de caso neutro, a partir de uma investigação exploratória, pois tem o intuito de mostrar algo novo, de acordo com a análise das percepções dos alunos da turma e obter informações do que foi estudado.

3. MÉTODOS PARA ENCONTRAR A RETA TANGENTE A UMA CURVA DESENVOLVIDOS AO LONGO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Realizar um estudo sobre os diferentes métodos para determinação da reta tangente a uma curva, ao longo da História da Matemática, é um dos objetivos específicos deste trabalho. Desta forma, faz-se necessário apresentar a relevância da História da Matemática como metodologia de ensino da Matemática, identificando historicamente o desenvolvimento deste conceito, proporcionando um contexto para sua compreensão.

3.1

Pode-se considerar que a história é estruturada a partir de um conjunto de conhecimentos desenvolvidos pela sociedade no passado e a sua evolução ao longo dos anos. Neste sentido, “[...] a sociedade humana produz cultura e é a partir dessa cultura produzida que será possível extrair histórias”. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.14).

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016), nas últimas décadas houve um aumento no desenvolvimento de pesquisas relacionadas às histórias de ciências em geral, em especial a História da Matemática, que vem promovendo um ambiente de melhoria tanto no processo de ensino, quanto na aprendizagem de vários temas da Matemática.

Essa melhoria para os autores é constituída através de uma combinação do uso da História da Matemática com outros recursos didáticos e metodológicos. Com isso, proporciona possibilidades de “[...] buscar uma nova forma de ver e entender a Matemática, tornando-a mais contextualizada, mais integrada às outras disciplinas, mais agradável, mais criativa, mais humanizada”. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.80).

Para Lopes e Ferreira (2013) há um maior interesse, tanto por parte do professor quanto por parte dos alunos ao se trabalhar com História da Matemática, pois relatam que as aulas se tornam mais dinâmicas e interessantes.

No entanto, conforme Mendes e Chaquiam (2016) retratam, há também professores e alunos que entendem que a História da Matemática não contribui para a compreensão da própria Matemática, e se torna nesse sentido um desperdício de tempo e esforço. Ainda segundo esses autores, podemos encontrar em Vianna (1998) uma lista de questões levantadas por diferentes autores contra a utilização da História da Matemática como recurso didático, sendo algumas delas:

> i.O passado da matemática não é significativo para a compreensão da matemática atual;
> ii. Não há literatura disponível para uso dos professores de Primeiro e Segundo Graus;
> iii. Os poucos textos existentes destacam os resultados, mas nada revelam sobre a forma como se chegou a esses resultados;
> iv. O caminho histórico é mais árduo para os estudantes que o caminho lógico e

> v. O tempo dispendido no estudo da História da Matemática deveria ser utilizado para aprender mais matemática. (VIANNA, 1998, p. 3, apud MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.81).

De acordo com Mendes e Chaquiam (2016) esses argumentos, de certa forma, ainda influenciam na atualidade, apesar de terem sidos apresentados a mais de duas décadas, eles se mantêm como obstáculos às iniciativas pedagógicas relacionadas ao trabalho envolvendo a História da Matemática em sala de aula.

Mendes e Chaquiam (2016), para contrapor as objeções de Vianna (1998) apresentam argumentos que defendem o uso da História da Matemática, expondo que seu estudo contribui para:

> i. Satisfazer nosso desejo de saber como os conceitos da matemática se originaram e desenvolveram;
>
> ii. O ensino e a pesquisa mediante o estudo dos autores clássicos, o que vem a ser uma satisfação em si mesmo;
>
> iii. Entendermos nossa herança cultural através das relações da matemática com as outras ciências, em particular a física e a astronomia; e também com as artes, a religião, a filosofia e as técnicas artesanais;
>
> iv. O encontro entre o especialista em Matemática e profissionais de outras áreas científicas;
>
> v. Oferecer um pano de fundo para a compreensão das tendências da educação matemática no passado e no presente e
>
> vi. Ilustrar e tornar mais interessantes o ensino da matemática. (VIANNA, 1998, p. 8, apud MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.82).

Desta maneira podemos entender que o uso de História da Matemática está ligado a reconhecer a Matemática como uma criação humana. Nesta perspectiva, em consonância com D'Ambrósio (1999), acreditamos que,

> as ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as ideias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber. (D'AMBROSIO, 1999, p. 97, apud MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.82).

Todos esses pontos citados pelos autores fazem referência ao uso da História da Matemática como recurso didático tanto no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior. Ao que se refere a este último, os autores Mendes e Chaquiam (2016) concordam com

Ponte (2000) no sentido de que a formação do licenciando deve ser desenvolvida por uma sólida formação ética, cultural, pessoal e social, além de:

> [...] trabalhar segundo metodologias de ensino e de aprendizagem diversificadas, de modo a desenvolver uma variedade de conhecimentos, de capacidades, de atitudes e de valores. Esta exposição a diferentes métodos também funciona como um mecanismo de aprendizagem. (PONTE, 2000, p. 15, apud MENDES; CHAQUIAM,2016, p.82)

Ademais, os autores destacam que a História da Matemática na formação didática e conceitual do professor serve para

> [...] dar suporte para a disciplina de formação conceitual e epistemológica na licenciatura em matemática e tem como característica a sua organização sob três enfoques: história dos tópicos matemáticos; história da Matemática e história da Educação Matemática (MENDES, 2013, p. 70, apud MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.84).

Nessa perspectiva, de acordo com Mendes e Chaquiam (2016), a história possibilita que o futuro professor perceba que a Matemática se modifica ao longo do tempo devido à interferência da cultura, da técnica e não exclusivamente devido às razões de ordem lógica.

Este método de conduzir as atividades de ensino de Matemática é fundamental para

> [...] esclarecer os aspectos formativos, informativos e utilitários da matemática, principalmente no sentido de conduzir os estudantes ao acervo cultural da matemática, com a finalidade de desenvolver seu interesse pelo assunto e estimular a preservação dessa memória intelectual humana. (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p.18).

Nessa perspectiva, compreendemos que a inserção de conteúdos históricos e a sua evolução no ensino, pode possibilitar uma melhoria do aprendizado de conceitos e ideias, além de contribuir para a formação geral do indivíduo.

3.2 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Segundo Roque e Carvalho (2012), o século XVII foi marcado pela consciência de que o desenvolvimento técnico poderia melhorar a vida dos homens, mesmo que esta visão não tenha sido inaugurada naquele momento. Foi nesse período que o Cálculo começa a ser estruturado, tendo como pressuposto que questões essenciais ao seu desenvolvimento surgiram há séculos antes dessa época.

A Matemática passa por constantes transformações ao longo da História no decorrer deste século, principalmente na geometria, com a intervenção de métodos algébricos e infinitesimais.

O desenvolvimento do que chamamos hoje de “geometria analítica” se deu principalmente por meio das mudanças de Rene Descartes (1596-1650) e de Pierre de Fermat (1601-1665) (Roque e Carvalho 2012).

Para Roque e Carvalho (2012), a geometria era o principal domínio da Matemática na época e todos que quisessem aprender ciência deveriam começar pelos Elementos de Euclides ou algo análogo. Entretanto pouco a pouco foi crescendo a consciência de que grande parte do conhecimento geométrico devia servir para aplicações, desde as mais práticas até as mais abstratas.

Conforme esses autores, o pensamento da época se associava ao estudo quantitativo dos fenômenos, sendo assim em consenso com o ideal do seu tempo, Descartes defendia que o pensamento não deveria se dedicar a compreender todos os tipos de coisas, mas somente aquelas que são passiveis de quantificação, em que as deduções lógicas que permitem passar de uma proposição a outra devem ser substituídas por relações entre coisas quantificáveis, traduzidas por equações.

De acordo com Roque e Carvalho (2012), para muitos pensadores, as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de estabelecer uma certeza, mas deviam, sobretudo, esclarecer a natureza do problema e propor métodos para resolvê-lo. Devido a isso a demonstração por absurdo era rejeitada. Com isso os objetos geométricos passaram a serem vistos com outros olhos, pois podiam ser úteis na resolução de problemas práticos.

Segundo estes autores pode se dizer que a época foi marcada por uma concepção geral das curvas, em que não se limitava ao estudo de curvas particulares, ampliando o universo dos objetos geométricos pela introdução de curvas que descrevem movimentos ou são expressas por equações algébricas.

De acordo com esses autores, a “exatidão” dos procedimentos empregados em geometria foi redefinida por Descartes. Foram admitidas técnicas algébricas, ao invés de construções geométricas na definição de curvas, objeto central na geometria. Na segunda metade do século XVII que apareceram os efeitos desta mudança e o trabalho com curvas, incluindo a busca de tangentes e áreas, incentivando o desenvolvimento dos métodos infinitesimais.

Para Roque e Carvalho (2012), pensadores da época, incluindo Leibniz, defendiam suas práticas como uma arte da invenção, dando menos importância aos critérios de demonstrações, sobrepondo os que as ferramentas permitiam obter de novo, para que a Matemática pudesse se libertar dos padrões gregos, associados ao cânone euclidiano.

De acordo com esses autores, os métodos analíticos de Descartes e Fermat motivaram o estudo das propriedades aritméticas de séries infinitas, principalmente, por John Wallis e James

Gregory. Estes pesquisadores resolveram um grande número de problemas, como encontrar a reta tangente à curva, calcular quadraturas ou retificar curvas, tendo grande influência sobre Newton e Leibniz.

Para Roque e Lima (2012), antes de Newton e Leibniz os matemáticos já tinham enorme conhecimento sobre o modo de resolver problemas específicos de cálculos infinitesimais, no entanto não reconheciam a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas.

Segundo eles já no fim deste século, o conceito de curva recobre três concepções: a curva como expressão algébrica, eventualmente infinita; a curva como trajetória de um ponto em movimento; e a curva como polígono com um número infinito de lados. As três concepções desempenham um papel central no desenvolvimento dos métodos infinitesimais, sendo Leibniz um dos protagonistas desta mudança.

Conforme Roque e Carvalho (2012), Leibniz ao ler *La Géometrie* de Descartes em 1673, achou o método de tangentes do francês restritivo e complicado, além de que este método não se aplicava para todas as curvas. Com isso umas das grandes contribuições de Leibniz foi estender o domínio das curvas para além das algébricas.

Em suma para esses autores, o principal objeto de estudo do século XVII, era o desenvolvimento de métodos para resolver problemas sobre curvas geométricas, como a de encontrar a tangente, calcular a área sob uma curva e achar comprimentos de curvas ou velocidades de pontos se movendo sobre uma curva, ou seja, problemas de natureza geométrica.

O texto "A Origem do conceito de derivada de uma função", contido na página "Só Matemática", menciona que a concepção de função atualmente pode ser considerada simples. No entanto, é resultado de uma lenta e longa evolução histórica iniciada na antiguidade, época em que este conceito não estava claramente definido, uma vez que as relações entre as variáveis apareceram de forma implícita e eram descritas verbalmente ou por meio de um gráfico. Esse mesmo texto ainda aponta que:

- No século XVII, Descartes e Pierre Fermat introduziram as coordenadas cartesianas, facilitando o estudo de curvas já conhecidas e permitindo a criação de outras novas, tornando possível transformar problemas geométricos em problemas algébricos e estudar analiticamente as funções, como já dito anteriormente.

- Foi com o estudo dessas funções que Fermat observou as limitações do conceito clássico de reta tangente que, segundo Haveroth, Figueiredo e Aguiar (2013), teve seu estudo iniciado na Grécia antiga com Euclides, Apolônio e Arquimedes. O primeiro registro formal mais antigo é a definição de tangente contida no terceiro livro de "Os Elementos" de Euclides, no qual ela aparece como sendo a reta que toca o círculo de modo que não o corta ao ser prologada.

- Estas limitações levaram a dificuldades que ficou conhecida na História da Matemática como o “Problema da Tangente”, estagnado durante séculos, ressurgindo apenas no século XVII com os franceses Descartes e Fermat.[1]

Segundo Ferreira, Zuin e Oliveira (2017), o Cálculo se desenvolveu conforme uma combinação de problemas e teorias, tendo o modelo geométrico como influência direta no seu desenvolvimento, visando que a diferenciação foi desenvolvida através de problemas relacionados à construção de retas tangentes à uma determinada curva e de questões sobre máximos e mínimos, já a integração se desenvolveu a partir de problemas de quadraturas de curvas, ou seja, determinação de áreas de regiões limitadas por uma curva, eixos e ordenadas.

Ainda de acordo com esses autores (*apud*, BARON 1985), os problemas da tangente e das quadraturas foram estudados separadamente durante séculos, se relacionando apenas no século XVII, através do que agora conhecemos por Teorema Fundamental do Cálculo, no qual a diferenciação e a integração são operação inversa da outra.

Para Ferreira, Zuin e Oliveira (2017), o desenvolvimento do Cálculo foi atribuído ao inglês Isaac Newton e ao alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, embora alguns historiadores afirmem que Newton foi o primeiro a descobrir o cálculo, porém o mesmo só publicou sua descoberta após as teorias de Leibniz terem sido apresentadas. Apesar do mérito de quem o teria desenvolvido primeiramente não ser de grande relevância para a História do Cálculo, fica a título de curiosidade.

Conforme estes autores, os Cálculos de Newton e Leibniz estão vinculados às propriedades geométricas de figuras, destacando-se o cálculo de área e o cálculo de tangentes, os dois grandes problemas daquela época, como já citado anteriormente.

Em suma, o principal objeto de estudo deste século era o desenvolvimento de métodos para resolver problemas como o de encontrar a tangente sobre as curvas geométricas. Com todos estes acontecimentos pode se concluir que a Matemática passa por constantes transformações ao longo da História, principalmente durante o século XVII que é onde o cálculo começa a ser estruturado.

Os matemáticos como Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler contribuíram para o nascimento do Cálculo mesmo que de forma imprecisa ou não rigorosa já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas, no entanto na época ainda não havia uma sistematização no sentido de uma construção logicamente estruturada.

---

[1] Origem do conceito de derivada de uma função. Só matemática, 1998-2021. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/historia/derivadas.php.

Com isso a união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo, ou seja, o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral.

O aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos ligados a questão das tangentes. Desde a época dos Gregos antigos, já se conhecia a reta tangente, Arquimedes e Apolônio utilizavam métodos geométricos, para a determinação das mesmas.

Desta maneira após os gregos o interesse por tangentes à curvas reapareceu no século XVII, como parte do desenvolvimento da geometria analítica. A introdução de símbolos algébricos como uma ferramenta para estudar a geometria das curvas também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de derivada. Com o tempo, o tratamento se tornou mais algébrico e menos geométrico, surgindo vários métodos de se encontrar a tangente de uma determinada curva.[2]

3.2. MÉTODOS DE EUCLIDES, ARQUIMEDES E APOLÔNIO

De acordo com historiadores, Euclides de Alexandria viveu entre os anos 323a.C e 283a.C, não se sabe ao certo o local de seu nascimento, mas acredita-se que tenha vivido a maior parte de sua vida na cidade de Alexandria. Foi um escritor grego e um dos mais importantes matemáticos da Grécia Antiga, sendo considerado o pai da geometria.

Segundo Haveroth, Figueiredo e Aguiar (2013), o registro formal mais antigo contendo a primeira definição de tangente pode ser encontrada no terceiro livro de “Os Elementos” de Euclides, conforme definição 2, como sendo a reta que toca o círculo de modo que não o corta ao ser prolongada.

Para Ferrão, Almeida e Marcelino (2012), Euclides afirmava que se uma reta r é tangente a uma circunferência c, então ela encontra o círculo em apenas um ponto e é perpendicular ao raio por esse mesmo ponto.

Ao tratar de determinações infinitesimais, Eudoxo promoveu uma grande contribuição com seu trabalho de quadraturas através de seu método, denominado pelos matemáticos do século XVII como método da exaustão, conforme Haveroth (2013) este método consiste em que

> Se quisermos demonstrar que uma quantidade de A é igual a outra quantidade de B, tomamos uma terceira C de modo que a diferença A−C possa diminuir tanto nós quisermos, isto é, que se possa esgotar (Charles, l.c) o que dá o nome do método. Devemos considerar primeiro C > A e depois C < A. Se depois da comparação de C com B resultar um absurdo, ficará provado, como pretendíamos, que A é igual a B. (CARVALHO, 1919, p.3, apud HAVEROTH,2013, p.15).

---

[2] O Nascimento do Cálculo. Disponível em:< http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_derivadas.htm>.

Para o autor, Euclides utilizou desta técnica, para demonstrar que as áreas dos círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros.

Arquimedes nascido no ano 288 a.C na cidade de Siracusa é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos, pois foi quem melhor proveito tirou deste método, utilizando demonstrações por exaustão para calcular áreas de superfície, volumes de corpos e determinar a tangente do espiral.

De acordo com Carvalho (1919 *apud* Haveroth 2013) o livro *Tratado das Espirais* é composto por 28 proposições, no qual Arquimedes estuda a curva que chamamos de *espiral de Arquimedes*. Neste tratado não consta nenhuma definição de tangente o que mostra que Arquimedes usou a definição que Euclides deu para tangente à circunferência, demonstrando na preposição 13 de seu tratado que a tangente à curva a toca em um único ponto.

Ainda segundo o autor as proposições 16 e 17 do tratado de Arquimedes, "referem-se a grandeza dos ângulos que a tangente num ponto faz com o raio vetor deste ponto, mostrando que são diferentes e portanto um será agudo e outro obtuso". (CARVALHO,1919, apud. HAVEROTH, 2013. p.16).

Conforme Haveroth (2013) Apolônio de Tiana nasceu em 15 d.C, é conhecido como "O grande geômetra" por conta de seu trabalho com seções cônicas, composto por oito livros com mais de 480 proposições demonstradas. Algumas destas demonstrações foram obtidas por meio de construções geométricas.

Para o autor, no livro I, proposição 17, Apolônio começa a demonstrar sobre à tangente dizendo que "a paralela AC às ordenadas respectivas, tiradas pelo extremo A de um diâmetro, é tangente à curva, pois se não fosse, cortaria em um ponto B e a reta AB devia ser dividida ao meio pelo diâmetro, o que é absurdo". (HAVEROTH,2013, p.16-17).

No decorrer de muitos anos não houveram outras contribuições significativas nesta área da Matemática, renascendo no século XVII este problema antigo de obtenções de tangentes com outros métodos desenvolvidos por matemáticos da época.

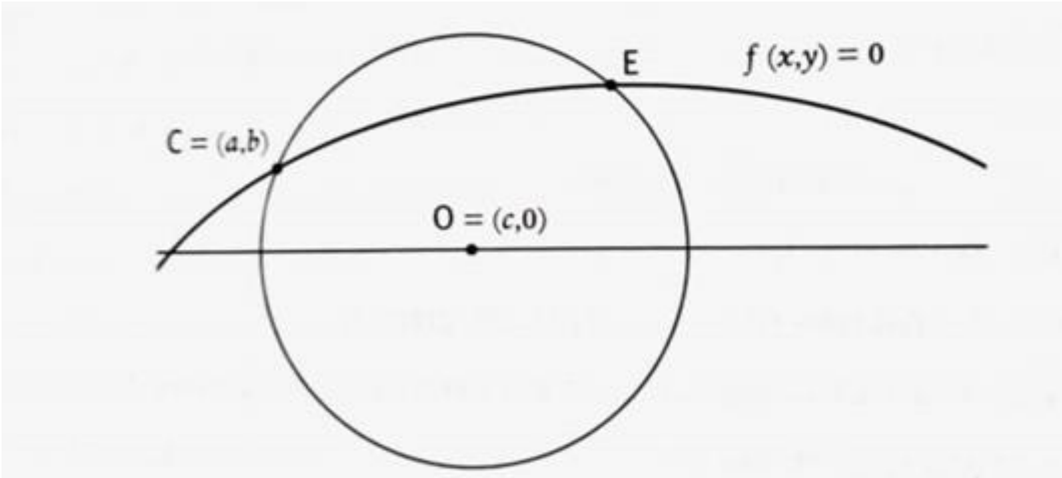
3.3 MÉTODO DE RENÉ DESCARTES (1596-1650)

Segundo Roque (2012) a exposição das propriedades ópticas dos ovais foi o que motivou Descartes a propor um método algébrico para determinar a tangente a um ponto de uma curva. Este método fornecia um procedimento geral.

A autora aponta que o método

> começava por traçar um círculo com centro O sobre um eixo coordenado, interceptando uma curva dada por uma equação, como na ilustração 6. Em geral, esse círculo corta a curva em dois pontos, C e E, e o método se resume a encontrar qual deve ser o centro do círculo de modo a que esses dois pontos se reduzam a um só. (ROQUE, 2012, p.339).

Figura 1- Método de Descartes



Fonte: Roque (2012).

Ainda Segundo Roque (2012)

> Suponhamos que a equação da curva da qual queremos encontrar a tangente seja dada por $f(x,y)=0$ e que o ponto C no qual queremos encontrar a tangente tenha coordenadas (a,b). Tomemos o ponto O no eixo coordenado com coordenadas $(c, 0)$. A equação da circunferência com centro em O passando por C é $(x-c)^2 + y^2= (a-c)^2+b^2$. Se eliminarmos y entre essa equação e $f(x,y)= 0$, temos uma equação em x que determina as abscissas dos pontos onde a circunferência corta a referida curva. Determinamos, em seguida, o valor de c tal que essa equação em x tenha raízes iguais. A circunferência com centro nesse novo ponto $(c,0)$ tocará a curva apenas no ponto C, e a tangente á curva será a tangente á circunferência nesse ponto. Logo, encontrar essa circunferência permite construir a tangente. (ROQUE, 2012, p.339).

De acordo com a autora, Descartes optou por interceptar a curva por uma circunferência em vez de determinar diretamente a reta tangente, pois os problemas ópticos relativos à forma das lentes o levava a introduzir a tangente e a normal na questão de determinar a curvatura de uma curva.

Tendo em vista que esta curvatura pode ser dada pela curvatura da circunferência, que depende do raio da circunferência tangente, onde quanto menor este raio maior será a curvatura da curva estudada. Desta forma o método baseado na busca de circunferências tangentes é mais produtivo para comparar a curvatura da curva á curvatura de uma circunferência.

3.4 MÉTODO DE PIERRE DE FERMAT (1607- 1665)

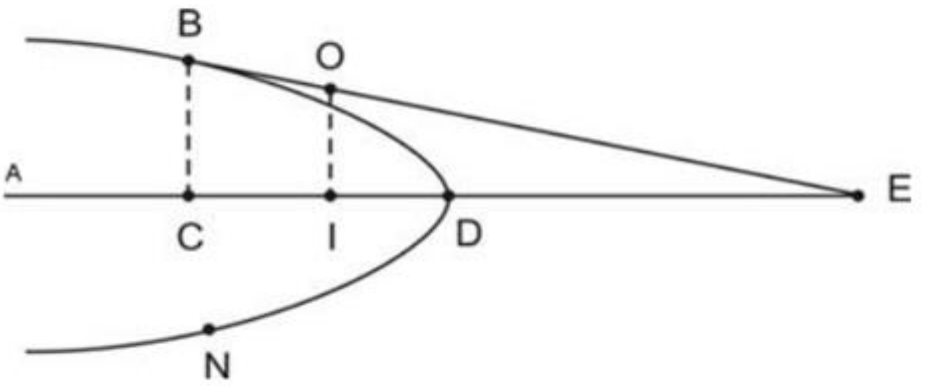
Segundo Roque e Carvalho (2012), Fermat apresentou uma maneira de encontrar tangentes através do seu método para a procura do máximo e do mínimo, com publicação no ano de 1637.

Para esses autores, o método consistia da seguinte maneira:

> [uma] parábola BDN, de vértice D e eixo AD [...]. Se B é um ponto sobre a parábola, traço por este ponto uma perpendicular ao eixo, passando pelo ponto C. Em seguida, traçamos uma reta BE tangente à parábola cortando o eixo no ponto E (temos B e E e é fácil determinar uma reta por dois pontos). (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.211).

Com isso, resta determinar, portanto, a posição do ponto E.

Figura 2- Método de Fermat



Fonte: Roque; Carvalho (2012).

De acordo com esses autores, deve se tomar um ponto *O* qualquer sobre a reta *BE* e traçar respectivamente as ordenadas *OI* do ponto O e *BC* do ponto *B*. Com isso, se o ponto *O* estivesse sobre a parábola, teríamos que $DC/DI = BC^2/OI^2$.

Para Roque e Carvalho (2012) como

> o ponto *O* é exterior a parábola, temos que $DC/DI > BC^2/OI^2$. Por semelhança de triângulos, $BC^2/OI^2 = CE^2/IE^2$, logo $DC/DI > CE^2/IE^2$. Mas o ponto *B* é dado, logo conhecemos a ordenada *BC*, o ponto *C* e *DC*. Assim, podemos considerar que $DC = d$ e fazemos $CI = e$ e $CE = a$, em que *CE* é o que queremos determinar e *CI* é uma quantidade a ser ajustada. Obtemos assim a desigualdade expressa por $d/(d - e) > a^2/(a^2 + e^2 - 2ae)$. Fazendo o produto dos meios pelos extremos obtemos que $da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2 e$. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.212).

Conforme os autores, o método de Fermat tem como ponto central a aplicação de um procedimento, atribuído por ele como Diofanto, chamado adequação, ou seja, que significa estabelecer uma equação ou uma igualdade aproximada. Obtendo uma igualdade aproximada a partir da desigualdade acima.

Assim, se retirar os termos comuns e dividir todos por e, temos que $de + a^2 \approx 2da$. "Supondo que O é suficientemente próximo de B e está sobre a parábola, podemos desprezar o termo de (a desigualdade $DC/DI > BC^2/OI^2$ torna-se uma igualdade). Podemos concluir então que $a^2 = 2da$, ou $a = 2d$". (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.212).

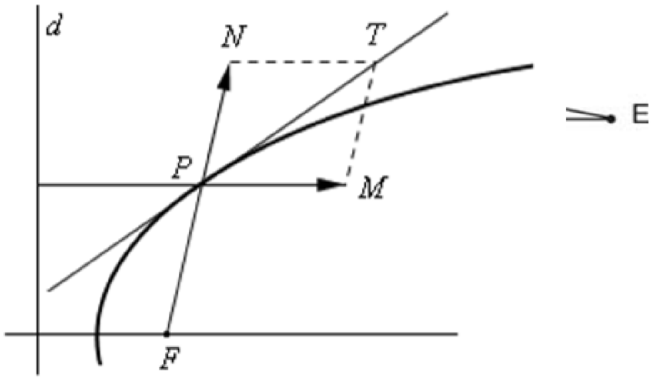
Conforme Roque e Carvalho (2012), este método é característico do cálculo infinitesimal, desenvolvido por Leibniz e Newton alguns anos mais tardes. Este método de Fermat pode funcionar para qualquer curva, desde que justificada pelo cálculo infinitesimal, diferente do método de Descartes que só funciona para curvas algébricas, pois eram as únicas que o interessavam.

3.5 MÉTODO DE GILES PERSONNE DE ROBERVAL (1602-1675)

Conforme Alves (2000 [ano provável]), Roberval considerava uma curva sendo gerada por um ponto no qual o movimento se compõe de dois movimentos conhecidos. Desta forma, a resultante dos vetores velocidades dos dois movimentos fornece a reta tangente a curva.

> Por exemplo, no caso de uma parábola, pode-se considerar os dois movimentos em sentido oposto ao foco e em sentido oposto à diretriz. Como as distâncias do ponto em movimento ao foco e à diretriz são sempre iguais, os vetores velocidades dos dois movimentos devem também ter módulos iguais. Segue-se que a tangente a um ponto da parábola bissecciona o ângulo entre o raio focal, pelo ponto, e a perpendicular por este à diretriz (Figura 6). (ALVES, 2000 [ano provável], p.8).

Figura 3- Método de Roberval



Fonte: Alves (2000 [ano provável]).

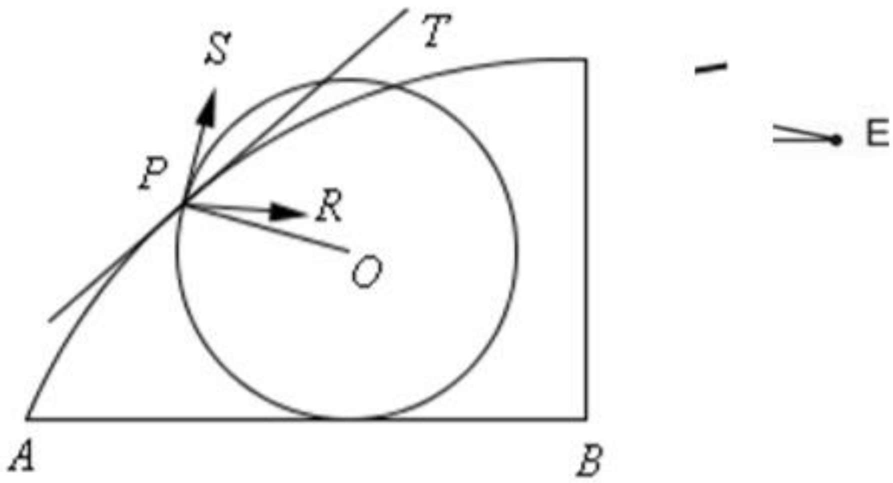
3.6 MÉTODO DE EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647)

Segundo Alves (2000 [ano provável],) Torricelli trabalhava com a mesma ideia de Roberval sobre tangente, em que, para determinar a tangente, tanto Roberval quanto Torricelli usavam o método da composição de movimentos, quando do traçado de uma tangente à parábola.

Para Alves (2000 [ano provável],) no caso do cicloide,

> pode-se imaginar um ponto P da curva como sujeito a dois movimentos iguais, um de translação e outro de rotação. Conforme o círculo gerador rola ao longo da reta AB numa base horizontal (Figura 7), o ponto P é conduzido horizontalmente enquanto que, ao mesmo tempo, gira em torno de O, o centro do círculo. Traça-se, portanto, a partir de P, um vetor horizontal PR como componentes de translação e um vetor PS, tangente ao círculo gerador, como componente de rotação. Ademais, como os dois vetores têm módulos iguais, a tangente pretendida situa-se ao longo da bissetriz PT do ângulo RPS formado pelos dois vetores. (ALVES, 2000 [ano provável], p.8).

Figura 4- Método de Torricelli



Fonte: Alves (2000 [ano provável]).

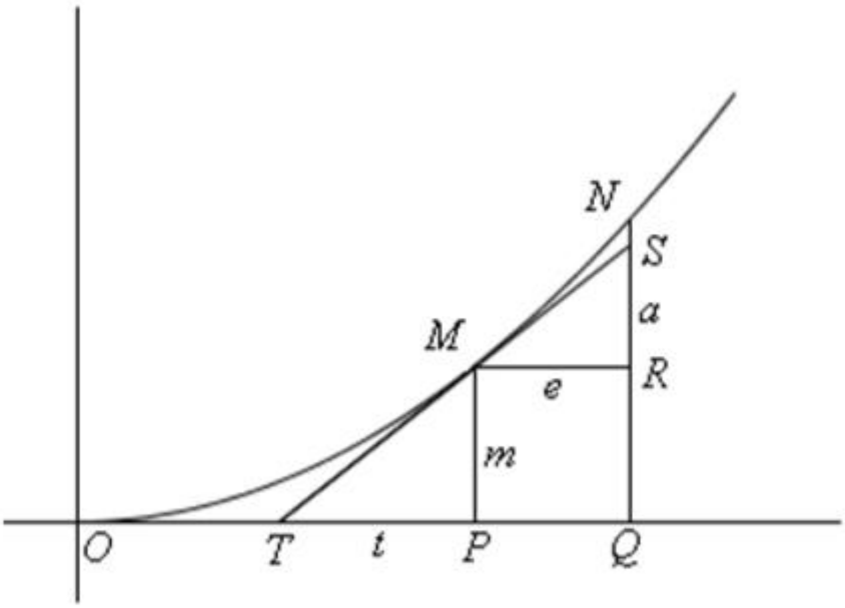
3.7 ISAAC BARROW (1630-1677)

De acordo com Alves (2000 [ano provável]), o método das tangentes de Barrow é virtualmente idêntico ao usado no cálculo diferencial e muito semelhante ao de Fermat. No entanto, usa duas quantidades em vez da letra E única de Fermat. Essas quantidades equivalem aos modernos Δx e Δy.

O método de Barrow se explica da seguinte maneira: se M é um ponto sobre uma curva dada por uma polinomial $f(x, y)=0$ e se T é um ponto de intersecção da tangente desejada MT com o eixo x, então Barrow marcava um "arco infinitamente pequeno MN da curva".

Com isso traçava as ordenadas por M e N e pelo ponto M traçava uma reta MR paralela ao eixo x. Designando por m a ordenada conhecida em M, por t a subtangente desejada PT e por a e e os lados vertical e horizontal do triângulo MRN (Barrow supõe que o ponto N e S são tão próximos que se confundem, podendo assumir a igualdade), o chamado triângulo diferencial, o mesmo observava que a razão de a para e é igual à razão de m para t, conforme Alves (2000 [ano provável]).

Figura 5- Método de Barrow



Fonte: Alves (2000 [ano provável]).

A razão de *a* para *e,* para pontos vizinhos é a inclinação da curva. Para achar essa razão, Isaac Barrow substituía x e y em *f(x, y)= 0* por $x + e$ e $y + a$, respectivamente, depois na equação resultante ele desprezava os termos não contendo *a* ou *e* (pois os mesmos juntos dão 0) e todos os termos de grau maior que um em *a* e *e.* Por fim, substituía *a* por *m* e por *t*. Com isso a subtangente é obtida em termos de *x* e *m*, e se *x* e *m* são conhecidas o valor de t está determinado, segundo Alves (2000 [ano provável]).

De acordo com a autora o cálculo pode ser feito também pela razão de *RS* por *MR* que é igual a razão de *PM* por T*P*. Como *OT* = *OP* - *TP*, segue a relação acima que:

$$OT = x - \frac{e}{a} PM = x - \frac{e}{a} y.$$

"Conhecida à medida OT, marca-se o ponto T e é possível traçar a tangente por T e M, já que os valores x e y do ponto M são conhecidos, o intuito está em calcular o quociente *e/a".* *(*ALVES, (2000 [ano provável], p.13).

3.8 ISAAC NEWTON (1643-1727)

De acordo com Roque e Carvalho (2012) no final da década de 60, Newton já utilizava os procedimentos infinitesimais, no entanto, foi no início dos anos 70 que esses algoritmos são reformulados por ele na linguagem de fluentes e fluxões.

Segundo Ferrão, Almeida e Marcelino (2012), o físico e matemático Isaac Newton se dedicou a solucionar o problema da reta tangente, desenvolvendo seu trabalho com influência dos estudos de Descartes e Fermat que estão diretamente ligados à origem do Cálculo Diferencial. O método da Tangente de Newton é também conhecido como método das Fluxões, pois resolveu o problema da determinação do traçado da tangente a uma curva dada, por uma equação *f (x,y)=0*, em que as variáveis *x* e *y* representam grandezas que fluem com o decorrer do tempo, aos fluentes e suas velocidades, ou seja, as chamadas fluxões.

Para Newton eram quantidades variáveis com o tempo, ou seja, quantidades que fluem relacionadas ao movimento. Já a taxa de variação de uma quantidade com o tempo era denominada fluxão. Se v,x,y,z são consideradas quantidades fluentes, seus fluxões serão respectivamente $\dot{v},\dot{x},\dot{y},\dot{z}$,. Logo o problema consistia em encontrar a relação do fluxões de uma dada relação entre quantidade fluentes e vice-versa, conforme os autores.

“Se tivermos dois fluentes *x* e *y*, o interessante não será calcular os fluxões em si, mas a razão entre eles $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, que determina a inclinação da tangente à curva descrita nas variáveis x e y”. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.224).

Segundo os autores se é dada uma curva com $y = x^n$, considera-se *o* um intervalo de tempo infinitamente pequeno. Visando que $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$ corresponde a *dx* e *dy* e são respectivamente os incrementos infinitamente pequeno de *x* e *y*. Com isso para encontrar a relação entre os fluxões, Newton substituía $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$ na equação da curva obtendo assim $y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$.

De acordo com Roque e Carvalho (2012, p.224) foi: “Utilizando a fórmula que conhecemos hoje como “binômio de Newton”, e que ele generalizou para expoentes fracionários, escreveu $y + \dot{y}o = x^n + no\dot{x}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2\dot{x}^2\ x^{n-2} + \cdots$”.

Visando que $y - x^n$ é igual a 0, e dividindo tudo por *o* se obtém

$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x} + \frac{n(n-1)}{2}o\dot{x}^2\, x^{n-2} + \cdots$ Conforme Roque e Carvalho (2012) ao considerar que *o* é infinitamente pequeno, os termos que contém esta quantidade podem ser desconsiderados proporcionando a seguinte fórmula $\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}$.

Para estes autores este procedimento de Newton enfrentou problemas, pois a quantidade *o* considerada quase 0 (infinitamente pequena) no último passo foi tida como quociente em um passo anterior. Com isso o físico tinha consciência de que ao considerar quantidades infinitamente pequenas poderia inviabilizar a aceitação de seu método, portanto apresentou um novo procedimento denominado primeiras e últimas razões.

Este método consistia em não eliminar simplesmente os termos que continha a quantidade *o* e sim fazer a razão $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ entre os fluxões, sendo está razão igual a primeira ou a última razão entre os incrementos de y e x.

> Se chamarmos, em notação atual, estes incrementos de Δx e Δy, poderemos dizer que Newton considera a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando Δx e Δy decrescem ambos para 0 ou crescem ambos a partir de 0. No primeiro caso, existe uma *última razão* entre Δx e Δy, antes que ambos atinjam o 0, e no segundo caso uma *primeira razão* entre Δx e Δy, assim que eles começam a existir a partir de 0. A razão $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ é igual a esta última razão entre quantidades evanescentes, ou igual a esta primeira razão entre quantidades nascentes. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.225).

De acordo com Roque e Carvalho (2012) no livro *Princípios Matemáticos da filosofia natural* o método das primeiras e últimas razões é justificado por Newton da seguinte maneira:

> "As quantidades e as razões de quantidades que tendem continuamente a se tornar iguais durante um tempo finito e que, antes do fim deste tempo, se aproximam tanto da igualdade que sua diferença pode ser considerada menor que qualquer diferença dada, terminam por ser iguais". (ROQUE; CARVALHO,2012,p.225).

Ainda conforme os autores ao fundamentar o método dos infinitesimais através das primeiras e das últimas razões, é estabelecido por Newton que os incrementos são denominados apenas *o*, em vez de $\dot{x}o$ e $\dot{y}o$, escrevendo $(y+o)=(x+o)^n = x^n + nx^{n-1}.o + \cdots$ Desta forma o incremento pode ser obtido como:

$$o = \mathrm{n}\mathrm{x}^{n-1}.o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.o^2 + \cdots$$

E ao dividir tudo por *o* se obtém:

$$1 = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}.o + \cdots$$

Deste modo ao fazer com que a quantidade *o* desapareça a primeira razão é $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ e a última é $\frac{nx^{n-1}}{1}$. "Como a última razão entre quantidades evanescentes deve ser igual à primeira razão entre as quantidades nascentes, temos que $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = nx^{n-1}$". (ROQUE; CARVALHO, 2012. p.225).

Para esses autores apesar dos esforços de Newton o método das primeiras e últimas razões não resolve de modo completo o problema dos fundamentos do cálculo, pois a razão entre os incrementos não é a última, uma vez que eles ainda existam e quando deixam de existir, não existe mais uma razão entre eles. Assim as primeiras e últimas razões são difíceis de determinar.

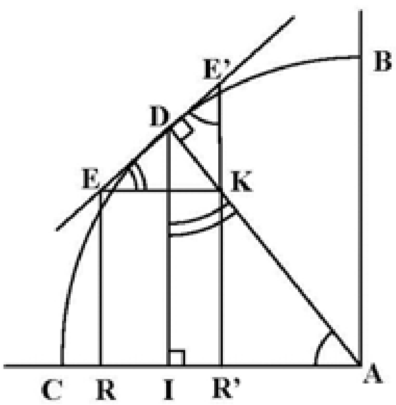
Portanto o meio utilizado para calcular reta tangente de Newton era através do método dos fluxões estabelecido por ele, podendo perceber a ligação com o método atual de encontrar (através das derivadas), pois as concepções de Newton deram o início a construção do cálculo diferencial.

3.9 GOTTFRIED WIHELM LEIBNIZ (1646- 1716)

De acordo com Roque e Carvalho (2012) Leibniz afirma que a sua primeira inspiração para a invenção do cálculo foi tirada do Tratado dos senos do quarto círculo de Pascal. Este Tratado tinha como objetivo demonstrar um resultado sobre quadraturas através de um método que será exposto a seguir, no entanto Leibniz estrai dele uma ideia bem mais geral denominada triângulo característico.

Conforme os autores a concepção de Pascal era traçar um quarto do círculo ABC e uma tangente EE' em um ponto D. O próximo passo era traçar uma perpendicular a AC e marcar o ponto I de interseção. Por fim devia ser desenhado EK paralela a AC e por E' traçar E'K paralela à DI, de acordo com a figura representada abaixo.

Figura 6- Método de Pascal



Fonte: ROQUE; CARVALHO (2012).

"Pascal já havia observado que o Triângulo DIA é semelhante a EKE', pois $E\widehat{D}I = \frac{\pi}{2} - A\widehat{D}I = I\hat{A}D$, logo DÊK = IÂD e EÊ'K= IÂD (isto vale para a circunferência porque a tangente EE' é perpendicular ao raio DA)". (ROQUE e CARVALHO, 2012.p.218). O resultado não depende das posições de E e E', com isso mesmo que estejam muito próximos de D, o resultado permanece.

Segundo os autores é afirmado por Leibniz que Pascal não enxergou a relevância das semelhanças de triângulos que o mesmo tinha demonstrado, pois essa semelhança permite diminuir a distância entre E e E', até que não seja possível atribuir um valor.

> Ainda assim, ou seja, quando esta grandeza (a distância) não é "atribuível", o triângulo pode ser determinado pela sua semelhança com o triângulo *DIA* que, ele, é "atribuível".

> Há uma relação que se conserva no triângulo *EKE'* na passagem do finito ao infinitesimal, que é justamente a sua semelhança ao triângulo *DIA*. (ROQUE; CARVALHO, 2012.p.218).

No entanto o argumento acima só é valido para a circunferência, mas Leibniz proporciona um método análogo válido para um caso mais geral, onde conforme os autores:

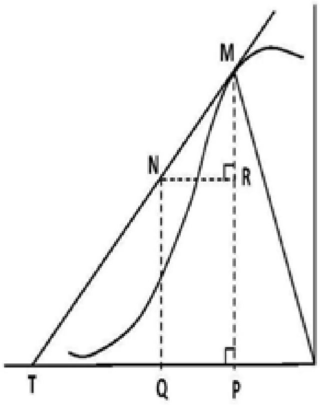
> Podemos tratar o triângulo não atribuível constituído por um pedaço da tangente como sendo o elemento característico de uma curva, designado como triângulo característico (análogo ao triângulo *EKE'*). Fazendo Δy= E'K e Δx= RR' e este método exprime analiticamente todos os elementos do problema fazendo com que a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se torne uma relação infinitesimal $\frac{dy}{dx}$(grandezas do triângulo característico). (ROQUE; CARVALHO, 2012.p.218).

Para Roque e Carvalho (2012) foi a partir de 1684 que Leibniz publicou seus artigos sobre o cálculo, tendo como um de seus trabalhos mais importantes um novo método para encontrar máximo e mínimo, utilizando o cálculo das tangentes através do triângulo característico.

O método para encontrar a tangente de Leibniz pode ser comparado com o de Fermat, e consiste em considerar uma curva e uma tangente a esta curva no ponto M,

> Traçando um segmento *NR paralelamente* ao eixo das abscissas, obtemos um triângulo retângulo *NMR* semelhante a *TMP* formado pela ordenada *PM*, pela subtangente *TP* e pelo comprimento da tangente *TM*. O ponto *T* não é fixo, ou seja, não é um ponto específico da curva. Este ponto é marcado de modo que *TM seja* perpendicular `a tangente.
> O segmento *TP* é chamado de "subtangente". (ROQUE; CARVALHO, 2012.p. 219).

Figura 7- Método de Leibiniz



Fonte: Roque; Carvalho (2012).

Para Leibniz apesar de dy e dx serem quantidades infinitamente pequenas a razão $\frac{dy}{dx} = \frac{MR}{NR}$ entre estas quantidades é finita porque é dada pelo valor $\frac{PM}{TP}$ da razão entre a ordenada e subtangente. "Logo, sendo dx uma quantidade qualquer, a diferencial dy é definida pela proporção $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{subtangente}$ ". (ROQUE; CARVALHO, 2012,p.219).

Com isso surge a introdução da palavra função, determinando como a "função" que uma reta executa em uma curva, sendo uma tangente, normal ou subtangente.

Desta forma, pode se considerar que era através da construção do triângulo característico que consistia o método de Leibniz para encontrar a reta tangente de uma determinada curva.

3.10 MÉTODO ATUAL

De acordo com Siguenãs (2009), era preciso desenvolver o conceito de função para resolver o problema da tangente, que foi resultado de uma lenta e longa evolução histórica. Foi durante o século XVII que houve um novo impulso no desenvolvimento das funções, com a introdução das coordenadas cartesianas de Descartes.

A introdução dessas coordenadas além de facilitar os estudos das curvas já conhecidas permitia a criação de novas. Por meio do estudo dessas novas curvas que Fermat se deu conta das limitações do conceito clássico de reta tangente (Siguenãs, 2009).

Conforme Siguenãs (2009) o método de Fermat para encontrar a tangente consistiam em ideias que formam o embrião do conceito de derivada, no entanto, ele não utilizava notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido.

Com isso, foi Leibniz que algebrizou o Cálculo Infinitesimal introduzindo os conceitos de variável, constante e parâmetro e a notação dx e dy para denominar a menor possível das diferenças em x e em y. Surgindo desta notação o que conhecemos hoje como Cálculo Diferencial.

No entanto foi no século XIX que segundo Siguenãs (2009)

> Cauchy introduzia formalmente o conceito de limite e o conceito de Derivada, a partir disso com Leibniz e Newton, o Cálculo Diferencial torna-se um instrumento indispensável pela sua aplicabilidade aos mais diversos campos da Ciência. Assim o aparecimento e desenvolvimento do Cálculo Diferencial estão ambos intimamente ligados à questão das tangentes. (SIGUENÃS, 2009, p.11).

Essa ligação citada pelo autor faz referência à influência na construção do Cálculo Diferencial que os estudos e os métodos desenvolvidos para calcular a reta tangente possui, no qual consequentemente o método para calcular essas retas, atualmente, é através das derivadas.

Para Ávila (2006, p.175), uma função *f,* definida num intervalo aberto I, é derivável em $x_0 \in I$ se existe e é finito o limite da razão incremental

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

com $x \to x_0$. Este limite é por definição a derivada da função f no ponto x_0. Para indicar esse limite são usadas as seguintes notações

$f'(x0)$, $(Df)(x_0)$ e $\frac{df}{dx}(x_0)$, onde esta última é o quociente das diferenciais.

De acordo com o autor, em mecânica, normalmente se considera funções do tempo t, ou seja, s(t), x(t), entre outras. E na notação é comum haver um ponto em cima da letra como, por exemplo, $\dot{x}(t)$.

Conforme Ávila (2006) colocando $x = x_0 + h$ pode se escrever a derivada da seguinte maneira:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ainda de acordo com o autor, essa é a derivada no sentido ordinário com o ponto x_0 sendo interior ao domínio da função. “As noções de derivadas laterais, à direita e à esquerda, são introduzidas de maneira análoga”. (ÁVILA, 2006,p.176):

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Essas definições são aplicadas mesmo que x_0 seja extremo esquerdo ou direito respectivamente, de um intervalo onde f seja definida, conforme Ávila (2006).

> A derivada de uma função f é, por sua vez, uma função do ponto onde é calculada. Podemos, pois, considerar sua derivada, que é chamada a derivada segunda de f e indicada com as notações f'', D^2f, d^2f/dx^2, $\ddot{s}(t)$, $\ddot{x}(t)$. De um modo geral, podemos considerar a derivada de ordem n ou derivada n-ésima, definida recursivamente como a derivada da derivada de ordem n-1 e indicada com as notações $f^{(n)}$, $D^{(n)}f$, d^nf/ dx^n. Uma função com derivadas contínuas até a ordem n é chamada função de classe C^n. (ÁVILA, 2006, p.176).

Com isso deve se notar que através de pequenas modificações, muitos resultados envolvendo derivadas ordinárias permanecem válidos para as derivadas laterais. “[...] uma função f é derivável em x_0, no sentido ordinário, se e somente se suas derivadas laterais nesse ponto existem e são iguais”. (ÁVILA, 2006, p. 176).

Para o autor ao considerar que a função f é derivável, a diferença

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)=n$$

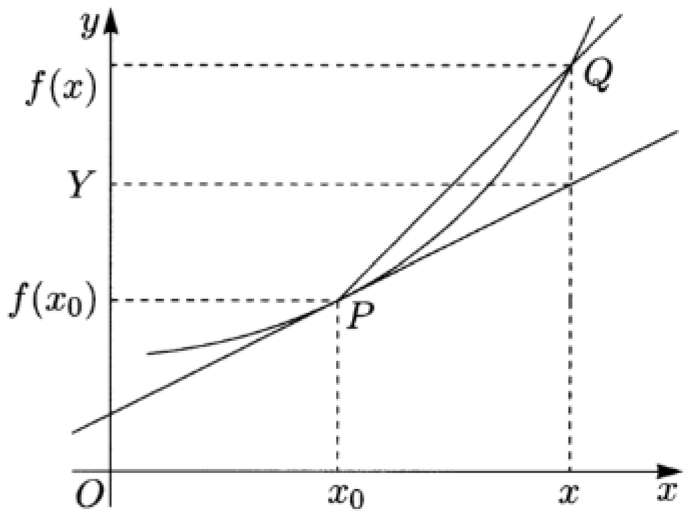
tende a 0 com $x \to 0$, logo $f(x) = f(x_0) + [f'(x_0) + n](x - x_0)$ tende a *f(x)* com $x \to 0$, provando o teorema que diz que toda função derivável num ponto x_0 é contínua nesse ponto.

Conforme Ávila (2006) esse teorema representa o declive da reta secante e ao considerar uma reta secante PQ, onde $P = (x_0, f(x_0))$ e $Q = (x, f(x))$, representado na figura abaixo. Quando $x \to 0$, o ponto Q se aproxima do ponto P e *f'(x_0)* é o valor limite do declive da reta secante. “Isto sugere a definição de reta tangente à curva *y= f(x)* no ponto *P* como aquela que passa por esse ponto e tem declive *f'(x_0)”.* (ÁVILA,2006, p. 177).

Com isso sua equação em coordenadas *(x, Y)* é dada por:

$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ ou $Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Figura 8- Reta tangente à curva y=f(x)



Fonte: Ávila (2006)

A elaboração deste capítulo era um dos objetivos deste trabalho que focou na realização de um estudo sobre os diferentes métodos de se encontrar a equação da reta tangente desenvolvidos ao longo da história. Este estudo compõe uma sequência de dez métodos, partindo do primeiro registro formal, contendo a primeira definição de tangente encontrada no terceiro livro de "Os Elementos" de Euclides, até a forma atual de se encontrar, por meio das derivadas.

Ao desenvolver um estudo desses métodos podemos perceber que os conceitos Matemáticos vinculados à História do Cálculo Diferencial, contribuem, cada um, em pequenas ideias intuitivas que, com o tempo, se estruturam, formando ideias mais elaboradas.

A partir desse estudo também fica claro que grandes nomes da Matemática deram suas contribuições ao avanço desse importante conceito relacionado ao Cálculo Diferencial.

4. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS: UM CAMINHO PELA INTERPRETAÇÃO FENOMENOLÓGICA

De acordo com Bicudo (1994) a Fenomenologia surgiu e cresceu com Edmund Husserl. No entanto, outros pensadores como Heidegger, Merleau-Ponty, Gadamer, Ricoeur, têm suas contribuições no desenvolvimento do pensar fenomenológico. Para a autora, a fenomenologia surge como um novo método designado para fundamentar a Filosofia e as Ciências.

Segundo a autora, a fenomenologia se opõe de modo direto ao positivismo, no entanto, essas duas concepções consideram um pensar rigoroso acerca da realidade, ou seja, "[...] é um modo científico de conhecer a realidade". (BICUDO, 1994, p.16).

O positivismo trata a ciência como um corpo de conhecimentos constituído por proposições cientificamente comprovadas, constituído pela teoria e pelos padrões de rigor por ela aceitos,

> [...] explica fatos já conhecidos e prediz os ainda não conhecidos. Na perspectiva da predição, tem-se a orientação do que pode ser perguntado e de como o perguntado pode ser respondido. Isso é dado pelos padrões de rigor os quais são postos em termos de objetividade e de neutralidade. A objetividade é baseada na quantificação. A neutralidade na separação do pesquisador do objeto de pesquisa. (BICUDO, 1994, p.16-17).

Assim, "a fenomenologia, portanto, é um pensar a realidade de modo rigoroso. O que a caracteriza não é ser ou procurar ser esse pensar, mas o modo pelo qual age para perseguir essa meta". (BICUDO, 1994, p.17).

A autora destaca nesse sentido que, os procedimentos são inseparáveis do fenômeno interrogado e do Pesquisador. "Neles estão presentes a busca do rigor e algumas concepções que dizem da interpretação do mundo, como: fenômeno, realidade, consciência, essência, verdade, experiência, a priori, categoria, intersubjetividade". (BICUDO, 1994, 17).

A fenomenologia é uma abordagem que se orienta para o estudo de fenômenos. Desta maneira, deve se considerar que a busca de determinada interrogação de um fenômeno não ocorre em um primeiro momento ao olhá-lo, mas sim, ao longo da investigação, mediante uma atitude atenta do sujeito que interroga.

> A fenomenologia, assim, aceita um fenomenal que não questiona, uma vez que nunca é vislumbrado; mas interroga o fenômeno, o que é experienciado pelo sujeito voltado atentivamente para o que se mostra. A realidade é o compreendido, o interpretado e o comunicado. É, portanto, perspectival, não havendo uma única realidade, mas tantas quantas forem suas interpretações e comunicações. (BICUDO, 1994, p18).

Para que haja a percepção do fenômeno é essencial que aquele que percebe esteja presente nesse processo de maneira atenta para ver o que se mostra. Para Bicudo (1994), o que é visto não é percebido de maneira solo, mas está em volta de uma região de fenômenos co-percebidos.

Nesta pesquisa, buscamos compreender o fenômeno da maneira como ele se mostra, tal qual propõe a fenomenologia. O fenômeno que desejamos compreender é aquilo que se mostra na escrita dos alunos, após uma aula de História da Matemática, que destaque aspectos históricos do conceito de reta tangente. Desta forma, utilizaremos do rigor fenomenológico para realizar a análise dos dados. Este movimento de análise é dada em dois momentos distintos, mas não separados um do outro: a análise Ideográfica e análise Nomotética.

Na Análise Ideográfica, são realizadas as primeiras leituras dos dados, realizadas com o intuito de conhecer as descrições de uma maneira geral, sempre à luz de nossa pergunta de pesquisa. De acordo com Machado (1994), após a leitura inicial, o pesquisador realiza uma nova leitura buscando destacar unidades de significado, ou seja, o pesquisador por meio da compreensão que tem do que foi dito pelo sujeito, coloca em sua própria linguagem o que compreende, o que chama sua atenção, levando em consideração a interrogação da pesquisa.

Após as unidades de significados serem constituídas, é necessário sintetizá-las. Os discursos dos sujeitos e as descrições produzidas devem ser mantidas, sempre se baseando na questão inicial da pesquisa (interrogação).

Segundo Lima (2016), "o termo Nomotético deriva-se de "nomos" (do grego), que significa uso de leis, normas, regras" (LIMA, 2016, p.540). Na análise Nomotética, busca-se uma passagem do nível individual para o nível geral, buscando as convergências de sentidos e significados do que é dito individualmente, e que possibilite constituir categorias de análise que, abertas à interpretação, permitam ir do nível individual para as características gerais do fenômeno.

O desenvolvimento dessa pesquisa se deu, incialmente, realizando um estudo bibliográfico, onde identificamos os principais métodos de se encontrar reta tangente ao longo da História. Após, elaboramos uma apresentação que ilustra, de forma resumida, os principais pontos desses métodos, os matemáticos que participaram diretamente da sua elaboração e os conceitos matemáticos envolvidos.

Essa apresentação foi realizada aos alunos da disciplina de História da Matemática, do curso de Licenciatura em Matemática, da Unesp de Guaratinguetá no primeiro semestre de 2020. Um ponto que se faz importante destacar é que, no início do desenvolvimento deste trabalho, estava programado que esta apresentação se daria em uma aula presencial da disciplina, onde os alunos trabalhariam, durante a aula, em algumas atividades relacionadas aos métodos apresentados, fomentando uma discussão sobre as complexidades e principais ideias subjacentes a cada um deles. Porém, com a suspensão das aulas presenciais, devido à pandemia decorrente ao Coronavírus, tivemos que reorganizar o nosso planejamento de coleta dos dados.

Assim, a apresentação dos métodos foi realizada em uma aula síncrona do curso, a partir da plataforma Google Meet e, após essa aula, disponibilizamos aos alunos um formulário através do aplicativo Google Forms, que continha algumas questões elaboradas de maneira que, as respostas pudessem auxiliar na discussão da nossa interrogação de pesquisa.

Com os dados em mãos, em um primeiro momento, realizamos uma leitura de todas as respostas com o objetivo de compreender de maneira geral o apresentado pelos alunos. Em seguida, iniciamos o destaque de escritas dos sujeitos que se mostraram importantes para a compreensão da questão orientadora do trabalho.

Para facilitar a identificação dessas escritas, determinamos códigos que representam os alunos e as respostas, de acordo com a numeração de cada questão. Por exemplo, ao utilizarmos A1R1 está se referindo a resposta da primeira pergunta dada pelo aluno 1. Isso possibilitou a construção do quadro a seguir, onde elaboramos a Análise Ideográfica do trabalho.

Temos, na primeira coluna da tabela, o código identificativo de cada escrita, na segunda o trecho destacado de cada escrita, na terceira coluna a interpretação realizada pela pesquisadora, com o objetivo de apresentar sua compreensão acerca do fenômeno identificado e na última coluna as ideias nucleares que se constituíram.

Tabela 1- Análise Ideográfica

(continua)

IDENTIFICAÇÃO	FALA DO SUJEITO	ASERSSÃO ARTCICULADA	IDEIAS NUCLEARES
A1R1	[...] Ou seja, mesmo antes da formalização a ideia intuitiva de variação já estava implícita nos métodos apresentados.	O aluno consegue identificar a presença do conceito de variação nos métodos.	Compreensão da ideia intuitiva de variação
A3R1	[...] com o desenvolvimento matemático dessas ideias foi possível trabalhar com as ideias intuitivas de limites e derivadas futuramente.	Considera que é por meio do desenvolvimento dos métodos ao longo do tempo que foi possível compreender os conceitos de derivadas e limites.	Compreensão de derivas e limites através do desenvolvimento dos métodos
A4R2	O estudo da matemática foi se aperfeiçoando e ganhando novas perspectivas com o passar do tempo, o que gerou a necessidade de adaptações a diversos conceitos previamente formados [...].	O aluno descreve que a matemática foi se aperfeiçoando ao longo da história, ou seja, foi se aprimorando, gerando a necessidade de ajustar inúmeros conceitos.	Evolução dos conceitos matemáticos

(continuação)

A5R2	[...] a compreensão conceitual pode ser facilitada quando percebemos como uma ideia se desenvolveu na História da Matemática, a partir de seu contexto e processo de construção.	O aluno acredita que o aprendizado de um conceito pode ser melhor compreendido através do seu processo de construção, ou seja, da sua evolução ao longo da História.	Evolução dos conceitos matemáticos
A8R2	**[...]** Portanto, para a compreensão de determinados conceitos matemáticos, é essencial que se tenha contato com a história que o acompanha, podendo evidenciar seus processos de descoberta e adequação, evolução e formalização para o que conhecemos atualmente.	Considera que para a compreensão de conceitos matemáticos é fundamental o conhecimento dos seus processos de descoberta (no sentindo de constatar algo que ainda não tenha sido reconhecido como significativo), adequação e formalização, ou seja, o seu processo de desenvolvimento ao longo do tempo.	Evidência o processo de descoberta
A1R3	[...] os conceitos foram se aperfeiçoando até para estabelecer um rigor maior na matemática e, assim, foi sendo desenvolvida as noções do Cálculo Infinitesimal que, por meio do cálculo da reta tangente, trouxe a ligação com o método atual de encontrá-la (através da derivada).	Para o aluno os conceitos foram se desenvolvendo para estabelecer um maior rigor matemático, sendo assim desenvolvidas as noções de Cálculo Infinitesimal, considerando que as derivadas então ligadas com o cálculo da reta tangente.	Evolução dos conceitos matemáticos
A2R3	A história da matemática nos mostra que derivadas surgiram antes do conceito formal de	O aluno compreende que as derivas surgiram antes do conceito formal de limite.	Surgimento do conceito de derivada

(conclusão)

	limite, através de diversos métodos muito diferentes [...].		
A4R3	Acredito que a discussão da reta tangente apresentada é parte do conceito de derivada, que foi se estruturando [...].	Considera que a concepção de derivada faz parte de uma estruturação que ocorreu ao longo do tempo no conceito de reta tangente.	Construção do conceito de derivada
A5R3	[...] o conceito de derivada foi resultado de uma lenta e longa evolução histórica, respondendo ao problema da tangente [...].	O aluno entende que a concepção de derivada é resultado de uma evolução histórica. Se mostrando como solução ao problema da tangente.	Concepção de derivada resultado de uma evolução histórica
A3R4	[...] o método de Leibniz, pois foi a partir dele que aprendi os conceitos e como calcular derivadas no ensino superior [...].	Foi a partir do método de Leibniz que houve a compreensão do conceito de derivada.	Construção do conceito de derivada a partir do método de Leibniz
A5R4	Todos os métodos têm sua importância, uma vez que através deles foi possível sedimentar e estruturar o conceito de derivadas, podendo ser observado às contribuições de cada um para tal.	O aluno ressalta a importância de todos os métodos na estruturação do conceito de derivadas, pois observou contribuições de todos.	Construção do conceito de derivada a partir dos métodos

Fonte: Autoria própria

Concluído o processo da análise ideográfica, a continuação da análise dos dados se deu por meio da análise nomotética, momento em que buscamos compreender o investigado, por meio de uma visão geral. Feita a etapa de destaque das unidades de significados, o intuito foi buscar convergências das ideias nucleares que permitissem a formação das categorias abertas, que proporcionam as interpretações em relação ao fenômeno estudado.

Desta forma, foi construído o quadro 2, contendo o código, as convergências encontradas e as categorias abertas. Para facilitar a identificação das convergências das ideias nucleares, foi utilizado cores.

Tabela 2- Análise Nomotética

Código	Convergências	Categorias abertas
A2R3, A4R3	Construção do conceito	Construção do conceito matemático
A3R4, A5R4	Construção do conceito de derivada a partir dos métodos	
A8R2	Evidência o processo de descoberta	
A3R1, A4R2, A5R2, A1R3, A5R3	Evolução dos conceitos matemáticos	Evolução do conceito matemático

Fonte: Autoria própria

4.1 DISCUSSÃO DAS CATEGORIAS ABERTAS

As análises realizadas nos mostraram que, após uma apresentação em que se destacou aspectos históricos relacionados ao conceito de reta tangente, os alunos consideraram que, o processo de construção e de evolução do conceito de alguns outros conceitos ligados ao de reta tangente surgem, ao se trabalhar com a História da Matemática.

Tais discussões proporcionaram uma melhor compreensão do conceito, visto que os participantes manifestam que a apresentação auxiliou na compreensão de que o conceito de derivada faz parte de uma estrutura que se deu ao longo do tempo a partir da ideia de reta tangente, além de perceberem a importância de conhecer os processos de descoberta de conceitos matemáticos, facilitando a sua compreensão, ressaltam ainda a relevância de todos os métodos apresentados na estruturação ao longo da História.

Mas, ao pensarmos nas categorias encontradas, construção e evolução do conceito Matemático, o que podemos dizer, ou diferenciar, cada uma delas?

Ao se tratar a ideia de construção, podemos observar que, de acordo com um dicionário brasileiro de Língua Portuguesa a palavra *construção* significa "ação, processo ou resultado de compor, estruturar ou elaborar algo; composição, elaboração, estruturação, criação", ou seja, faz menção ao ato de criar, construir algo. (MICHAELIS, 2021).

Pesquisando no site intitulado "Conceito De"[3] na publicação de 2014, construção é uma palavra que tem origem do Latim "*constructĭo*" e seu conceito é usado também em referência

[3] Conceito de construção. Conceito De, 2014. Disponível em: <https://conceito.de/construcao>.

à obra construída, e à arte de construir. Por outro lado, a ideia de construção é usada também em sentido figurado, para fazer menção a tudo aquilo que, de alguma maneira, se edifica ou se produz, não se tratando apenas de edificações físicas.

Nesta perspectiva, podemos observar a ideia de "construção do conceito" presente inicialmente na primeira definição de tangente no livro "Os Elementos" de Euclides, no qual algo novo é descoberto e exposto pelo matemático, proporcionando a partir desta concepção outros estudos. A introdução das coordenadas cartesianas por Descartes e Fermat, possibilitou a criação de outras novas curvas, admitindo técnicas algébricas, ao invés de construções geométricas na definição de curvas. Este é outro ponto que pode ser considerado como a descoberta de um novo procedimento, ou seja, "construção do conceito".

Já, ao que se refere à nossa segunda categoria, ou seja, a *evolução do conceito*, podemos consultar o dicionário de filosofia[4], que nos indica "desenvolvimento, volver para fora o que já está contido em algo. Nesse sentido, evolução seria o desenvolvimento pela atualização das possibilidades, das potências já inclusas virtualmente em algo". A essência do significado desse termo é a de desenvolver, designando um processo de mudança, no qual algo novo é produzido de modo que a identidade ou individualidade do objeto original não seja violada.

Ainda segundo esse dicionário, além da ideia de desenvolvimento que o termo evolução indica, podemos dizer que "evolução" faz referência a um processo gradual e ordenado, diferente de revolução que é um processo de desenrolar súbito e possivelmente violento.

Para Gomes (2005, p. 71) "[...] um conceito é criado e transforma-se no decorrer dos tempos, sofrendo adaptações e reformulações. Princípio o qual denominamos evolução histórica de conceitos". De acordo com o autor, o conhecimento não nasce com o indivíduo (empirismo), não é dado (apriorismo) e sim construído (construtivismo).

> A natureza de uma realidade viva não é revelada apenas pelos seus estágios inicias nem pelos seus estágios terminais, mas pelo próprio progresso de suas transformações; é a lei da construção, quer dizer, o sistema operatório na sua constituição progressiva. (GOMES, 2005, p.71, apud. PIAGET& GARCIA, 1987, p.12).

Segundo este autor, o desenvolvimento da matemática se deu desse modo, ou seja, cada etapa surgiu de consequências e de etapas anteriores que, ou reforçam o seu entendimento, ou reconstroem-se de uma maneira que satisfaz as necessidades imediatas (evolucionismo).

Para Chyczy (2014) conforme o tempo avança ocorrem mudanças na matemática, uma disciplina que está suscetível a frequentes evoluções. Para a autora a "[...] evolução de um

[4] Evolução. Dicionário de Filosofia, 2019. Disponível em: < https://sites.google.com/view/sbgdicionariodefilosofia/evolu%C3%A7%C3%A3o>.

conceito, ou um objeto matemático, possui uma riqueza de detalhes que muitas vezes estão presentes em sua “face interna” [...]”. (CHYCZY, 2014, p.34). Podendo ser revelada através do estudo da historicidade do conceito.

O método de Fermat para encontrar a tangente consistiam em ideias que formam o embrião do conceito de derivada, no entanto ele não utilizava notação apropriada e o conceito de limite não estava ainda claramente definido, com isso foi Leibniz que algebrizou o Cálculo Infinitesimal introduzindo os conceitos de variável, constante e parâmetro e a notação dx e dy, sendo assim, houve uma “evolução do conceito”.

Antes de Newton e Leibniz os matemáticos já tinham enorme conhecimento sobre o modo de resolver problemas específicos de cálculos infinitesimais, no entanto não reconheciam a generalidade e a potencialidade das técnicas empregadas. Pode se considerar que a “evolução do conceito” ocorreu em todos os métodos, pois na medida que os estudiosos apresentavam seus trabalhos, com o passar dos anos surgiam novas necessidades, fazendo-se necessário o desenvolvimento das concepções para satisfazer esses pontos.

5. CONSIDERAÇOES FINAIS

Embasado no referencial teórico apresentado podemos considerar que o trabalho a partir da História da Matemática, juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos vem promovendo um ambiente de melhoria tanto no processo de ensino, quanto na aprendizagem de temas matemáticos, possibilitando aulas dinâmicas e interessantes, além de propor uma Matemática contextualizada e integrada às outras disciplinas.

Com isso, buscamos compreender a interrogação inicial da pesquisa: "Modos pelos quais os alunos compreendem o processo histórico da Matemática, no que refere ao estudo da reta tangente?". A pesquisa foi desenvolvida a partir de um estudo de caso com interpretação fenomenológica dos dados, e que nos permitiu chegarmos à duas categorias abertas: *Construção do conceito matemático* e *Evolução do conceito matemático*. A discussão dessas categorias nos possibilitou uma compreensão do investigado.

A partir da análise dos dados percebemos que os alunos consideram importante para a compreensão de um conceito Matemático o conhecimento do seu processo de descoberta, de criação e de desenvolvimento. Compreenderam que o conceito de derivada faz parte de um desenvolvimento que ocorreu ao longo do tempo, a partir da ideia de reta tangente a uma curva. Além de perceberem também a relevância de todos os métodos apresentados, que se deram ao longo da história.

A primeira categoria: *Construção do conceito Matemático* entendemos que faz menção ao ato de criar, construir algo, podendo relacionar por exemplo, com a primeira definição de reta tangente de Euclides, com a introdução das coordenadas cartesianas de Descartes e Fermat, ou seja, com todos as primeiras descobertas matemáticas que estruturaram o Cálculo Diferencial.

No entanto, com o passar dos anos surgem necessidades, fazendo-se necessário o desenvolvimento dessas descobertas, o que se refere a segunda categoria: *Evolução do conceito Matemático*. Podemos relacionar a essa categoria é o método de Fermat que apesar de consistir em ideias que formam o embrião do conceito de derivada, não utilizava notação adequada, fazendo se necessário que o matemático Leibniz algebrizasse o Cálculo Infinitesimal, proporcionando uma evolução das concepções do matemático francês.

Ao discutirmos as duas categorias, a partir dos autores apresentados, compreendemos que um conceito é criado e no decorrer do tempo se transforma, sofrendo reformulações. Além de que a evolução de um conceito, ou um objeto matemático, possui uma grande quantidade de particularidades que muitas vezes são revelados com mais facilidade a partir do estudo da historicidade do conceito.

Nesta perspectiva reafirmamos a relevância de um trabalho desenvolvido a partir da História da Matemática, que possibilita criar um ambiente de compreensão de conceitos e ideias, além de proporcionar uma aula singular.

REFÊRENCIAS

ALVES, L. L. S. **Derivadas como no tempo de Newton e Leibniz**. [sd]. Disponível em: https://docplayer.com.br/18524963-Derivadas-como-no-tempo-de-newton-e-leibniz.html. Acesso em: 08 de mar.2020.

ARAMAN, E. M. O.; BATISTA, I, L. O processo de construção de abordagens históricas na formação interdisciplinar do professor de matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 380 - 407, 2017. Disponível em:https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-636X2017000100021&script=sci_abstract&tlng=pt. Acesso em: 03 de jan.2021.

ÁVILA, G. **Análise Matemática para licenciatura**.3. São Paulo: Blucher, 2006, 260p. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=Awm2DwAAQBAJ&printsec=frontcover&dq=An%C3%A1lise+Matem%C3%A1tica+para+licenciatura&hl=pt-BR&sa=X&ved=2ahUKEwibsOK_i8LuAhWeI7kGHQgsD6sQ6AEwAHoECAMQAg#v=onepage&q=An%C3%A1lise%20Matem%C3%A1tica%20para%20licenciatura&f=false. Acesso em: 15 abr.2020.

BICUDO, M.A.V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia,** v.5, n.2, p15-26, 2012. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/1185/840. Acesso em 15 jan.2020.

BICUDO, M.A.V. Pesquisas em educação matemática. **Pró- posições (UNICAMP), Campinas,** v.4, n1[10], p18-23, 1993. Disponível em:https://fe-old.fe.unicamp.br/pf-fe/publicacao/1755/10-artigos-bicudomav.pdf. Acesso em 12 jan.2020.

BICUDO, M. A. V. **Sobre a fenomenologia**. In: BICUDO, M. A. V.; ESPÓSITO, V. H. C. Pesquisa qualitativa em educação. Piracicaba: UNIMEP, 1994. Cap. 1, p. 15-22. Disponível em:http://www.mariabicudo.com.br/resources/CAPITULOS_DE_LIVROS/Sobre%20a%20fenomenologia.pdf. Acesso em: 18 abr.2020.

CHYCZY, L. F. **Historicidade da matemática: subsídios para a (re)construção de um conceito e suas implicações nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2014. Dissertação Programa de pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012. Disponível em:http://www.exatas.ufpr.br/portal/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/03/046_LucianedeFatimaChyczy.pdf. Acesso em 05 de jan. 2021.

CONCEITO DE. Conceito de construção. 2014. Disponível em: https://conceito.de/construcao. Acesso 03 de jan. 2021.

FERRÃO, N. S.; ALMEIDA, M. V.; MARCELINO, S. B. O Método das tangentes de Newton: uma abordagem que associa história e tecnologia com o uso do software GeoGebra. **Instituto GeoGebra internacional de São Paulo**, n.1, v.1, p.172-183, 2012. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8327/6706. Acesso em: 06 de mar.2020.

FERREIRA, A. S.; ZUIN, E. S. L.; OLIVEIRA, L. M. L. P. R. **A derivada e suas diferentes abordagens: Uma proposta para introdução do seu conceito.** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pontifícia Universidade Católica (PUC-Minas), Belo Horizonte, 2017. Disponível em:http://www1.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20180320143825.pdf. Acesso em: 04 de mar. 2020.

FREITAS, W. R. S.; JABBOUR. C. J. C. Utilizando estudo de caso (s) como estratégia de pesquisa qualitativa: Boas práticas e sugestões. **Estudo & Debate**, Lajeado, v. 18, n. 2, p. 07-22, 2011. Disponível em: http://www.meep.univates.br/revistas/index.php/estudoedebate/article/view/560/550. Acesso em: 02 de fev.2020.

GREGÓRIO, S. B. **Dicionário de filosofia.** 2019. Disponível em:https://sites.google.com/view/sbgdicionariodefilosofia/evolu%C3%A7%C3%A3o. Acesso em 04 de jan. 2021.

GOMES, E. B. **A História da matemática como metodologia de ensino da matemática**: Perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos. 2005. Dissertação (Programa de pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

HAVEROTH, G. A. **As várias faces da derivada**. 2013. Trabalho de conclusão de curso- Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Joinville, 2013. Disponível em:http://sistemabu.udesc.br/pergamumweb/vinculos/000019/0000197c.pdf. Acesso em: 15 de mar.2020.

HAVEROTH, G. A.; FIGUEIREDO. E. B.; AGUIAR. R. Os métodos de Descartes e Fermat para determinar a tangente a uma curva. **Congresso de matemática aplicada computacional (CMAC)**, Joinville, p.150-152, 2013. Disponível em: http://arquivo.sbmac.org.br/cmacs/cmac-se/2013/trabalhos/PDF/4266.pdf. Acesso em: 03 de mar. 2020.

LIMA, L. A. N. O método da pesquisa qualitativa do fenômeno situado. Uma criação do educador brasileiro Joel Martins, seguida pela professora Maria Aparecida Virgianni Bicudo. As análises; Idiográfica e Nomotética. **Investigação Qualitativa em Educação**, v.1, p.534-540, 2016. Disponível em: https://proceedings.ciaiq.org/index.php/ciaiq2016/article/view/640. Acesso em: 20 abr. 2020.

LOPES, L. S.; FERREIRA, A. L. A. Um olhar sobre a história nas aulas de matemática. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75–88, nov. 2013. Disponível em:http://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/P.2316-9451.2013v2n1p75. Acesso em: 15 jun. 2020.

MACHADO, O. V. M. Sobre a pesquisa qualitativa em educação, que tem a fenomenologia como suporte. In: BICUDO, M. A. V. e ESPOSITO, V. H. C. (Orgs) **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Editora UNIMEP, 1994. p. 35-46.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de matemática**: fundamentos e sugestões didáticas para professores. 1ª edição. Belém: SBHMat,2016. 124p.

MICHAELIS: Moderno dicionário de língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos. 2021. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/. Acesso em: 03 de jan.2021.

Origem do conceito de derivada de uma função. **Só matemática**. Virtuous Tecnologia da Informação,1998-2021. Disponível em: https://www.somatematica.com.br/historia/derivadas.php. Acesso 06 de mar. 2020.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Lisboa, v25, p.05-132, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/277117517_Estudos_de_Caso_em_Educacao_Matematica/link/5757456708ae04a1b6b6910c/download. Acesso em: 05 de fev.2020.

PRESTES, M. L. A. A pesquisa qualitativa na educação. **Educ.e Filos,** Uberlândia, v.4, n.7, p91-104, jul./dez.1989. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/EducacaoFilosofia/article/view/1869/1554. Acesso em 12 jan.2020.

RICHARDSON, Roberto Jarry. **Pesquisa social**: métodos e técnicas. São Paulo: Atlas, 1989.

ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. F. P. **Tópicos de História da Matemática**. 1. Rio de janeiro: SBM, 2012. 301p.

ROQUE, T. **História da Matemática:** Uma visão crítica. Desfazendo mitos e lendas.1. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.1,512p.

SIGUENÃS, L. E. B. **A utilização do software Geogebra no ensino de Derivada**. 2009. Trabalho de conclusão de curso- UNIFRAN- Centro Universitário Franciscano, Santa Maria (RS**),** 2009.

SUASSUNA, L. Pesquisa qualitativa em educação e linguagem: histórico e validação do paradigma indiciário. **Perspectiva,** Florianópolis, v. 26, n. 1, p.341-377, 2008. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/2175-795x.2008v26n1p341. Acesso em: 08 de mar.2020.

ANEXO A- QUESTIONÁRIO

1- Você consegue identificar uma ideia intuitiva comum, sobre a reta tangente ou derivada, nos métodos estudados?

2- Como você pensa a relação entre a História da Matemática e a compreensão de um conceito matemático?

3- Como você entende a discussão por meio da História da Matemática para a compreensão do conceito de derivada?

4- Você se identificou com algum dos métodos apresentados para a discussão sobre o conceito de derivadas? Qual deles? Por quê?

5- Você consegue identificar as semelhanças entre as ideias de Newton e Barrow? Quais são elas?