Universidade Estadual Paulista

Câmpus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Estabilidade assintótica de uma classe de sistemas não lineares

Jucilene de Fátima Pavan

Orientador: Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto

Fevereiro - 2010

JUCILENE DE FÁTIMA PAVAN

Estabilidade assintótica de uma classe de sistemas não lineares

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz

São José do Rio Preto, 19 de fevereiro de 2010.

Pavan, Jucilene de Fátima.

Estabilidade assintótica de uma classe de sistemas não lineares / Jucilene de Fátima Pavan. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2010.

72 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: German Jesus Lozada Cruz

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Equações diferenciais. 2. Estabilidade assintótica. 3. Liapunov, Funções de. I. Lozada-Cruz, German Jesus. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.9

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE

Campus de São José do Rio Preto - UNESP

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
Professor Doutor - IBILCE - UNESP
Orientador

Prof. Dr. Luíz Augusto Fernandes de Oliveira
Professor Doutor - USP / IME - São Paulo

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio
Professor Doutor - IBILCE - UNESP

AGRADECIMENTOS

Ao concluir este trabalho, agradeço:

A Deus, primeiramente, por me conceder a graça de concluir mais esta etapa e por estar sempre presente na minha vida, me guiando e abençoando.

Ao meu orientador Prof. German por toda compreensão, amizade, disponibilidade em esclarecer minhas dúvidas, pelos conselhos e todo o conhecimento transmitido desde a graduação até a finalização deste trabalho.

Aos meus pais Osvaldo e Terezinha pelo amor, paciência, compreensão e por toda a força que me deram, que foram fundamentais para alcançar esta vitória. Sem eles nada disso seria possível!

Aos meus irmãos Juliana e João Paulo e ao meu cunhado Marcos, pelo carinho e por compartilhar todos os momentos alegres e, principalmente, por me apoiarem nos momentos difíceis.

Ao Kleber pela força, carinho e atenção dedicados ao longo desse tempo.

Aos professores do Departamento de Matemática e alguns do DCCE do IBILCE / UNESP.

Aos professores da banca examinadora: Prof. Luíz Augusto Fernandes de Oliveira, Prof. Adalberto Spezamiglio, Prof. Geraldo Nunes Silva e Prof. Ricardo P. da Silva.

Aos meus amigos de graduação e pós graduação pela agradável convivência e pelo companheirismo, em especial, a minha grande amiga Cintya, que esteve o tempo todo ao meu lado sempre disposta a me ajudar, ao Gustavo, que me ajudou com a tradução de textos em russo, e também a Marjory e o José Henrique que também me ajudaram por diversas vezes.

A todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

A Capes pelo auxílio financeiro.

"Comece por fazer o necessário,
depois o possível e, de repente
estará por fazer o impossível."

(São Francisco de Assis)

Resumo

No presente trabalho consideramos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x_1} = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\mu}(x_2) \\ \dot{x_2} = cf_1^{\eta}(x_1) + df_2^{\zeta}(x_2) \end{cases} \tag{I}$$

onde a, b, c e d são coeficientes constantes, λ, μ, η e ζ são números racionais positivos com numeradores e denominadores ímpares, as funções $f_i : (-h, h) \to \mathbb{R}$, $h > 0$, são contínuas e satisfazem as condições $f_i(0) = 0, i = 1, 2$ e $x_i f_i(x_i) > 0$, para $x_i \neq 0, i = 1, 2$.

Associado ao sistema (I) consideramos a seguinte função

$$V = \alpha \int_0^{x_1} f_1^{\xi}(\tau)d\tau + \int_0^{x_2} f_2^{\theta}(\tau)d\tau, \tag{II}$$

onde ξ e θ são números racionais positivos com numeradores e denominadores ímpares e α é uma constante positiva.

Nosso objetivo principal é encontrar sob quais condições dos parâmetros a, b, c, d e $\alpha > 0$ a função V definida em (II) é uma função de Liapunov estrita para a solução nula do sistema (I), o que nos leva a concluir a estabilidade assintótica da solução nula.

Palavras-Chave: Equações Diferenciais, Estabilidade Assintoótica, Funções de Liapunov.

Abstract

In this work we consider the system of ordinary differential equations

$$\begin{cases} \dot{x_1} = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\mu}(x_2) \\ \dot{x_2} = cf_1^{\eta}(x_1) + df_2^{\zeta}(x_2) \end{cases} \tag{I}$$

where a, b, c and d are constant coefficients, λ, μ, η and ζ are positive rational numbers with odd numerators and denominators, and the functions $f_i : (-h, h) \to \mathbb{R}$, $h > 0$, are continuous and satisfy the conditions $f_i(0) = 0, i = 1, 2$ and $x_i f_i(x_i) > 0$, for $x_i \neq 0, i = 1, 2$.

Associated to the system (I) we consider the following function

$$V = \alpha \int_0^{x_1} f_1^{\xi}(\tau)d\tau + \int_0^{x_2} f_2^{\theta}(\tau)d\tau, \tag{II}$$

where ξ and θ are positive rational numbers with odd numerators and denominators and α is a positive constant.

Our main goal is find under what conditions the parameters a, b, c, d and $\alpha > 0$ the function V defined in (II) is a strict Liapunov function for the zero solution of the system (I), which leads us to conclude the asymptotic stability of zero solution.

Keywords: Differential Equations, Asymptotic Stability, Liapunov Functions.

Sumário

Introdução

Muitos fenômenos físicos, químicos, biológicos, econômicos, ecológicos, etc., são modelados por equações, sejam estas equações algébricas, diferenciais, estocásticas, integro-diferenciais, etc. Por exemplo, suponhamos que o seguinte sistema

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(x(t)), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

onde $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, representa, algumas vezes, numa forma simplificada, algum fenômeno real. A primeira condição que devemos assumir é que se verifique a unicidade de soluções para o sistema (1), pois, caso contrario, teríamos que começar a pensar se nosso modelo é sensato ou não. Um dos principais objetivos para construir um modelo é poder prever o comportamento do fenômeno, isto é, confiamos que, com nosso sistema de equações, seremos capazes de conhecer a estrutura básica do fenômeno, de modo que poderemos ter informações sobre sua dinâmica simplesmente resolvendo o sistema. Mais ainda, em muitas situações não estaremos interessados no futuro imediato, e sim em todo o futuro do sistema. Para isso, estudaremos o comportamento assintótico do sistema quando o tempo t cresce até $+\infty$. Notemos a potência e interesse desta idéia: se o modelo é correto e se temos ferramentas adequadas para o análise do comportamento assintótico do sistema, podemos ir desde a teoria matemática até o futuro real do fenômeno.

Por exemplo, consideremos o sistema clássico do tipo Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{u} = u(\lambda - au - bv), \\ \dot{v} = v(\mu - cv - du) \end{cases} \tag{2}$$

onde a, b, c e d são constantes positivas. O par $(u(t), v(t))$ representa a densidade de duas espécies biológicas num certo habitat. Os termos λu, μv representam o crescimento positivo das espécies, que é quebrado pelo processo de competição intrínseca entre as mesmas espécies (termos $-au^2$ para a primeira delas e $-cv^2$ para a segunda) e pela competição entre ambas (termos $-buv$, $-duv$ respectivamente). Portanto, a resolução deste problema nos vai proporcionar informações da dinâmica das duas espécies. O estudo do comportamento assintótico deste sistema dependendo dos parâmetros λ e μ nos leva a prever as situações futuras das espécies em competição. Observe que nos interessamos pela evolução no tempo das soluções do problema (2). Em concreto, nos interessa o comportamento limite destas.

O conceito de *atrator global* será uma das ferramentas básicas para essa análise. A grosso modo, um atrator global é um conjunto compacto para o qual todas as soluções se aproximam quando o tempo se faz grande. Observe que os estados estacionários (pontos de equilíbrio) estão dentro do atrator e o estudo do comportamento deles é de grande importância para sabermos a estrutura do atrator.

No presente trabalho estudaremos o comportamento assintótico dos pontos de equilíbrio do sistema de equações diferenciais ordinárias no plano

$$\begin{cases} \dot{x_1} = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\mu}(x_2) \\ \dot{x_2} = cf_1^{\eta}(x_1) + df_2^{\zeta}(x_2) \end{cases} \tag{3}$$

onde a, b, c e d são coeficientes constantes, λ, μ, η e ζ são números racionais positivos com numeradores e denominadores ímpares, as funções $f_i : (-h, h) \to \mathbb{R}$, $h > 0$, são contínuas e satisfazem as condições

$$\begin{aligned} f_i(0) &= 0, i = 1, 2 \\ x_i f_i(x_i) &> 0, \text{para } x_i \neq 0, i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Das condições dadas em (4) segue que a origem é único ponto de equilíbrio de (3).

Nesta dissertação começaremos vendo alguns conceitos preliminares sobre estabilidade de soluções estacionárias para sistemas do tipo (1) e a Teoria de Liapunov, além de alguns conceitos sobre funções homogêneas. Isto é feito no Capitulo 1 e teve como base os livros [5], [6], [7], [9], [10], [11] e [13].

No Capitulo 2 vemos rapidamente o problema de Aizerman o qual motiva o estudo de problema (3). Esse capítulo foi baseado nos livros [4] e [8].

Os resultados principais do nosso trabalho estão no Capítulo 3, em que estudamos condições suficientes para a estabilidade assintótica da solução nula de sistemas da forma (3). Dividimos esse estudo em alguns casos, os quais estão contidos nas seções 3.2, 3.3 e 3.4, respectivamente. Para cada caso apresentamos alguns exemplos com seus respectivos retratos de fase, os quais foram elaborados com a ajuda do software *Mathematica*. O estudo desse capítulo foi baseado nos artigos [1], [2], [3] e [12].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo vamos coletar alguns conceitos preliminares os quais usamos na elaboração deste trabalho. Revisaremos rapidamente o conceito de estabildade de equilílibrios de sistemas não lineares de primeira ordem, em seguida veremos o método de Liapunov e alguns resultados sobre funções homogêneas. Neste Capítulo usamos as seguintes referêrencias bibliográficas: [5] , [6], [7], [9], [10], [11] e [13].

1.1 Conceitos de estabilidade

Nesta seção iremos introduzir o conceito de estabilidade de soluções de equações diferenciais. Para isto consideremos $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua tal que o PVI

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

tem uma única solução para todo $(t_0, x_0) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Seja $\varphi(t)$ a solução definida para $t \geqslant 0$.

Definição 1.1.1 *Dizemos que φ é estável se dados $\epsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que se $x(t, t_0, x_0)$ é solução de (1.1) e $\|x_0 - \varphi(t_0)\| < \delta$ então $x(t, t_0, x_0)$ está definida para $t \geqslant t_0$ e $\|x(t, t_0, x_0) - \varphi(t)\| < \epsilon$, $\forall\ t \geqslant t_0$.*

Lema 1.1.1 *A estabilidade de uma solução φ de* (1.1) *é equivalente a estabilidade da solução nula do sistema equivalente*

$$\begin{cases} \dot{z} = F(t,z) \\ z(t_0) = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

onde $F : [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada por $F(t,z) = f(t,\varphi(t)+z) - f(t,\varphi(t))$.

Demonstração. Se $\varphi(t)$ é solução de (1.1), então fazendo a mudança $x = \varphi(t) + z$, obtemos

$$\dot{x} = \dot{\varphi} + \dot{z}$$
$$f(t,\varphi(t)+z) = f(t,\varphi(t)) + \dot{z},$$

ou seja,

$$\dot{z} = f(t,\varphi(t)+z) - f(t,\varphi(t)).$$

Chamando $F(t,z) := f(t,\varphi(t)+z) - f(t,\varphi(t))$ obtemos

$$\dot{z} = F(t,z),$$

e facilmente vemos que $F(t,0) = 0$.

Além disso $z(t_0) = x(t_0) - \varphi(t_0) = 0$, pois $x(t)$ e $\varphi(t)$ são soluções de (1.1) e assim $x(t_0) = \varphi(t_0) = x_0$. □

Assim do Lema 1.1.1 concluímos que estudar a estabilidade da solução $\varphi(t)$ de (1.1) é equivalente a estudar a estabilidade da solução nula de (1.2).

Vamos agora então definir a estabilidade da solução nula.

Definição 1.1.2 *A solução nula é estável se dados $\epsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$ existir $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$ tal que se $\|x_0\| < \delta$ então $x(t,t_0,x_0)$ está definida em $[t_0,\infty)$ e $\|x(t,t_0,x_0)\| < \epsilon$, para todo $t \geqslant t_0$.*

Definição 1.1.3 *A solução nula é assintoticamente estável se for estável e se dado $t_0 \geqslant 0$ existir $\rho = \rho(t_0) > 0$ tal que se $\|x_0\| < \rho$ então $x(t,t_0,x_0) \to 0$, quando $t \to \infty$.*

Definição 1.1.4 *Dizemos que uma solução é instável se não é estável.*

Seja $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Vamos a partir de agora considerar o seguinte sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.3}$$

assumindo que vale a existência e unicidade de solução.

Definição 1.1.5 *Dizemos que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é uma singularidade, ou um ponto singular do campo f, se $f(x_0) = 0 \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma singularidade x_0 é isolada se é a única singularidade do campo em alguma vizinhança de x_0. Pontos que não são singulares costumam ser denominados regulares.*

Observação 1.1.1 *Se x_0 é uma singularidade para f, então o caminho constante dado por $x(t) = x_0$, para todo $t \in I$, é solução de* (1.3)*, pois $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(x_0)$.*

Lema 1.1.2 *x_0 é um ponto singular do sistema* (1.3) *se e somente se x_0 é um ponto fixo do fluxo desse sistema.*

Demonstração. Seja $\phi : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o fluxo do sistema (1.3).
($\Rightarrow$) Suponhamos que x_0 é um ponto singular de (1.3), ou seja, $f(x_0) = 0$. Daí $\phi(t, x_0) = \phi_t(x_0) = x_0$.

Portanto x_0 é ponto fixo de ϕ.
($\Leftarrow$) Suponhamos agora que x_0 é ponto fixo de ϕ, ou seja, $\phi(t, x_0) = x_0$. Então $0 = \dot{\phi}(t, x_0) = f(\phi(t, x_0))$.

Logo $f(x_0) = 0$, ou seja, x_0 é ponto singular de (1.3). $\square$

Agora vamos definir estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade de um ponto singular, já que de acordo com a observação (1.1.1) ele é solução da equação diferencial.

Definição 1.1.6 *Um ponto singular x_0 de* (1.3) *é estável quando para toda vizinhança U de x_0, existe outra vizinhança U_1, com $U_1 \subset U$, tal que toda solução $\varphi(t)$ de* (1.3) *com $\varphi(0) \in U_1$ está definida e $\varphi(t) \in U$, para todo $t \geqslant 0$, ou seja, toda solução começando em U_1 permanece em U, para todo $t \geqslant 0$*

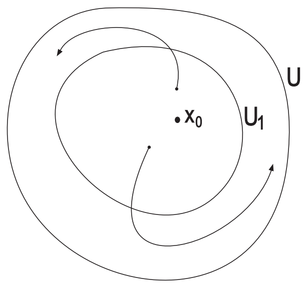

Figura 1.1: Singularidade Estável

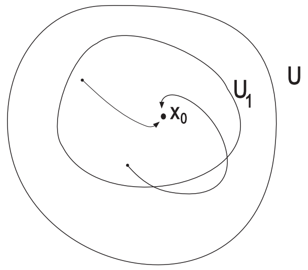

Figura 1.2: Singularidade Assintoticamente Estável

Se além disso $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = x_0$, *diminuindo* U_1 *se necessário, então* x_0 *é assintoticamente estável.*

Um ponto singular x_0 *que não é estável é chamado instável. Isto significa que existe uma vizinhança* U *de* x_0 *tal que para toda vizinhança* U_1 *de* x_0, *com* $U_1 \subset U$, *existe pelo menos uma solução* $\varphi(t)$ *começando em* U_1 *que não permanece totalmente em* U.

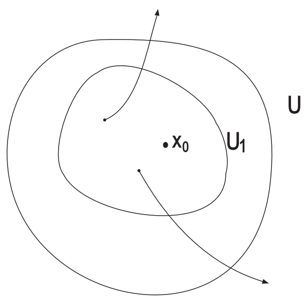

Figura 1.3: Singularidade Instável

Exemplo 1.1.1 *Seja* A *uma matriz em* $\mathbb{R}^n$ *não singular cujos autovalores têm todos parte* *real menor que zero. Então de acordo com [11], página 73 existem k e $\mu > 0$ tais que*

$$\|e^{At}\| \leqslant ke^{-\mu t}, \ \forall \ t \geqslant 0.$$

Então $0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto singular assintoticamente estável do sistema $\dot{x} = Ax$.

De fato, como $\det A \neq 0$ *temos*

$$Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}0 \Rightarrow x = 0,$$

ou seja, $0 \in \mathbb{R}^n$ é o único ponto singular de Ax.

O fluxo do sistema $\dot{x} = Ax$ é dado por $\varphi(t,x) = e^{At}x$. Então

$$\|\varphi(t,x)\| = \|e^{At}x\| \leqslant ke^{-\mu t}\|x\| \to 0 \text{ quando } t \to \infty.$$

Portanto $\lim_{t\to+\infty} \|\varphi(t,x)\| = 0$ e concluímos assim que 0 é um ponto singular assintoticamente estável.

Exemplo 1.1.2 *Se $0 \in \mathbb{R}^2$ é um centro para o sistema $\dot{x} = Ax$, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$, então ele é uma singularidade estável mas não é assintoticamente estável.*

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$, $\lambda = \alpha + i\beta$ um autovalor de A e $v = v_1 + iv_2$ o autovetor associado a λ. Então

$$A[v_1 + iv_2] = (\alpha + i\beta)[v_1 + iv_2] = (\alpha v_1 - \beta v_2) + i(\beta v_1 + \alpha v_2). \tag{1.4}$$

Tomando as partes real e imaginária da equação (1.4) *temos*

$$\begin{aligned} Av_1 &= \alpha v_1 - \beta v_2 \quad e \\ Av_2 &= \beta v_1 + \alpha v_2. \end{aligned}$$

Os vetores v_1 e v_2 são linearmente independentes, pois se eles não fossem linearmente independentes existiria um $c \neq 0$ tal que $v_2 = cv_1$, daí $v = (1 + ic)v_1$ e $\bar{v} = (1 - ic)v_1$ seriam linearmente dependentes, absurdo pois $\beta \neq 0$.

Então dado $x \in \mathbb{R}^2$, existem $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{R}$ tal que

$$x = \tilde{x}v_1 + \tilde{y}v_2$$

ou seja, $x = [v_1 \quad v_2]\tilde{\mathbf{x}}$*, onde* $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$*. Então* $\tilde{\mathbf{x}} = [v_1 \quad v_2]^{-1}x$ *e daí* $\dfrac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = [v_1 \quad v_2]^{-1}\dot{x}$.

Logo, a equação diferencial satisfeita por $\tilde{\mathbf{x}}$ *é*

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = [v_1 \quad v_2]^{-1}A[v_1 \quad v_2]\tilde{\mathbf{x}}.$$

No nosso caso, temos

$$\begin{aligned} [v_1 \quad v_2]^{-1}A[v_1 \quad v_2] &= [v_1 \quad v_2]^{-1}[Av_1 \quad Av_2] \\ &= [v_1 \quad v_2]^{-1}[\alpha v_1 - \beta v_2 \quad \beta v_1 + \alpha v_2] \\ &= [v_1 \quad v_2]^{-1}[v_1 \quad v_2]\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim acabamos de obter uma equação para $\tilde{\mathbf{x}}$ *que deixa a forma padrão* $\dot{x} = Ax$ *na forma mais simples*

$$\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{dt} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{A}\tilde{\mathbf{x}}. \tag{1.5}$$

A solução de (1.5) *com* $\varphi(0) = x$ *é da forma*

$$\varphi(t) = e^{\tilde{A}t}x = e^{t\alpha}\begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}x,$$

pois

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t), -\sin(\beta t)) \quad e \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t), \cos(\beta t)),$$

as colunas da matriz, são soluções da equação (1.5) *e satisfazem* $\varphi_1(0) = (1,0)$ *e* $\varphi_2(0) = (0,1)$.

No centro temos $\alpha = 0$ *daí a solução de* (1.5) *com* $\varphi(0) = x$ *é da forma*

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{bmatrix}x. \tag{1.6}$$

Mostremos que a solução nula de (1.5) *é estável.*

Observe que a solução $\varphi(t)$ *fica girando em torno de* $(0,0)$ *sobre uma circunferência de raio* k*, isto é,* $\|\varphi(t)\| = k$*, onde* k *=constante.*

Para qualquer bola $B(0,\delta)$ *podemos tomar* $0 < \epsilon < \delta$ *tal que para todo* $x \in B(0,\epsilon)$*, temos* $\|\varphi(t)\| = \|x\| < \epsilon < \delta$*, ou seja,* $\varphi(t) \in B(0,\delta)$*. Portanto a origem é estável.*

Temos que a constante k *é positiva, pois se* $k = 0$ *teríamos que* $\varphi(t) = 0$*,* $\forall\ t \geqslant 0$*, o que contradiz* (1.6)*.*

Assim para qualquer $k > 0$*, existe* $0 < \epsilon \leqslant k$ *tal que* $\|\varphi(t)\| \geqslant k \geqslant \epsilon$*.*

Portanto um centro não é assintoticamente estável.

1.2 O primeiro método de Liapunov

O primeiro método de Liapunov, também conhecido como *método indireto* ou *método da linearização*, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através de seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e a sua estabilidade é estudada através dos autovalores.

Seja $\varphi(t)$ uma solução de (1.1). Já vimos no Lema 1.1.1, que estudar a estabilidade de φ é equivalente a estudar a estabilidade da solução nula de (1.2).

Suponhamos então que F seja C^1. O desenvolvimento de Taylor de $F(t,z)$ em torno de $z = 0$ é

$$F(t,z) = F(t,0) + DF(t,0)z + g(t,z),$$

onde $g(t,z) = \mathbf{o}(\|z\|)$ quando $\|z\| \to 0$.

Como $F(t,0) = 0$ obtemos o seguinte sistema

$$\dot{z} = A(t)z + g(t,z) \tag{1.7}$$

onde $A(t) = DF(t,0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $g(t,0) \equiv 0$ e $g(t,z) = \mathbf{o}(\|z\|)$, quando $z \to 0$, para cada t. Um sistema desse tipo chama-se quase linear. O próximo resultado estabelece uma condição suficiente para que a solução nula de (1.7) seja assintoticamente estável.

Teorema 1.2.1 *Consideremos o sistema quase linear*

$$\dot{x} = Ax + g(t,x), \quad (t,x) \in \Omega_b \tag{1.8}$$

onde $\Omega_b = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \|x\| < b\}$, *A é um operador linear em* $\mathbb{R}^n$ *cujos autovalores têm parte real menor que zero, g é contínua e* $g(t,x) = \mathbf{o}(\|x\|)$ *uniformemente em t. Suponhamos ainda que* (1.8) *tenha soluções únicas em todo ponto. Então a solução nula de* (1.8) *é assintoticamente estável.*

Demonstração. Como A tem todos os autovalores com parte real negativa, de [11] página 73, segue que existem $\mu > 0$ e $k \geq 1$ tais que $\|e^{At}\| \leqslant ke^{-\mu t}$, $\forall\, t \geqslant 0$.

Como $g(t,x) = \mathbf{o}(\|x\|)$, temos que existe $\delta_1 > 0$ para o qual $\|x\| < \delta_1$ implica $\|g(t,x)\| \leqslant \dfrac{\mu}{2k}\|x\|$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$, tal que $\|x\| < \delta$, onde $\delta = \dfrac{\delta_1}{k}$ e $\varphi(t)$ uma solução de (1.8) cujo gráfico está em $\Omega_{\delta_1} = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \|x\| < \delta_1\}$, com $\varphi(0) = x$ e intervalo maximal (ω_-, ω_+).

Pela Fórmula da Variação das Constantes temos

$$\varphi(t) = e^{At}x + \int_0^t e^{(t-s)A} g(s,\varphi(s))ds, \ \forall\, t \in (\omega_-, \omega_+).$$

Como $\|\varphi(t)\| < \delta_1$, para todo t (pois $graf(\varphi) \subset \Omega_{\delta_1}$), isto implica, para $t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\|\varphi(t)\| &\leqslant \|e^{At}x\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A} g(s,\varphi(s))\| ds \\ &\leqslant ke^{-\mu t}\|x\| + k\int_0^t e^{-\mu(t-s)}\|g(s,\varphi(s))\| ds\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}e^{\mu t}\|\varphi(t)\| &\leqslant k\|x\| + k\int_0^t e^{\mu s}\|g(s,\varphi(s))\| ds \\ e^{\mu t}\|\varphi(t)\| &\leqslant k\|x\| + k\int_0^t e^{\mu s}\frac{\mu}{2k}\|\varphi(s)\| ds \\ &= k\|x\| + \frac{\mu}{2}\int_0^t e^{\mu s}\|\varphi(s)\| ds.\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Gronwall (ver [11] página 37), obtemos

$$e^{\mu t}\|\varphi(t)\| \leqslant k\|x\| e^{\int_0^t \frac{\mu}{2} ds} = k\|x\| e^{\frac{\mu}{2}t}, \ t \geqslant 0.$$

Portanto

$$\|\varphi(t)\| \leqslant k\|x\|e^{-\frac{\mu}{2}t},\ t \geqslant 0,\ \text{com } \|x\| < \delta, \tag{1.9}$$

ou seja, se $\|\varphi(0)\| < \delta$ temos

$$\|\varphi(t)\| \leqslant k\delta e^{-\frac{\mu}{2}t} = \delta_1 e^{-\frac{\mu}{2}t}, t \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Afirmamos que $\omega_+ = +\infty$. Se não, teríamos

$$\delta_1 = \lim_{t\to\omega_+} \|\varphi(t)\| \leqslant \delta_1 e^{-\frac{\mu}{2}t} < \delta_1.$$

A igualdade acima segue do fato de que o gráfico da solução tende para a fronteira do conjunto Ω_{δ_1}, quando $t \to \omega_+$ (ver [11] página 17). Mas isto nos dá um absurdo.

Portanto, $\omega_+ = +\infty$.

Finalmente podemos concluir a partir de (1.10) que a solução nula é assintoticamente estável.

De fato,

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| \leqslant \lim_{t\to\infty} \delta_1 e^{-\frac{\mu}{2}t} = 0,\ \text{logo}\ \lim_{t\to\infty} \|\varphi(t) - 0\| = 0.$$

Portanto a solução nula do sistema (1.8) é assintoticamente estável. □

Corolário 1.2.1 *Seja x_0 um ponto singular de* (1.3) *e suponhamos que $Df(x_0)$ tem todos os autovalores com parte real negativa. Então existem uma vizinhança U de x_0 e constantes $k > 0$ e $\nu > 0$ tais que para todo $x \in U$, a solução $\varphi(t)$ de* (1.3) *tal que $\varphi(0) = x$ está definida e em U para todo $t \geqslant 0$, e*

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leqslant ke^{-\nu t}\|x - x_0\|,\ \forall\ t \geqslant 0.$$

Em particular, x_0 é assintoticamente estável.

Demonstração. Como f é de classe C^1 o desenvolvimento de Taylor de $f(x)$ em torno de x_0 nos dá

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + g(x_0, x),$$

com $g(x_0, x) = \mathbf{o}(\|x\|)$, quando $x \to 0$. Então

$$g(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0).$$

Fazendo a mudança

$$y(t) = x(t) - x_0, \tag{1.11}$$

a equação (1.3) fica

$$\dot{y}(t) = f(y + x_0).$$

Somando e subtraindo $f(x_0)$ e $Df(x_0)y$ na equação acima, temos

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= Df(x_0)y + f(y + x_0) - f(x_0) - Df(x_0)y + f(x_0)\\ &= Df(x_0) + g(x_0, y),\end{aligned}$$

onde $g(x_0, y) = f(y + x_0) - f(x_0) - Df(x_0)y = \mathbf{o}(\|y\|)$, quando $y \to 0$, ou seja, $\lim\limits_{\|y\| \to 0} \dfrac{\|g(x_0, y)\|}{\|y\|} = 0$.

Agora podemos aplicar o teorema anterior para o sistema

$$\dot{y} = Df(x_0)y + g(x_0, y) \tag{1.12}$$

para estudar estabilidade assintótica da solução nula de (1.12) e depois concluir a estabilidade assintótica do ponto singular x_0 do sistema (1.3).

Como $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tem todos os autovalores com parte real negativa e $g(x_0, y) = \mathbf{o}(|y|)$, quando $y \to 0$, pelo Teorema 1.2.1, (desigualdade (1.9)) temos

$$\|y(t)\| \leqslant k e^{-\frac{\mu}{2}t}\|y\|, \ t \geqslant 0,$$

com $\|y\| < \delta$, onde $y(0) = y$ e $y(t)$ é solução de (1.12).

Retornando as variáveis $x(t) = y(t) - x_0$, obtemos

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant k e^{-\frac{\mu}{2}t}\|x - x_0\|, \ t \geqslant 0,$$

com $x \in B(x_0, \delta)$, onde $x(0) = x$.

Assim para toda $\varphi(t)$ solução de (1.3) com $\varphi(0) = x$ e chamando $\dfrac{\mu}{2} = \nu$ temos

$$\|\varphi(t) - x_0\| \leqslant k e^{-\nu t}\|x - x_0\|, \ t \geqslant 0,$$

para $x \in B(x_0, \delta)$.

Pela equivalência das normas em espaços de dimensão finita, podemos considerar uma norma adequada em $\mathbb{R}^n$ para que toda solução começando na bola de centro x_0 e raio δ permanece nessa bola quando o tempo cresce.

Além disso, x_0 é assintoticamente estável, pois

$$\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t) - x_0\| \leqslant \lim_{t\to\infty} ke^{-\nu t}\delta = 0$$

Portanto $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = x_0$, e assim x_0 é assintoticamente estável. □

1.3 O segundo método de Liapunov

O matemático e engenheiro russo A. M. Liapunov em sua tese de doutorado (1982) encontrou um importante critério para a estabilidade de pontos singulares. Esse critério ficou conhecido como *método direto* ou *segundo método de Liapunov*. Esse método surgiu com a tentativa de estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio sem qualquer conhecimento das soluções das equações diferenciais, ou seja, sem usar a forma explícita das soluções. Nesse método tentamos chegar a conclusões sobre estabilidade diretamente usando funções apropriadas que são definidas no espaço de fase. Essas funções são chamadas Funções de Liapunov. Introduziremos nesta seção o segundo método de Liapunov para fazer o estudo de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade de pontos de equilíbrio.

Denotemos a partir de agora a solução de (1.3) passando por $x \in \Delta$ por $\varphi_x : I \to \Delta$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é o intervalo maximal da solução, com $\varphi_x(0) = x$.

Definição 1.3.1 *Seja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então para cada $x \in \Omega$ definimos a derivada da função $V(x)$ ao longo da solução $\varphi_x(t)$ em $t = 0$ como sendo*

$$\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(\varphi_x(t))|_{t=0} = \nabla V(x) \cdot f(x).$$

Definição 1.3.2 *Seja x_0 um ponto singular de* (1.3). *Uma função de Liapunov para x_0 é uma função $V : \Omega \to \mathbb{R}$ diferenciável, definida em um aberto $\Omega \ni x_0$, satisfazendo* *a)* $V(x_0) = 0$ *e* $V(x) > 0, \ \forall \ x \neq x_0$*;*

b) $\dot{V}(x) \leqslant 0, \ \forall \ x \in \Omega$.

A função de Liapunov V *diz-se estrita quando*

c) $\dot{V}(x) < 0, \ \forall \ x \in \Omega - \{x_0\}$.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Liapunov) *Seja* x_0 *um ponto singular de* (1.3)*.*

a) *Se existe uma função de Liapunov para* x_0*, então* x_0 *é estável.*

b) *Se a função for estrita,* x_0 *é assintoticamente estável.*

Demonstração. **a**) Seja $V : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de Liapunov para x_0. Vamos mostrar que o ponto singular x_0 é estável, ou seja, queremos mostrar que para qualquer vizinhança U de x_0, existe uma vizinhança U_1 de x_0 tal que $U_1 \subset U$ e $\varphi_x(t) \in U$, para quaisquer $x \in U_1$ e $t \geqslant 0$.

Seja U' uma vizinhança qualquer de x_0. Chamemos $U = U' \cap \Omega$ e observemos que U é aberto e $x_0 \in U$.

Escolhemos $\alpha > 0$ tal que $\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| \leqslant \alpha\} \subset U$.

Como V é contínua e o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - x_0\| = \alpha\} \subset \Omega$ é compacto, temos que existe

$$m = \min\{V(x); \|x - x_0\| = \alpha\},$$

ou seja, o mínimo é atingido e $m > 0$ já que $V(x) > 0$ para $x \in \Omega - \{x_0\}$.

Novamente pela continuidade da V e como $V(x_0) = 0$, segue que existe um $\delta > 0, \delta < \alpha$ tal que $\|x - x_0\| < \delta$ implica $V(x) < m$.

Seja $U_1 = B(x_0, \delta)$. Segue que $U_1 \subset B \subset U \Rightarrow U_1 \subset U$.

Resta provar que $\varphi_x(t) \in U, \ \forall \ x \in U_1$ e $t \geqslant 0$.

Como $\dot{V}(x) = \dfrac{d}{dt} V(\varphi_x(t))|_{t=0} \leqslant 0$, temos que V decresce ao longo das trajetórias de (1.3). Dado qualquer $x \in U_1$ suponha que $\varphi_x(t) \notin U$, para algum $t > 0$. Em particular temos $\varphi_x(t) \notin B(x_0, \delta)$ e portanto, como $x \in U_1 \subset B(x_0, \alpha) \subset U$, em algum instante t^*, com $0 < t^* < t$ a trajetória por x deve passar pela primeira vez pela esfera de centro x_0 e raio α, ou seja, $\|\varphi_x(t^*) - x_0\| = \alpha$.

Então $V(\varphi_x(0)) = V(x) < m \leqslant V(\varphi_x(t^*))$, onde a última desigualdade segue do fato de m ser o mínimo de $V(x)$ em S. Mas isto contraria o fato de que V decresce ao longo das trajetórias de (1.3).

Portanto x_0 é estável.

b) Pelo item (a) resta mostrar que $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_x(t) = x_0,\ \forall\ x \in U_1$.

Consideremos o conjunto $\overline{B} \subset U$ como no item (a). Suponhamos que $\dot{V}(x) < 0$ em $\Omega - \{x_0\}$ e portanto V é estritamente decrescente ao longo das trajetórias de (1.3).

Pelo item (a) se $x \in B(x_0, \delta)$ então $\varphi_x(t) \subset B(x_0, \alpha),\ \forall\ t \geqslant 0$.

Provemos inicialmente que $V(\varphi_x(t)) \to 0$, quando $t \to +\infty$ e depois que $\varphi_x(t) \to x_0$, quando $t \to +\infty$.

Como $\dot{V}(\varphi_x(t)) < 0$ temos que $V(\varphi_x(t))$ é decrescente ao longo das trajetórias de (1.3). Então $V(\varphi_x(t)) \to l \geqslant 0$. Suponhamos que $l > 0$ e consideremos o conjunto compacto $A = \{x \in \Omega : \|x - x_0\| \leqslant \alpha \text{ e } V(x) \geqslant l\}$. Temos então que $\varphi(t) \in A,\ \forall\ t \geqslant 0$.

Seja $0 < \eta := \min\{-\dot{V}(x), x \in A\}$. Logo, $-\dot{V}(\varphi_x(t)) \geqslant \eta,\ \forall\ t \geqslant 0$. Daí integrando, temos

$$V(\varphi_x(t)) - V(x) \leqslant -\eta t,\ \forall t \geqslant 0,$$

ou seja,

$$V(\varphi_x(t)) \leqslant V(x) - \eta t,\ \forall\ t \geqslant 0. \tag{1.13}$$

Se $\beta, \mu > 0$ satisfazem $0 < \beta < V(x) \leqslant \mu$, para $\delta < \|x - x_0\| < \alpha$, então para $t \geqslant \dfrac{\mu - \beta}{\eta} > 0$, temos $\eta t \geqslant \mu - \beta$ e assim $-\eta t \leqslant \beta - \mu$.

Voltando em (1.13) temos

$$V(\varphi_x(t)) \leqslant V(x) - \eta t \leqslant \mu + \beta - \mu = \beta,$$

o que é um absurdo.

Logo $l = 0$ e $V(\varphi_x(t)) \to 0$, quando $t \to +\infty$.

Vamos mostrar agora que $\varphi_x(t) \to x_0$, quando $t \to +\infty$. Suponhamos que não. Logo, existe uma sequência (t_m), $t_m \to +\infty$ tal que $\|\varphi_x(t_m) - x_0\| \geqslant \rho > 0,\ \forall\ m$.

Como A é compacto pode-se encontrar uma sequência (τ_m) tal que $\varphi_x(\tau_m) \to y$, com $y \neq x_0$. Daí pela continuidade da V temos $\varphi_x(\tau_m) \to y > 0$, o que é um absurdo pois

$V(\varphi_x(t)) \to 0$, quando $t \to +\infty$ e $V(y) \neq 0$.

Portanto x_0 é assintoticamente estável. $\square$

Vejamos a seguir alguns exemplos nos quais aplicamos os Teoremas de Liapunov.

Exemplo 1.3.1 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2x(x+y)^2 \\ \dot{y} = -y^3 + 2y^3(x+y)^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.14}$$

Para encontrar os pontos singulares de (1.14) *temos que resolver o seguinte sistema de equações*

$$\begin{cases} x(2(x+y)^2 - 1) = 0 \\ y^3(2(x+y)^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

de onde temos

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ ou } (x+y)^2 &= \frac{1}{2} \\ y^3 = 0 \text{ ou } (x+y)^2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Disto segue que $(0,0)$ *é um ponto singular. Além disso,* $(x+y)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x+y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$*, ou seja, os demais pontos singulares estão sobre as retas* $y = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $y = -x - \frac{\sqrt{2}}{2}$*. Logo a origem é um ponto singular isolado do sistema* (1.14).

Observe que não é possível aplicar o Teorema 1.2.1*, pois*

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem autovalores $\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_2 = -1$ *e nem todos têm parte real negativa.*

Sejam W *uma vizinhança de* $(0,0)$ *e* $V : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função definida por* $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Facilmente vemos que

- V *é diferenciável,*
- $V(0,0) = 0$ *e*

- $V(x,y) > 0,\ \forall\ (x,y) \neq (0,0)$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= x\dot{x} + y\dot{y}\\ &= x(-x + 2x(x+y)^2) + y(-y^3 + 2y^3(x+y)^2)\\ &= -x^2 + 2x^2(x+y)^2 - y^4 + 2y^4(x+y)^2\\ &= 2(x+y)^2(x^2+y^4) - (x^2+y^4)\\ &= (2(x+y)^2 - 1)(x^2+y^4) < 0,\end{aligned}$$

em uma vizinhança W da origem, suficientemente pequena.

Assim $V : W \to \mathbb{R}$ é uma função de Liapunov estrita para a $(0,0)$.

Portanto a origem é assintoticamente estável.

Exemplo 1.3.2 *Consideremos agora o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2 \\ \dot{y} = -x^3, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.15}$$

É fácil ver que a origem é o único ponto singular do sistema (1.15). De fato, da última equação segue que $x = 0$, daí $y - xy^2 = 0 \Leftrightarrow y(1-xy) = 0$ e então $y = 0$ ou $xy = 1$. Mas $x = 0$ e conseqüentemente $xy = 0$ o que nos dá $y = 0$.

Portanto $(0,0)$ é o único ponto singular do sistema (1.15).

Consideremos a função $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $V(x,y) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{2}y^2$.

Facilmente vemos que

- *V é diferenciável,*
- *$V(0,0) = 0$ e*
- *$V(x,y) > 0,\ \forall\ (x,y) \neq (0,0)$.*

Além disso

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= x^3\dot{x} + y\dot{y}\\ &= x^3(y - xy^2) + y(-x^3)\\ &= x^3y - x^4y^2 - x^3y\\ &= -x^4y^2 \leqslant 0,\ \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

ou seja, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é uma função de Liapunov para a origem.*

Portanto $(0,0)$ *é uma singularidade estável do sistema* (1.15).

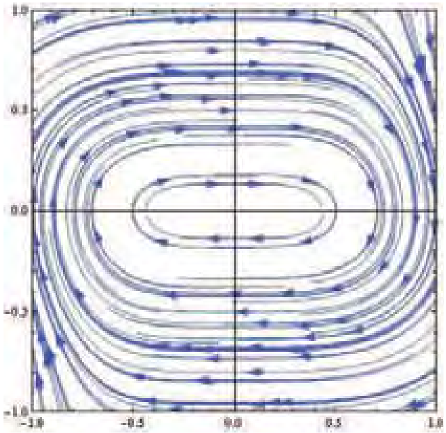

Figura 1.4: Retrato de Fase de (1.15)

Exemplo 1.3.3 *Consideremos agora o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = -x - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{1.16}$$

Observe que este sistema pode ser escrito da forma

$$\dot{X} = AX,$$

onde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *e* $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Como $\det A \neq 0$ *temos que a origem é a única singularidade do sistema* (1.16).

Consideremos a função $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $V(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Facilmente vemos que

- V *é diferenciável,*
- $V(0,0) = 0$ *e*
- $V(x,y) > 0, \ \forall \ (x,y) \neq (0,0)$.

Além disso

$$\begin{aligned}\dot{V}(x,y) &= x\dot{x} + y\dot{y}\\ &= x(y-x) + y(-x-y)^2\\ &= xy - x^2 - xy - y^2\\ &= -(x^2+y^2) < 0,\ \forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Portanto a origem é assintoticamente estável.

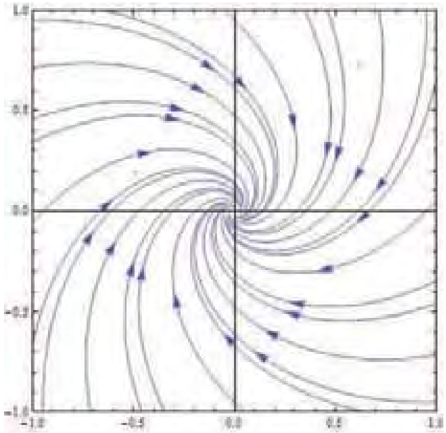

Figura 1.5: Retrato de Fase de (1.16)

Teorema 1.3.2 (1º Teorema de Instabilidade de Liapunov) *Suponhamos que x_0 é um ponto singular de* (1.3)*. Se existe uma função $V : U \to \mathbb{R}$ diferenciável, com $x_0 \in U$ e U aberto, tal que $V(x_0) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall\ x \neq x_0$ e $\dot{V}(x) > 0$, $\forall\ x \neq x_0$ então x_0 é instável.*

Demonstração. Seja $M = \max\{V(x); x \in \overline{B(x_0,\alpha)}\}$. O máximo é atingido pois V é contínua e $\overline{B(x_0,\alpha)}$ é compacto.

Como $\dot{V} > 0$ segue que V é estritamente crescente ao longo das trajetórias $\varphi_x(t)$ de (1.3), assim para todo $\delta > 0$, $\delta < \alpha$ e $x \in B(x_0,\delta)\backslash\{x_0\}$, temos

$$V(\varphi_x(t)) > V(\varphi_x(0)) = V(x),\ \forall\ t > 0.$$

Sendo $\dot{V}$ definida positiva existe $m > 0$ tal que

$$\inf_{t\geqslant 0} \dot{V}(\varphi_x(t)) = m.$$

Pelo Teorema do Valor Médio existe $\tilde{t} \in (0,t)$, tal que

$$V(\varphi_x(t)) - V(x) = \dot{V}(\varphi_x(\tilde{t}))t \geqslant mt, \ \forall t \geqslant 0.$$

Portanto

$$V(\varphi_x(t)) \geqslant mt + V(x) > mt > M$$

para t suficientemente grande, isto é, $\varphi_x(t)$ sai fora do conjunto fechado $\overline{B(x_0,\alpha)}$. Logo x_0 é instável. □

Exemplo 1.3.4 *Consideremos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y(z-1) + x \\ \dot{y} = -x(z-1) + y \\ \dot{z} = z^3, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.17}$$

Observemos que a origem é a única singularidade do sistema (1.17). *De fato, da última equação segue que* $z = 0$. *Então usando as duas primeiras equações devemos ter*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz acima é não singular segue que a origem é a única singularidade do sistema (1.17).

Considerar a função $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definida por* $V(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$.

Vemos que

- V *é diferenciável,*
- $V(0,0,0) = 0$ *e*
- $V(x,y,z) > 0, \ \forall \ (x,y,z) \neq (0,0,0)$.

Além disso

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y,z) &= 2x\dot{x} + 4y\dot{y} + 2z\dot{z} \\ &= 2x(2y(z-1)+x) + 4y(-x(z-1)+y) + 2z(z^3) \\ &= 4xyz - 4xy + 2x^2 - 4xyz + 4xy + 4y^2 + 2z^4 \\ &= 2x^2 + 4y^4 + 2z^4 > 0, \quad \forall \ (x,y,z) \neq (0,0,0) \end{aligned}$$

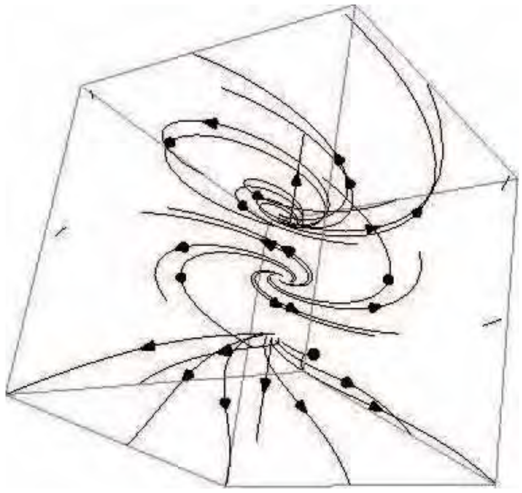

Figura 1.6: Retrato de Fase de (1.17)

Logo, a função V satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3.2 *e portanto a solução nula do sistema* (1.17) *é instável.*

1.4 Funções homogêneas

Nesta seção vamos estudar alguns resultados importantes sobre funções homogêneas e generalizadas homogêneas. Para maiores detalhes ver [9] e [13].

Definição 1.4.1 *Sejam $\Omega = (-h, h) \times \ldots \times (-h, h) \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, onde h é uma constante positiva suficientemente pequena, e $V : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que V é semidefinida positiva (negativa) em Ω se $V(0) = 0$ e $V(x) \geqslant 0$ $(V(x) \leqslant 0)$. Se $V(0) = 0$ e $V(x) > 0$ $(V(x) < 0)$, para $x \neq 0$ então a função V é chamada positiva (negativa) definida.*

Dizemos que a função V tem sinal definido em Ω se para $x \in \Omega$ ela é definida positiva ou negativa

Definição 1.4.2 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto satisfazendo $\lambda x \in U$, para todo $x \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Dizemos que f é uma função homogênea de grau $\alpha \in \mathbb{R}$ se para todo $x \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se*

$$f(\lambda x) = \lambda^{\alpha} f(x).$$

Lema 1.4.1 *Sejam Ω um subconjunto aberto contendo a origem, $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função homogênea de grau m com sinal definido e $W : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função arbitrária a qual se anula quando $x = 0$. Suponhamos que para cada $x \in \Omega$ vale a desigualdade*

$$|W(x_1, \ldots, x_n)| < \epsilon\{|x_1| + \ldots + |x_n|\}^m, \tag{1.18}$$

onde ϵ é um número positivo suficientemente pequeno, o qual depende exclusivamente dos coeficientes da V.

Então a função

$$U(x_1, \ldots, x_n) = V(x_1, \ldots, x_n) + W(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.19}$$

também terá sinal definido numa vizinhança de $x = 0$, que será o mesmo sinal da V.

Demonstração. Dado $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tem-se $x = \rho\alpha$ onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\| = 1\}$ e $\rho = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. Consideremos ρ suficientemente pequeno tal que $x \in \Omega$. Assim,

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \rho^m V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + W(\rho\alpha_1, \ldots, \rho\alpha_n). \tag{1.20}$$

Seja ρ suficientemente pequeno tal que $x = \rho\alpha \in \Omega$ e V é uma forma definida positiva. De (1.18) e do fato de $\alpha \in \mathbf{S}^1$ segue

$$\begin{aligned} |W(\rho\alpha_1, \ldots, \rho\alpha_n)| &< \epsilon\{|\rho\alpha_1| + \ldots + |\rho\alpha_n|\}^m \\ &= \epsilon\rho^m\{|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n|\}^m \\ &< \epsilon\rho^m n^m. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Seja $l = \inf\limits_{\alpha \in \mathbf{S}^1} V(\alpha)$, assim

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \geqslant l. \tag{1.22}$$

Facilmente vemos que $l > 0$ pois $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é uma forma positiva e pode assumir na esfera $\mathbf{S}^1$ somente valores positivos.

De (1.20), (1.21) e (1.22) temos

$$U(x_1, \ldots, x_n) \geqslant \rho^m l - \epsilon\rho^m n^m = \rho^m(l - \epsilon n^m).$$

Se $\epsilon < \dfrac{l}{n^m}$, então a função U toma somente valores positivos, exceto na origem.

Portanto U é definida positiva.

O raciocínio é análogo se V for definida negativa. $\square$

Sejam agora $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $V : \Omega \to \mathbb{R}$ e uma função arbitrária expandida em potências de $x_1, \ldots, x_n$ em alguma vizinhança da origem. Suponha que essa decomposição começa com membros de uma ordem arbitrária m, então podemos escrever

$$V(x_1, \ldots, x_n) = V_m(x_1, \ldots, x_n) + V^*(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.23}$$

onde V_m é uma função homogênea de grau m e V^* é uma função que tem os termos de graus superiores. A função V^* deve se anular quando $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Então para uma vizinhança suficientemente pequena da origem vale o seguinte resultado.

Lema 1.4.2 *Seja V uma função dada satisfazendo* (1.23). *Se V_m é uma função com sinal definido, então a função V terá o mesmo sinal da V_m.*

Assim, o sinal definido de funções analíticas são determinados pela totalidade de membros de menor ordem na expansão dessas funções, com exceção do caso quando a totalidade de membros de menor ordem não tiver sinal definido.

Em seguida vamos definir o conceito de *função generalizada homogênea* e enunciar um resultado que nos garante estabilidade assintótica da solução nula.

Definição 1.4.3 *Seja $f : U \to \mathbb{R}$ uma função, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto satisfazendo $(\lambda^{m_1} x_1, \ldots, \lambda^{m_n} x_n) \in U$, para todo $x \in U$, todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e m_i, $i = 1, \ldots, n$, sendo números racionais positivos. Dizemos que f é uma função generalizada homogênea de classe $(m_1, \ldots, m_n)$ de ordem m se para todo $x \in U$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale a seguinte igualdade*

$$f(\lambda^{m_1} x_1, \ldots, \lambda^{m_n} x_n) = \lambda^m f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.24}$$

onde m_i, $i = 1, \ldots, n$, e m são números racionais positivos; $m_i = \frac{p_i}{q_i}$, $m = \frac{p}{q}$; os números q_i, $i = 1, \ldots, n$, e q são ímpares.

Teorema 1.4.1 *A fim de que a função $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, seja generalizada homogênea de classe $(m_1, \ldots, m_n)$ de ordem m é necessário e suficiente que*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = mf.$$

Demonstração. A demostração deste teorema segue diretamente derivando a ambos os lados da igualdade (1.24). □

Teorema 1.4.2 *A fim de que a solução nula do sistema* (1.3) *seja assintoticamente estável, é necessário e suficiente que existam funções contínuas V e W definidas em $U \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

a) *A função W é definida negativa e a função V é definida positiva;*

b) *As funções V e W são generalizadas homogêneas de classe $(m_1, \ldots, m_n)$ e de ordem $m - \sigma$ e m, respectivamente $(\sigma > 0)$;*

c) *A função V é continuamente diferenciável ao longo das trajetórias do sistema* (1.3) *e vale a seguinte relação*

$$\frac{dV}{dt} = W.$$

Se as funções $f_i(x_i)$ são continuamente diferenciáveis , então as funções V e W podem ser escolhidas também continuamente diferenciáveis e as condições **b**) *e* **c**) *podem ser escritas na forma do sistema linear de equações em derivadas parciais*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = W$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \frac{\partial V}{\partial x_i} = (m - \sigma)V$$
$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \frac{\partial W}{\partial x_i} = mW.$$

Demonstração. A prova deste teorema está em [13], páginas 185 e 186. □

Capítulo 2

O problema de Aizerman

Neste Capítulo vamos ver o problema de Aizerman o qual motiva o estudo do problema principal deste trabalho. Maiores detalhes podem ser vistos em [4] e [8].

2.1 Motivação

Consideremos a equação linear de segunda ordem

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \tag{2.1}$$

e também a equação não linear

$$\ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0 \tag{2.2}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e $f(0) = 0$.

Se $a > 0$ e $b > 0$ então a solução nula da equação (2.1) é assintoticamente estável. A condição $b > 0$ pode ser considerada como a condição que a reta $y = bx$ fica localizada no primeiro e no terceiro quadrante do plano de coordenadas. É natural considerar a seguinte questão: *Se o gráfico da função $y = f(x)$ é também localizado no primeiro e no terceiro quadrante, a solução nula da equação* (2.2) *é assintoticamente estável?* Em outras palavras, impor as condições $a > 0$ e $xf(x) > 0$ garante a estabilidade assintótica da solução nula de (2.2) ou são necessárias algumas condições adicionais?

Observe que a equação (2.1) pode ser escrita na forma de um sistema bidimensional de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -bx_1 - ax_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

o qual é um caso particular de (2.4).

2.2 O problema de Aizerman

Vamos considerar o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + bx_2 \\ \dot{x_2} = cx_1 + dx_2 \end{cases} \tag{2.4}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente,

$$\dot{x} = Ax,$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica da solução nula de (2.4) é que os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz A satisfaçam

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, 2. \tag{2.5}$$

Derivando a primeira equação em (2.4), substituindo x_2 e $\dot{x}_2$ obtemos

$$\ddot{x}_1 - (a + d)\dot{x}_1 + (ad - bc)x_1 = 0 \tag{2.6}$$

que é da forma (2.1). Neste caso as condições que garantem que a solução nula de (2.6) é assintóticamente estável são

$$a + d < 0 \quad \text{e} \quad ad - bc > 0 \tag{2.7}$$

que são chamadas de condições de Routh-Hurwitz.

Consideremos agora o sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f(x_1) + bx_2 \\ \dot{x_2} = cx_1 + dx_2 \end{cases} \tag{2.8}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não linear e $f(0) = 0$. Observe que este sistema é uma perturbação não linear de (2.4).

O problema de Aizerman consiste em encontrar condições suficientes para a estabilidade assintótica do sistema (2.8) tendo em vista as condições suficientes para a estabilidade assintótica da solução nula de (2.4).

Vejamos agora um resultado importante sobre a estabilidade assintótica da solução nula de (2.8).

Teorema 2.2.1 *Se as condições*

$$\frac{f(x_1)}{x_1} + d < 0 \quad e \tag{2.9}$$

$$d\frac{f(x_1)}{x_1} - bc > 0 \tag{2.10}$$

são satisfeitas para $x_1 \neq 0$*, então a solução nula do sistema* (2.8) *é assintoticamente estável.*

Demonstração. Considerar a seguinte função

$$V(x_1, x_2) = (dx_1 - bx_2)^2 + 2d\int_0^{x_1} f(\xi)d\xi - bcx_1^2, \tag{2.11}$$

a qual pode ser escrita na forma

$$V(x_1, x_2) = (dx_1 - bx_2)^2 + 2\int_0^{x_1} (df(\xi) - bc\xi)d\xi.$$

Facilmente vemos que $V(0, 0) = 0$ e de (2.10) segue que a função V é definida positiva.

Seja $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ uma solução de (2.8) tal que $\gamma(0) = (x_1, x_2)$. Derivando V ao longo de γ, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\gamma(t)) \mid_{t=0} &= 2d^2x_1\dot{x_1} - 2bd\dot{x_1}x_2 - 2bd\dot{x_2}x_1 + 2b^2x_2\dot{x_2} + 2df(x_1)\dot{x_1} - 2bcx_1\dot{x_1} \\ &= 2d^2x_1f(x_1) - 2dcbx_1^2 + 2df^2(x_1) - 2bcx_1f(x_1) \\ &= -2[bcdx_1^2 + bcx_1f(x_1) - d^2x_1f(x_1) - df^2(x_1)] \\ &= -2\left(\frac{f(x_1)}{x_1} + d\right)\left(bc - \frac{f(x_1)}{x_1}d\right)x_1^2. \end{aligned}$$

De (2.9) e (2.10) temos $\dot{V}(x_1, x_2) \leqslant 0$, $\forall\ (x_1, x_2) \neq 0$ e vale zero somente na reta $x = 0$. Além disso, desde que $\dot{x} \neq 0$ para $y \neq 0$ a condição (14.12), página 68 de [8] é satisfeita. Então a função V satisfaz as condições do Teorema 14.1, página 67 de [8] e portanto a solução nula do sistema (2.8) é assintoticamente estável. $\square$

Agora vejamos outras perturbações do sistema (2.4).

Sejam $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas não lineares tal que $f_i(0) = 0$, $i = 1, 2$.

Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f(x_1) + bx_2 \\ \dot{x_2} = cx_1 + f_2(x_2); \end{cases} \tag{2.12}$$

As condições suficientes para a estabilidade assintótica da solução nula do sistema (2.12) são

$$\frac{f_1(x_1)}{x_1} + \frac{f_2(x_2)}{x_2} < 0, \quad \frac{f_1(x_1)}{x_1}\frac{f_2(x_2)}{x_2} - bc > 0, x_1, x_2 \neq 0.$$

Já para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + f_1(x_2) \\ \dot{x_2} = f_2(x_1) + dx_2 \end{cases} \tag{2.13}$$

são suficientes as condições

$$a + d < 0, \quad ad - \frac{f_1(x_2)}{x_2}\frac{f_2(x_1)}{x_1} > 0, \quad x_1, x_2 \neq 0.$$

E para o sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1) + bx_2 \\ \dot{x_2} = f_2(x_1) + dx_2 \end{cases} \tag{2.14}$$

são suficientes as condições

$$\frac{f_1(x_1)}{x_1} + d < 0, \quad \frac{f_1(x_1)}{x_1}d - b\frac{f_2(x_1)}{x_1} > 0, \quad x_1 \neq 0.$$

Observação 2.2.1 *Em Krasovski* [*8*](*ver página* 109) *podemos ver que estudos mais gerais foram feitos para sistemas da forma*

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + b_{i1}f_{i1}(x_1) + \ldots + b_{in}f_{in}(x_n), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.15}$$

onde a_{ij} *e* b_{ij} *são constantes e* f_{ij} *são funções contínuas não lineares. Para resolver o problema de estabilidade da solução nula deste tipo de sistema, Lurie e Postnikov tiveram a idéia de construir a função de Liapunov* V *para o sistema* (2.15) *que dependa tanto das integrais das funções* f_{ij} *quanto da forma quadrática dos argumentos* $x_1, \ldots, x_n$. *Essa função* V *tem a forma*

$$V = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \int_0^{x_j} f_{ij}(\xi) d\xi. \tag{2.16}$$

Observe que o sistema (2.8) *é um caso particular de* (2.15) *e a função de Liapunov usada para provar a estabilidade assintótica da solução nula de* (2.8) *foi construída a partir da função* (2.16).

Capítulo 3

Estabilidade assintótica de uma classe de sistemas não lineares

Este é o Capítulo central do trabalho no qual vamos usar o resultados do capítulos anteriores. As refêrencias usadas neste capítulo são [1], [2], [3] e [12].

3.1 Apresentação do problema

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x_1} = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\mu}(x_2) \\ \dot{x_2} = cf_1^{\eta}(x_1) + df_2^{\zeta}(x_2) \end{cases} \tag{3.1}$$

onde a, b, c e d são coeficientes constantes, λ, μ, η e ζ são números racionais positivos com numeradores e denominadores ímpares, as funções $f_i : (-h, h) \to \mathbb{R}$ são contínuas e h é uma constante positiva e satisfazem as condições

$$\begin{gathered} f_i(0) = 0, i = 1, 2 \\ x_i f_i(x_i) > 0, \text{para } x_i \neq 0, i = 1, 2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Das condições dadas em (3.2) segue que a origem é o único ponto de equilíbrio de (3.1).

Vamos estudar daqui em diante a estabilidade assintótica da solução nula de sistemas da forma (3.1) utilizando o segundo método de Liapunov. Para isso, usaremos funções de Liapunov que envolvam as integrais das funções $f_i, i = 1, 2$. A idéia de construir tais funções foi de Lurie e Postnikov, e foram bastante utilizadas no problema de Aizerman, como a função (2.16). A diferença aqui é que nosso sistema não possui parte linear e assim nossas funções dependem apenas das integrais das funções $f_i, i = 1, 2$.

Sistemas da forma (3.1) são amplamente usados na análise de sistemas de controle automático e foram estudados em [1], [2], [3], [12], entre outros.

O problema da estabilidade do sistema (3.1) é a generalização do Problema de Aizerman que vimos no capítulo anterior.

Para estudar a estabilidade de sistemas da forma (3.1) vamos considerar os seguintes casos.

3.2 Caso 1: $\lambda = \mu = \eta = \zeta = 1$

Neste caso temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = af_1(x_1) + bf_2(x_2) \\ \dot{x_2} = cf_1(x_1) + df_2(x_2) \end{cases} \tag{3.3}$$

onde a, b, c e d são coeficientes constantes e as funções f_i satisfazem (3.2)

Observação 3.2.1 *Se $ad - bc \neq 0$ então a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema* (3.3).

De fato, encontrar os pontos críticos de (3.3) *é equivalente encontrar $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $AF(x) = 0$, onde*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_2) \end{bmatrix}.$$

Se $\det A \neq 0$ então x é ponto de equilíbrio do sistema (3.3) *se $F(x) = 0$, i.e.,*

$$f_1(x_1) = 0 \;\; e \;\; f_2(x_2) = 0.$$

Definamos $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x_1) = f_2(x_2) = 0\}$. É imediato ver que $(0, 0) \in S$. Mostremos que $S \subset \{(0, 0)\}$. Suponha que existe $(z_1, z_2) \in S$ com $\|(z_1, z_2)\| > 0$. Daí

$f_1(z_1) = 0$ e $f_2(z_2) = 0$ e consequentemente $z_j f(z_j) = 0$, $j = 1, 2$. Mas isto contradiz (3.2).

Observação 3.2.2 *Se* $\det A = 0$ *então a solução nula do sistema* (3.3) *não pode ser assintoticamente estável.*

De fato, se $\det A = 0$ *então* $ad = bc \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d} = \lambda$. *Daí o sistema* (3.3) *fica da forma*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \lambda c f_1(x_1) + \lambda d f_2(x_2) \\ \dot{x_2} = c f_1(x_1) + d f_2(x_2), \end{cases}$$

ou seja, $\dot{x_1} = \lambda \dot{x_2}$, *o que implica* $\dot{x_1} - \lambda \dot{x_2} = 0$.

Daí temos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2/dt}{dx_1/dt} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow dx_1 = \lambda dx_2.$$

Integrando obtemos $x_1 - \lambda x_2 = c$.

Consideremos a função $H(x_1, x_2) = x_1 - \lambda x_2$. *Seja* $(x_1(t), x_2(t))$ *uma solução de* (3.3), *então* $\dot{H}(x_1(t), x_2(t)) = 0$, *ou seja,* H *é constante ao longo das soluções de* (3.3) *e portanto é uma integral primeira. Em particular, cada órbita do sistema* (3.3) *permanece confinada a uma única curva de nível*

$$H_c = \{(x_1, x_2); H(x_1, x_2) = c\}$$

da integral primeira H.

Logo, a solução nula de (3.3) *não pode ser assintoticamente estável.*

Consideremos agora a seguinte função

$$V(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} f_1(\tau)d\tau + \alpha \int_0^{x_2} f_2(\tau)d\tau, \quad \alpha > 0 \tag{3.4}$$

A idéia é encontrar um valor positivo da constante α tal que a função V definida em (3.4) seja uma função de Liapunov para a solução nula do sistema (3.3). O Teorema seguinte nos dá condições necessárias e suficientes para que isso ocorra.

Teorema 3.2.1 *O sistema* (3.3) *tem uma função de Liapunov estrita para a solução nula da forma* (3.4) *se e somente se*

$$a < 0, \quad d < 0, \quad e \quad ad - bc > 0. \tag{3.5}$$

Demonstração. Primeiramente mostremos que $V(x_1, x_2) > 0$, $\forall\ (x_1, x_2) \neq (0,0)$.

De fato, de (3.2) temos que x_i e $f_i(x_i)$ têm o mesmo sinal. Como as funções f_i estão definidas para $|x_i| < h$, então para $x_i \in (-h, 0)$ temos que $f_i(x_i) < 0$ e daí

$$\int_0^{x_i} f_i(\tau)d\tau = -\int_{x_i}^0 f_i(\tau)d\tau > 0.$$

Agora, se $x \in (0, h)$ temos que $f_i(x_i) > 0$ e daí $\displaystyle\int_0^{x_i} f_i(\tau)d\tau > 0$.

Portanto $V(x_1, x_2) > 0$ para todo $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Além disso $V(0,0) = 0$. Logo a função V é definida positiva.

Seja $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ a solução do sistema (3.3) tal que $\gamma(0) = (x_1, x_2)$. Então

$$V(\gamma(t)) = \int_0^{x_1(t)} f_1(\tau)d\tau + \alpha \int_0^{x_2(t)} f_2(\tau)d\tau.$$

Chamando $u = x_1(t)$ e $v = x_2(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(\gamma(t)) &= \left(\frac{d}{du}\int_0^u f_1(\tau)d\tau\right)\frac{du}{dt} + \alpha\left(\frac{d}{dv}\int_0^v f_2(\tau)d\tau\right)\frac{dv}{dt} \\
&= f_1(u)\frac{du}{dt} + \alpha f_2(v)\frac{dv}{dt} \\
&= f_1(x_1(t))\dot{x}_1(t) + \alpha f_2(x_2(t))\dot{x}_2(t)
\end{aligned}$$

e calculando,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V(\gamma(t))|_{t=0} &= f_1(x_1)(af_1(x_1) + bf_2(x_2)) + \alpha f_2(x_2)(cf_1(x_1) + df_2(x_2)) \\
&= af_1^2(x_1) + bf_1(x_1)f_2(x_2) + \alpha c f_1(x_1)f_2(x_2) + \alpha d f_2^2(x_2).
\end{aligned}$$

Chamando $f_1(x_1) = y_1$ e $f_2(x_2) = y_2$, definamos

$$\frac{d}{dt}V(\gamma(t))|_{t=0} =: W = ay_1^2 + by_1y_2 + \alpha c y_1 y_2 + \alpha d y_2^2. \tag{3.6}$$

Agora nosso problema se reduz a encontrar condições necessárias e sufucientes para que a função W seja definida negativa. Vamos considerar alguns casos.

Caso $bc > 0$.

Observe que W pode ser vista como a forma quadrática

$$W = y^T A y, \quad \text{onde } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Suponhamos que W é definida negativa. Então, se $\alpha = \dfrac{b}{c} > 0$ a matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é simétrica. Daí os autovalores de A

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+\alpha d) \pm \sqrt{(a+\alpha d)^2 - 4\alpha(ad-bc)}}{2}$$

são negativos e satisfazem

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + \alpha d, \tag{3.8}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha(ad - bc). \tag{3.9}$$

Como $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, temos $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ e $\lambda_1\lambda_2 > 0$.

Assim, da equação (3.9) e do fato de $\alpha > 0$, segue que $ad - bc > 0$ e consequentemente $ad > bc > 0$. Logo a e d têm o mesmo sinal e por (3.8) concluímos que ambos são negativos.

Portanto

$$a < 0, d < 0, \text{ e } ad - bc > 0.$$

Suponhamos agora que valem as desigualdades (3.5). Daí, $a + \alpha d < 0$ e $ad - bc > 0$

Por (3.9) segue que $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e isto implica que λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal. E finalmente de (3.8) concluímos que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$.

Como os autovalores de A são todos negativos segue que a forma quadrática W é definida negativa, ou seja, $W(y_1, y_2) < 0, \ \forall \ (y_1, y_2) \neq (0,0)$ e portanto (3.4) é uma função de Liapunov estrita para a solução nula do sistema (3.3).

Caso $bc < 0$.

Se tomarmos $\alpha = -\dfrac{b}{c} > 0$ temos

$$W = ay_1^2 + \alpha d y_2^2. \tag{3.10}$$

Suponhamos que a função W é definida negativa e olhemos novamente para W como a forma quadrática

$$W = y^T B y, \quad \text{onde} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \alpha d \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Assim os autovalores de B são todos negativos, ou seja, $a < 0$ e $\alpha d < 0$. Como $\alpha > 0$, segue que

$$a < 0 \quad \text{e} \quad d < 0.$$

Suponhamos agora que valem as desigualdades (3.5). Neste caso apenas com as desigualdades

$$a < 0 \quad \text{e} \quad d < 0$$

concluímos facilmente que $W(y_1, y_2) < 0, \ \forall \ (y_1, y_2) \neq (0,0)$.

Caso $bc = 0$.

Se $b = c = 0$ então a função W é da forma (3.10) portanto o resultado é válido para todo $\alpha > 0$.

Se $b = 0$ e $c \neq 0$ então temos

$$W(y_1, y_2) = a y_1^2 + \alpha c y_1 y_2 + \alpha y_2^2, \tag{3.12}$$

e neste caso sua forma quadrática é

$$W = y^T C y, \quad \text{onde} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} a & \frac{\alpha c}{2} \\ \frac{\alpha c}{2} & \alpha d \end{bmatrix}. \tag{3.13}$$

Os autovalores de C são da forma

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + \alpha d) \pm \sqrt{(a + \alpha d)^2 - 4\alpha a d + (\alpha c)^2}}{2}$$

e satisfazem

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha a d - \frac{(\alpha c)^2}{4} \tag{3.14}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + \alpha d. \tag{3.15}$$

Suponhamos que $W(y_1, y_2) < 0, \ \forall \ (y_1, y_2) \neq (0,0)$, então $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ e consequentemente $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Daí segue de (3.15) que $a + \alpha d < 0$.

Temos também que $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e de (3.14) segue que $\alpha ad > \dfrac{(\alpha c)^2}{4}$ e assim, $ad > 0$ o que implica que $a < 0$ e $d < 0$.

Suponhamos agora que $a < 0$ e $d < 0$. Então $a + \alpha d < 0$ e de (3.15) segue que $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$.

Agora queremos $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Então de (3.14) segue que

$$\alpha ad - \frac{(\alpha c)^2}{4} > 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{4ad}{c^2}.$$

Assim, se tomarmos $0 < \alpha < \dfrac{4ad}{c^2}$ teremos $\lambda_1\lambda_2 > 0$ e portanto $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$.

Logo $W(y_1, y_2) < 0, \ \forall \ (y_1, y_2) \neq 0$.

Se $c = 0$ e $b \neq 0$ então

$$W = ay_1^2 + by_1y_2 + \alpha dy_2^2, \tag{3.16}$$

e daí

$$W = y^T Dy, \quad \text{onde} \quad D = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & \alpha d \end{bmatrix}. \tag{3.17}$$

Os autovalores de D são

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + \alpha d) \pm \sqrt{(a + \alpha d)^2 - 4\alpha ad + b^2}}{2}$$

e satisfazem

$$\lambda_1\lambda_2 = \alpha ad - \frac{b^2}{4} \tag{3.18}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a + \alpha d. \tag{3.19}$$

Suponhamos que W seja definida negativa. Daí $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$ e então de (3.19) segue que $a + \alpha d < 0$.

Temos também que $\lambda_1\lambda_2 = \alpha ad - \dfrac{b^2}{4} > 0$ o que implica que $ad > \dfrac{b^2}{4}$ e assim $ad > 0$.

Do fato de $a + \alpha d < 0$ segue que $a < 0$ e $d < 0$.

Suponhamos agora que $a < 0$ e $d < 0$. Daí $a + \alpha d = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$. Também $\lambda_1\lambda_2 = \alpha ad - \dfrac{b^2}{4} > 0 \Leftrightarrow \alpha > \dfrac{b^2}{4ad}$.

Então para todo $\alpha > \dfrac{b^2}{4ad}$ teremos $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$.

Portanto $W(y_1, y_2) < 0, \ \forall \ (y_1, y_2) \neq (0,0)$. $\square$

O Teorema 3.2.1 nos garante que se um sistema do tipo (3.3) satisfaz as condições (3.5) então existe uma função de Liapunov estrita para $(0,0)$. Logo pelo Teorema 1.3.1 a solução nula do sistema é assintoticamente estável.

Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 3.2.1 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{3x_1}{1+x_1^2} + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{6x_1}{1+x_1^2} - 5x_2. \end{cases} \tag{3.20}$$

As funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ *dadas por* $f_1(x_1) = \dfrac{x_1}{1+x_1^2}$ *e* $f_2(x_2) = x_2$ *são contínuas, além disso satisfazem as condições* (3.2).

Observe que a origem é o único ponto singular do sistema (3.20).

Neste sistema $a = -3, b = 1, c = -6$ *e* $d = -5$. *Então* $a < 0, d < 0$ *e* $ad - bc = 21 > 0$. *Assim pelo Teorema* 3.2.1 *a solução nula é dos sistema* (3.20) *é assintoticamente estável.*

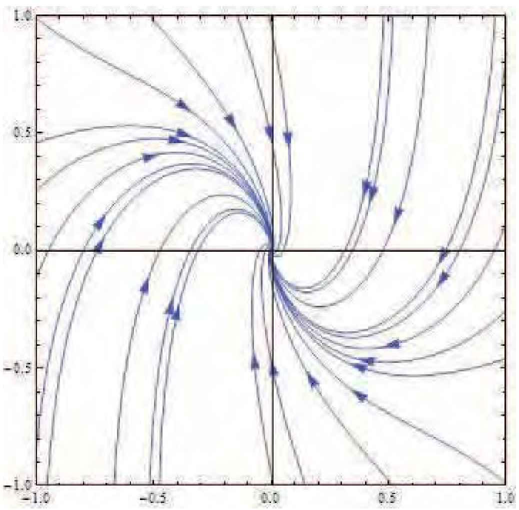

Figura 3.1: Retrato de Fase de (3.20)

Exemplo 3.2.2 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x^3 + 2\operatorname{sen} y \\ \dot{y} = x^3 - \operatorname{sen} y \end{cases} \tag{3.21}$$

As funções $f_1(x) = x^3$ *e* $f_2(y) = \sin y$ *são contínuas, além disso* $xf_1(x) > 0$ *e* $yf_2(y) > 0$ *para* $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. *Observemos também que para* $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema* (3.21).

Neste sistema $a = -5, b = 2, c = 1$ *e* $d = -1$. *Logo* $a < 0, d < 0$ *e* $ad - bc = 3 > 0$. *Assim pelo Teorema* 3.2.1 *a solução nula é assintoticamente estável.*

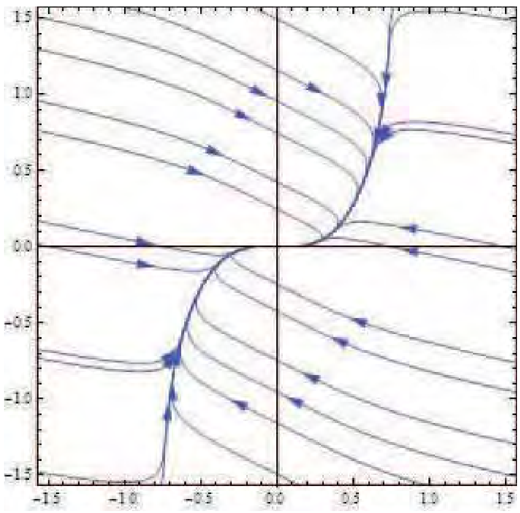

Figura 3.2: Retrato de Fase de (3.21)

Exemplo 3.2.3 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2f_1(x_1) + 4f_2(x_2) \\ \dot{x}_2 = -f_1(x_1) - f_2(x_2) \end{cases} \tag{3.22}$$

onde $f_1(x_1) = \begin{cases} \dfrac{x_1}{2}, & x_1 < 1 \\ \dfrac{x_1}{1+x_1^2}, & x_1 \geqslant 1 \end{cases}$ *e* $f_2(x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_2}{4}, & x_2 < 1 \\ \dfrac{x_2}{3+x_2^2}, & x_2 \geqslant 1 \end{cases}$.

É fácil ver que as funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, 2$ *são contínuas e satisfazem as condições* (3.2).

Neste sistema temos $a = -2, b = 4, c = -1$ *e* $d = -1$. *Assim* $a < 0, d < 0$ *e* $ad - bc = 6 > 0$. *Portanto pelo Teorema* 3.2.1 *a solução nula do sistema* (3.22) *é assintoticamente estável.*

Teorema 3.2.2 *A função* (3.4) *satisfaz as hipóteses do 1º Teorema de Instabilidade de Liapunov para a solução nula do sistema* (3.3), *se e somente se*

$$a > 0, \quad d > 0 \quad e \quad ad - bc > 0 \tag{3.23}$$

Demonstração. Como vimos no Teorema anterior, $V(0,0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$, $\forall\ (x_1, x_2) \neq (0,0)$. Resta mostrar que $\dot{V}(x_1, x_2) > 0$, $\forall\ (x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Como no Teorema anterior consideremos a função W dada por

$$W = ay_1^2 + by_1y_2 + \alpha cy_1y_2 + \alpha dy_2^2, \tag{3.24}$$

e olhemos para ela como uma forma quadrática, assim como foi feito no Teorema anterior.

Vamos analisar os seguintes casos.

Caso $bc > 0$.

Neste caso W é a mesma forma quadrática definida em (3.7), com $\alpha = \dfrac{b}{c} > 0$.

Suponhamos que $W(y_1, y_2) > 0$, $\forall\ (y_1, y_2) \neq (0,0)$. Daí os autovalores λ_1 e λ_2 de A são positivos e além disso satisfazem (3.8) e (3.9)

Como $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ segue de (3.9) que $ad - bc > 0$. Além disso $ad > bc > 0$ e de (3.8) segue que $a > 0$ e $d > 0$.

Suponhamos agora que $a > 0, d > 0$ e $ad - bc > 0$. De (3.9) segue que λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal e do fato de $\lambda_1 + \lambda_2 = a + \alpha d > 0$ segue que ambos são positivos.

Portanto W é definida positiva.

Caso $bc < 0$.

Considerando o mesmo α do caso $bc < 0$ do Teorema anterior a função W é da forma (3.10) e sua forma quadrática é (3.11).

Suponhamos que $W(y_1, y_2) > 0$, $\forall\ (y_1, y_2) \neq (0,0)$. Daí, os autovalores a e αd de A são positivos, e como $\alpha > 0$ segue que $a > 0$ e $d > 0$.

Suponhamos agora que valem as desigualdades $a > 0$ e $d > 0$. É imediato ver que $W(y_1, y_2) > 0$, $\forall\ (y_1, y_2) \neq (0,0)$.

Caso $bc = 0$.

Se $b = c = 0$ então W é da forma (3.10) e o resultado vale para qualquer $\alpha > 0$.

Suponhamos $b = 0$ e $c \neq 0$ a função W é da forma (3.12), a sua forma quadrática é a mesma que em (3.13).

Suponhamos que W seja definida negativa, então $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ e com cálculos semelhantes aos do Teorema anterior concluímos que $a > 0$ e $d > 0$.

Agora se supormos $a > 0$ e $d > 0$ e tomarmos $0 < \alpha < \dfrac{4ad}{c^2}$ vamos ter W definida negativa.

Se $c = 0$ e $b \neq 0$ daí a função fica como em (3.16) e sua forma quadrática (3.17).

Suponhamos W definida positiva. Então $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$. Assim, de (3.19) temos $a + \alpha d > 0$ e além disso de (3.18) $\alpha ad - \dfrac{b^2}{4} > 0$, ou seja, $ad > 0$ e portanto $a > 0$ e $d > 0$.

Suponhamos agora $a > 0$ e $d > 0$. Então de (3.19) temos $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$ e de (3.18) temos $\lambda_1\lambda_2 = \alpha ad - \dfrac{b^2}{4} > 0 \Leftrightarrow \alpha > \dfrac{b^2}{4ad}$.

Portanto tomando $\alpha > \dfrac{b^2}{4ad}$ teremos $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ e assim W é definida positiva. □

O Teorema anterior nos garante que se acontece (3.23) então a solução nula do sistema (3.3) é instável.

Exemplo 3.2.4 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{3x_1}{1 + x_1^2} + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{6x_1}{1 + x_1^2} + 5x_2. \end{cases} \tag{3.25}$$

As funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ dadas por $f_1(x_1) = \dfrac{x_1}{1 + x_1^2}$ e $f_2(x_2) = x_2$ são contínuas, além disso satisfazem as condições (3.2).

Neste sistema $a = 3, b = 1, c = -6$ e $d = 5$. Então $a > 0, d > 0$ e $ad - bc = 21 > 0$. Assim pelo Teorema 3.2.2 *a solução nula do sistema* (3.25) *é instável.*

Exemplo 3.2.5 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x^3 + 2\operatorname{sen} y \\ \dot{y} = x^3 + \operatorname{sen} y. \end{cases} \tag{3.26}$$

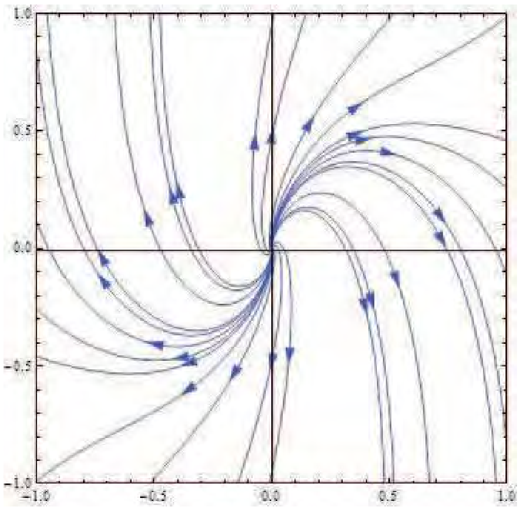

Figura 3.3: Retrato de Fase de (3.25)

As funções $f_1(x) = x^3$ *e* $f_2(y) = \sin y$ *são contínuas, além disso* $xf_1(x) > 0$ *e* $yf_2(y) > 0$ *para* $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Observemos também que para $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *a origem é o único ponto de equilíbrio do sistema acima.*

Neste sistema $a = 5, b = 2, c = 1$ *e* $d = 1$. *Então* $a > 0, d > 0$ *e* $ad - bc = 3 > 0$. *Assim pelo Teorema* 3.2.2 *a solução nula do sistema* (3.26) *é instável.*

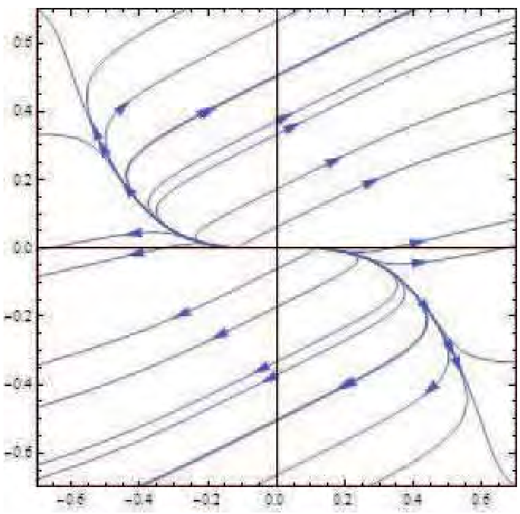

Figura 3.4: Retrato de Fase de (3.26)

3.3 Caso 2: $\lambda = \mu \neq 1$ e $\eta = \zeta = 1$

Neste caso o sistema (3.1) tem a forma

$$\begin{cases} \dot{x_1} = af_1^{\lambda}(x_1) + bf_2^{\lambda}(x_2) \\ \dot{x_2} = cf_1(x_1) + d\, f_2(x_2) \end{cases} \tag{3.27}$$

onde a, b, c, d são constantes, λ é um número racional positivo com numerador e denominador ímpares e as funções f_i satisfazem (3.2).

Consideremos a seguinte função

$$V(x_1, x_2) = \alpha \int_0^{x_1} f_1(\tau)d\tau + \int_0^{x_2} f_2^{\lambda}(\tau)d\tau, \quad \alpha > 0. \tag{3.28}$$

É imediato ver que $V(0,0) = 0$ e usando a segunda condição de (3.2) temos $V(x_1, x_2) > 0, \forall\, (x_1, x_2) \neq (0,0)$, ou seja, a função V é definida positiva.

Derivando V ao longo da solução $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ de (3.27), com $\gamma(0) = (x_1, x_2)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\gamma(t))|_{t=0} &= \alpha f_1(x_1)\dot{x}_1 + f_2^{\lambda}(x_2)\dot{x_2} \\ &= \alpha a f_1^{\lambda+1}(x_1) + (\alpha b + c) f_1(x_1) f_2^{\lambda}(x_2) + d f_2^{\lambda+1}(x_2). \end{aligned}$$

Chamando $f_1(x_1) = y_1$ e $f_2(x_2) = y_2$, definamos

$$\frac{d}{dt}V(\gamma(t))|_{t=0} =: W(y_1, y_2) = \alpha a y_1^{\lambda+1} + (\alpha b + c) y_1 y_2^{\lambda} + d y_2^{\lambda+1}. \tag{3.29}$$

Vamos analisar primeiramente o caso $bc = 0$.

Teorema 3.3.1 *Suponhamos que $a < 0$ e $d < 0$.*

a) *Se $b = c = 0$ então a função W é definida negativa para qualquer valor positivo da constante α.*

b) *Se $b = 0$ e $c \neq 0$ então W é definida negativa se e somente se*

$$\alpha > \frac{1}{a}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{\lambda}\left(\frac{c}{\lambda+1}\right)^{\lambda+1}. \tag{3.30}$$

c) *Se $c = 0$ e $b \neq 0$ então W é definida negativa se e somente se*

$$0 < \alpha < a^{\frac{1}{\lambda}}\frac{d}{\lambda}\left(\frac{\lambda+1}{b}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}. \tag{3.31}$$

Demonstração. a) Se $b = c = 0$ então teremos

$$W(y_1, y_2) = \alpha a y_1^{\lambda+1} + d y_2^{\lambda+1}$$

e como $a < 0$, $d < 0$ e $\lambda + 1$ tem numerador par segue que W é definida negativa.

b) Se $b = 0$ e $c \neq 0$ teremos

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \alpha a y_1^{\lambda+1} + c y_1 y_2^{\lambda} + d y_2^{\lambda+1} \\ &= y_2^{\lambda+1}\left(\alpha a \frac{y_1^{\lambda+1}}{y_2^{\lambda+1}} + c\frac{y_1}{y_2} + d\right) \\ &= y_2^{\lambda+1}(\theta(\alpha, z) + d), \end{aligned}$$

onde $\theta(\alpha, z) = \alpha a z^{\lambda+1} + cz$ e $z = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Como $\lambda + 1$ tem numerador par segue que W é definida negativa se e somente se

$$\theta(\alpha, z) + d < 0, \ \forall \ z \in \mathbb{R}.$$

Para obter o domínio máximo no espaço dos coeficientes do sistema (3.27) vamos procurar por

$$\gamma = \inf_{\alpha > 0} \max_{z \in \mathbb{R}} \theta(\alpha, z).$$

Definimos $\theta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\theta_\alpha(z) = \alpha a z^{\lambda+1} + cz$. Claramente vemos que θ_α é de classe $\mathcal{C}^1$. Vamos encontrar $\max\limits_{z \in \mathbb{R}} \theta_\alpha(z)$.

Temos

$$\theta'_\alpha(z) = \alpha a(\lambda + 1) z^{\lambda} + c,$$

daí

$$\theta'_\alpha(z^*) = 0 \Leftrightarrow z^* = \left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda + 1)}\right]^{\frac{1}{\lambda}},$$

ou seja, z^* é ponto crítico de θ_α.

Além disso,

$$\theta''_\alpha(z^*) = \alpha a(\lambda + 1)\lambda \left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda + 1)}\right]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} < 0.$$

Portanto z^* é ponto de máximo de θ_α.

Definamos agora a função $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= \max_{z\in\mathbb{R}} \theta_\alpha(z) \\
&= \alpha a \left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda+1)}\right]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} + c\left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \\
&= -\lambda \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{c}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} > 0.
\end{aligned}$$

Como

$$\Phi'(\alpha) = a\left(\frac{c}{\alpha a(\lambda+1)}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \neq 0,\ \forall\, \alpha \in (0, +\infty),$$

teremos W definida negativa se e somente se $\theta(\alpha, z^*) + d < 0$.

Então

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha, z^*) + d < 0 &\Leftrightarrow -\lambda \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{c}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} + d < 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{a}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{\lambda}\left(\frac{c}{\lambda+1}\right)^{\lambda+1}.
\end{aligned}$$

Portanto se $a < 0$, $d < 0$ e

$$\alpha > \frac{1}{a}\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{\lambda}\left(\frac{c}{\lambda+1}\right)^{\lambda+1}$$

a função W é definida negativa.

c) Se $c = 0$ e $b \neq 0$ teremos

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2) &= \alpha a y_1^{\lambda+1} + \alpha b y_1 y_2^{\lambda} + d y_2^{\lambda+1} \\
&= y_2^{\lambda+1}\left(\alpha a \frac{y_1^{\lambda+1}}{y_2^{\lambda+1}} + \alpha b \frac{y_1}{y_2} + d\right) \\
&= y_2^{\lambda+1}(\theta(\alpha, z) + d),
\end{aligned}$$

onde $\theta(\alpha, z) = \alpha a z^{\lambda+1} + \alpha b z$ e $z = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Fixando α, consideremos a função $\theta_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\theta_\alpha(z) = \alpha a z^{\lambda+1} + \alpha b z.$$

Derivando esta função, temos

$$\theta'_\alpha(z) = \alpha a(\lambda+1)z^{\lambda} + \alpha b$$

e daí

$$\theta'_\alpha(z^*) = 0 \Leftrightarrow z^* = \left[\frac{-b}{a(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Além disso

$$\theta''_\alpha(z^*) = \alpha a(\lambda+1)\lambda \left[\frac{-b}{a(\lambda+1)}\right]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}} < 0.$$

Portanto z^* é ponto de máximo de θ_α.

Consideremos agora a função $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha) &= \theta(\alpha, z^*) \\
&= \alpha a \left[\frac{-b}{a(\lambda+1)}\right]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} + \alpha b \left[\frac{-b}{a(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{\lambda}} \\
&= \alpha \left[\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{b}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} - \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} b^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \left(\frac{1}{\lambda+1}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \right] \\
&= -\alpha\lambda \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{b}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} > 0.
\end{aligned}$$

Como

$$\Phi'(\alpha) = -\lambda \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{b}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} \neq 0.$$

seguindo o mesmo raciocínio do item **a)** segue que

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha, z^*) + d < 0 &\Leftrightarrow -\alpha\lambda \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{b}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} + d < 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha\lambda \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} \left(\frac{b}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}} > d \\
&\Leftrightarrow \alpha < a^{\frac{1}{\lambda}} \frac{d}{\lambda} \left(\frac{b}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Portanto se $a < 0$, $d < 0$ e

$$0 < \alpha < a^{\frac{1}{\lambda}} \frac{d}{\lambda} \left(\frac{b}{\lambda+1}\right)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}$$

a função W é definida negativa. □

Consideremos agora o caso $bc \neq 0$. Vamos dividí-lo em dois teoremas.

Teorema 3.3.2 *Seja $bc < 0$. Para a existência de um número $\alpha > 0$ tal que a função* (3.29) *seja definida negativa é necessário e suficiente que*

$$a < 0 \quad e \quad d < 0. \tag{3.32}$$

Demonstração. Neste caso podemos tomar $\alpha = -\dfrac{c}{b} > 0$ e assim a função W tem a forma

$$W(y_1, y_2) = \alpha a y_1^{\lambda+1} + d y_2^{\lambda+1}.$$

Olhemos para W como uma forma quadrática

$$W = y^T A y,$$

onde $y = \begin{bmatrix} y_1^{\frac{\lambda+1}{2}} \\ y_2^{\frac{\lambda+1}{2}} \end{bmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

Suponhamos que W é definida negativa, assim os autovalores de A são todos negativos, ou seja, $\alpha a < 0$ e $d < 0$. Como $\alpha > 0$, segue que

$$a < 0 \quad \text{e} \quad d < 0.$$

Suponhamos agora que

$$a < 0 \quad \text{e} \quad d < 0,$$

daí

$$W(y_1, y_2) = \alpha a y_1^{\lambda+1} + d y_2^{\lambda+1} < 0,$$

pois $\lambda + 1$ tem numerador par e portanto W é definida negativa. □

Teorema 3.3.3 *Seja $bc > 0$. Se*

$$a < 0, \quad d < 0 \quad e \quad ad^\lambda - bc^\lambda > 0. \tag{3.33}$$

então existe um número $\alpha > 0$ tal que a função (3.29) *é definida negativa.*

Demonstração. Consideremos

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \alpha a y_1^{\lambda+1} + (\alpha b + c) y_1 y_2^\lambda + d y_2^{\lambda+1} \\ &= y_2^{\lambda+1} \left(\alpha a \frac{y_1^{\lambda+1}}{y_2^{\lambda+1}} + (\alpha b + c) \frac{y_1}{y_2} + d \right) \\ &= y_2^{\lambda+1} (\theta(\alpha, z) + d) \end{aligned}$$

onde $\theta(\alpha,z)=\alpha a z^{\lambda+1}+(\alpha b+c)z$ e $z=\dfrac{y_1}{y_2}$.

Desde que $\lambda+1$ tem numerador par segue que W é definida negativa se e somente se $\theta(\alpha,z)+d<0$.

Seguindo o mesmo raciocínio do Teorema 3.3.1, devemos procurar por

$$\gamma=\inf_{\alpha>0}\max_{z\in\mathbb{R}}\theta(\alpha,z).$$

Seja $\alpha>0$ qualquer e consideremos a função $\theta_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$\theta_\alpha(z)=\alpha a z^{\lambda+1}+(\alpha b+c)z.$$

Vamos encontrar $\max\limits_{z\in\mathbb{R}}\theta_\alpha(z)$.

Derivando $\theta_\alpha(z)$ com relação a z tem-se

$$\theta'_\alpha(z)=\alpha a(\lambda+1)z^\lambda+(\alpha b+c).$$

O ponto $z^*=\left[\dfrac{-(\alpha b+c)}{\alpha a(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{\lambda}}$ é um ponto crítico de $\theta_\alpha(z)$ pois $\theta'_\alpha(z^*)=0$.

Além disso,

$$\begin{aligned}\theta''_\alpha(z^*)&=\alpha a\lambda(\lambda+1)(z^*)^{\lambda-1}\\&=\alpha a\lambda(\lambda+1)\left[\frac{-(\alpha b+c)}{\alpha a(\lambda+1)}\right]^{\frac{\lambda-1}{\lambda}}<0.\end{aligned}$$

Logo z^* é ponto de máximo de $\theta_\alpha(z)$ e $\theta_\alpha(z^*)$ é o valor máximo.

Agora definamos a função $\Phi:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ por,

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha)&=\max_{z\in\mathbb{R}}\theta_\alpha(z)=\theta(\alpha,z^*)\\&=\alpha a\left[\frac{-(\alpha b+c)}{\alpha a(\lambda+1)}\right]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}+(\alpha b+c)\left[\frac{-(\alpha b+c)}{\alpha a(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\\&=\left[\frac{-(\alpha b+c)}{\alpha a(\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{\lambda}}\left[\frac{\lambda(\alpha b+c)}{\lambda+1}\right]\\&=\frac{-\lambda}{(\alpha a)^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\frac{\alpha b+c}{\lambda+1}\right]^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}.\end{aligned}$$

Derivando,

$$\begin{aligned}\Phi'(\alpha)&=\frac{-\lambda}{(\lambda+1)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\left[\frac{\frac{\lambda+1}{\lambda}(\alpha b+c)^{\frac{1}{\lambda}}b(\alpha a)^{\frac{1}{\lambda}}-(\alpha b+c)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}\frac{1}{\lambda}(\alpha a)^{\frac{1}{\lambda}-1}a}{(\alpha a)^{\frac{2}{\lambda}}}\right]\\&=\frac{(-\lambda b+\frac{c}{\alpha})}{(\lambda+1)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}\left[\frac{\alpha b+c}{\alpha a}\right]^{\frac{1}{\lambda}},\end{aligned}$$

temos,

$$\Phi'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{(-\lambda b + \frac{c}{\alpha})}{(\lambda+1)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}} \left[\frac{\alpha b + c}{\alpha a}\right]^{\frac{1}{\lambda}} = 0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda b + \frac{c}{\alpha} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha b + c}{\alpha a} = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{c}{\lambda b} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{-c}{b}.$$

Chamando $\alpha^* = \dfrac{c}{\lambda b}$, temos que $\Phi'(\alpha^*) = 0 \Leftrightarrow \alpha^* = \dfrac{c}{\lambda b}$, pois estamos considerando o caso $bc > 0$ e α^* deve ser positivo. Agora,

$$\Phi''(\alpha) = \frac{1}{(\lambda+1)^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}} \left[\frac{-c}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha b + c}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} + \left(-\lambda b + \frac{c}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\alpha b + c}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}\left(\frac{ab\alpha - (\alpha b + c)a}{(\alpha a)^2}\right)\right],$$

e

$$\Phi''(\alpha^*) = \frac{-1}{(\lambda+1)^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\frac{(\lambda b)^2}{a}\frac{b}{c}\right] > 0.$$

Portanto α^* é ponto de mínimo de $\Phi(\alpha)$.

Além disso,

$$\Phi(\alpha^*) = \frac{-\lambda}{(\frac{ac}{\lambda b})^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\frac{\frac{c}{\lambda} + c}{\lambda + 1}\right]^{1+\frac{1}{\lambda}}$$
$$= \frac{-\lambda(\lambda b)^{\frac{1}{\lambda}}}{(ac)^{\frac{1}{\lambda}}}\left[\frac{c(\frac{\lambda+1}{\lambda})}{\lambda+1}\right]^{1+\frac{1}{\lambda}}$$
$$= -c\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

ou seja, $\gamma = -c\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}}$ e o ínfimo é atingido com $\alpha = \dfrac{c}{\lambda b}$.

Se $-c\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{\lambda}} + d < 0$ teremos $\theta(\alpha, z) + d < 0$, em outras palavras, se

$$ad^\lambda - bc^\lambda > 0$$

então W é definida negativa. $\square$

Os teoremas anteriores nos dão condições suficientes para a existência de uma função de Liapunov estrita para a solução nula do sistema (3.27), logo com estas condições e pelo Teorema 1.3.1 a solução nula é assintóticamente estável.

Vejamos agora um exemplo onde aplicaremos o Teorema 3.3.3.

Exemplo 3.3.1 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3\left(\dfrac{x_1}{1+x^2}\right)^3 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{6x_1}{1+x^2} - 5x_2. \end{cases} \tag{3.34}$$

As funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $i = 1, 2$ *dadas por* $f_1(x_1) = \dfrac{x_1}{1+x_1^2}$ *e* $f_2(x_2) = x_2$ *são contínuas, além disso satisfazem as condições* (3.2).

Facilmente vemos que a origem é a única singularidade do sistema (3.34).

Neste sistema , $\lambda = 3, a = -3, b = 1, c = -6$ *e* $d = -5$*. Então* $a < 0, d < 0$ *e* $bc < 0$*.*

Portanto, pelo Teorema 3.3.2 *a solução nula do sistema* (3.34) *é assintoticamente estável.*

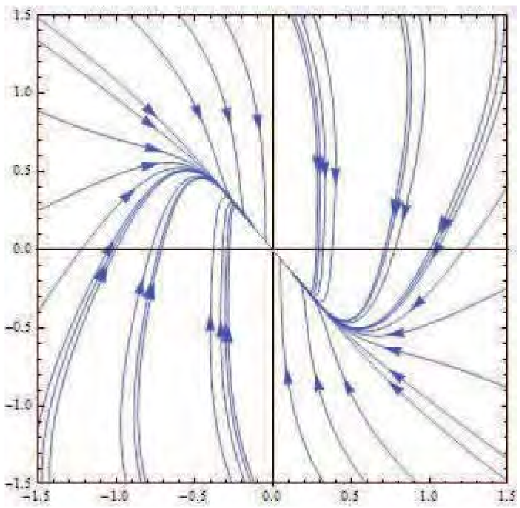

Figura 3.5: Retrato de Fase de (3.34)

3.3.1 Generalização

Os Teoremas 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3 podem ser generalizados para sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{x_k} = a_k f_k^{\lambda}(x_k) + b_k f_n^{\lambda}(x_n), \quad k = 1, \ldots, n-1 \\ \dot{x_n} = a_n f_n(x_n) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} c_i f_i(x_i) \end{cases} \tag{3.35}$$

onde λ é um número racional positivo com numerador e denominador ímpares, as funções $f_i(x_i)$ satisfazem (3.2), $i = 1, \dots, n$. Os coeficientes a_j, b_i e c_i são constantes e além disso, $a_j < 0, b_i \neq 0$ e $c_i \neq 0$, $j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, n-1$.

A função de Liapunov para o sistema (3.35) tem a forma

$$V(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k \int_0^{x_k} f_k(\tau) d\tau + \int_0^{x_n} f_n^{\lambda}(\tau) d\tau \tag{3.36}$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são constantes positivas.

Os Teoremas 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3 generalizados para um sistema n-dimensional da forma (3.35) ficam da seguinte forma.

Teorema 3.3.4 *Para a existência de números $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tais que* (3.36) *seja uma função de Liapunov estrita para* (3.35) *é necessário e suficiente que*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b_k}{a_k} \right)^{\frac{1}{\lambda}} c_k \beta_k - a_n > 0 \tag{3.37}$$

onde $\beta_k = 0$ se $b_k c_k \leqslant 0$ e $\beta_k = 1$ se $b_k c_k > 0$.

A prova deste resultado é semelhante à do Teorema 3.3.3 (ver [3]).

3.4 Caso 3: $\lambda \neq \mu$ e $\eta = \zeta = 1$

Neste caso temos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x_1} = a f_1^{\lambda}(x_1) + b f_2^{\mu}(x_2) \\ \dot{x_2} = c f_1(x_1) + d f_2(x_2). \end{cases} \tag{3.38}$$

Vamos considerar a seguinte função

$$V(x_1, x_2) = \alpha \int_0^{x_1} f_1^{\xi}(\tau) d\tau + \int_0^{x_2} f_2^{\theta}(\tau) d\tau \tag{3.39}$$

onde ξ e θ são números racionais positivos com numeradores e denominadores ímpares.

Nesta seção vamos estudar condições suficientes para que (3.39) seja uma função de Liapunov estrita para a solução nula do sistema (3.38).

Primeiramente mostremos que a função dada em (3.39) é definida positiva para cada $\alpha > 0$. De fato, da condição $x_i f_i(x_i) > 0$, para $x_i \neq 0, i = 1, 2$, segue que x_i e $f_i(x_i)$ têm o mesmo sinal.

Para $x_i \in (0, h)$ temos $x_i > 0$ e $f_i(x_i) > 0$ e portanto, para $\alpha > 0$ teremos $V(x_1, x_2) > 0$, para todo $x_i \in (0, h)$.

Agora para $x_i \in (-h, 0)$, temos $x_i < 0$ e $f_i(x_i) < 0$. Como ξ e θ têm numeradores e denominadores ímpares, segue que $f_1^{\xi}(x_1) < 0$ e $f_2^{\theta}(x_2) < 0$. Daí

$$
\begin{aligned}
V(x_1, x_2) &= \alpha \int_0^{x_1} f_1^{\xi}(\tau) d\tau + \int_0^{x_2} f_2^{\theta}(\tau) d\tau \\
&= -\alpha \int_{x_1}^{0} f_1^{\xi}(\tau) d\tau - \int_{x_2}^{0} f_2^{\theta}(\tau) d\tau \\
&= \alpha \int_{x_1}^{0} (-f_1^{\xi}(\tau)) d\tau + \int_{x_2}^{0} (-f_2^{\theta}(\tau)) d\tau > 0,
\end{aligned}
$$

para $\alpha > 0$ e $x_i \in (-h, 0)$.

Além disso, $V(0, 0) = 0$.

Portanto V é definida positiva para cada $\alpha > 0$.

Vamos agora derivar a função (3.39) ao longo das trajetórias de (3.38).

Seja $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$ a solução do sistema (3.38) com $\gamma(0) = (x_1, x_2)$. Então

$$
V(\gamma(t)) = \alpha \int_0^{x_1(t)} f_1^{\xi}(\tau) d\tau + \int_0^{x_2(t)} f_2^{\theta}(\tau) d\tau.
$$

Chamando $u = x_1(t)$ e $v = x_2(t)$ temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(\gamma(t)) &= \alpha \left(\frac{d}{du} \int_0^{u} f_1^{\xi}(\tau) d\tau \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{d}{dv} \int_0^{v} f_2^{\theta}(\tau) d\tau \right) \frac{dv}{dt} \\
&= \alpha f_1^{\xi}(u) \frac{du}{dt} + f_2^{\theta}(v) \frac{dv}{dt} \\
&= \alpha f_1^{\xi}(x_1(t)) \dot{x_1}(t) + f_2^{\theta}(x_2(t)) \dot{x_2}(t).
\end{aligned}
$$

E daí

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} V(\gamma(t)) \,|_{t=0} &= \alpha f_1^{\xi}(x_1)(a f_1^{\lambda}(x_1) + b f_2^{\mu}(x_2)) + f_2^{\theta}(x_2)(c f_1(x_1) + d f_2(x_2)) \\
&= \alpha a f_1^{\lambda+\xi}(x_1) + \alpha b f_1^{\xi}(x_1) f_2^{\mu}(x_2) + c f_1(x_1) f_2^{\theta}(x_2) + d f_2^{\theta+1}(x_2).
\end{aligned}
$$

Chamando $y_1 = f_1(x_1)$ e $y_2 = f_2(x_2)$ definimos

$$\frac{d}{dt}V(\gamma(t))\,|_{t=0} =: W = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + \alpha b y_1^{\xi} y_2^{\mu} + c y_1 y_2^{\theta} + d y_2^{\theta+1}. \tag{3.40}$$

Nosso problema agora se reduz a encontrar uma faixa para os parâmetros $a, b, c, d, \lambda, \mu, \xi$ e θ tal que existe um número $\alpha > 0$ e que a função (3.40) seja definida negativa.

Observação 3.4.1 *Os números $\lambda + \xi$ e $\theta + 1$ são racionais positivos com numeradores pares e denominadores ímpares.*

De fato, seja $\lambda = \dfrac{2n+1}{2m+1}, \xi = \dfrac{2r+1}{2s+1}, \theta = \dfrac{2k+1}{2l+1}$, *daí*

$$\lambda + \xi = \frac{2n+1}{2m+1} + \frac{2r+1}{2s+1} = \frac{2(2ns+n+s+2mr+m+r+1)}{2(2ms+m+s)+1}$$

e

$$\theta + 1 = \frac{2k+1}{2l+1} + 1 = \frac{2(k+l+1)}{2l+1}.$$

Desta forma $y_1^{\lambda+\xi} > 0$ e $y_2^{\theta+1} > 0$, para todos y_1, y_2. Então daqui pra frente vamos assumir que os coeficientes a e d são negativos.

Vamos dividir o estudo da estabilidade assintótica da solução nula do sistema (3.38) em alguns teoremas.

Teorema 3.4.1 *Se $b = c = 0$ então a função* (3.40) *é definida negativa para quaisquer valores dos parâmetros $a, d, \lambda, \mu, \xi, \theta$ e α.*

Demonstração. Para $b = c = 0$ a função (3.40) fica

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + d y_2^{\theta+1}.$$

E da observação (3.4.1) segue que W é definida negativa pois $a < 0, d < 0$ e $\alpha > 0$. □

Teorema 3.4.2 ***a**) Seja $b = 0$ e $c \neq 0$. Se $\theta + 1 > \lambda + \xi$ então a função W é definida negativa para qualquer valor positivo da constante α. Se $\theta + 1 = \lambda + \xi$ então a função W é definida negativa se e somente se*

$$\alpha > \frac{1}{a}\left(\frac{\lambda+\xi-1}{d}\right)^{\lambda+\xi-1}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\lambda+\xi}. \tag{3.41}$$

b) *Seja* $b \neq 0$ *e* $c \neq 0$ *e suponhamos que* $\mu > \lambda$. *Se* $\theta + 1 = \lambda + \xi$ *então para* W *ser definida negativa a constante* α *deve satisfazer* (3.41).

Demonstração. a) Se $b = 0$, a função (3.40) tem a forma

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + c y_1 y_2^{\theta} + d y_2^{\theta+1}.$$

Suponhamos que $\theta + 1 > \lambda + \xi$ e escrevamos a função W da seguinte forma

$$W = W_{\lambda+\xi} + W^*,$$

onde $W_{\lambda+\xi} = \alpha a y_1^{\lambda+\xi}$ e $W^* = c y_1 y_2^{\theta} + d y_2^{\theta+1}$.

Observe que W^* é uma função tal que $W^*(0,0) = 0$ e seus membros têm ordens superiores ao de $W_{\lambda+\xi}$. Como $W_{\lambda+\xi}$ é uma função homogênea definida negativa segue pelo Lema (1.4.2) que W é definida negativa.

Suponhamos agora que $\theta + 1 = \lambda + \xi$. Neste caso que W é da forma

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + c y_1 y_2^{\lambda+\xi-1} + d y_2^{\lambda+\xi}. \tag{3.42}$$

Vamos escrever a função (3.42) da seguinte forma

$$W = y_2^{\lambda+\xi}\left(\alpha a \frac{y_1^{\lambda+\xi}}{y_2^{\lambda+\xi}} + c\frac{y_1}{y_2} + d\right)$$
$$y_2^{\lambda+\xi}(\theta(\alpha, z) + d)$$

onde $\theta(\alpha, z) = \alpha a z^{\lambda+\xi} + cz$ e $z = \dfrac{y_1}{y_2}$.

Agora para α fixo, olhemos para a função de z

$$\theta_\alpha(z) = \alpha a z^{\lambda+\xi} + cz$$

cuja derivada é

$$\theta'_\alpha(z) = \alpha a(\lambda + \xi) z^{\lambda+\xi-1} + c.$$

Agora

$$\theta'_\alpha(z^*) = 0 \Leftrightarrow z^* = \left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}.$$

Portanto z^* é ponto crítico de $\theta_\alpha(z)$.

A segunda derivada de $\theta_\alpha(z)$ é

$$\theta''_\alpha(z) = \alpha a(\lambda+\xi)(\lambda+\xi-1)z^{\lambda+\xi-2}$$

e além disso

$$\theta''_\alpha(z^*) = \alpha a(\lambda+\xi)(\lambda+\xi-1)\left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi-2}{\lambda+\xi-1}} < 0.$$

Portanto z^* é ponto de máximo de $\theta_\alpha(z)$.

Vamos avaliar a função θ em z^*.

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha, z^*) &= \alpha a\left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}} + c\left[\frac{-c}{\alpha a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}} c^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{1}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}} - \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{1}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}} c^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}} \\
&= \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{1}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}} c^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}\left[\frac{1}{\lambda+\xi} - 1\right] \\
&= -\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{1}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}} c^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{\lambda+\xi-1}{\lambda+\xi}\right) \\
&= -\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}(\lambda+\xi-1) > 0.
\end{aligned}$$

Definamos a função $\Phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi(\alpha) = -\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}(\lambda+\xi-1).$$

Temos

$$\begin{aligned}
\Phi'(\alpha) &= \left(\frac{1}{\lambda+\xi-1}\right)\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}} a\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}(\lambda+\xi-1) \\
&= a\left[\frac{c}{\alpha a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}} \neq 0.
\end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio do Teorema 3.3.1, devemos encontrar o valor de α para o qual $\theta(\alpha, z^*) + d < 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\theta(\alpha, z^*) + d < 0 &\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}(\lambda+\xi-1) + d < 0\\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\alpha a}\right)^{\frac{1}{\lambda+\xi-1}}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda+\xi-1}}(\lambda+\xi-1) > d\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha a}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\lambda+\xi}(\lambda+\xi-1)^{\lambda+\xi-1} > d^{\lambda+\xi-1}\\
&\Leftrightarrow \frac{1}{a}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\lambda+\xi}\left(\frac{\lambda+\xi-1}{d}\right)^{\lambda+\xi-1} < \alpha.
\end{aligned}$$

Portanto W é definida negativa se e somente se

$$\alpha > \frac{1}{a}\left(\frac{c}{\lambda+\xi}\right)^{\lambda+\xi}\left(\frac{\lambda+\xi-1}{d}\right)^{\lambda+\xi-1}.$$

b) Neste caso temos

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + \alpha b y_1^{\xi} y_2^{\mu} + c y_1 y_2^{\lambda+\xi-1} + d y_2^{\lambda+\xi}.$$

Vamos chamar

$$W_{\lambda+\xi} = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + c y_1 y_2^{\lambda+\xi-1} + d y_2^{\lambda+\xi}$$

$$W^* = \alpha b y_1^{\xi} y_2^{\mu}.$$

Observemos que $W_{\lambda+\xi}$ é uma função homogênea de grau $\lambda+\xi$.

De fato,

$$\begin{aligned}
W(ty_1, ty_2) &= \alpha a (ty_1)^{\lambda+\xi} + c(ty_1)(ty_2)^{\lambda+\xi-1} + d(ty_2)^{\lambda+\xi}\\
&= t^{\lambda+\xi}(\alpha a y_1^{\lambda+\xi} + c y_1 y_2^{\lambda+\xi-1} + d y_2^{\lambda+\xi})\\
&= t^{\lambda+\xi} W(y_1, y_2)
\end{aligned}$$

Como $\mu > \lambda$ segue que $\mu+\xi > \lambda+\xi$, então W^* possui um elemento de ordem superior a $W_{\lambda+\xi}$.

Além disso, foi mostrado no ítem anterior que $W_{\lambda+\xi}$ é definida negativa se e somente se α satisfaz a desigualdade (3.41).

Então pelo Lema 1.4.2 o sinal de W é definido pelo sinal de $W_{\lambda+\xi}$ o qual é negativo para α satisfazendo (3.41). Portanto W é definida negativa. $\square$

Teorema 3.4.3 ***a***) *Seja $b \neq 0$ e $c = 0$. Se $\dfrac{\theta+1}{\lambda+\xi} < \dfrac{\mu}{\lambda}$ então a função W é definida negativa. Se $\dfrac{\theta+1}{\lambda+\xi} = \dfrac{\mu}{\lambda}$ então a função W é definida negativa se e somente se*

$$\alpha < \frac{d}{\lambda}\left(\frac{a}{\xi}\right)^{\frac{\xi}{\lambda}}\left(\frac{\lambda+\xi}{b}\right)^{1+\frac{\xi}{\lambda}}. \tag{3.43}$$

b) *Sejam b e c não nulos e suponhamos que $\mu > \lambda$. Se $\dfrac{\theta+1}{\lambda+\xi} = \dfrac{\mu}{\lambda}$ então para W ser definida negativa a constante α deve satisfazer* (3.43)

Demonstração. **a**) Neste caso a função W tem a forma

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+\xi} + \alpha b y_1^{\xi} y_2^{\mu} + d y_2^{\theta+1}.$$

Se $\dfrac{\theta+1}{\lambda+\xi} < \dfrac{\mu}{\lambda}$, Aleksandrov provou que W é definida negativa usando o Teorema 1.4.2 da seção 1.4. O mesmo argumento é usado na prova do Teorema 1, em [3].

Suponhamos que $\dfrac{\theta+1}{\lambda+\xi} = \dfrac{\mu}{\lambda}$ então $\theta+1 = \dfrac{(\lambda+\xi)\mu}{\lambda}$, e daí

$$\begin{aligned}
W &= y_2^{\theta+1}\left(\alpha a \frac{y_1^{\lambda+\xi}}{y_2^{\theta+1}} + \alpha b \frac{y_1^{\xi}}{y_2^{\theta+1-\mu}} + d\right)\\
&= y_2^{\theta+1}\left(\alpha a \frac{y_1^{\lambda+\xi}}{y_2^{\frac{(\lambda+\xi)\mu}{\lambda}}} + \alpha b \frac{y_1^{\xi}}{y_2^{\frac{(\lambda+\xi)\mu}{\lambda}-\mu}} + d\right)\\
&= y_2^{\theta+1}\left[\alpha a \left(\frac{y_1}{y_2^{\frac{\mu}{\lambda}}}\right)^{\lambda+\xi} + \alpha b \left(\frac{y_1}{y_2^{\frac{\mu}{\lambda}}}\right)^{\xi} + d\right]\\
&= y_2^{\theta+1}[\Phi(\alpha, z) + d]
\end{aligned}$$

onde $\Phi(\alpha, z) = \alpha a z^{\lambda+\xi} + \alpha b z^{\xi}$ e $z = \dfrac{y_1}{y_2^{\frac{\mu}{\lambda}}}$.

Como $\theta+1$ tem numerador par segue que W é definida negativa se e somente se $\Phi(\alpha, z) + d < 0$.

Vamos usar o mesmo argumento dos teoremas anteriores, ou seja, vamos encontrar

$$\inf_{\alpha>0}\max_{z\in\mathbb{R}} \Phi(\alpha, z).$$

Seja $\alpha > 0$ qualquer e consideremos a função $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Phi_\alpha(z) = \alpha a z^{\lambda+\xi} + \alpha b z^{\xi}.$$

Vamos encontrar o ponto de máximo da função Φ_α e analisar o valor da função Φ neste ponto. Primeiramente encontremos os pontos críticos da função.

$$\Phi'(z) = \alpha a(\lambda+\xi) z^{\lambda+\xi-1} + \alpha b \xi z^{\xi-1}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\Phi'_\alpha(z) = 0 &\Leftrightarrow \alpha a(\lambda+\xi) z^{\lambda+\xi-1} + \alpha b \xi z^{\xi-1} = 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha a(\lambda+\xi) z^{\lambda+\xi-1} = -\alpha b \xi z^{\xi-1} \\
&\Leftrightarrow z = \left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{1}{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Logo, $z^* := \left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{1}{\lambda}}$ é ponto crítico de Φ_α.
Temos agora

$$\Phi''_\alpha(z) = \alpha a(\lambda+\xi)(\lambda+\xi-1) z^{\lambda+\xi-2} + \alpha b \xi(\xi-1) z^{\xi-2}$$

e

$$\Phi''_\alpha(z^*) = \alpha a(\lambda+\xi)(\lambda+\xi-1)\left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi-2}{\lambda}} + \alpha b \xi(\xi-1)\left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\xi-2}{\lambda}}.$$

Queremos saber agora se z^* é ponto de máximo de Φ_α, ou seja, se $\Phi''_\alpha(z^*) < 0$. Então

$$\begin{aligned}
\Phi''_\alpha(z^*) < 0 &\Leftrightarrow \alpha a(\lambda+\xi)(\lambda+\xi-1)\left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi-2}{\lambda}} + \alpha b \xi(\xi-1)\left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\xi-2}{\lambda}} < 0 \\
&\Leftrightarrow a(\lambda+\xi)(\lambda+\xi-1) < \alpha b \xi(\xi-1)\frac{a(\lambda+\xi)}{b\xi} \\
&\Leftrightarrow \lambda+\xi-1 > \lambda+\xi,
\end{aligned}$$

que é verdade. Portanto z^* é ponto de máximo de Φ_α.

Consideremos agora a função $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \Phi(\alpha, z^*)\\ &= \alpha a \left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda}} + \alpha b \left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\xi}{\lambda}}\\ &= \alpha \left[a\left(\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right)^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda}} + b\left(\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right)^{\frac{\xi}{\lambda}}\right].\end{aligned}$$

Desde que a função Γ atinge seu ínfimo no zero, queremos que $\Phi(\alpha, z^*) + d < 0$, então

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha, z^*) + d < 0 &\Leftrightarrow \alpha a \left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda}} + \alpha b \left[\frac{-b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\xi}{\lambda}} + d < 0\\ &\Leftrightarrow \alpha a \left[\frac{b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\lambda+\xi}{\lambda}} - \alpha b \left[\frac{b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\xi}{\lambda}} < -d\\ &\Leftrightarrow -\left[\frac{b\xi}{a(\lambda+\xi)}\right]^{\frac{\xi}{\lambda}} \alpha b \frac{\lambda}{\lambda+\xi} < -d\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{b}{\lambda+\xi}\right)^{1+\frac{\xi}{\lambda}} \left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{\xi}{\lambda}} \frac{\lambda}{d} < \frac{1}{\alpha}\\ &\Leftrightarrow \alpha < \frac{d}{\lambda}\left(\frac{a}{\xi}\right)^{\frac{\xi}{\lambda}} \left(\frac{\lambda+\xi}{b}\right)^{1+\frac{\xi}{\lambda}}.\end{aligned}$$

Portanto W é definida negativa se e somente se

$$\alpha < \frac{d}{\lambda}\left(\frac{a}{\xi}\right)^{\frac{\xi}{\lambda}} \left(\frac{\lambda+\xi}{b}\right)^{1+\frac{\xi}{\lambda}}.$$

□

Teorema 3.4.4 *Sejam c e d não nulos. Uma condição necessária para que a função W seja definida negativa é*

$$\xi = 1, \quad \mu = \theta, \quad bc < 0, \quad e \quad \alpha = -\frac{c}{b}.$$

Demonstração. Supondo $\xi = 1$ e $\mu = \theta$ a função W tem a forma

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+1} + \alpha b y_1 y_2^{\mu} + c y_1 y_2^{\mu} + d y_2^{\mu+1}.$$

Como $bc < 0$ podemos tomar $\alpha = -\dfrac{c}{b} > 0$ e daí, a função W torna-se

$$W = \alpha a y_1^{\lambda+1} + d y_2^{\mu+1}$$

a qual é definida negativa, pois $a < 0, d < 0$ e $\lambda + 1$ e $\mu + 1$ têm numerador par. □

Exemplo 3.4.1 *Consideremos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -3\left(\dfrac{x_1}{1+x_1^2}\right)^3 - x_2^{\frac{11}{9}} \\ \dot{x_2} = 6\dfrac{x_1}{1+x_1^2} - 5x_2. \end{cases} \tag{3.44}$$

As funções $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f_1(x_1) = \dfrac{x_1}{1+x_1^2}$, $f_2(x_2) = x_2$ *são contínuas e satisfazem* (3.2).

Aqui temos $a = -3, b = -1, c = 6, d = -5, \lambda = 3$ *e* $\mu = \dfrac{11}{9}$. *Como* $bc = -6 < 0$ *pelo Teorema* 3.4.4 *a função* V *dada por*

$$V(x_1, x_2) = 6\int_0^{x_1} \frac{\tau}{1+\tau^2} d\tau + \int_0^{x_2} \tau^{\frac{11}{9}} d\tau$$

é uma função de Liapunov estrita para a solução nula do sistema (3.44). *Logo, pelo Teorema* 1.3.1 *a solução nula de* (3.44) *é assintoticamente estável.*

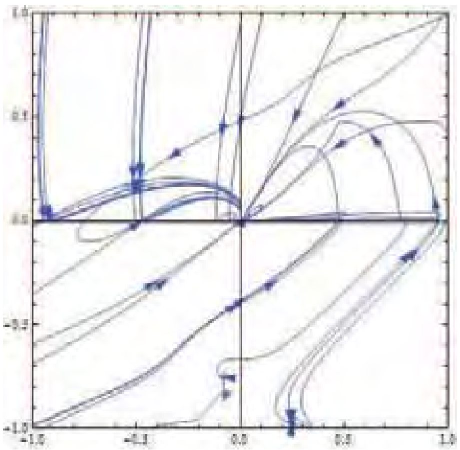

Figura 3.6: Retrato de Fase de (3.44)

Teorema 3.4.5 *Sejam* b *e* c *não nulos e suponhamos que* $\mu > \lambda$. *Se* $\theta + 1 > \xi + \lambda$ *então a função* W *é definida negativa, para qualquer valor positivo da constante* α.

Demonstração. Consideremos as funções

$$W_{\lambda+\xi} = \alpha a y_1^{\lambda+\xi}$$
$$W^* = \alpha b y_1^{\xi} y_2^{\mu} + c y_1 y_2^{\theta} + d y_2^{\theta+1}.$$

Como $\mu > \lambda$ segue que $\mu+\xi > \lambda+\xi$ e daí os termos da função W^* são de grau maior que o da função $W_{\lambda+\xi}$. Logo, pelo Lema 1.4.2 o sinal da função W é determinado pela função $W_{\lambda+\xi}$, que é homogênea e definida negativa além de $W^*(0,0) = 0$. Portanto a função W é definida negativa. $\square$

Exemplo 3.4.2 *Consideremos o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = -(\operatorname{tg} x)^{\frac{3}{5}} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{1-y^2}\right)^3 \\ \dot{y} = 3\operatorname{tg} x - \dfrac{y}{1-y^2}. \end{cases} \tag{3.45}$$

As funções $f_i : (-1,1) \to \mathbb{R}$ *dadas por* $f_1(x) = \operatorname{tg} x$, $f_2(y) = \dfrac{y}{1-y^2}$ *são contínuas e satisfazem* (3.2).

Aqui temos $a = -1, b = \dfrac{1}{2}, c = 3, d = -1, \lambda = \dfrac{3}{5}$ *e* $\mu = 3$. *Neste caso* $\mu > \lambda$, $a < 0$ *e* $d < 0$. *Logo pelo Teorema* 3.4.5 *existe uma função se Liapunov estrita para a solução nula do sistema* (3.45) *e portanto a solução nula é assintoticamente estável.*

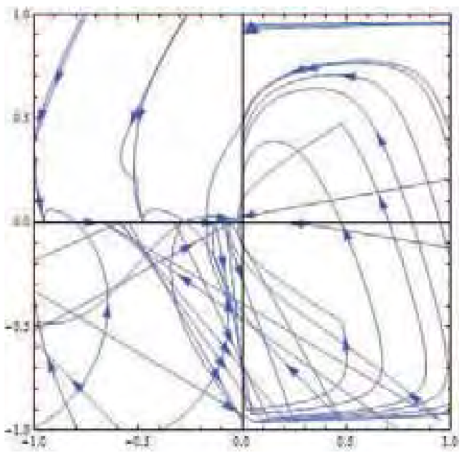

Figura 3.7: Retrato de Fase de (3.45)

Referências Bibliográficas

[1] ALEKSANDROV, A. Yu.; On the Construction of Lyapunov Functions for Nonlinear Systems, **Differential Equations**, vol. 41, nº 3, pp. 303-309, 2005.

[2] ALEKSANDROV, A.Yu.; Some Convergence and Stability Conditions for Nonlinear Systems, **Differential Equations,**, vol. 36, nº 4, pp. 613-615, 2000.

[3] ALEKSANDROV, A. Yu.; TAPINOV, P. G.; On the asymptotic stability of solutions of a class of nonlinear systems, **Izv. Akad. Nauk Teor. Sist. Upr.**, nº 2, pp. 25-30, 2002.

[4] BARBASHIN, E. A.; **Introduction to the Theory of Stability**, Groningen: Wolters-Noosdhoff, 1970.

[5] DOERING, C.I.; Lopes, A.O.; **Equações Diferenciais Ordinárias,** Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro: 2005.

[6] HAHN, W.; **Theory and Aplication of Lyapunov's Direct Method**, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1963.

[7] HIRSCH, M.W.; SMALE, S.; **Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra,** Academic Press, 1974.

[8] KRASOVSKI, N. N.; **Stability of Motion:** Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Califórnia: Stanford University Press, 1963.

[9] MALKIN, I.G.; **Teoriya ustoichivosti dvizheniya (Theory of Stability of Motion),** Moscow: 1952.

[10] PERKO, L.; **Differential Equations and Dynamical Systems**, New York: Springer-Verlag, 1991.

[11] SOTOMAYOR, J. M.; **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**, Projeto Euclides. IMPA, Rio de Janeiro: 1979.

[12] ZUBOV, V.I.; Asymptotic stability with respect to the first, in the broad sense, approximation (Russian). **Dokl. RAN.**, vol. 346, nº 3, pp.295-296, 1996.

[13] ZUBOV, V. I.; **Mathematical Methods for the Study of Automatic Control Systems**, Jerusalém: Jerusalém Academic Press, 1962.

[14] ZUBOV, V.I.; **Mathematical Theory of the Motion Stability,** Saint-Petersburg: 1997.