



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**Construcionismo, Conhecimentos Docentes e GeoGebra:
uma experiência envolvendo licenciandos em Matemática
e professores**

RITA DE CÁSSIA IDEM

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO

2017

Rita de Cássia Idem

Construcionismo, Conhecimentos Docentes e GeoGebra: uma experiência envolvendo licenciandos em Matemática e professores

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

Rio Claro – SP
2017

370.71 Idem, Rita de Cássia
I19c Construcionismo, conhecimentos docentes e GeoGebra:
uma experiência envolvendo licenciandos em Matemática e
professores / Rita de Cássia Idem. - Rio Claro, 2017
163 f. : il., figs., quadros

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

1. Professores - Formação. 2. Tecnologias digitais. 3.
Geometrias plana e espacial. 4. Construcionismo. 5. TPACK.
I. Título.

Rita de Cássia Idem

Construcionismo, Conhecimentos Docentes e GeoGebra: uma experiência envolvendo licenciandos em Matemática e professores

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva – Orientador

Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi

Profa. Dra. Maria Elisabette Brisola Brito Prado

Resultado: Aprovada.

Rio Claro, SP, 7 de dezembro de 2017.

Dedico esta dissertação à minha mãe Isabel Aparecida Rodrigues Idem, ao meu pai Lázaro Mariano Idem e ao meu irmão Fabiano Donizeti Idem.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente para que esta dissertação se tornasse realidade.

Primeiramente, agradeço à minha família, que tanto me apoiou durante o Mestrado. Foram meses de muito aprendizado e crescimento profissional, pessoal e acadêmico; sem a ajuda de vocês isso não seria possível.

Agradeço ao Professor Doutor Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva por aceitar me orientar, por sua paciência, principalmente no início do Mestrado, e por seus ensinamentos. Obrigada por me guiar nesta pesquisa e me proporcionar contato com novas ideias em relação ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

Agradeço ao Professor Doutor Marcus Vinicius Maltempi e à Professora Doutora Maria Elisabette Brisola Brito Prado pela participação nas bancas de qualificação e defesa e pelas grandes contribuições ao meu trabalho.

Agradeço aos sujeitos da pesquisa por sua participação no curso de extensão universitária e por sua colaboração no desenvolvimento das atividades realizadas durante a produção de dados.

Agradeço aos colegas e amigos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) por seu apoio nas esferas acadêmicas e não acadêmicas durante o período do Mestrado.

Agradeço aos membros do GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática) pelas contribuições nessa jornada, pelo apoio e pela amizade.

Agradeço à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e ao CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa), pelo financiamento à pesquisa.

RESUMO

Esta pesquisa teve como cenário de investigação um curso de extensão universitária, do qual participaram licenciandos em Matemática e professores. O curso se deu por meio de investigações de atividades sobre Geometria Plana e Geometria Espacial com o uso do *software* GeoGebra e discussões sobre a integração de tecnologias digitais no ensino. Nesse contexto, o objetivo foi identificar e analisar conhecimentos que emergiram durante o curso de extensão universitária, bem como, investigar os contextos em que essa emergência ocorreu. Sendo assim, a pergunta que norteou esta pesquisa foi: *Que conhecimentos docentes emergem quando licenciandos em Matemática e professores exploram atividades de Geometria utilizando o GeoGebra?* Este estudo apoiou-se teoricamente no Construcionismo, e nos Conhecimentos Docentes, principalmente em relação ao construto teórico Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo (TPACK). A produção de dados se deu por meio de filmagens dos encontros do curso, da gravação da tela do computador, da coleta de atividades escritas dos participantes, do desenvolvimento de atividades pelos participantes e de entrevistas semiestruturadas com os mesmos. A análise dos dados evidenciou dois momentos distintos: um momento em que ocorriam Ciclos de Ações construcionistas e emergiam Conhecimentos Tecnológicos, de Conteúdo e suas articulações, caracterizado pela exploração das atividades do curso; em outro momento emergiam Conhecimentos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo e conhecimentos referentes ao contexto educacional, caracterizado pelas discussões no curso, pelas entrevistas e pelo desenvolvimento de atividades. Os resultados evidenciaram que durante o curso houve a emergência de conhecimentos necessários à integração das tecnologias digitais no ensino, os quais se relacionaram à experimentação geométrica com o GeoGebra, à aprendizagem construcionista e a possíveis obstáculos à integração das tecnologias digitais no ensino. Dessa maneira, este estudo buscou contribuir com discussões sobre a articulação teórica Construcionismo-TPACK na aprendizagem docente e sobre perspectivas de sua influência na formação de professores de Matemática.

Palavras-Chave: Tecnologias Digitais. Geometrias Plana e Espacial. Construcionismo. TPACK. Formação de Professores.

ABSTRACT

This research had as an investigation scenario a university extension course, which was attended by future Mathematics teachers and teachers. The course took place through investigations of activities about Plane Geometry and Space Geometry with the using of GeoGebra software and discussions about the integration of digital technologies in teaching. In this context, the objective was to identify and analyze knowledge that emerged during the university extension course, as well as to investigate the contexts in which this emergence occurred. Thus, the question that guided this research was: *What teaching knowledge emerge when undergraduate Mathematics students and teachers explore Geometry activities using GeoGebra?* This study was theoretically based on Constructionism, and on Teaching Knowledge, mainly in relation to the theoretical construct Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK). The production of data took place through the filming of the course meetings, the recording of the computer screen, the collection of written activities of the participants, the development of activities by the participants and semi-structured interviews with them. The analysis of the data revealed two distinct moments: a moment in which constructionist Cycles of Actions occurred and Technological Knowledge, Content Knowledge and their articulations emerged, characterized by the exploration of the activities of the course; In another moment emerged Pedagogical Knowledge, Technological Pedagogical Knowledge, Technological Pedagogical Content Knowledge and knowledge regarding the educational context, characterized by the discussions in the course, the interviews and the development of activities. The results evidenced that during the course there was the emergence of the necessary knowledge to integrate digital technologies in teaching, which were related to geometric experimentation with GeoGebra, constructionist learning and possible constraints to the integration of digital technologies in teaching. In this way, this study sought to contribute with discussions about the theoretical articulation of Constructionism-TPACK in teacher learning and on the perspectives of its influence in the Mathematics Teachers' Education.

Keywords: Digital Technologies. Plane and Space Geometries. Constructionism. TPACK. Teacher Education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Blocos temáticos do Currículo do Estado de São Paulo	31
Figura 2: Níveis de aprendizagem da Geometria	34
Figura 3: A Espiral da Aprendizagem	44
Figura 4: A Espiral da Aprendizagem e a prática pedagógica do professor.....	47
Figura 5: Conhecimentos Docentes segundo Shulman (1987, 1987).....	51
Figura 6: Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo	53
Figura 7: Perspectivas do TPACK exploradas nesta pesquisa	55
Figura 8: Plataforma do GeoGebra.....	67
Figura 9: Janela 3D.....	68
Figura 10: Ferramenta “Pirâmide”	68
Figura 11: Construção do triângulo equilátero e do tetraedro regular.....	71
Figura 12: Construção da Reta de Euler e da Circunferência de Nove Pontos	72
Figura 13: Construção da atividade Diagonais do Cubo	73
Figura 14: Construção de um prisma oblíquo	73
Figura 15: Exploração da interseção de um cubo por um plano	74
Figura 16: Construção da quadratura do círculo	75
Figura 17: Construção do prisma pentagonal	76
Figura 18: Hexágono e seis triângulos equiláteros.....	90
Figura 19: Tentativa de construção do triângulo equilátero com a ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo”.....	93
Figura 20: Passos da construção de um cubo	95
Figura 21: Construção do cubo.....	96
Figura 22: Construção do prisma pentagonal oblíquo.....	98
Figura 23: Um Ciclo de Ação global e Ciclos de Ações internos a ele.....	99
Figura 24: Verificação do resultado algébrico por meio de elementos geométricos na construção de um triângulo equilátero.....	103
Figura 25: Explorando as medianas de um triângulo	104
Figura 26: TPACK	111
Figura 27: Parte da atividade desenvolvida por Bárbara	119
Figura 28: Atividade desenvolvida por Nayara	120
Figura 29: Atividade desenvolvida por José	121

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Ferramentas do GeoGebra utilizadas no curso de extensão universitária	68
Quadro 2: Sujeitos da pesquisa.....	76
Quadro 3: Descrição os encontros do curso de extensão universitária	77
Quadro 4: Modelo de análise de vídeo	80
Quadro 5: Atividades desenvolvidas pelos participantes	81
Quadro 6: Questões das entrevistas semiestruturadas	83

LISTA DE SIGLAS

AGD – Ambiente de Geometria Dinâmica

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

C, CK – Conhecimento de Conteúdo

CAI – Computer Aided Instruction (Instrução Auxiliada pelo Computador)

GD – Geometria Dinâmica

GIF – Graphics Interchange Format (Formato de Mudanças de Gráficos)

GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática

P, PK – Conhecimento Pedagógico

PCK – Conhecimento Pedagógico de Conteúdo

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PCN+ – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais

PCNEM – Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PMD – Performance Matemática Digital

T, TK – Conhecimento Tecnológico

TCK – Conhecimento Tecnológico de Conteúdo

TDIC – Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação

TIC – Tecnologias de Informação e Comunicação

TPACK – Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo

TPK – Conhecimento Tecnológico Pedagógico

UCA – Um Computador por Aluno

UNESP – Universidade Estadual Paulista

SUMÁRIO

1 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A TRANSFORMAÇÃO NO ENSINO	13
1.1 De aluna à pesquisadora	19
1.2 Estrutura da dissertação	21
2 GEOMETRIA: HISTÓRIA, ENSINO, APRENDIZAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS	22
2.1 Desenvolvimento histórico da Geometria	22
2.2 O ensino de Geometria no Brasil.....	27
2.3 A aprendizagem da Geometria	32
2.4 Tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da Geometria.....	35
3 CONSTRUCIONISMO E CONHECIMENTOS DOCENTES	39
3.1 Formação de professores	39
3.2 Construcionismo.....	41
3.2.1 Pesquisas norteadas pelo Construcionismo	47
3.3 Conhecimentos Docentes	50
3.3.1 Pesquisas norteadas pelos Conhecimentos Docentes	55
3.4 Construcionismo e Conhecimentos Docentes	59
4 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	63
4.1 Abordagem metodológica	63
4.2 Cenário da pesquisa	65
4.2.1 GeoGebra.....	66
4.2.2 Atividades exploradas no curso	70
4.2.3 Sujeitos da pesquisa.....	76
4.2.4 O curso de extensão universitária.....	77
4.3 Produção de dados.....	78
4.3.1 Filmagens do curso.....	79
4.3.2 Registros escritos.....	80

4.3.3 Desenvolvimento de atividades	81
4.3.4 Entrevistas semiestruturadas.....	82
5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....	85
5.1 Introdução	85
5.2 Exploração das Atividades do Curso de Extensão Universitária	86
5.2.1 Descrição Verbal	88
5.2.2 Limitação do Processo de Depuração.....	92
5.2.3 Ciclos de Ações	94
5.2.4 Reflexão.....	100
5.2.5 GeoGebra para Experimentar Ideias.....	102
5.3 Discussões sobre Tecnologias Digitais no Ensino	106
5.3.1 Papel do Professor	108
5.3.2 Estrutura das Escolas	111
5.3.3 Visualização.....	114
5.3.4 Construção do Conhecimento.....	117
5.3.5 Dinamicidade.....	120
5.4 Conclusões.....	122
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	124
REFERÊNCIAS	130
APÊNDICES	139
APÊNDICE A	139
Atividade 1: Triângulo Equilátero e Tetraedro Regular.....	139
Atividade 2: Reta de Euler e Circunferência de Nove Pontos.....	143
Atividade 3: Diagonais do Cubo	146
Atividade 4: Construções Geométricas no Espaço.....	147
Atividade 5: Interseção entre Plano e Poliedros	149
Atividade 6: A Quadratura do Círculo – Método de Ernest Hobson.....	150

Atividade 7: Prismas.....	154
APÊNDICE B.....	157
APÊNDICE C.....	160

1 AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E A TRANSFORMAÇÃO NO ENSINO

No silêncio da sala de aula ecoa a voz do mestre. Alunos calados escutam e copiam as suas palavras. Pausadamente, o professor dita sua versão da matéria com o estatuto da verdade absoluta. Alguns dos alunos permanecem com os olhos fixos no ambiente da sala, mas o pensamento viaja. Estão fisicamente presentes, mas mentalmente ausentes, distantes, embalados pelo som constante e monotônico da preleção. A hora e a vez desses alunos nos espaços pedagógicos são restritas e definidas. Reproduzir nos exercícios, nos trabalhos e nas provas o pensamento do professor que “ensina”. Para esquecê-los depois. (KENSKI, 2003, p. 65).

As práticas escolares permanecem estáticas às mudanças sociais, culturais, econômicas e tecnológicas das últimas décadas. Esse modelo de ensino chamado “ensino tradicional” ou “ensino transmissivo”, acima descrito por Kenski (2003), se baseia “[...] na transmissão de conhecimento, o qual concebe o aluno passivo, sem capacidade crítica e reflexiva, com uma visão de mundo segundo a que lhe foi transmitida.” (PRADO, 1998, p. 2); é o que na perspectiva de Freire (2013) chama-se Educação Bancária, na qual o papel do professor é depositar o conhecimento no aluno,

A narração, de que o educador é o sujeito, conduz os educandos à memorização mecânica do conteúdo narrado. Mais ainda, a narração os transforma em “vasilhas”, em recipientes a serem “enchidos” pelo educador. Quanto mais vá “enchendo” os recipientes com seus “depósitos”, tanto melhor educador será. Quanto mais se deixem docilmente “encher”, tanto melhores educandos serão. [...] Desta maneira, a educação se torna um ato de depositar, em que os educandos são os depositários e o educador, o depositante. (FREIRE, 2013, p. 90).

Ao passo que vemos as práticas de ensino sempre se reproduzindo da forma transmissiva, em todos os níveis de ensino, a sociedade tem vivido transformações radicais nas últimas décadas, principalmente, com a popularização dos computadores e do acesso à Internet, ou seja, das tecnologias digitais. Em meio às transformações causadas pelas tecnologias digitais, a escola se encontra em crise, como aponta Tedesco (2015, p. 120),

A cultura escolar baseada no livro e no manejo da língua escrita começou a competir com a imagem e a tela. Mais recentemente, as tecnologias da comunicação, com seu enorme potencial para acumular e transmitir informação colocaram a escola num lugar subalterno em relação ao seu dinamismo para transmitir informações e conhecimentos socialmente relevantes. Essas mudanças tecnológicas foram concomitantes com um processo de crise geral da autoridade dos adultos para transmitir conteúdos culturais.

Kenski (2003) discute que as pessoas têm uma visão negativa em relação às tecnologias, os indivíduos as veem como algo oposto à natureza humana. Entretanto, o termo “tecnologia” não se restringe às máquinas. Tecnologia é o “[...] conjunto de conhecimentos e princípios

científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade.” (KENSKI, 2003, p. 18). As tecnologias que os seres humanos foram capazes de criar em sua evolução histórica facilitaram a sua sobrevivência e influenciaram a sua cultura, como aponta Kenski (2010, p. 20-21), “O desenvolvimento tecnológico de cada época da civilização marcou a cultura e a forma de compreender a sua história. Todas essas descobertas serviram para o crescimento do acervo cultural da espécie humana.”. Além disso, as tecnologias disponíveis em cada época influenciaram comportamentos de forma individual e coletiva.

A evolução humana acompanhou a evolução tecnológica. Atualmente já não somos capazes de viver sem as tecnologias, uma vez que as “[...] atividades cotidianas mais comuns – como dormir, comer, trabalhar, ler, conversar, deslocarmo-nos para diferentes lugares e divertimo-nos – são possíveis graças às tecnologias a que temos acesso.” (KENSKI, 2003, p. 18).

O computador, “[...] um dispositivo capaz de executar cálculos e tomar decisões lógicas a velocidades de milhões, até bilhões, de vezes mais rápido do que os seres humanos podem.”¹ (DEITEL; NIETO; DEITEL, 2002, p. 4, tradução nossa), é a principal tecnologia que tem ditado transformações sociais nas últimas décadas. Ele é um tipo particular de tecnologia, uma tecnologia digital, que se refere “[...] aos processos e produtos relacionados com os conhecimentos provenientes da eletrônica, da microeletrônica e das comunicações.” (KENSKI, 2010, p. 25).

As tecnologias digitais invadem nosso cotidiano e “[...] interferem em nosso modo de pensar, sentir, agir, de nos relacionarmos socialmente e adquirimos conhecimentos.” (KENSKI, 2003, p. 23-24). E as interações dos indivíduos com as mídias “[...] criam uma nova cultura e um novo modelo de sociedade.” (KENSKI, 2003, p. 24). Nesse sentido, se torna papel da escola formar cidadãos capazes de pensar e agir criticamente frente às tecnologias digitais na cultura e na sociedade impostas por elas.

O uso das tecnologias digitais nos processos de ensino se iniciou ainda na década de 1950, nos Estados Unidos, período no qual o computador era utilizado como uma máquina de ensinar, na perspectiva behaviorista de Burrhus Frederic Skinner (VALENTE, 1999a). A forma como o computador foi utilizado, com base em tal perspectiva, ocorreu por meio do *Computer-Aided Instruction*² (CAI). Essa possibilidade de ensino mediado por tecnologias se tornou

¹ [...] a device capable of performing computations and making logical decisions at speeds millions, even billions, of times faster than human beings can.

² Instrução Auxiliada pelo Computador.

popular naquele país na década de 1980, com a disseminação dos microcomputadores. Esse processo, entretanto, também favoreceu o surgimento de “[...] novas modalidades de uso do computador na Educação, como ferramenta no auxílio de resolução de problemas, na produção de textos, manipulação de banco de dados e controle de processos em tempo real.” (VALENTE, 1999a, p. 15-16).

Com a popularização dos microcomputadores também ocorreu crescente uso do programa educacional LOGO. Esse *software* foi idealizado e desenvolvido pelo pesquisador Seymour Papert e seus colaboradores do MIT³ na década de 1970. Com grandes críticas aos programas CAI, Papert idealizou o computador como possibilidade não de transmissão, mas sim de construção do conhecimento, como observa Valente (1999a, p. 12)

Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o aluno descrever a resolução de problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas idéias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias.

O LOGO, que também se popularizou no Brasil na década de 1980, marca a primeira fase do uso das tecnologias digitais na Educação Matemática, segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014). Nessa fase, o foco principal estava na relação entre a programação e o pensamento matemático; ela mostrou-se importante por considerar as tecnologias digitais como elementos importantes nas mudanças pedagógicas.

A segunda fase do uso das tecnologias digitais no ensino de Matemática ocorreu com surgimento de programas de Geometria Dinâmica e programas gráficos, com foco na experimentação, visualização e demonstração. Junto com a Geometria Dinâmica, surgiu a ideia da prova do arrastar, na qual a construção geométrica só é considerada “construção” se resiste ao arrastar pelo curso do mouse; os programas mais conhecidos foram o Cabri Géomètre e o Geometricks. Em relação aos programas gráficos, os mais populares foram o Derive, o Winplot e o Graphmatica, os quais inovaram ao potencializar a experimentação matemática.

O surgimento da Internet caracteriza a terceira fase, na qual a Educação a Distância *online* se torna possível. Nesse período a informação e a comunicação são potencializadas, com a popularização do *e-mail*, de chats, do Google; é a partir dessa fase que surge o termo Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC). Particularmente em relação à Educação a Distância, o ambiente de aprendizagem se apoia na colaboração *online* e nas comunidades de aprendizagem.

³ Massachusetts Institute of Technology (Instituto de Tecnologia de Massachusetts): <http://web.mit.edu/>.

A quarta fase é caracterizada pelo advento da Internet rápida, a acessibilidade a tecnologias digitais portáteis e o uso da Internet em sala de aula; particularmente no ensino da Matemática, essa fase potencializa a Modelagem Matemática e ocorre o surgimento da Performance Matemática Digital (PMD). Dentre todas as inovações dessa fase, talvez a mais marcante seja o advento do GeoGebra, um *software* gratuito que combina Álgebra, Tabelas, Gráficos, Estatística e Cálculo; além de ser indicado para todos os níveis de ensino, ainda, apresenta uma plataforma amigável e potencializa a exploração, a conjectura e investigação matemática.

As tecnologias digitais possibilitam transformações nos processos de ensino. Segundo os PCN+⁴ (BRASIL, 2002, p. 136) o uso de computadores e da Internet apresenta grande potencial pedagógico

O crescente uso dos computadores constitui um importante capítulo à parte, pois, além de sua capacidade de edição de textos e organização de dados, abre portas para um universo de informações, com o aprendizado da “navegação” na Internet, permitindo consultar inúmeros bancos de dados e sites informativos e formativos, para não falar dos estimulantes intercâmbios individuais e institucionais.

Embora mostrem-se benéficas para a Educação e, especificamente, para a Educação Matemática, as tecnologias digitais ainda não são integradas no contexto escolar da Educação Básica. Javaroni e Zampieri (2015) apresentam resultados parciais do projeto “Mapeamento do uso das tecnologias de informação nas aulas de Matemática do Estado de São Paulo”, cujo objetivo é “[...] identificar como as tecnologias da informação e comunicação (TIC) vêm sendo utilizadas nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental – Anos Finais (6º ao 9º ano do Ensino Fundamental) na Educação Básica do Estado de São Paulo.” (JAVARONI; ZAMPIERI, 2015, p. 999-1000). As autoras apontam que os laboratórios pesquisados possuem diversas barreiras para seu uso, como falta de computadores, computadores quebrados, falta de monitores, entre outros. Além disso, foi constatado que os professores de Matemática “[...] não se sentem suficientemente seguros para utilizar as TIC em suas aulas, sendo um dos fatores a falta de preparo para isso, tanto em relação à formação inicial, quanto em relação à continuada.” (JAVARONI; ZAMPIERI, 2015, p. 1008).

Quando comparado a outras áreas da ciência, os professores de Matemática são os que mais dificuldades apresentam na integração das tecnologias do ensino. Sarti (2014), em seu levantamento sobre o uso das tecnologias digitais por professores do Ensino Médio das áreas

⁴ PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências Humanas e suas Tecnologias

de Física, Química, Biologia e Matemática da cidade de Campinas, concluiu que a maioria dos professores utilizam tais tecnologias na perspectiva de um ensino transmissivo e que os professores de Matemática são os que menos as usam em suas práticas pedagógicas.

A formação inicial do professor é ainda majoritariamente impregnada pelo ensino transmissivo e sem o uso das tecnologias digitais. Pesquisas apontam que a integração das tecnologias digitais nos cursos de licenciatura é deficiente. Silva (2011) buscou identificar a integração de tecnologias digitais nos cursos de formação inicial de professores de Matemática, analisando o Projeto Político Pedagógico de diversos cursos de graduação da região metropolitana de Recife; os resultados mostraram que a integração das tecnologias na formação docente é muito precária. Lopes (2010) investigou se cursos de licenciatura das universidades públicas do estado de São Paulo formam professores para fazer a integração das tecnologias digitais no ensino, analisando a grade curricular e o Projeto Político Pedagógico dos cursos. A pesquisadora verificou que, considerando a área de Ciências Exatas, houve maior concentração de disciplinas optativas com foco apenas nas tecnologias digitais, ou seja, sem contextualização de sua utilização no ensino, e que, dentre os seis Projetos Políticos Pedagógicos analisados pela pesquisadora, apenas dois se preocupavam com a integração das tecnologias digitais na formação docente.

A formação continuada do professor pouco se mostra efetiva para o uso das tecnologias digitais no ensino. Pereira, Andrade e Miola (2016, p. 296) apontam que “[...] professores são submetidos a propostas de formação continuada que não consideram a realidade em que esses professores atuam.”, sendo assim, o aprendizado a que os professores são submetidos não influencia suas práticas docentes.

Borba e Penteado (2010) apontam que o professor tem medo de se arriscar no uso das tecnologias digitais. Para os autores, o professor se encontra na zona de conforto com metodologias tradicionais de ensino e não se aventuram em práticas inovadoras por causa das imprevisibilidades do uso as tecnologias digitais. Acredito que a zona de conforto pode influenciar a prática pedagógica na utilização das tecnologias digitais, entretanto, não considero o professor o culpado da falta de integração das tecnologias digitais no ensino, mas sim, uma vítima de um ciclo vicioso. Durante toda sua vida escolar, o professor vivenciou o ensino transmissivo; em sua preparação para a carreira docente, o ensino transmissivo majoritariamente foi utilizado no ensino de diferentes conteúdos específicos; enquanto professor, portanto, integrar⁵ tecnologias digitais em sua prática pedagógica foge ao seu

⁵ Bittar (2011) diferencia os termos “inserir” e “integrar” tecnologias digitais no ensino de Matemática:

entendimento sobre os processos de ensino e aprendizagem. Aliado à falta de conhecimentos relativos ao uso das tecnologias digitais no ensino, existem as salas de aulas lotadas, a falta de infraestrutura nos laboratórios de computadores, as pressões do currículo e de avaliações externas.

Integrar as tecnologias digitais no ensino é possível, mas para isso, é necessário que haja mudança em todos os segmentos educacionais. Além disso, precisamos estar conscientes de que a mudança é lenta. Embora seja lenta, não é impossível. E o primeiro passo para isso, é que os professores reconheçam as potencialidades das tecnologias digitais para o ensino. Os docentes precisam enxergar nas tecnologias digitais possibilidades de ensino e de aprendizagem mais efetivas do que as possibilidades apresentadas pelos métodos transmissivos. Segundo Valente (1999a, p. 12) o professor precisa “[...] entender o computador como uma nova maneira de representar o conhecimento, provocando um redimensionamento dos conceitos já conhecidos e possibilitando a busca e compreensão de novas idéias e valores.”.

Com base nas ideias de que as tecnologias digitais têm potencial para a transformação do ensino tradicional e que os professores pouco vivenciam situações de aprendizagem mediadas pelas mídias, esta pesquisa se desenvolveu por meio de um curso de extensão universitária destinado a licenciandos em Matemática e professores, a partir do qual, os participantes puderam experienciar uma situação de aprendizagem baseada no Construcionismo e nos Conhecimentos Docentes. As atividades do curso, exploravam conceitos de Geometria Plana e de Geometria Espacial, com a utilização do *software* GeoGebra. Em tal contexto, a questão norteadora desta pesquisa foi:

Que conhecimentos docentes emergem quando licenciandos em Matemática e professores exploram atividades de Geometria utilizando o GeoGebra?

Com o intuito de responder à tal questão, os objetivos gerais deste estudo foram identificar e analisar os conhecimentos que emergiram durante o curso de extensão universitária, bem como, investigar os contextos dessa emergência. Os objetivos específicos desta pesquisa foram analisar o desenvolvimento das atividades sob a perspectiva construcionista; e identificar a articulação entre Conhecimentos Docentes e Construcionismo no desenvolvimento do curso.

inserir as tecnologias digitais significa fazer o uso delas de forma desconectada dos objetivos de aprendizagem; integrar as tecnologias digitais na prática pedagógica significa utilizar as tecnologias digitais de forma a contribuir com a aprendizagem dos alunos.

Tendo apresentado a problemática e justificativa deste estudo, a seguir, apresento a trajetória que me levou ao interesse sobre o estudo da integração das tecnologias digitais no ensino de Matemática e, em seguida, apresento a estrutura desta dissertação.

1.1 De aluna à pesquisadora

Ingressei no curso de Licenciatura em Ciências Exatas da Universidade São Paulo, Câmpus de São Carlos no ano de 2010. No ano seguinte, iniciei o estágio no PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência), por meio do qual pude ativamente estar nas escolas de Educação Básica e experimentando situações de ensino, principalmente, por meio de jogos. Foi por meio do PIBID que tive minha primeira experiência com tecnologias digitais no ensino, ao auxiliar um professor na utilização do *software* Graph para o ensino dos conceitos domínio e imagem de funções. Tal experiência mostrou-se muito significativa em minha formação pois, foi por meio dela, que nasceu meu interesse sobre a temática. Embora, em muitas disciplinas discutiam-se artigos sobre a integração das tecnologias digitais no ensino, nada que vivenciei nesses outros momentos de minha formação inicial, se mostrou tão efetivo como aquela experiência.

Em 2013, fui selecionada para um intercâmbio estudantil nos Estados Unidos. Estudei por um ano e meio na *Buffalo State College*⁶. E, enquanto aproveitava tal oportunidade acadêmica e a liberdade de escolha de disciplinas, aprofundei-me em estudos sobre tecnologias digitais no ensino de matemática.

A mais significativa das disciplinas a que me submeti no intercâmbio foi a *Technologies in the Teaching of Mathematics*⁷. Em tal disciplina pude conhecer diversos programas educacionais para o ensino de Matemática e, além disso, pude vivenciar situações de aprendizagem por meio deles. Parte da disciplina, inclusive, foi a observação de práticas pedagógicas de professores ao utilizarem tecnologias no ensino. Pude conhecer duas escolas públicas de Buffalo e acompanhar diferentes professores dos Ensinos Fundamental e Médio. Percebi que as barreiras de infraestrutura que observamos nas escolas brasileiras não estavam presentes nas escolas estadunidenses que conheci. Entretanto, possuir recursos tecnológicos não é garantia da transformação no ensino. A maioria dos professores que pude observar, apenas adaptaram o ensino transmissivo para ser realizado por meio de lousas digitais, calculadoras gráficas e computadores portáteis; na prática de tais professores a presença ou ausência das

⁶ <http://suny.buffalostate.edu/>

⁷ Tecnologias no Ensino de Matemática

tecnologias digitais pouco interferia na maneira como o ensino era desenvolvido. Outros professores, entretanto, desenvolviam sua prática pedagógica aliando materiais concretos e tecnologias digitais, realizavam a investigação matemática e provocava a motivação dos alunos que eram ativos no processo de aprendizagem.

A primeira reação que tive de tal experiência foi o julgamento. Foi julgar os professores que não utilizavam as tecnologias digitais na perspectiva a que tive contato na disciplina e na perspectiva dos outros professores que muito desenvolviam com os recursos disponíveis. Entretanto, após muito refletir, concluí que existem muitos professores que não puderam experienciar situações de ensino e de aprendizagem integradas às tecnologias digitais como eu pude.

A partir das reflexões causadas pela experiência de observação no intercâmbio, em 2015, concluindo a graduação, idealizei e escrevi um Projeto de Mestrado que focava na formação continuada do professor de Matemática para a integração de tecnologias digitais. Minha intenção era desenvolver um curso de formação continuada para professores em serviço e possibilitá-los, assim como na disciplina que cursei no intercâmbio, experiências de aprendizagem com diversos recursos tecnológicos aliados à diferentes áreas da Matemática e reflexões sobre tais recursos e sobre as práticas dos professores envolvidos.

Ao ingressar no Mestrado, com maior entendimento da Pesquisa em Educação Matemática, por questões burocráticas e de exequibilidade, fiz a opção por uma simplificação para a área de Geometria e a integração do *software* GeoGebra. O desenvolvimento de curso de extensão universitária foi outra importante simplificação adotada, pois um curso de formação continuada, para ter validade, envolveria muitas horas de desenvolvimento e muita burocracia, comprometendo o desenvolvimento da pesquisa. Como consequência da opção pelo curso de extensão universitária, não obtivemos como participantes professores em serviço, mas pudemos obter certa diversidade de participantes com iguais contribuições à pesquisa, como licenciandos, professores formados e até um engenheiro com experiência no ensino.

Embora modificações tenham sido realizadas com o intuito de tornar esta pesquisa possível, acredito que tais modificações enriqueceram o estudo e trouxeram grandes aprendizados para esta pesquisadora. A seguir, apresento como se estrutura a dissertação.

1.2 Estrutura da dissertação

A seção “Geometria: história, ensino, aprendizagem e tecnologias digitais” apresenta reflexões sobre a Geometria, seu ensino e sua aprendizagem. São discutidas também questões relativas às potencialidades das tecnologias digitais para o ensino de Geometria.

O Construcionismo e os Conhecimentos Docentes, teorias que guiaram a produção e a análise de dados desta pesquisa, são apresentados na seção “Construcionismo e Conhecimentos Docentes”. Além disso, são discutidas questões referentes à formação docente e são apresentadas pesquisas norteadas por tais teorias e pela articulação teórica das mesmas.

Na seção “Metodologia da Pesquisa”, são discutidos os procedimentos metodológicos de produção e de análise dos dados. Também são descritos o desenvolvimento do curso de extensão universitária e as atividades exploradas no curso. São apresentados os sujeitos da pesquisa e as ferramentas utilizadas para a produção dos dados, bem como, se delineou suas análises.

Na seção “Análise e Discussão dos Dados”, são apresentados e discutidos os dados organizados em temas de análise, enfatizando os resultados desta pesquisa. Na última seção, “Considerações Finais”, apresento as conclusões deste estudo faço perspectivas sobre estudos futuros.

2 GEOMETRIA: HISTÓRIA, ENSINO, APRENDIZAGEM E TECNOLOGIAS DIGITAIS

Nesta seção, apresento um breve histórico da Geometria. Ainda discuto como se desenvolveu seu ensino no Brasil e faço considerações sobre ideias envolvidas em sua aprendizagem. Por fim, apresento a influência das tecnologias digitais em seu ensino e em sua aprendizagem.

2.1 Desenvolvimento histórico da Geometria

A Geometria originou-se da capacidade humana de observar objetos da natureza, comparando formas e tamanhos. Em seu cotidiano, o homem primitivo pôde realizar descobertas de conhecimentos geométricos subconscientemente, como distância, figuras geométricas, noções de paralelismo, perpendicularidade e semelhança. Eves (1992, p. 2) exemplifica como observações da vida prática levou o homem primitivo a desenvolver conhecimentos geométricos:

Os exemplos de círculo eram numerosos – entre outros o contorno do sol e da lua, o arco-íris, as sementes de muitas flores e o corte transversal de um tronco de árvore. Uma pedra arremessada descreve uma parábola; uma corda não esticada e pendurada pelas pontas forma uma catenária; uma corda enrolada forma uma espiral; os círculos de crescimento do tronco de uma árvore, os círculos concêntricos provocados na superfície de um lago por uma pedra nele arremessada e figuras sobre certas conchas sugerem a idéia de famílias de curvas. Muitas frutas e seixos são esféricos e bolhas de água são hemisféricas; alguns ovos de pássaros são aproximadamente elipsóides de revolução; um anel é um toro; troncos de árvores são cilindros circulares; configurações cônicas são freqüentemente encontradas na natureza. Oleiros primitivos construíam muitas superfícies e sólidos de revolução. Corpos de homens e animais, a maioria das folhas e flores e certas conchas e cristais ilustram a idéia de simetria. A idéia de volume surge imediatamente ao se considerarem recipientes para conter líquidos e outras mercadorias.

Essa primeira fase da Geometria é classificada como “Geometria Subconsciente”, pois os conhecimentos geométricos eram baseados na observação, não existindo uma sistematização de tais conhecimentos. Essa Geometria primitiva foi utilizada pelos indivíduos na construção de ornamento decorativos e desenhos.

A segunda fase da Geometria se originou quando o homem desenvolveu a noção de regra geométrica ao sistematizar conhecimentos sobre procedimentos de resolução de problemas. Como exemplo, Eves (1992, p. 3) cita “[...] a comparação dos comprimentos de caminhos circulares e de seus diâmetros levaria, num certo período de tempo, à lei geométrica de que a razão entre a circunferência e o diâmetro é constante.”. Essa fase do desenvolvimento

da Geometria é caracterizada como “Geometria Científica”, pois “[...] indução, ensaio e erro e procedimentos empíricos eram os instrumentos de descoberta.” (EVES, 1992, p. 3).

Há evidências históricas que no Egito Antigo, a Geometria passou de Subconsciente para Científica. A Geometria Científica era muito utilizada pelos egípcios na agrimensura. E essa aplicação é observada em seu nome, pois em grego “Geometria” significa “medida da terra”.

Além dos egípcios, muitas civilizações da antiguidade utilizavam a Geometria para o desenvolvimento da agricultura e da engenharia, como os povos da Mesopotâmia, do centro-sul e oriente da Ásia. Essas áreas

[...] foram berços de formas avançadas de sociedade, conhecidas por sua habilidade em engenharia na drenagem de pântanos, irrigação, obras de defesa contra inundações e construção de grandes edifícios e estruturas. Tais projetos requeriam muita geometria prática. (EVES, 1992, p. 4).

A Geometria da Babilônia Antiga se relacionava à mensuração. Os babilônios do período 2000-1600 a.C. podiam realizar cálculos de áreas de retângulos, triângulos e trapézios retângulos. Eles utilizavam uma aproximação de π com valor 3. Podiam calcular volumes de paralelepípedo retângulo, prisma reto com base trapezoidal, cilindro e tronco de cone ou pirâmide quadrangular. Conheciam o Teorema de Pitágoras. E desenvolveram um método, embora incorreto, de cálculo de áreas de quadriláteros irregulares. Tinham conhecimentos sobre semelhança de triângulos e propriedades de triângulos isósceles.

Os papiros de Moscou (1850 a.C.) e Rhind (1650 a.C.) contêm textos matemáticos do Egito Antigo, dos quais, 26 tratam-se de problemas geométricos que fornecem fórmulas para cálculo de áreas de terra e volumes de celeiros. Os egípcios tomavam a área de um círculo como sendo equivalente à área de um quadrado de lado $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo e calculavam volumes de cilindros; possuíam fórmula para cálculo da área de um quadrilátero qualquer; e calculavam corretamente o volume do tronco de pirâmides de bases quadradas.

A terceira fase da evolução da Geometria teve influência grega, a “Geometria Demonstrativa”. Para os gregos, “[...] os fatos geométricos deviam ser estabelecidos, não por procedimentos empíricos, mas por raciocínios dedutivos; as verdades geométricas deviam ser obtidas no gabinete de estudos, e não no laboratório.” (EVES, 1992, p. 7). Tal pensamento influenciou a Geometria e seu ensino durante muitos séculos.

Indícios históricos apontam que a Geometria Demonstrativa tenha se iniciado com o trabalho de Tales de Mileto por volta de 550 a. C. Nesse trabalho, são explorados resultados bastante elementares, mas sua importância se dá ao fato da exploração geométrica ocorrer por raciocínios lógicos e não por métodos intuitivos e experimentais.

Pitágoras, influenciado por Tales e pela geometria egípcia, foi outro estudioso grego que contribuiu à Geometria Demonstrativa. Ele fundou a Escola Pitagórica, que promoveu estudos nas áreas de Filosofia, Matemática e Ciências Naturais. Na área da Geometria, os seguidores de Pitágoras

[...] desenvolveram as propriedades das retas paralelas e usaram-nas para provar que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é igual a dois ângulos retos. Contribuíram de maneira notável para a álgebra geométrica grega e desenvolveram uma teoria das proporções bastante completa (ainda que limitada a grandezas comensuráveis) que usaram para deduzir propriedades de figuras semelhantes. Tinham ciência da existência de pelo menos três dos poliedros regulares e descobriram a incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado. (EVES, 1992, p. 8).

Por volta de 300 a. C., Euclides produziu os Elementos, “[...] uma cadeia dedutiva única de 465 proposições compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega.” (EVES, 1992, p. 9). Em seu trabalho, Euclides reuniu resultados geométricos apresentados por estudiosos anteriores a ele, como Pitágoras e Tales. Além disso, apresentou noções de Cálculo e Geometria de curvas e superfícies complexas.

Arquimedes influenciou a Geometria Demonstrativa com trabalhos sobre Geometria Plana e Geometria Espacial. Em Geometria Plana, ele desenvolveu um método para aproximação do valor de π e antecipou métodos de Cálculo Integral. Em Geometria Espacial, encontrou “[...] as fórmulas corretas para as áreas da superfície esférica e da calota esférica e para os volumes da esfera e do segmento esférico de uma base.” (EVES, 1992, p. 11). Já Apolônio contribuiu com estudos sobre as seções cônicas; foi ele quem nomeou os termos “elipse”, “parábola” e “hipérbole”.

Os gregos contribuíram com a Geometria com resultados importantes. A forma como os resultados eram apresentados, por meio de discursos lógico-dedutivos, influenciou não só a Geometria, mas a Matemática em geral.

Com a queda do Império Grego e ascensão do Império Romano e, em seguida, com a Idade Média, a produção de conhecimentos no Ocidente foi bastante restrita. Nesse período, os estudiosos do Oriente foram responsáveis por avanços na Geometria. Na Geometria Hindu, se destaca Brahmagupta, com o trabalho “[...] sobre quadriláteros cíclicos, todos com lados, diagonais e áreas racionais.” (EVES, 1992, p. 13). Os árabes também contribuíram à Geometria, com destaque para

[...] o trabalho feito por Abu'l-Wefa (940-998) com compassos “enferrujados”, ou compassos da abertura fixa, a solução geométrica das equações cúbicas

dada por Omar Khayyam (c. 1044 - c. 1123) e as pesquisas de Nasir eddin (c. 1250) sobre o postulado das paralelas de Euclides. (EVES, 1992, p. 13).

Com o Renascimento e a valorização à Ciência, a Geometria voltou a ser estudada no mundo ocidental, com a tradução de trabalhos gregos para o latim. Por influência da arte, estudiosos se interessaram em desenvolver conhecimentos sistematizados sobre a construção de objetos em telas; nascia, no século XV, conhecimentos que viriam a ser conhecidos como Geometria Projetiva. No século XVII, Gérard Desargues, publicou um trabalho no qual explorava ideias de projeção em relação a seções cônicas. No século XVIII, Gaspard Monge criou sua Geometria Descritiva, a qual “[...] se refere a uma maneira de representar e analisar objetos tridimensionais por meio de suas projeções sobre certos planos.” (EVES, 1992, p. 14-15). Já no século XIX, Poncelet foi responsável pelo ressurgimento da Geometria Projetiva, publicando seu trabalho em 1822. A partir de sua obra, cresceu interesse sobre essa área da Geometria, que passou a ser reconhecida como tal.

A Geometria Projetiva é um ramo da Geometria; a Geometria Analítica, por sua vez, é um método da Geometria. Os estudos sobre Geometria Analítica se aperfeiçoaram com Descartes e Pierre de Fermat, no século XVII. Embora seja possível identificar ideias sobre Geometria Analítica em épocas anteriores a eles, esses estudiosos trouxeram grandes contribuições a essa área, com a utilização do simbolismo algébrico. A Geometria Analítica Espacial, foi explorada por Antoine Parent e Alexis Claude Clairaut, no início do século XVII.

Com a invenção do Cálculo no século XVII, por Isaac Newton e Leibniz, surgiu uma nova possibilidade para o estudo da Geometria, pois “[...] há uma imensa parte da geometria em que as propriedades das curvas e das superfícies e suas generalizações são estudadas através do cálculo.” (EVES, 1992, p. 19). Tal parte da Geometria é classificada como Geometria Diferencial. É possível identificar o nascimento dessa área já na Antiguidade, com trabalhos de Arquimedes e Apolônio. Também é possível observar seu desenvolvimento com o método dos indivisíveis de Cavalieri e com o trabalho de Huygens sobre curvaturas e evolutas, no século XVII. No século XIX, Gauss explorou a Geometria Diferencial ao estudar “[...] curvas e superfícies por meio de representações paramétricas desses objetos.” (EVES, 1992, p. 19). Riemann aperfeiçoou a Geometria Diferencial, a partir do cálculo tensorial. Por meio dele

Geometrias diferenciais generalizadas, conhecidas como geometrias riemannianas, foram intensamente exploradas; estas, por sua vez, levaram a geometrias não riemannianas e a outras. Grande parte desse material veio encontrar aplicações significativas na teoria da relatividade e em outras partes da física moderna. (EVES, 1992, p. 19).

Embora muitas ramificações da Geometria estivessem sendo desenvolvidas, durante a evolução da Geometria, o trabalho de Euclides sempre se sobressaiu. Um postulado dos Elementos, em particular, teve especial atenção, o postulado das paralelas: “E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongados as duas retas, ilimitadamente, encontrem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.” (BICUDO, 2009, p. 98). O postulado não apresenta concisão com os outros postulados e, ao mesmo tempo, não é relevante para as proposições apresentadas na obra. Durante muitos séculos, estudiosos tentaram demonstrar a veracidade do postulado de Euclides, mas sem muito sucesso. Em 1795, John Playfair publicou um postulado substituto, que ainda é utilizado na atualidade: “Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada.” (EVES, 1992, p. 20).

O fato de o postulado das paralelas ser independente dos outros postulados abriu caminho para o surgimento de Geometrias não-Euclidianas, como aponta Eves (1992, p. 20)

A real independência do postulado das paralelas com relação aos outros postulados de geometria euclidiana só foi inquestionavelmente estabelecida quando se obtiveram provas da consistência da geometria não euclidiana. [...] O método consistia em construir um modelo em que a geometria não euclidiana tivesse uma interpretação como parte do espaço euclidiano; então, qualquer inconsistência na geometria não euclidiana implicaria uma inconsistência correspondente na geometria euclidiana.

No século XIX, muitas Geometrias passaram a existir. Em 1872, Felix Klein as codificou, sintetizou e ordenou. A ordenação das Geometrias teve forte influência da Teoria de Grupos de Klein e Lie. Assim, a Geometria foi definida como a “[...] a investigação das propriedades das figuras que se mantêm inalteradas quando as figuras são sujeitas a um grupo de transformações.” (EVES, 1992, p. 24). Eves (1992, p. 24) explica os elementos de classificação:

Cada geometria tem seu grupo de transformações de controle subjacente. Na construção de uma geometria tem-se, então, a liberdade de escolher, antes de tudo, o elemento fundamental da geometria (ponto, reta, círculo, esfera, etc.); depois a totalidade ou espaço desses elementos (plano de pontos, espaço usual de ponto superfície esférica de pontos, plano de retas, feixe de círculos, etc.); e finalmente o grupo de transformações ao qual o espaço de elementos está sujeito.

Embora fosse crescente o estudo de Geometrias não-Euclidianas, David Hilbert resgatou a Geometria Euclidiana em 1899, ao publicar “Fundamentos da Geometria”. Essa obra,

[...] preenchendo as lacunas das suposições tácitas de Euclides, oferece um conjunto de postulados completamente aceitável para a geometria euclidiana, e pode ser lido, em grande parte, por qualquer aluno inteligente do curso colegial. Foi usado por muitos autores e equipes de escritores na segunda

metade do século XX, como base para um tratamento rigoroso da geometria nos cursos de primeiro e segundo graus. (EVES, 1992, p. 26-27).

Assim como outras áreas do conhecimento, a Matemática e, em particular, a Geometria, se beneficiaram com o advento dos computadores. Em meados da década de 1970, ocorreu o surgimento de uma nova forma de Geometria, a Geometria Computacional, na qual “[...] se estudam propriedades e técnicas de projeto de algoritmos com o objetivo de se obter soluções eficientes para problemas de natureza geométrica, assim como o estabelecimento de quotas inferiores para esses problemas.” (FIGUEIREDO, 2005, p. 1). Dessa forma, as tecnologias digitais têm sido responsáveis por avanços na área da Geometria.

A história da Geometria evidencia como essa ciência modificou-se ao longo dos séculos. Embora ela tenha evoluído e dela tenham surgido diversas ramificações, a forte influência grega em relação ao aspecto lógico-dedutivo ainda permanece. Veremos a seguir, que esta característica influenciou e influencia o ensino da Geometria e que existe preocupação com o resgate de procedimentos geométricos experimentais observado na fase da Geometria Científica, como elemento facilitador da aprendizagem. Além disso, serão apresentados os processos de aprendizagem da Geometria e a influência das tecnologias digitais em seu ensino e em sua aprendizagem com o surgimento de programas de Geometria Dinâmica.

2.2 O ensino de Geometria no Brasil

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) e Lorenzato (1995) apontam que até meados do século XX o ensino de Geometria ainda se inspirava na forma axiomática-dedutiva presente nos Elementos de Euclides. A Geometria vista pelo estudante tinha uma característica puramente racional, por meio da qual objetivava-se demonstrar “[...] todas as afirmações com o objetivo de elevar o seu espírito – ainda que tudo isso lhe fosse de difícil entendimento.” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 43).

Na década de 1960, o Brasil passa a ser influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna, ocorrendo a publicação de livros didáticos a partir das orientações pedagógicas do movimento (PAVANELLO, 1993). O Movimento da Matemática Moderna buscou unificar Álgebra, Geometria e Aritmética. A tentativa se deu por meio de “[...] introdução de elementos unificadores tais como a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas e as relações que, acreditava-se, constituiriam a base para a construção lógica do novo edifício matemático.” (MIGUEL; FIORENTINI, MIORIM, 1992, p. 45). Como efeito dessa abordagem, o ensino da Álgebra sobressaiu-se, em parte por conta da evolução histórica da Matemática, com o

crescente processo de algebrização e abstração, como apontam Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 45-46): “[...] os grandes avanços da Matemática, nos dois últimos séculos, deram-se graças ao processo de algebrização da Matemática Clássica, tornando-a mais rigorosa, precisa e abstrata e, portanto, assim pensava-se, mais aplicável.”. Portanto, o movimento buscava valorizar essa área em detrimento das outras.

O Movimento da Matemática Moderna objetivou transformar o ensino da Geometria Euclideana Clássica ao introduzir abordagens mais rigorosas, como a utilização da Geometria das Transformações de Felix Klein, na qual “[...] os conceitos de função e de grupo desempenham papel de destaque, ou [como] a apresentação baseada nos conceitos de espaço vetorial e transformação linear.” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 47).

Embora livros didáticos, grupos de estudos e orientações curriculares estimulassem o ensino de Geometria por meio de transformações, tal abordagem não se popularizou na prática pedagógica dos professores. Mas existiram mudanças, como a utilização de linguagem de conjuntos no ensino de Geometria, “[...] de conceitos topológicos elementares tais como: interior, exterior e fronteira, e de alguns tópicos de Geometria das transformações, descaracterizando assim a abordagem axiomático-dedutiva e dando lugar a uma abordagem eclética.” (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 48). Como consequência de uma falta de identidade própria do ensino da Geometria, ela passou a ser desvalorizada, tanto no currículo como na prática escolar (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995).

Segundo Pavanello (1993), outro elemento que corroborou o abandono do ensino de Geometria foi a lei Lei 5692/71 de Diretrizes e Bases do Ensino do 1º e 2º graus, que conferiu maior autonomia às escolas para a escolha dos conteúdos disciplinares. Como consequência, houve um abandono do ensino da Geometria. Professores inseguros quanto aos conhecimentos geométricos deixaram de ensiná-los, ou programaram-se para ensiná-los no final do ano letivo e com isso, muitas vezes, os conteúdos geométricos não eram ensinados por falta de tempo.

No final da década de 1970, iniciaram-se tentativas de superação dos problemas causados pelo Movimento da Matemática Moderna. Nas orientações curriculares dessa época

[...] mantêm-se, sobretudo, conceitos e propriedades fundamentais próprios da Geometria euclidiana numa abordagem inicial que privilegia os aspectos intuitivos e experimentais encaminhando-se, gradativamente, para deduções locais daquelas proposições mais fundamentais. Além disso, a Geometria tende a desempenhar, cada vez com mais frequência, um papel subsidiário na construção de conceitos e na visualização de propriedades aritméticas e algébricas. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 50).

No final da década de 80, as orientações curriculares enfatizavam uma abordagem por meio de manipulação de objetos, reconhecimento de propriedades e consequente sistematização. Além disso, também incentivavam uma abordagem geométrica da Álgebra.

Na década de 1990, o abandono do ensino de Geometria persistiu. Lorenzato (1995) argumenta que o ensino da Geometria era escasso na sala de aula e, dentre as causas, cita a falta de conhecimentos geométricos dos professores. Como consequência, o professor se via em um dilema: ensinar Geometria sem possuir os conhecimentos necessários ou omitir seu ensino,

Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la. (LORENZATO, 1995, p. 3-4).

Outro motivo da omissão do ensino de Geometria, foi o fato de que os autores de livros didáticos situarem os conteúdos geométricos no final dos livros. Sendo assim, muitas vezes, os professores não conseguiam cumprir os cronogramas, deixando de ensinar Geometria aos alunos. Dentre outros fatores, Lorenzato (1995) cita também a formação deficiente do professor para o ensino de Geometria e os currículos que pouco a valorizavam, apresentando-a separada da Álgebra e da Aritmética.

O abandono da Geometria e a preocupação com seu resgate refletiu-se nas pesquisas desenvolvidas no final da década de 1980 e durante a década de 1990. Andrade e Nacarato (2004) analisaram as tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria evidenciadas nos trabalhos publicados pelo Encontro Nacional de Educação Matemática em suas sete edições ocorridas no período de 1987 a 2001. Os autores identificaram que o resgate do ensino de Geometria ocorreu com abandono do ensino tradicional na perspectiva lógico-dedutiva. Andrade e Nacarato (2004, p.8) verificaram que a “[...] abordagem mais experimental [...] [substituiu] a ênfase dada a uma concepção axiomática do ensino de geometria.”.

A preocupação com o abandono do ensino de Geometria também influenciou as orientações curriculares do final da década de 1990 (LOBO; BAYER, 2004). Para os anos iniciais do Ensino Fundamental, as orientações curriculares incentivam a exploração em nível concreto como forma de compreender ideias abstratas, segundo os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais – 1ª a 4ª séries), “[...] a Geometria parte do mundo sensível e o estrutura no mundo geométrico – dos volumes, das superfícies, das linhas e dos pontos.” (BRASIL, 1997, p. 81), além disso, apontam que “[...] uma das possibilidades mais fascinantes do ensino de Geometria consiste em levar o aluno a perceber e valorizar sua presença em elementos da natureza e em criações do homem.” (BRASIL, 1997, p. 82).

A orientações dos anos finais do Ensino Fundamental evidenciam preocupação com uma abordagem da Geometria por meio de situações-problema. Segundo os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais – 5^a a 8^a séries) “[...] os problemas de Geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria.” (BRASIL, 1998, p. 86).

Para o Ensino Médio, a abordagem por meio de resolução de problemas também está presente, segundo os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio)

[...] as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 2000, p. 44).

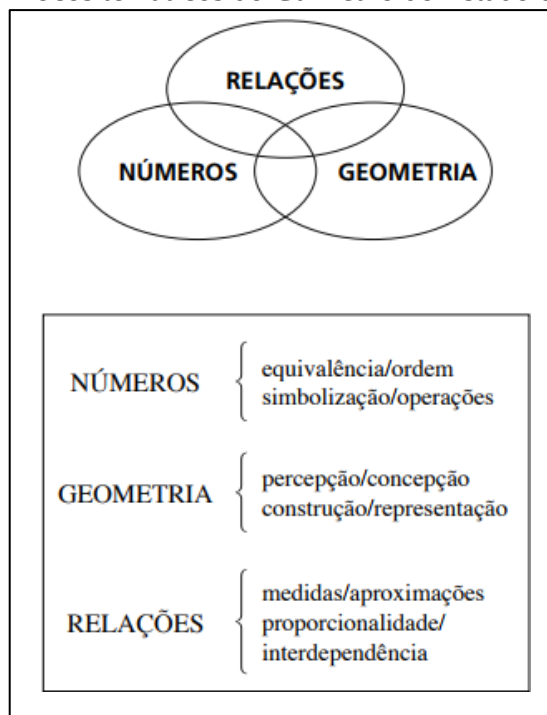
Já os PCN+ (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio) orientam que o ensino deve estar relacionado à relevância científica e cultural dos conteúdos abordados, em Geometria, a

[...] abordagem tradicional, que se restringe à métrica do cálculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas linhas paralelas e perpendiculares nas pinturas e esculturas. Ensinar Geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas e analisadas pelos alunos. (BRASIL, 2002, p. 119).

As orientações curriculares também apontam a tendência evidenciada por Andrade e Nacarato (2004), com uma abordagem mais experimental e prática, em que a perspectiva lógico-dedutiva se faz presente, mas não é o elemento essencial da aprendizagem. Além das orientações curriculares do final da década de 1990 e início da década de 2000, a preocupação com a valorização da Geometria nos livros didáticos tem corroborado o movimento de resgate do ensino de Geometria (PRADO; AVELLATO, 2012).

Considerando o material didático do Estado de São Paulo, essa valorização do ensino de Geometria é percebida. O currículo é composto por três blocos temáticos: Números, Relações e Geometria (Figura 1), os quais se fazem presentes em todos conteúdos disciplinares do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. O bloco temático Geometria

[...] diz respeito diretamente à percepção de formas e de relações entre elementos de figuras planas e espaciais; à construção e à representação de formas geométricas, existentes ou imaginadas, e à elaboração de concepções de espaço que sirvam de suporte para a compreensão do mundo físico que nos cerca. (SÃO PAULO, 2011, p. 39).

Figura 1: Blocos temáticos do Currículo do Estado de São Paulo

Fonte: São Paulo (2011, p. 39)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por sua vez, também estabelece a valorização da Geometria no currículo. O documento propõe o ensino da Matemática por meio da articulação de cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2016). A unidade temática Geometria

[...] envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (BRASIL, 2016, p. 227).

Além da valorização da Geometria nos currículos e nos livros didáticos, seu resgate também ocorre com sua valorização nos contextos escolares, nas práticas pedagógicas dos professores da Educação Básica. Segundo Prado e Avellato (2012, p. 28)

Esse resgate da Geometria pode ser percebido através de vários encaminhamentos e atitudes que estão sendo tomados atualmente no contexto escolar. Os professores fazem sua parte por meio de tentativas que incluem metodologias de ensino, outras abordagens e, inclusive, a utilização de materiais de apoio para o trabalho em sala de aula. Associado a isso, os órgãos oficiais têm realizado ações de formação para os professores, muito embora não se vejam resultados efetivos dessa formação na mudança e melhoria das

práticas docentes e dos resultados na aprendizagem como um todo. Alguns professores procuram aprimorar e renovar metodologias de ensino, muitas vezes, sem muitos recursos, enfrentando dificuldades estruturais e administrativas em suas aulas.

A seguir, discuto a aprendizagem da Geometria.

2.3 A aprendizagem da Geometria

A Geometria é uma área particular da Matemática e possui uma lógica própria, dessa forma, conhecimentos de Álgebra e Aritmética não são suficientes para entender completamente a Geometria. Como elementos próprios do entendimento da Geometria estão “[...] percepção geométrica, raciocínio geométrico e linguagem geométrica, fatores estes essenciais na relação real/formal.” (LORENZATO, 1995, p. 5). O estudo da Geometria é de extrema importância,

[...] sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995, p. 5).

A Geometria está por toda parte, convivemos com ideias geométricas no nosso cotidiano como paralelismo, perpendicularidade, simetria, congruência, medição, entre outras. A Geometria tem o poder de facilitar processos mentais: “[...] prestigiando o processo de construção do conhecimento, a Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar.” (LORENZATO, 1995, p. 6).

Lorenzato (1995) discute diversos benefícios da Geometria ao ensino: potencial de interdisciplinaridade, concretização de ideias matemáticas abstratas e intrínseca ligação com Álgebra e Aritmética, uma vez que “[...] os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz.” (LORENZATO, 1995, p. 7).

Pais (1996) discute a aprendizagem da Geometria e seus elementos fundamentais, sendo eles: objeto, conceito, desenho e imagem mental. O objeto se refere a algo concreto que se faz presente no mundo físico e que pode ser associado a conceitos geométricos. Podem ainda ser considerados materiais didáticos ou modelos físicos, Pais (1996, p. 67) assim exemplifica: “[...]”

o objeto associado ao conceito de cubo pode ser um cubo construído em madeira, plástico, cartolina ou qualquer outro material.”.

O objeto é a mais simples forma de se representar um conceito geométrico. Os objetos têm objetivo de que, a partir de sua manipulação, o aprendiz possa construir conceitos geométricos. Por exemplo, como aponta Pais (1996, p. 67), “[...] manipulando um objeto em forma de um cubo o aluno poderia constatar o número de faces, vértices, arestas, o paralelismo entre as faces, o número de arestas que se encontram num vértice.”.

Outro elemento essencial da aprendizagem da Geometria é o desenho, que busca a representação de figuras planas e espaciais e “[...] se destaca tanto nas aulas de geometria, como nos livros didáticos ou mesmo simplesmente para ilustrar os enunciados de exercícios, definições ou teoremas.” (PAIS, 1996, p. 68). O desenho é uma forma mais complexa de representação em comparação ao objeto.

Muitas vezes, o desenho passa a ser identificado como o próprio conceito pelo aluno, principalmente em relação à Geometria Plana. Já os desenhos dos sólidos geométricos, os quais são feitos em perspectiva, causam grande dificuldade nos alunos na aprendizagem de Geometria Espacial.

As imagens mentais configuram uma forma ainda mais complexa de representação conceitual. Ela se caracteriza pela subjetividade e pela abstração; um sujeito desenvolve uma imagem mental quando

[...] é capaz de enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos. Assim, como as noções geométricas são idéias abstratas, portanto estranhas à sensibilidade exterior do homem, a formação de imagens mentais é uma consequência quase que exclusiva do trabalho com desenhos e objetos. (PAIS, 1996, p. 70).

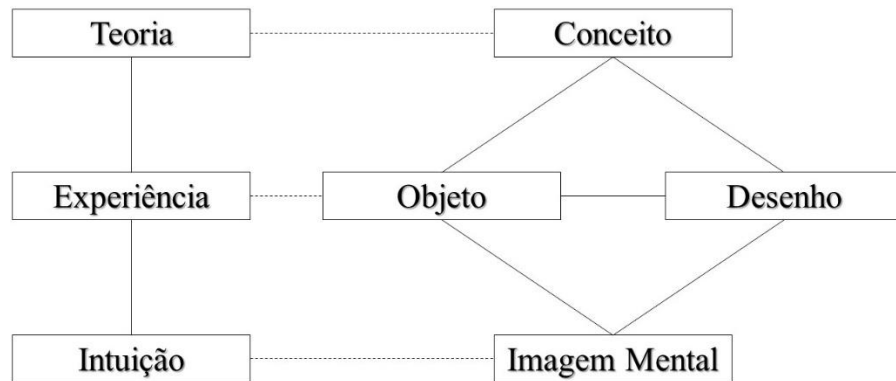
“A generalidade e a abstração dos conceitos geométricos são construídas pouco a pouco, num processo dialético que envolve necessariamente a influência do mundo físico e uma reflexão intelectual sobre este mundo.” (PAIS, 1996, p.70). Entretanto, a efetiva abstração, ou seja, o abandono do mundo físico nesse processo é algo difícil aos aprendizes. Pais (1996, p. 71) observa que

[...] perante as dificuldades impostas pela abstração ocorre, num nível preliminar da aprendizagem, uma identificação, por parte do aluno, entre o conceito e sua representação. É assim que um simples traço no quadro negro ou no papel passa a ser a “própria” reta, ou como no caso clássico da geometria plana em que os conceitos são identificados ao seu desenho.

Se apoiando em Gonseth (1954), Pais (1996) destaca três elementos da epistemologia da geometria: o intuitivo, o experimental e o teórico. Na aprendizagem da Geometria, a intuição se relaciona à imagem mental, pois é uma forma de conhecimento imediato, que não carece de

explicações lógicas. O conhecimento experimental, por sua vez, relaciona-se ao desenho e ao objeto, pois tais recursos podem ser usados para testar ou validar ideias. O conhecimento teórico, se relaciona à abstração e à generalização, pois é o elemento mais complexo e se caracteriza pela conceptualização formal da Geometria. A relação entre objeto, desenho, imagens mentais, conceitos, intuição, experimentação e teorização é ilustrada na Figura 2.

Figura 2: Níveis de aprendizagem da Geometria



Fonte: Adaptado de Pais (1996, p. 72)

Pais (1996) exemplifica como a intuição, a experimentação e a teorização se relacionam na aprendizagem da Geometria:

[...] uma reta passa por um ponto que é interior à região limitada por uma circunferência vai interceptar ou não essa circunferência? Uma maioria expressiva de alunos que têm uma pequena iniciação em geometria não tem dificuldade em concluir que a reta realmente irá não somente interceptar a circunferência como o fará em dois pontos. Este tipo de conhecimento, aceito ou enunciado de imediato, é uma forma de intuição. Por outro lado, este mesmo resultado pode também ser concluído por uma construção experimental através da realização de um desenho. Neste caso o desenho que é utilizado para descobrir ou verificar uma proposição é uma forma de conhecimento experimental. Mas a interseção da reta com a circunferência poderia também ser constatada por meio de uma demonstração sem o recurso direto da intuição ou do desenho o que consistiria no aspecto teórico do conhecimento geométrico. (PAIS, 1996, p. 72).

A preocupação com a aprendizagem da Geometria sempre esteve presente no desenvolvimento das tecnologias digitais para o ensino da Matemática. Andrade e Nacarato (2004) apontam que na década de 1990 foi crescente o uso das tecnologias digitais no ensino de Geometria. A seguir, discuto como as tecnologias digitais trazem novas possibilidades ao ensino e à aprendizagem da Geometria.

2.4 Tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da Geometria

A aprendizagem da Geometria ocorre por meio da abstração, em um processo de interiorização de experiências espaciais. Os objetos do mundo físico são associados a construções abstratas, definidas e controladas “[...] por um corpo de pressupostos, o sistema de axiomas da teoria.” (GRAVINA, 1996, p. 1). Mas a transformação de conceitos não científicos em conceitos científicos, proveniente desse processo, muitas vezes, causa dificuldade aos alunos (GRAVINA, 1996).

Gravina (1996) se apoia em Fischbein (1993) ao explicar que os objetos geométricos possuem uma perspectiva conceitual e outra figural. A perspectiva conceitual é o modo como um sujeito expressa os conhecimentos geométricos. A perspectiva figural se relaciona à imagem mental a qual o objeto geométrico está associado.

O desenho é fundamental para a construção das imagens mentais. Muitas vezes, os aprendizes consideram o desenho como o próprio conceito geométrico; não entendem o desenho como a representação gráfica do conceito. Em muitas situações da aprendizagem da Geometria, o desenho faz o papel de “[...] materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades.” (GRAVINA, 1996 p. 3). Em certas situações, os próprios desenhos causam desentendimentos em relação às propriedades.

Gravina (1996) identifica que as dificuldades de interpretação de desenhos são causadas pela sua característica estática. Sendo assim, ao se transformar o desenho estático em um desenho dinâmico, “[...] as particularidades da contingência de representação física mudam, e o que emerge são os invariantes, ou seja as reais propriedades geométricas da configuração.” (GRAVINA, 1996, p. 6). Notare e Basso (2016) apontam que as tecnologias digitais possibilitam a concretização de objetos geométricos e a dinamicidade, potencializando a aprendizagem, segundo os autores

Uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática foi tornar possível a “concretização” dos objetos matemáticos na tela do computador, dando a sensação de realismo e de existência material pela possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades. Com a possibilidade de manipular os objetos matemáticos, surge uma nova forma de pensar e fazer matemática, configurando-se uma extensão do pensamento do indivíduo. (NOTARE; BASSO, 2016, p. 2).

As tecnologias digitais potencializaram a aprendizagem da Geometria com os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), como apontam Coelho e Saraiva (2000, p. 37)

A criação de contextos sociais favoráveis à aprendizagem é, ainda, uma das características de um ambiente geométrico dinâmico [...], o que parece

beneficiar a aquisição de conhecimentos, dada a influência da interação social no desenvolvimento cognitivo, incluindo a produção de provas.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014) identificam a Geometria Dinâmica como pertencente à segunda fase da evolução das tecnologias digitais no ensino de Matemática. Segundo os autores, “[...] o dinamismo pode ser atribuído às possibilidades em podermos utilizar, manipular, combinar, visualizar e construir virtualmente objetos geométricos, permitindo traçar novos caminhos de investigação.” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 23). Outra inovação trazida pela Geometria Dinâmica se refere à distinção entre desenho e construção. O desenho, não resiste à prova do arrastar, perdendo suas propriedades geométricas, quando movimentado; já a construção, em situações de arrastamento, preserva suas propriedades geométricas.

Os desenhos e outras representação externas, como gráficos e diagramas, têm grande importância na aprendizagem da Geometria, “[...] mas cada indivíduo tem de criar uma representação mental do objecto, a figura.” (COELHO; SARAIVA, 2000, p. 37). Os Ambientes de Geometria Dinâmica têm a potencialidade de ampliar as relações do indivíduo com as representações externas, facilitando a construção de representações mentais.

Os progressos que se têm verificado em termos de *software* permitem manipular as representações externas de forma reconhecidamente dinâmica. Num AGD é possível fazer construções e manipulá-las, conservando invariantes as propriedades e relações estabelecidas. A observação de regularidades, enquanto se processa a manipulação directa, permite a “descoberta” de propriedades e relações. (COELHO; SARAIVA, 2000, p. 37, grifo dos autores).

A movimentação e modificação das representações, proporcionadas pelos AGD, potencializam a visualização, considerada a capacidade de perceber informações visuais. Além disso, os aprendizes podem testar suas ideias e, por meio da manipulação, adquirem um *feedback* visual das ideias testadas, a qual “[...] permite verificar visualmente uma propriedade ou uma relação ou validar uma construção como resistente à manipulação directa (arrastamentos), ou seja, legitimar uma figura associada a diferentes representações externas.” (COELHO; SARAIVA, 2000, p. 38).

King e Schattschneider (1997) apontam, como benefícios ao ensino, o fato de que os programas de GD (Geometria Dinâmica) proporcionam construções acuradas. A visualização é outro elemento importante dos programas de GD ao ajudar o aluno a ver, ou seja, entender fatos genéricos da Geometria. Morrow (1997) aponta as possibilidades da visualização à aprendizagem

O *software* de geometria dinâmica pode ser usado para auxiliar o processo de visualização em todas as classes de matemática, não apenas no estudo da

geometria. Os alunos podem construir revisões, e variar continuamente esboços geométricos. Embora a visualização em si mesma seja uma poderosa ferramenta de resolução de problemas, a capacidade dos alunos de fazer variações instantâneas e precisas em suas próprias representações visuais apresenta uma nova dimensão dinâmica cujas implicações estão apenas começando a ser compreendidas.⁸ (MORROW, 1997, p. 47, tradução nossa, grifo nosso).

Os AGD têm, ainda, a potencialidade de exploração e construção de conhecimentos geométricos. Garry (1997, p. 55, tradução nossa) aponta que os alunos podem “[...] testar suas próprias ideias matemáticas e conjecturas de forma visual, eficiente e dinâmica e – no processo – estar mais plenamente engajados em sua própria aprendizagem.”⁹. E a descoberta de relações geométricas vão além daquelas esperadas pelo professor ou previstas nas tarefas, aumentando as possibilidades de aprendizagem (KING; SCHATTSCHEIDER, 1997).

Outros elementos importantes da aprendizagem da Geometria são a conjectura e a prova, elementos que têm se modificado com a Geometria Dinâmica. No Ambiente de Geometria Dinâmica, “[...] os utilizadores podem generalizar as descobertas e testar a respectiva validade, através de um aliciante processo de indução.” (COELHO; SARAIVA, 2000, p. 38). Sendo assim, a exploração experimental que a GD proporciona faz com que o aluno compreenda melhor conceitos geométricos o que pode motivá-lo à construção de uma demonstração (KING; SCHATTSCHEIDER, 1997).

O *software* Geometric Supposers foi o pioneiro da Geometria Dinâmica. Nesse ambiente virtual, as construções eram feitas e era possível reproduzir uma construção de modo criar uma nova com as mesmas propriedades geométricas. Partindo dessa ideia, o foco da aprendizagem da Geometria tornou-se a experimentação e a facilidade de construir esquemas a partir das conjecturas dos alunos. Na década de 1990, os programas mais utilizados no ensino de Geometria eram o Geometer's Sketchpad, Cabri Geometry II, Geometry Inventor e o Geometric SuperSupposer. (KING; SCHATTSCHEIDER, 1997).

A inovação de tais programas foi a ideia de arrastar, pois o aprendiz podia literalmente agarrar pontos da construção e arrastá-los. E, nessa movimentação, “[...] todos os outros objetos

⁸ Dynamic geometry software can be used to aid the process of visualization in all mathematics classes, not just in the study of geometry. Students can construct revise, and continuously vary geometric sketches. While visualization in itself is a powerful problem-solving tool, the capacity for students to make instantaneous and precise variations to their own visual representations adds a new dynamic dimension whose implications are only beginning to be understood.

⁹ [...] test their own mathematical ideas and conjectures in a visual, efficient and dynamic manner and – in the process – be more fully engaged in their own learning.

na configuração automaticamente se auto ajustam, preservando todos as relações e restrições dependentes.”¹⁰ (KING; SCHATTSCHNEIDER, 1997, p. xi, tradução nossa).

No início dos anos 2000, Markus Hohenwarter desenvolveu um novo programa de Matemática Dinâmica, o GeoGebra, o qual pode ser utilizado para exploração de Geometria Dinâmica, que trouxe inovações ao ensino e à aprendizagem com sua articulação entre Álgebra e Geometria. Sua popularidade e facilidade de manipulação levou-nos a escolhê-lo como objeto de exploração deste estudo. Mais detalhes sobre a aplicabilidade do GeoGebra ao ensino e à aprendizagem de Geometria Plana e Geometria Espacial são apresentados na seção “Metodologia da Pesquisa”, bem como, detalhes técnicos em relação ao *software* e como foi utilizado neste estudo. Na seção seguinte, apresento os referenciais teóricos que guiaram a produção e a análise dos dados desta pesquisa.

¹⁰ [...] all other objects in the configurations automatically self-adjust, preserving all dependent relationships and constraints.

3 CONSTRUCIONISMO E CONHECIMENTOS DOCENTES

Nesta seção, apresento algumas considerações sobre a formação de professores. Em seguida, discuto o Construcionismo e os Conhecimentos Docentes, ideias que guiaram a produção e a análise de dados no contexto do curso de extensão universitária, cenário da pesquisa. Ainda apresento outros estudos que se guiaram por essas teorias e discuto aproximações e distanciamentos deles com este estudo.

3.1 Formação de professores

A formação docente deve ser entendida como um processo contínuo, no qual professores ou futuros professores, de forma individual ou em grupo, se envolvem em situações de aprendizagem buscando a melhoria do ensino. A formação de professores é necessária e justifica-se como meio de garantir que os profissionais da educação tenham conhecimento da ciência, da técnica e da arte de ensinar, ou seja, possuam competência profissional. (MARCELO GARCÍA, 1999).

A formação do professor inicia-se ainda na sua condição de aluno da Educação Básica uma vez que ideias sobre o ensino começam a ser construídas por meio da “aprendizagem por observação” das práticas pedagógicas de seus professores (MIZUKAMI, 2006). Nessa fase, “[...] a presença de modelos de professore(a)s e modelos de ensino são muito marcantes, e irão ser copiados, principalmente nos primeiros anos de profissão.” (NACARATO, 2000, p. 17).

A formação universitária docente, frequentemente caracterizada por formação inicial, é “[...] um momento formal em que processos de aprender a ensinar e aprender a ser professor começam a ser construídos de forma mais sistemática, fundamentada e contextualizada.” (MIZUKAMI, 2006, p. 216). A formação inicial de professores é de extrema importância, pois “[...] cria as bases sobre as quais esse profissional vem a ter condições de exercer a atividade educativa na escola com as crianças e os jovens que aí adentram, como também, as bases de sua profissionalidade e da constituição de sua profissionalização.” (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 89).

A formação docente não encerra na conquista do diploma de Ensino Superior. O processo de formação do professor é lento e ocorre de forma contínua, como aponta Mizukami (2006, p. 214), “Os processos de aprender a ensinar, de aprender a ser professor e de desenvolvimento profissional de professores são lentos, iniciam-se antes do espaço formativo dos cursos de licenciatura e se prolongam por toda a vida.”.

Os processos formativos que ocorrem após a formação universitária são comumente identificados como formação continuada, a qual “[...] deve propiciar ao professor o uso de ferramentas para enfrentar, individual e coletivamente, situações de aprendizagem novas e de tipos diferentes.” (BAIRRAL, 2005, p. 49). A formação continuada de professores deve considerar, inclusive, que “[...] o professor é profissional que deve constantemente aprender a aprender e a refletir sobre sua prática.” (BAIRRAL, 2005, p. 52).

Considerando as transformações ocorridas na sociedade, “[...] cada vez mais globalizada e estandardizada, na qual o fator permanente é a mudança e em que o conhecimento ocupa papel central.” (GOMES, 2015, p. 203); a formação docente passou a ter “[...] importância cultural e política, pois são eles [professores] os responsáveis pela condução dos processos de socialização e formação das novas gerações, por meio da escolaridade.” (GOMES, 2015, p. 203). As mudanças sociais, econômicas, culturais e tecnológicas das últimas décadas “[...] se refletem na mudança inevitável das formas de pensar, sentir e atuar das novas gerações e que fizeram mudar o papel das escolas (ou deveriam fazê-las mudar) e as funções dos docentes.” (IMBERNÓN, 2015, p. 76). Além de considerar as novas formas de pensar e agir na sociedade atual, é preciso refletir sobre o papel do professor numa sociedade em que a educação já não é “[...] patrimônio exclusivo dos docentes e sim de toda a comunidade e dos meios que esta dispõe, estabelecendo novos modelos relacionais e participativos na prática da educação.” (IMBERNÓN, 2011, p. 10). Assim, são necessárias mudanças nas instituições educativas e também na profissão docente “[...] e que se assumam novas competências profissionais no quadro de um conhecimento pedagógico, científico e cultural revistos [...], a nova era requer um profissional da educação diferente.” (IMBERNÓN, 2011, p. 12).

As competências profissionais dos professores, no novo contexto social, implicam

[...] não só [no] domínio de conhecimentos disciplinares e metodologias de ensino, mas também [em] compreensões sobre o desenvolvimento cognitivo, afetivo e social das crianças e dos jovens, e compreensão e capacidade de lidar com diferenças (por exemplo, a heterogeneidade dos alunos quanto a estágios de desenvolvimento, vínculos familiares, religiosos, condições econômicas etc.). (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 136).

A essas competências, somam-se a responsabilidade de formar cidadãos críticos na nova sociedade da informação. Nesse sentido,

A educação, face a sua função social, é desafiada a desempenhar um papel que contemple essa demanda relativa ao domínio e à exploração das novas tecnologias, tanto em relação à formação, nas escolas, do homem contemporâneo, quanto no que se refere à formação dos profissionais da educação nos cursos de licenciatura, na universidade. (GONÇALVES; FIORENTINI, 2005, p. 78).

Portanto, integrar as tecnologias digitais ao ensino é uma das novas competências profissionais dos professores. Nesse contexto, esta seção busca apresentar dois referenciais teóricos um, o Construcionismo, que se relaciona ao ensino e à aprendizagem em ambientes computacionais, e outro, os Conhecimentos Docentes, relacionados aos conhecimentos necessários na formação tecnológica de professores e na prática pedagógica integrada às tecnologias. A seguir, apresento o Construcionismo e pesquisas norteadas por essa teoria no contexto da formação docente e do uso do GeoGebra.

3.2 Construcionismo

Em seu contato com os computadores, Seymour Papert pôde perceber a potencialidade da tecnologia digital para a resolução de problemas. Sob influência de Jean Piaget, sobre os estudos do desenvolvimento cognitivo infantil, Papert idealizou o *software* LOGO, plataforma de linguagem de programação computacional, que permite explorar conceitos e estratégias por meio de comandos acessíveis às pessoas de diferentes idades e áreas de formação.

Sua ideia sobre a potencialidade do computador na educação ia contra a ideia de que o computador ensinaria as crianças. Para ele as crianças ensinariam o computador e, a partir de tal interação, poderiam aprender. Esse seria um aprendizado natural, uma vez que não seria imposto por um currículo e por meio de instrução, mas a criança seria motivada à resolução de um problema e seria também protagonista da própria aprendizagem. Ao utilizar o LOGO

[...] *a criança programa o computador*, e ao fazer isso, adquire um senso de domínio sobre uma parte da mais moderna e poderosa tecnologia e estabelece um contato íntimo com algumas das ideias mais profundas da ciência, da matemática e da arte de construir modelos intelectuais.¹¹ (PAPERT, 1980, p. 5, tradução nossa, grifo do autor).

A programação tem um potencial epistemológico evidenciado por Seymour Papert. Ele acreditava que os erros e consertos dos programas desenvolvidos pelas crianças tinham um potencial muito grande ao incentivar o “pensar sobre o pensar”, ato pouco estimulado na escola e que é essencialmente importante para o desenvolvimento cognitivo.

Papert (1993) diferencia Instrucionismo de Construcionismo, duas perspectivas que podem ser desenvolvidas na educação com a tecnologia digital. O Instrucionismo expressa “[...] a crença que o caminho para melhorar o aprendizado deva ser melhorar a instrução.”¹²

¹¹ [...] *the child programs the computer* and, in doing so, both acquires a sense of mastery over a piece of the most modern and powerful technology and establishes an intimate contact with some of the deepest ideas from science, from mathematics, and from the art of intellectual model building.

¹² [...] the belief that the route to better learning must be the improvement of instruction.

(PAPERT, 1993, p. 139, tradução nossa), ou seja, nessa perspectiva, o computador melhoraria os meios de instrução, mas a estrutura da escola é a mesma, na qual, o aluno é passivo no processo de aprendizagem. O Construcionismo, por outro lado, considera que o melhor aprendizado ocorre quando há menor instrução, essa ideia

[...] é construída na hipótese que as crianças serão melhores em encontrar por elas mesmas o conhecimento específico que elas precisam; educação organizada ou informal pode ajudar mais ou ter certeza que eles estão apoiados moralmente, psicologicamente, e intelectualmente em suas tentativas.¹³ (PAPERT, 1993, p. 139, tradução nossa).

Além disso, o Construcionismo se relaciona à ideia de construção. A construção que ocorre cognitivamente, ou seja, a construção do conhecimento, é mais facilmente alcançada “[...] quando é apoiada pela construção de tipo mais público ‘no mundo’ [...]”. Parte do que eu quero dizer por ‘no mundo’ é que o produto pode se mostrado, discutido, examinado, provado e admirado. Está lá fora.”¹⁴ (PAPERT, 1993, p. 142, tradução nossa). Acredito que a interação com o GeoGebra e sua capacidade de visualização, construção, manipulação e criação tem potencial para a construção do conhecimento “no mundo”, na perspectiva de Papert (1993).

Os professores também devem se beneficiar de situações de aprendizagem construcionistas e devem também refletir sobre sua utilização na prática docente, como aponta Valente (1998, p. 6, grifo nosso)

Utilizar a abordagem construcionista na formação do professor significa propiciar as condições para o professor agir, refletir e depurar o seu conhecimento em todas as fases pelas quais ele deverá passar na implantação do computador na sua prática de sala de aula: conhecer os diferentes *software* e como eles podem propiciar aprendizagem, saber como interagir com um aluno, saber como interagir com a classe como um todo e desenvolver um projeto de como integrar o computador na sua disciplina.

No Brasil, um dos pioneiros do Construcionismo é o pesquisador José Armando Valente. Ele entende a aprendizagem que ocorre em um ambiente construcionista por meio do Ciclo de Ações. Valente (2005a, p. 64) explica que o ciclo “[...] ilustra como o computador pode auxiliar o processo de construção de conhecimento [...]”, mas que também serve de avaliação de programas educacionais, uma vez que permite “[...] identificar características que os softwares oferecem e como elas podem ou não auxiliar no desenvolvimento de atividades que contribuam para a construção de conhecimento.” (VALENTE, 2005a, p. 50).

¹³ [...] is built on the assumption that children will do best by finding [...] for themselves the specific knowledge they need; organized or informal education can help most by making sure they are supported morally, psychologically, materially, and intellectually in their efforts.

¹⁴ [...] when it is supported by construction of a more public sort “in the world” [...]. Part of what I mean by “in the world” is that the product can be shown, discussed, examined, probed, and admired. It is out there.

Assim como Seymour Papert, José Armando Valente explica esse processo para a utilização do LOGO, mas as ideias do Construcionismo e do Ciclo de Ações podem ser desenvolvidas em outros programas educacionais.

O ciclo consiste de quatro ações que ocorrem sequencialmente na interação do aluno com o computador, sendo elas: descrição, execução, reflexão e depuração. As ações do ciclo se iniciam quando é proposto ao aluno que resolva um problema utilizando um programa do computador. O aluno, então, a partir da ação de **descrição**, descreve a solução do problema por meios que o computador “entenda”. No ambiente LOGO, a descrição ocorre por meio de uma linguagem de programação; no GeoGebra, a descrição ocorre por meio da construção utilizando as ferramentas.

A etapa seguinte do Ciclo de Ações é a **execução**, a partir da qual o computador executa os comandos descritos. No LOGO, a execução ocorre por meio da execução do programa. No GeoGebra, a execução ocorre em diversos níveis: pode ser instantaneamente, por meio da descrição; pode ocorrer por meio da prova do arrastar; pode ocorrer com a utilização do Controle Deslizante.

A etapa seguinte é a **reflexão**. Após a execução, o aluno observa na tela do computador o que havia construído e reflete se o objeto construído está em consonância com sua ideia inicial ou não. A ação de reflexão pode ocorrer em três níveis: abstração empírica, abstração pseudo-empírica e abstração reflexiva. A abstração empírica é a mais simples, ela

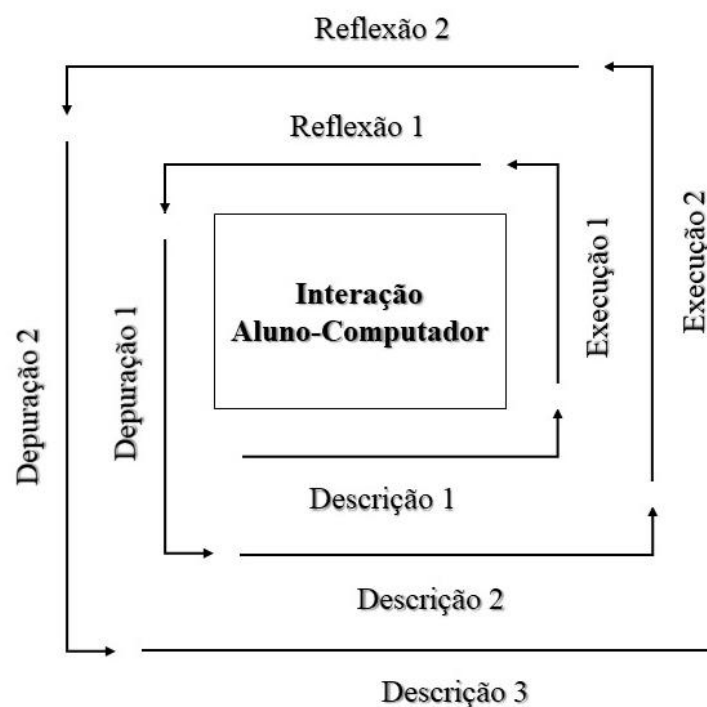
[...] permite ao aprendiz extrair informações do objeto ou das ações sobre o objeto, tais como a cor e a forma do mesmo. A abstração pseudoempírica permite ao aprendiz deduzir algum conhecimento da sua ação ou do objeto. Por exemplo, entender que a figura obtida é um quadrado e não um retângulo, pelo fato de ter quatro lados iguais. Já a abstração reflexionante possibilita a projeção daquilo que é extraído de um nível mais baixo (por exemplo, o fato de a figura obtida ser um quadrado) para um nível cognitivo mais elevado ou a reorganização desse conhecimento em termos de conhecimento prévio (por exemplo, pensar sobre as razões que levaram a descrição fornecida produzir um quadrado). (VALENTE, 1999b, p. 74).

Após a ação reflexão, se o aluno conseguiu resolver o problema da maneira como intencionou, o ciclo se conclui. Mas se o aluno observa incongruência em relação a sua ideia inicial, inicia-se o processo de depuração. A ação de depurar consiste na procura do erro, que é

[...] apresentado como uma discrepância entre a ideia que o aprendiz tem sobre como resolver o problema e a descrição dessa ideia em termos de programa, que pode ser executado pela máquina. O erro aparece quando ele compara a intenção original com a atual implementação, em termos do programa fornecido ao computador. (VALENTE, 2005a, p. 47).

O erro permite que o aluno possa entender o conceito relacionado ao problema proposto (VALENTE, 1991). O processo de depuração, portanto, leva a uma nova descrição e um novo ciclo se inicia. Ações do ciclo são repetitivas, mas a cada novo ciclo é alterada “[...] a concepção como tais ações contribuem para o desenvolvimento do conhecimento [...]” (VALENTE, 2005a, p. 67), portanto, configura-se em uma espiral crescente. Assim, Valente (2005a) explica que a interação entre o computador e o aprendiz ocorre por meio da Espiral da Aprendizagem. Na Figura 3 é possível observar que na interação as ações se repetem, mas o conhecimento em relação à solução do problema vai atingindo patamares mais sofisticados.

Figura 3: A Espiral da Aprendizagem



Fonte: Adaptado de Valente (2002, p. 30)

Maltempi (2000), se apoiando em Papert (1986), descreve as cinco dimensões que formam a base do Construcionismo. A primeira delas é a dimensão **pragmática**, pela qual o aprendiz experiencia uma aprendizagem de algo com aplicação imediata. A segunda dimensão é a **sintônica**, a qual oportuniza o aprendiz de dominar sua aprendizagem, expressando “[...] um estilo pessoal de fazer as coisas, ou uma estética pessoal.” (MALTEMPI, 2000, p. 14). A terceira dimensão é a **sintática**, que expressa a possibilidade de um fácil acesso aos instrumentos de trabalho, para que possam ser utilizados de acordo com a necessidade. A dimensão **semântica**, a quarta dimensão, representa a capacidade de o aprendiz interagir com os instrumentos sem a necessidade de formalismos ou símbolos, ou seja, com a utilização de significados próprios. A quinta dimensão é a social, que representa “[...] a integração da atividade com as relações pessoais e com a cultura do ambiente no qual ela se encontra.”

(MALTEMPI, 2000, p. 14). Tais dimensões favorecem a construção do conhecimento em um ambiente construcionista, mas cabe ao professor desenvolver um ambiente em que elas possam ser contempladas, como aponta Maltempi (2000, p. 14)

Todas estas dimensões, quando estimuladas em um ambiente de ensino-aprendizagem baseado no computador, favorecem a construção de conhecimento pelo aprendiz. Auxiliado por um professor e interagindo com ambientes computacionais, o aprendiz é capaz de desenvolver projetos pessoais significativos que até então eram difíceis de serem realizados. Entretanto, criar ambientes que ponderem todas estas dimensões não é tarefa simples e requer um grande esforço do professor.

Maltempi e Rosa (2004), com base no Ciclo de Ações e na Espiral da Aprendizagem, explicam a interação do aluno com o computador em um ambiente construcionista por meio do Turbilhão de Aprendizagem, o qual se aplica a situações que não envolvem a programação, o que faz com que as ações ocorram de forma aleatória. Segundo Rosa (2004, p. 133)

O Turbilhão de Aprendizagem abrange e admite todos os passos do ciclo e, em consequência, da espiral (descrição – execução – reflexão – depuração), porém permite que essas sejam vistas tanto de forma repetitiva como seguindo padrões aleatórios, à medida que as ações vão ocorrendo na construção de conhecimento.

No processo do Turbilhão de Aprendizagem, a descrição ocorre sem a necessidade da mídia, como observa Rosa (2004, p. 134), a descrição/expressão “[...] considera como meio de expressão não só os meios materiais, mas, também, os não materiais, tomando a oralidade como uma das mais importantes.”. A execução, por sua vez, pode ocorrer com apoio de diversas mídias. O processo de reflexão ocorre de forma compartilhada por meio de discussões, chamado pelo autor de reflexão/discussão. Ocorre de forma coletiva, também, o processo de depuração.

No processo de aprendizagem construcionista, o professor tem papel primordial, como mediador da aprendizagem. Valente (1999b) define tal mediador como “agente de aprendizagem”, esse sujeito deve ter

[...] conhecimento do significado do processo de aprender por intermédio da construção de conhecimento. Esse profissional, que pode ser o professor, tem que entender as idéias do aprendiz e sobre como atuar no processo de construção de conhecimento para intervir apropriadamente na situação, de modo a auxiliá-lo nesse processo. (VALENTE, 1999b, p. 75).

Num ambiente de aprendizagem construcionista, o professor deve criar condições para que o aluno tenha liberdade de explorar, é “[...] importante que o aluno descubra suas estratégias e experimente suas hipóteses, fazendo as comparações e as relações dos fatos, dos objetos e das idéias que perpassam seu ambiente.” (PRADO, 1998, p. 8). Além disso, o professor precisa entender como o aluno constrói o conhecimento nesse ambiente; ao entender o Ciclo de Ações, o agente de aprendizagem pode interferir na interação do aluno com o computador, de modo a

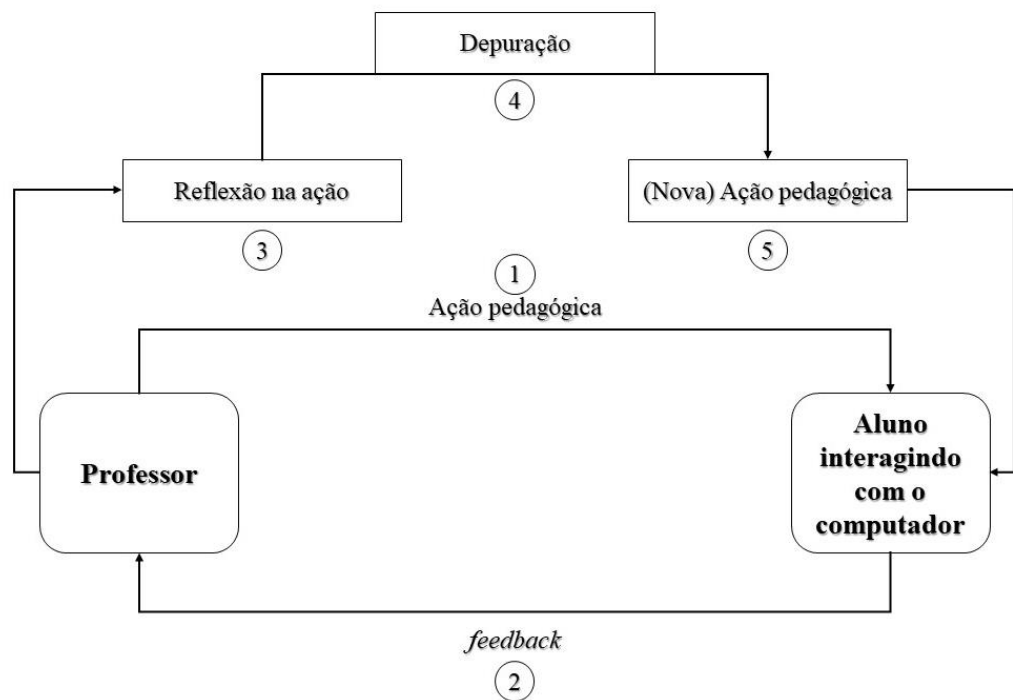
guiá-lo nessa interação ou mesmo estimulá-lo para que a interação continue (PRADO, 1998; VALENTE, 1999b).

A importância do agente de aprendizagem em um ambiente construcionista evidencia a necessidade da formação docente para tal função. Além disso, uma vez que entende o ciclo de ações, “[...] independente do tipo de *software*, o agente de aprendizagem pode criar condições para o aprendiz realizar as ações do ciclo.” (VALENTE, 2005a, p. 60, grifo nosso). Sendo assim, estimulando a interação por meio do Ciclo de Ações, o GeoGebra apresenta potencialidades para o desenvolvimento de uma aprendizagem construcionista.

O Ciclo de Ações, além de ocorrer na interação dos alunos com o computador, acontece na prática pedagógica do professor em um ambiente de aprendizagem construcionista (PRADO, 1996, 2003). O Ciclo de Ações, nessa situação, é formado pelas ações **ação pedagógica, reflexão na ação, depuração e (nova) ação pedagógica**; nesse ciclo (Figura 4),

[...] a DESCRIÇÃO corresponde à AÇÃO PEDAGÓGICA (1) do professor, a qual expressa um plano intencional com base no saber fazer. Esta ação, executada junto aos alunos, fornece o FEEDBACK (2) para o professor, o qual é constituído pelas sinalizações relacionadas à aprendizagem dos alunos. Um FEEDBACK diferente daquele esperado pode provocar questionamentos, dúvidas, gerando um estado de perturbação cognitiva que leva o professor a REFLETIR NA AÇÃO (3), reflexão que, por sua vez, dá condições para o professor DEPURAR (4) a sua ação, lançando mão de experiências anteriores e de novas formas para atuar com os alunos. Assim, o ciclo se completa e, ao mesmo tempo, se abre, reiniciando uma (NOVA) AÇÃO PEDAGÓGICA (5), a qual revela a (re)criação de estratégias, produzidas pelo professor no momento presente da prática. (PRADO, 2003, p. 46).

Figura 4: A Espiral da Aprendizagem e a prática pedagógica do professor



Fonte: Adaptado de Prado (2003, p. 45)

Assim, conhecer o Ciclo de Ações se torna importante não somente para entender a interação do aluno com o computador, mas também para compreender seu papel em um ambiente de aprendizagem construcionista e poder agir e refletir sobre sua prática.

Com a intenção de melhor entender o Construcionismo empiricamente com o uso do GeoGebra ou contextualizado na formação docente apresento, a seguir, pesquisas norteadas por tal construto teórico.

3.2.1 Pesquisas norteadas pelo Construcionismo

A revisão da literatura revelou pesquisas norteadas pelo Construcionismo relacionadas à formação docente. O estudo de Richit (2005) se insere na formação inicial e os estudos de Carvalho (2014) e Vermieiro (2014), na formação continuada. Além disso, foi possível identificar pesquisas que, embora não tivessem como contexto a formação docente, contribuem para esta por articular o Construcionismo ao uso do GeoGebra, como os estudos de Barros (2013) e Silva (2015).

Richit (2005) apoiou-se teoricamente no Construcionismo com o intuito de descrever e analisar o trabalho com projetos no ensino de Geometria Analítica na formação inicial de professores de Matemática, com o apoio do *software* Geometricks. Participaram da pesquisa

licenciandos em Matemática de uma universidade pública paulista, sendo eles, oito alunos que estavam em recuperação na disciplina Geometria Analítica. A pesquisadora desenvolveu uma intervenção pedagógica de nove encontros; nela, os participantes trabalharam em duplas na escolha de temas e desenvolvimento de atividades sobre eles, com o auxílio do Geometricks. A produção de dados ocorreu por meio de questionários, entrevistas semiestruturadas, registros fotográficos, filmagem e notas de campo. A pesquisadora constatou que “[...] a construção do conhecimento é favorecida por meio da realização de atividades que permitem ao aluno, neste caso licenciando, investigar, refletir, experimentar, expressar suas idéias.” (RICHIT, 2005, p. 160). Os resultados da pesquisa mostraram que

[...] as atividades de caráter construcionista [...] podem colaborar na construção do conhecimento matemático, favorecendo a formação dos licenciandos em Matemática e preparando-os para utilizar as mídias informáticas na sua posterior prática docente. Porém, defendemos que estas mudanças são viabilizadas se o uso destes recursos estiver entrelaçado às experiências educacionais do futuro professor ao longo da licenciatura. (RICHIT, 2005, p. 160).

Carvalho (2014) analisou as contribuições de uma experiência formativa para a integração da Lousa Digital na prática docente de professores de Matemática. Os sujeitos da pesquisa foram cinco professores de uma escola pública, eles participaram de oito encontros que ocorreram na escola em que atuavam. Nos encontros, pesquisador e professores discutiam possibilidades de uso da Lousa Digital em aulas de Matemática a partir de uma abordagem construcionista e compartilhavam planejamento e desenvolvimento de aulas seguindo a abordagem discutida. Para a produção de dados, o pesquisador utilizou a gravação de áudio dos encontros e a observação das aulas dos docentes participantes. Por meio da experiência formativa, o pesquisador verificou que “[...] ação de formação em serviço, em uma abordagem construcionista, contribuiu para que os professores investigados avançassem em suas práticas pedagógicas com o uso da Lousa Digital, norteados pela abordagem de construção de conhecimento.” (CARVALHO, 2014, p. 143). Além disso, o pesquisador constatou que a abordagem trouxe algumas contribuições aos professores participantes da pesquisa relacionadas

[...] ao uso da Lousa Digital pelos professores, que saíram de uma perspectiva de transmissão de informações e avançaram na direção de uma prática pedagógica com essa tecnologia voltada para a construção de conhecimentos; às reflexões oportunizadas, que possibilitaram aos professores avançarem no desenvolvimento de um perfil crítico-reflexivo e no comprometimento com seu desenvolvimento profissional; e à possibilidade de se pensar o uso da Lousa Digital em uma perspectiva de aprendizagem cooperativa. (CARVALHO, 2014, p. 144).

Vermieiro (2014) analisou o uso de *laptops* em aulas de Matemática de escolas públicas contempladas com o projeto Um Computador por Aluno (UCA). Participaram da pesquisa 29 professores de Matemática e a produção dos dados ocorreu por meio de questionários, entrevistas e observação da prática de tais professores. O pesquisador observou que as atividades exploradas com o *laptop* eram utilizadas como complementação à aula expositiva; na maioria das vezes, a atividade proposta pelos professores envolvia a pesquisa em *sites* de busca e algumas das atividades envolviam a exploração de jogos virtuais, programas, *applets* e editores de texto. O pesquisador constatou que o professor utilizou o *laptop* majoritariamente em uma abordagem instrucionista e que

[...] as ações desenvolvidas com o uso de *softwares* e *applets* específicos de matemática favorecem o processo de integração das tecnologias à prática do professor e ao currículo de matemática, diferentemente de atividades como a de pesquisa na internet, de uso de editores e de jogos, propostas de forma distante dos conteúdos explorados em aula. (VERMIEIRO, 2014, p. 111, grifo do autor).

Barros (2013) investigou as contribuições de um micromundo composto por recursos do GeoGebra e da Coleção M^3 para a aprendizagem do conceito volume de pirâmide. Participaram da pesquisa quatro duplas de alunos do segundo ano do Ensino Médio, que foram analisadas isoladamente. A pesquisadora desenvolveu um micromundo entendido como um “[...] ambiente exploratório e possui uma linguagem simples, na qual os alunos não precisavam de muitos esforços e conhecimentos técnicos.” (BARROS, 2013, p. 50), no qual, por meio de um Ambiente Virtual de Aprendizagem, foram disponibilizados *applets* do GeoGebra e vídeos da Coleção M^3 selecionados pela pesquisadora. A exploração do micromundo ocorreu em três encontros: no primeiro encontro a pesquisadora apresentou o GeoGebra e os vídeos da Coleção M^3 ; no segundo encontro os participantes puderam explorar *applets* do GeoGebra e vídeos específicos da Coleção M^3 com a temática planificação; no terceiro encontro houve também a exploração de *applets* e vídeos, a temática foi volume de pirâmide. Para a produção de dados, a pesquisadora utilizou filmagens dos encontros, um *software* de captura da tela do computador e coleta das atividades escritas dos participantes. A pesquisadora verificou que as ações da Espiral da Aprendizagem estavam presentes em todos os encontros, ela ainda destacou a visualização como grande contribuição para a aprendizagem de Geometria Espacial e concluiu que é

[...] promissora a utilização de ambientes de aprendizagem como o micromundo, uma vez que estes criaram condições para que os alunos buscassem construir o seu próprio conhecimento. Os resultados mostram que cada dupla seguiu um caminho nesse processo de aprendizagem, o que foi facilitado pelas características do micromundo. (BARROS, 2013, p. 136).

Silva (2015) objetivou analisar as contribuições da Lousa Digital e do GeoGebra para o estudo de circunferências. Os participantes da pesquisa foram quinze alunos de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola pública, os alunos participaram de dois encontros em horário regular de aulas. Os encontros objetivavam que os alunos compreendessem as representações algébrica e geométrica da circunferência. A produção de dados ocorreu por meio de filmagens dos encontros e da produção dos alunos na lousa digital. A pesquisadora verificou que a realização do Ciclo de Ações ocorria de forma coletiva, uma vez que as “[...] produções obtidas [...] resultaram de uma ação coletiva, pois o aluno que se disponibilizava a manipular a Lousa Digital representava a opinião do grupo e não sua opinião particular.” (SILVA, 2015, p. 101). Além disso, o erro teve função de incentivar a ocorrência de novos ciclos. A pesquisadora conclui que

[...] a interação proporcionada com o uso da Lousa Digital, nesta pesquisa, aponta para uma oportunidade dos alunos argumentarem, comentarem e se posicionarem sobre um tema, constituindo um emaranhado de ideias e reflexões que se entrelaçam, em busca de um entendimento comum, embora tenham emanado de indivíduos com diferentes vivências e pontos de vista. (SILVA, 2015, p. 102).

As pesquisas apresentadas mostram que o Construcionismo se aplica ao uso de diversas mídias, como a Lousa Digital, o *laptop*, o Geometricks, o GeoGebra, dentre outros. Além disso, tal teoria mostrou-se apropriada para intervenções na formação inicial (RICHIT, 2005), na formação continuada (CARVALHO, 2014) e na Educação Básica (BARROS, 2013; SILVA, 2015), situações que trouxeram benefícios aos envolvidos nas experiências formativas e de aprendizagem. Ainda, mostrou-se adequada para análise de dados (VERMIEIRO, 2015). Esta pesquisa contribui para o avanço das pesquisas relacionadas ao Construcionismo por se apoiar no GeoGebra em relação à aprendizagem de Geometrias Plana e Espacial e também por envolver participantes diferenciados, professores e futuros professores, os quais, por meio da diversidade de perfis, contribuem para um cenário de aprendizagem inovador em relação a tais pesquisas.

O Construcionismo guiou a perspectiva pedagógica do curso de extensão universitária; a perspectiva formativa esteve apoiada nos Conhecimentos Docentes, construto teórico que apresento a seguir.

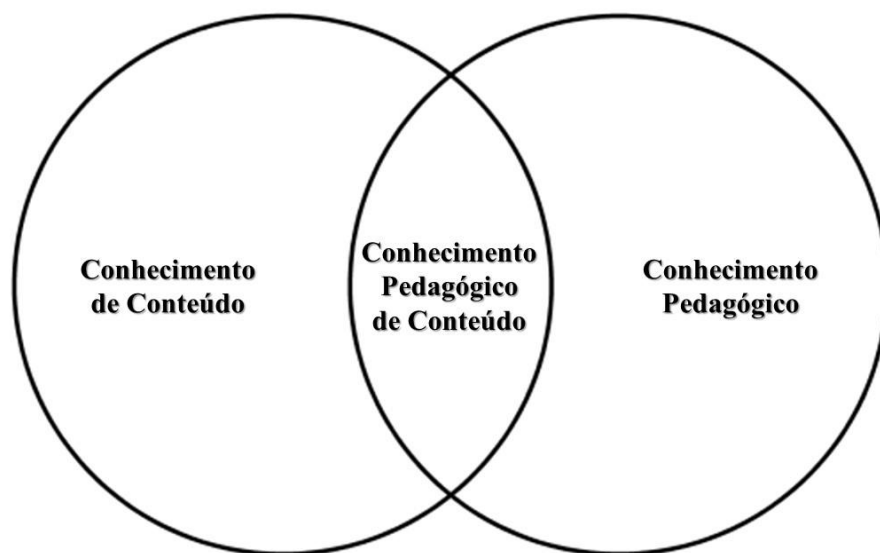
3.3 Conhecimentos Docentes

O professor constrói conhecimentos diversos que guiam sua prática e seu entendimento sobre o ensino. Existem diversos conhecimentos docentes, entre eles: conhecimento de

conteúdo, de pedagogia geral, de currículo, pedagógico do conteúdo, dos aprendizes e suas características, do contexto educacional, dos propósitos do ensino (SHULMAN, 1987). Segundo Shulman (1986, 1987), existe uma base de conhecimento para o ensino, sendo ela “[...] uma agregação codificada ou codificável de conhecimento, habilidade, compreensão e tecnologia, da ética e da disposição, da responsabilidade coletiva.”¹⁵ (SHULMAN, 1987, p. 4, tradução nossa).

Shulman (1986) reflete sobre os conhecimentos docentes, afirmando que não se pode considerar apenas o conteúdo ou a forma de ensinar e agir em sala de aula, mas também, deve-se valorizar sua conexão, ou seja, os conhecimentos do professor em relação ao ensino de determinado conteúdo, pois serão tais entendimentos que nortearão a prática docente. Com relação aos conhecimentos docentes apresentados na Figura 5, é importante destacar que estes são conhecimentos gerais, havendo muitas subdivisões em sua constituição. O Conhecimento de Conteúdo engloba todos os saberes que o professor constrói em relação à matéria ensinada; no Conhecimento Pedagógico se enquadram as noções referentes à didática, à pedagogia e à prática docente; o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo são juízos sobre como professor concebe o ensino de determinado conteúdo.

Figura 5: Conhecimentos Docentes segundo Shulman (1987, 1987)



Fonte: Adaptado de Mishra e Koehler (2006, p. 1022)

¹⁵ [...] a codified or codifiable aggregation of knowledge, skill, understanding, and technology, of ethics and disposition, of collective responsibility.

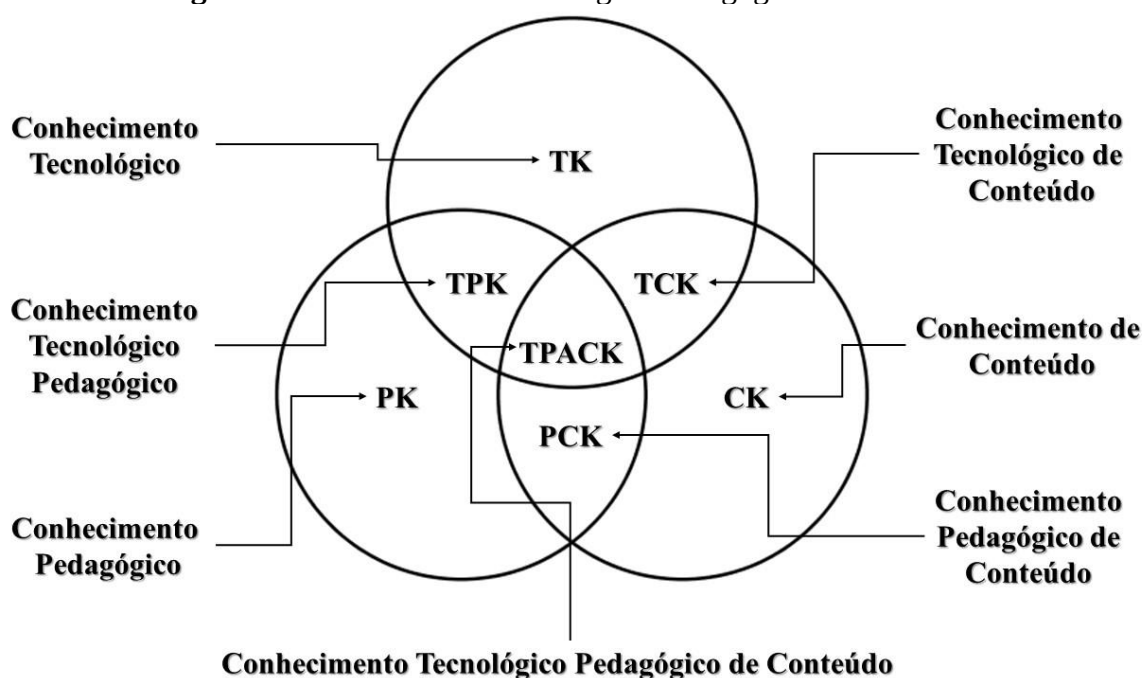
Shulman (1986, 1987) considera que a base de conhecimento docente é o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo, que deve ser mais valorizado na formação e na avaliação docente. Segundo o autor, as fontes da base de conhecimento do ensino são:

[...] (1) o estudo acadêmico em disciplinas de conteúdo, (2) os materiais e configurações do processo de educação institucionalizada (por exemplo, currículos, livros, organizações escolares e finanças, e a estrutura da profissão docente), (3) pesquisa sobre ensino, organizações sociais, aprendizagem humana, ensino e desenvolvimento, e o outro fenômeno social e cultural que afetam o que os professores podem fazer, e (4) a sabedoria da própria prática.¹⁶ (SHULMAN, 1987, p. 8, tradução nossa).

Mishra e Koehler (2006) aplicam as ideias de Shulman (1986, 1987) à perspectiva da integração das tecnologias digitais no ensino. Para os autores, a tecnologia digital tem impactado de maneira expressiva muitos setores da sociedade, transformando a maneira como nos relacionamos com o mundo. Pensando na Educação, eles observam que a tecnologia digital ainda não se encontra presente de forma tão significativa. Os autores, então, refletem: por que a tecnologia tem transformado a sociedade de forma geral, mas a escola ainda se mostra estática à essa mudança? Para os autores o problema se encontra no fato de dar muita importância à tecnologia e não como ela deve ser utilizada.

O Conhecimento Tecnológico é enfatizado de forma disjunta dos outros conhecimentos. Segundo Mishra e Koehler (2006), programas de preparação para o uso da tecnologia no ensino, priorizam que o professor domine determinada tecnologia, sem que aquilo esteja contextualizado em relação ao ensino e ao conteúdo ensinado. Os autores argumentam que saber usar a tecnologia não é garantia que o professor conseguirá fazer a efetiva integração dessa tecnologia no ensino. Assim, eles propõem que a inter-relação do Conhecimento Pedagógico, de Conteúdo e Tecnológico é uma abordagem que prioriza a integração da tecnologia no ensino, considerando os conhecimentos necessários. Assim, o Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo (Figura 6), expressa o que o professor deve saber para a efetiva integração da tecnologia no ensino.

¹⁶ [...] (1) scholarship in content disciplines, (2) the materials and settings of the institutionalized education process (for example, curricula, textbooks, school organizations and finance, and the structure of the teaching profession), (3) research on schooling, social organizations, human learning, teaching and development, and the other social and cultural phenomena that affect what teachers can do, and (4) the wisdom of practice itself.

Figura 6: Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo

Fonte: Adaptado de Koehler e Mishra (2009, p. 63)

Na Figura 6, são expressos os três Conhecimentos Docentes gerais: de Conteúdo, Pedagógico e Tecnológico; e as possíveis interseções entre eles. O Conhecimento de Conteúdo (Content Knowledge – CK) engloba os entendimentos sobre a matéria a ser ensinada ou aprendida. O Conhecimento Pedagógico (Pedagogical Knowledge – PK) é composto pelos saberes acerca das práticas e métodos de ensino. O Conhecimento Tecnológico (Technological Knowledge – TK) é formado pelos saberes referentes a tecnologias, digitais ou não, como livros, conhecimento de editor de textos, de navegadores, instalação de programas. O Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge – PCK) inclui aquilo que o professor sabe em relação à matéria a ser ensinada e que consegue transformar de modo a fazer com que os alunos compreendam. No Conhecimento Tecnológico de Conteúdo (Technological Content Knowledge – TCK) estão os entendimentos de como a tecnologia e o conteúdo se relacionam e as formas de representação de determinado conteúdo que a tecnologia possibilita. No Conhecimento Tecnológico Pedagógico (Technological Pedagogical Knowledge – TPK) se expressam os saberes docentes acerca da potencialidade pedagógica da tecnologia. O Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo (Technological Pedagogical Content Knowledge – TPACK) “[...] é um entendimento que emerge das interações entre conteúdo, pedagogia e conhecimento tecnológico.”¹⁷ (MISHRA; KOEHLER, 2008, p. 66, tradução nossa), ele

¹⁷ [...] is an understanding that emerges from interactions among content, pedagogy, and technology

[...] é a base de um bom ensino com tecnologia e requer uma compreensão da representação de conceitos usando tecnologias; técnicas pedagógicas que usam tecnologias de maneiras construtivas para ensinar o conteúdo; conhecimento do que faz conceitos difíceis ou fáceis de aprender e como a tecnologia pode ajudar a corrigir alguns dos problemas que os alunos enfrentam; conhecimentos sobre conhecimentos prévios de estudantes e sobre teorias de epistemologia; e conhecimento de como as tecnologias podem ser usados para construir sobre o conhecimento existente e desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas.¹⁸ (MISHRA; KOEHLER, p. 1028, 2006, tradução nossa).

Na perspectiva do TPACK, para que haja integração da tecnologia no ensino, deve ocorrer ênfase no desenvolvimento de um conhecimento integrado da tecnologia, pedagogia e conteúdo. Portanto, os conhecimentos não devem ser desenvolvidos em separação, mas sim, integrados. Os três fatores devem ser dependentes, ou seja, sempre que ocorre mudança em um deles, deve ocorrer mudança nos outros dois. Segundo Mishra e Koehler (2006), muitas vezes, cursos preparatórios consideram que o professor deve ser treinado para usar a tecnologia e que isso é suficiente para uma futura integração. Mas, tal abordagem esbarra em alguns problemas referentes ao uso da tecnologia no ensino: os cursos não deveriam ser tão específicos, pois as tecnologias se transformam constantemente; muitas vezes, os programas explorados não são desenvolvidos para uso em educação, o que causa maior dificuldade ao adaptá-los aos propósitos do ensino; os cursos abordam a tecnologia separada do conteúdo, encorajando a busca de soluções genéricas aos complexos problemas da educação; as particularidades e individualidades de cada professor não são valorizadas; são enfatizadas as qualidades que o professor deve ter ao ensinar com tecnologia, mas não apresentam como os professores devam desenvolver tais qualidades; consideram que a falta de tecnologia no ensino é a questão financeira e de infraestrutura, mas existem problemas maiores relacionados a “[...] valores, objetivos e métodos que precisam ser abordados, se quisermos desenvolver formas adequadas e úteis para os professores a integrar a tecnologia em suas salas de aula.”¹⁹ (MISHRA, KOEHLER, p. 1033, 2006, tradução nossa).

O TPACK, além de guiar a prática docente para a integração da tecnologia, oferece subsídios para a formação docente, uma vez que ajuda a pensar e desenvolver uma proposta

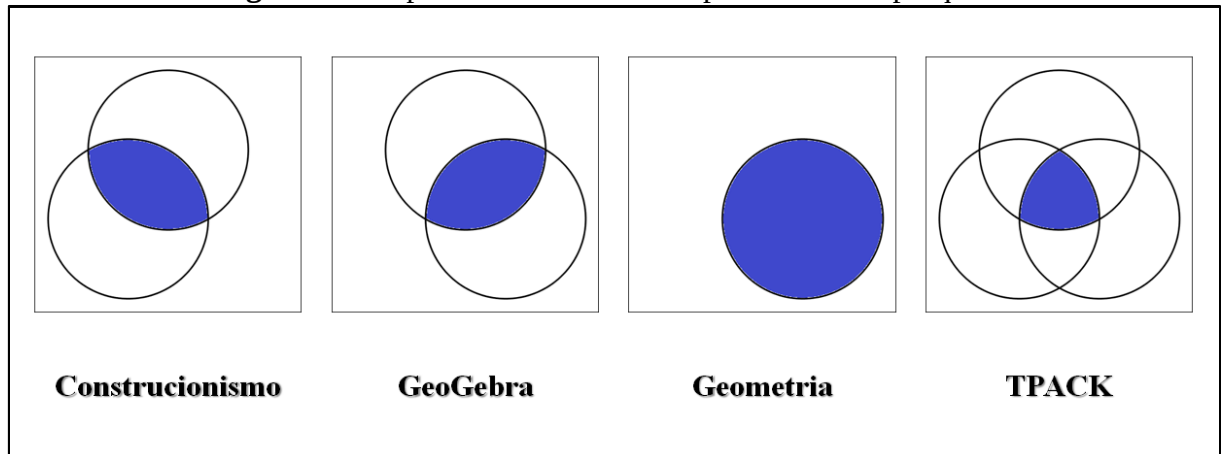
knowledge.

¹⁸ [...] is the basis of good teaching with technology and requires an understanding of the representation of concepts using technologies; pedagogical techniques that use technologies in constructive ways to teach content; knowledge of what makes concepts difficult or easy to learn and how technology can help redress some of the problems that students face; knowledge of students' prior knowledge and theories of epistemology; and knowledge of how technologies can be used to build on existing knowledge and to develop new epistemologies or strengthen old ones.

¹⁹ [...] values, goals, and methods that need to be addressed if we are to develop appropriate and useful ways for teachers to integrate technology in their classrooms.

formativa que facilite a construção dos conhecimentos necessários à integração da tecnologia no ensino. Considerando o curso de extensão universitária, cenário desta pesquisa, o Construcionismo serviu como perspectiva Tecnológica Pedagógica; o GeoGebra ocupou a perspectiva Tecnológica de Conteúdo; e a Geometria foi a perspectiva de Conteúdo. A integração dessas três perspectivas objetivou a criação de condições para a construção do TPACK (Figura 7).

Figura 7: Perspectivas do TPACK exploradas nesta pesquisa



Fonte: Elaborado pela autora

Nesta pesquisa utilizarei a expressão “Conhecimentos Docentes” para referir-me ao TPACK, por escolha pessoal, para não utilizar demasiadamente siglas. Sendo assim, a seguir, apresento pesquisas que se apoiaram teoricamente no TPACK em relação à formação docente e em relação à formação docente apoiada tecnologicamente pelo uso do *software* GeoGebra.

3.3.1 Pesquisas norteadas pelos Conhecimentos Docentes

Com a revisão da literatura foi possível identificar pesquisas relacionadas à formação docente e aos Conhecimentos Docentes, como os estudos de Araújo (2015) e Cibotto (2015) sobre a formação inicial docente, e Dantas (2015), sobre a formação continuada. Ainda foi possível identificar outras, que além dos Conhecimentos Docentes na formação docente, se apoiaram tecnologicamente a partir do uso do GeoGebra, como as pesquisas de Richit (2015) em relação à formação continuada do professor universitário e Baldini (2014) sobre a formação inicial e continuada.

Araújo (2015) investigou os Conhecimentos Tecnológicos, Pedagógicos e de Conteúdo de futuros professores de Matemática participantes de uma disciplina sobre informática aplicada ao ensino. Os sujeitos da pesquisa foram dez licenciandos em Matemática. Na produção de dados foram utilizados questionários, entrevistas, observação participante e notas

de campo. Durante a disciplina, os participantes foram divididos em duplas; ela durou um semestre letivo e objetivou que as duplas escolhessem um conceito matemático e, a partir dele, desenvolvessem aulas virtuais apoiadas por tecnologias digitais. Para a pesquisadora, o processo de desenvolvimento de aulas virtuais é uma forma de construção de Conhecimentos Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo,

Os futuros professores ao vivenciar em sua formação a criação de aulas virtuais de forma crítica e analítica, podem se submeter a pensar em sua própria construção dessas aulas para a sua prática, entender os mecanismos, resolver problemas com tecnologia, assim como conhecimentos inerentes a sua visão de sala de aula, para poder trabalhar com essas ferramentas no seu contexto de maneira mais rebuscada, levando o aluno a pensar, agir, procurar, questionar, encontrar respostas, procurar novas perguntas para respostas através da resolução de problemas. (ARAÚJO, 2015, p. 48-49).

Cibotto (2015) analisou as potencialidades e limites da integração das tecnologias digitais na formação docente, na visão de participantes de uma experiência formativa. O pesquisador considera que “[...] uma boa experiência e vivência prática do uso pedagógico das tecnologias atuais pode propiciar, ao licenciando, trabalhar com e refletir sobre essa tecnologia, para ensinar seus futuros alunos.” (CIBOTTO, 2014, p. 52). Participaram da pesquisa doze licenciandos em Matemática. O desenvolvimento do estudo ocorreu em vinte encontros, nos quais, os participantes puderam selecionar tecnologias digitais e planejar atividades a serem desenvolvidas com as mesmas. Após os encontros, o pesquisador pôde acompanhar dois licenciandos participantes no desenvolvimento de atividades em suas práticas docentes realizadas no estágio supervisionado. A produção de dados ocorreu por meio de diários de bordo realizados pelo pesquisador e pelos participantes, entrevistas semiestruturadas com os participantes e gravação de vídeo e áudio das aulas ministradas pela dupla de participantes. O pesquisador constatou que a experiência formativa possibilitou a construção dos conhecimentos componentes do TPACK. Com a relação às potencialidades, o pesquisador verificou que ocorreram

[...] domínio de sala no ambiente do laboratório de informática, a ajuda individualizada para esclarecimento de dúvidas no decorrer das atividades nos computadores e o uso das tecnologias disponíveis para o aluno construir o conhecimento a partir do uso dinâmico e livre das ferramentas, de modo a fazerem experiências e verificarem o resultado de seus testes, comparando com os de outros colegas e o que foi passado pelo docente. (CIBOTTO, 2014, p. 202).

Com relação às limitações do uso das tecnologias digitais, Cibotto (2014) pôde verificar que os participantes destacaram: falta de vivência com tecnologia ao longo do curso, deslocamento do aluno entre sala-laboratório-sala, inexperiência dos professores, problemas

técnicos dos computadores, falta de equipamentos no laboratório, dispersão dos alunos, dentre outros.

Dantas (2015) investigou o processo de integração de tecnologias digitais à prática de um professor de Matemática da Educação Básica. A pesquisa se desenvolveu em duas etapas: na primeira delas, a pesquisadora analisou os documentos oficiais a nível estadual e federal; na segunda etapa, a pesquisadora observou aulas sobre funções do primeiro e segundo grau de um professor de Matemática. A produção de dados se deu por meio de questionários, entrevistas, diários de campo e filmagem das aulas. A pesquisadora verificou que o professor se utilizou de *notebook* e *tablet* para desenvolver suas aulas, com os quais explorou os *software* Grapher, Excel e Winplot. Com a análise dos documentos, a pesquisadora verificou que “[...] a introdução de tecnologias digitais na escola exige mudanças nas atitudes discentes e docentes, mas principalmente na preparação dos professores que utilizarão esses recursos.” (DANTAS, 2015, p. 90). Com o acompanhamento das aulas do professor, Dantas (2015) identificou a mobilização de Conhecimentos Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo na utilização de tecnologias digitais e que

[...] no início [o professor] utilizava as tecnologias digitais para exemplificar e reforçar o conteúdo já exposto, [e] ao longo da pesquisa houve uma mudança de atitude, pois o *Professor* passou a fazer uso da tecnologia digital em diversos momentos do processo de ensino, buscando integrá-la à própria prática educativa. (DANTAS, 2015, p. 93, grifo da autora).

Richit (2015), em sua pesquisa sobre a formação do professor universitário, buscou identificar aspectos do conhecimento docente que emergem a partir de uma comunidade de prática *online*, para isso houve o desenvolvimento de um curso de extensão *online*. O curso ocorreu em dezessete encontros virtuais e se desenvolveu a partir de discussões sobre as possibilidades das tecnologias digitais para o ensino e a aprendizagem de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear, bem como, o desenvolvimento de atividades apoiadas nos programas GeoGebra e Winplot. Participaram do curso 23 professores de Ensino Superior. A produção de dados ocorreu por meio de questionários, *chats* da plataforma do curso, fichas de avaliação, fichas de inscrição, fóruns de discussão, memoriais reflexivos, resenhas e planos de aula. A pesquisadora verificou a emergência de quatro aspectos do conhecimento: teórico-metodológicos do conhecimento do professor de Matemática da Educação Superior no contexto das TIC; didático-pedagógicos, sociais e culturais das TIC; epistemológicos de conceitos matemáticos; e culturais e político-pedagógicos dos cursos de Matemática. O primeiro aspecto identificado se relaciona a “[...] temporalidade no contexto da formação [...], a relevância de espaços formativos, a colaboração, a interação, a leitura e a reflexão dos textos como

motivadores das discussões e constituição do conhecimento sobre Matemática e TIC [...]” (RICHIT, 2015, p. 231); o segundo aspecto se relaciona à “[...] utilização de *software* na prática pedagógica, aos limites, desafios e utilização destes, à formação inicial e contínua em Tecnologias e ao potencial das tecnologias no processo de ensinar e aprender Matemática, à presença da TIC no cotidiano [...]” (RICHIT, 2015, p. 233, grifo nosso); o terceiro aspecto “[...] traz em sua essência elementos referentes ao conhecimento dos conceitos matemáticos, destacando-se as representações matemáticas (algébrica, numérica e geométrica), a visualização e os limites da formação matemática básica [...]” (RICHIT, 2015, p. 236); o quarto aspecto, por fim, se relaciona à “[...] cultura da sala de aula, à cultura acadêmica instituída, aos livros didáticos [...]” (RICHIT, 2015, p. 238).

Baldini (2014) buscou identificar elementos de uma Comunidade de Prática de Formação de Professores que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de Matemática. Para atingir o objetivo de pesquisa, a pesquisadora desenvolveu um grupo de estudos com doze professores e nove licenciandos em Matemática que buscavam explorar as potencialidades do GeoGebra ao ensino. Os estudos ocorreram em vinte e cinco encontros, nos quais, os participantes realizavam e discutiam atividades sobre diversos conteúdos matemáticos. Na produção de dados, a pesquisadora utilizou observação, notas de campo, gravações em áudio, registros escritos dos participantes, discussões realizadas nos fóruns virtuais e construções realizadas no GeoGebra. A pesquisadora constatou que a comunidade de prática, constituída pelo de grupo de estudos, foi

[...] um espaço fértil para apoiar a mobilização/constituição dos conhecimentos constituintes do TPACK, pois incentiva pensar, criar, partilhar informações e experiências, negociar empreendimentos, engalar-se em discussões que podem desenvolver a autoconfiança para o uso adequado das TDIC no ensino de matemática. (BALDINI, 2014, p. 198-199).

As pesquisas apresentadas evidenciam que os Conhecimentos Docentes guiaram de forma positiva intervenções na formação inicial (ARAÚJO, 2015; CIBOTTO, 2015), continuada (RICHIT, 2015) ou ambas (BALDINI, 2014). Também foi possível verificar que o construto teórico se faz útil na avaliação do uso da tecnologia digital no ensino (DANTAS, 2015). Além disso, as pesquisas mostraram que os Conhecimentos Docentes podem ser aplicados a diversos contextos tecnológicos, no ensino presencial, no ensino à distância e com a articulação de diversas tecnologias digitais (GeoGebra, Excel, dentre outras). Esta pesquisa se assemelha a de Baldini (2014) pela intervenção com o GeoGebra e com a participação de professores e futuros professores, mas se diferencia pela abordagem da Geometria Plana e da Geometria Espacial, além da articulação com o Construcionismo. Sendo tal articulação uma

característica marcante desta pesquisa, apresento, a seguir, considerações e pesquisas relacionadas a ela.

3.4 Construcionismo e Conhecimentos Docentes

O Ciclo de Ações, pelo qual se pode explicar a interação entre o computador e o aluno num ambiente de aprendizagem construcionista, se relaciona a três conceitos importantes: dado, informação e conhecimento (VALENTE, 2005a). O dado é uma forma de expressão de coisas; a informação é decodificação dos dados, de forma a dar-lhes significado; o conhecimento é

[...] o que cada indivíduo constrói como produto do processamento, da inter-relação entre interpretar e compreender a informação. É o significado que é atribuído e representado na mente de cada indivíduo, com base nas informações advindas do meio em que ele vive. É algo construído por cada um, muito próprio e impossível de ser transmitido – o que é transmitido é a informação que é proveniente desse conhecimento, porém nunca o conhecimento em si. (VALENTE, 2005a, p. 83).

Valente (2005a) discute a potencialidade de um ambiente construcionista para a construção do conhecimento. O autor também discute como o contexto em que o aluno se insere também influencia nessa construção. O contexto de aprendizagem, por outro lado, se refere a questões conceituais, evidenciadas pelos conceitos explorados nesse ambiente. Também se referem a questões pedagógicas, implícitas na maneira como o agente de aprendizagem se insere nesse cenário, na forma como os problemas são propostos e como ocorre a interação nesse ambiente. Ainda assim, se relacionam questões tecnológicas, evidenciadas pelos programas utilizados na interação. Portanto, o Construcionismo relaciona-se aos Conhecimentos Docentes. Sendo assim, o Ciclo de Ações é capaz de mobilizar Conhecimentos de Conteúdo, Pedagógicos e Tecnológicos dos indivíduos que estão inseridos nesse ambiente de aprendizagem.

A revisão da literatura indicou pesquisas norteadas pela articulação entre o Construcionismo e os Conhecimentos Docentes apoiadas pelo *software* Scratch, como os estudos de Marinho (2014) e Rocha (2015). Foi possível, ainda, identificar um estudo norteado pela articulação teórica apresentada e apoiada pelo uso do GeoGebra, como os estudos de Padilha (2015) e Pupo (2013).

Marinho (2014) buscou identificar os saberes necessários para que os professores utilizem jogos digitais em suas aulas. Na primeira fase do estudo, o pesquisador observou aulas de um professor que utiliza jogos em suas aulas na Educação Básica; nessa etapa, o pesquisador identificou os saberes necessários para a utilização e verificou que “[...] os professores e os

alunos aprendem uns com os outros, mas cabe ao professor o papel de liderança deste processo devido à sua experiência educacional.” (MARINHO, 2014, p. 101). Com base em tais saberes, houve o desenvolvimento de um curso semipresencial que contou com a participação de dez professores das áreas de Ciências e Matemática, o curso buscou abordar Conhecimentos Pedagógicos, Tecnológicos e de Conteúdo, sendo que, “[...] para a abordagem dos conhecimentos pedagógicos o curso foi desenvolvido em uma perspectiva na qual os professores experimentam a proposta pedagógica do ponto de vista dos alunos, sendo convidados a desenvolver seus primeiros jogos.” (MARINHO, 2014, p. 104). O Conhecimento Tecnológico foi abordado a partir do *software* Scratch e os Conhecimentos de Conteúdo foram abordados de acordo com a necessidade de cada área do conhecimento a que os professores pertenciam. O curso também se concentrou na Matética, termo que significa a “arte de aprender” e que pode ser considerada a essência do Construcionismo; para o pesquisador a valorização da aprendizagem causa “[...] uma mudança de paradigma em que as perguntas são mais valorizadas do que as respostas.” (MARINHO, 2014, p. 168). O pesquisador verificou que os saberes docentes envolvidos no desenvolvimento de jogos para a Educação Básica estão relacionados à manipulação de imagens, à utilização de variáveis e de sons, à aprendizagem não-tradicional e a barreiras impostas pela escola na integração das tecnologias digitais na educação.

Rocha (2015) também se apoiou tecnologicamente no *software* Scratch e investigou como ocorre a integração de Conhecimentos Matemáticos, Tecnológicos e Pedagógicos por professores de Matemática, para isso houve o desenvolvimento de dois cursos de formação continuada, a partir dos quais os professores participantes puderam explorar e desenvolver atividades matemáticas com o Scratch. O desenvolvimento dos cursos e a análise dos dados foram apoiados teoricamente pelo Construcionismo e pelos Conhecimentos Docentes. A produção de dados ocorreu por meio de questionários, entrevistas semiestruturadas, produção dos participantes e captação de áudio dos encontros. A pesquisadora verificou que, primeiramente “[...] ocorre integração da Matemática com a tecnologia; em seguida, o conhecimento pedagógico entra em cena e se sobressai um pouco mais, graças à preocupação dos professores em saber como o seu aluno irá aprender um determinado conteúdo da Matemática.” (ROCHA, 2015, p. 126) e que a mediação durante a aprendizagem docente “[...] auxilia no processo de integração dos conhecimentos pedagógicos e tecnológicos com a Matemática por parte dos professores.” (ROCHA, 2015, p. 141). A pesquisadora ainda identificou que, para que haja a construção do Conhecimento Tecnológico Pedagógico de

Conteúdo, “[...] é necessário que os sujeitos tenham o domínio de cada um desses conhecimentos individualmente.” (ROCHA, 2015, p. 144).

Padilha (2015) investigou como professores de Matemática se apropriam da tecnologia digital *tablet* para o ensino de função polinomial do primeiro grau. Os sujeitos da pesquisa foram seis professores da Educação Básica, que participaram de uma oficina oferecida pelo pesquisador, ocorrida em seis encontros. Na oficina, os professores puderam explorar atividades com os aplicativos Grapher e GeoGebra. Após a experiência formativa, os professores utilizaram *tablets* em suas aulas, momento em que o pesquisador pôde observar como os professores fizeram a integração das tecnologias digitais no ensino. O pesquisador ainda realizou encontros com o grupo de professores para que eles pudessem compartilhar suas experiências de utilização dos *tablets* na prática docente. Para a produção de dados, o pesquisador utilizou “[...] questionários, entrevistas semi-estruturadas, protocolos das atividades desenvolvidas pelos professores e registros dos encontros com a utilização de vídeo, áudio-imagem e diário de campo do formador/pesquisador.” (PADILHA, 2015, p. 21). O desenvolvimento da Oficina e da análise dos dados foi norteado pelo Construcionismo e pelos Conhecimentos Docentes. O pesquisador verificou que a apropriação das tecnologias digitais ocorre em três fases: periférica, adaptação e inovação. A primeira fase se caracteriza pelas “[...] barreiras que dificultam o professor de vivenciar o processo de apropriação pedagógica e tecnológica.” (PADILHA, 2015, p. 130); na fase de adaptação, os professores adequam a utilização das tecnologias digitais à sua realidade; na fase de inovação, os professores tendem a utilizar novos referenciais e diversificam a utilização das tecnologias digitais. As fases

[...] não ocorrem de forma isolada e sequencial, mas fazem parte do processo de apropriação da tecnologia no contexto educacional. Na medida em que o professor se apropria da tecnologia utilizando seus recursos de forma relacionada a um conteúdo matemático voltado para a prática pedagógica, ele caminha para a construção do TPACK representado, segundo Mishra e Koehler (2006), pela integração do conhecimento do conteúdo específico, tecnológico e pedagógico. (PADILHA, 2015, p. 131).

Pupo (2013) desenvolveu um estudo com quinze professores de Matemática e objetivou identificar as potencialidades do GeoGebra para o ensino e aprendizagem de Simetria Axial, para isso desenvolveu uma oficina com os professores. Realizada em cinco encontros, a oficina ocorreu a partir de atividades a serem exploradas com materiais concretos e com o GeoGebra, além de atividades de programação no *software*, a partir das quais é favorecida uma “[...] situação rica de aprendizagem em que o usuário (professor, aluno) pode aprender-fazendo, vivenciado a espiral de aprendizagem que precisa ser revista nas práticas pedagógicas

escolares.” (PUPO, 2013, p. 93-94). A produção de dados ocorreu por meio de questionários, protocolos das atividades dos professores. O pesquisador constatou que ocorreu

[...] a intersecção entre dois diferentes conhecimentos – conteúdo específico e o tecnológico, viabilizado pela atividade de programação. Mas o conhecimento pedagógico não foi enfatizado na Oficina devido às fragilidades encontradas e que foram sendo superadas em relação ao conhecimento específico. (PUPO, 2013, p. 94).

As pesquisas apresentadas evidenciam que a articulação teórica é eficaz para as intervenções propostas nas pesquisas, bem como, na análise dos dados. Elas se inserem na formação continuada e muitas delas utilizam o Construcionismo na perspectiva da programação de computadores (MARINHO, 2014; ROCHA, 2015; PUPO, 2013). Esta pesquisa traz como inovação uma abordagem na formação inicial e continuada, bem como na aprendizagem especificamente de Geometrias Plana e Espacial, explorando o GeoGebra 3D. Além disso, como na pesquisa de Padilha (2015), esta pesquisa se apropria do Construcionismo no nível de interação do aprendiz com o computador e não na programação.

Portanto, no presente estudo, no qual investigo aspectos do conhecimento docente na exploração matemática baseada no uso do *software* GeoGebra, há uma articulação teórica entre Construcionismo e TPACK, teorias apresentadas nesta seção. Na próxima seção, apresento os procedimentos metodológicos adotados para a produção e análise dos dados.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta seção, apresento os procedimentos metodológicos realizados com o intuito de identificar e analisar os conhecimentos docentes emergentes quando professores e futuros professores exploram atividades de Geometria utilizando o *software* GeoGebra. Primeiramente, faço a descrição da abordagem metodológica adotada, em seguida, apresento o cenário da pesquisa e, por fim, descrevo como se deu a produção e análise dos dados.

4.1 Abordagem metodológica

A pesquisa é um “[...] procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos.” (GIL, 2008, p. 17). Sendo assim, os questionamentos guiam o pesquisador no desenvolvimento da pesquisa e na busca de respostas. Araújo e Borba (2013) apontam que o estabelecimento da pergunta diretriz é um dos principais momentos da pesquisa, pois é ela que “[...] irá dirigir o desenrolar do processo.” (ARAÚJO; BORBA, 2013, p. 33). A pergunta diretriz que guiou este estudo foi: *“Que conhecimentos docentes emergem quando licenciandos em Matemática e professores exploram atividades de Geometria utilizando o GeoGebra?”*.

Além da delimitação de uma pergunta diretriz, é necessário delinear o que se pretende com a investigação, ou seja, definir os objetivos. Segundo Gonsalves (2005, p. 56) os objetivos direcionam o pesquisador e “[...] oferecem indicações sobre a escolha de seu percurso metodológico, pois norteiam a escolha de métodos e das técnicas de pesquisa.”. Nesta pesquisa, os objetivos gerais delineados foram identificar e analisar os conhecimentos mobilizados pelos participantes durante o curso de extensão universitária e investigar os contextos dessa mobilização; e os objetivos específicos foram: analisar o desenvolvimento das atividades sob a perspectiva Construcionista e identificar a articulação entre os Conhecimentos Docentes e o Construcionismo no desenvolvimento do curso. Com base nos objetivos traçados, esta pesquisa se classifica como pesquisa descritiva, uma vez que buscou “[...] descrever ou caracterizar com detalhes uma situação, um fenômeno ou um problema.” (FIORENTINI, 2006, p. 70). Gonsalves (2005) discute que a função da pesquisa descritiva não é apenas descrever, ela “[...] está interessada em descobrir e observar fenômenos, procurando descrevê-los, classificá-los e interpretá-los.” (RUDIO, 2007, p. 71).

Na realização de uma pesquisa, além da pergunta diretriz e dos objetivos, outro elemento essencial é construção das conclusões do estudo. Para isso, é necessário traçar um caminho que

garanta seu desenvolvimento, ou seja, responder à questão diretriz, como aponta Fiorentini (2006, p. 60)

[...] para chegar-se a uma conclusão ou a uma resposta consistente e confiável para a questão/pergunta de investigação, precisamos buscar ou construir um caminho (isto é, uma alternativa metodológica mais segura possível), o qual permita, de maneira satisfatória, traçar o problema ou responder à questão de investigação.

Assim, houve o desenvolvimento de um curso de extensão universitária, do qual, licenciandos em Matemática e professores participaram. Nesse ambiente, a pesquisadora se inseriu como professora. Sendo assim, esta pesquisa buscou as informações diretamente com a população pesquisada, caracterizando-se como pesquisa de campo segundo as fontes de informação (GONSALVES, 2005). A pesquisa de campo “[...] é desenvolvida por meio de observação direta das atividades do grupo estudado e de entrevistas com informantes para captar suas explicações e interpretações do que ocorre no grupo.” (GIL, 2008, p. 53).

Além disso, para a produção dos dados no contexto do curso de extensão universitária, houve a filmagem dos encontros, coleta da produção escrita dos participantes, desenvolvimento de atividades por eles e realização de entrevistas. Com base nos procedimentos de produção de dados, esta pesquisa classifica-se como pesquisa participativa, uma vez que é um tipo de pesquisa que “[...] propõem a efetiva participação da população pesquisada no processo de geração de conhecimento, que é considerado um processo formativo.” (GONSALVES, 2005, p. 67).

Segundo a natureza dos dados, as pesquisas se classificam como qualitativas ou quantitativas. As pesquisas quantitativas expressam os dados por meio de números. Já as pesquisas qualitativas, preocupam-se com a compreensão e interpretação de fenômenos, não produzindo dados mensuráveis (GONSALVES, 2005).

Esta pesquisa se desenvolveu a partir de uma abordagem qualitativa. A pesquisa qualitativa é entendida como uma ação na qual ocorre a reflexão e análise da realidade (OLIVEIRA, 2007), cujo foco é o “[...] indivíduo, com toda a sua complexidade, e [...] sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural.” (D’AMBROSIO, 1996, p.103).

A investigação qualitativa se caracteriza por ter o pesquisador como instrumento principal (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Na abordagem qualitativa é ressaltada a “[...] importância do ambiente natural na configuração da personalidade, dos problemas e situações de existência do sujeito.” (TRIVIÑOS, 2012, p. 128).

A abordagem qualitativa tem como característica o estilo descritivo, pois “[...] os dados são em forma de palavras ou imagens e não de números [...]” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.

48). O foco da pesquisa qualitativa está nas “[...] descrições de experiências, relatos de compreensões, repostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções de estados mentais, de acontecimentos, etc.” (BICUDO, 2013, p. 117), ou seja, os dados não podem ser expressos em quantidades, não podem ser mensuráveis.

A investigação qualitativa se caracteriza, ainda, pelo interesse maior no processo do que nos produtos (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Sendo assim, o pesquisador busca verificar como o fenômeno estudado “[...] se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas.” (LÜDKE; ANDRÉ, 2015, p. 13).

Os pesquisadores de estudos qualitativos “[...] tendem a analisar os seus dados de forma indutiva [...]” (BOGDAN; BIKLEN, p. 50). Dessa forma, não buscam confirmar ou negar as hipóteses iniciais, “[...] as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando [...]” (BOGDAN; BIKLEN, p. 50); corroborando essa ideia, Alves-Mazzoti e Gewandsznajder (1999, p. 170) discutem que, no processo de produção de dados,

[...] o pesquisador vai procurando tentativamente identificar temas e relações, construindo interpretações e gerando novas questões e/ou aperfeiçoando as anteriores, o que, por sua vez, o leva a buscar novos dados, complementares ou mais específicos, que testem suas interpretações, num processo de “sintonia fina” que vai até a análise final.

O enfoque qualitativo ainda se distingue por se atentar aos significados que as pessoas dão às coisas e à sua vida, sendo assim, “[...] há sempre uma tentativa de capturar a ‘perspectiva dos participantes’, isto é, a maneira como os informantes encaram as questões que estão sendo focalizadas.” (LÜDKE; ANDRÉ, 2015, p. 14).

Portanto, com base na abordagem apresentada e em suas características, este estudo teve como ambiente principal um curso de extensão universitária, sendo ele, a realidade investigada. Nesse contexto, os sujeitos considerados foram os professores e futuros professores de Matemática participantes do curso, nos quais, o foco da pesquisa esteve centrado. Apresento, a seguir, detalhes do cenário da pesquisa.

4.2 Cenário da pesquisa

O curso de extensão universitária foi realizado em junho de 2016 na Universidade Estadual Paulista (UNESP), no câmpus de Rio Claro-SP. O curso foi intitulado “GeoGebra e Performance Matemática Digital” e objetivou apresentar as potencialidades do *software*

GeoGebra para o ensino e a aprendizagem de Geometrias Plana e Espacial e construir Performances Matemáticas Digitais²⁰ (PMDs). Esse curso foi cenário de três pesquisas de Mestrado: uma investigando o desenvolvimento de atividades didático-pedagógicas utilizando o *software* GeoGebra; outra buscando investigar o processo de criação de PMDs em um contexto de aprendizagem de Geometria com o *software* GeoGebra; e uma última, este estudo, investigando os conhecimentos docentes emergentes em relação ao ensino e à aprendizagem de Geometria Plana e Geometria Espacial com o uso de tecnologias digitais. Optamos pelo desenvolvimento de um curso de extensão universitária pela possibilidade de atingirmos diferentes públicos, desde alunos da graduação, até professores, alunos da Educação Básica e membros da comunidade. Com isso, atenderíamos as necessidades metodológicas das diferentes pesquisas envolvidas.

A seguir, apresento características importantes do *software* selecionado como objeto de exploração no curso de extensão universitária, as atividades investigativas exploradas no curso, os participantes da pesquisa e a descrição de cada encontro do curso.

4.2.1 GeoGebra

O GeoGebra foi o *software* utilizado para a exploração das atividades. Ele foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter em sua tese de Doutorado pela Universidade de Salzburg, localizada na Áustria (HOHENWARTER; LAVICZA, 2007). É um *software* de Matemática Dinâmica gratuito para baixar e utilizar. Pode ser empregado em qualquer nível de ensino, combinando diversas áreas da Matemática, como Geometria, Álgebra, Aritmética e Estatística. O programa possui uma plataforma acessível e de fácil utilização, tendo sido traduzido para diversas línguas desde sua criação (HOHENWARTER; JARVIS; LAVICZA, 2008). No *site* oficial do programa²¹ é possível baixar o *software*; ele é compatível com diversos sistemas operacionais de computadores e *tablets*, inclusive para alguns tipos de *smartphones*. O *site* ainda permite o compartilhamento de atividades desenvolvidas pelos colaboradores do programa ao redor do mundo. Hohenwarter, Jarvis e Lavicza (2008) enfatizam alguns benefícios do GeoGebra:

O *GeoGebra* tem sido descrito por muitos de seus seguidores como tendo inúmeras vantagens em relação aos outros programas de Matemática existentes: é gratuito, tem acesso aberto; versatilidade (entradas algébricas e geométricas e janelas separadas); acessibilidade em relação à linguagem; e, a

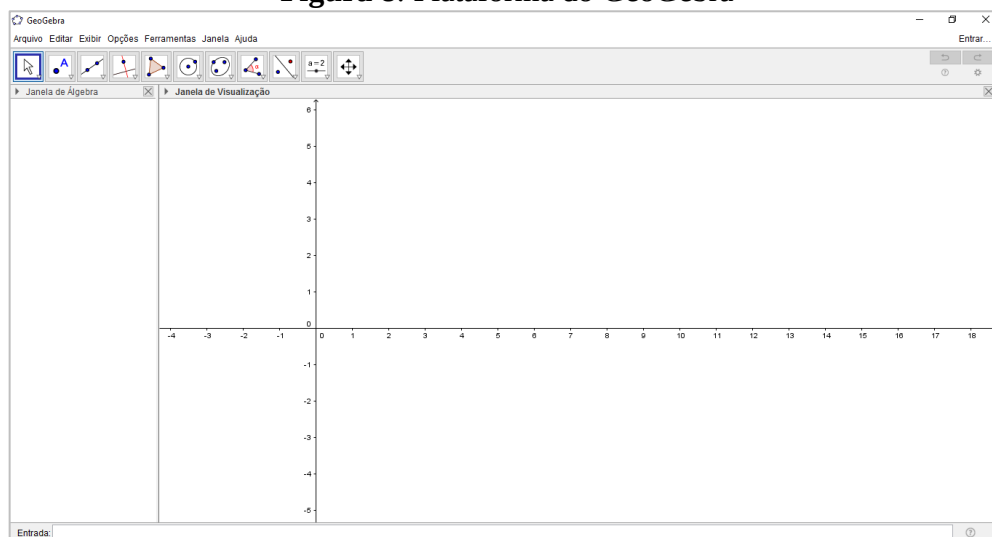
²⁰ Conceito que associa artes (música, teatro, cinema, poesia) à comunicação de ideias matemáticas e às tecnologias digitais (SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2013).

²¹ www.geogebra.org

habilidade de compartilhar interativamente comentários e recursos na web por meio do fórum de usuários e da wiki.²² (HOHENWARTER; JARVIS; LAVICZA, 2008, p. 85, tradução nossa, grifo dos autores).

Na pesquisa foi utilizada a versão 5.0 do *software*, que possui ferramentas para exploração geométrica em 2D e 3D. Ao abrirmos o *software*, é possível observar as ferramentas de Geometria 2D, na parte superior; no lado esquerdo, observamos a Janela de Álgebra, que exibe as expressões algébricas correspondentes aos objetos construídos na Janela de Visualização, que se encontra no lado direito da tela. A versatilidade entre Geometria e Álgebra é uma característica marcante do *software*, sendo ela que dá o nome ao programa: “Geo” se refere à Geometria e “Gebra” se refere à Álgebra (GRAVINA et al., 2012). Na Figura 8, a seguir, podemos observar a plataforma do *software*.

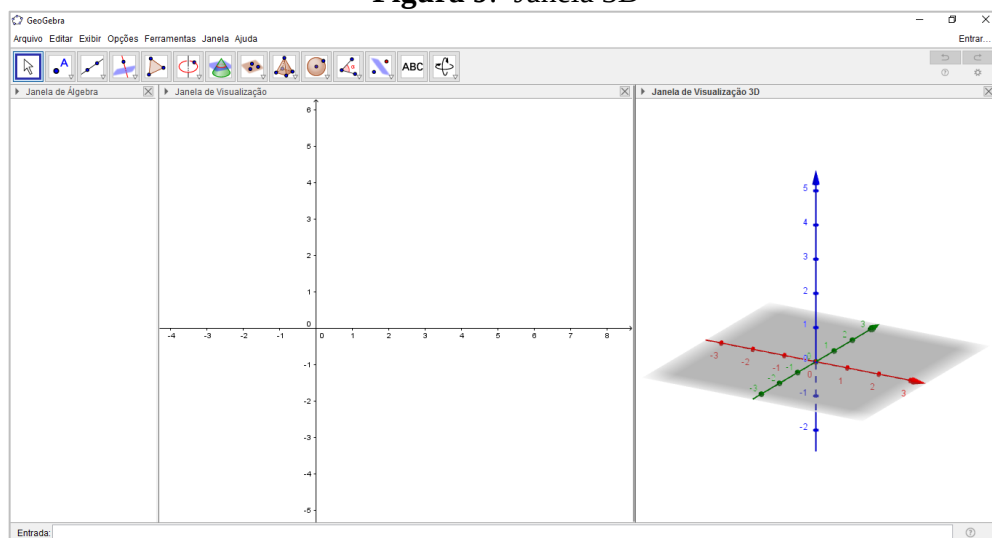
Figura 8: Plataforma do GeoGebra



Fonte: GeoGebra

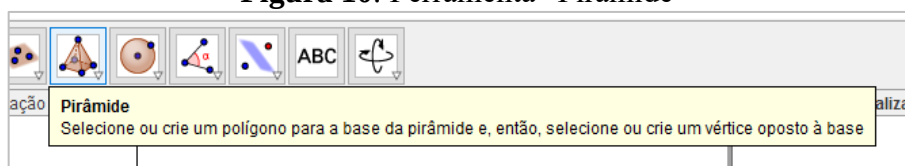
A exploração de Geometria Espacial, pode ser feita ao se abrir a Janela de Visualização 3D, que aparecerá no lado direito da tela. São acrescentadas as ferramentas específicas na parte superior da tela. É ainda possível fechar a Janela de Visualização e fazer a exploração apenas na Janela 3D. A Janela 3D foi inovação trazida pela versão 5.0 do *software*. Na Figura 9, a seguir, podemos observar a tela do *software* ao se abrir a Janela 3D.

²² *GeoGebra* has been described by many of its proponents as having several key advantages over other existing mathematics programs: free, open source status; versatility (algebraic and geometric input and separate windows); accessibility in one's own language; and, the ability to interactively share comments and resources on the web via the user forum and wiki.

Figura 9: Janela 3D

Fonte: GeoGebra

O GeoGebra possui uma plataforma amigável e ferramentas de fácil utilização. Ao passarmos o cursor do mouse sobre uma ferramenta, é possível obter informações sobre sua funcionalidade e utilização. Na Figura 10, por exemplo, podemos ver as instruções de utilização da ferramenta “Pirâmide”.

Figura 10: Ferramenta “Pirâmide”

Fonte: GeoGebra

No curso de extensão universitária desenvolvido utilizamos algumas ferramentas de construção geométrica em 2D e em 3D. As ferramentas utilizadas estão elencadas no Quadro 1, a seguir, bem como, seus símbolos e funcionalidades. As ferramentas apresentadas são as que o desenvolvimento das atividades previa sua utilização, mas os participantes eram livres para utilizarem as demais ferramentas conforme desejassem.

Quadro 1: Ferramentas do GeoGebra utilizadas no curso de extensão universitária

Símbolo ²³	Nome	Descrição
	Ângulo	Exibe o ângulo determinado por duas retas concorrentes ou definido por três pontos.
	Área	Exibe a área de determinada superfície.
	Círculo dados Centro e Raio	Constrói circunferência de raio definido
	Círculo dados Centro e Um de seus Pontos	Constrói circunferência passando por um ponto qualquer.

²³ As imagens na coluna Símbolo têm como fonte o GeoGebra.

	Círculo definido por Três Pontos	Constrói circunferência a partir de três pontos.
	Controle Deslizante	Varia números decimais, inteiros ou ângulos e pode ser interligado a diversas construções que irão variar em função de seu valor.
	Cubo	Constrói cubo a partir de dois pontos da aresta.
	Esfera dados Centro e Raio	Constrói esfera de raio determinado.
	Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos	Constrói esfera passando por um ponto qualquer.
	Fazer Extrusão para Prisma ou Cilindro	Constrói prisma ou cilindro a partir de polígono ou círculo inicial.
	Interseção de Dois Objetos	Constrói ponto de interseção de dois objetos.
	Intersecção de Duas Superfícies	Constrói interseção de duas superfícies.
	Mover	Move objetos.
	Pirâmide	Constrói pirâmide.
	Plano Paralelo	Constrói plano paralelo passando por um ponto qualquer.
	Plano por três pontos	Constrói plano definido por três pontos.
	Polígono	Constrói polígono a partir de seus vértices.
	Polígono Regular	Constrói polígono regular de qualquer número de vértices.
	Ponto	Constrói ponto.
	Ponto Médio ou Centro	Constrói ponto médio de segmentos ou centro de circunferências.
	Reta	Constrói reta a partir de dois pontos.
	Reta Paralela	Constrói reta paralela a qualquer reta, passando por determinado ponto.
	Reta Perpendicular	Constrói reta perpendicular a qualquer reta, passando por determinado ponto.
	Reta Perpendicular	Constrói reta perpendicular a qualquer plano, passando por determinado ponto.
	Segmento	Constrói segmento a parti de dois pontos.
	Semicírculo Definido por Dois Pontos	Constrói semicírculo a partir de dois pontos.
	Tetraedro Regular	Constrói tetraedro regular.
	Volume	Exibe o volume de qualquer objeto.

Além de todas as vantagens elencadas anteriormente, o GeoGebra foi selecionado como objeto de exploração por seu caráter dinâmico, que facilita a investigação, a exploração e a

visualização (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Nesse sentido, Vieira (2010, p. 59) discute que a visualização proporcionada pelo GeoGebra “[...] possibilita a aquisição e a maturação de conceitos [...]” por parte dos alunos e que o “[...] ato de explorar de diferentes formas e experimentar várias possibilidades de manipulação de um objeto geométrico pode servir para validar determinadas conjecturas formuladas durante a investigação.”. Arranz et al. (2010, p.17, tradução nossa) ainda apontam que

O GeoGebra comporta a variação de características de cada construção com tanta simplicidade que permite a observação natural de elementos variáveis e invariáveis e [...] também mostra a maneira como variam. Portanto, o estudante pode entender brevemente a natureza das relações representadas no programa enquanto o professor pode perguntar questões mais específicas sobre elas.²⁴

Considerando a dinamicidade do GeoGebra e sua potencialidade de investigação, exploração e visualização, foram desenvolvidas atividades de Geometrias Plana e Espacial, as quais são apresentadas a seguir.

4.2.2 Atividades exploradas no curso

No período de março a junho de 2016 houve o planejamento do curso de extensão universitária. Parte desse planejamento estava relacionado ao desenvolvimento de atividades a serem exploradas no curso. As atividades tiveram um caráter investigativo, estimulando a exploração e a construção de conceitos e relações, em oposição às atividades mecânicas que permeiam o ensino da Matemática em uma abordagem tradicional de ensino²⁵ (MIORIM; FIORENTINI, 1990). No total, foram criadas sete atividades sobre diferentes temas de Geometrias Plana e Espacial; os roteiros das atividades se encontram no **Apêndice A**. A seguir, apresento uma breve descrição das atividades desenvolvidas.

4.2.2.1 Atividade 1: Triângulo Equilátero e Tetraedro Regular

O objetivo da primeira parte da atividade foi estabelecer relações entre a área de um triângulo e de um trapézio formados quando um triângulo equilátero é interseccionado por uma

²⁴ GeoGebra enables the variation of the characteristics of every construction with such simplicity that it permits the natural observation of the variable and invariable elements and [...] it also shows the analysis of the way they vary. Therefore, the student can understand briefly the nature of the relations represented in the module while the teacher can ask more specific questions about them.

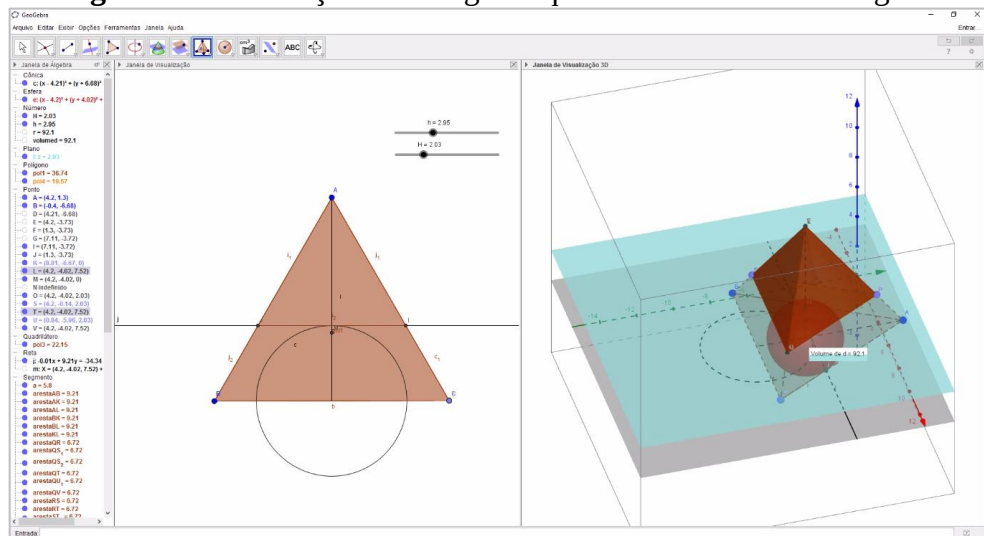
²⁵ Entendo por abordagem tradicional de ensino aquela em que o processo de ensino é centrado no professor, visto como detentor do conhecimento, e em que o aluno é passivo na própria aprendizagem.

reta paralela a uma de suas bases. Essa exploração ocorria quando a reta interseccionava a metade da altura do triângulo; outra exploração era feita com relação à altura em que a reta deveria interseccionar para que as áreas do triângulo e do trapézio fossem iguais. Ainda na primeira parte da atividade, era solicitado aos participantes que explorassem diferentes formas de construção de um triângulo equilátero no GeoGebra.

Na segunda parte da atividade, os participantes deveriam utilizar o triângulo equilátero inicial para construir um tetraedro regular. Em seguida, construiriam um plano paralelo a uma das bases e fariam a exploração das relações entre o volume do tronco e o volume da pirâmide formados na secção do plano com o tetraedro. A exploração ocorreu, também, primeiramente, quando o plano interseccionava a metade da altura do tetraedro e, em seguida, solicitava-se que os participantes encontrassem a altura em que o plano deveria interseccionar o tetraedro para que os volumes do tronco e da pirâmide fossem iguais.

Destaca-se, nessa atividade, o uso da ferramenta “Controle Deslizante”, que alterava a altura em que a reta e o plano interseccionavam as alturas, respectivamente, do triângulo equilátero e do tetraedro regular. Outra característica importante da atividade, foi a criação de *GIFs*²⁶, nos quais ocorriam a animação da variação da altura da reta na construção do triângulo equilátero e a animação da variação da altura do plano na construção do tetraedro regular. Na Figura 11, a seguir, apresento a construção dessa atividade.

Figura 11: Construção do triângulo equilátero e do tetraedro regular



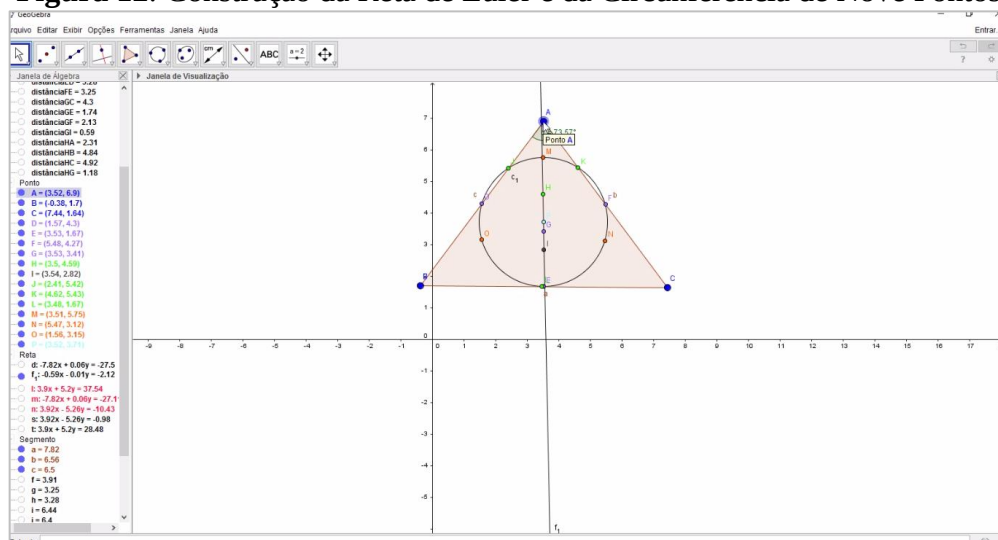
Fonte: Dados da pesquisa

²⁶ A sigla *GIF* significa *Graphics Interchange Format* (Formato de Mudança de Gráficos) é “[...] um formato de arquivo de imagens digitais, que podem ser utilizadas com várias cenas em um único arquivo.” (MOTTA-ROTH et al., 2000, p. 39) fazendo com que as imagens se movimentem, em um tipo de animação.

4.2.2.2 Atividade 2: Reta de Euler e Circunferência de Nove Pontos

O objetivo da atividade foi que os participantes investigassem os pontos notáveis do triângulo e percebessem a relação entre eles, construindo a Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos. Primeiramente, os participantes deveriam construir o baricentro, o ortocentro e o circuncentro de forma investigativa, por meio de informações e perguntas que os levassem ao entendimento de tais propriedades. Em seguida, pedia-se que investigassem a relação entre tais pontos notáveis, construindo a reta de Euler. Ao final, solicitava-se a construção dos pontos da Circunferência de Nove Pontos e estimulava-se a percepção da relação entre a Circunferência e a Reta de Euler. Apresento na Figura 12, a seguir, a construção da atividade.

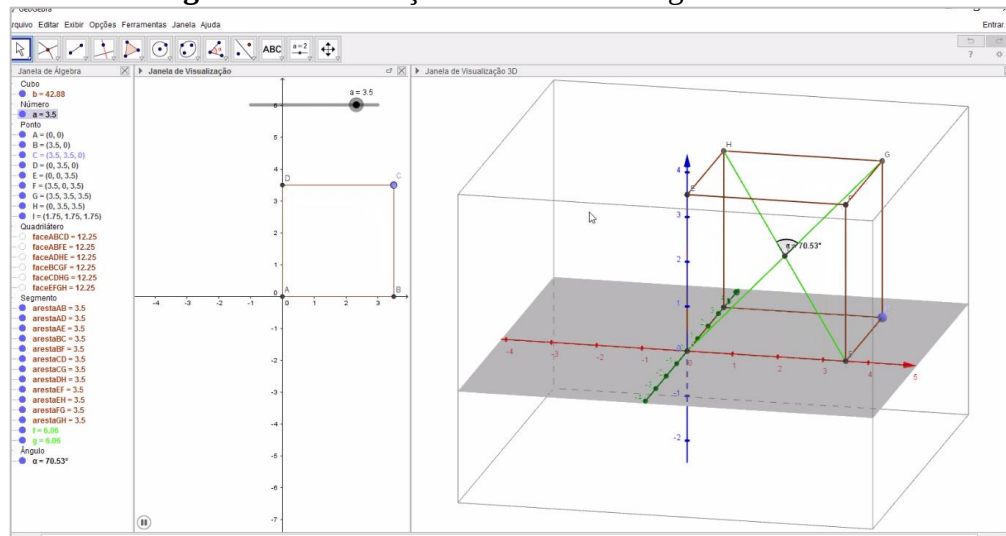
Figura 12: Construção da Reta de Euler e da Circunferência de Nove Pontos



Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2.3 Atividade 3: Diagonais do Cubo

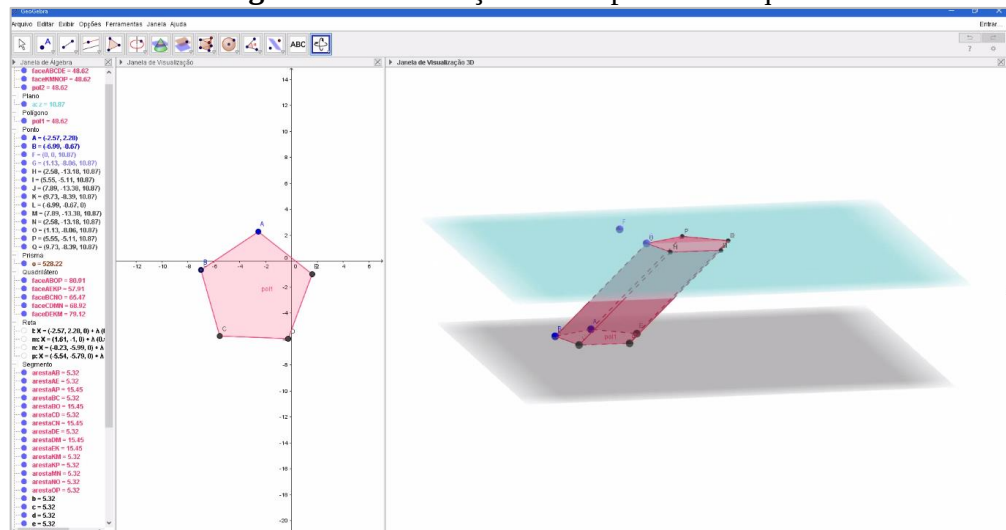
Nessa atividade foi solicitado aos participantes que construíssem um cubo e, atrelado a ele, um controle deslizante que variava o tamanho de suas arestas. Em seguida, os participantes deveriam construir as diagonais do cubo e encontrar o ângulo entre elas. O objetivo da atividade foi a observação de que, mesmo ao variar o tamanho das arestas do cubo, a angulação entre suas diagonais permanece constante. Nessa atividade foi, ainda, solicitado a construção de um GIF demonstrando a variação da aresta do cubo e a angulação entre suas diagonais. Na Figura 13, a seguir, apresento a construção da atividade.

Figura 13: Construção da atividade Diagonais do Cubo

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2.4 Atividade 4: Construções Geométricas no Espaço

Esta atividade objetivou estimular a construção de poliedros por meio de suas propriedades geométricas e verificar sua construção através da prova do arrastar. Na primeira parte da atividade, os participantes eram ensinados a construir um tetraedro regular e um octaedro regular utilizando-se de esferas e suas interseções. Em seguida, os participantes deveriam explorar as ferramentas do GeoGebra na construção de um cubo e de um prisma e verificar suas construções por meio da prova do arrastar. Essa atividade, então, buscou explorar as ferramentas do GeoGebra, bem como, fazer com que os participantes refletissem sobre as possibilidades das ferramentas para construções geométricas. Na Figura 14, a seguir, apresento a construção de um prisma oblíquo, parte da atividade.

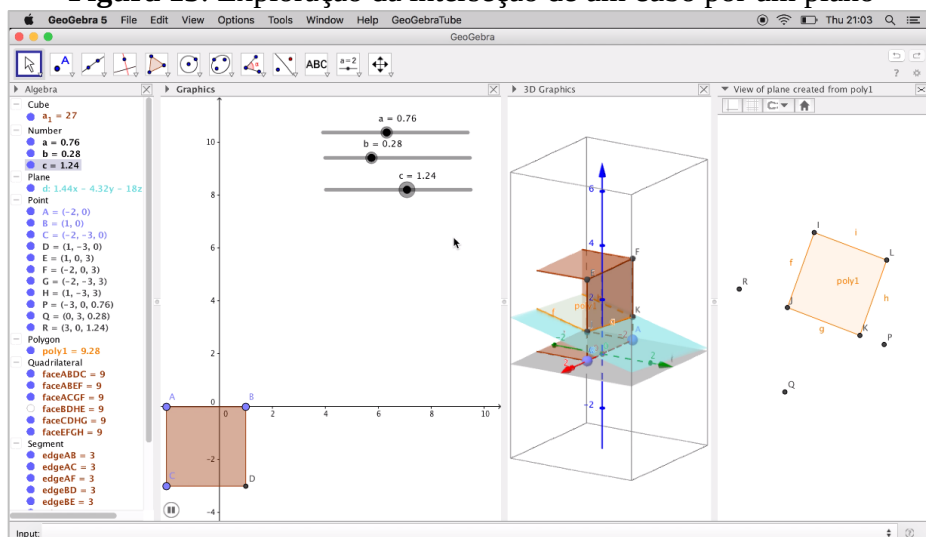
Figura 14: Construção de um prisma oblíquo

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2.5 Atividade 5: Interseção entre Plano e Poliedros

O objetivo da atividade foi que os participantes percebessem relações entre o número de faces de um poliedro e o número de lados de um polígono formado pela interseção do poliedro com um plano. A primeira parte da atividade solicitava aos participantes a construção de uma pirâmide e de um plano definido por três pontos cuja altura era determinada por três controles deslizantes, os participantes deveriam variar as alturas e observar os diferentes polígonos formados na interseção. Na segunda parte da atividade, os participantes deveriam repetir o mesmo procedimento, mas utilizando um prisma de base pentagonal para realizar a interseção. Ao final da atividade, os participantes deveriam construir diferentes poliedros e analisar suas interseções com o plano e estabelecer uma generalização sobre a relação entre o número de faces do poliedro e o número de lados dos polígonos formados na interseção. A seguir apresento, na Figura 15, uma das construções da atividade.

Figura 15: Exploração da interseção de um cubo por um plano

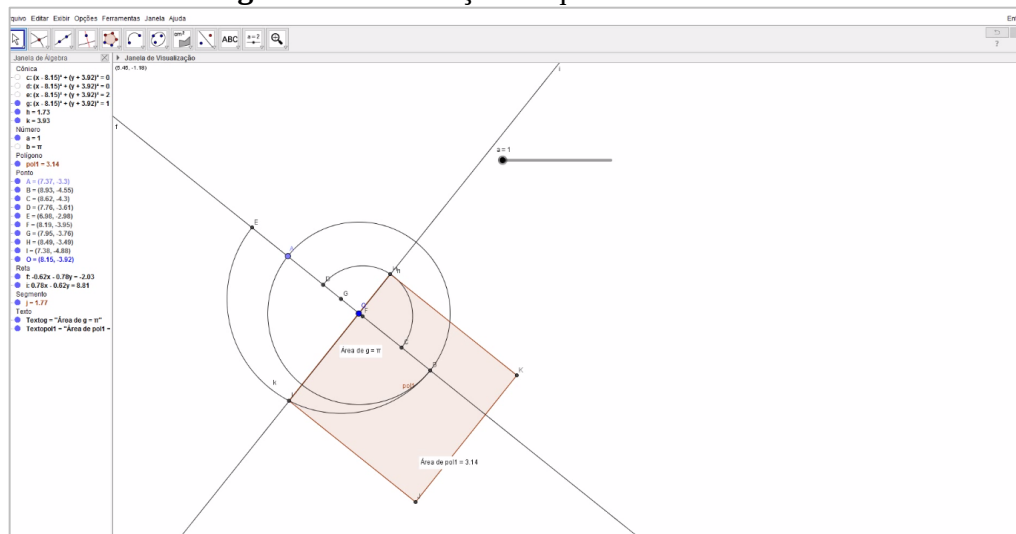


Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2.6 Atividade 6: A Quadratura do Círculo – Método de Ernest Hobson

O objetivo da atividade foi que os alunos refletissem sobre os números irracionais. Na atividade, era solicitado aos participantes que realizassem a construção do Método de Quadratura de Ernest Hobson, atrelando à construção um controle deslizante que variava o raio da circunferência. Ao final, era possível perceber que o valor da área do quadrado se aproximava grandemente da área do círculo; assim, era solicitado aos alunos que refletissem sobre as características dos círculos, sobre o número π e sobre os números irracionais. A seguir, na Figura 16, apresento a construção da quadratura.

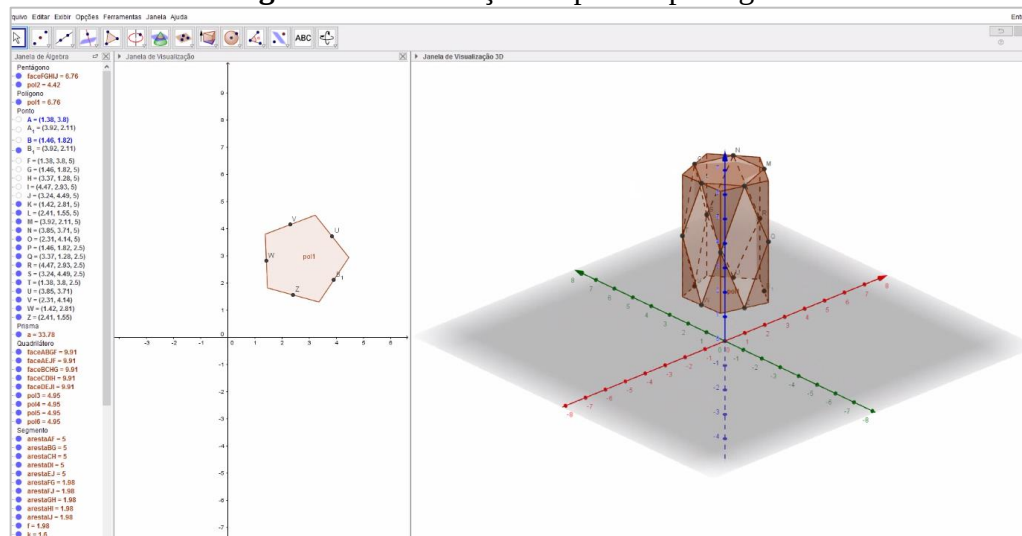
Figura 16: Construção da quadratura do círculo



Fonte: Dados da pesquisa

4.2.2.7 Atividade 7: Prismas

O objetivo dessa atividade foi a exploração do número de vértices, faces e arestas de prismas, sua relação com o número de faces de um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas desse prisma e a generalização de tais ideias para um prisma de base qualquer. Nessa atividade, era solicitado aos alunos que construíssem três prismas, um de base triangular, outro de base quadrangular e outro de base pentagonal; e, após a construção dos prismas, era solicitado que os participantes encontrassem os pontos médios das arestas dos prismas e construíssem os poliedros cujos vértices eram tais pontos. Em cada construção, os participantes deveriam conjecturar hipóteses e verificar se suas hipóteses estavam corretas. Ao final da atividade, era solicitado aos participantes que generalizassem as ideias, construindo uma resposta algébrica para o número de faces que o poliedro teria em função do número de lados da base do prisma. Na Figura 17, encontra-se a construção de um dos prismas da atividade.

Figura 17: Construção do prisma pentagonal

Fonte: Dados da pesquisa

4.2.3 Sujeitos da pesquisa

O curso ofertado possuía doze vagas, das quais deveriam se inscrever alunos associados à Unesp-Rio Claro e pessoas pertencentes à comunidade. Como o interesse de pesquisa foi professores e futuros professores, fizemos a divulgação de modo a atingir esse público especificamente. A divulgação ocorreu por meio de pôsteres fixados no câmpus, por meio de redes sociais e grupos específicos desse público e, ainda, contamos com a divulgação por parte de alguns professores. Foi possível completar oito das doze vagas disponíveis, atendendo à necessidade de que os sujeitos estivessem ligados à área de ensino. Não foi possível estabelecer a participação de professores em serviço, mas parte dos participantes, embora não lecionassem no período da pesquisa, possuíam experiências relacionadas ao ensino em sala de aula.

No Quadro 2, apresento os participantes da pesquisa, sua formação e experiência no ensino. Os participantes Bárbara, Gisela, Letícia, Nayara e Rafael optaram pela divulgação de seus nomes verdadeiros; os participantes José, Natasha e Ronaldo não fizeram tal opção, sendo esses nomes apresentados fictícios.

Quadro 2: Sujeitos da pesquisa

Nome	Formação e Experiência
Bárbara	Graduada em Licenciatura em Matemática em 2014, foi tutora à distância do curso de Licenciatura em Matemática e foi professora substituta de Cálculo em uma universidade pública. No período em que participou da pesquisa era aluna especial do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.
Gisela	Aluna do terceiro ano da Licenciatura em Matemática.
José	Graduado em Licenciatura em Ciências, com Habilitação em Matemática em 2005. É professor afastado do Ensino Básico (Secretaria Estadual) e do Ensino

	Superior (Instituto Federal). No período que participou da pesquisa, era aluno de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Letícia	Aluna do quarto ano da Licenciatura em Matemática.
Natasha	Aluna do quarto ano da Licenciatura em Matemática.
Nayara	Aluna do segundo ano da Licenciatura em Matemática.
Rafael	Graduado em Tecnologia e Biocombustíveis em 2010. Foi professor de Termodinâmica em uma universidade particular por três anos. No período em que participou da pesquisa, era estudante de engenharia agrônômica em uma universidade pública e de engenharia mecânica em uma universidade particular.
Ronaldo	Graduado em Licenciatura em Matemática em 2013. Foi professor de Matemática da Educação Básica na Rede Pública de Ensino. No período que participou da pesquisa, era aluno de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Matemática.

4.2.4 O curso de extensão universitária

O curso de extensão universitária teve duração de 18 horas e ocorreu em seis encontros nos dias 2, 7, 9, 14, 16 e 21 de junho de 2016. O curso ocorreu no período noturno das 19 às 22 horas, no laboratório de informática do Grupo de Pesquisas em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), localizado no Departamento de Educação Matemática da Unesp-Rio Claro. Os coordenadores do curso foram os Professores Doutores Marcelo de Carvalho Borba e Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva; foram colaboradores do curso os mestrandos Carla Vital, Rita Idem e Vinicius Honorato, os quais atuaram como professores.

Na dinâmica geral do desenvolvimento das atividades, os participantes sentavam-se em duplas ou trios, recebiam o roteiro da atividade e, nos momentos de dúvida, pediam auxílio aos professores. O curso contou ainda com atividades além da execução de tarefas no GeoGebra, como leitura de artigos e discussões. O Quadro 3, a seguir, sintetiza as atividades realizadas em cada encontro do curso.

Quadro 3: Descrição os encontros do curso de extensão universitária

Data	Participantes Presentes	Descrição
02/06/2016	Bárbara, Gisela, José, Letícia, Natasha, Nayara, Rafael e Ronaldo	O coordenador do curso, o professor doutor Marcelo de Carvalho Borba, estava presente e auxiliou no momento de introdução do curso. Inicialmente todos os presentes se apresentaram, em seguida, houve apresentação do <i>software</i> GeoGebra e do conceito de PMD. Nesse encontro, os participantes leram e assinaram o Termo de Consentimento, no qual esclareciam-se questões relacionadas à participação nas pesquisas que tiveram como cenário o curso, o documento se encontra no Apêndice B . Nesse encontro foi realizada a Atividade 1 e o desenvolvimento das atividades foi feito pela dupla Letícia e Natasha; e, pelos trios Bárbara, Gisela e Nayara, e Rafael, Ronaldo e José.

07/06/2016	Bárbara, Gisela, Letícia e Nayara	Nesse encontro, as participantes realizaram as Atividades 2 e 3 . Desenvolveram as atividades, as duplas Bárbara e Gisela, e Letícia e Nayara.
09/06/2016	Bárbara, Gisela, José, Letícia, Nayara e Rafael	Foram realizadas as Atividades 4 e 5 . A divisão dos participantes no desenvolvimento das atividades foi: Bárbara e Gisela, Letícia e Rafael, e, Nayara e José.
14/06/2016	Bárbara, Gisela, José, Letícia, Natasha, Rafael e Ronaldo	Os participantes haviam lido o texto “Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais” de Scucuglia (2014) cujo assunto é PMD, sendo assim, no início do encontro houve a discussão sobre tal assunto e a proposta de que os alunos construíssem PMDs ao final do curso. Em seguida, os alunos desenvolveram a Atividade 6 . A divisão dos participantes na realização da atividade foi: Bárbara e Gisela, José e Ronaldo, e, Letícia, Rafael e Natasha.
16/06/2016	Bárbara, Gisela, Letícia, Natasha, Rafael e Nayara	Na primeira parte do encontro, os participantes foram divididos em duplas para a leitura de fragmentos do texto “Educação Matemática na Era Digital” de Abar (2011) e para responder algumas perguntas referentes ao texto; os excertos e as questões estão no Apêndice C . Em seguida, houve a discussão coletiva das respostas e do tema integração das tecnologias digitais no ensino. Na segunda parte do encontro, os participantes realizaram a Atividade 7 , a divisão dos participantes na realização da atividade foi: Bárbara e Gisela, Letícia e Natasha, e, Rafael e Nayara. Na terceira parte do encontro, os alunos discutiram sobre a produção das PMDs, teatro e música.
21/06/2016	Bárbara, Gisela, José, Letícia, Natasha, Nayara, Rafael e Ronaldo	Nesse encontro houve a produção das PMDs. Todos participaram da gravação de uma música e de um vídeo.

A partir do cenário considerado, apresento a seguir como se deu a produção de dados e a forma de análise.

4.3 Produção de dados

A produção de dados, tendo como contexto principal o curso de extensão universitária, se deu por meio de filmagens do curso, de registros escritos feitos pelos participantes no desenvolvimento das atividades, da construção de atividades por parte dos participantes e da realização de entrevistas semiestruturadas com eles. Esses procedimentos de produção são descritos detalhadamente a seguir.

4.3.1 Filmagens do curso

As filmagens do curso ocorreram de duas maneiras: por meio de uma câmera que buscou filmar a sala em que ocorreu o curso, e, por meio de um *software* gratuito de captura da tela que grava simultaneamente o áudio.

A câmera foi posicionada de diversas formas durante o curso com o intuito de dar uma visão ampla da dinâmica que ocorria no desenvolvimento das atividades. Com isso, objetivei observar a dinâmica das atividades, como os participantes interagiam, como se organizavam em relação ao uso do computador e os momentos de discussão coletiva em atividades que não envolviam o computador.

Para a gravação da tela do computador, foi utilizado o *software* aTube catcher²⁷. O intuito dessas filmagens foi captar a produção dos participantes no *software*, como utilizavam as ferramentas, quais dúvidas possuíam, como ocorreu o processo de apropriação dessa tecnologia por parte deles, enfim, como os conhecimentos eram mobilizados por meio da interação com o *software*. O áudio foi captado simultaneamente para identificar os diálogos que existiam entre os participantes e entre eles e os professores, com o objetivo de poder identificar os conhecimentos emergentes a partir dessa partilha de informações.

Powell, Francisco e Maher (2013) consideram a filmagem como um importante procedimento metodológico de produção de dados audiovisuais. Além disso, a filmagem apresenta benefícios para a pesquisa, pois com ela “[...] pode-se reproduzir a fluência do processo pesquisado, ver aspectos do que foi ensinado e apreendido, observar pontos que muitas vezes não são percebidos.” (BELEI et al., 2008, p. 193).

Garcez, Duarte e Eisenberg (2011, p. 251) apontam que “[...] o uso adequado da imagem em movimento, aliada ao áudio, permite capturar aspectos difíceis de serem captados com outros recursos, tais como expressões corporais, faciais e verbais utilizadas em situações cotidianas.”. Sendo o curso de extensão universitária um ambiente dinâmico e complexo, no qual diversas atividades ocorreram simultaneamente, apenas a observação não seria suficiente para obter os dados necessários.

Na análise das filmagens, tanto da câmera, como do *software* aTube catcher, foi utilizado o modelo de Powell, Francisco e Maher (2013), que consiste em diferentes etapas de análise, as quais são apresentadas no Quadro 3, a seguir.

²⁷ <http://atubecatcher.com.br/>

Quadro 4: Modelo de análise de vídeo

Etapa	Descrição
Observar	Na primeira etapa, o pesquisador deve assistir o conteúdo de vídeo para que se familiarize com ele.
Descrever	Nesta etapa, o pesquisador assiste as filmagens e descreve os dados da filmagem em determinados intervalos de tempo.
Identificar	Etapa em que o pesquisador identifica momentos significativos das filmagens, considerados eventos críticos, de acordo com seus interesses de pesquisa.
Transcrever	O pesquisador transcreve os momentos críticos que achar relevantes para sua pesquisa. Pode ocorrer a transcrição de falas ou descrição de acontecimentos.
Codificar	Etapa que “[...] objetiva identificar temas que ajudem o pesquisador a interpretar os dados.” ²⁸ (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2013, p. 423, tradução nossa).
Construir enredo	O pesquisador, nesta etapa, conecta os eventos críticos, as transcrições e as codificações através de enredos.
Narrar	Nesta etapa, o pesquisador conecta todos os enredos e compõe uma narrativa da sua interpretação dos dados.

Fonte: Powell, Francisco e Maher (2013)

O modelo de análise de vídeos de Powell, Francisco e Maher (2013), corrobora a ideia de Alves-Mazzoti e Gewandsznajder (1999) ao considerar temas emergente dos dados. Segundo Alves-Mazzoti e Gewandsznajder (1999, p. 170) a análise dos dados é “[...] um processo continuado em que se procura identificar dimensões, categorias, tendências, padrões, relações, desvendando-lhes o significado.”.

4.3.2 Registros escritos

Os registros escritos dos participantes configuraram outra fonte de produção de dados. Parte do desenvolvimento das atividades ocorria por meio de questões propostas aos participantes com o objetivo de fazê-los concluir ideias ou descrever procedimentos de construções utilizados. Os registros escritos foram coletados após cada encontro e conformam uma fonte importante de vestígios dos conhecimentos emergentes na exploração das atividades.

Os registros escritos são considerados documentos e servem como fonte de informação (ALVES-MAZZOTI; GEWANDSZNAJDER, 1999). Lüdke e André (2015, p. 44) apontam que os documentos “[...] não são apenas uma fonte de informação contextualizada, mas surgem num determinado contexto e fornecem informações sobre esse mesmo contexto.”. Sendo assim, os registros escritos do curso fornecem informações sobre o desenvolvimento do mesmo, a partir do ponto de vista de cada participante.

²⁸ [...] is aimed at identifying themes that help a researcher interpret data.

Na análise dos registros escritos, foi utilizada a estratégia de análise de texto proposta por Lakatos e Marconi (1992). Análise de um texto é o

[...] processo de conhecimento de determinada realidade e implica o exame sistemático dos elementos; portanto, é decompor um todo em suas partes, a fim de poder efetuar um estudo mais completo, encontrando o elemento-chave do autor, determinar as relações que prevalecem nas partes constitutivas, compreendendo a maneira pela qual estão organizadas, e estruturar as idéias de maneira hierárquica. (MARCONI; LAKATOS; 2003, p. 27-28).

A estratégia proposta por Lakatos e Marconi (1992) consiste nas seguintes etapas: leitura integral do texto; releitura do texto, buscando elementos importantes; localização de fatos importantes, buscando semelhanças e diferenças entre eles; agrupamento dos elementos por meio de semelhanças, buscando uma ordem hierárquica entre eles; e, por fim, interpretação dos fenômenos.

4.3.3 Desenvolvimento de atividades

Após a realização das atividades propostas no curso, foi sugerido aos participantes que desenvolvessem suas próprias atividades utilizando o *software* GeoGebra. O intuito dessa sugestão foi identificar a utilização independente do *software*, sem a proposição inicial de uma questão de investigação; além disso, esperava-se identificar conhecimentos específicos na criação de atividades, sendo eles, conhecimentos do conteúdo matemático, do ensino com o *software* e da própria utilização dele.

Foi possível obter cinco atividades após a realização do curso. Elas exploraram diferentes conteúdos matemáticos e tiveram diversas formas de apresentação. As atividades, seus conteúdos e por quem foram desenvolvidas são apresentados no Quadro 5, a seguir.

Quadro 5: Atividades desenvolvidas pelos participantes

Participante	Tema	Descrição
Bárbara	Geometria Hiperbólica	Bárbara apresentou o roteiro da atividade e sua construção no GeoGebra. A atividade explora as ferramentas de construção geométrica hiperbólica, que foram construídas pela própria participante, para investigar a soma de ângulos internos de um triângulo.
Gisela	Geometria Plana	A participante apresentou o roteiro de construção e atividade que objetiva a exploração das propriedades de triângulos isósceles.
Nayara	Geometria Plana	Apresentou uma construção no GeoGebra que explora, por meio do controle deslizante, o Teorema dos Ângulos Alternos-Internos.
José	Funções	João apresentou o roteiro da atividade e a construção no GeoGebra, na qual são explorados os coeficientes angulares e lineares de funções afins utilizando o controle deslizante.

Rafael	Geometria Espacial	Apresentou a construção no GeoGebra de uma simulação da órbita ao redor da Terra de um satélite.
--------	--------------------	--

As atividades desenvolvidas foram consideradas como documentos, assim como os registros escritos, pois documento é “[...] corresponde a uma informação organizada sistematicamente, comunicada de diferentes maneiras (oral, escrita, visual ou gestualmente) e registrada em material durável.” (GOLSALVES, 2005, p. 32). Sendo assim, embora apresentadas em roteiros ou construções do GeoGebra, as atividades configuram uma importante fonte de informações relacionadas aos seus elaboradores. Na análise das atividades também foi utilizada a estratégia de Lakatos e Marconi (1992) apresentada anteriormente.

4.3.4 Entrevistas semiestruturadas

Ao final do curso e após o desenvolvimento das atividades, os participantes foram convidados a participar de entrevistas. O objetivo desse procedimento foi conhecer melhor os participantes em relação a sua formação e experiência no ensino e em relação às impressões em relação ao curso. O intuito ainda foi identificar conhecimentos que poderiam ser mobilizados ao se falar sobre o curso e sobre as atividades desenvolvidas. As entrevistas ocorreram presencialmente com os participantes Bárbara, Gisela, José e Nayara; e, à distância com os participantes Rafael e Ronaldo.

Marconi e Lakatos (2011) definem a entrevista como um encontro entre duas pessoas em que, por meio da conversação, uma delas obtém informações que lhe interessam. Essa técnica de produção de dados é importante para obter informações sob a perspectiva dos participantes da pesquisa, como aponta Gil (2008, p. 115), “[...] as técnicas de interrogação possibilitam a obtenção de dados a partir do ponto de vista dos pesquisados.”. Lüdke e André (2015, p. 39) argumentam outros benefícios da entrevista, dentre eles, o fato de que a entrevista “[...] permite a captação imediata e corrente da informação desejada, praticamente com qualquer tipo de informante e sobre os mais variados tópicos.”.

Considerando-se todas as vantagens da utilização da entrevista na produção de dados na pesquisa qualitativa, optei por realizar entrevistas semiestruturadas. Esse tipo de entrevista “[...] parte de certos questionamentos básicos [...] e que, em seguida, oferecem amplo campo de interrogativas, [...] que vão surgindo à medida que se recebem as respostas do informante.” (TRIVIÑOS, 2012, p. 146). Patton (2002, p. 343, tradução nossa) aponta que a entrevista

semiestruturada ajuda a “[...] um número diferente de pessoas de forma mais sistemática e abrangente ao delimitar previamente as questões a serem exploradas.”²⁹.

No Quadro 6, a seguir, apresento as questões-base das entrevistas semiestruturadas realizadas, que foram elencadas em temas diferentes, com o intuito de melhor sistematizar as informações após a realização entrevista. Enfatizo que estas questões não foram seguidas completamente e houve a proposição de questões diferentes desencadeadas por estas apresentadas.

Quadro 6: Questões das entrevistas semiestruturadas

Temas	Questões
Formação	Qual o curso e ano? Onde estudou no ensino básico (escola pública ou particular)? Onde se formou? Em que ano?
Experiência com tecnologia digital	No Ensino Básico, teve a oportunidade de utilizar tecnologia digital nas aulas de matemática? E no ensino superior? Explique.
Geometria	Você acredita que sua formação universitária é suficiente para ensinar Geometria? E Geometria com tecnologia digital? Explique.
Curso	Quais conteúdos explorados no curso você já conhecia e quais foram inéditos? O que mais gostou/ chamou a atenção? O que menos gostou? O que mudaria?
Tecnologia digital e formação	O que foi possível entender sobre o uso de tecnologia digital no ensino, com o curso? Futuramente, no seu trabalho como professor, você utilizaria tecnologia digital em suas aulas? Por quê? Ao utilizar o GeoGebra, qual seria o maior desafio? O que você acredita que é necessário para se ensinar Geometria com o GeoGebra?
Reflexões sobre tecnologia digital no ensino	Existe diferença em ensinar e aprender Geometria com o GeoGebra e sem ele? Explique. Se sim, enumere as diferentes possibilidades.
Atividade	Por que você o optou por explorar tal conceito? Ao final da atividade, o que o aluno deveria saber, ou seja, qual conhecimento é o mais importante na atividade? Qual deveria ser a conduta do professor ao utilizar essa atividade? Qual seu papel? Como você organizaria a sala: os alunos trabalhariam individualmente, em grupos, ou coletivamente? Por quê? Sem o uso do GeoGebra, seria possível abordar os mesmos conceitos? Explique.

Os áudios das entrevistas foram gravados por meio do aplicativo de *smartphone* Voice Memos³⁰. As entrevistas realizadas à distância ocorreram com auxílio do Skype³¹, na entrevista com Rafael, e do Facebook³², na entrevista com Ronaldo.

Na análise das entrevistas foi utilizado o modelo de análise proposto por Szymanski, Almeida e Prandini (2008). O modelo consiste nas seguintes etapas: transcrição das entrevistas;

²⁹ [...] a number of different people more systematic and comprehensive by delimiting in advance the issues to be explored.

³⁰ https://appsto.re/us/gx3V_.i

³¹ <https://www.skype.com>

³² <https://www.facebook.com/>

reescrita das transcrições com as impressões do pesquisados; leitura e releitura na busca de temas de análise que emergirão dos dados; e, por fim, agrupamento e significação dos temas de acordo com os objetivos da pesquisa.

Após as análises parciais das diferentes fontes de dados, ocorreu a triangulação, caracterizada como uma “[...] combinação de metodologias diversas no estudo de um fenômeno [...]” (MARCONI; LAKATOS, 2004, p. 283), cujo objetivo é “[...] abranger a máxima amplitude na descrição explicação e compreensão do fato estudado [...]” (MARCONI; LAKATOS, 2004, p. 283). Araújo e Borba (2013) apontam que a triangulação confere maior credibilidade à pesquisa qualitativa. Sendo assim, considerando os dados produzidos nas filmagens, registros escritos, atividades, entrevistas e, em sua triangulação, na seção seguinte, apresento a análise dos dados.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Nesta seção, apresento os dados produzidos por meio de temas emergentes. Ainda discuto sua emergência com base nas ideias do Construcionismo, dos Conhecimentos Docentes e da Geometria Dinâmica. Ao final, sintetizo as discussões em busca de uma resposta à questão norteadora deste estudo.

5.1 Introdução

Em busca de resposta à pergunta diretriz: “*Que conhecimentos docentes emergem quando licenciandos em Matemática e professores exploram atividades de Geometria utilizando o GeoGebra?*”, houve o desenvolvimento de um curso de extensão universitária, no qual, professores e futuros professores exploraram atividades sobre Geometria Plana e Geometria Espacial, utilizando o GeoGebra. A produção de dados, nesse cenário, ocorreu por meio de filmagens do curso, coleta de atividades escritas, desenvolvimento de atividades pelos participantes e realização de entrevistas semiestruturadas com os mesmos. Para cada procedimento de produção de dados foi utilizado um método de análise diferente, os quais foram descritos na seção anterior; ao final houve a triangulação dos dados. Nesta seção, apresento e discuto os dados produzidos, descrevendo os temas de análise que emergiram.

Tendo como cenário o curso de extensão universitária, com a análise dos dados, pude perceber a existência de dois momentos distintos. Em um momento houve grande manifestação, principalmente, de Conhecimentos de Conteúdo, Tecnológicos e Tecnológicos de Conteúdo. Esse momento foi caracterizado pela exploração das atividades utilizando o GeoGebra, no qual, o Ciclo de Ações estava muito presente devido a interação dos participantes com o computador.

Num segundo momento houve a emergência, principalmente, de Conhecimentos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo e conhecimentos relacionados ao contexto educacional, que não são contemplados pelo modelo TPACK. Esse momento foi caracterizado pela discussão realizada no curso, pelas entrevistas, por meio das quais os participantes manifestaram as impressões causadas pelo curso e reflexões sobre a integração das tecnologias digitais no ensino, e desenvolvimento de atividades pelos participantes.

A seguir, apresento os temas de análise que emergiram dos dados dos diferentes momentos identificados.

5.2 Exploração das Atividades do Curso de Extensão Universitária

Das análises da exploração das atividades do curso emergiram cinco temas: Descrição Verbal, Limitação do Processo de Depuração, Ciclos de Ações, Reflexão e GeoGebra para Experimentar Ideias. Nesses temas estão articulados os construtos teóricos Conhecimentos Docentes, especificamente em relação aos conhecimentos de Conteúdo, Pedagógicos e Tecnológicos e suas inter-relações, e o Construcionismo abordado, principalmente, por meio do Ciclo de Ações e da Espiral da Aprendizagem.

No tema **Descrição Verbal**, encontram-se os momentos em que os participantes se utilizaram da descrição verbal da solução das atividades, antes da descrição no GeoGebra. Pude perceber que, no início do curso, essa descrição estava carregada de Conhecimentos de Conteúdo e que, com a apropriação da tecnologia digital explorada, os participantes passaram a descrever verbalmente a solução das atividades por meio de Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo.

Nos momentos em que os participantes desenvolviam a solução das atividades, mas não conseguiam concretizar a solução por falta de conhecimentos sobre o GeoGebra ou por falta de mediação dos professores³³ para sanar tais dificuldades técnicas, identifiquei como o tema **Limitação do Processo de Depuração**.

Os temas **Ciclos de Ações** e **Reflexão** se manifestaram como reação à forma em que as atividades foram apresentadas aos participantes e por eles desenvolvidas. As atividades, de forma geral, ocorreram em duas formas: aquelas que propunham problemas de construção, as quais requeriam certo conhecimento sobre o GeoGebra, e aquelas que ensinavam a construção, ou seja, propunham auxiliar os participantes que possuíam pouca familiaridade com o *software*, e incitavam o processo de reflexão do Ciclo de Ações.

Nas atividades em que os participantes deveriam resolver problemas de construção, verifiquei a ocorrência de diversos Ciclos de Ações e da Espiral da Aprendizagem, tais momentos identifiquei como Ciclos de Ações. Nas atividades que estimulavam a reflexão, embora tais atividades buscassem momentos de descrição, execução e depuração, a ação de refletir sobre a construção se sobressaiu, portanto, identifiquei tais momentos como Reflexão.

O último tema envolvido na exploração das atividades foi chamado **GeoGebra para Experimentar Ideias**. Em tal tema, reuni os momentos em que os participantes usaram as

³³ Havia três professores no curso de extensão universitária (eu, a autora desta dissertação, e outros dois pesquisadores), os quais, participaram do curso e estavam presentes nos encontros. Eles, no momento da pesquisa, eram alunos de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e o curso foi cenário de investigação de suas pesquisas.

ferramentas do GeoGebra para comprovar Conhecimentos de Conteúdo que demonstravam em relação às atividades. É importante destacar que a ação de experimentar as ideias partia dos próprios participantes, sem que elas fossem provocadas por questões nos enunciados das atividades.

Nesse grupo de dados, houve a manifestação de Conhecimentos de Conteúdo, Conhecimentos Tecnológicos e Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo. Os Conhecimentos de Conteúdo se configuram nos conhecimentos referentes à matéria a ser ensinada ou aprendida. Segundo Harris, Mishra e Koehler (2009, p. 398-399, tradução nossa) nessa forma de conhecimento se incluem “[...] conhecimento de conceitos, teorias, ideias, estruturas organizacionais, conhecimento de evidências e provas, bem como, práticas e abordagens estabelecidas para o desenvolvimento desse conhecimento.”³⁴.

No contexto do curso de extensão universitária, os Conhecimentos de Conteúdo manifestados se referiam principalmente à Geometria, mas em alguns casos houve a manifestação de conhecimentos referentes ao Cálculo e à Álgebra. Portanto, foi observada no curso a característica da Geometria de interligação com outras áreas da Matemática, como aponta Lorenzato (1995, p. 6-7) “A Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras.”.

Os Conhecimentos Tecnológicos são aqueles envolvidos no uso de tecnologias digitais, como computadores, Internet, vídeos e até mesmo outras formas de tecnologias como projetores, lousa e livros (KOEHLER; MISHRA, 2005). Quando relacionada ao uso das tecnologias digitais, essa forma de conhecimento se associa ao termo literacia digital, entendida como a capacidade de utilizar tecnologias digitais, como o computador e a Internet, e se apropriar das informações provenientes desses meios de forma efetiva e construtiva (CORREIA, 2009; COSTA, 2011).

Os Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo emergiram de maneira expressiva. Essa forma relaciona o Conteúdo e a Tecnologia e engloba os entendimentos sobre como as tecnologias transformam o conteúdo. Segundo Koehler e Mishra (2009, p. 65, tradução nossa)

Compreender o impacto da tecnologia nas práticas e no conhecimento de uma determinada disciplina é fundamental para o desenvolvimento de ferramentas tecnológicas adequadas para fins educacionais. A escolha das tecnologias oferece e restringe os tipos de ideias de conteúdo que podem ser ensinadas. Da mesma forma, certas decisões de conteúdo podem limitar os tipos de tecnologias que podem ser usadas. A tecnologia pode restringir os tipos de

³⁴ [...] knowledge of concepts, theories, ideas, organizational frameworks, knowledge of evidence and proof, as well as established practices and approaches toward developing such knowledge.

representações possíveis, mas também pode permitir a construção de representações mais novas e mais variadas. Além disso, as ferramentas tecnológicas podem proporcionar um maior grau de flexibilidade na navegação entre essas representações. [...] O Conhecimento Tecnológico de Conteúdo, portanto, é uma compreensão da maneira pela qual a tecnologia e o conteúdo influenciam e se restringem.³⁵

Os Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo se manifestaram de forma significativa devido ao *software* utilizado no curso de extensão universitária. O GeoGebra propiciou a emergência dessa forma de conhecimento por ser uma tecnologia digital desenvolvida para o ensino e a aprendizagem de Matemática, ou seja, a Matemática é uma característica intrínseca do programa. Suas ferramentas foram construídas de forma associada aos conhecimentos matemáticos, sendo assim, seu manuseio e utilização estão impregnados de ideias matemáticas, fazendo com que, na sua manipulação, se manifestem conhecimentos integrados sobre tecnologia digital e sobre Matemática. Especificamente em relação ao curso de extensão universitária, cenário deste estudo, os Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo estão relacionados à Geometria Dinâmica possibilitada pelo GeoGebra.

A seguir, apresento alguns momentos que ilustram os temas definidos e a forma como os conhecimentos se manifestaram em cada tema.

5.2.1 Descrição Verbal

Na realização das atividades, pude verificar a ocorrência de um processo de descrição verbal da solução do problema, antes mesmo de ser descrita em termos que o *software* pudesse executar. Identifico essa descrição verbal como causa de uma exploração em grupos, ou seja, os participantes tinham que conversar entre si para que, em seguida, pudessem realizar a construção. Outra característica importante foi a manifestação de Conhecimentos de Conteúdo nessa descrição verbal, pois faltavam Conhecimentos Tecnológicos para que os participantes descrevessem a solução, mesmo que verbalmente, utilizando termos específicos do GeoGebra. Esses Conhecimentos Tecnológicos foram sendo construídos, na medida em que os participantes interagem com o *software*.

³⁵ Understanding the impact of technology on the practices and knowledge of a given discipline is critical to developing appropriate technological tools for educational purposes. The choice of technologies affords and constrains the types of content ideas that can be taught. Likewise, certain content decisions can limit the types of Technologies that can be used. Technology can constrain the types of possible representations, but also can afford the construction of newer and more varied representations. Furthermore, technological tools can provide a greater degree of flexibility in navigating across these representations. [...] TCK, then, is an understanding of the manner in which technology and content influence and constrain one another.

Ao solucionar o problema de construção de triângulo equilátero utilizando ferramentas diferentes da “Polígono Regular”, Ronaldo, que realizou a atividade com José e Rafael, descreveu verbalmente soluções carregadas de Conhecimentos de Conteúdo. Ele disse: “*Será que posso construir vários segmentos e unir eles? [...]. Eu consigo definir o ângulo que eu quero que abra?*”. Os Conhecimentos de Conteúdo envolvidos se relacionam à congruência de lados e ângulos em um triângulo equilátero.

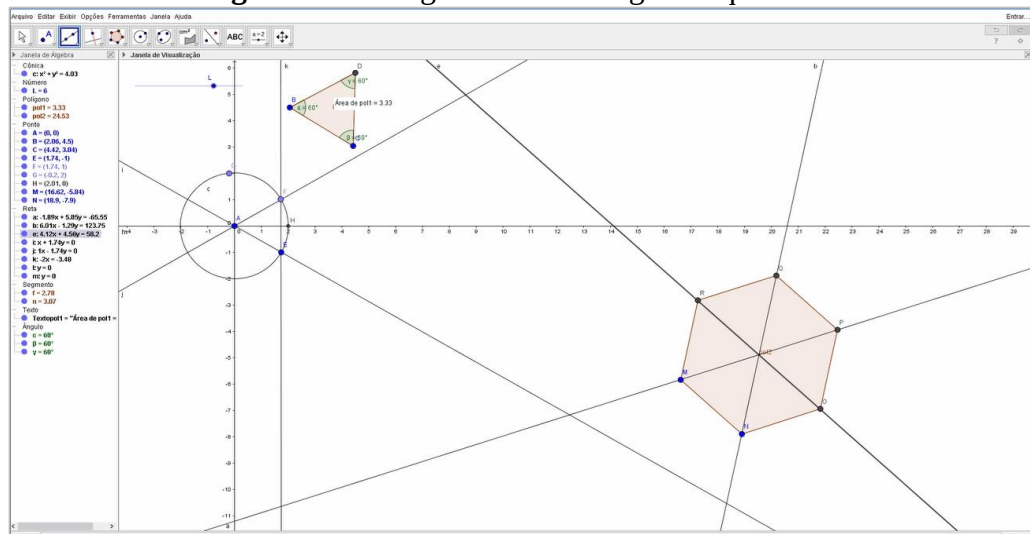
Letícia e Natasha tiveram ideias parecidas na solução do mesmo problema. Natasha descreve a solução utilizando ângulos: “*Também dá pra construir com ângulo [...]. Você constrói duas retas e move até ficar no ângulo.*”. Percebo Conhecimentos de Conteúdo, relativos ao fato da importância do ângulo na construção de um triângulo equilátero, mas também em relação ao citar ângulo e relacioná-lo à construção de duas retas concorrentes. Embora as participantes tenham abandonado a ideia por não possuírem Conhecimentos Tecnológicos para a construção, percebo que Natasha demonstrou um Conhecimento Tecnológico, relativo ao GeoGebra, caracterizado pela ideia de movimentar os objetos geométricos, característica esta que confere dinamicidade ao *software*.

Nesses exemplos que apresentei, a falta de Conhecimento Tecnológico impediu que os participantes realizem as construções. Na descrição verbal é possível verificar, principalmente, Conhecimentos de Conteúdo. Mas com a exploração do GeoGebra e apropriação dessa tecnologia digital, as descrições verbais passaram a possuir, principalmente, Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo.

Rafael, Ronaldo e José utilizaram o hexágono para solucionar o problema de construção do triângulo equilátero, José, assim descreveu a solução: “*Esse daqui é o hexágono. Dá para você construir seis triângulos, [...] seis triângulos equiláteros.*”. Nessa descrição observo um Conhecimento Tecnológico de Conteúdo: usar a ferramenta “Polígono Regular” para construir um hexágono e seis triângulos equiláteros. Na descrição-execução³⁶, os participantes utilizam a ferramenta “Reta” para construir retas que ligam os vértices do hexágono, dois a dois (Figura 18). E na reflexão observaram que construíram os triângulos, como previam.

³⁶ Como explicado na seção “Construcionismo e Conhecimentos Docentes”, a descrição ocorre de maneira distinta em um ambiente que não é o de programação. Nesse caso, é utilizado o termo “descrição-execução” pois não ocorre distinção dessas duas ações: ao mesmo tempo ocorre a descrição da solução do problema e a execução dessa solução no *software*.

Figura 18: Hexágono e seis triângulos equiláteros



Fonte: Dados da pesquisa

A descrição verbal por meio de Conhecimento Tecnológico de Conteúdo, ocorreu com Bárbara, que já possuía experiência com o GeoGebra antes do curso. Na solução do problema de construção do triângulo equilátero, Bárbara assim o descreve: “*Aqui tem Segmento com Comprimento Fixo.*”. O Conhecimento Tecnológico de Conteúdo se relaciona ao fato de entender que o triângulo equilátero possui lados congruentes e que a ferramenta é capaz de construir segmentos congruentes.

Esse tema evidencia a importância da oralidade na realização do Ciclo de Ações e da Espiral da Aprendizagem. Essa característica presente um ambiente de aprendizagem construcionista foi também verificada por Maltempi e Rosa (2004) e Rosa (2004), que descrevem a interação aprendiz-computador por meio do Turbilhão de Aprendizagem. Rosa (2004) aponta que a descrição verbal contribui para aprendizagem e é evidenciada em contextos computacionais que exploram atividades diferentes da programação. Tal elemento se fez presente nesse contexto investigado, pois o Construcionismo o guiou teoricamente, mas as atividades estavam relacionadas à investigação por meio do GeoGebra.

Esse tema demonstra ainda a manifestação de dois importantes elementos que se complementam: a linguagem e a interação social. Martins (1997), se apoiando nos trabalhos de Vygotsky (1987a, 1989), reflete sobre a importância das interações sociais na sala de aula, tratando tanto das interações entre alunos, como das interações entre alunos e professores. Segundo Martins (1997, p. 115), por meio da linguagem é possibilitada a partilha de pensamentos e a percepção de características do sujeito:

Quando a linguagem se dirige aos outros, o pensamento torna-se passível de partilha. Essa acessibilidade do pensamento manifesta-se, pois, na e pela linguagem, expressando, ao mesmo tempo, muitos outros aspectos da

personalidade do sujeito. [...] A fala, uma das formas de linguagem através da qual os significados sociais são compreendidos e acordados, encontra-se permeada por expressões afetivas que se tornam igualmente alvo das interações: preferências, antagonismos, concordâncias, simpatias e antipatias. A ação e a fala unem-se na coordenação de várias habilidades, entre elas o pensamento discursivo.

A forma oral de comunicação observada no curso pode ser interpretada como a necessidade de organização do pensamento daquele que se comunicava verbalmente, em busca da solução do problema. Vygotsky (1987b, p. 250, tradução nossa) aponta que a forma oral de comunicação e o pensamento se relacionam por meio de

[...] um processo de desenvolvimento que muda à medida que passa por uma série de etapas. Claro, este não é um desenvolvimento relacionado à idade, mas um desenvolvimento funcional. O movimento do pensamento de pensamento a palavra é um processo de desenvolvimento. O pensamento não é expresso, mas completado na palavra. Podemos, portanto, falar do estabelecimento (ou seja, da unidade do ser e do não-ser) do pensamento na palavra. Qualquer pensamento procura unificar, estabelecer uma relação entre uma coisa e outra. Qualquer pensamento tem movimento. Desdobra-se. Ele atende alguma função ou resolve alguma tarefa. Este fluxo de pensamento é realizado como um movimento interno através de vários planos, como uma transição do pensamento para a palavra e do pensamento para a palavra. Assim, a primeira tarefa em uma análise da relação do pensamento e da palavra como movimento de pensamento a palavra é analisar as fases que compõem esse movimento, diferenciar os planos através dos quais o pensamento passa quando se concretiza na palavra.³⁷

A interação social proporcionada pela organização dos participantes durante o curso de extensão universitária, além de favorecer a comunicação verbal, também buscou contribuir para a construção do conhecimento, uma vez que, “[...] é na interação entre as pessoas que em primeiro lugar se constrói o conhecimento que depois será intrapessoal, ou seja, será partilhado pelo grupo junto ao qual tal conhecimento foi conquistado ou construído.” (MARTINS, 1997, p. 117).

³⁷ [...] a developing process which changes as it passes through a series of stages. Of course, this is not an age related development but a functional development. The movement of thinking from thought to word is a developmental process. Thought is not expressed but completed in the word. We can, therefore, speak of the establishment (i.e., the unity of being and nonbeing) of thought in the word. Any thought strives to unify, to establish a relationship between one thing and another. Any thought has movement. It unfolds. It fulfills some function or resolves some task. This flow of thought is realized as an internal movement through several planes, as a transition from thought to word and from word to thought. Thus, the first task in an analysis of the relationship of thought and word as a movement from thought to word is to analyze the phases that compose this movement, to differentiate the planes through which thought passes as it becomes embodied in the word.

5.2.2 Limitação do Processo de Depuração

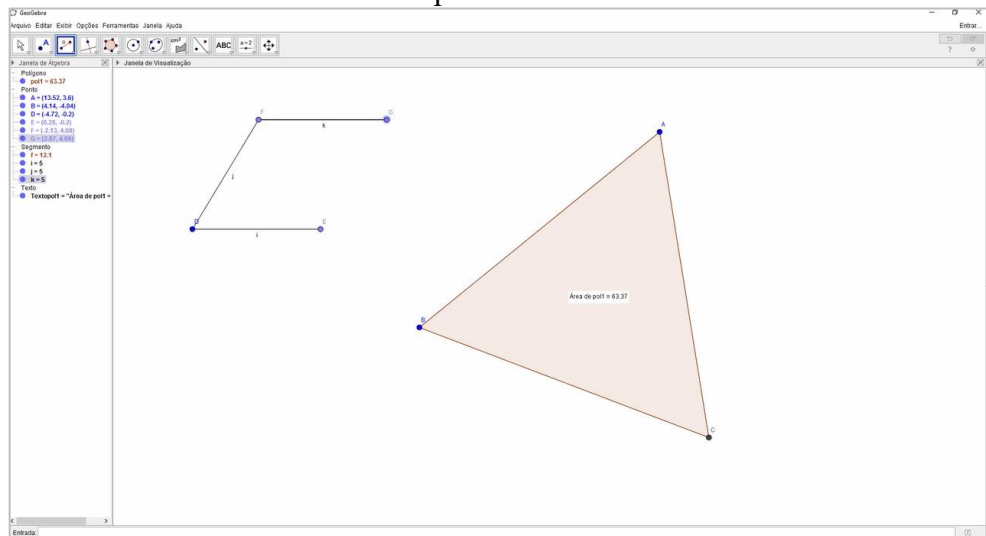
Nas atividades de construção, verifiquei casos em que ocorreu o Ciclo de Ações, mas que no processo de depuração os participantes abandonaram suas ideias. Essa ausência de uma depuração completa foi interpretada como causada pelo pouco Conhecimento Tecnológico dos participantes e também pela falta de mediação para compensá-lo. Outra característica importante foi que tais situações ocorreram no primeiro dia do curso de extensão universitária, quando os participantes ainda não tinham tanta familiaridade com o GeoGebra.

A ausência de Conhecimentos Tecnológicos nesse momento do curso não foi interpretada negativamente, nem se espera que seja necessário total domínio sobre as tecnologias digitais para que elas sejam integradas no ensino e na aprendizagem da Matemática. As rápidas mudanças das tecnologias digitais dificultam a existência desse “domínio”. A apresentação desse tema procura enfatizar o processo de apropriação do GeoGebra por parte dos participantes do curso, o qual, no início descreve essa ausência de conhecimentos e que, no processo de realização de atividades e discussão sobre a influência das tecnologias digitais no ensino, esses conhecimentos vão se constituindo.

Na tentativa de construir triângulos equiláteros utilizando ferramentas diferentes da ferramenta “Polígono Regular”, as participantes Letícia e Natasha utilizaram a ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” para construírem três segmentos congruentes. Observo que nesse processo a descrição e a execução do problema, caracterizada pela construção dos segmentos, ocorreram baseados em um Conhecimento de Conteúdo: triângulos equiláteros possuem lados congruentes, e em um Conhecimento Tecnológico de Conteúdo: a ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo” constrói segmentos congruentes, conhecimento esse que nasceu da exploração no *software*.

Na reflexão, as participantes perceberam que a construção não se caracterizava por um triângulo equilátero, ou seja, havia a existência de um erro. No processo de depuração, tentaram “encaixar” os pontos para que os segmentos se tornassem um triângulo equilátero (Figura 19). Mas, ainda assim, não conseguiram concretizar o objetivo inicial e partiram para outras ideias de construção. Observo, nesse momento, a necessidade de mediação, pois não sabendo como “consertar” a construção, o ciclo se encerrou.

Figura 19: Tentativa de construção do triângulo equilátero com a ferramenta “Segmento com Comprimento Fixo”



Fonte: Dados da pesquisa

O encerramento do ciclo por falta de Conhecimento Tecnológico foi também verificado na resolução do mesmo problema. Rafael, Ronaldo e José, em um processo de descrição-execução, construíram uma reta com um ponto do 0 ao 5, referente ao eixo X, ação, essa, calcada em Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo, pois foram manifestados os conhecimentos relativos à Geometria Analítica, à construção geométrica no plano cartesiano e à potencialidade do GeoGebra em possibilitar a exploração da Geometria e da Geometria Analítica em uma única plataforma. Eles observaram as ferramentas e ao identificar a ferramenta de “Reta Perpendicular”, Ronaldo teve uma ideia: “A base do meu triângulo é 5, se a gente determinar a altura dele, a gente consegue colocar o ponto exatamente na altura que a gente quer e aí fazer a ligação dos outros.”. Nessa descrição verbal de parte da solução, Ronaldo apresentou Conhecimentos de Conteúdo. Então, eles discutiram sobre a fórmula da altura do triângulo equilátero e chegaram ao consenso de que a altura é $\frac{l\sqrt{3}}{4}$. Ao refletirem sobre o resultado, observaram que encontrariam um número irracional, dificultando determinar o ponto desejado, Ronaldo disse: “Ah, mas vai dar um número irracional [...] vai dar raiz de três.”. E decidiram abandonar tal ideia. A falta de Conhecimentos Tecnológicos impediu o processo de depuração. Os participantes poderiam prosseguir com tal ideia se soubessem da possibilidade da utilização de fórmulas no GeoGebra; a falta de mediação pode ser identificada como causa da interrupção do Ciclo de Ações.

Identifiquei a falta de depuração, como insuficiência da mediação no ambiente de aprendizagem construcionista, ou seja, não houve intervenção dos professores para que os processos de depuração ocorressem. Como aponta Maltempi, (2000, p. 18), o aprendiz sozinho

não consegue construir o conhecimento necessário,

Na verdade, as atividades de descrição, reflexão e depuração não ocorrem simplesmente colocando o aprendiz em interação com o computador. Mesmo em um ambiente construcionista, no qual o aprendiz esteja desenvolvendo algo de significado pessoal, essas atividades muitas vezes são árduas e demandam um grande esforço e concentração do mesmo. O aprendiz sozinho dificilmente teria sucesso em transformar o ciclo em uma atividade estimulante e rica em termos de construção de conhecimento.

Portanto, o professor tem um papel primordial no ambiente de aprendizagem construcionista. É função dele conhecer as ações do Ciclo de Ações e agir nos momentos certos de modo a fazer com que o ciclo não se encerre para que haja a construção do conhecimento, como aponta Almeida (2002, p. 3) “[...] a intervenção de um agente de aprendizagem é essencial para provocar a reflexão e a depuração do processo em desenvolvimento e propiciar a aprendizagem.”. Nesse caso, os professores do curso poderiam também intervir verbalmente sugerindo ferramentas para as construções ou discutindo outras possibilidades de construção de modo a incentivar que o Ciclo de Ações não fosse interrompido pelas dificuldades técnicas.

5.2.3 Ciclos de Ações

Com a aquisição de Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo, no desenvolvimento do curso, os Ciclos de Ações ocorriam completamente, pois as barreiras encontradas no início do curso em relação ao *software* ficavam cada vez menores e os participantes tomavam controle de suas construções e, muitas vezes, no processo de depuração, consertavam suas construções a partir do próprio raciocínio.

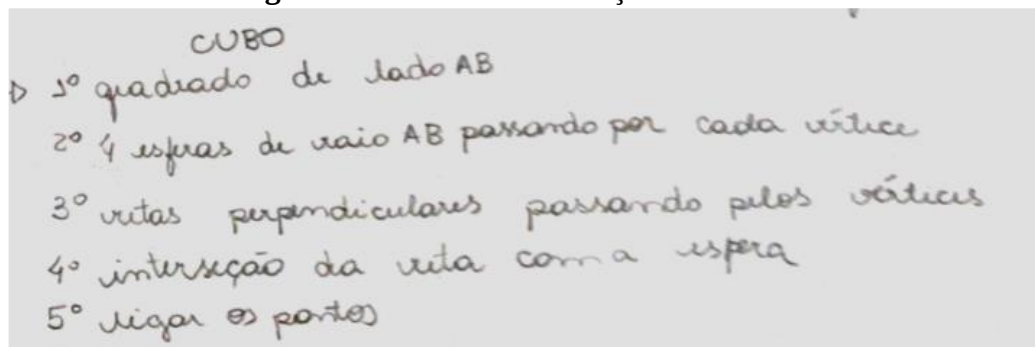
Na interação aprendiz-computador, o computador, além de ser um mecanismo de representação das ideias do aprendiz, fornece meios para que possa ocorrer a construção de conhecimentos (VALENTE, 2005b). Nesse contexto, a aprendizagem decorre das ações descrição-execução-reflexão-depuração, “[...] as quais auxiliam a compreensão de como o aprendiz adquire novos conhecimentos: como o aprendiz, durante o processo de resolução de uma tarefa, passa de um nível inicial de conhecimento para outros mais elaborados.” (VALENTE, 2005b, p. 7).

Os Ciclos de Ações foram identificados com maior destaque nas atividades com caráter mais “aberto”, as quais propunham problemas de construção e incentivavam a utilização independente das ferramentas do GeoGebra. Uma atividade que possuiu essa característica foi a atividade de construção de um cubo que não utilizasse a ferramenta “Cubo”. Na realização dessa atividade pelos participantes, identifiquei cada passo da construção como a realização de

um ciclo completo do Ciclo de Ações e, em cada ciclo, os participantes demonstraram Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo, caracterizados pela aplicação das ferramentas do GeoGebra na realização da atividade de construção. Mas ainda é possível identificar um ciclo maior, que ocorreu desde o raciocínio inicial para a realização da atividade, no qual a descrição-execução ocorre nos passos da resolução, e a reflexão ocorre num patamar maior ao verificarem a construção final do cubo.

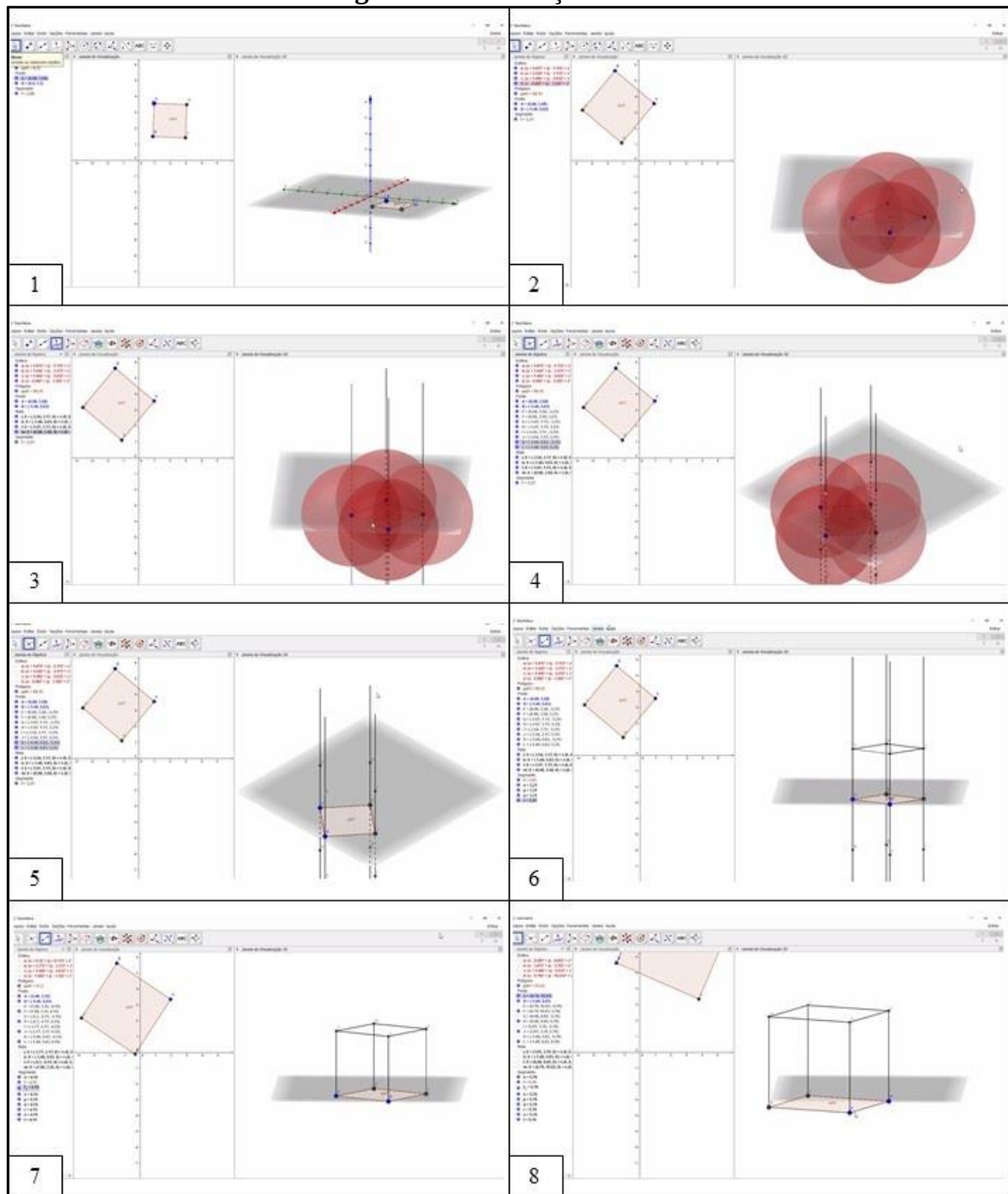
Na Figura 20, apresento os passos de construção descritos pelas participantes Bárbara e Gisela na resposta escrita da atividade de construção de um Cubo. Cada passo representa um Ciclo de Ação, pois cada etapa da construção envolveu as ações de descrever, executar, refletir e depurar. E, ao final das construções, as participantes movimentaram os vértices do cubo e perceberam que suas propriedades se mantinham, em um processo de reflexão que, portanto, legitimou sua construção.

Figura 20: Passos da construção de um cubo



Fonte: Dados da pesquisa

Bárbara assim justificou a construção do cubo, um poliedro regular: *“Todas as circunferências possuem o mesmo raio. Essa distância até aqui [entre o vértice do quadrado e a interseção da reta com a esfera] é a mesma de todas. Então fica tudo igual.”*. Na Figura 21 se encontram as diferentes etapas da construção do cubo, realizadas por Bárbara e Gisela.

Figura 21: Construção do cubo

Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes José e Nayara também realizaram diversos ciclos na construção de um prisma pentagonal oblíquo e, nesse processo, demonstraram Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo e Conhecimentos Tecnológicos. Além disso, realizaram ações de depuração no processo.

Os participantes iniciaram a resolução do problema de construção com a construção de um pentágono com a ferramenta “Polígono Regular”. Em seguida, construíram um segmento no plano, com a intenção de construí-lo fora do plano como aresta do prisma. Com a ferramenta

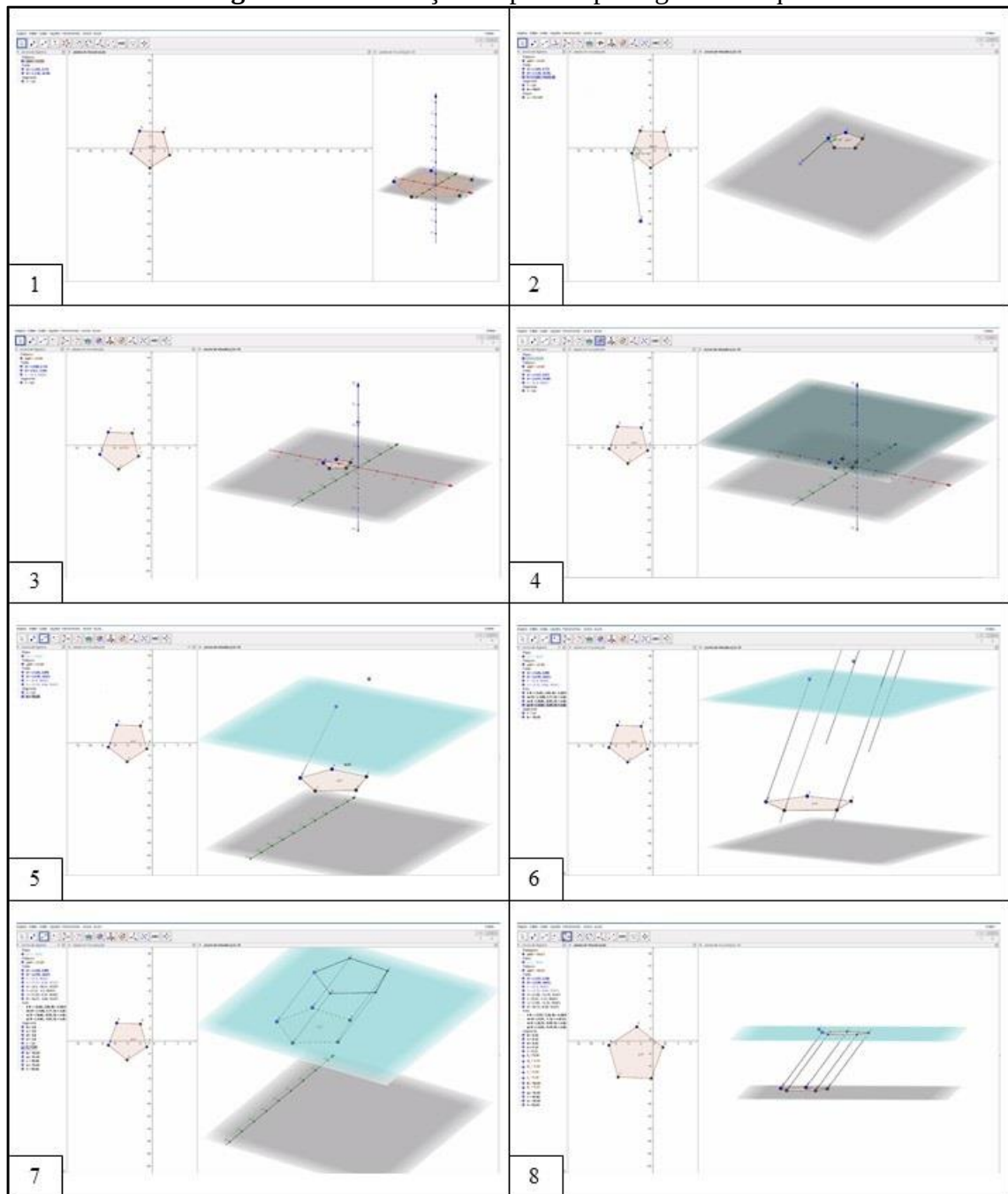
“Ângulo”, encontraram o ângulo entre o segmento e uma das arestas do pentágono. Movimentaram o ponto oposto do segmento e observaram que possuía zero no valor de sua coordenada em Z. Nayara teve a ideia de construir um ângulo de amplitude fixa com mesma angulação medida anteriormente, para garantir que seriam paralelas, mas José observou que o segmento criado estava no mesmo plano do pentágono: *“Tá no mesmo plano. Esse e esse tá no mesmo plano.”*. Num processo de depuração, desfizeram a construção do ângulo e ambos concordaram que o segmento construído se encontrava no mesmo plano do pentágono. Eles, então, tiveram a ideia de construir um outro plano. Construíram, então, um ponto no eixo Z e um plano paralelo ao plano do pentágono, passando pelo ponto construído anteriormente. Na discussão sobre a construção, observo a descrição verbal da realização da atividade,

Nayara: *“Vamos usar um segmento.”*

José: *“Paralelo.”*

Nayara: *“Não, o primeiro só segmento, depois os outros paralelos a ele.”*

Assim, com a ferramenta “Segmento”, construíram um segmento a partir de um vértice do pentágono, no qual o outro vértice se encontrava no plano paralelo construído. Em seguida, selecionaram a ferramenta “Reta Paralela” e leram as instruções da ferramenta, demonstrando um Conhecimento Tecnológico importante na utilização do GeoGebra, referente às instruções para utilização das ferramentas. Logo após, construíram quatro retas paralelas ao segmento, passando pelos vértices do pentágono. Com a ferramenta “Segmento”, construíram os segmentos coincidentes com as retas, começando na interseção das retas com o plano e terminando nos vértices do pentágono. Com a ferramenta “Segmento”, conectaram os pontos no plano construído, delimitando um pentágono. Finalmente, com a ferramenta “Polígono”, construíram o pentágono, delimitado pelos segmentos e movimentaram um dos vértices do prisma, observando que ele não perdia suas características, num processo de reflexão. Na Figura 22, apresento os passos da construção.

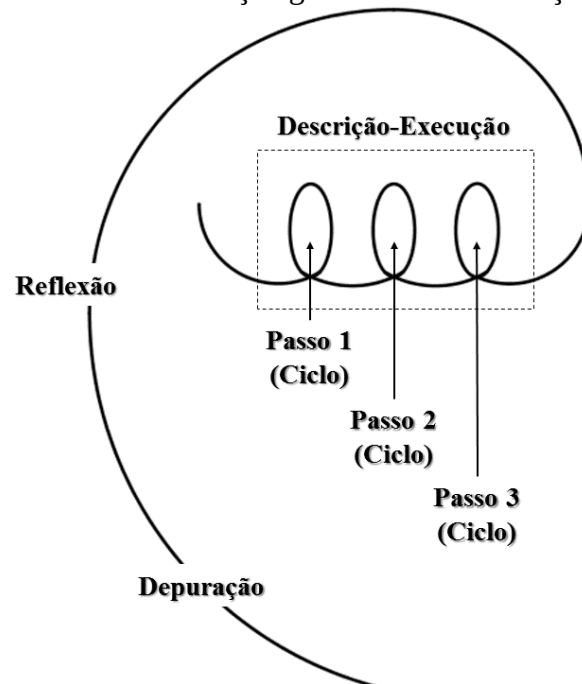
Figura 22: Construção do prisma pentagonal oblíquo

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse tema está representada a ideia de que o Ciclo de Ações e a Espiral da Aprendizagem se comportam diferentemente em um contexto em que a interação aprendiz-computador não ocorre por meio da atividade de programação. A construção no GeoGebra permite que o Ciclo de Ações ocorra nas pequenas etapas de construção e, na construção como um todo. A Figura 23 representa um esquema de como esse processo ocorre: na descrição-execução da atividade estão inseridos pequenos ciclos que envolvem ações para a construção dos elementos constituintes do objeto global, ou seja, a construção de cada elemento envolve

um processo próprio de descrição-execução-reflexão-depuração; após a construção desses elementos, ocorrem os processos de reflexão e depuração da construção como um todo³⁸.

Figura 23: Um Ciclo de Ação global e Ciclos de Ações internos a ele



Fonte: Elaborado pela autora

Diferentes comportamentos do Ciclo de Ações e da Espiral da Aprendizagem foram também verificados por Rosa (2004), fenômeno que nomeou Turbilhão de Aprendizagem. Esse acontecimento foi verificado em um contexto diferente do da programação, como no caso apresentado por este estudo, contudo o autor descreve um ambiente de jogo RPG³⁹ digital. Segundo Rosa (2004, p. 134), o Turbilhão de Aprendizagem

[...] abrange e admite todos os passos do ciclo e, em consequência, da espiral (descrição – execução – reflexão – depuração), porém permite que essas sejam vistas tanto de forma repetitiva como seguindo padrões aleatórios, à medida que as ações vão ocorrendo na construção de conhecimento [...]. O Turbilhão de Aprendizagem difere-se do Ciclo e, conseqüentemente, da Espiral de Aprendizagem, pois não toma como modelo a programação, uma vez que, essa tende a seguir uma ordenação seqüencial linear nas ações que apresenta, o que não ocorre no Turbilhão.

Assim como Rosa (2004), verifiquei um comportamento diferente para o Ciclo de Ações

³⁸ Na atividade de programação é possível ocorrer a construção de “programas” dentro de um “programa”, a técnica é conhecida por “chamar uma função”, no caso da linguagem C++, e que permite separar o programa em blocos (MALIK, 2012). Entretanto, destaco esse tema por verificar a existência de Ciclos de Ações internos a um Ciclo de Ação mais abrangente em um nível mais natural ao utilizar o GeoGebra; essa característica ocorre naturalmente no caso da construção, ao passo que na programação, criar “programas” dentro de um “programa” requer um conhecimento mais aprofundado da atividade de programação.

³⁹ Role Playing Game

e Espiral da Aprendizagem. Mas, diferentemente dele, constatei certa linearidade da realização das ações do ciclo. O Ciclo de Ações ocorre por meio de “ciclos internos”.

A realização de Ciclos de Ações e da Espiral da Aprendizagem representa a atividade cognitiva do aprendiz ao manipular o GeoGebra. Ações essas, que buscam favorecer a construção de conhecimentos, como aponta Maltempi (2004, p. 270)

A razão de o Construcionismo propor que os aprendizes construam produtos que possam ser mostrados a outras pessoas e sobre os quais se possa conversar [...], baseia-se na concepção de que dessa forma o aprendiz pode explicitar suas ideias e gerar um registro de seus pensamentos, os quais podem ser utilizados para se atingir níveis cognitivos mais elevados.

No contexto da utilização do GeoGebra, o produto construído se caracteriza pelas construções de objetos geométricos na tela do computador. Nesse processo estão envolvidos raciocínios geométricos e de utilização das ferramentas, que geram reflexões na interação aprendiz-computador e possibilitam a construção de conhecimentos em relação ao GeoGebra e à Geometria.

5.2.4 Reflexão

Parte das atividades valorizavam muito mais os processos de reflexão em relação às construções. Os processos de descrição, execução e depuração ocorriam em tais atividades, mas a reflexão era o processo mais importante das atividades, uma vez que as construções eram realizadas com o auxílio de informações expostas no enunciado das atividades. Segundo Valente (1999b, p. 74), a “[...] reflexão pode produzir diversos níveis de abstração, os quais [...] provocarão alterações na estrutura mental do aluno.”.

Ao observar a relação entre os pontos notáveis Baricentro, Ortocentro e Circuncentro, as participantes Bárbara e Gisela, no processo de reflexão, fazem emergir Conhecimentos de Conteúdo. Gisela disse: *“Porque uma hora eles coincidem.”*; se referindo à propriedade de triângulos equiláteros, em relação a tais pontos notáveis. Bárbara conseguiu obter uma relação mais geral: *“Eles estão sobre a mesma reta, parece.”*. Além dos Conhecimentos de Conteúdo que emergiram dessa reflexão, é necessário indicar algo também importante, que ocorreu nessa exploração do GeoGebra: a visualização. Considerando o Construcionismo, entendo a visualização, que potencializa essa reflexão considerada, como o “concreto” que Papert (1993) evidencia. Aquilo que se encontra “no mundo”, que gera discussões e facilita o conhecimento que se constrói “na mente”.

A visualização também potencializou outros momentos de reflexão observados no

desenvolvimento das atividades. Na exploração do encontro das alturas do triângulo, Letícia e Nayara, exploraram características específicas de determinados triângulos. No processo de reflexão, fizeram emergir Conhecimentos de Conteúdo referentes ao fato de que as alturas, em um triângulo retângulo, se encontram no vértice cujo ângulo é reto. Nayara disse: *“Se for um triângulo retângulo [...]. Faz um triângulo retângulo.”*, Letícia fez e observou onde as alturas se encontraram: *“Ele vai se encontrar aqui [vértice do ângulo reto], olha.”*.

Ainda num processo de reflexão, observaram que as alturas e as medianas se coincidem, e uma das professoras, em um processo de mediação, instigou que elas descobrissem em quais momentos isso ocorria. Letícia disse: *“Porque é um triângulo equilátero acredito eu [...]. Quer ter certeza que é equilátero?”*. E para verificar que o triângulo era equilátero, utilizaram a ferramenta “Ângulo” para medir os ângulos internos. Observo a manifestação de um Conhecimento Tecnológico de Conteúdo e a ocorrência de um ciclo descrição-execução-reflexão no processo de utilização da ferramenta. Na reflexão, verificam que o triângulo era, de fato, equilátero.

Na reflexão gerada pela exploração da interseção de planos com poliedros diversos, Rafael e Letícia, manifestaram Conhecimentos de Conteúdo emergentes nessa exploração. Letícia observou: *“Aqui a gente tem seis faces e ele chega até seis, no outro a gente tem cinco e ele chega até cinco.”*. E Rafael, demonstrou um conhecimento mais geral sobre a questão: *“A relação é essa então, o número de faces é o número máximo que eu posso formar.”*. Se referindo ao número de lados do polígono formado nas interseções de diferentes poliedros com um plano.

A reflexão gerada pela construção da quadratura do círculo, gerou a emergência de Conhecimentos de Conteúdo pelos participantes José e Ronaldo, Ronaldo disse: *“A única forma que eu pensei é essa, por exemplo, é você querer expressar um número irracional π , sei lá, por um número finito.”*. E José observou: *“O valor da área do quadrado, tende a π , que é igual a área da primeira circunferência. Para que o valor da área do quadrado seja π , o valor do lado do mesmo deveria ser raiz de π , o que não ocorre. O que é um absurdo pois π é um número transcendente.”*. Observo a manifestação de Conhecimentos de Conteúdo além da Geometria, como a noção de Limite e de Números Transcendentes.

Na atividade sobre o número de faces de um poliedro cujos vértices são pontos médios de poliedros de n faces, Rafael e Nayara partiram para uma reflexão e uma generalização apoiadas na visualização gerada pelo GeoGebra. Rafael disse: *“Seria, em relação a essas faces triangulares que ele forma, seria número de lados vezes dois, certo?!, que eu tenho uma aqui e uma aqui, então seria n vezes dois, depois eu tenho mais uma aqui ó, pra cada n , então seria*

n vezes dois, mais n, mais dois.”. Se apoiando na figura para explicar seu raciocínio e generalização, que culmina em um Conhecimento de Conteúdo, que o número de faces do poliedro é $3n + 2$.

O processo de reflexão do Ciclo de Ações ocorre em vários níveis: abstração empírica, pseudo-empírica e reflexionante (VALENTE, 1999a). A abstração empírica é a mais simples, por meio da qual o aprendiz extrai informações básicas do objeto explorado, como cor e forma. Na abstração pseudo-empírica, o aprendiz deduz algum conhecimento a partir do fenômeno explorado. A abstração reflexionante ocorre em um nível mais elevado, por meio da qual o aprendiz passa a refletir sobre suas próprias ideias, ocasionando reorganização do conhecimento prévio em relação à solução do problema. No caso dos processos de reflexão observados no curso, o nível identificado foi o de abstração pseudo-empírica, pois foi verificado que a reflexão gerou formas de conhecimento, entretanto eles não se referiam ao “pensar sobre pensar” (PAPERT, 1980, 1993), mas em relação ao Conhecimento de Conteúdo geométrico emergente.

O Construcionismo está fundamentado na ideia de que o melhor aprendizado ocorre com menor instrução, mas o fato do aprendiz estar em frente ao computador não garante que o processo de construção do conhecimento ocorrerá (VALENTE, 1999a). É preciso que o agente de aprendizagem estimule as ações do Ciclo de Ações para que a aprendizagem ocorra. No caso do curso de extensão universitária, as atividades com caráter mais fechado tinham esse papel. Elas estimulavam os processos de descrição, execução e depuração e incentivavam ainda mais a reflexão. Com a análise desse tema, pude perceber que incentivar a reflexão foi também importante para a manifestação de conhecimentos por parte dos participantes, principalmente, de Conhecimentos de Conteúdo.

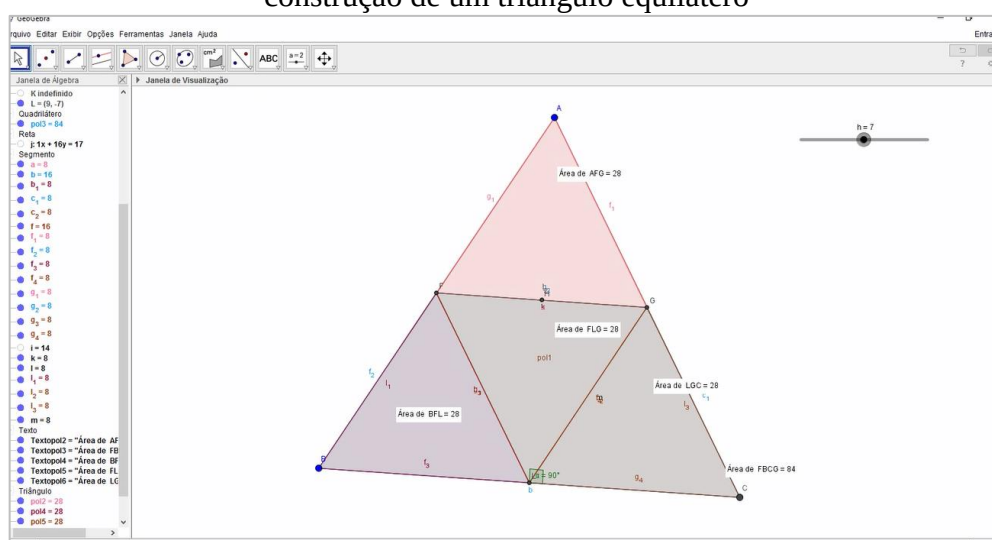
5.2.5 GeoGebra para Experimentar Ideias

Na realização das atividades, pude perceber que os participantes utilizavam o GeoGebra também para verificar se suas ideias estavam corretas. Nesse processo, demonstraram Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo e, implicitamente, vivenciaram um Aspecto Tecnológico Pedagógico de Conteúdo, evidenciado pela potencialidade das tecnologias digitais na exploração matemática, nesse ato de testar e verificar ideias se apoiando em Conhecimentos de Conteúdo.

Na exploração numérica do problema sobre a razão das áreas do triângulo e do trapézio, na Atividade 1, as participantes Nayara, Bárbara e Gisela, encontraram o valor aproximado de

três. Com dúvida em relação à resposta encontrada, elas procuraram elementos geométricos que justificassem tal resultado. Nayara teve a ideia de construir três triângulos dentro do trapézio, uma descrição verbal apoiada em Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo. Na descrição-execução, elas construíram segmentos ligando os vértices do trapézio ao ponto médio de sua base maior. Na realização de dois ciclos descrição-execução, construíram três polígonos, por sugestão da Gisela, demonstrando um Conhecimento Tecnológico de Conteúdo; e alteraram suas cores, uma manifestação de um Conhecimento Tecnológico. Por fim, mediram as áreas e perceberam que os quatro triângulos eram congruentes, nessa etapa ocorre as ações descrição-execução-reflexão que culmina num Conhecimento de Conteúdo, relacionado à relação das áreas do triângulo e do trapézio e à congruência dos quatro triângulos envolvidos na construção (Figura 24).

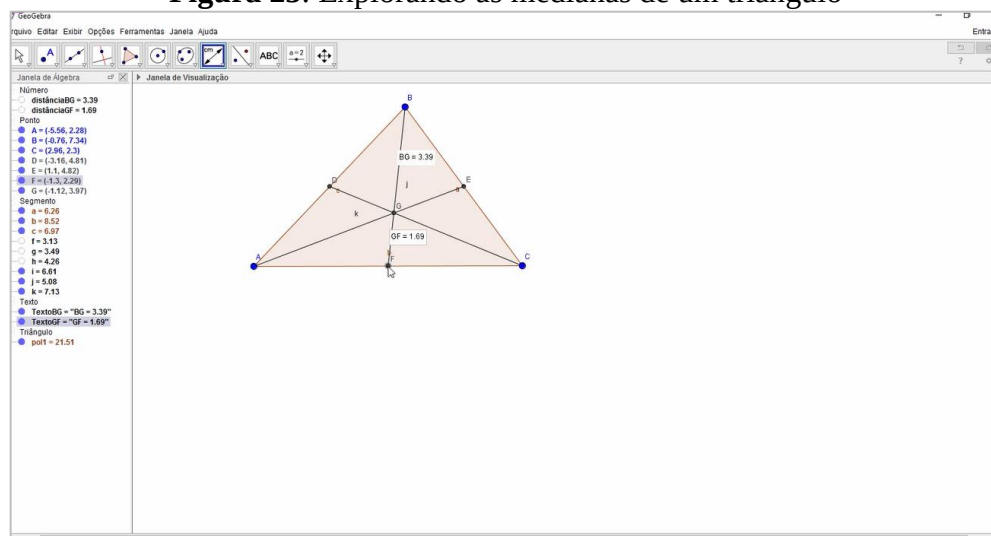
Figura 24: Verificação do resultado algébrico por meio de elementos geométricos na construção de um triângulo equilátero



Fonte: Dados da pesquisa

Em outra atividade, na exploração das medianas de um triângulo, Gisela manifestou Conhecimentos de Conteúdo: “*Lembra que tem uma relação que essa parte é sempre duas dessa? Essa parte é sempre duas da de baixo [...]. Por exemplo, essa parte aqui, se ela mede l , essa parte é l sobre 2.*”. E, a partir de tal informação, as participantes Bárbara e Gisela buscaram uma ferramenta para garantir a verificação da ideia de Gisela. Elas encontraram a ferramenta que mede comprimento e perímetro e em um processo de descrição-execução mediaram as distâncias dos vértices ao baricentro do triângulo e, na reflexão, verificaram a relação (Figura 25). Nesse processo, ocorre a manifestação de Conhecimento Tecnológico de Conteúdo, relacionado à utilização da ferramenta de medição de distância.

Figura 25: Explorando as medianas de um triângulo



Fonte: Dados da pesquisa

Os participantes Rafael, Ronaldo e José perceberam também tal potencialidade do GeoGebra. Após construírem um triângulo equilátero utilizando a ferramenta Polígono Regular, por sugestão de Rafael, o trio decide encontrar uma forma de exibir o valor dos ângulos internos do triângulo. Rafael, assim descreve sua ideia: *“Será que não tem uma ferramenta pra gente exibir o valor dos ângulos?”*. Ao descobrirem a ferramenta “Ângulo”, num processo de descrição-execução os participantes clicam sobre a área do triângulo e encontram o valor dos ângulos internos. Nesse processo adquirem um Conhecimento Tecnológico de Conteúdo relacionado à utilização da ferramenta e afirmam um Conhecimento de Conteúdo.

Experimentar ideias por meio das tecnologias digitais é característica marcante dos *software* de Geometria Dinâmica, como o GeoGebra foi considerado no curso de extensão universitária. Para Zulatto (2002, p. 21), na exploração proporcionada pelo Ambiente de Geometria Dinâmica, “[...] o aluno pode formular suas próprias conjecturas e tentar verificar se elas são válidas. Ou seja, o próprio aluno irá realizar a verificação e validação da conjectura que formulou.”. A autora ainda aponta que essa característica ocorre por conta da capacidade do *software* de propiciar a prova do arrastar. Entretanto, no que foi observado no desenvolvimento do curso de extensão universitária, outras ferramentas do GeoGebra, além da “Mover”, tornaram possível a exploração de ideias matemáticas.

O tema GeoGebra para Experimentar Ideias não está calcado na concepção de que os participantes realizaram demonstrações, pois elas requerem rigor. Na verdade, o GeoGebra ofereceu subsídios para que os participantes verificassem empiricamente suas ideias, como uma forma de experimentação. Primeiramente, as ideias não estavam associadas aos enunciados das atividades, elas relacionavam-se a conhecimentos que os participantes já possuíam ou haviam

construído por meio das atividades.

Excetuando-se o primeiro caso apresentado, os outros casos estão relacionados ao que De Villiers (2001) discute sobre a convicção. O autor diz que, muitas vezes, a convicção do matemático de que a ideia matemática esteja correta, o leva a buscar uma demonstração. Segundo De Villiers (2001, p. 32) “[...] a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração. (Por que esquisita e obscura razão gastaríamos por vezes meses a tentar provar certas conjecturas, se não estivéssemos já convencidos da sua verdade?).”.

Os participantes tinham a convicção de que suas ideias estavam corretas, e utilizaram o GeoGebra apenas para validar tais conhecimentos. A validação, nesses casos, não assumiu papel de demonstração, mas teve caráter de verificação empírica. Esse tipo de situação ocorre também em outros Ambientes de Geometria Dinâmica. De Villiers (1997) discute que a maioria dos estudantes, por meio da exploração no computador, se convencem da veracidade, sem a necessidade da demonstração. Entretanto, o autor salienta o papel do professor ao instigar a busca por uma demonstração; novamente, a pouca mediação causou a ausência de demonstração geométrica no curso. Segundo ele,

Embora a maioria dos alunos pareça não ter mais necessidade de convicção após ter explorado extensivamente conjecturas geométricas em ambientes de geometria dinâmica como Cabri ou Sketchpad, eu ainda achei relativamente fácil incitar mais a curiosidade, perguntando-lhes por que eles acham que um determinado resultado é verdadeiro; ou seja, desafiá-los a tentar explicar. Os alunos, então, admitem rapidamente que a verificação indutiva/experimental meramente confirma; não dá uma sensação satisfatória de iluminação; ou seja, uma percepção ou compreensão de como é uma consequência de outros resultados familiares. Os alunos, portanto, parecem achar bastante satisfatório ver um argumento dedutivo como uma tentativa de explicação, em vez de verificação.⁴⁰ (DE VILLIERS, 1997, p. 23, tradução nossa).

Após ter apresentado os temas emergentes da interação dos participantes com o GeoGebra. A seguir, apresento os temas que emergiram da discussão realizada no curso, do desenvolvimento das atividades e das entrevistas realizadas com os participantes.

⁴⁰ Although most students seem to have no further need for conviction having extensively explored geometric conjectures in dynamic geometry environments like Cabri or Sketchpad, I have nevertheless found it relatively easy to solicit further curiosity by asking them why they think a particular result is true; i.e. to challenge them to try and explain it. Students then quickly admit that inductive/experimental verification merely confirms; it gives no satisfactory sense of illumination; i.e. an insight or understanding into how it is a consequence of other familiar results. Students therefore seem to find it quite satisfactory to then view a deductive argument as an attempt at explanation, rather than verification.

5.3 Discussões sobre Tecnologias Digitais no Ensino

Na discussão e nas entrevistas, o assunto principal tratado foi a integração das tecnologias digitais no ensino. Nas análises de tais momentos, surgiram cinco temas: Papel do Professor, Estrutura das Escolas, Visualização, Construção do Conhecimento e Dinamicidade.

No tema **Papel do Professor**, os participantes fizeram emergir conhecimentos referentes à mudança do papel do professor frente às transformações causadas pelas tecnologias digitais. No tema **Estrutura das Escolas**, os participantes demonstraram conhecimentos referentes aos obstáculos a serem enfrentados na integração das tecnologias digitais no ensino. Os participantes demonstraram Conhecimento Pedagógico, Conhecimento Tecnológico Pedagógico e Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo referente às potencialidades do GeoGebra para o ensino de Matemática, tais conhecimentos estão reunidos nos temas **Visualização, Construção do Conhecimento e Dinamicidade**.

Os Conhecimentos Docentes manifestados nesse grupo de dados foram, principalmente, Conhecimentos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos e Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo. O Conhecimento Pedagógico é aquele que se relaciona aos processos e práticas de ensino e de aprendizagem, por meio do qual o professor

[...] compreende como os alunos constroem conhecimento e adquirem habilidades; desenvolvem hábitos mentais e disposições positivas para a aprendizagem [...] [e] requer uma compreensão das teorias cognitivas, sociais e de desenvolvimento da aprendizagem e como elas se aplicam aos alunos em sua sala de aula.⁴¹ (MISHRA; KOEHLER, 2008, p. 6, tradução nossa).

O Conhecimento Tecnológico Pedagógico engloba os entendimentos de como as tecnologias transformam o ensino e a aprendizagem (MISHRA; KOEHLER, 2006). Isso inclui conhecimentos sobre como os recursos tecnológicos possibilitam ou restringem o desenvolvimento das práticas de ensino e de aprendizagem (HARRIS; MISHRA; KOEHLER, 2009).

O Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo, por sua vez,

[...] abrange a compreensão das representações de conceitos usando tecnologias; técnicas pedagógicas que aplicam tecnologias de maneiras construtivas para ensinar conteúdo de maneiras diferenciadas de acordo com as necessidades de aprendizagem dos alunos; conhecimento do que torna os conceitos difíceis ou fáceis de aprender e como a tecnologia pode ajudar a corrigir desafios conceituais; conhecimento sobre a compreensão relacionada ao conteúdo anterior dos alunos e os pressupostos epistemológicos; e conhecimento de como as tecnologias podem ser usadas para desenvolver a

⁴¹ [...] understands how students construct knowledge and acquire skills; develop habits of mind and positive dispositions towards learning [...] [and] requires an understanding of cognitive, social and developmental theories of learning and how they apply to students in their classroom.

compreensão existente para desenvolver novas epistemologias ou fortalecer as antigas.⁴² (HARRIS; MISHRA; KOEHLER, 2009, p. 403, tradução nossa).

Além dos conhecimentos componentes do TPACK, esse grupo de dados fez emergir conhecimentos referentes à integração das tecnologias digitais no ensino em relação ao contexto educacional, às burocracias do sistema de ensino e ao currículo. Embora essas formas de conhecimentos não estejam explicitadas no modelo TPACK, compreender os obstáculos e as dificuldades da integração das tecnologias na Educação Básica é fundamental para que o professor esteja consciente dos desafios a serem enfrentados na busca da transformação do ensino.

Os conhecimentos emergentes nesse grupo de dados foram fruto da reflexão dos participantes sobre o contexto educacional e suas experiências no ensino e na aprendizagem da Matemática com e sem as tecnologias digitais. As reflexões também permearam sua vivência no curso de extensão universitária. Além disso, esses conhecimentos também emergiram das suas experiências em desenvolver atividades utilizando o GeoGebra.

A reflexão, nesse contexto, é entendida como um processo que “[...] envolve não apenas uma sequência de ideias, mas uma consequência – uma ordenação consecutiva de tal forma que cada uma determina a próxima como resultado adequado, enquanto cada uma, por sua vez, se inclina para trás em suas antecessoras.”⁴³ (DEWEY, 1910, p. 3, tradução nossa). O processo de reflexão é importante na formação docente, segundo Borges e Tardif (2001, p. 15), os professores devem ser considerados práticos reflexivos, pois eles “[...] produzem saberes específicos ao seu próprio trabalho e são capazes de deliberar sobre suas próprias práticas, de objetivá-las e partilhá-las, de aperfeiçoá-las e de introduzir inovações susceptíveis de aumentar sua eficácia.”.

A reflexão sobre a integração e os impactos das tecnologias digitais é fundamental, pois, por meio dela é possível entender como o ensino pode ser transformado (MERCADO, 1998). Segundo Mercado (1998, p. 5), a reflexão leva o sujeito

[...] a repensar o processo do qual participa dentro da escola como docente. A formação deve considerar a realidade em que o docente trabalha, suas ansiedades, suas deficiências e dificuldades encontradas no trabalho, para que consiga visualizar a tecnologia como uma ajuda e vir, realmente, a utilizar-se

⁴² [...] encompasses understanding the representations of concepts using technologies; pedagogical techniques that apply technologies in constructive ways to teach content in differentiated ways according to students’ learning needs; knowledge of what makes concepts difficult or easy to learn and how technology can help redress conceptual challenges; knowledge of students’ prior content-related understanding and epistemological assumptions; and knowledge of how technologies can be used to build on existing understanding to develop new epistemologies or strengthen old ones.

⁴³ involves not simply a sequence of ideas, but a consequence – a consecutive ordering in such a way that each determines the next as its proper outcome, while each in turn leans back on its predecessor.

dela de uma forma consistente.

A seguir, apresento momentos que ilustram os temas emergentes dessa classe de dados.

5.3.1 Papel do Professor

Diante das mudanças trazidas pelas tecnologias digitais na sociedade, economia e até na cultura, a escola e a função docente também devem acompanhar as mudanças. Mas, muitas vezes o professor não está preparado para utilizar as tecnologias digitais em suas aulas, como foi apontado pelas participantes Bárbara e Gisela:

Bárbara: *“A maioria dos professores que estão nas escolas, fizeram o magistério, e não tiveram, não têm muita familiaridade com a tecnologia digital.”*.

Gisela: *“E cai um pouco nesse conceito de o professor não saber como lidar com esses recursos, e como preparar uma aula a partir disso né, usando esses recursos.”*.

Garcia et al. (2011) discutem a importância de que os professores tenham contato com as tecnologias digitais e que eles sejam preparados para fazer sua integração no ensino. Sendo assim, é preciso não apenas proporcionar recursos materiais, mas também conscientizar o professor que as tecnologias digitais implicam uma transformação nas configurações tradicionais de ensino. Segundo Garcia et al. (2011, p. 80)

[...] podemos pensar então na importância de expandir o repertório tecnológico dos docentes como meio de instrumentalizá-los para uma prática pedagógica fundamentada em um novo paradigma, diferente do tradicional, que mantém distantes alunos e professores. Para além de uma questão técnica de capacitar a instituição de ensino com equipamentos tecnológicos trata-se, mais profundamente, de tornar o docente um profissional crítico, reflexivo e competente para o domínio das novas tecnologias digitais.

Os participantes também apontaram que os professores, muitas vezes, acostumados ao ensino transmissivo, têm dificuldade em se adaptar a uma nova condição que o uso das tecnologias digitais no ensino provoca. Bárbara, aponta que o professor tem que deixar de lado seu papel autoritário e que isso, muitas vezes, pode causar-lhe desconforto, pois está acostumado com os papéis de professores e alunos em um ensino mais tradicional, segundo a participante,

É que, às vezes, trabalhar com as tecnologias digitais vai fazer ele sair da zona de conforto e para algo mais desconfortável e inseguro, onde o aluno pode saber mais do que ele naquele momento e ele vai sair daquele papel de ter autonomia e controle da aula para uma aula que ele não vai ter mais aquele controle. Pode acontecer perguntas, acontecer algo que ele não sabe explicar.

Borba e Penteado (2007) discutem o papel do professor diante das mudanças trazidas

pelas tecnologias digitais. Os autores apontam que alguns professores realizam suas práticas docentes em uma zona de conforto, na qual “[...] quase tudo é conhecido, previsível e controlado [...]” (BORBA; PENTEADO, 2007, p. 56). Para que o professor integre as tecnologias digitais em sua prática é necessário que ele se arrisque em uma zona de risco, na qual, diversos fatores podem influenciar o papel autoritário do docente. Segundo Borba e Penteado (2007, p.57) tais fatores estão relacionados a perda de controle, a qual “[...] aparece principalmente em decorrência de problemas técnicos e da diversidade de caminhos e dúvidas que surgem quando os alunos trabalham com um computador.”.

Nayara também concorda que o uso da tecnologia pode causar desconforto ao professor, acostumado ao ensino transmissivo. Para ela, usar a tecnologia digital será mais difícil, pois acredita que os alunos também deveriam dominar a tecnologia digital empregada antes de explorarem. Rafael também acredita que o professor terá mais trabalho na transição do ensino transmissivo para o ensino com tecnologias digitais.

Nayara: *“Além de tudo que ele tem que fazer, planejar algo diferente, que vai dar um pouco mais de trabalho [...]. O software que dá um pouco mais de trabalho porque tem tudo aquilo de ensinar como mexer, para depois ensinar; porque a pessoa já tem que saber funções e outras coisas para chegar no software.”.*

Rafael: *“Em questões de qualidade eu acredito que você vai ter um ganho de qualidade, agora o que eu ainda não sei é se vai ser, do ponto de vista do professor, se vai ser mais fácil ou mais difícil para ele. Porque na aula de Geometria se ele for um professor tradicional ele pode chegar na aula lá com a régua, o giz, o livro, e tá feita a coisa né. Agora, o GeoGebra, com certeza vai exigir dele um pouco mais de trabalho. De preparação e tal. Para muitos professores, até mesmo de atualização.”.*

De fato, as tecnologias digitais requerem uma preparação maior do professor, que necessita possuir e saber integrar novos conhecimentos. Para isso, portanto, o professor precisa de uma formação específica, como apontam Valente e Almeida (1997, p. 22-23, grifo nosso)

[...] se esses novos *software* ampliam as possibilidades que o professor dispõe para o uso do computador na construção do conhecimento, eles também demandam um discernimento maior por parte do professor e, conseqüentemente, uma formação mais sólida e mais ampla. Isso deve acontecer tanto no domínio dos aspectos computacionais quanto do conteúdo curricular. Sem esses conhecimentos é muito difícil o professor saber integrar e saber tirar proveito do computador no desenvolvimento dos conteúdos.

Os participantes também fizeram apontamentos sobre o que é necessário para o professor inserir as tecnologias digitais no ensino. Para Rafael, o professor deve possuir um Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo, segundo ele,

A gente precisa ter professores que são efetivamente ‘treinados’⁴⁴ na matéria.

⁴⁴ O participante Rafael, embora tivesse experiência no ensino de Matemática no Ensino Superior, por

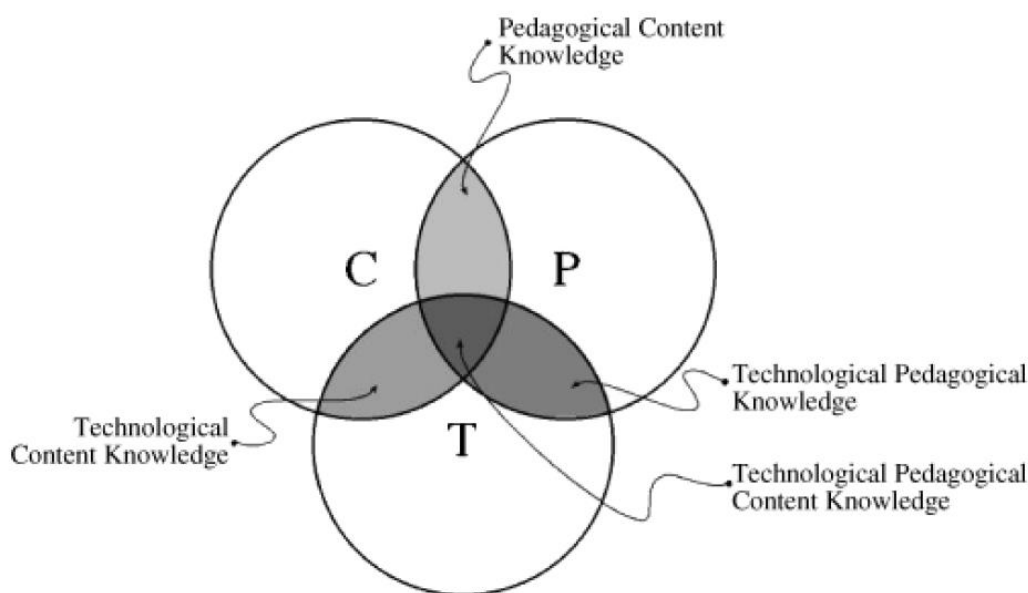
E depois eles precisam ser ‘treinados’ no software também. Para eles conseguirem fazer esse casamento aí, entre o software e o conteúdo [...]. Aí entra um pouco do feeling do professor, da criatividade dele. Então, precisa ser, o professor precisa ter um pouco de criatividade, de noção de licenciatura, de ensino. Você precisaria ter um tripé, noção de ensino, saber o conteúdo e saber manipular o software também.

O apontamento do participante Rafael está em consonância com a ideia de Mishra e Koehler (2006, 2008) e de Koehler e Mishra (2009) em relação aos conhecimentos docentes necessários para que os professores integrem as tecnologias digitais no ensino segundo a perspectiva de transformação do ensino. Koehler e Mishra (2009, p. 66, tradução nossa) apontam como a integração de Conhecimentos Tecnológicos (T), Conhecimentos Pedagógicos (P) e Conhecimentos de Conteúdo (C) se relacionam no quadro teórico Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo (TPACK) (Figura 26)

Ao integrar simultaneamente o conhecimento da tecnologia, da pedagogia e do conteúdo, os professores especializados colocam o TPACK em prática sempre que ensinam. Cada situação apresentada aos professores é uma combinação única destes três fatores e, conseqüentemente, não há nenhuma solução tecnológica única que se aplique para cada professor, cada curso, ou cada vista do ensino. Em vez disso, as soluções residem na habilidade de um professor de navegar com flexibilidade nos espaços definidos pelos três elementos de conteúdo, pedagogia e tecnologia e as interações complexas entre esses elementos em contextos específicos. Ignorar a complexidade inerente a cada componente de conhecimento ou a complexidade das relações entre os componentes pode levar a soluções simplificadas ou falhas. Assim, os professores precisam desenvolver fluência e flexibilidade cognitiva não apenas em cada um dos domínios-chave (T, P e C), mas também na maneira como esses domínios e parâmetros contextuais se inter-relacionam, para que eles possam construir soluções eficazes. Este é o tipo de compreensão profunda, flexível, pragmática e matizada do ensino com a tecnologia que envolvemos na consideração do TPACK como uma construção de conhecimento profissional.⁴⁵

sua vivência como professor na disciplina de Termodinâmica, sua formação universitária não se relaciona à licenciatura. Os termos utilizados em sua entrevista, portanto, não são de um educador matemático. Assim, a expressão “treinados” pode ser entendida como “com formação adequada”.

⁴⁵ By simultaneously integrating knowledge of technology, pedagogy and content, expert teachers bring TPACK into play any time they teach. Each situation presented to teachers is a unique combination of these three factors, and accordingly, there is no single technological solution that applies for every teacher, every course, or every view of teaching. Rather, solutions lie in the ability of a teacher to flexibly navigate the spaces defined by the three elements of content, pedagogy, and technology and the complex interactions among these elements in specific contexts. Ignoring the complexity inherent in each knowledge component or the complexities of the relationships among the components can lead to oversimplified solutions or failure. Thus, teachers need to develop fluency and cognitive flexibility not just in each of the key domains (T, P, and C), but also in the manner in which these domains and contextual parameters interrelate, so that they can construct effective solutions. This is the kind of deep, flexible, pragmatic, and nuanced understanding of teaching with technology we involved in considering TPACK as a professional knowledge construct.

Figura 26: TPACK

Fonte: Mishra e Koehler (2006, p. 1025)

Além disso, o apontamento do participante também revela consciência de que o papel do professor, frente às tecnologias digitais, se alterou e que, portanto, é exigido dele um novo conhecimento. O qual, segundo Koehler e Mishra (2009), deve-se articular com os conhecimentos que já possuía e construir novos conhecimentos, fazendo com que o professor seja capaz de se adaptar a diferentes situações de ensino. E com isso, o professor saberá lidar com a zona de risco que as tecnologias podem impor à sua prática.

5.3.2 Estrutura das Escolas

Os participantes apontaram situações relacionadas à estrutura das escolas, segundo eles, a estrutura escolar forma obstáculos para o uso das tecnologias digitais no ensino. Bárbara foi professora universitária e tentou utilizar tecnologias digitais em suas aulas, para ela, a maior dificuldade era a falta de tempo em um cronograma de ensino que deveria ser muito bem definido, pois uma aula na sala de informática atrasaria toda a programação das aulas restantes, segundo ela,

O mais difícil é conseguir ter um espaço para isso. Assim, na escola, ou na graduação, como no meu caso, quando eu dei aula, tinha uma sala de computador, mas eram somente 20; eu tinha 60 alunos. Então, ou eu colocava 60 alunos em 20 computadores, ou então... quando eu dei uma aula assim, eu dividi a aula de uma hora e 40 em três aulas e fiz três turmas de 20 alunos. Mas aí eu sacrifiquei uma aula porque foi uma aula rapidinho, meia hora. Demanda muito tempo do professor, dedicação, ele tem que ter um domínio.

Fica evidenciado, pelo depoimento da participante Bárbara, o engessamento do

currículo. As questões burocráticas que permeiam o ensino, como planejamento, cronograma e currículo, influenciam negativamente as propostas pedagógicas envolvendo o uso de tecnologias digitais na perspectiva de transformação do ensino. O que, muitas vezes, também desmotivam os professores a optarem por uma prática pedagógica transformadora, os forçando a continuarem a propagar o ensino transmissivo como forma de cumprir com as obrigações burocráticas. Cysneiros (1999, p.12) cita ainda outros motivos da desmotivação docente na integração das tecnologias digitais, ele aponta que “O professor encontra-se sobrecarregado com aulas em mais de um estabelecimento, falta-lhe tempo para estudar e experimentar coisas novas, recebe baixos salários.”.

Outro obstáculo apontado pelos participantes foi a falta de infraestrutura nas escolas. Muitas vezes as escolas não possuem recursos para que os professores possam utilizar.

Gisela: *“A escola, às vezes, não está capacitada pra ter esses recursos. Recursos tecnológicos envolvem, muitas vezes, a Internet que a escola não tem disponível, não tem nem computadores, às vezes, pra formação dos alunos.”.*

Natasha: *“É a falta de tecnologia na escola, então, tem muitas escolas que não tem Internet, a Escola X⁴⁶ mesmo, é bem restrito. Às vezes tem, às vezes não né. Em escola pública não tem computador pra todo mundo.”.*

A ausência de computadores nas escolas ou mesmo a existência de poucos se torna um obstáculo à integração das tecnologias digitais no ensino. Nesse caso, a falta de computador ou falta de uso contribui para a exclusão digital. Segundo estudo do Banco Mundial, publicado em 2016⁴⁷, 41 por cento da população brasileira não tem acesso à Internet. A escola, portanto, deve assumir seu papel social e contribuir para a inclusão digital, como aponta Bielschowsky (2009, p. 7)

A escola pública brasileira pode e deve contribuir para vencer essa nefasta exclusão digital que atinge principalmente os mais pobres. Permitir que nossas crianças realizem atividades pedagógicas em laboratórios de informática conectados em rede – convertendo-os em espaços pedagógicos, desde o início da idade escolar, além de uma gama de outros recursos educacionais que possibilitam a familiarização com esta tecnologia e a utilização cotidiana, não apenas nas escolas como também em outros espaços, tais como a internet comunitária.

Salas de aulas lotadas são também uma realidade das escolas públicas de Ensino Básico. Os participantes também apontaram tal fator como um obstáculo no ensino com tecnologias digitais. Como citou Natasha: *“Também tem problema as salas serem lotadas de alunos, então, como é que o professor vai passar alguma coisa e vai vê, vai ajudar, com um monte de aluno,*

⁴⁶ Escola pública na qual a participante era estagiária do PIBID durante a pesquisa.

⁴⁷ Fonte: <http://data.worldbank.org/indicator/IT.NET.USER.P2>

com às vezes três no mesmo computador e sei lá quantos, quarenta alunos numa sala?”. O problema de infraestrutura das escolas é bastante relatado na literatura como influenciador da falta de uso das tecnologias digitais no ensino. Peralta e Costa (2007, p.87) relatam essa condição, que existe também a nível internacional, segundo os autores, “[...] o problema reside também na própria organização escolar – grande número de alunos por turma, número reduzido de computadores disponíveis para uso dos alunos, falta de apoio técnico e pedagógico, individualismo de muitas das tarefas dos professores.”.

O currículo e as avaliações externas também foram identificados como obstáculos à utilização das tecnologias digitais no ensino.

Natasha: *“A gente tem o exemplo também do uso do caderninho, que ele limita muito o professor a fazer qualquer coisa. Qualquer aula diferente, qualquer matéria diferente, então, qualquer uso de software, diferente vai ficar bem apertado.”*.

Bárbara: *“E ainda tem aquelas provas, prova Brasil, não sei falar todas, mas tem uma que a escola que tiver uma nota boa recebe um dinheiro, aí então, a escola, os professores focam ‘a gente tem que ensinar isso aqui, que isso aqui vai cair na prova, e a gente precisa daquele dinheiro’ Aí, eu penso assim, escola que tira nota boa ela vai ganhar um dinheiro, a escola que não ganhou, ela tá precisando, mais ainda do dinheiro e não vai ganhar. Então, eu acho que isso aí também vai moldando, assim, a atividade do professor na sala de aula”*.

Gatti, Barreto e André (2011) discutem a relação entre as avaliações, o currículo e a prática docente. Eles apontam que os sistemas de avaliações contribuem para o processo de centralização dos currículos. Nesse contexto, “[...] acentuam-se as preocupações com a eficácia e a eficiência das escolas no manejo das políticas de currículo [...]” (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 39). As avaliações têm como foco a melhoria da educação e acabam influenciando os currículos e a formação docente. A avaliação “[...] na formação docente e na própria avaliação do desempenho dos professores, [é] concebida, sobretudo, em função dos resultados de rendimento dos alunos.” (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 40). Assim, a melhoria da educação se reduz à capacidade de atingir bons desempenhos nas avaliações. O que vemos, é a diminuição da autonomia dos docentes em relação à utilização do currículo. As avaliações implicam na obrigatoriedade do currículo para o cumprimento das metas. Entretanto, “[...] se os docentes não forem agentes ativos do currículo, a reforma não se consuma.” (GATTI; BARRETO; ANDRÉ, 2011, p. 42). Portanto, a existência de questões burocráticas não possibilita o professor de praticar transformações no ensino, com isso, a integração das tecnologias digitais é comprometida.

Segundo Papert (1993), a escola, como uma forma de defesa, muitas vezes, impõe obstáculos para o uso das tecnologias digitais. O autor conta que, no início, os computadores

eram situados na sala de aula. Devido ao crescimento de sua importância, os computadores foram reunidos em um único local, o laboratório de informática, o que prejudicou a interação dos alunos e professores com os computadores. Papert (1993 p. 39-40, tradução nossa) explica o motivo

A mudança de um instrumento radicalmente subversivo na sala de aula para um instrumento conservador embotado no laboratório de informática não veio nem da falta de conhecimento nem da falta de programa. Eu explico por uma inteligência inata da Escola, que agiu como qualquer organismo vivo em defender-se contra um corpo estranho. Pôr em movimento uma reação imune cujo o resultado final seria digerir e assimilar o intruso.⁴⁸

O autor ainda aponta que, para que a haja a integração das tecnologias digitais na educação, deve existir um trabalho colaborativo entre pesquisadores, professores de modo a compreenderem a escola por meio de um processo de desenvolvimento. Os participantes também entendem que a colaboração entre Escola e Universidade é a forma de que as tecnologias possam ser inseridas na educação, como apontou Bárbara,

A escola poderia incentivar o uso das tecnologias com os professores e, às vezes, mostrar algumas formas de uso, criar parcerias, às vezes, com universidades ou algo que tiver ali perto pra que a universidade traz novas visões, minicurso, cursos de extensão pro professor pode estar se capacitando.

Os participantes também identificaram potencialidades do uso das tecnologias digitais no ensino baseadas na experiência de aprendizagem proporcionada pelo curso de extensão universitária, as quais serão enfatizadas nos temas emergentes, a seguir.

5.3.3 Visualização

O ensino de Geometria, além de dinâmico, é ainda potencializado pela capacidade de visualização geométrica que o GeoGebra pode produzir. Os participantes do curso perceberam tal capacidade do *software* no ensino.

Gisela: *“No GeoGebra, a gente consegue enxergar, manipulando o GeoGebra, consegue enxergar muitas coisas que se fosse num quadro a gente não conseguiria.”*

José: *“O GeoGebra ele te dá uma visualização bem legal do tema. A visualização de propriedades, é que acho que se a gente fosse só através da escrita, no caso, demonstração, álgebra, utilizar a álgebra, ou tentar só desenhar no quadro, a gente não teria essa mesma facilidade. A gente não*

⁴⁸ The shift from a radically subversive instrument in the classroom to a blunted conservative instrument in the computer lab came neither from the lack of knowledge nor from a lack of software. I explain it by an innate intelligence of School, which acted like any living organism in defending itself against a foreign body. It put into motion an immune reaction whose end result would be to digest and assimilate the intruder.

teria a mesma facilidade que no GeoGebra a gente pode ter, no termo da visualização.”.

Nayara: *“Eu acho que o mais assim é a visualização, porque, principalmente em 3D porque a gente vê desenhos e assim meu Deus, sabe, aí você não sabe qual é a parte de trás do sólido a parte da frente, você não sabe nada, daí quando você vê você pode girar, você pode mexer. Eu acho que a visualização é a melhor parte.”.*

A visualização matemática pode ser entendida como “[...] o processo de formação de imagens (mentalmente, ou com lápis e papel, ou com o auxílio da tecnologia) e utilização eficaz dessas imagens.”⁴⁹ (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 3, tradução nossa) para a aprendizagem matemática. A visualização não é simplesmente o ato de ver, ela

[...] envolve um esquema mental que representa a informação visual ou espacial. É um processo de formação de imagens que torna possível a entrada em cena das representações dos objetos matemáticos para que possamos pensar matematicamente. Ela oferece meios para que conexões entre representações possam acontecer. Assim, a visualização é protagonista na produção de sentidos e na aprendizagem matemática. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014, p. 53).

A visualização faz com que as ideias matemáticas se tornem mais perceptíveis, além disso, incentiva a intuição matemática, dando sentido e promovendo meios de expressão a conceitos abstratos (AMADO; CARREIRA, 2008). Borba e Villarreal (2005) apontam que a potencialização da visualização é uma das principais características das tecnologias digitais; e eles fazem importantes considerações sobre a relação da visualização com a Educação Matemática:

- A visualização constitui uma forma alternativa de acesso ao conhecimento matemático.
- A compreensão de conceitos matemáticos requer múltiplas representações, e a representação visual pode transformar a compreensão em si mesma.
- A visualização é parte da atividade matemática e uma maneira de resolver problemas.⁵⁰ (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 96, tradução nossa).

No GeoGebra, a visualização é proporcionada para objetos no plano e no espaço. Para Diković (2009, p. 193, tradução nossa, grifo nosso) “A visualização que é possível com o *software* dinâmico de hoje permite ao estudante ver e explorar as relações matemáticas e os conceitos que eram difíceis de ‘mostrar’ [...]”⁵¹ sem as tecnologias digitais. A potencialização

⁴⁹ [...] the process of forming images (mentally, or with pencil and paper, or with the aid of technology) and using such images effectively for mathematical discovery and understanding.

⁵⁰ Visualization constitutes an alternative way of accessing mathematical knowledge.

The comprehension of mathematical concepts requires multiple representations, and visual representation may transform understanding in itself.

Visualization is part of mathematical activity and a way of solving problems.

⁵¹ The visualization that is possible with today’s dynamic software enables the student to see and explore mathematical relations and concepts that were difficult to ‘show’[...]

da visualização em ambientes computacionais está relacionada à dinamicidade proporcionada pelas tecnologias digitais, bem como, pela capacidade de experimentação possibilitada. Morrow (1997) aponta as possibilidades da visualização dinâmica proporcionada pelos Ambientes de Geometria Dinâmica:

- Formação de conjecturas e proposição de problemas: os programas de Geometria Dinâmica podem encorajar os estudantes “[...] a brincar, a explorar e, com o incentivo dos professores, formar conjecturas e propor problemas sobre eles observam. Tal *software* é divertido para os alunos e para os professores, porque nos permite experimentar sem muita penalidade.”⁵² (MORROW, 1997, p. 47, tradução nossa, grifo nosso);
- Entendimento profundo de conceitos matemáticos: a exploração em Ambientes de Geometria Dinâmica “[...] aprofunda as experiências dos alunos com conceitos que possuem aspectos inerentemente dinâmicos.”⁵³ (MORROW, 1997, p. 48, tradução nossa, grifo nosso);

A visualização, segundo os participantes também tem a potencialidade, além de facilitar a compreensão, de fazer com que o aluno se interesse mais por seu aprendizado. Ronaldo apontou,

Com o uso, uso de GeoGebra talvez você consiga resgatar esse interesse do aluno, porque, por mais que o aluno tenha dificuldade você tá introduzindo algo novo, algo diferenciado, algo saindo da mesmice, né, e só isso pro aluno já é, já é algo que desperte o interesse dele, que faça ele querer aprender né. Então, eu acredito que ajuda tanto nessa questão de você, a vontade de aprender no aluno e que talvez aquilo que ele não enxergava de forma algébrica, de forma, de uma forma abstrata, agora ele pode enxergar visualmente através do software.

As dificuldades da aprendizagem da Geometria relacionam-se, em parte, ao aspecto visual da Geometria (GRAVINA, 1996). O GeoGebra, ao potencializar a visualização geométrica de uma forma dinâmica, pode facilitar a aprendizagem, proporcionando maior interesse dele no processo. Esse interesse também advém da interação com as tecnologias digitais, as quais adquiriram grande importância, pois os alunos convivem constantemente com “[...] a televisão, os videogames, a Internet e o computador em casa, desenvolvendo novas habilidades [...]. [E] [...] sua motivação é despertada pelo mundo multimídia, interativo e animado.” (SANTOS, 2000, p. 72).

⁵²[...] to play, to explore and, with the encouragement of teachers, to form conjectures and pose problems about they observe. Such software is fun for students and for teachers because it allows us to experiment without much penalty.

⁵³[...] deepens the experiences students have with concepts that have inherently dynamic aspects.

Os participantes demonstraram conhecimentos em relação à possibilidade de visualização matemática por meio do GeoGebra. Eles compararam as formas tradicionais de ensino de Geometria, como a demonstração na lousa, com as formas possibilitadas pelo GeoGebra. Além disso, para eles, a visualização matemática proporcionada pelo GeoGebra possibilita não apenas a aprendizagem, mas também a motivação em relação à Matemática e seu estudo. Esses conhecimentos manifestados pelos participantes relevam uma integração de Conhecimentos Tecnológicos, de Conteúdo e Pedagógicos, ou seja, o TPACK, uma vez que revelam o entendimento de como a Matemática integrada à tecnologia digital possibilita formas de aprender.

5.3.4 Construção do Conhecimento

Outra potencialidade do GeoGebra apontada pelos participantes foi a construção do conhecimento, para eles as tecnologias digitais potencializam o papel do aluno enquanto protagonista da própria aprendizagem, no qual o professor é mediador e não detentor do conhecimento. Gisela apontou,

Se você conseguir construir uma atividade e tiver a oportunidade de fazer uma atividade assim com os alunos, não precisa ser todas, né, tira uma atividade relacionada a tal assunto, e levar eles pra essa construção, eu acho que eles só têm a ganhar. E, de compreensão, de, às vezes, chegar conclusões, por exemplo, eu não preciso dar algumas conclusões em sala de aula, de alguns desenhos [...]. Talvez eles construindo eles cheguem a essa conclusão sozinhos, né, e não, não eu, como professora, vou ter que tipo, falar na lousa pra eles.

Os momentos de reflexão, muito utilizados no curso, também foram apontados e utilizados pelos participantes na construção de suas atividades. Segundo Bárbara

Era importante a gente trabalhar e não ficar só no passo a passo e introduzindo as perguntas. Então, tanto que no meu, eu fiz mais ou menos assim. E dava lá, pedia pra construir uma coisa e perguntava pra ver o que que o aluno tinha concluído, pra que aquela conclusão levasse a compreensão do conteúdo e continuasse mais assim. Eu achei que isso foi bom, porque isso me ajudou a pensar também que é bom fazer essas perguntas, que aí a gente já vai concluindo, já vai percebendo outras coisas na hora que vai fazendo.

O entendimento de que as tecnologias digitais possibilitam uma aprendizagem por meio da construção de conhecimentos, revela um Conhecimento Tecnológico Pedagógico por parte dos participantes. Esse conhecimento se relaciona à noção de que as tecnologias digitais permitem novas formas de ensinar e aprender, quando comparadas às formas tradicionais em que o processo educativo comumente ocorre.

O uso das tecnologias digitais em uma abordagem construcionista ocasiona uma

mudança de papéis. Nessa condição, o aluno se torna ativo no próprio processo de aprendizagem e não mais é um “receptor” do conhecimento, mas um “construtor”. Papert (1980) discute que o computador tem o poder de transformação muito maior que a televisão ou mesmo a imprensa, pois, embora tais inovações contribuíram para a melhoria da aprendizagem, elas ainda colocaram o aprendiz na condição de passivo. Ao passo que o computador tem a capacidade de transformar o aprendiz em protagonista da própria aprendizagem. O computador pode compensar os “pré-requisitos” para a aprendizagem, uma vez que, o “[...] conhecimento que era acessível somente por meio de processos formais podem agora ser abordados concretamente.”⁵⁴ (PAPERT, 1980, p. 21, tradução nossa).

O papel do professor em um ambiente de aprendizagem construcionista foi também observado pelos participantes. Apenas a interação aprendiz-computador não garante a construção do conhecimento; Maltempi (2004, p. 266) observa que, além dos recursos computacionais, é necessário em ambiente capaz de propiciar “[...] a motivação do aprendiz a continuar aprendendo, um ambiente que seja rico em materiais de referência [...]. Nesse ambiente, o professor é o regente que, em parceria com toda a comunidade escolar, deve desempenhar a difícil tarefa de fazer com que tudo funcione a contento.”.

Na atividade desenvolvida por Bárbara, ela explorou a ideia de construção do conhecimento. A atividade trata-se da construção de triângulos em Geometria Hiperbólica, os alunos devem seguir passos de construção e responder a questões que estimulam a reflexão. A seguir, na Figura 27, apresento trecho da atividade desenvolvida pela participante:

⁵⁴ [...] knowledge that was accessible only through formal processes can now be approached concretely.

Figura 27: Parte da atividade desenvolvida por Bárbara

Parte 1:

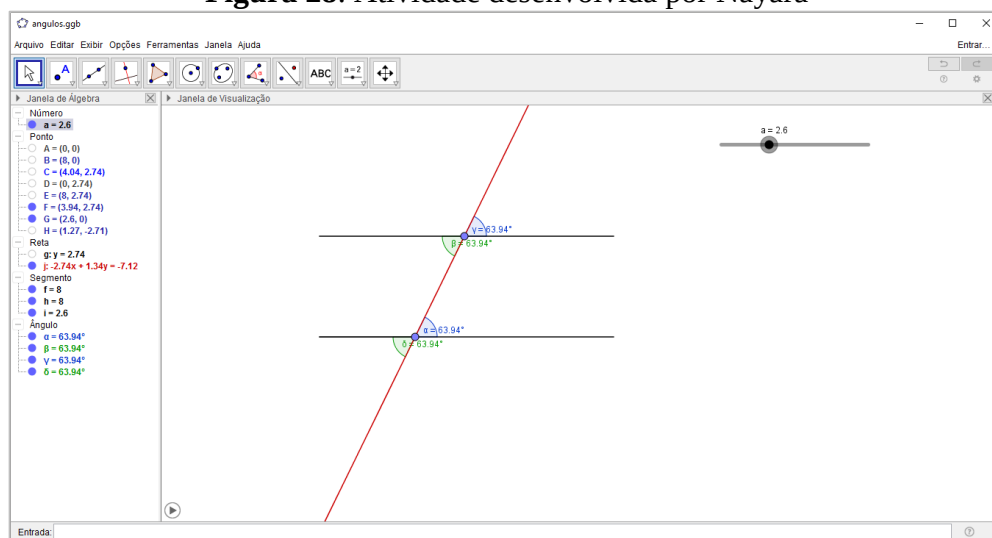
1. Clique sobre a última ferramenta (ao lado esquerdo) e selecione a opção Disco.
2. Clique em dois pontos distintos na janela de visualização.
3. Na janela algébrica, clique no ponto azul ao lado dos pontos criados A e B. Ao clicar sobre o ponto azul ele ficará branco e os pontos A e B na janela de visualização ficarão ocultos.
4. Marque os pontos C, D e E internos ao disco.
5. Clique sobre a última ferramenta (ao lado esquerdo) e selecione a opção h_segmento.
6. Crie o seguimento CD da seguinte forma: Primeiramente nos pontos C e D e depois sobre o disco.
7. De forma análoga crie os segmentos ED e EC.

Pergunta: Porque chamamos a figura geométrica que possui essa forma  de triângulo? De acordo com sua resposta anterior, podemos dizer que a figura encontrada após seguir os 7 passos é um triângulo? Por quê?

Fonte: Dados da pesquisa

A atividade desenvolvida por Nayara também explorou a ideia de construção do conhecimento. A atividade explora a Teoria dos Ângulos Alternos-Internos e, por meio dela, os alunos podem alterar a configuração das retas e verificar a congruência dos ângulos (Figura 28). A participante ainda apontou que a possibilitar a construção de conhecimentos é mais interessante para a aprendizagem do aluno do que a transmissão de conhecimento, segundo ela

Se eu falar pra você que os ângulos internos são iguais, você vai acreditar em mim, entendeu, e daí você vai usar isso, só que, então mostra pra mim que eles são iguais, sabe. [...] Eu acho que essa parte é muito interessante. Porque eu sou muito contra as pessoas falarem, darem resposta, sabe, direto, eu acho que você tem que pesquisar e com você mesmo vê como você vai mostrar aquilo.

Figura 28: Atividade desenvolvida por Nayara

Fonte: Dados da pesquisa

A construção de atividades sobre Geometria Hiperbólica e sobre Teoria dos Ângulos Alternos-Internos por meio dos recursos provenientes do GeoGebra e por meio de formas que privilegiam a construção do conhecimento revelam a manifestação do TPACK. Essa emergência do TPACK se relaciona ao entendimento de como a tecnologia possibilita a representação do conhecimento matemático integrado ao entendimento de como essa representação deve ser utilizada de forma a proporcionar a aprendizagem (ERDOGAN; SAHIN, 2010).

5.3.5 Dinamicidade

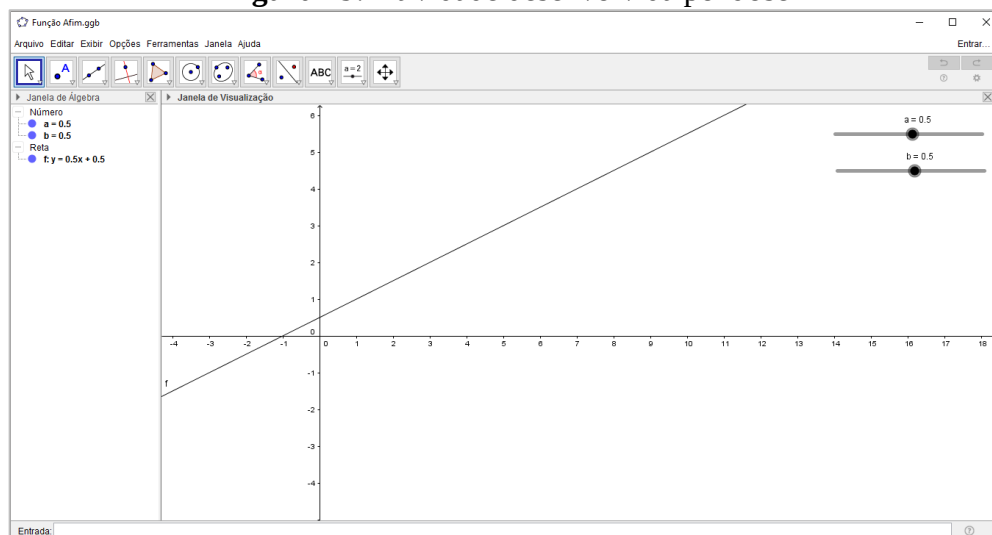
A dinamicidade foi outra característica do GeoGebra apontada pelos participantes. Nayara apontou a dinamicidade como uma potencialidade do GeoGebra na aprendizagem da Matemática. A participante também comparou as formas tradicionais de ensino com o ensino proporcionado pelo GeoGebra e destacou a “prova do arrastar” como possibilitadora da dinamicidade, segundo ela,

Eu acho que a versatilidade mesmo da coisa, de você não só tá no papel, ou não só falar, você conseguir montar e ver, tipo assim, não provar, mas nem demonstrar, mas você conseguir visualizar isso tudo acontecendo. As propriedades continuarem, a gente movimentar.

Na atividade desenvolvida por José (Figura 29), ele se utilizou do controle deslizante para fazer o estudo dos coeficientes da função afim. A dinamicidade foi citada pelo participante José como um diferencial do ensino de função utilizando o GeoGebra, quando comparado ao ensino por meio da lousa e do giz. Segundo o participante,

No caso da função afim, que eu coloquei, a gente teria que colocar vários tipos de função, onde eu estivesse variando o coeficiente angular, por exemplo, pra o aluno perceber a inclinação da reta. Aí eu teria que escrever várias funções, eu pediria pros alunos desenharem essa função no caderno. Então, eles iam perceber que quando mudasse um coeficiente ia mudando a inclinação. Só que com o GeoGebra isso daí é muito mais rápido. Eles perceberiam e ia ser uma coisa bem dinâmica. Seria bem mais rápido e até mais bonito de se ver.

Figura 29: Atividade desenvolvida por José



Fonte: Dados da pesquisa

Esse tema também dá indícios da emergência de Conhecimentos Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo, uma vez que, por meio do depoimento dos participantes é possível verificar seus entendimentos sobre como a Matemática e seu ensino se transforma com a utilização das tecnologias digitais. Seja por meio da “prova do arrastar” ou do uso de controles deslizantes, os participantes apontaram que o GeoGebra possibilita novas formas de entender e representar o conhecimento matemático, quando comparadas às formas tradicionais de ensino de Matemática.

A dinamicidade indicada pelos participantes é característica de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), como o GeoGebra, surgidos no final dos anos 80. Eles foram desenvolvidos para ensino e aprendizagem de Geometria, sendo caracterizados por *software* que possibilitam a manipulação de objetos geométricos na tela do computador. Hözil (1996) cita diversos *software* que surgiram com o propósito de permitir a Geometria Dinâmica, entre eles o Cabri-géomètre, o Euklid, o GOLOG, o Thales, o Geometer's Sketchpad e o Geometric superSupposer. Embora tais programas apresentem diferenças, o autor cita que eles têm em comum o fato de simular construções em régua e compasso, segundo a Geometria Euclidiana e “[...] permitem

certas partes de uma figura serem movidas sem modificar suas relações geométricas.”⁵⁵ (HÖLZL, 1996, p. 169, tradução nossa).

Além disso, os AGD possibilitam a investigação e a resolução de problemas em Geometria. Tradicionalmente, o ensino de Geometria ocorre por meio de provas matemáticas, o qual causa dificuldade nos alunos e, de certa forma, não é atrativa aos professores. Sendo assim, os AGD proporcionam formas de ensino e aprendizagem mais agradáveis. Eles têm um estilo extrínseco, por meio do qual as construções se referem à elementos externos, as ferramentas de construção. A principal característica desses tipos de *software* é a função “Arrastar”, a qual causa alteração na relação entre os objetos geométricos. (HÖLZL, 1996).

A dinamicidade do GeoGebra refere-se, também, à função “Arrastar”, ocasionada pela ferramenta “Mover” do *software*. Mas, vai muito além. As ferramentas autoexplicativas, as correspondências entre Geometria e Álgebra, o apelo visual, entre outros, proporcionam um conjunto de características que, quando associadas a uma abordagem de ensino transformadora funcionam como motivador da aprendizagem, fazendo com que os aprendizes possam relacionar-se com ideias matemáticas, podendo favorecer a construção do conhecimento.

5.4 Conclusões

Por meio da análise de dados, foi possível sistematizar os dados em dois grupos distintos. O primeiro, chamado “Exploração das Atividades do Curso de Extensão Universitária”, reuniu momentos de interação dos participantes desta pesquisa com o GeoGebra na exploração de atividades sobre Geometrias Plana e Espacial. O segundo grupo, “Discussões sobre Tecnologias Digitais no Ensino”, agrupou momentos de reflexão sobre o papel das tecnologias digitais no ensino e questões relacionadas a isso, como papel do professor, obstáculos nas escolas e potencialidades do GeoGebra.

O agrupamento dos dados nesses dois grupos foi fortemente influenciado pelo referencial teórico adotado, caracterizado pelo Construcionismo e pelos Conhecimentos Docentes. Por meio desse agrupamento buscou-se responder à questão norteadora “*Que conhecimentos docentes emergem quando licenciando em Matemática e professores exploram atividades de Geometria utilizando o GeoGebra?*”. Considerando-se o construto teórico TPACK, observo que existiu aspectos tecnológicos, pedagógicos e de conteúdo no desenvolvimento do curso de extenso universitária. O Construcionismo abrangeu a abordagem

⁵⁵ [...] allow certain parts of a figure to be moved without changing its underlying geometric relationships.

Tecnológica Pedagógica do curso de extensão universitária; O GeoGebra, utilizado para a exploração das atividades, ocupou o aspecto Tecnológico de Conteúdo. As Geometrias Plana e Espacial abrangeram a abordagem de Conteúdo. A existência desses três elementos e sua articulação incumbiram-se da existência de um aspecto Tecnológico Pedagógico de Conteúdo.

Os conhecimentos identificados no primeiro grupo de dados, relacionam-se a aspectos Tecnológicos, de Conteúdo e suas inter-relações. Esses conhecimentos referem-se à utilização de ferramentas do GeoGebra para a realização de tarefas que envolveram conceitos de Geometrias Plana e Espacial. Nesse contexto, os participantes puderam vivenciar situações de aprendizagens construcionistas, por meio da realização do Ciclo de Ações e da Espiral da Aprendizagem e também puderam experimentar ideias matemáticas com o auxílio das ferramentas do GeoGebra.

Já os conhecimentos que emergiram no segundo grupo de dados, estão relacionados à Conhecimentos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos, Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo e conhecimentos relacionados ao contexto educacional. Essas formas de conhecimento relacionam-se ao ensino de Matemática com a utilização de tecnologias digitais, e, às potencialidades do GeoGebra para a aprendizagem como a dinamicidade, a possibilidade de construção do conhecimento e a capacidade de visualização matemática.

Em conclusão, observo que o desenvolvimento do curso de extensão possibilitou a emergência de diversos conhecimentos docentes necessários à integração das tecnologias digitais no ensino. Os conhecimentos verificados se relacionaram aos conhecimentos componentes do modelo TPACK e a outras formas de conhecimento não pertencentes ao modelo, como conhecimentos sobre os obstáculos impostos à integração das tecnologias digitais ao ensino e sobre o papel dos professores nesse cenário, mas igualmente importantes no contexto da utilização das tecnologias digitais.

A seguir, apresento uma síntese deste estudo e reflito sobre suas conclusões, bem como, sobre a realização de estudos futuros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo se iniciou com o intuito de explorar a integração das tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem de Geometrias Plana e Espacial. Para isso, houve o desenvolvimento de um curso de extensão universitária, do qual participaram professores e futuros professores de Matemática e um estudante de engenharia com experiência no ensino. Os sujeitos da pesquisa exploraram atividades utilizando o GeoGebra, no desenvolvimento do curso. Nesse contexto, a pergunta que guiou este estudo foi: *“Que conhecimentos docentes emergem quando licenciandos em Matemática e professores exploram atividades de Geometria utilizando o GeoGebra?”*.

Iniciei a dissertação discutindo sobre as mudanças sociais, econômicas e culturais que as tecnologias digitais têm causado e como o ensino, nos diversos níveis, ainda continua ocorrendo sem influência dessas mudanças. Ainda discuti como os professores acabam sendo vítimas da reprodução contínua do ensino transmissivo. Dessa forma, por meio da problemática apresentada, justifiquei este estudo com base na ideia de que o primeiro passo para a transformação do ensino é a percepção dos docentes sobre as potencialidades das tecnologias digitais para o ensino e para a aprendizagem.

O foco deste estudo esteve centrado na Geometria, sendo assim, discuti como se deu seu desenvolvimento histórico, baseando-me nas ideias de Eves (1992). Segundo o autor, a Geometria se iniciou de maneira subconsciente, com o homem primitivo, que percebia a Geometria que estava presente ao seu redor. Na Antiguidade, a Geometria se desenvolveu por meio da sistematização de conhecimentos e emprego de tais conhecimentos para a resolução de problemas práticos. A Geometria se aproximou da sua forma mais popular com os trabalhos de geômetras gregos que propagaram a aplicação de técnicas lógico-dedutivas à Geometria. Na Idade Média, iniciou-se ramificações da Geometria e, posteriormente, houve o surgimento da Geometria Projetiva, Analítica e Diferencial. Nessa época, o quinto postulado de Euclides, o famoso postulado das paralelas, já intrigava os matemáticos e influenciou o surgimento das Geometrias Não-Euclidianas que Felix Klein sistematizou por meio da Teoria de Grupos no século XIX.

Discuti ainda, em relação à Geometria, que embora ela tivesse se diversificado ao longo dos séculos, seu ensino foi massivamente influenciado pela perspectiva grega lógico-dedutiva. O ensino da Geometria no Brasil, até meados do século XX, ocorria dessa maneira. A partir da década 1960, o ensino da Matemática no Brasil passou a ser influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna, que privilegiou a Álgebra e introduziu as ideias de Felix Klein ao ensino

da Geometria. A dificuldade dos professores em se adaptarem à nova forma de ensino e a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, promulgada em 1971, que dava autonomia às escolas na escolha e organização do currículo, ocasionou um abandono no ensino da Geometria. Nas décadas seguintes, o abandono ainda se fez presente, mas com esforços de políticas públicas e da pesquisa em Educação Matemática para seu resgate. E esse ocorre com maior ênfase à experimentação geométrica do que à demonstração matemática.

A aprendizagem da Geometria também foi discutida. Segundo Pais (1996), os elementos fundamentais dessa aprendizagem são: objeto, desenho e imagem mental, e todos se relacionam ao conceito. O objeto é aquele que se encontra no mundo físico, podendo ser manipulado; ele requer menor desenvolvimento cognitivo. O desenho se encontra num patamar mais alto de cognição e se caracteriza pelas imagens reproduzidas; Pais (1996) argumenta que, muitas vezes, os alunos consideram o próprio desenho como conceito geométrico. A imagem mental é abstração dos conceitos geométricos, ou seja, a habilidade de o aluno poder discutir sobre eles sem a presença de um objeto ou desenho. Esses elementos se relacionam na aprendizagem geométrica por meio da intuição, experiência e teoria. Com base na intuição, o aluno se utiliza das imagens mentais para entender as situações envolvidas na aprendizagem; com a experiência, o aluno se utiliza de objetos e desenhos para conhecer novas circunstâncias envolvidas na aprendizagem; quando as novas situações são entendidas, o conhecimento geométrico se constrói, com base na teoria, que se relaciona intimamente ao conceito geométrico.

O ensino da Geometria se potencializou com as tecnologias digitais. O desenvolvimento dos programas de Geometria Dinâmica apresentou possibilidades ao ensino. A movimentação de objetos geométricos favorece a experimentação e a visualização geométrica, e incentiva a conjectura e a prova. Este estudo se utilizou da exploração do GeoGebra, devido sua popularidade, facilidade acesso e inovações em relação a outros programas, como a imediata relação entre Geometria e Álgebra na tela do computador e possibilidade de exploração em 3D.

Além da relação entre Geometria e tecnologias digitais explorada neste estudo, baseei-me teoricamente no Construcionismo e nos Conhecimentos Docentes para a produção e análise dos dados. O Construcionismo foi idealizado por Seymour Papert e traz a ideia de que o melhor aprendizado ocorre com menor instrução; além disso, se relaciona à ideia de construção de algo “no mundo” que pode ser discutido e que facilita a aprendizagem. Ainda nessa perspectiva, discuti sobre o Ciclo de Ações e sobre a Espiral da Aprendizagem, por meio das quais José Armando Valente explica a interação do aprendiz com o computador.

Os Conhecimentos Docentes foram abordados neste estudo pois, ao lidar com professores e futuros professores, o curso de extensão universitária possuiu uma perspectiva formativa. Os Conhecimentos Docentes, principalmente o Conhecimento Tecnológico Pedagógico de Conteúdo, indicam os conhecimentos que os professores devem possuir ao integrar as tecnologias digitais no ensino. Segundo essa ideia, essa integração deve ocorrer com a integração de Conhecimentos Tecnológicos, Conhecimentos Pedagógicos e Conhecimentos de Conteúdo.

Na produção de dados desta pesquisa qualitativa, foram utilizadas filmagens dos encontros do curso de extensão universitária, filmagens da tela do computador, coleta das atividades escritas dos participantes, desenvolvimento de atividades por eles e entrevistas semiestruturadas. Para cada procedimento de produção foi utilizada uma perspectiva de análise própria, as quais foram descritas na seção “Metodologia da Pesquisa”. Ao final das análises, houve a triangulação dos dados que foram apresentados por meio de temas de análise.

Com a análise dos dados, organizei os dados em dois blocos distintos. O primeiro grupo foi chamado “Exploração das Atividades do Curso de Extensão Universitária” e se caracterizou pela emergência de Conhecimentos de Conteúdo, Tecnológicos e suas inter-relações. Os temas emergentes do primeiro grupo foram: Descrição Verbal, Limitação do Processo de Depuração, Ciclos de Ações, Reflexão e GeoGebra para Experimentar Ideias. O segundo grupo foi chamado “Discussões sobre Tecnologias Digitais no Ensino”, no qual emergiram, principalmente, Conhecimentos Pedagógicos, Conhecimentos Tecnológicos Pedagógicos, Conhecimentos Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo e conhecimentos sobre o contexto educacional. Os temas do segundo grupo foram: Papel do Professor, Estrutura das Escolas, Visualização, Construção do Conhecimento e Dinamicidade.

No tema **Descrição Verbal** estão caracterizados os momentos em que os participantes descreveram verbalmente a construção das atividades solicitadas, antes da descrição no GeoGebra. Inicialmente, as descrições verbais foram carregadas de Conhecimentos de Conteúdo e com a apropriação da tecnologia digital explorada, passaram a ocorrer por meio de Conhecimentos Tecnológicos de Conteúdo.

A **Limitação do Processo Depuração** foi identificada nos momentos em que os participantes não concluíam as ideias de construção por dificuldades na manipulação do GeoGebra. Essa característica foi também identificada pela pouca mediação dos professores que, enquanto agentes de aprendizagem, deveriam estimular as ações construcionistas a fim de que a aprendizagem ocorresse.

Os **Ciclos de Ações** ocorriam de forma espontânea quando os participantes desenvolviam atividades de construção de caráter “aberto”. Por conta da complexidade das construções, cada etapa envolvia as ações de descrição-execução-reflexão-depuração, que foram identificados como Ciclos de Ações “internos” a um ciclo maior. A junção de todos os ciclos envolvidos na construção se relacionava ao processo de descrição-execução do ciclo geral, que visava a reflexão e depuração da construção como um todo.

As atividades de caráter “fechado” incitavam os momentos de descrição, execução e depuração e objetivavam, com maior intensidade, os momentos de **Reflexão**. Nesse tema, estão reunidos momentos em que os participantes manifestaram Conhecimentos de Conteúdo com base nas reflexões que as tarefas propunham.

O último tema do primeiro grupo de dados foi chamado de **GeoGebra para Experimentar Ideias**, nele estão reunidos momentos em que os participantes se utilizavam das ferramentas do GeoGebra para verificar empiricamente ideias matemáticas relacionadas às atividades exploradas, de forma autônoma.

O tema **Papel do Professor**, pertencente ao segundo grupo de dados, reúne depoimentos dos alunos sobre a mudança do papel do professor frente às transformações causadas pelas tecnologias digitais. Ainda estão reunidos momentos em que os participantes indicam dificuldades dos professores nessa integração e o que eles consideram necessário para isso.

Os participantes também fizeram consideração acerca da **Estrutura das Escolas**. Nesse tema, os participantes relataram sobre os obstáculos impostos à integração das tecnologias digitais no ensino, como a presença de questões burocráticas que afetam a autonomia do professor, como pouco espaço para tentar novas ideias, a existência de um currículo engessado e as avaliações externas. Também indicaram questões de infraestrutura, como falta de computadores e muitos alunos por turma. Além disso, discutiram possíveis soluções para tais problemas.

Com base na experiência que tiveram no curso, os participantes ainda discutiram questões relativas às potencialidades das tecnologias digitais para o ensino e para a aprendizagem. Para eles, a **Visualização** é a principal potencialidade do GeoGebra, que além de facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, têm capacidade de despertar o interesse do aluno para seu aprendizado.

Outra potencialidade indicada foi a **Construção do Conhecimento**. Os participantes consideraram o GeoGebra, por meio de uma perspectiva pedagógica transformadora, como potencializadora da construção do conhecimento. Nessa condição, segundo eles, o professor não transmitiria o conhecimento, mas auxiliaria o aluno na construção.

Por fim, os participantes apontaram a **Dinamicidade** das tecnologias digitais, que promovem uma interação maior do aluno com o objeto de estudo, podendo facilitar a aprendizagem e mobilizar o interesse do aluno; o que, segundo eles, por meio do ensino tradicional não ocorre.

Como conclusão da análise, observo que emergiu principalmente Conhecimentos Tecnológicos, de Conteúdo, Tecnológicos de Conteúdo, Tecnológicos Pedagógicos e Tecnológicos Pedagógicos de Conteúdo e conhecimentos relacionados ao contexto educacional que não são contemplados pelo modelo TPACK, conhecimentos esses também necessários à integração das tecnologias digitais no ensino. Além disso, observei que a articulação teórica Construcionismo-Conhecimentos Docentes se mostrou fundamental para a produção e para a análise dos dados, mas considero que a existência de outros elementos também tornou possível a harmonia dessas ideias, como a Geometria e o GeoGebra.

Assumindo o caráter formativo do curso de extensão universitária, ressalto que o Construcionismo se ocupou da perspectiva Pedagógica Tecnológica do curso. O GeoGebra se encarregou da perspectiva Tecnológica de Conteúdo. A Geometria, por sua vez, abordou a perspectiva de Conteúdo. Esses três elementos integrados fizeram com que o curso se desenvolvesse por meio de uma abordagem Tecnológica Pedagógica do Conteúdo.

O foco desta pesquisa não foi a prática docente, entretanto, acredito que um curso em que, além de exploração de atividades didático-pedagógicas, discussão sobre tecnologias digitais no ensino e desenvolvimento de atividades, houvesse a possibilidade de aplicação prática desses conhecimentos, esse seria um ambiente rico para investigação. Outros questionamentos surgiriam: que conhecimentos emergem na prática docente na integração das tecnologias digitais?; como se dá a prática docente em um ambiente de aprendizagem construcionista com o GeoGebra?.

Outra possibilidade de estudo futuro é a exploração de atividades e discussão das mesmas. Que conhecimentos docentes emergem nesse contexto? Se, ainda possível, obter professores em serviço como participantes: de que forma os conhecimentos da prática docente guiam os professores nessa discussão? Como os professores lidam com a ideia de uma aprendizagem construcionista frente à suas experiências docentes permeadas pelo ensino transmissivo?

Por fim, acredito que este estudo contribuiu com discussões sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria, a aprendizagem docente, a articulação teórica Construcionismo-TPACK e os conhecimentos docentes emergentes em um cenário composto por aspectos Tecnológicos, Pedagógicos e de Conteúdo. Assim, espero que as discussões aqui apresentadas

possam ser de utilidade para pesquisas futuras na área de formação docente para a integração de tecnologias no ensino. E que as ideias aqui discutidas sejam utilizadas em contextos educacionais de modo a incentivar transformações no ensino.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P. Educação Matemática na Era Digital. **Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 27, p. 14-28, 2011.
- ALMEIDA, M. E. B. Formação de professores para inserção do computador na escola: inter-relações entre percepções evidenciadas pelo uso do software CHIC. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 1-11, 2002.
- ALVES-MAZZOTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999.
- AMADO, N.; CARREIRA, S. Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de Matemática: diferenças na prática da sala de aula. In: CANAVARRO, A., MOREIRA, D.; ROCHA, M. (Org.) **Tecnologias e educação matemática**. Vieira de Leiria: SEM/SPCE, 2008. p. 276-299.
- ANDRADE, J. A. A.; NACARATO, A. M. Tendências didático-pedagógicas para o ensino de geometria. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu. **Anais...** Caxambu: ANPED, 2004.
- ARAÚJO, C. **Identificando Conhecimento Tecnológico, Pedagógico e de Conteúdo de professores de Matemática em formação ao utilizar recursos multimídia**. 2015. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.
- ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 31-52.
- ARRANZ, J. M.; LOSADA, R.; MORA, J. A.; SADA, M.. Realities from GeoGebra. **MSOR Connections**, Sheffield, v. 9, n.2, p. 17-23, 2010.
- BAIRRAL, M. A. Desenvolvendo-se criticamente em Matemática: a formação continuada em ambientes virtualizados. In: FIORENTINI, D. NACARATO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. Campinas: Musa, 2005. p. 49-67.
- BALDINI, L. A. F. **Elementos de uma comunidade de Prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de Matemática na utilização do software GeoGebra**. 2014. 221 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- BARROS, A. P. R. M. **Contribuições de um micromundo composto por recursos do GeoGebra e da coleção M³ para a aprendizagem do conceito de volume de pirâmide**. 2013. 184 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.
- BELEI, R. A.; GIMENIZ-PASCHOAL, S. R.; NASCIMENTO, E. N.; MATSUMONO, P. H. V. R. O uso de entrevista, observação e videogravação em pesquisa qualitativa, **Cadernos de Educação**, Pelotas, v. 30, p. 187- 99, jan./jun. 2008.
- BICUDO, I. **Os Elementos de Euclides**. Tradução. Rio Claro: Editora UNESP, 2009.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 111-124.
- BIELSCHOWSKY, C. E. Tecnologia da informação e comunicação das escolas públicas brasileiras: o

programa PROINFO integrado. **Revista e-curriculum**, São Paulo, v.5, n.1, p. 1-36, dez. 2009.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial 1/2011, p. 157-171, 2011. Editora UFPR.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria dos métodos. Tradução: ALVAREZ, M. J.; SANTOS, S. K.; BAPTISTA, T. M. Porto: Porto, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, visualization, and experimentation. New York: Springer Science, 2005.

BORGES, C.; TARDIF, M. Apresentação. **Educação & Sociedade**, Campinas, v. 22, n. 74, p. 11-26, 2001.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC/SEMTEC, 2000. 58 p.

BRASIL. **PCN+ Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002. 144 p.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 2ª versão. Brasília: MEC, 2016. 396 p.

CARVALHO, S. F. **Formação continuada em serviço e o uso da lousa digital em aulas de Matemática**: ações e reflexões de um grupo de professores. 2014. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

CIBOTTO, R. A. G. **O uso pedagógico das tecnologias da informação e comunicação na formação de professores**: uma experiência na Licenciatura em Matemática. 2015. 272 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

COELHO, M. I.; SARAIVA, M. J. Tecnologias no Ensino/Aprendizagem da Geometria. In: ENCONTRO DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2000, Fundão. **Atas...** Fundão: 2000. p. 35-60.

CORREIA, A. A. P. **Literacia digital e aprendizagem informal em modelo de web participativa**. 2009. 96 f. Dissertação (Mestrado em Estudos de Informação e Bibliotecas Digitais) – Instituto Universitário de Lisboa, Lisboa, 2009.

COSTA, J. J. M. Literacia ou literacias digitais? Uma reflexão no final da primeira década do século XXI. **Revista Portuguesa de Pedagogia**, Coimbra, v. Extra-Série, p. 171-180, 2011.

CYSNEIROS, P. G. Novas tecnologias na sala de aula: melhoria do ensino ou inovação conservadora? **Informática Educativa**, Bogotá, v. 12, n. 1, p. 11-24, 1999.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 17. ed. Campinas: Papirus: 1996.

DANTAS, E. A. S. **O processo de integração de recursos tecnológicos à prática docente de um professor de matemática no ensino de funções polinomiais**. 2015. 119 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

DE VILLIERS, M. The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some personal reflections. In: KING, J. R.; SCHATTSCHEIDER, D. (Ed.). **Geometry turned on!** Dynamic software in learning, teaching and research. Washington: The Mathematics Association of America, 1997. p. 15-24.

DE VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n.62, p.31-36, mar/abr. 2001.

DEITEL, H. M.; NIETO, T. R.; DEITEL, P. J. **Internet & World Wide Web**: how to program. 2. ed. Harlow: Pearson, 2002.

DEWEY, J. **How We Think**. Nova Iorque: D. C. Heath and Company, 1910.

DIKOVIĆ, L. Applications GeoGebra into Teaching Some Topics of Mathematics at the College Level. **ComSIS**, Novi Sad, v. 6, n. 2, p. 191-203, dez. 2009.

ERDOGAN, A.; SAHIN, I. Relationship between math teacher candidates' Technological Pedagogical and Content Knowledge (TPACK) and achievement levels. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, Amsterdam, v. 2, n. 2, p. 2707-2711, jan. 2010.

EVES, H. **História da Geometria**. Tradução de H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FIGUEIREDO, F. D. C. **Alguns Problemas em Geometrias de Curvas**. 2005. 108 f. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.

FIORENTINI, D. **Investigação em Educação Matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Auckland, v. 24, n. 2, p. 139-162, 1993.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2013.

GARCIA, M. F.; RABELO, D. F.; SILVA, D.; AMARAL, S. F. Novas competências docentes frente às tecnologias digitais interativas. **Teoria e Prática da Educação**, Maringá, v. 14, n. 1, p. 79-87, jan./abr. 2011.

GARRY, T. *Geometer's Sketchpad* in the Classroom. In: KING, J. R.; SCHATTSCHEIDER, D. (Ed.). **Geometry turned on!** Dynamic software in learning, teaching and research. Washington: The Mathematics Association of America, 1997. p. 55-62.

GATTI, B. A.; BARRETO, E. S. S.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Políticas docentes no Brasil**: um estado da arte. Brasília: UNESCO, 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

- GOMES, M. O. Residência educacional. In: SILVA JUNIOR, C. A.; GATTI, B. A.; MIZUKAMI, M. G. N.; PAGOTTO, M. D. S.; SPAZZIANI, M. L. (Org.). **Por uma revolução no campo de formação de professores**. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2015. p. 203-217.
- GONÇALVES, T. O; FIORENTINI, D. Formação e desenvolvimento profissional de docentes que formam matematicamente futuros professores. In: FIORENTINI, D. NACARATO, A. M. (Org.). **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. Campinas: Musa, 2005. p. 68-88.
- GONSALVES, E. P. **Iniciação à pesquisa científica**. 4. ed. Campinas: Alínea, 2005.
- GONSETH, F. **La Géométrie et le problème de l'espace**. Neuchatel: Griffon, 1945.
- GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 6., 1996, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: 1996. p. 1-13.
- GRAVINA, M. A; BÚRIGO, E. Z.; BASSO, M. V. A.; GARCIA, V. C. V.. **Matemática, mídias digitais e didática**: tripé para formação de professores de matemática. Porto Alegre: Evangraf, 2012.
- HARRIS, J. B.; MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Teachers' Technological Pedagogical Content Knowledge: Curriculum-based Technology Integration Reframed. **Journal of Research on Technology in Education**, Londres, v. 41, n. 4, p. 393-416, 2009.
- HOHENWARTER, M; JARVIS, D.; LAVICZA, Z. Linking Geometry, Algebra, and Mathematics Teachers: GeoGebra *software* and the establishment of the international GeoGebra institute. **International Journal for Technology in Mathematics Education**, Plymouth, v.16, n. 2, p. 83-86, 2008.
- HOHENWARTER, M; LAVICZA, Z. Mathematics teacher development with ICT: towards an international GeoGebra institute. In: KÜCHEMANN, D. **Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics**. Northampton: BSRLM, 2007. p. 49-54.
- HÖLZL, R. How does 'dragging' affect the learning of geometry. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, Dordrecht, v. 1, n. 2, p. 169-187, 1996.
- IMBERNÓN, F. **Formação docente e profissional**: formar-se para a mudança e a incerteza. Tradução de Silvana Cobucci Leite. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- IMBERNÓN, F. Novos desafios da docência no século XXI: a necessidade de uma nova formação docente. In: SILVA JUNIOR, C. A.; GATTI, B. A.; MIZUKAMI, M. G. N.; PAGOTTO, M. D. S.; SPAZZIANI, M. L. (Org.). **Por uma revolução no campo de formação de professores**. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2015. p. 75-82.
- JAVARONI, S. L.; ZAMPIERI, M. T. O Uso das TIC nas Práticas dos Professores de Matemática da Rede Básica de Ensino: o Projeto Mapeamento e seus Desdobramentos. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 53, p. 998-1022, dez. 2015.
- KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Campinas: Papirus, 2003.
- KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: o novo ritmo da informação**. 6. ed. Campinas: Papirus, 2010.
- KING, J. R.; SCHATTSCHNEIDER, D. Making Geometry Dynamic. In: KING, J. R.; SCHATTSCHNEIDER, D. (Ed.). **Geometry turned on!** Dynamic software in learning, teaching and research. Washington: The Mathematics Association of America, 1997. p. ix-xiv.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. What happens when teachers design educational technology? the development of Technological Pedagogical Content Knowledge. **Journal of Educational Computing Research**, Nova Hampshire, v. 32, n. 2, p. 131-152, 2005.

KOEHLER, M. J.; MISHRA, P. What Is Technological Pedagogical Content Knowledge? **Contemporary Issues in Technology and Teacher Education**, Charlottesville, v. 9, n. 1, p. 60-70, 2009.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Metodologia do trabalho científico**: procedimentos básicos, pesquisa bibliográfica, projeto de relatório, publicações e trabalhos científicos. 4. ed. São Paulo: Atlas, 1992.

LOBO, J. S.; BAYER, A. O Ensino de Geometria no Ensino Fundamental. **ACTA SCIENTIAE, Canoas**, v.6, n.1, p. 19-26 jan./jun. 2004.

LOPES, R. P. **Formação para Uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação nas Licenciaturas das Universidades Estaduais Paulistas**. 2010. 224 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente. 2010.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 4, p. 3-13, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2015.

MALIK, D. S. **C++ Programming: From Problem Analysis to Program Design**. 6 edition ed. Boston, MA: Course Technology, 2012.

MALTEMPI, M. V. **Construção de páginas web**: depuração e especificação de um ambiente de aprendizagem. 2000. 197 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

MALTEMPI, M. V. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004. p. 264-282.

MALTEMPI, M. V.; ROSA, M. Learning vortex, games and technologies: a new approach to the teaching of Mathematics. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 10., 2004, Copenhagen. **Anais...** Copenhagen: 2004, p. 1-5.

MARCELO GARCÍA, C. **Formação de professores**: para uma mudança educativa. Tradução de Isabel Narciso. Porto: Porto, 1999.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Metodologia Científica**: ciência e conhecimento científico, métodos científicos, teoria, hipóteses e variáveis, metodologia jurídica. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Técnicas de pesquisa**: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MARINHO, F. C. V. **Saberes docentes para promoção de aprendizagem em Ciências e Matemática a partir do desenvolvimento de jogos digitais**. 2014. 367 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Saúde) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

- MARTINS, J. C. Vygotsky e o papel das interações sociais na sala de aula: reconhecer e desvendar o mundo. **Série Idéias**, São Paulo, v. 28, p. 111-122, 1997.
- MERCADO, L. P. L. Formação docente e novas tecnologias. In: CONGRESSO RIBIE, 4., 1998. **Anais...** Brasília: 1998. p. 1-8.
- MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, Campinas, v. 3, n. 1, p. 39-54, mar. 1992.
- MIORIM, M. A.; FIORENTINI, D. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM-SP**, São Paulo, v. 4, n. 7, p. 5-10, 1990.
- MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, Nova Iorque, v. 108, n.6, p.1017-1054, Jun. 2006.
- MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Introducing Technological Pedagogical Content Knowledge. In: ANNUAL MEETING OF THE AMERICAN EDUCATIONAL RESEARCH ASSOCIATION, 2008, Nova Iorque. **Anais...** Nova Iorque: 2008, p. 1-16.
- MIZUKAMI, M. G. N. Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contexto e práticas pedagógicas. In: NACARATO, A. M.; PAIVA, M. A. V. (Org.) **A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006. p. 213-231.
- MORROW, J. Dynamic Visualization from Middle School through College. In: KING, J. R.; SCHATTSCHEIDER, D. (Ed.). **Geometry turned on!** Dynamic software in learning, teaching and research. Washington: The Mathematics Association of America, 1997. p. 47-54.
- MOTTA-ROTH, D.; HENDGES, G. R.; AMORETTI, E. C.; KLOSS, M. O tradicional e o novo: Análise de artigos acadêmicos eletrônicos. **Intercâmbio**, São Paulo, v. 9, p. 29-38, 2000.
- NACARATO, A. M. **Educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação: currículo em ação de um grupo de professoras ao aprender ensinando geometria**. 2000. 344 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.
- OLIVEIRA, M. M. **Como fazer pesquisa qualitativa**. Petrópolis: Vozes, 2007.
- PADILHA, W. R. **Apropriação das tecnologias digitais móveis para explorar funções polinomiais do 1º grau**. 2015. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.
- PAIS, L.C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul./dez., 1996.
- PAPERT, S. **Mindstorms**: children, computers and powerful ideas. Nova Iorque: Basic Books, 1980.
- PAPERT, S. **Constructionism**: a new opportunity for elementary science education. A proposal to the National Science Foundation. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, Media Laboratory, Epistemology and Learning Group, 1986.
- PAPERT, S. **The children's machine**: rethinking school in the age of the computer. Nova Iorque: BasicBooks, 1993.
- PATTON, M. K. **Qualitative research & evaluation methods**. 3. ed. London: Sage, 2002.
- PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, n. 1, p. 8-17, Campinas, 1993.

PERALTA, H.; COSTA, F. A. Competência e confiança dos professores no uso das TIC. Síntese de um estudo internacional. **Revista de Ciências da Educação**, Lisboa, n. 3, p. 77-86, mai./ago. 2007.

PEREIRA, P. S.; ANDRADE, S. V. R.; MIOLA, A. F. S. A formação continuada de professores de Matemática na região centro-oeste: um mapeamento das produções acadêmicas (2005-2011). **Olh@res**, Guarulhos, v. 4, n. 1, p. 287-304, maio 2016.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 22, p. 405-435, 2013.

PRADO, M. A.; ALLEVATO, N. S. G. O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 12, n. 1, p. 24-42, 2012.

PRADO, M. E. B. B. **O uso do computador no curso de formação de professor**: um enfoque reflexivo da prática pedagógica. 1996. 189 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996.

PRADO, M. E. B. B. (Re)visitando o construcionismo para a formação do professor reflexivo. In: CONGRESSO RIBIE, 4., 1998, Brasília. **Anais...** Brasília: 1998. p. 1-12.

PRADO, M. E. B. B. **Educação a Distância e Formação do Professor**: redimensionando concepções de aprendizagem. 2003. 294 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

PUPO, R. A. **O uso das tecnologias digitais na formação continuada do professor de Matemática**. 2013. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante Anhanguera, São Paulo, 2013.

RICHIT, A. **Projetos em Geometria Analítica usando software de geometria dinâmica**: repensando a formação inicial docente em Matemática. 2005. 171 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

RICHIT, A. **Formação de professores de Matemática da Educação Superior e as Tecnologias Digitais**: aspectos do conhecimento revelados no contexto de uma comunidade de prática *online*. 2015. 597 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2015.

ROCHA, A. K. O. **A programação de computadores como meio para integrar diferentes conhecimentos**: uma experiência com professores de Matemática. 2015. 238 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

ROSA, M. **Role Playing Game Eletrônico**: uma tecnologia lúdica para aprender e ensinar Matemática. 2004. 107 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

RUDIO, F. V. **Introdução ao projeto de pesquisa científica**. 34. ed. Petrópolis: Vozes, 2007.

SANTOS, E. T. Novas tecnologias no ensino de desenho e geometria. In: ENCONTRO REGIONAL DO VALE DO PARAÍBA DE PROFISSIONAIS DO ENSINO DA ÁREA DE EXPRESSÃO GRÁFICA, 1., 2000. **Anais...** Lorena: 2000. p. 71-81.

SÃO PAULO. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas Tecnologias. 1. ed. São Paulo: SE, 2011. 74 p.

SARTI, L. R. **Uso de TIC por Professores em Aulas do Ensino Médio e suas Percepções Sobre o Ensino e a Aprendizagem dos Alunos em Física, Química, Biologia e Matemática**. 2014. 93 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2014.

SCUCUGLIA, R. Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 49, p. 950-973, ago. 2014.

SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. Performance Matemática: Tecnologias Digitais e Artes na escola pública de Ensino Fundamental. In: BORBA, C. M.; CHIARI, A. (Org.) **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013. p. 325-364.

SHULMAN, L. S. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, Whashington, v. 15, n. 2, p. 4-14, Fev. 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, Cambridge, v. 57, n. 1, p. 1-27, 1987.

SILVA, L. F. **As Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação Inicial de Professores de Matemática em Recife e Região Metropolitana**. 2011. 99 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 2011.

SILVA, M. J. **O uso da lousa digital e um estudo sobre circunferência com alunos do 3º ano do Ensino Médio**. 2015. 106 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

SZYMANSKI, H.; ALMEIDA, L. R.; PRANDINI, R. C. A. R. Perspectivas para a análise de entrevistas. In: SZYMANSKI, H.; ALMEIDA, L. R.; PRANDINI, R. C. A. R. (Orgs.). **A entrevista na pesquisa em educação: a prática reflexiva**. 2. ed. Brasília: Liber Livro, 2008. p. 63-86.

TEDESCO, J. C. O compromisso docente com a justiça social e o conhecimento. In: SILVA JUNIOR, C. A.; GATTI, B. A.; MIZUKAMI, M. G. N.; PAGOTTO, M. D. S.; SPAZZIANI, M. L. (Org.). **Por uma revolução no campo de formação de professores**. 1. ed. São Paulo: Editora Unesp, 2015. p. 119-131.

TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 2012.

VALENTE, J. A. Logo: mais do que uma linguagem de programação. In: VALENTE, J. A. (Org.). **Liberando a mente: Computadores na educação especial**. Campinas: Gráfica Central da UNICAMP, 1991. p. 32-43.

VALENTE, J. A. A telepresença na formação de professores da área de informática em educação: implantando o construcionismo contextualizado. In: CONGRESSO RIBIE, 4., 1998, Brasília. **Anais...** Brasília: 1998, p. 1-16.

VALENTE, J. A. Informática na Educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In: Valente, J. A. (Org.). **O Computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: Unicamp/Nied, 1999a. p. 11-30.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de softwares usados na educação. In: VALENTE, J. A. (Org.). **Computadores na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999b. p. 71-87.

VALENTE, J. A. A Espiral da Aprendizagem e as tecnologias da informação e comunicação: repensando conceitos. In: JOLY, M. C. (Ed.). **Tecnologia no ensino: implicações para a aprendizagem**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 2002. p. 15-37.

VALENTE, J. A. **A Espiral da Espiral de Aprendizagem**: o processo de compreensão do papel das tecnologias de informação e comunicação na educação. 2005. 238 f. Tese (Livre Docência) – Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2005a.

VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: O papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: SEED - MEC. **Integração das Tecnologias na Educação**. Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2005b. p. 22-31.

VALENTE, J. A.; ALMEIDA, F. J. **Visão analítica da Informática na Educação no Brasil**: a questão da formação do professor. Revista Brasileira de Informática na Educação, Rio de Janeiro, n. 1, p. 1- 28, 1997.

VERMIEIRO, J. L. **Uso de laptops educacionais nas aulas de matemática em escolas públicas de Mato Grosso do Sul**. 2014. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

VIEIRA, C. R. **Reinventando a Geometria no Ensino Médio**: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de Geometria Dinâmica e a teoria de Van Hiele. 2010. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

VYGOTSKY, L. S. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1987a.

VYGOTSKY, L. S. **Thinking and Speech**. Nova Iorque: Springer Science & Business Media, 1987b.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Ed.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics**. Washington: The Mathematics Association of America, 1991. p. 1-7.

ZULATTO, R.B.A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica**: suas características e perspectivas. 2002. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

APÊNDICES

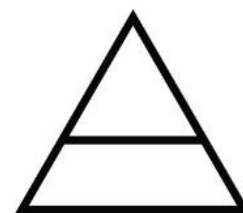
APÊNDICE A

Roteiro das atividades exploradas no curso de extensão universitária.

Atividade 1: Triângulo Equilátero e Tetraedro Regular

Com relação a figura ao lado, suponha:

- A figura é um triângulo equilátero;
- Há um segmento de reta interno paralelo a base do triângulo.



Parte 1: Construa um triângulo equilátero utilizando o GeoGebra

1. Clique na aba “Polígono”  e selecione “Polígono Regular” . Construa dois vértices do triângulo e, em seguida, digite 3 como número de vértices do polígono regular.
2. Na aba “Ângulo” , selecione a ferramenta “Área”  e clique sobre o triângulo, dessa forma, será exibido o valor da área do triângulo.
3. Com a ferramenta “Mover”  arraste um dos vértices do triângulo. Observe que a figura não deixa de ser um triângulo equilátero.
4. **De que outras maneiras diferentes podemos construir um triângulo equilátero utilizando o GeoGebra?**

Parte 2: Construa o segmento de reta interno paralelo a base

1. Clique na aba “Ponto”  e selecione a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” , em seguida, clique em um dos lados do triângulo, construindo seu ponto médio.
2. Construa um segmento ligando o ponto médio ao vértice oposto, para isso clique na aba “Reta”  e selecione a ferramenta “Segmento” . Tal segmento é a **altura do triângulo equilátero**.
3. Selecione a ferramenta “Controle Deslizante”  e clique em algum ponto distante do triângulo. Na janela “Controle Deslizante”, digite **h** em “Nome”; em “Intervalo”, digite **0** (zero) em “min” e, em “max”, digite a letra correspondente ao comprimento da **altura do triângulo**; em “Incremento” digite **0.05**.

4. Na aba “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” , selecione a ferramenta “Círculo dados Centro e Raio” , clique no ponto médio construído e digite **h** em raio.
5. Clique na aba “Ponto” , e selecione a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , construindo o ponto de intersecção da **altura** e da circunferência construída.
6. Clique na aba “Reta Perpendicular” , e selecione a ferramenta “Reta Paralela” . Clique no lado do triângulo do qual havia construído o ponto médio e clique no ponto de intersecção da **altura** e da circunferência, construindo uma reta paralela à base do triângulo equilátero.
7. Clique na aba “Ponto” , e selecione a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , construindo os pontos de intersecção da reta paralela à base com os outros lados do triângulo.
8. Oculte o ponto médio do lado, o ponto de intersecção da altura com a circunferência, a altura, a circunferência e a reta paralela à base ao clicar sobre o ícone azul: , referente a cada objeto na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. O ícone ficará branco: ; sempre que for necessário ocultar ou expor um objeto é desta forma que se deve proceder.
9. Clique na aba “Reta” , e selecione a ferramenta “Segmento” , ligando os pontos de intersecção da reta paralela à base com os outros lados do triângulo, construindo o segmento paralelo à base.
10. O segmento paralelo à base divide o triângulo em um triângulo menor e um trapézio.
Com a ferramenta “Polígono” , construa tais polígonos.
11. Na aba “Ângulo” , selecione a ferramenta “Área”  e clique sobre o triângulo menor e sobre o trapézio, fazendo exibir o valor da área dos polígonos.

Perguntas

- Se o segmento de reta interno estiver interceptando o ponto médio da altura do triângulo, qual a relação entre as áreas do triângulo menor do trapézio?
- Em que posição o segmento interno deve interceptar a altura do triângulo inicial para que a área dos dois polígonos tenha o mesmo valor?

Parte 3: A partir do triângulo original construa um tetraedro regular.

1. Na guia “Exibir”, clique em “Janela de Visualização 3D” .
2. Clique na aba “Pirâmide”  e selecione “Tetraedro Regular” , em seguida clique sobre dois vértices do triângulo em sentido anti-horário, construindo o tetraedro regular.
3. Na aba “Ângulo” , selecione a ferramenta “Volume”  e clique sobre tetraedro, fazendo exibir o valor do seu volume.

Parte 4: Construa um plano paralelo a base do tetraedro.

1. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” , construa uma reta perpendicular ao plano em que o triângulo inicial se encontra, passando pelo vértice superior do tetraedro; para isso clique no vértice e, em seguida, no plano.
2. Clique na aba “Ponto”  e selecione a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , construindo o ponto de intersecção da reta perpendicular com o plano; clicando na reta e no plano.
3. Oculte a reta construída, Clique na aba “Reta”  e selecione a ferramenta “ Segmento” , ligando os pontos de intersecção ao vértice superior do tetraedro, construindo a **altura do tetraedro**.
4. Selecione a ferramenta “Controle Deslizante”  e clique em algum ponto distante da construção Na janela “Controle Deslizante”, digite **H** em “Nome”; em “Intervalo”, digite **0** (zero) em “min” e, em “max”, digite a letra correspondente ao comprimento da **altura do tetraedro**; em “Incremento” digite **0.05**.
5. Clique na aba “Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos”  e selecione “Esfera dados Centro e Raio” . Clique no ponto de intersecção da reta perpendicular com o plano e digite **H** como valor do raio na janela que aparece.
6. Clique na aba “Ponto”  e selecione a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” , construindo o ponto de intersecção da altura do tetraedro com a esfera construída. Oculte a esfera e a altura do tetraedro.

7. Clique na aba “Plano por três pontos”  e selecione a ferramenta “Plano Paralelo” . Clique sobre o plano e sobre o ponto de intersecção da esfera com a altura do tetraedro, construindo o plano paralelo a base do tetraedro.
8. Com a ferramenta “Intersecção de Duas Superfícies” , clique sobre o plano paralelo e sobre as faces do tetraedro regular que ele intersecta, fazendo com que sejam exibidos os segmentos de sua intersecção.
9. Com a ferramenta “Pirâmide” , construa a pirâmide cuja base é a intersecção do plano paralelo com as faces do tetraedro regular e o vértice superior coincide com o vértice do tetraedro. Na aba “Ângulo” , selecione a ferramenta “Volume”  e clique sobre a pirâmide, fazendo exibir o valor do seu volume.

Perguntas:

- Se o plano construído estiver no ponto médio da altura do tetraedro regular, qual a relação entre os volumes da pirâmide e do tronco?
- Em que altura o plano deve estar situado para que os volumes dos sólidos gerados sejam iguais?

Parte 5: Construa uma animação .gif para cada uma das construções elaboradas.

Triângulo Equilátero

1. Anime o controle deslizante **h** da construção: Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *Animar*.
2. No *menu* do GeoGebra, selecione a opção *Arquivo* → *Exportar* → *Janela de Visualização como GIF Animado*.
3. Em *Controle Deslizante*, selecione **h**.
4. Configure o parâmetro *Tempo entre Quadrados* em 1 ms.
5. Selecione a opção *Repetição Automática da Repetição*.
6. Salve o arquivo .gif no local desejado.

Tetraedro Regular

1. Anime o controle deslizante **H** da construção: Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e selecione a opção *Animar*.

2. Feche a Janela de Visualização.
3. No *menu* do GeoGebra, selecione a opção *Arquivo* → *Exportar* → *Janela de Visualização como GIF Animado*.
4. Em *Controle Deslizante*, selecione **H**.
5. Configure o parâmetro *Tempo entre Quadrados* em 1 ms.
6. Selecione a opção *Repetição Automática da Repetição*.
7. Salve o arquivo .gif no local desejado.

Parte 6: Compartilhe suas animações no Facebook

1. Acesse <http://giphy.com/>
2. Crie uma conta usando seu perfil do Facebook
3. Clique sobre a opção **UPLOAD**
4. Arraste o arquivo .gif sobre a opção **BROWSE YOUR GIF FILES**
5. Aguarde o processamento e compartilhe no perfil ou grupo do Facebook desejado por meio do slot **SHARE**.

Atividade 2: Reta de Euler e Circunferência de Nove Pontos

Parte 1

1. Construa um triângulo utilizando a ferramenta “Polígono” .
2. Encontre os pontos médios de cada lado do triângulo utilizando a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”  (Encontra-se na aba “Ponto” ). Para isso é necessário clicar nos lados do triângulo ou nos seus vértices, dois a dois.
3. Com a ferramenta “Segmento”  (Encontra-se na aba “Reta” ) , construa os segmentos que ligam os pontos médios aos vértices opostos. Estes segmentos construídos são chamados **medianas** do triângulo.
4. **O que é observado em relação às medianas encontradas? O que é observado após arrastar os vértices do triângulo?**
5. O ponto de encontro das medianas é o **baricentro** do triângulo. Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”  (Encontra-se na aba “Ponto” ) , construa tal ponto.

Parte 2

1. Oculte os pontos médios, as medianas e o baricentro, ao clicar sobre o ícone azul: , referente a cada objeto na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela. O ícone ficará branco: ; sempre que for necessário fazer ocultar ou exibir um objeto é desta forma que se deve proceder.
2. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” , clique em um dos vértices e no segmento oposto. Faça isso para os demais vértices; construindo as **alturas relativas** do triângulo.
3. **O que é observado em relação às alturas relativas do triângulo? O que acontece quando você arrasta os vértices? Qual a relação do que é observado em relação às alturas relativas e o que foi observado em relação às medianas?**
4. O ponto de encontro das alturas é o **ortocentro** do triângulo. Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”  (Encontra-se na aba “Ponto” ) , construa tal ponto.

Parte 3

1. Oculte as alturas relativas e o ortocentro.
2. Exiba novamente os pontos médios dos lados do triângulo.
3. Com a ferramenta “Reta Perpendicular” , clique em cada ponto médio e no lado que ele se encontra; construindo as **mediatrizes** do triângulo.
4. **O que é observado em relação às mediatrizes? O que acontece quando você arrasta os vértices? Qual a relação do que foi observado com a construção das medianas e alturas relativas e o que é observado com a construção das mediatrizes?**
5. O ponto de encontro das mediatrizes é o **circuncentro** do triângulo. Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”  (Encontra-se na aba “Ponto” ) , construa tal ponto.
6. Com a ferramenta “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos”  clique no circuncentro e num dos vértices do triângulo, construindo uma circunferência.
7. Arraste os vértices do triângulo e observe o que acontece.
8. **O que podemos inferir sobre o ponto notável “circuncentro” do triângulo?**

Parte 4

1. **Após construir os pontos notáveis baricentro, ortocentro e circuncentro, você acredita que estes pontos estejam relacionados? Por quê?**

2. Oculte os pontos médios, as mediatrizes e a circunferência. Exiba os outros pontos notáveis baricentro e ortocentro; de modo que na sua tela esteja o triângulo e os pontos baricentro, ortocentro e circuncentro.
3. **Observando os pontos notáveis construídos, você consegue perceber a relação entre eles? Explique. Sua previsão estava correta?**
4. Os três pontos notáveis são colineares. Essa reta é conhecida como a **Reta de Euler**.

Construa a Reta de Euler, com a ferramenta “Reta” , ao clicar em dois dos pontos notáveis.

Parte 5

1. Oculte a Reta de Euler e exiba as alturas relativas do triângulo.
2. Com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”  (Encontra-se na aba “Ponto” ) , construa os pontos de intersecção das alturas relativas com os lados do triângulo.
3. Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”  (Encontra-se na aba “Ponto” ) , encontre os pontos médios entre o ortocentro e os vértices do triângulo, nas alturas relativas.
4. Oculte as alturas relativas.
5. Exiba os pontos médios dos lados do triângulo.
6. Com a ferramenta “Círculo definido por Três Pontos”  (Encontra-se na aba “Círculo dados Centro e Um de seus Pontos” ) , ligue três pontos: um dos pontos de intersecção das alturas relativas com os lados; um dos pontos médios dos lados do triângulo; e um dos pontos médios entre o ortocentro e os vértices, construindo uma circunferência.
7. **O que é observado em relação a esses nove pontos?**
8. A circunferência encontrada é chamada **Circunferência de Nove Pontos**.
9. **Você acredita que a Circunferência de Nove Pontos e a Reta de Euler tem alguma relação? Por quê?**
10. Exiba a Reta de Euler.
11. Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro”  (Encontra-se na aba “Ponto” ) , clique na Circunferência de Nove Pontos, fazendo aparecer seu centro.
12. **Qual a relação entre a Circunferência de Nove Pontos e a reta de Euler?**

Bibliografia

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A Utilização do Geogebra na Demonstração Matemática em Sala de Aula: o estudo da reta de Euler. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 29, n. 52, p. 637-657, ago. 2015.

BRAZ, A. P. N.; BRAZ, R. A. F. S. O uso do Geogebra nas visualizações gráficas de teoremas. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13. 2011, Recife, **Anais...** Recife: 2011.

FELÍCIO, A. C. **Determinação dos Pontos Notáveis de um Triângulo Utilizando o Software Geogebra**. 2013. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de São Carlos. São Carlos: 2013.

Atividade 3: Diagonais do Cubo

O primeiro problema matemático apresentado por Polya (1995) no livro *A Arte de Resolver Problemas* pode ser enunciado da seguinte maneira:

- calcule o valor da medida da diagonal de um prisma no qual as medidas das arestas são a , b e c .

Neste caso, utilizando o Teorema de Pitágoras, é possível calcular, primeiramente, o valor da medida da diagonal do retângulo que forma a base do prisma: $x = \sqrt{a^2 + b^2}$. Em seguida, novamente utilizando o Teorema de Pitágoras, pode-se calcular a medida desejada: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

A resolução de problemas é conceituada com base em 4 fases. Além da compreensão do problema, elaboração e aplicação de um plano ou estratégia de resolução, a última fase diz respeito à revisão ou análise retrospectiva do problema e sua resolução. Uma das possibilidades de atuação nessa fase se refere a extensão do problema proposto a novos problemas. Nesse sentido, recordamos de um dos problemas apresentados por Santos (2006), o qual propomos de modo adaptado como atividade.

Encaminhamentos:

1. Construção

- a) Na janela de visualização 2D construa um “Controle Deslizante”  com as seguintes condições: nome = a , intervalo = min: 1 e max: 4, incremento = 0.5; mude para a janela animação e insira velocidade = 5.

- b) Com a ferramenta “Ponto”  insira o ponto A na origem (0,0) do plano cartesiano. Na caixa de entrada digite o ponto B da seguinte forma: $B=(a,0)$.
- c) No menu exibir abra a janela de visualização 3D, clique em “Pirâmide”  e selecione “Cubo” . Utilize os pontos A e B para criar um Cubo.
- Obs: Na janela de álgebra, à esquerda da tela, na nomeação “quadrilátero” oculte as faces do cubo clicando nas bolinhas azuis.
- d) Com a ferramenta “Segmento” , trace duas diagonais opostas do Cubo. E com a Ferramenta “Ângulo”  explore o ângulo entre estas diagonais.
- e) Clique com o botão direito sobre o controle deslizante e ative a opção “Animar”.
- f) O que acontece com o ângulo entre as diagonais enquanto variamos o lado do cubo? Por que motivo você imagina que isso acontece.

2. Criar um .gif da atividade

- a) Deixe o controle deslizante sendo animado.
- b) Vá até o menu “Arquivo” e selecione Exportar/Janela de Visualização com GIF Animado. Na opção de “Tempo entre Quadros” retire o 500 e digite 1. Ative a caixa de Repetição Automática da Animação. Salve o .gif onde desejar, aguarde o .gif ser gerado e abra o arquivo.

Referências Bibliográficas

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro. Interciência, 1995.

SANTOS, C. **Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem**: o caso da geometria euclidiana espacial. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

Atividade 4: Construções Geométricas no Espaço

1. Construa um poliedro de acordo com suas propriedades geométricas.

- a) Construir um triângulo regular (na janela de visualização 2D) utilizando a ferramenta “Polígono Regular” .

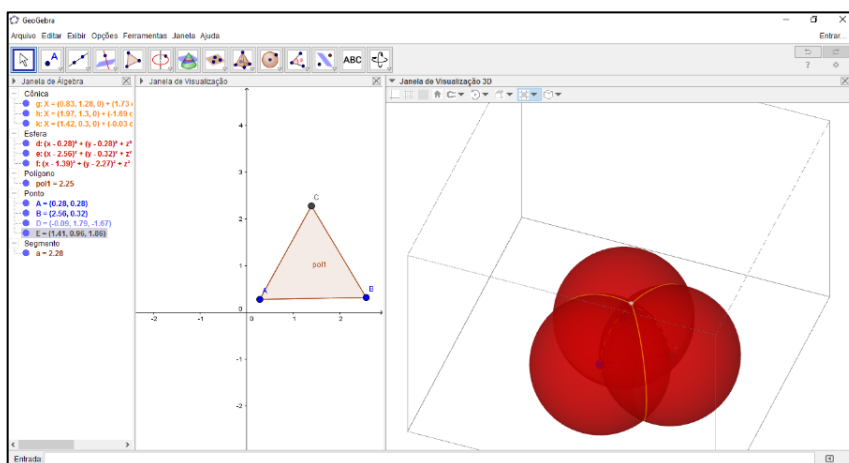
- b) Na janela de visualização 3D (menu exibir), construa 3 esferas com centro nos três vértices do triângulo e raio igual ao tamanho do lado do triângulo (use um vértice como centro e outro como ponto qualquer das esferas). Utilize a ferramenta “Esfera dados Centro e Um de Seus Pontos”



- c) Marque as interseções das esferas duas a duas utilizando o comando “Interseção de Duas Superfícies”



e em seguida marque um e apenas um ponto comum destas três interseções utilizando a ferramenta “Ponto” ou “Interseção de Dois Objetos”. Sua construção deve se aproximar do que é mostrado na figura abaixo:



Obs: utilize a janela de álgebra para ocultar as esferas e também as circunferências de interseção para ter uma melhor vista.

- d) Ligue os vértices do Triângulo até o ponto gerado na interseção utilizando segmentos de reta.
- e) Qual o poliedro gerado? Justifique sua resposta.
- f) Os softwares de Geometria dinâmica “permitem que construções geométricas possam ser arrastadas pela tela mantendo-se os vínculos estabelecidos durante a realização da construção” (ZULATTO, 2003). Nesse sentido, um quadrado, construído por suas propriedades geométricas num software com esta característica, não deixará de ser um quadrado quando for arrastado por um de seus pontos móveis. Com base nessa ideia, pode-se dizer que os procedimentos realizados nesta atividade caracterizam uma construção geométrica?
2. Se utilizarmos um quadrado como figura inicial, marcando a interseção superior e inferior das esferas (que serão quatro, agora) qual poliedro geramos? Este poliedro é regular? Justifique.

3. Utilize polígonos regulares, esferas, retas perpendiculares e paralelas, planos e o que mais quiser para construir um Cubo e um Prisma Reto ou oblíquo de base qualquer segundo suas propriedades. Especifique o que utilizou para suas construções.

Referências Bibliográficas

ZULATTO, R. B. A. O perfil dos professores de matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica em suas aulas. In: VALENTE, V. R. (Org.) **Anais do II SIPEM**. São Paulo. SBEM, 2003.

Atividade 5: Interseção entre Plano e Poliedros

- 1) Clique no menu “Exibir” e então em “Janela de visualização 3D”. Construa uma pirâmide da seguinte maneira:

a) Na janela 2D crie os pontos $A=(-1,0)$ e $B=(1,0)$.

b) Na janela 3D clique em “Pirâmide”  e depois em “Cubo” . Construa o cubo clicando em B e depois em A.

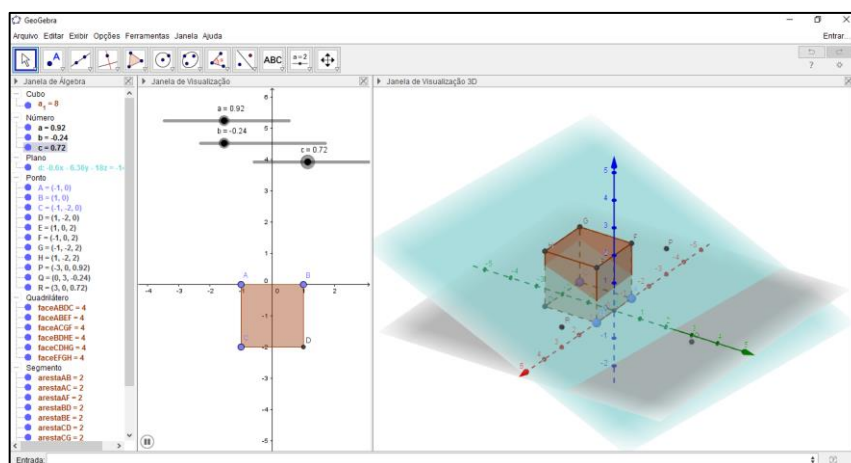
- 2) Crie um plano da seguinte maneira:

a) Construa três controles deslizantes, com a ferramenta “Controle Deslizante” , com os nomes a, b e c, intervalo entre 0 e 3 e na janela animação altere a velocidade para 3.

b) Na caixa de entrada insira os seguintes pontos $P = (-3,0,a)$, $Q = (0,3,b)$ e $R = (3,0,c)$.

c) Utilize a ferramenta “Plano por 3 pontos”  e crie um plano clicando em P,Q e R que devem estar posicionados sobre as retas. Clique com o botão direito sobre cada controle e ative a função “Animar”.

Sua construção deve se parecer com o mostrado na figura abaixo:



- 3) Selecione a ferramenta “Interseção de Duas Superfícies”  e na janela de álgebra clique na pirâmide e no plano. O que você observa? Indique as figuras geradas pela interseção. Quantos lados tem o cubo? Quantos lados tem essas figuras?
- 4) Explore o recurso “criar vista 2D de (...)” clicando com o botão direito sobre o polígono gerado (dentro da tela de 3D ou na janela de álgebra) pela interseção. Neste momento uma nova janela a esquerda deve surgir. O que você observa? Esta janela confirma ou incrementa suas respostas o item 3?
- 5) Oculte o plano e os pontos, apague o cubo e em seu lugar construa uma pirâmide, acenda novamente o cubo e os pontos e ative a animação. Quantas faces possui a pirâmide? Quantas arestas possuem os polígonos gerados na interseção?
- 6) Você consegue estabelecer uma relação entre o número de faces do poliedro explorado e o número de lados dos polígonos gerados pela interseção entre o poliedro e plano em cada situação? Procure generalizar seu pensamento. Se achar necessário faça mais interseções com poliedros de sua escolha.
- 7) É possível obter triângulos regulares, quadrados, retângulos e pentágonos regulares a partir da interseção de planos com cubos? Como? Justifique.

Atividade 6: A Quadratura do Círculo – Método de Ernest Hobson

Existem três famosos problemas gregos, caracterizados pela impossibilidade da construção apenas com régua não graduada e compasso. Esses problemas são: (i) Duplicação

do Cubo, (ii) Trisecção do Ângulo e (iii) Quadratura do Círculo. Esses problemas foram discutidos durante muitos anos, mas só no século XIX houveram demonstrações algébricas que verificaram suas impossibilidade nos referidos termos.

Ernest Willian Hobson foi um matemático inglês, nasceu em 1856 e faleceu aos 76 anos em 1933, ele foi um matemático de bastante prestígio, recebeu dois prêmios, em 1907 a Medalha Real, concedida pela família real, anualmente, para as duas as maiores contribuições para o avanço da natureza e uma para contribuições extraordinárias no campo das ciências aplicadas e em 1920 a Medalha de Morgan, concedida pela London Mathematical Society às contribuições de destaque na Matemática. Ao todo, Ernest escreveu quatro obras, uma delas foi “Squaring the Circle - A History of the Problem” que fala sobre a história do problema da quadratura do círculo. Esta atividade baseia-se na demonstração criada por Ernest Hobson.

Vamos abordar o problema da **Quadratura do Círculo** utilizando o GeoGebra.

Nessa construção, enfatizaremos o uso de um segmento de reta de comprimento 1,77247. Note que o valor 1,77247 é uma aproximação para a raiz quadrada de π , considerando-se de um círculo de raio unitário. Se um quadrado for construído a partir de um segmento com esta medida como lado, o valor da área será aproximadamente π , que é igual a área do círculo de raio unitário.

Faça essa construção no GeoGebra conforme as indicações a seguir.

Encaminhamentos:

1. Inicialmente crie um “Controle Deslizante” , denomine-o a . Coloque a variação do intervalo valor mínimo 1, o valor máximo 4 e incremento 0.5 (utilize o “.”).

2. Descreva uma circunferência de raio a com centro em O e diâmetro AOB .

- Crie a circunferência com a ferramenta “Círculos dados Centro e Raio” , com raio a .

- Com ferramenta em “Reta” , trace uma reta que passe pelo centro O . Oculte o ponto criado. Em seguida marque as interseções entre a reta e a circunferência com a ferramenta “Interseção de Dois Objetos”  e denomine os pontos de A e B .

3. Crie uma circunferência utilizando “Círculos dados Centro e Raio”  com raio igual a $3/5a$ e centro em O . Marque o ponto C , entre B e O , interseção entre a reta AB e esta circunferência criada. Utilize a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” . Agora clique no botão azul ao lado da equação desta circunferência para ocultá-la.

4. Crie uma circunferência utilizando “Círculos dados Centro e Raio”  com raio igual a $1/2a$ e centro em O . Marque o ponto D , entre A e O , interseção entre a reta AB e esta circunferência criada. Utilize a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” . Agora clique no botão azul ao lado da equação desta circunferência para ocultá-la.

5. Crie uma circunferência utilizando “Círculos dados Centro e Raio”  com raio igual a $3/2a$ e centro em O . Marque o ponto E , interseção desta circunferência e a reta AB , de maneira que ele fique mais próximo ao ponto A . Utilize a ferramenta “Interseção de Dois Objetos” . Agora clique no botão azul ao lado da equação desta circunferência para ocultá-la.

6. Marque o ponto médio do segmento CD , denomine esse ponto de F . Em seguida trace o arco CD .

- Utilize a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” .
 - Descreva o arco CD utilizando a ferramenta “Semicírculo Definido por Dois Pontos” . Primeiro clique no ponto C em seguida no ponto D .

7. Descreva o arco inferior de diâmetro BE com centro em G .

- Marque o ponto G de tal maneira que ele seja o ponto médio de BE . ferramenta “Ponto Médio ou Centro” .
 - Descreva o semicírculo inferior de diâmetro BE utilizando a ferramenta “Semicírculo Definido por Dois Pontos” , para isso clique primeiro no ponto E e em seguida no ponto B .

8. Trace uma reta perpendicular à reta AB , passando por O e marque os pontos H e I com as interseções com os arcos CD e BE , respectivamente:

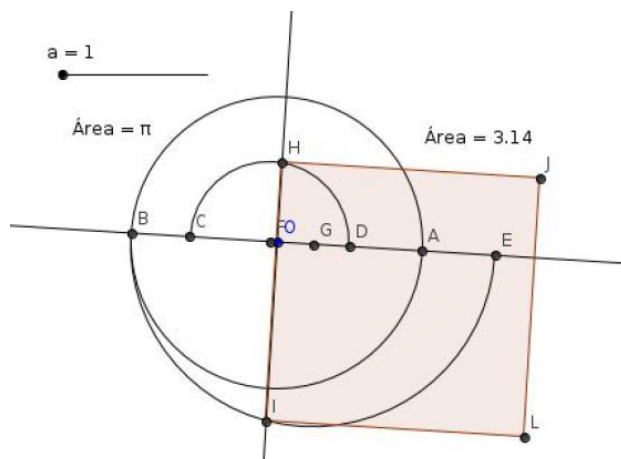
- Selecione a ferramenta “Reta Perpendicular” , clique na reta AB e em seguida no ponto O .
- Marque o ponto H na intersecção da perpendicular com o arco CD e o ponto I na intersecção da perpendicular com o arco BE . Com a ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” .

9. Construa um quadrado de lado HI .

- Para construir o quadrado utilize a ferramenta “Polígono Regular” , clique no ponto H , em seguida no ponto I e coloque “4” no número de vértices.

10. Na aba ângulo selecione a ferramenta “Área”  e coloque para aparecer a área do quadrado e a da circunferência criada inicialmente.

Ao realizar a construção proposta (encaminhamentos 1 à 10), é esperado obter-se o seguinte:



Perguntas:

Por que não é possível encontrar o valor exato de π ?

Compare o valor da área da circunferência inicial e do quadrado. O que pode ser observado entre as duas áreas?

Com o raio da circunferência inicial igual a 1, o que podemos intuir em relação às áreas e em relação à medida do lado do quadrado?

E se aumentarmos o valor deste raio, o que acontece com as áreas?

Atividade 7: Prismas

Parte 1

Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma triangular?

1. Construção de um prisma triangular.

- Construa um triângulo utilizando a ferramenta “Polígono” .
- Na guia “Exibir”, clique em “Janela de Visualização 3D” .
- Clique na janela 3D, em seguida em “Pirâmide”  e depois selecione “Fazer Extrusão para Prisma ou Cilindro” , após clicar no triângulo construído, digite um valor entre 3 e 5 para a altura do prisma.
- Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?** (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Triangular		
Faces	Arestas	Vértices

2. Construção do poliedro cujos vértices são pontos médios das arestas do prisma triangular.

- Com a ferramenta “Ponto Médio ou Centro” , construa os pontos médios das arestas do prisma.
- Com a ferramenta “Polígono” , construa os polígonos das faces desse poliedro, ligando os pontos médios das arestas do prisma.
- Para facilitar a visualização oculte o prisma, clicando sobre o ícone azul: , referente a esse objeto na “Janela de Álgebra” do lado esquerdo da tela.
- Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais polígonos são encontrados em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?**

Parte 2

Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma quadrangular?

1. Construa um prisma quadrangular.

a) **Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?** (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma Quadrangular		
Faces	Arestas	Vértices

2. Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma quadrangular.

a) **Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?**

Parte 3

Faça uma previsão (sem utilizar cálculos ou o GeoGebra): quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma pentagonal?

1. Construa um prisma pentagonal.

a) **Quantas faces, arestas e vértices o prisma possui?** (Complete a tabela seguinte com tais informações)

Prisma pentagonal		
Faces	Arestas	Vértices

2. Construa um poliedro, de tal forma que seus vértices são os pontos médios das arestas do prisma pentagonal.

a) **Quantas faces possui o poliedro encontrado? Quais figuras geométricas são encontradas em suas faces? Sua previsão em relação ao número de faces do poliedro estava correta?**

Parte 4

1) Complete os valores na tabela a seguir.

Lados da base do prisma	Arestas	Vértices	Faces	Faces do poliedro cujos vértices são pontos médios das arestas do prisma
3				
4				
5				
6				
7				
8				
n				

APÊNDICE B

Carta de informação sobre participação em pesquisa e termo de consentimento.



CARTA DE INFORMAÇÃO - PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA GEOGEBRA E PERFORMANCE MATEMÁTICA DIGITAL

Introdução

Meu nome é Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva, sou professor do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus São José do Rio Preto. Estou atualmente conduzindo uma pesquisa sobre o uso software GeoGebra e a produção de Performances Matemáticas Digitais.

Objetivo do estudo

O objetivo deste estudo é investigar o processo de elaboração e investigação de atividades matemáticas, o pensamento matemático-geométrico de estudantes e professores e aspecto sobre a formação de professores em ambientes educacionais como salas de aula e cursos de extensão universitária.

Consentimento de Participação

Se você concordar em participar deste estudo, você será observado e filmado durante as atividades educacionais que realizará. Também serão realizadas entrevistas com alguns participantes. A equipe de pesquisa, além do docente responsável, é também formada por alunos de pós-graduação, os quais irão fazer anotações de observação para fins de pesquisa e conduzir parcial ou integralmente os procedimentos mencionados (atividades didáticas, filmagens, entrevistas e outros de mesma natureza).

Confidencialidade

A informação recolhida será utilizada somente para fins de pesquisa. Transcrições de falas, imagens e registros de ações dos participantes serão utilizados/revelados em relatórios de pesquisa e, principalmente, na publicação de vídeos, artigos, livros, dissertações de mestrado,

teses de doutorado e outros textos acadêmicos, tanto no contexto acadêmico como social (jornais, revistas, redes sociais e canais na Internet). A autoria dos materiais publicados terá a supervisão do docente responsável pela pesquisa.

Nas divulgações dos resultados da pesquisa será mantido o anonimato do participante, o qual será referenciado por meio da criação de nomes fictícios nos relatos. Questões concernentes a esses procedimentos, ou outros que considerar pertinentes, devem ser informadas pelo participante na carta de consentimento (verso).

Riscos e Participação voluntária

Não há riscos conhecidos para participar deste estudo. A participação neste estudo é voluntária. Esta carta de informação e consentimento tem como objetivo fundamental a ciência e autorização do uso da imagem do participante na realização e na publicação de relatos públicos da pesquisa.

Perguntas

Se você tiver qualquer dúvida sobre a conduta deste estudo ou os seus direitos como participante da pesquisa pode contactar o professor Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva.

Fone: (17) 3221-2751

E-mail: ricardos@ibilce.unesp.br

CARTA DE CONSENTIMENTO DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA GEOGEBRA E PERFORMANCE MATEMÁTICA DIGITAL

Declaro que li a carta de informação, entendi a natureza do estudo e concordo em participar da pesquisa.

Declaro ciência e concordância com relação as questões éticas sobre uso público de imagens no desenvolvimento e divulgação dos resultados da pesquisa.

Nome do

participante: _____

RG: _____

Local: _____

Data: _____

Assinatura: _____

Comentários do participante:

APÊNDICE C

Excertos do texto “Educação Matemática na Era Digital” de Abar (2011) e questões relativas a eles.

1) A Educação e a Era Digital (Extraído de ABAR, C. A. A. P. Educação Matemática na Era Digital. **Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 27, p. 14-28, 2011)

É fato que as mudanças da chamada Era Digital interferem nas relações entre as pessoas e o acesso às informações. E também é fato que o poder está e estará nas mãos de quem tem a informação e o conhecimento. Cada sociedade é configurada de acordo com as suas possibilidades de acesso às informações, ao conhecimento e de como eles serão distribuídos e aplicados. O avanço tecnológico em si não determina o acesso às informações, mas é a necessidade social de sua democratização que determina novas categorias de tempo e espaço, transformando-as em realidades virtuais.

(...)

Importante observar que apenas a existência das tecnologias que permitem o rápido acesso às informações e à comunicação não garante a construção do conhecimento e de uma sociedade preparada para seu uso. Isso depende das pessoas e não das tecnologias utilizadas. Nesse aspecto é que se sobressai o papel das tecnologias na educação: que seu uso seja direcionado à construção do conhecimento e à formação de pessoas competentes para a inserção em uma sociedade cada vez mais tecnológica. Desse modo o uso das tecnologias na educação não é um fim em si mesmo e sim um instrumento para o desenvolvimento cognitivo. Também é essencial entender que se as tecnologias forem utilizadas simplesmente para transmitir informações já elaboradas, no processo de aprendizagem, elas estarão a serviço de uma função pedagógica tradicional sem possibilitar nenhuma inovação ou mudanças por parte dos sujeitos envolvidos.

Qual o papel da escola na Era Digital? A escola é um espaço destinado a formar cidadãos, aptos a cumprir seu papel na sociedade na qual estão inseridos, para contribuir com a melhoria da qualidade de vida própria e das outras pessoas. Assim sendo, entende-se que todos os responsáveis por sua criação e existência devam propiciar as condições materiais e humanas adequadas para que ela, a escola, atenda às exigências da era atual. O papel dos dirigentes educacionais, nesse contexto se modifica diante da responsabilidade de criar ambientes adequados para o enfrentamento das novas exigências do mundo atual e propiciar a formação continuada de seus docentes.

Questões

- 1) Após a leitura, discuta com seu colega e componha uma lista com as principais informações do texto.
- 2) As tecnologias digitais estão presentes no nosso dia-a-dia, transformando a forma como nos relacionamos com o mundo. O computador, o smartphone, a Internet, as redes sociais têm potencializado o acesso à informação e à comunicação. Qual a posição da escola nessa Era Digital?

2) Educação Matemática no Cenário da Era Digital (Extraído de ABAR, C. A. A. P. Educação Matemática na Era Digital. **Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 27, p. 14-28, 2011)

Na era digital, os recursos tecnológicos que se apresentam para dar suporte à educação, e em especial, à Educação Matemática são inumeráveis. *Softwares* interativos, objetos de aprendizagem, *applets*, hipertextos, portais na internet, blogs, *podcasts*, vídeos, simulações, jogos, ambientes virtuais de aprendizagem, realidade virtual, realidade aumentada e outros recursos que privilegiam a ação, a reflexão e a interação estão disponíveis e ao alcance de professores, pais e alunos.

Temos à disposição, além de uma vasta gama de recursos tecnológicos, muitas pesquisas mostrando resultados positivos com o seu uso e, no entanto, o ambiente de aprendizagem na escola se renova a passos lentos e as pesquisas já consolidadas que poderiam subsidiar a ação docente, não chegam à prática do professor. E mesmo com acesso a muitos desses recursos não se tem a garantia de uma aprendizagem significativa, pois depende de estratégias previamente elaboradas pelo professor para uso na sua prática docente.

Em que a Educação Matemática pode se beneficiar com os recursos tecnológicos? Como “falar” ou representar estaticamente na lousa, gráficos de funções contando com a imaginação do aluno? Por outro lado, como trabalhar a linguagem Matemática em um ambiente a distância? São questões nas quais a tecnologia tem um papel fundamental na medida em que permite ultrapassar barreiras metodológicas para uma aprendizagem efetiva. As tecnologias, além de permitirem situações que simulam o real e possibilitarem um aprendizado significativo e desafiador, ajudam as pessoas a entenderem a Matemática.

Questões

- 1) Após a leitura, discuta com seu colega e componha uma lista com as principais informações do texto.

- 2) Os recursos tecnológicos apontados pelo texto estão sendo utilizados na educação matemática? Justifique.
- 3) “E mesmo com acesso a muitos desses recursos não se tem a garantia de uma aprendizagem significativa.” Por que somente usar a tecnologia digital no ensino não garante a aprendizagem?

3) Desafios do Ensino e Aprendizagem da Matemática na Era Digital (Extraído de ABAR, C. A. A. P. Educação Matemática na Era Digital. **Unión**, San Cristobal de La Laguna, v. 27, p. 14-28, 2011)

Refletir sobre o uso de um recurso tecnológico na prática docente permite ao professor reconhecer os desafios a serem superados. Cada escolha implica em competências distintas para as quais, em muitas situações, o docente não foi preparado.

Algumas ferramentas tecnológicas disponibilizam condições que favorecem professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem. Para que isso aconteça é necessário que os professores proponham situações nas quais os alunos consigam construir o conhecimento com o auxílio das ferramentas e que estas permitam identificar os caminhos percorridos pelo aluno, possibilitem o fornecimento de respostas às suas atividades e o *feedback* em relação ao seu desempenho além da mediação do professor.

É essencial que o professor tenha habilidades e competências para essa mediação e receba uma formação sólida sobre os conteúdos que serão trabalhados, sobre as metodologias que possam ser exploradas no ensino e, sobretudo, tenha conhecimento dos estilos de aprendizagem que emergem de quem aprende. Agregado a esse contexto estão presentes as tecnologias que contribuem para uma melhor aprendizagem e só tem sentido com relação às metodologias utilizadas.

(...)

O professor, diante das possibilidades de uso da Internet, tem uma vasta gama de escolhas para a sua prática: propor pesquisas orientadas para seus alunos, em endereços previamente selecionados, para evitar uma navegação sem rumo; formar grupos de trabalho colaborativos em ambientes virtuais, propor atividades utilizando objetos de aprendizagem ou applets de Matemática, fazer parte de comunidades que possam contribuir com sua prática, utilizar vídeos no contexto da Matemática e de domínio público como no YouTube, utilizar a técnica de WebQuest com sua classe, utilizar ambientes virtuais ou outras ferramentas como chats, vídeoconferências ou blogs, para interagir com os alunos em outros momentos que não

os de sala de aula, criar páginas colaborativas, explorar as potencialidades da realidade aumentada, etc.

Também baixar programas demonstrativos ou gratuitos como Geogebra, Compasso e Régua, Winplot, Scketchup que permitem a elaboração de propostas de atividades desafiadoras para trabalhar com seus alunos.

Questões

- 1) Após a leitura, discuta com seu colega e componha uma lista com as principais informações do texto.
- 2) Os professores de matemática estão sendo formados para que consigam fazer a inserção das tecnologias digitais no ensino? Justifique.
- 3) Quais os desafios que o professor da educação básica enfrenta na inserção das tecnologias digitais no ensino?