

CRISTIANE ALEXANDRA LAZARO

GRUPOS E PARES DE DUALIDADE E
ESTUDO DO INVARIANTE E (G.S)



1910001363





T.1363/05

Grupos e Pares de Dualidade e Estudo do Invariante $E(G,S)$

Cristiane Alexandra Lázaro

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática - IBILCE - UNESP, como parte
dos requisitos para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

São José do Rio Preto - SP
Fevereiro - 2005

+513.831

L431

9

04/03/2005

Doação

R\$ 25,00

Autor(a)

076/2005

77/05



Lázaro, Cristiane Alexandra.

Grupos e pares de dualidade e estudo do invariante $E(G,S)$ /

Cristiane Alexandra Lázaro – São José do Rio Preto : [s.n.] , 2005

108 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. (Co)homologia de grupos. 3. Grupos de dualidade. 4. Pares de dualidade. 5. Dualidade (Matemática). 6. Invariante $E(G,S)$. I. Andrade, Maria Gorete Carreira. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 515.14

“Tentar e falhar é, pelo menos, aprender.
Não chegar a tentar é sofrer a inestimável
perda do que poderia ter sido. ”

Geraldo Eustáquio



Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para esta realização. Em especial agradeço:

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, que projetou este trabalho, por toda orientação dispensada durante sua valiosa orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve para solucionar todas as minhas dúvidas e, principalmente, pelo carinho e amizade.

À Profa. Dra. Ernúlia de Lourdes Campello Fanti, pela disponibilidade que participou de algumas discussões importantes para a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, pelas sugestões durante o Exame Geral de Qualificação, pelos conselhos nos momentos de indecisão e ansiedade, por todo apoio e incentivo.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da UNESP-SLR, Preto, pela formação acadêmica e estímulo.

À amiga Carmo, por compartilhar as alegrias e dificuldades ao longo destes anos.

Aos amigos da graduação, pelos anos que estivemos juntos, compartilhando difíceis porém inesquecíveis momentos.

À amiga Sabrina por várias discussões importantes durante esse período, enriquecendo novos trabalhos.

Aos amigos de pós-graduação, pelo agradável convívio.

Aos meus pais, minha eterna gratidão, pelo apoio incondicional, pela confiança, por toda incentivo que sempre me deu para tudo que busquei realizar.

À minha irmã Camila, pelos momentos de alegria e descontração.

A toda minha família, pelo estímulo e torcida dispensados em todos os momentos.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

A Deus, por tudo.

Aos meus pais,
Alcides e Cleuza,

dedico.



Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para esta realização. Em especial agradeço:

À Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade, que projetou este trabalho, por toda dedicação dispensada durante sua valiosa orientação, pelos conhecimentos transmitidos, pela paciência e disponibilidade que sempre teve para solucionar todas as minhas dúvidas e, principalmente, pelo carinho e amizade.

À Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, pela disponibilidade com que participou de algumas discussões importantes para a realização deste trabalho.

À Profa. Dra. Aparecida Francisco da Silva, pelas sugestões durante o Exame Geral de Qualificação, pelos conselhos nos momentos de indecisão e ansiedade, por todo apoio e incentivo.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da UNESP- S.J.R. Preto, pela formação acadêmica e estímulo.

À amiga Carina, por compartilhar as alegrias e dificuldades ao longo destes anos.

Aos amigos da graduação, pelos anos que estivemos juntos, compartilhando difíceis porém inesquecíveis momentos.

À amiga Sabrina por várias discussões importantes durante esse período, enriquecendo nossos trabalhos.

Aos amigos da pós-graduação, pelo agradável convívio.

Aos meus pais, minha eterna gratidão, pelo apoio incondicional, pela confiança, por todo incentivo que sempre me deram em tudo que busquei realizar.

À minha irmã Camila, pelos momentos de alegria e descontração.

À toda minha família, pelo estímulo e torcida dispensados em todos os momentos.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

À Deus, por tudo.



Resumo

Através da teoria de (co)homologia relativa de grupos, Andrade e Fanti introduziram um invariante algébrico, denotado por $E(G, \mathcal{S}; M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S}$ é uma família de subgrupos de G de índice infinito e M é um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo.

O principal objetivo deste trabalho é estudar o invariante $E(G, \mathcal{S}; M)$ no caso particular $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$, o qual denotamos por $E(G, S)$, obtendo vários resultados e aplicações desse invariante, principalmente nos casos em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade.

Para tal propósito, fizemos um estudo das teorias de (co)homologia absoluta e relativa de grupos, relacionando às de espaços topológicos, e da teoria de grupos e pares de dualidade.

Palavras-chave: Cohomologia de Grupos, Grupos e Pares de Dualidade, Invariante $E(G, S)$.

Abstract

Based on the theory of relative cohomology of groups, Andrade e Fanti introduced an algebraic invariant, denoted by $E(G, \mathcal{S}; M)$, where G is a group, $\mathcal{S}$ is a non empty family of (not necessarily distinct) subgroups of infinite index in G and M is a $\mathbb{F}_2 G$ -module.

In this work we consider that invariant $E(G, \mathcal{S}; M)$ in the special case $\mathcal{S} = \{S\}$ and $M = \mathbb{F}_2(G/S)$, which we denote $E(G, S)$, obtaining some results and applications of that invariant, specially in the case where G and S have certain properties of duality.

For that purpose, we study absolute and relative (co)homology theories of groups, relating with these theories for topological spaces, and the theories of duality groups and pairs.

Keywords: Cohomology of Groups, Duality groups and pairs, Invariant $E(G, S)$.

1.1	$\mathbb{F}_2 G$ -módulos e Resoluções de R sobre RG	1
1.2	Cobordismo e Invariantes	18
1.3	Grupos de Dualidade	18
1.4	Módulos Induzidos e Coinduzidos	18
2	A (co)homologia de um grupo G	20
2.1	Alguns resultados sobre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{F}_2$	23
2.2	Definição e Exemplos de $H_n(G, M)$ e $H^n(G, M)$	23
2.3	O Lema de Shapiro	23
2.4	H_n e H^n como Funtores de duas variáveis	33
2.5	Interpretação Topológica para $H_n(G, M)$ e $H^n(G, M)$	37
3	(Co)homologia Relativa	48
3.1	A Definição de $H^n(G, \mathcal{S}; M)$ e $H_n(G, \mathcal{S}; M)$	48
3.2	(Co)homologia Relativa como Funtor de Duas Variáveis	48
3.3	Interpretação Topológica da (Co)homologia Relativa	54
4	Grupos e Pares de Dualidade	65
4.1	Discussão (Co)homológica	65
4.2	Resoluções de Tipo Finito	70
4.3	Grupos de Tipo FP_n	72
4.4	Grupos de Tipo FP e FL	73
4.5	Grupos de Dualidade	76
4.6	Interpretação Topológica para Grupos de Dualidade de Poincaré	81
4.7	Pares de Dualidade	83
4.8	Interpretação Topológica para Pares de Dualidade de Poincaré	86
5	O Invariante $E(G, S)$	88
5.1	A definição do invariante $E(G, S; M)$	88
5.2	Interpretação Topológica para $E(G, S; M)$	90
5.3	O Invariante $E(G, S)$	91
5.4	Interpretação Topológica de $E(G, S)$	101
5.5	O Invariante $E(G, S)$ e dualidade	102
	Referências Bibliográficas	106

Sumário

Introdução	ii
1 Preliminares	1
1.1 RG -módulos e Resoluções de R sobre RG	1
1.2 Obtenção de Resoluções via Métodos Topológicos	5
1.3 Coinvariantes e Invariantes	15
1.4 Módulos Induzidos e Coinduzidos	16
2 A (co)homologia de um grupo G	20
2.1 Alguns resultados sobre $\otimes$ e Hom	20
2.2 Definição e Exemplos de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$	23
2.3 O Lema de Shapiro	29
2.4 H_* e H^* como Funtores de duas variáveis	33
2.5 Interpretação Topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$	37
3 (Co)homologia Relativa	45
3.1 A Definição de $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ e $H_*(G, \mathcal{S}; M)$	45
3.2 (Co)homologia Relativa como functor de Duas Variáveis	46
3.3 Interpretação Topológica da (Co)homologia Relativa	56
4 Grupos e Pares de Dualidade	65
4.1 Dimensão (Co)homológica	65
4.2 Resoluções de Tipo Finito	70
4.3 Grupos de Tipo FP_n	72
4.4 Grupos de Tipo FP e FL	73
4.5 Grupos de Dualidade	76
4.6 Interpretação Topológica para Grupos de Dualidade de Poincaré	81
4.7 Pares de Dualidade	83
4.8 Interpretação Topológica para Pares de Dualidade de Poincaré	86
5 O Invariante $E(G, S)$	88
5.1 A definição do invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$	88
5.2 Interpretação Topológica para $E(G, \mathcal{S}; M)$	90
5.3 O Invariante $E(G, S)$	91
5.4 Interpretação Topológica de $E(G, S)$	101
5.5 O Invariante $E(G, S)$ e dualidade	102
Referências Bibliográficas	106

Introdução

A definição de (co)homologia relativa, $H^*(G, S; M)$ e $H_*(G, S; M)$, para um grupo G e S um subgrupo de G , foi introduzida por Ribes em [27]. Mais tarde, Bieri e Eckmann, em [4], introduziram a definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G e, em [2], Andrade e Fanti demonstraram que a definição dada por Bieri e Eckmann é uma generalização da apresentada por Ribes, no sentido que, tomando $\mathcal{S} = \{S\}$, as duas definições coincidem (a menos de isomorfismo).

Através desta teoria de (co)homologia relativa de grupos, Andrade e Fanti definiram o invariante algébrico $E(G, \mathcal{S}; M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de índice infinito em G e M é um $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo.

O objetivo deste trabalho é estudar o invariante $E(G, \mathcal{S}; M)$ no caso particular $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$, obtendo vários resultados e aplicações do invariante $E(G, \{S\}; \mathbb{Z}_2(G/S))$, denotado por $E(G, S)$, à teoria de grupos e pares de dualidade.

A seguir relatamos o objetivo de cada um dos 5 capítulos em que este trabalho está dividido.

No Capítulo 1 serão apresentados resultados da teoria de Álgebra Homológica, de fundamental importância para os capítulos posteriores. Inicialmente, introduzimos os conceitos de RG -módulos e Resoluções de R sobre RG , onde R é um anel comutativo com unidade e G um grupo denotado multiplicativamente. Em seguida, veremos como obter resoluções de R sobre RG via topologia, por meio de CW -complexos denominados $K(G, 1)$ -complexos.

Na seção seguinte, apresentamos os módulos coinvariantes e invariantes, bem como seus isomorfismos com $R \otimes_{RG} -$ e $\text{Hom}_{RG}(R, -)$, respectivamente.

Encerramos este capítulo fazendo um estudo sobre os módulos induzidos e coinduzidos, módulos estes muito importantes em todo trabalho, principalmente no isomorfismo de Shapiro e na obtenção de resultados sobre grupos e pares de dualidade e, ainda, enunciando alguns resultados importantes utilizando tais módulos.

No capítulo 2, após a apresentação de alguns resultados sobre $\otimes$ e Hom , definimos os n -ésimos grupos de homologia e cohomologia do grupo G , com coeficientes no RG -módulo M :

$$H_n(G, M) = H_n(F \otimes_{RG} M) \quad \text{e} \quad H^n(G, M) = H^n(\text{Hom}_{RG}(F, M)),$$

onde $\varepsilon : F \rightarrow R$ é uma resolução projetiva de R sobre RG . Como exemplos, calculamos $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ para os casos em que $G = F(S)$: grupo livre gerado por um conjunto S , G é um grupo cíclico infinito e cíclico finito de ordem n com gerador t .

Na próxima seção, apresentamos o Lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H , e através de resultados sobre $\text{Ind}_H^G(\text{Res}_H^G M)$ e $\text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M)$, enunciamos uma outra versão do mesmo lema. Ainda nesta seção, apresentamos uma interpretação de $H^1(G; M)$ em termos de derivações e derivações principais, a saber

$$H^1(G; M) = \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)},$$

onde $\text{Der}(G, M) = \{f : G \rightarrow M / f(xy) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in G\}$ e

$$P(G, M) = \{d_m \in \text{Der}(G, M), m \in M / d_m(g) = gm - m, \forall g \in G\}.$$

Em seguida, vendo H_* e H^* como funtores, observamos que $H_*(-, -)$ é um funtor covariante em uma determinada categoria $\mathcal{C}$, e $H^*(-, -)$ é um funtor contravariante em uma categoria $\mathcal{D}$. Além disso, apresentamos os homomorfismos cor_H^G e res_H^G , chamados de aplicação co-restrição e aplicação restrição, respectivamente, e alguns resultados envolvendo Ker res_H^G , que serão muito utilizados no último capítulo.

Para finalizar este capítulo, mostramos uma interpretação topológica para $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$, relacionando a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de um espaço $K(G, 1)$, conseguindo assim vários exemplos com cálculo de (co)homologia de um espaço topológico através da (co)homologia de um grupo e vice-versa e, temos ainda, um exemplo que nos mostra que, em geral, a homologia de um grupo G é diferente da homologia do espaço G .

No capítulo 3, iniciamos apresentando o conceito de (co)homologia relativa $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ e $H_*(G, \mathcal{S}; M)$, para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G , com coeficientes em um RG -módulo M , com R um anel comutativo com unidade. Em seguida, mostramos que $H^*(-, -; -)$ e $H_*(-, -; -)$ são funtores de duas variáveis $((G, \mathcal{S}); M)$ e obtemos seqüências exatas longas em (co)homologia para o par $(G, \mathcal{S})$.

Finalizando este capítulo, apresentamos o conceito de um par $(G, \mathcal{S})$ ser realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X, Y) = K(G, \mathcal{S}; 1)$, ilustrando esta teoria

com vários exemplos. E, através deste conceito, temos uma interpretação topológica para a (co)homologia relativa de grupos, um resultado que relaciona a (co)homologia de grupos com a (co)homologia de pares Eilenberg-MacLane, a saber:

“Se (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando o par grupo $(G, \mathcal{S})$ e M é um RG -módulo trivial, então

$$H_k(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_k(X, Y; M) \text{ e } H^k(G, \mathcal{S}; M) \simeq H^k(X, Y; M)."$$

Com este resultado, podemos calcular (co)homologia relativa de grupos através de (co)homologia relativa de espaços.

No Capítulo 4, apresentamos inicialmente a definição de dimensão cohomológica de um grupo G ($cd\ G$), alguns exemplos e resultados usando tal conceito. Em seguida, temos as definições de módulo finitamente apresentado e de resoluções de tipo finito, com algumas proposições envolvendo tais resoluções.

Nas duas seções seguintes, estudamos os grupos de tipo FP_n , FP e FL . Além disso, apresentamos uma interpretação topológica para grupos de tipo FP , usando o conceito de espaço finitamente dominado, e relacionamos os grupos de tipo FL com o complexo finito $K(G, 1)$.

Na seção posterior, apresentamos o importante conceito de grupos de dualidade, ou seja, grupos que satisfazem certos isomorfismos de dualidade em homologia e cohomologia. Definimos também grupos de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n -grupos) e mostramos que o módulo dualizante C e a dimensão n que aparecem na definição de um grupo de dualidade são determinados por G . Ainda nesta seção, temos uma proposição que caracteriza os grupos de dualidade em dimensões baixas.

A seção seguinte apresenta uma interpretação topológica para grupos de dualidade de Poincaré, através da teoria de variedades asféricas, a saber:

“Se G é um grupo tal que existe uma variedade asférica X fechada (compacta e sem bordo) de dimensão n , com $\pi_1(X) = G$, então G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n ”, conseguindo assim exemplos de PD^n -grupos.

Uma outra teoria bastante importante é apresentada na próxima seção, os conceitos de pares de dualidade de dimensão n (D^n -pares) e pares de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n -pares), observando que o conceito de grupo de dualidade é um caso particular do conceito de par de dualidade.



Para encerrar o capítulo, temos a interpretação topológica para pares de dualidade, um resultado que mostra a relação entre PD^n -pares e variedades e também fornece um critério para se produzir exemplos de PD^n -pares através de modelos topológicos, a saber:

“ Se (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X, Y) = K(G, S, 1)$, onde X é uma n -variedade orientável com bordo, compacta e $Y = \partial X$, então (G, S) é um PD^n -par”.

Finalizando o trabalho, o Capítulo 5 apresenta o estudo do invariante algébrico $E(G, S)$. Na primeira seção, definimos o invariante $E(G, S; M)$, para (G, S) um par grupo, $S = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G , não necessariamente distintos, e M um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo, e apresentamos uma caracterização de $E(G, S; M)$.

Em seguida, temos uma interpretação topológica para $E(G, S; M)$ em termos de pares Eilenberg-MacLane, com exemplo ilustrando tal resultado.

Na seção seguinte, apresentamos um caso particular de $E(G, S; M)$, fixando $S = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$, o qual denotamos por $E(G, S)$, e mostramos que $E(G, S)$ é um invariante algébrico para pares de grupos (G, S) , com $[G : S] = \infty$. Além disso, temos um resultado onde é apresentada uma caracterização de $E(G, S)$ em termos de derivações e derivações principais e, também, a caracterização de $E(G, S)$ nos casos em que res_S^G é trivial e quando S é normal em G . Através deste resultado, apresentamos vários exemplos de cálculos do invariante $E(G, S)$. Para encerrar a seção, provamos que, sob certas hipóteses, $E(G, S)$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞ .

Na próxima seção, temos uma interpretação topológica de $E(G, S)$ em termos de pares Eilenberg-MacLane, sendo um caso particular da interpretação topológica de $E(G, S; M)$, e alguns exemplos.

Finalizando, apresentamos um estudo do invariante $E(G, S)$ no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade, usando os isomorfismos de dualidade para calcular $E(G, S)$ em casos especiais. Entre outros resultados interessantes, temos um importante teorema que nos dá uma condição necessária para que um par grupo (G, S) seja um D^n -par, isto é,

“Se (G, S) é um D^n -par, com $[G : S] = \infty$, então $E(G, S) = 1$ ”.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo relatamos alguns resultados da teoria de Álgebra Homológica, que serão de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

1.1 RG -módulos e Resoluções de R sobre RG

Definição 1.1.1 *Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e G um grupo denotado multiplicativamente, com elemento neutro 1. Seja RG o R -módulo livre gerado pelos elementos de G . Assim, um elemento de RG é expresso unicamente na forma $\left(\sum_{g \in G} r_g g\right)$, onde $r_g \in R$ e $r_g = 0$, para quase todo g em G (isto é, exceto para um número finito de elementos g em G).*

Em RG , as operações de adição e multiplicação são dadas por

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g\right) + \left(\sum_{g \in G} s_g g\right) = \sum_{g \in G} (r_g + s_g) g$$

$$\left(\sum_{g \in G} r_g g\right) \cdot \left(\sum_{h \in G} s_h h\right) = \sum_{g, h \in G} (r_g s_h) (gh).$$

*Tais operações fazem de RG um anel com unidade 1 (1 representa a multiplicação da unidade de R pelo elemento neutro de G), chamado **anel grupo** de G sobre R .*

Definição 1.1.2 *Seja X um G -conjunto, isto é, um conjunto munido com uma ação de G em X .*

(a) *Dizemos que X é um **G -conjunto livre** se a ação de G em X é livre, isto é, $g \cdot x = x$ para algum x em X se, e somente se, $g = 1$.*

(b) *Dizemos que X é um **G -conjunto trivial** se a ação de G em X é trivial, isto é, $g \cdot x = x$ para todo x em X e para todo g em G .*

A seguinte proposição caracteriza os RG -módulos.

Proposição 1.1.1 *Consideremos R um anel comutativo com unidade, G um grupo (multiplicativo) e M um conjunto não vazio. Então, M é um RG -módulo (à esquerda) se, e somente se, M é um R -módulo (à esquerda) munido com uma ação (à esquerda) de G sobre M .*

Demonstração : Se M é um RG -módulo, então M é R -módulo, considerando:

$$rm := (r1)m$$

e a G -ação dada por

$$g.m := (1_R g)m.$$

Reciprocamente, se M é um R -módulo e existe uma ação de G sobre M , então podemos dar a M uma estrutura de RG -módulo da seguinte forma:

$$(\sum r_g g)m := \sum r_g (g.m).$$

Definição 1.1.3 *O homomorfismo $\varepsilon : RG \rightarrow R$ definido por $\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G$, e estendido linearmente, é denominado **aplicação aumentação** (note que ε é sobrejetor).*

Definição 1.1.4 *Consideremos a aplicação aumentação definida acima. O Kernel de tal aplicação é chamado **ideal aumentação** de RG , o qual denotaremos por Δ .*

Observações: (a) *Sejam $\varepsilon : RG \rightarrow R$ a aplicação aumentação definida anteriormente e $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in RG$. Assim,*

$$\varepsilon(\alpha) = \varepsilon \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) = \sum_{g \in G} r_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} r_g.$$

Se A é um RG -módulo trivial, temos

$$\alpha m = \left(\sum_{g \in G} r_g g \right) m = \sum_{g \in G} r_g (g \cdot m) = \sum_{g \in G} r_g m = \varepsilon(\alpha)m.$$

(b) *Todo R -módulo M admite uma estrutura de RG -módulo trivial. Basta considerarmos a G -ação trivial $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(M)$ tal que $\varphi(g) = \text{id}_M$, para todo $g \in G$, isto é,*

$$g \cdot m = m, \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Neste caso,

$$(r_1g_1 + r_2g_2 + \dots + r_kg_k)m = (r_1 + r_2 + \dots + r_k)m, \quad r_i \in R, g_i \in G; i = 1, \dots, k \text{ e } m \in M.$$

Em particular, o anel R admite tal estrutura (é o que consideraremos neste trabalho, a menos que se especifique o contrário).

Observação 1.1.1 Seja X um G -conjunto. Então, $X = \bigcup_{x_\lambda \in E} G(x_\lambda)$, onde E é um conjunto de representantes para as G -órbitas de X .

Proposição 1.1.2 Sejam X um G -conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então, RX é um RG -módulo livre com base E .

Demonstração : [8], I.3.

Corolário 1.1.1 Se H é um subgrupo de G , então RG é um RH -módulo livre com base num conjunto E de representantes para as H -órbitas em G (que são as classes laterais à esquerda de H em G), isto é, $RG = \bigoplus_{g \in E} gRH$.

Demonstração : Temos que G é um H -conjunto com a ação dada pela multiplicação dos elementos de H pelos elementos de G (isto é, $h \cdot g := hg$), e esta ação é livre (pois $h \cdot g = g$ se, e somente se, $h = 1$). Portanto, o resultado segue da proposição anterior.

Definição 1.1.5 Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e M um R -módulo. Uma **resolução** de M sobre R , ou uma **R-resolução** de M , é uma seqüência exata de R -módulos:

$$\dots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

onde $\varepsilon : F_0 \rightarrow M$ é chamada aplicação *augmentação*.

Se cada F_i é R -módulo livre (projetivo), dizemos que a **resolução é livre (projetiva)**.

Notação: $\varepsilon : F \rightarrow M$ denotará uma resolução de M sobre R , onde F é o complexo de cadeias $\dots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \rightarrow 0$.

Observação 1.1.2 Toda resolução livre é projetiva, já que todo módulo livre é projetivo.

Lema 1.1.1 Dado um R -módulo M , sempre podemos construir uma resolução livre (e portanto, projetiva) de M sobre R .

Demonstração : [18], Teorema III,1.4. ■

Lema 1.1.2 Se F é uma resolução projetiva de R sobre RG , e H é um subgrupo de G , então F também é uma resolução projetiva de R sobre RH .

Demonstração : [24], Lema 1.2.2.; [8], Ex.2 - pg.30 ■

Observação 1.1.3 Uma resolução projetiva de bastante importância, pois facilita muitos cálculos na teoria de homologia e cohomologia de um grupo G , é a **resolução bar**. Resumidamente, se $F \xrightarrow{\varepsilon} R$ é a resolução bar, temos que F_n é o RG -módulo livre gerado pelos símbolos $[g_1|g_2|\dots|g_n]$, com $g_i \in G$, $g_i \neq e$, e

$$\partial_n[g_1|g_2|\dots|g_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i[g_1|g_2|\dots|g_n],$$

onde

$$d_i[g_1|g_2|\dots|g_n] = \begin{cases} g_1[g_2|\dots|g_n] & \text{se } i = 0 \\ [g_1|\dots|g_{i-1}|g_i g_{i+1}|g_{i+2}|\dots|g_n] & \text{se } 0 < i < n \\ [g_1|\dots|g_{n-1}] & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Notemos que F_0 é gerado pelo símbolo $[]$. Logo, $F_0 \simeq RG$ e identificamos $[]$ com $1 = 1e \in \mathbb{Z}_2G$ e $\varepsilon([]) = \varepsilon(1) = 1 \in R$.

Deste modo, em dimensões baixas, esta resolução tem a forma:

$$F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0,$$

onde

$$\partial_2[g|h] = g[h] - [gh] + [g]$$

$$\partial_1[g] = g[] - [] = g - 1$$

$$\varepsilon(g) = 1.$$

1.2 Obtenção de Resoluções via Métodos Topológicos

Nesta seção, veremos como obter resoluções de R sobre RG via topologia, por meio de CW-complexos denominados $K(G, 1)$ -complexos.

Definição 1.2.1 Um **G-complexo** é um CW-complexo X munido de uma ação de G em X que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de X , então $gS = S$, para todo g em G .

Se a ação de G em X permuta livremente as células, dizemos que X é um **G-complexo livre**.

Observação 1.2.1 É importante notar que, pelo fato da ação de G em X induzir um homomorfismo dado por

$$\varphi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$$

$$g \mapsto \varphi_g : X \rightarrow X$$

tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$, temos que, se σ é uma célula de X , então $\varphi_g(\sigma) = g \cdot \sigma$ também é uma célula de X , cuja dimensão é a mesma de σ (ou seja, φ_g preserva dimensão).

Dado X um G -complexo, podemos formar o complexo de cadeias $C_*(X, R)$, onde $C_n(X, R)$ é o R -módulo livre gerado pelas n -células de X .

A ação de G em X induz uma ação em $C_*(X, R)$ da seguinte forma:

$$g \cdot (a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) := a_1g \cdot \sigma_1 + \dots + a_ng \cdot \sigma_n.$$

Assim, $C_*(X, R)$ torna-se um complexo de cadeias de RG -módulos.

Definamos a aplicação $\varepsilon : C_0(X, R) \rightarrow R$

$$\sigma^0 \mapsto \varepsilon(\sigma^0) = 1,$$

para toda 0-célula σ^0 de X , e a estendemos por linearidade.

Temos que ε é uma aplicação de RG -módulos, pois se σ^0 é uma 0-célula, então $\varepsilon(g \cdot \sigma^0) = 1$, pois $g \cdot \sigma^0$ também é 0-célula.

Proposição 1.2.1 Se X é um G -complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de X

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG .

Demonstração : Seja $X_n = \{\sigma \in X; \sigma \text{ é uma } n\text{-célula}\} \subset X$.

Temos que $C_n(X, R) = RX_n$ (R -módulo livre gerado pelas n -células).

Agora, como $X_n \subset X$ e X é um G -complexo livre, temos que X_n é um G -conjunto livre. Logo, pela proposição 1.1.2, $C_n(X, R)$ é um RG -módulo livre com base E , onde E é um conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n .

Portanto, $C_*(X, R)$ é um complexo de cadeias de RG -módulos livres.

Além disso, sendo X contrátil, temos que X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto e, deste modo,

$$H_n(X, R) \simeq H_n(\{x_0\}, R) = \begin{cases} R, & \text{se } n = 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas,

$$0 = H_n(X, R) = \frac{\text{Ker } \partial_n}{\text{Im } \partial_{n+1}} \Rightarrow \text{Ker } \partial_n = \text{Im } \partial_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Resta mostrarmos que $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$.

Consideremos

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X, R) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X, R) & \xrightarrow{\varepsilon} & R \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Então,

$$R = H_0(X, R) = \frac{\text{Ker } \partial_0}{\text{Im } \partial_1} \simeq \frac{C_0(X, R)}{\text{Im } \partial_1}$$

Sendo ε sobrejetora, pelo teorema do homomorfismo, temos

$$\frac{C_0(X, R)}{\text{Ker } \varepsilon} \simeq \text{Im } \varepsilon = R.$$

Logo,

$$R \simeq \frac{C_0(X, R)}{\text{Ker } \varepsilon} = \frac{\frac{C_0(X, R)}{\text{Im } \partial_1}}{\frac{\text{Ker } \varepsilon}{\text{Im } \partial_1}} \simeq \frac{R}{\frac{\text{Ker } \varepsilon}{\text{Im } \partial_1}}$$

Deste modo,

$$\frac{\text{Ker } \varepsilon}{\text{Im } \partial_1} \simeq 0.$$

E, como $\text{Im } \partial_1 \subset \text{Ker } \varepsilon$, temos $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$.

Portanto, o complexo

$$\cdots \longrightarrow C_n(X, R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X, R) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é exato e, então, temos uma resolução livre de R sobre RG .

■

Da teoria de espaços de recobrimento, podemos obter muitos exemplos de G -complexos livres. Para isto, recordemos alguns resultados sobre espaços de recobrimento.

Sejam Y um CW -complexo e $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$, um recobrimento de Y . Por [31], III.6.9.2, temos que $\tilde{Y}$ também é um CW -complexo (as n -células $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{Y}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde σ é uma n -célula de Y , e $p|_{\tilde{\sigma}} : \tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$ é um homeomorfismo). Além disso, G permuta as células de $\tilde{Y}$.

Agora, G atua livremente em $\tilde{Y}$, pois $g \cdot \tilde{y} = \tilde{y}$ se, e somente se, $g = 1$ ([26], 5.3.2). Consequentemente, G atua livremente nas células de $\tilde{Y}$.

Deste modo, $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre.

Observação 1.2.2 Podemos concluir, pela proposição 1.2.1 que, se $\tilde{Y}$ for contrátil, o complexo celular aumentado de $\tilde{Y}$ é uma resolução livre de R sobre RG , onde $C_n(\tilde{Y}, R)$ é um RG -módulo livre com um elemento básico para cada órbita de n -célula em $\tilde{Y}$.

Observação 1.2.3 Considerando o caso em que $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é um recobrimento regular, temos, por definição, que G opera transitivamente em $p^{-1}(y)$, isto é, $G(\tilde{y}) = p^{-1}(y)$ para todo $\tilde{y}$ em $p^{-1}(y)$ ([8], pag.31). Daí, concluímos que cada n -célula de Y nos fornece uma órbita de n -células em $\tilde{Y}$. Desta forma, se $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é um recobrimento regular contrátil, então $C_n(\tilde{Y}, R)$ é um RG -módulo livre com um elemento básico para cada n -célula de Y .

Vamos definir agora um CW -complexo particular, que satisfaz todas as condições citadas anteriormente.



Definição 1.2.2 *Seja Y um CW-complexo tal que*

- (i) Y é conexo.
- (ii) $\pi_1(Y) = G$.
- (iii) *O recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y é contrátil (é fato conhecido que, para CW-complexos conexos, sempre existe tal recobrimento universal e este é regular) ([31], III.6.9.1 e [16], I.6.7).*

*Nestas condições, Y é dito um **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$ ou simplesmente, $K(G, 1)$ -complexo.***

Observação 1.2.4 *Pode-se mostrar que a condição (iii) da definição anterior pode ser substituída por uma das condições abaixo ([8] I.4):*

- (iii)' $H_i(\tilde{Y}) = 0$, para $i \geq 2$.
- (iii)'' $\pi_i(Y) = 0$, para $i \geq 2$.

Observação 1.2.5 *Se $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de um CW-complexo Y , temos que $\tilde{Y}$ é um G -complexo, onde $G = \pi_1(Y)$.*

Observação 1.2.6 *É fato conhecido que, dado um grupo G , sempre existe um $K(G, 1)$ -complexo, o qual é único, a menos de homotopia ([8], VIII. 7.1).*

Exemplo 1.2.1 *Sejam $Y = S^1$ e $G = \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Temos que Y é um $K(G, 1)$ -complexo.*

De fato, Y é um CW-complexo conexo, com $\pi_1(Y) = G$, e o recobrimento universal de Y é $\tilde{Y} = \mathbb{R}$, o qual é contrátil. Portanto, por definição, Y é $K(G, 1)$ -complexo.

Exemplo 1.2.2 *Sejam $Y = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional) e $G = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (grupo abeliano livre de posto n).*

Temos que Y é um CW-complexo conexo, $\pi_1(Y) = G$ e o recobrimento universal de Y é $\tilde{Y} = \mathbb{R}^n$, que é contrátil. Logo, por definição, Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Exemplo 1.2.3 *Sejam $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ (bouquet de círculos indexados por um conjunto S) e $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto S).*

Temos que Y é um CW-complexo conexo de dimensão 1, com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de S e, $\pi_1(Y) = G$ ([26], IV.3.4).



Além disso, Y é conexo e, se $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de Y , temos que $\tilde{Y}$ tem dimensão 1 (pois $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é homeomorfismo local). Assim, $H_i(\tilde{Y}) = 0$, para $i \geq 2$.

Portanto, pela observação 2.1.2, Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Lema 1.2.1 Se X é um G -complexo livre compacto, então G é finito.

Demonstração : Seja X/G o espaço das órbitas de X .

Temos que

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/G \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

é recobrimento regular e G atua livremente em X como o grupo das transformações de recobrimento ([16], pag.21 e [8], pag.17).

Agora, dado $\bar{x}_0 \in X/G$, temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(\bar{x}_0) &= \{x \in X; p(x) = \bar{x}_0\} \\ &= \{x \in X; \bar{x} = \bar{x}_0\} \\ &= \{x \in X; x \in G(x_0)\}. \end{aligned}$$

Como a ação de G em X é livre, $p^{-1}(\bar{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com G . Além disso, a fibra $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é discreta e fechada ([26], pag.165).

Suponhamos que $p^{-1}(\bar{x}_0)$ seja infinita. Como esta é compacta, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação que está em $p^{-1}(\bar{x}_0)$, o que é um absurdo, pois $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é discreta.

Deste modo, $p^{-1}(\bar{x}_0)$ é finita e, portanto, G é finito. ■

Exemplo 1.2.4 Sejam $G = \left\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$ e g , um inteiro maior ou igual a 1.

Temos que G é o grupo com geradores $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$, e $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$ é a única relação, onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Além disso, G é infinito ([29], 6.4.3).

Temos ainda que G é o grupo fundamental da superfície orientada Y de genus g (soma conexa de g toros) ([26], IV.5. exemplo 5.3).

Agora, vamos mostrar que Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Seja $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ o recobrimento universal de Y . Como G é infinito, temos, pelo lema 1.2.1, que $\tilde{Y}$ não é compacto, assim, $\tilde{Y}$ é uma superfície não compacta e conexa. Daí, por [16], III.22.25, temos que $H_2(\tilde{Y}) = 0$. Como $H_k(\tilde{Y}) = 0$ para $k > 2$, pois $\tilde{Y}$ tem dimensão 2, temos que $H_k(\tilde{Y}) = 0$ para $k \geq 2$.

Portanto, Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Exemplo 1.2.5 Seja $G = \langle c_1, \dots, c_k; \prod_{i=1}^k c_i^2 \rangle$.

Temos que G é o grupo fundamental de uma superfície Y fechada não orientável de genus k , $k \geq 2$ (soma conexa de k planos projetivos).

Analogamente ao exemplo anterior, temos que Y é um $K(G, 1)$ -complexo.

Como consequência da Proposição 1.2.1, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.2.2 Se Y é um $K(G, 1)$, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y :

$$\cdots \longrightarrow C_2(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\delta_2} C_1(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\delta_1} C_0(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG .

Demonstração : Como Y é um $K(G, 1)$, então $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre contrátil. Logo, pela prop. 1.2.1, temos que o complexo acima é uma resolução livre de R sobre RG .

■

Exemplo 1.2.6 Já vimos, no exemplo 1.2.3, que $Y = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ é um $K(F(S), 1)$ -complexo, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado por S .

Vamos explicitar uma RG -resolução livre para tal complexo do seguinte modo:

Seja $(\tilde{Y}, p)$ o recobrimento universal de Y .

Como $C_n(\tilde{Y}, R)$ tem um elemento básico para cada n -célula de Y (pois $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de Y , logo, regular), podemos tomar um ponto base $\tilde{y}_0$ em $\tilde{Y}$ ($\tilde{y}_0$: vértice em $\tilde{Y}$). Temos que $\tilde{y}_0$ representando a única G -órbita de vértices de $\tilde{Y}$ (existe uma 0-órbita de vértices em $\tilde{Y}$ para cada vértice em Y). Assim, $\tilde{y}_0$ gera o RG -módulo livre $C_0(\tilde{Y}, R)$ e, deste modo, $C_0(\tilde{Y}, R) \simeq RG$.

Como base para $C_1(\tilde{Y}, R)$ podemos tomar, para cada $s \in S$, uma 1-célula orientada e_s de $\tilde{Y}$, que é projetada sobre S_s^1 (orientada no sentido positivo) e temos uma 1-órbita em $\tilde{Y}$ para cada 1-célula em Y .

Suponhamos que e_s tem $\tilde{y}_0$ como ponto inicial e, caso isto não ocorra, tomamos outro representante e_r , com ponto inicial $\tilde{y}_0$ (ou seja, se e_r tem um ponto inicial $\tilde{y}_0$, então, existe g em G tal que $g \cdot e_s = e_r$, pois G atua livremente e transitivamente, permutando as células de $\tilde{Y}$), onde o ponto final de e_s será $s \cdot \tilde{y}_0$.

De fato, notemos que podemos identificar o grupo das transformações de recobrimento $G(\tilde{Y})$ com $\pi_1(Y, y_0)$ da seguinte maneira: seja $\omega : I \rightarrow Y$ um laço em Y ($[\omega] \in \pi_1(Y, y_0)$). Temos que existe um único levantamento $\tilde{\omega}$ de ω , começando em $\tilde{y}_0$. Mais ainda, seja

$$\begin{aligned} \varphi : \pi_1(Y, y_0) &\rightarrow G(\tilde{Y}) \\ [\omega] &\mapsto f_\omega \end{aligned}$$

onde f_ω é a única transformação de recobrimento tal que $f_\omega(\tilde{y}_0) = \tilde{\omega}(1)$.

Temos que φ é isomorfismo e, daí, $G(\tilde{Y}) \simeq \pi_1(Y, y_0)$. Além disso, $G(\tilde{Y})$ atua livremente em $\tilde{Y}$, com ação:

$$\begin{aligned} G(\tilde{Y}) \times \tilde{Y} &\rightarrow \tilde{Y} \\ (f_\omega, \tilde{y}) &\mapsto f_\omega(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Olhando esta ação como uma ação de $\pi_1(Y)$ em $\tilde{Y}$, temos $[\omega]\tilde{y} = f_\omega(\tilde{y}) = \tilde{\omega}(1)$.

Como cada S_s^1 representa um gerador em $\pi_1(Y, y_0) \simeq F(S)$, identificamos S_s^1 com s através deste isomorfismo. Assim, temos que existe um único levantamento $\tilde{s}$ de s , começando em $\tilde{y}_0$ e o ponto final deste levantamento é $\tilde{s}(1) = f_s(\tilde{y}_0) = s \cdot \tilde{y}_0$.

Tal levantamento é a 1-célula e_s , onde $p(e_s) = S_s^1 \equiv s$ (a célula e_s é aplicada homeomorficamente em S_s^1).

Note que $G = F(S) \simeq G(\tilde{Y})$, com $s \simeq f_s$.

Agora, voltando ao exemplo, temos $\partial(e_s) = s \cdot \tilde{y}_0 - \tilde{y}_0 = (s - 1) \cdot \tilde{y}_0$.

Portanto,

$$0 \longrightarrow RG^S = \bigoplus_{s \in S} RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG , onde $\bigoplus_{s \in S} RG$ é um RG -módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$, para $g \in G$.

Exemplo 1.2.7 Se $S = \{t\}$, então $G = F(S)$ é cíclico infinito. Nesse caso, a resolução do exemplo anterior se reduz à

$$0 \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Resoluções Periódicas via Ações Livres em Esferas

Nosso objetivo agora é estudar como é possível obter uma resolução livre de R sobre RG , através de um G -complexo livre X homeomorfo à esfera de dimensão ímpar S^{2k-1} .

Primeiramente, vamos considerar, para $X \simeq S^{2k-1}$, dois lemas importantes.

Lema 1.2.2 A ação de G sobre $H_{2k-1}(X, R) \simeq R$ é trivial.

Demonstração : [24], Lema 1.4.2; [8], Ex.1, pg.21. ■

Lema 1.2.3 A seqüência

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X, R) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \longrightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

onde $n : R \rightarrow C_{2k-1}(X, R)$ é a inclusão, e $C_i(X, R)$ é o RG -módulo livre gerado pelas células de dimensão i (uma em cada órbita de células), é exata.

Demonstração : [8], I.6 - pg.20-21; [24], Lema 1.4.3. ■

A partir da seqüência dada pelo lema anterior, obtemos uma resolução livre de R sobre RG , de período $2k$, do modo a seguir.

Vamos denotar $C_*(X, R)$ por C_* e considerar o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & R & & & & \\ & \nearrow \varepsilon & & \nwarrow n & & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{n \circ \varepsilon} & C_{2k-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

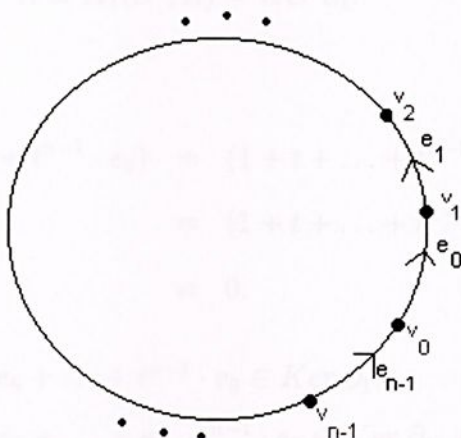
Assim, construímos a seguinte seqüência:

$$\cdots \rightarrow C_{2k-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{n \circ \varepsilon} C_{2k-1} \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \cdots \rightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0 \quad (*)$$

Já vimos que $\text{Im } \partial_1 = \text{Ker } \varepsilon$. Além disso, $\text{Ker } \varepsilon = \text{Ker } (n \circ \varepsilon)$ (n : injetora) e $\text{Im } (n \circ \varepsilon) = \text{Im } n = \text{Ker } \partial_{2k-1}$ (ε : sobrejetora).

Deste modo, $(*)$ é uma resolução livre de R sobre RG .

Exemplo 1.2.8 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t .



Consideremos S^1 vista como um CW-complexo com n vértices (que podem ser identificados com as raízes n -ésimas da unidade) e n 1-células. Vamos denotar por $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ os vértices e por $e_i = (v_i, v_{i+1})$ as 1-células de S^1 , e definir a ação de G em S^1 por $t^k \cdot v_i = v_{k+i}$ e $t^k \cdot e_i = e_{k+i}$, $k, i = 0, \dots, n-1$.

Temos que G atua em S^1 como o grupo de rotações e, tal ação permuta livremente as células. Além disso, $v_i = t^i \cdot v_0$ e $e_i = t^i \cdot e_0$, $i = 0, \dots, n-1$, assim, existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células. Portanto, $C_0(S^1, R) \simeq RG \simeq C_1(S^1, R)$.

Deste modo, temos a seqüência exata

$$0 \rightarrow RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

Mas,

$$R \simeq H_1(S^1, R) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\text{Im } \partial_2} = \text{Ker } \partial_1.$$

Então, obtemos a seqüência exata

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{n} RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

e, daí

$$\cdots \longrightarrow RG \xrightarrow{n \circ \varepsilon} RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{n \circ \varepsilon} RG \xrightarrow{\partial_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG .

Agora, vamos determinar ∂_1 e $n \circ \varepsilon$.

- $\partial_1(e_0) = v_1 - v_0 = t \cdot v_0 - v_0 = (t - 1) \cdot v_0$.

Logo, ∂_1 é a multiplicação por $t - 1$.

Se $N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$, então Ne_0 gera $H_1(S^1, R) \simeq R$.

De fato, temos

$$R \simeq H_1(S^1, R) = \text{Ker } \partial_1.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \partial_1(e_0 + t \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0) &= (1 + t + \dots + t^{n-1})\partial_1(e_0) \\ &= (1 + t + \dots + t^{n-1})(t - 1) \cdot v_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $e_0 + t \cdot e_0 + t^2 \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0 \in \text{Ker } \partial_1$.

Agora, se $x = a_0e_0 + a_1t \cdot e_0 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} \cdot e_0 \in \text{Ker } \partial_1$, temos

$$\begin{aligned} \partial_1(a_0e_0 + a_1t \cdot e_0 + \dots + a_{n-1}t^{n-1} \cdot e_0) = 0 &\Rightarrow (a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1})\partial_1(e_0) = 0 \\ &\Rightarrow (a_0 + a_1t + \dots + a_{n-1}t^{n-1})(t - 1) \cdot v_0 = 0 \end{aligned}$$

o que nos dá:

$$(a_{n-1} - a_0)v_0 + \dots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1} \cdot v_0 = 0.$$

Mas, como $C_0(X, R)$ é um R -módulo livre que tem como base as 0-células $\{v_0, t \cdot v_0, \dots, t^{n-1} \cdot v_0\}$, então, $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1}$. Assim,

$$x = a_0(e_0 + t \cdot e_0 + \dots + t^{n-1} \cdot e_0) = a_0Ne_0.$$

Portanto, $R \simeq H_1(S^1, R) = \text{Ker } \partial_1 = \langle Ne_0 \rangle$.

Como $\text{Im}(n \circ \varepsilon) = \text{Ker } \partial_1$, temos que $(n \circ \varepsilon)(v_0) = Ne_0$ e, deste modo, $(n \circ \varepsilon)(1_{RG}) = N$. Logo, $n \circ \varepsilon$ é a multiplicação por N .

Conseqüentemente, obtemos a seguinte resolução periódica, de período 2, de R sobre RG :

$$\cdots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

1.3 Coinvariantes e Invariantes

Nesta seção, consideraremos R um anel, G um grupo e M um RG -módulo (à esquerda).

Definição 1.3.1 O grupo dos coinvariantes de M , o qual denotamos por M_G , é dado por

$$M_G = M/A, \text{ onde } A \text{ é o subgrupo aditivo tal que}$$

$$A = \langle g \cdot m - m; g \in G \text{ e } m \in M \rangle.$$

Observação 1.3.1 O nome coinvariantes vem do fato de M_G ser o maior quociente de M no qual G atua trivialmente.

Proposição 1.3.1 Se R é visto como RG -módulo trivial (à esquerda), então

$$M_G \simeq R \otimes_{RG} M.$$

Demonstração : [8], II.2.1. ■

Lema 1.3.1 Se F é um RG -módulo livre com base $\{e_i\}_{i \in I}$, então F_G é um R -módulo livre com base $\{\bar{e}_i\}_{i \in I}$.

Demonstração : Basta usar a caracterização de F_G dada na proposição anterior e o fato de F ser livre com base $\{e_i\}_{i \in I}$. ■

Observação 1.3.2 Se $C : \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$ é um complexo de cadeias, denotaremos por C_G o complexo $C_G : \cdots \longrightarrow R \otimes_{RG} C_1 \longrightarrow R \otimes_{RG} C_0 \longrightarrow 0$.

Vimos que, para qualquer grupo G , podemos sempre tomar C como sendo a resolução padrão. Neste caso, denotaremos C_G por $C_*(G)$.



Para finalizar esta seção, vamos introduzir um conceito dual ao conceito de coinvariantes.

Definição 1.3.2 *Seja M um RG -módulo (à esquerda). O grupo dos invariantes de M , denotado por M^G , é dado por:*

$$M^G = \{m \in M; g \cdot m = m, \forall g \in G\}.$$

Observação 1.3.3 M^G é o maior submódulo de M no qual G atua trivialmente.

Proposição 1.3.2 $(\text{Hom}_R(M, N))^G = \text{Hom}_{RG}(M, N)$.

Demonstração : Sejam $g \in G$ e $f \in \text{Hom}_R(M, N)$. Temos

$$\begin{aligned} g.f = f &\Leftrightarrow (g.f)(m) = f(m), \forall m \in M \Leftrightarrow g.f(g^{-1}.m) = f(m), \forall m \in M \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g.f(m') = f(g.m'), \forall m' \in M (m' = g^{-1}.m). \end{aligned}$$

Logo,

$$(\text{Hom}_R(M, N))^G = \{f \in \text{Hom}_R(M, N) / g.f(m) = f(g.m)\} = \text{Hom}_{RG}(M, N).$$

■

Corolário 1.3.1 $\text{Hom}_{RG}(R, M) \simeq M^G$, onde R é visto como RG -módulo com G -ação trivial.

■

1.4 Módulos Induzidos e Coinduzidos

Sejam R e S anéis e, $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis.

Consideremos M um S -módulo (à esquerda). Podemos ver M como um R -módulo (à esquerda), definindo em M a R -ação:

$$\begin{aligned} \mu : R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto r \cdot m = \alpha(r)m \end{aligned}$$

Obtemos, desta forma, um funtor da categoria dos S -módulos (à esquerda) para a categoria dos R -módulos (à esquerda) denominado **restrição de escalares**. Neste caso, M é denotado por $\text{Res}_R^S M$.

Deste modo, se G é um grupo, H um subgrupo de G , $\alpha : RH \hookrightarrow RG$ aplicação inclusão de RH em RG e M é um RG -módulo, podemos ver M como um RH -módulo através de α e o RH -módulo M é denotado $Res_H^G M$ (**módulo restrição**).

Seja M um RH -módulo e,

$$Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M.$$

$Ind_H^G M$ é um grupo abeliano. Em $Ind_H^G M$ definimos a seguinte ação:

$$G \times Ind_H^G M \rightarrow Ind_H^G M$$

$$(g, \alpha \otimes m) \mapsto g\alpha \otimes m$$

Com esta ação, $Ind_H^G M$ torna-se um RG -módulo.

Consideremos agora o grupo abeliano (com a operação de adição) $Hom_{RH}(RG, M)$.

Este grupo tem uma estrutura de RG -módulo, com a G -ação dada por

$$(g.f)(x) = f(xg), \forall g \in G, x \in RG.$$

Denotamos por $Coind_H^G M$ o RG -módulo $Hom_{RH}(RG, M)$, isto é,

$$Coind_H^G M = Hom_{RH}(RG, M).$$

Observação 1.4.1 Se $H = \{1\}$, temos $RH \simeq R$. Deste modo,

$$Ind_{\{1\}}^G M = RG \otimes_R M \quad e \quad Coind_{\{1\}}^G M = Hom_R(RG, M).$$

Tais RG -módulos são chamados, respectivamente, **módulo induzido** e **módulo coinduzido**.

Observação 1.4.2 Segue imediatamente de [8] (III.3.2) e (III.3.5), respectivamente, considerando $M = N$ e $f = Id_M$, que as aplicações:

$$\begin{aligned} i : M &\rightarrow Ind_H^G M = RG \otimes_{RH} M \\ m &\mapsto i(m) = 1 \otimes m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi : Coind_H^G M = Hom_{RH}(RG, M) &\rightarrow M \\ f &\mapsto \pi(f) = f(1) \end{aligned}$$

são, respectivamente, RH -monomorfismo e RH -epimorfismo.

Proposição 1.4.1 O RG -módulo $\text{Ind}_H^G M$ contém M como um RH -submódulo. Além disso, considerando E um conjunto de representantes para as classes laterais (à esquerda) de H em G , e denotando por gm o conjunto obtido de M (visto como RH -submódulo de $\text{Ind}_H^G M$) sob a ação de G , temos

$$\text{Ind}_H^G M = \bigoplus_{g \in E} gM.$$

Demonstração : [8], pg. 67. ■

Proposição 1.4.2 De modo análogo à indução, se considerarmos o mergulho $\rho : M \rightarrow \text{Coind}_H^G M$, dado por

$$\rho(m)(g) = \begin{cases} g \cdot m & \text{se } g \in H \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

temos que M é um RH -módulo de $\text{Coind}_H^G M$ e, além disso,

$$\text{Coind}_H^G M = \prod_{g \in E} gM.$$

Observação 1.4.3 A aplicação ρ se estende a um RG -homomorfismo $\varphi : RG \otimes_{RH} M \rightarrow \text{Hom}_{RH}(RG, M)$ ([8], III.3.2). Tal aplicação pode ser identificada com a inclusão canônica da soma direta no produto direto ([8], pag.70) e, assim, podemos ver $\text{Ind}_H^G M$ como um RG -submódulo de $\text{Coind}_H^G M$. ■

Proposição 1.4.3 Se $[G : H] < \infty$, então $\text{Ind}_H^G M \simeq \text{Coind}_H^G M$.

Demonstração : Se $[G : H] < \infty$, temos que a soma direta e o produto direto coincidem e, portanto, segue o resultado. ■

Definição 1.4.1 Sejam M e N RG -módulos. Então, M e N são naturalmente R -módulos. A G -ação diagonal, definida em $M \otimes_R N$, é dada por:

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n$$

Proposição 1.4.4 *Seja M um RG -módulo. Existem RG -isomorfismos naturais:*

- (i) $Ind_H^G(Res_H^G M) \simeq R(G/H) \otimes_R M$ (com G -ação diagonal).
 (ii) $Coind_H^G(Res_H^G M) \simeq Hom_R(R(G/H), M)$ (com G -ação diagonal).

Demonstração : (i) [8], Cap.III-Prop.5.6.

(ii) Análogo a (i), [8], Ex.2 (b), pg.71.

Corolário 1.4.1 $Ind_H^G R \simeq R(G/H)$.

Proposição 1.4.5 *Se M é um RS -módulo e N um RG -módulo, então existe um RG -isomorfismo*

$$N \otimes_{RG} Ind_S^G M \simeq Ind_S^G(Res_S^G N \otimes_{RS} M),$$

onde $N \otimes_{RG} Ind_S^G M$ é visto como RG -módulo com a G -ação diagonal e $Res_S^G N \otimes_{RS} M$ é visto como RS -módulo com a S -ação diagonal.

Demonstração : [1], Lema I.2.10, p.11.

Proposição 1.4.6 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G , com $[G : S] = \infty$. Então, para qualquer RS -módulo M ,*

$$(Ind_S^G M)^G = 0.$$

Demonstração : [1], Lema I.2.11, p.13.

Capítulo 2

A (co)homologia de um grupo G

2.1 Alguns resultados sobre $\otimes$ e Hom

Antes de iniciarmos o estudo da homologia e cohomologia de um grupo G , vamos fazer alguns estudos preliminares sobre $\otimes$ e Hom .

Seja R um anel arbitrário com unidade, M um R -módulo à direita e N um R -módulo à esquerda. Então,

$$M \otimes_R N = \frac{F(M \times N)}{L},$$

onde $F(M \times N)$ é o $\mathbb{Z}$ -módulo livre gerado por $M \times N$ e L é o subgrupo de $F(M \times N)$ gerado pelos elementos

$$(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \quad (1)$$

$$(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), \quad (2)$$

$$(mr, n) - (m, rn), \quad (3)$$

com $m_1, m_2, m \in M$, $n_1, n_2, n \in N$ e $r \in R$.

Daí, $M \otimes_R N$ é um grupo abeliano gerado pelos símbolos $m \otimes n$, para $m \in M$ e $n \in N$ sujeito às relações

$$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n,$$

$$m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2,$$

$$mr \otimes n = m \otimes rn,$$

com $m, m_1, m_2 \in M$, $n, n_1, n_2 \in N$ e $r \in R$.

Proposição 2.1.1 Sejam M e N RG -módulos (à esquerda). Então,

$$M \otimes_{RG} N = (M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A},$$

onde $A = \langle g \cdot m \otimes g \cdot n - m \otimes n; \forall m \otimes n \in M \otimes_R N, \forall g \in G \rangle$.

Demonstração : Vamos ver como obtemos $M \otimes_{RG} N$ de $M \otimes_R N$.

Consideremos a seguinte relação em $M \otimes_R N$:

$$(m * g) \otimes n \sim m \otimes g \cdot n, \quad \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Podemos ver o RG -módulo à esquerda M com um RG -módulo à direita, definindo a seguinte ação:

$$m * g = g^{-1} \cdot m, \quad \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Assim,

$$m \otimes g \cdot n = (m * g) \otimes n = (g^{-1} \cdot m) \otimes n.$$

Deste modo,

$$\overline{(g^{-1} \cdot m) \otimes n} = \overline{m \otimes g \cdot n}. \quad (2.1)$$

Portanto,

$$M \otimes_{RG} N = \frac{M \otimes_R N}{\sim}.$$

Trocando m por $g \cdot m$ em (2.1), temos

$$\overline{m \otimes n} = \overline{g \cdot m \otimes g \cdot n}. \quad (2.2)$$

Definimos, então, a G -ação diagonal de G em $M \otimes_R N$:

$$g \cdot (m \otimes n) = g \cdot m \otimes g \cdot n.$$

Consideremos em $M \otimes_R N$ tal ação e A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos $g \cdot (m \otimes n) - m \otimes n$. Assim,

$$(M \otimes_R N)_G := \frac{M \otimes_R N}{A}.$$

Notemos que estamos identificando elementos da forma $g \cdot m \otimes g \cdot n$ com $m \otimes n$, $\forall m \in M, \forall n \in N, \forall g \in G$, o que equivale a identificar $(g^{-1} \cdot m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes n$ (por (2.1) e (2.2)).

Portanto,

$$(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{\sim} = M \otimes_{RG} N.$$

■

Corolário 2.1.1 $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.

Sejam M e N RG -módulos (à esquerda), e consideremos

$$\text{Hom}_R(M, N) := \{f : M \rightarrow N, R - \text{homomorfismo de } M \text{ em } N\}.$$

A ação de G em M e N induz uma ação de G em $\text{Hom}_R(M, N)$, dada por

$$\begin{aligned} G \times \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N) \\ (g, f) &\mapsto g \cdot f : M \rightarrow N \end{aligned}$$

tal que $g \cdot f(x) = gf(g^{-1} \cdot x)$; $g \in G, f \in \text{Hom}_R(M, N)$ e $x \in M$.

Observação 2.1.1 O uso de g^{-1} para definir a ação é necessário devido à contravariância de Hom na primeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo M a um RG -módulo à direita, considerando $m * g = g^{-1} \cdot m$. Deste modo, ficamos com a ação:

$$g \cdot f(m) = gf(g^{-1} \cdot m) = gf(m * g).$$

Assim, $\text{Hom}_R(M, N)$ será um RG -módulo (à esquerda).

Proposição 2.1.2 $\text{Hom}_{RG}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)^G$.

Demonstração : Seja

$$\text{Hom}_{RG}(M, N) = \{f \in \text{Hom}_R(M, N) : g \cdot f(x) = f(g \cdot x)\}$$

ou seja, f é equivariante.

Assim,

$$\begin{aligned} f \in \text{Hom}_{RG}(M, N) &\Leftrightarrow (g \cdot f)(x) = f(g \cdot x), \forall g \in G, x \in M \\ &\Leftrightarrow f(x) = g^{-1}f(g \cdot x), \forall g \in G, x \in M \\ &\stackrel{\text{ação diagonal}}{\Leftrightarrow} f(x) = g^{-1} \cdot f(x), \forall g^{-1} \in G, x \in M \\ &\Leftrightarrow gf = f, \forall g \in G \\ &\Leftrightarrow f \in (\text{Hom}_R(M, N))^G. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Hom}_{RG}(M, N) = (\text{Hom}_R(M, N))^G.$$

Veremos agora a definição de (co)homologia de um grupo G , onde geralmente trabalharemos com os casos $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$.

2.2 Definição e Exemplos de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$

Seja

$$F : \cdots \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de R sobre RG e M um RG -módulo (à esquerda).

Podemos formar os **complexos de cadeia** e **cocadeia**, respectivamente:

$$F \otimes_{RG} M : \cdots \longrightarrow F_n \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{RG} M \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \longrightarrow 0$$

$$\text{Hom}_{RG}(F, M) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{RG}(F_1, M) \xrightarrow{\delta^1} \cdots \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(F_n, M) \longrightarrow \cdots$$

O **operador bordo** é dado por $\bar{\partial}_n := \partial_n \otimes id, n \geq 1$ e $\bar{\partial}_0 = 0$ e, o **operador cobordo**,

por

$$\begin{aligned} \delta^n : \text{Hom}_{RG}(F_n, M) &\longrightarrow \text{Hom}_{RG}(F_{n+1}, M) \\ f &\mapsto \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}, n > 0 \text{ e } \delta_0 = 0 \end{aligned}$$

Definição 2.2.1 (a) O n -ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M é definido por

$$H_n(G, M) := H_n(F \otimes_{RG} M).$$

(b) O n -ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em M é definido por

$$H^n(G, M) := H^n(\text{Hom}_{RG}(F, M)).$$

Observação 2.2.1 As definições de $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$ independem da resolução projetiva $\varepsilon : F \rightarrow R$ escolhida (a menos de isomorfismo canônico) ([8], I.7.5).

Observação 2.2.2 Tomando $M = \mathbb{Z}$, com G -ação trivial, temos

$$H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \stackrel{\text{prop. 2.1.1}}{\cong} H_*((F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G).$$

Proposição 2.2.1 Dado um RG -módulo M , temos o isomorfismo:

$$H_0(G, M) \simeq M_G.$$

Demonstração : Consideremos a resolução projetiva de R sobre RG :

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $-\otimes_{RG} M$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & F_0 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & R \otimes_{RG} M \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \bar{\partial}_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Como tal funtor é exato à direita ([18], I.7.9), temos que $Im \bar{\partial}_1 = Ker \bar{\varepsilon}$ e $\bar{\varepsilon}$ é sobrejetora.

Assim,

$$H_0(G, M) = \frac{Ker \bar{\partial}_0}{Im \bar{\partial}_1} = \frac{F_0 \otimes_{RG} M}{Ker \bar{\varepsilon}} \simeq R \otimes_{RG} M \stackrel{\text{prop.1.3.1}}{\simeq} M_G.$$

Portanto,

$$H_0(G, M) \simeq M_G.$$

■

Proposição 2.2.2 Dado um RG -módulo M , temos o isomorfismo:

$$H^0(G, M) \simeq M^G.$$

Demonstração : Consideremos a resolução projetiva de R sobre RG :

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $Hom_{RG}(-, M)$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{RG}(R, M) & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} & Hom_{RG}(F_0, M) & \xrightarrow{\delta^0} & Hom_{RG}(F_1, M) \longrightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow \delta^{-1} & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Como tal funtor é exato à esquerda ([18], I.8.7), temos que $Im \tilde{\varepsilon} = Ker \delta^0$ e $\tilde{\varepsilon}$ é injetora.

Assim,

$$H^0(G, M) = \frac{Ker \delta^0}{Im \delta^{-1}} = Ker \delta^0 = Im \tilde{\varepsilon} \simeq Hom_{RG}(R, M) \stackrel{\text{prop.1.3.1}}{\simeq} M^G.$$

Portanto,

$$H^0(G, M) \simeq M^G.$$

■

Exemplo 2.2.1 Vamos calcular $H_*(G, \mathbb{Z})$, onde $G = F(S)$ é o grupo livre gerado por um conjunto S .

O exemplo 1.2.6 nos fornece uma resolução livre (portanto, projetiva) de R sobre RG .

Para o caso $R = \mathbb{Z}$, temos

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $\mathbb{Z}G^{(S)}$ é o $\mathbb{Z}G$ -módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G$.

Pela definição 2.2.1, temos que a homologia do grupo G é a homologia do complexo

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}} \otimes \partial} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Agora,

- $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G^{(S)} = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \left(\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}G \right) = \bigoplus_{s \in S} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G) = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}.$
- $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \simeq \mathbb{Z}.$

Assim, ficamos com

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} & \xrightarrow{id_{\mathbb{Z}} \otimes \partial} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \partial_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Vamos calcular $id \otimes \partial$, lembrando que $\mathbb{Z}$ é visto como $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial.

Seja $\sum \alpha_{s_i} e_{s_i} \in (\mathbb{Z}G)^s$, onde $\alpha_{s_i} \in \mathbb{Z}G$. Assim,

$$\partial(\sum \alpha_{s_i} e_{s_i}) = \sum \alpha_{s_i} \partial(e_{s_i}) = \sum \alpha_{s_i} (s_i - 1).$$

Se $z \in \mathbb{Z}$, temos

$$(id \otimes \partial)(z \otimes \sum \alpha_{s_i} e_{s_i}) = z \otimes \sum \alpha_{s_i} \partial(e_{s_i}) = z \otimes \sum \alpha_{s_i} (s_i - 1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum z\alpha_{s_i} \otimes (s_i - 1) \\
&= \sum z\alpha_{s_i} \otimes s_i - \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 \\
&= \sum z\alpha_{s_i} \cdot s_i \otimes 1 - \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 \\
&= \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 - \sum z\alpha_{s_i} \otimes 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Assim, $id \otimes \partial$ é a função nula e, deste modo, temos o complexo:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0$$

Logo,

$$\begin{cases} H_0(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}; \\ H_1(G; \mathbb{Z}) = \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}; \\ H_i(G, \mathbb{Z}) = 0; \text{ para } i > 1. \end{cases}$$

Exemplo 2.2.2 Sejam M um $\mathbb{Z}G$ -módulo e G o grupo cíclico infinito com gerador t . Vamos calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$.

Vimos, no exemplo 1.2.7, que

$$0 \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $\partial_1 = t - 1$, é uma resolução livre (portanto, projetiva) de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

• Calculemos $H_*(G, M)$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\bar{\partial}_2=0} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\bar{\partial}_0=0} 0$$

onde $\bar{\partial}_1 = \partial_1 \otimes id$.

Agora, temos os seguintes isomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc}
M & \simeq & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\bar{\partial}_1} & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \simeq & M \\
m & \mapsto & 1 \otimes m & \mapsto & (t-1) \otimes m & \mapsto & (t-1) \cdot m
\end{array}$$

Deste modo, podemos considerar

$$\begin{array}{rcl} \bar{\partial}_1 : M & \rightarrow & M \\ m & \rightarrow & (t-1) \cdot m \end{array}$$

Portanto, $H_*(G, M)$ é a homologia do complexo:

$$0 \xrightarrow{0} M \xrightarrow{\partial_1} M \xrightarrow{0} 0$$

Assim,

$$H_1(G, M) = \frac{\text{Ker } \partial_1}{\{0\}} = \text{Ker } \partial_1.$$

Mas,

$$\text{Ker } \partial_1 = \text{Ker}(t-1) = \{m \in M; (t-1) \cdot m = 0\} = \{m \in M; t \cdot m = m\} = M^G$$

Portanto,

$$\begin{cases} H_0(G; M) = M_G; \\ H_1(G; M) = M^G; \\ H_i(G, M) = 0; \text{ para } i > 1. \end{cases}$$

Notemos que

$$H_1(G, M) = M^G \stackrel{\text{prop. 2.2.2}}{=} H^0(G, M).$$

• Calculemos $H^*(G, M)$

Aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}=0} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^1=0} 0,$$

onde

$$\delta^0(f)(x) = (f \circ \partial_1)(x) = (f \circ (t-1))(x) = f((t-1) \cdot (x)) = (t-1)f(x).$$

Logo, δ^0 é a multiplicação por $(t-1)$.

E, ainda

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) & \simeq & M \\ f & \mapsto & f(1). \end{array}$$

Logo, $H^*(G, M)$ é a cohomologia do complexo:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0$$

Agora,

$$H^1(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^1}{\text{Im } \delta^0} = \frac{M}{(t-1)M} = M_G.$$

Portanto,

$$\begin{cases} H^0(G, M) = M^G; \\ H^1(G, M) = M_G; \\ H^i(G, M) = 0, \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Notemos que

$$H^1(G, M) = M_G \stackrel{\text{prop. 2.2.1}}{=} H_0(G, M).$$

Exemplo 2.2.3 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t . Vamos calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$.

Pelo exemplo 1.2.8, temos a seguinte resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

onde $N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i$.

• Calculemos $H_*(G, M)$

Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos o complexo:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \longrightarrow 0$$

Como $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$, temos

$$\cdots \longrightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0.$$

Portanto,

$$H_i(G, M) = \begin{cases} M_G, & \text{se } i = 0 \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} = \frac{M^G}{NM}, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker } N}{\text{Im}(t-1)} = \frac{\text{Ker } N}{(t-1)M}, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

• Calculemos $H^*(G, M)$

Aplicando o funtor $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, M)$, obtemos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^0} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^1} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

onde $\delta^n(f)(x) := (f \circ \partial_{n+1})(x)$.

Através do isomorfismo $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$,

$$f \mapsto f(1)$$

temos

$$0 \xrightarrow{\delta^{-1}} M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

onde $\delta^{2k} = t - 1$ e $\delta^{2k+1} = N$, $k \geq 0$.

Logo,

$$H^i(G, M) = \begin{cases} M^G, & \text{se } i = 0 \\ \frac{\text{Ker } N}{\text{Im}(t-1)} = \frac{\text{Ker } N}{(t-1)M}, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \frac{\text{Ker}(t-1)}{\text{Im } N} = \frac{M^G}{NM}, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

Em particular, para o caso $M = \mathbb{Z}$ (com G -ação trivial), temos que $t - 1$ é a função nula, pois

$$(t - 1) \cdot m = t \cdot m - m = 0, \quad \forall m \in M,$$

e N é a multiplicação por n , pois

$$(1 + t + \dots + t^{n-1}) \cdot m = m + t \cdot m + \dots + t^{n-1} \cdot m = nm$$

Assim, $\text{Ker}(t - 1) = \mathbb{Z}$, $\text{Im}(t - 1) = \{0\} = \text{Ker } N$ e $\text{Im } N = n\mathbb{Z}$.

Deste modo,

$$H_i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_n, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

$$H^i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \\ 0, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_n, & \text{se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

2.3 O Lema de Shapiro

Na seção 1.4, vimos que se H é um subgrupo de um grupo G e M é um RH -módulo, $\text{Ind}_H^G M$ e $\text{Coind}_H^G M$ são RG -módulos. Considerando tais RG -módulos, temos o seguinte resultado que relaciona a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H .

Proposição 2.3.1 (Lema de Shapiro) *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}H$ -módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*

- (a) $H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$;
- (b) $H^*(H, M) \simeq H^*(G, \text{Coind}_H^G M)$.

Demonstração : Seja $\varepsilon : F \rightarrow \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Pelo lema 1.1.2, esta também é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$.

(a) Temos:

$$F \otimes_{\mathbb{Z}H} M \simeq (F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}H} M = F \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) = F \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Ind}_H^G M.$$

Assim,

$$H_*(H, M) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \simeq H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \text{Ind}_H^G M) = H_*(G, \text{Ind}_H^G M).$$

Portanto,

$$H_*(H, M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G M).$$

(b) Por [8]III.3.6, temos

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(F_n, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_n, \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M)), \forall n.$$

Deste modo, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(F, M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, \text{Coind}_H^G M)$. Assim,

$$H^*(H, M) = H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(F, M)) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, \text{Coind}_H^G M)) = H^*(G, \text{Coind}_H^G M).$$

Portanto,

$$H^*(H, M) \simeq H^*(G, \text{Coind}_H^G M).$$

■

Exemplo 2.3.1 *Se $M = \mathbb{Z}$, então $H_*(H, \mathbb{Z}) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H))$.*

De fato,

$$H_*(H, \mathbb{Z}) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H_*(G, \text{Ind}_H^G \mathbb{Z}) \stackrel{\text{corol. 1.4.1}}{\simeq} H_*(G, \mathbb{Z}(G/H)).$$

Logo,

$$H_*(H, \mathbb{Z}) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H)).$$

Exemplo 2.3.2 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G , com $(G : H) < \infty$. Então,*

$$(i) H^*(H, \mathbb{Z}) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}(G/H))$$

$$(ii) H^*(H, \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G).$$

De fato,

$$(i) H^*(H, \mathbb{Z}) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G, \text{Coind}_H^G \mathbb{Z}) \stackrel{\text{prop.1.4.3}}{\simeq} H^*(G, \text{Ind}_H^G \mathbb{Z}) \stackrel{\text{corol.1.4.1}}{\simeq} H^*(G, \mathbb{Z}(G/H)).$$

Logo,

$$H^*(H, \mathbb{Z}) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}(G/H)).$$

$$\begin{aligned} (ii) H^*(H, \mathbb{Z}H) &\stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G, \text{Coind}_H^G \mathbb{Z}H) \stackrel{\text{prop.1.4.3}}{\simeq} H^*(G, \text{Ind}_H^G \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H) \\ &\simeq H^*(G, \mathbb{Z}G). \end{aligned}$$

Portanto, $H^*(H, \mathbb{Z}H) \simeq H^*(G, \mathbb{Z}G)$.

Observação 2.3.1 Usando a proposição 1.4.4, podemos enunciar o Lema de Shapiro da forma a seguir.

Proposição 2.3.2 (Lema de Shapiro - outra versão) Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Temos os seguintes isomorfismos:

- (i) $H_*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M)$
- (ii) $H^*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H^*(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), M)).$

Demonstração :

(i) Pela proposição 2.3.1(a),

$$H_*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H_*(G, \text{Ind}_H^G (\text{Res}_H^G M)).$$

Também, da proposição 1.4.4(i), temos

$$\text{Ind}_H^G (\text{Res}_H^G M) \simeq \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M.$$

Assim,

$$H_*(G, \text{Ind}_H^G (\text{Res}_H^G M)) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M).$$

Logo,

$$H_*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M).$$

(ii) Pela proposição 2.3.1(b),

$$H^*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H^*(G, \text{Coind}_H^G (\text{Res}_H^G M)).$$

De acordo com a proposição 1.4.4(ii), temos

$$\text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M) \simeq \text{Hom}_Z(\mathbb{Z}(G/H), M).$$

Assim,

$$H^*(G, \text{Coind}_H^G(\text{Res}_H^G M)) \simeq H^*(G, \text{Hom}_Z(\mathbb{Z}(G/H), M)).$$

Portanto,

$$H^*(H, \text{Res}_H^G M) \simeq H^*(G, \text{Hom}_Z(\mathbb{Z}(G/H), M)).$$

■

Usando a resolução bar, podemos interpretar $H^1(G; M)$ em termos de derivações e derivações principais.

Sejam

$$\text{Der}(G, M) = \{f : G \rightarrow M / f(xy) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in G\}$$

e

$$P(G, M) = \{d_m \in \text{Der}(G, M), m \in M / d_m(g) = gm - m, \forall g \in G\}.$$

Então, temos

Proposição 2.3.3 Se G é um grupo e M é um RG -módulo ($R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$), então

$$H^1(G; M) = \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)}$$

Demonstração : Consideremos o complexo

$$0 \rightarrow C^0(G, M) \xrightarrow{\delta^1} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta^2} C^2(G, M) \rightarrow \dots \quad (\text{ver}[8], \text{pg.59})$$

Temos que $H^1(G, M) = \frac{\text{Ker } \delta^2}{\text{Im } \delta^1}$. Mas,

$$\text{Ker } \delta^2 = \{f : G \rightarrow M / \delta^2(f) = 0\} \text{ e } \text{Im } \delta^1 = \{\delta^1(f) / f : G^0 \rightarrow M\}.$$

Agora,

$$\delta^2(f) = 0 \Leftrightarrow \delta^2(f)(g, h) = 0, \forall g, h \in G \Leftrightarrow gf(h) - f(gh) + f(g) = 0, \forall g, h \in G \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(gh) = gf(h) + f(g) \Leftrightarrow f \in \text{Der}(G, M).$$

Assim, $\text{Ker } \delta^2 = \text{Der}(G, M)$.

Como G^0 é um conjunto com um único elemento $[]$, toda função $f : G^0 \rightarrow M$ pode ser identificada com um elemento m de M .

Deste modo, $C^0(G, M) \simeq M$ e, temos $\delta^1(f)(g) = gf([]) - f([]) = gm - m$.

Temos, então, que $\text{Im} \delta^1 \subset P(G, M)$.

Agora, se $d_m \in P(G, M)$, definimos $f : G^0 \rightarrow M$ por $f([]) = m$ e temos $\delta^1(f)(g) = gm - m = d_m$. Assim, $d_m \in \text{Im} \delta^1$ e, temos $P(G, M) \subset \text{Im} \delta^1$.

Segue então que

$$H^1(G; M) = \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)}.$$

■

2.4 H_* e H^* como Funtores de duas variáveis

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cujos objetos são pares (G, M) , onde G é um grupo e M um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Um morfismo em $\mathcal{C}$ de (G, M) em (G', M') é um par (α, f) , onde $\alpha : G \rightarrow G'$ é um homomorfismo de grupos, e $f : M \rightarrow M'$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}G$ -módulos, considerando M' como um $\mathbb{Z}G$ -módulo via α , isto é, um homomorfismo de $\mathbb{Z}G$ -módulos satisfazendo: $f(g * m) = \alpha(g) \cdot f(m)$.

Consideremos $(\alpha, f) : (G, M) \rightarrow (G', M')$, F uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e F' uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G'$ (podemos ver F' como uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ via α , pois cada F_n pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo, definindo a ação: $g * x' = \alpha(g) \cdot x'$).

Como F é $\mathbb{Z}G$ -projetivo e F' é acíclico para $i \geq 1$ (pois F' é $\mathbb{Z}G'$ -resolução), temos por [24], Lema 4.1.1, que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \rightarrow F'$, estendendo a identidade de $\mathbb{Z}$, única a menos de homotopia.

Temos que $\tau(g \cdot x) = g * \tau(x) = \alpha(g) \cdot \tau(x)$, pois τ é homomorfismo de $\mathbb{Z}G$ -módulos.

Consideremos, agora:

$$\begin{aligned} \tau \otimes f : F \otimes_{\mathbb{Z}G} M &\rightarrow F' \otimes_{\mathbb{Z}G'} M' \\ x \otimes m &\mapsto \tau(x) \otimes f(m) \end{aligned}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $F' \otimes_{\mathbb{Z}G'} M$. Assim, $\tau \otimes f$ induz uma aplicação bem definida:

$$\begin{aligned} H_*(\alpha, f) &\stackrel{\text{not.}}{=} (\alpha, f)_* : H_*(G, M) \rightarrow H_*(G', M') \\ [x \otimes m] &\mapsto [(\tau \otimes f)(x \otimes m)] = [\tau(x) \otimes f(m)]. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que:

(a) Se $M = M'$, $G = G'$, $\alpha = id_G$ e $f = id_M$, então

$$(\alpha, f)_* = id_{H_*(G, M)}.$$

(b) Se $(\alpha, f) : (G, M) \rightarrow (G', M')$ e $(\alpha', f') : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$, então

$$(\alpha', f')_* \circ (\alpha, f)_* = (\alpha' \circ \alpha, f' \circ f)_* \stackrel{\text{not.}}{=} ((\alpha', f') \circ (\alpha, f))_*.$$

Logo, $H_*(-, -)$ é um funtor covariante em $\mathcal{C}$.

Para a cohomologia, vamos considerar uma categoria $\mathcal{D}$ cujos objetos são os mesmos que em $\mathcal{C}$, e os morfismos são pares (α, f) , onde $\alpha : G \rightarrow G'$ e $f : M' \rightarrow M$ (f é dessa forma pois Hom é contravariante na primeira variável).

Sejam F e F' resoluções projetivas de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}G'$, respectivamente. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, temos que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \rightarrow F'$, única a menos de homotopia. Temos que $\tau(g \cdot x) = g * \tau(x)$ (pois τ é aplicação de $\mathbb{Z}G$ -módulos).

Consideremos a aplicação de cocadeias:

$$\begin{array}{ccc} Hom(\tau, f) : Hom_{\mathbb{Z}G'}(F', M') & \rightarrow & Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M) \\ \phi & \mapsto & f \circ \phi \circ \tau \end{array}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $Hom_{\mathbb{Z}G'}(F', M')$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M)$. Assim, $Hom(\tau, f)$ induz uma aplicação bem definida:

$$\begin{array}{ccc} Hom(\tau, f)^* \stackrel{\text{not.}}{=} (\alpha, f)^* : H^*(G', M') & \rightarrow & H^*(G, M) \\ [\phi] & \mapsto & [f \circ \phi \circ \tau]. \end{array}$$

Verifica-se facilmente que:

(a) Se $\alpha = id_G : G \rightarrow G$ e $f = id_M : M \rightarrow M$, então

$$(\alpha, f)^* = id_{H^*(G, M)}.$$

(b) Se $(\alpha, f) : (G, M') \rightarrow (G', M)$ e $(\beta, g) : (G', M'') \rightarrow (G'', M')$, então

$$((\beta, g) \circ (\alpha, f))^* = (\alpha, f)^* \circ (\beta, g)^*.$$

Logo, $H^*(-, -)$ é um funtor contravariante em $\mathcal{D}$.

Observação 2.4.1 Sejam G um grupo e H um subgrupo de G . Consideremos $\alpha : H \hookrightarrow G$ a inclusão e as RH-aplicações canônicas já vistas na observação 1.4.2: $i : M \rightarrow \text{Ind}_H^G M$ e $\pi : \text{Coind}_H^G M \rightarrow M$. É fácil ver que os isomorfismos da proposição 2.3.1 (Lema de Shapiro), são dados, respectivamente, por

$$(\alpha, i)_* : H_*(H, M) \rightarrow H_*(G, \text{Ind}_H^G M)$$

$$(\alpha, \pi)^* : H^*(G, \text{Coind}_H^G M) \rightarrow H^*(H, M).$$

Tais isomorfismos são chamados **isomorfismos de Shapiro**.

Observação 2.4.2 Sejam G um grupo e $M, M' : RG$ -módulos. Consideremos a aplicação $\alpha = \text{id} : G \rightarrow G$ e seja $f : M \rightarrow M'$ um RG -homomorfismo. Usando a teoria anterior, temos que existem homomorfismos induzidos

$$(id, f)_* : H_*(G, M) \rightarrow H_*(G, M')$$

e

$$(id, f)^* : H^*(G, M) \rightarrow H^*(G, M')$$

Temos, então, que $H_*(G, -)$ e $H^*(G, -)$ são funtores covariantes na categoria dos RG -módulos M .

Usando isto, mostra-se o seguinte resultado:

Proposição 2.4.1 Seja $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \rightarrow 0$ uma seqüência exata de $\mathbb{Z}G$ -módulos. Temos:

(i) Para todo inteiro n , existe uma aplicação natural $\partial_n : H_n(G, M'') \rightarrow H_{n-1}(G, M')$, tal que a seqüência:

$$\cdots \rightarrow H_1(G, M) \xrightarrow{j_1} H_1(G, M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G, M') \xrightarrow{i_0} H_0(G, M) \xrightarrow{j_0} H_0(G, M'') \rightarrow 0$$

é exata, onde as aplicações i_k e j_k são as induzidas em homologia, isto é,

$$i_k = (id, i)_* : H_k(G, M') \rightarrow H_k(G, M)$$

$$j_k = (id, j)_* : H_k(G, M) \rightarrow H_k(G, M'').$$

(ii) Para todo inteiro n , existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(G, M'') \rightarrow H^{n+1}(G, M')$, tal que a seqüência:

$$0 \rightarrow H^0(G, M') \xrightarrow{i^0} H^0(G, M) \xrightarrow{j^0} H^0(G, M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G, M') \xrightarrow{i^1} H^1(G, M) \xrightarrow{j^1} \cdots$$

é exata, onde as aplicações i^k e j^k são as induzidas em cohomologia, isto é,

$$i^k = (id, i)^* : H^k(G, M') \rightarrow H^k(G, M)$$

$$j^k = (id, j)^* : H^k(G, M) \rightarrow H^k(G, M'').$$

Demonstração : [8], III.6.1.

Observação 2.4.3 Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um RG -módulo. Consideremos a aplicação inclusão $\alpha : H \rightarrow G$ e a aplicação identidade $id : M \rightarrow M$. Então, temos induzidos, em homologia e cohomologia, os seguintes homomorfismos:

(i) $(\alpha, id)_* : H_*(H, M) \rightarrow H_*(G, M)$ e

(ii) $(\alpha, id)^* : H^*(G, M) \rightarrow H^*(H, M)$

Denotaremos o homomorfismo $(\alpha, id)_*$ por cor_H^G (ou simplesmente cor) e o homomorfismo $(\alpha, id)^*$ por res_H^G (ou simplesmente res).

O homomorfismo cor_H^G é chamado de **aplicação co-restrição** e o homomorfismo res_H^G é chamado de **aplicação restrição**.

A aplicação restrição res_H^G , no nível 1 de cohomologia, mais especificamente $Ker(res_H^G)$, será particularmente importante no desenvolvimento do capítulo 5.

Para finalizar esta seção, veremos alguns resultados envolvendo $Ker(res_H^G)$.

Proposição 2.4.2 Sejam G um grupo, H um subgrupo normal de G e M um RG -módulo, onde $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$. Se $res_H^G : H^1(G; M) \rightarrow H^1(H, M)$ é a aplicação restrição, então

$$Ker\ res_H^G \simeq H^1(G/H, M^H).$$

Demonstração : [25] (Prop. 10.2, cap. XI e (10.6), pág. 354)

Seja G um grupo. Temos, por 2.3.3, que $H^1(G; M) \simeq \frac{Der(G, M)}{P(G, M)}$, para todo grupo G e RG -módulo M .

Segue então que, se H é um subgrupo de G , a aplicação restrição pode ser vista da seguinte forma:

$$\text{res}_H^G : \frac{\text{Der}(G, M)}{P(G, M)} \longrightarrow \frac{\text{Der}(H, M)}{P(H, M)}$$

$$f + P(G, M) \longrightarrow f|_H + P(H, M)$$

Temos então o seguinte resultado:

Proposição 2.4.3 *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e res_H^G a aplicação restrição. Então,*

$$\text{Ker}(\text{res}_H^G) \simeq \frac{\text{Der}(G, H, M)}{P(G, H, M)},$$

onde $\text{Der}(G, H, M) = \{f \in \text{Der}(G, M) / f|_H = 0\}$ e $P(G, H, M) = \{f \in P(G, M) / f|_H = 0\}$.

Demonstração : Temos que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\text{res}_H^G) &= \{f + P(G, M) / f \in \text{Der}(G, M) \text{ e } f|_H \in P(H, M)\} = \\ &= \{f + P(G, M) / f = d_{m_f}, \text{ para algum } d_{m_f} \in P(H, M) \text{ e algum } m_f \in M\}. \end{aligned}$$

Seja $f + P(G, M) \in \text{Ker}(\text{res}_H^G)$ e $h_{m_f} : G \rightarrow M$ tal que $h_{m_f}(g) = gm_f - m_f$.

Definimos

$$\psi : \text{Ker}(\text{res}_H^G) \longrightarrow \frac{\text{Der}(G, S, M)}{P(G, S, M)}$$

$$f + P(G, M) \longrightarrow (f - h_{m_f}) + P(G, S, M).$$

Temos que ψ está bem definida e é um R -isomorfismo. Assim, temos o resultado desejado. ■

2.5 Interpretação Topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$

Nesta seção, vamos relacionar a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de um espaço topológico especial, a saber, um espaço $K(G, 1)$, definido anteriormente.

Vamos denotar $C_*(-, \mathbb{Z})$ por $C_*(-)$, e proceder do mesmo modo para a (co)homologia.

Proposição 2.5.1 *Sejam X um G -complexo livre e Y o complexo de órbitas X/G . Então,*

$$C_*(Y) \simeq C_*(X)_G.$$

Demonstração : Consideremos a projeção canônica

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow X/G \\ x &\mapsto p(x) = G(x) = \{g \cdot x; g \in G\} \end{aligned}$$

Temos bem definida, em termos de complexo de cadeias, temos a aplicação induzida

$$\begin{aligned} p_{\#}: C_n(X) &\rightarrow C_n(X/G) \\ \sum a_i \sigma_i &\mapsto \sum a_i G(\sigma_i) \end{aligned}$$

onde σ_i são n -células de X .

Agora, seja

$$\begin{aligned} \gamma: C_n(X) &\rightarrow C_n(X)_G = C_n(X)/A \\ \alpha &\mapsto \bar{\alpha} = \alpha + A \end{aligned}$$

onde $A = \langle g \cdot \alpha - \alpha; g \in G, \alpha \in C_n(X) \rangle$.

Afirmção: $A \subset \text{Ker}(p_{\#})$.

De fato, para toda n -célula σ_i e para todo $g \in G$, temos

$$p_{\#}(g \cdot \sigma_i - \sigma_i) = p_{\#}(g \cdot \sigma_i) - p_{\#}(\sigma_i) = G(g \cdot \sigma_i) - G(\sigma_i) = G(\sigma_i) - G(\sigma_i) = 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} x \in A &\Rightarrow x = \sum_i (g_i \cdot \alpha_i - \alpha_i), \alpha_i \in C_n(X) \\ &\Rightarrow x = \sum_i \left(g_i \sum_j \sigma_j^i - \sum_j \sigma_j^i \right) = \sum_{i,j} (g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i). \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } p_{\#}(x) = p_{\#} \left(\sum_{i,j} (g_i \cdot \sigma_j^i - \sigma_j^i) \right) = 0.$$

Deste modo,

$$\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) \in A \subset \text{Ker } p_{\#} \Rightarrow p_{\#}(\alpha_1) = p_{\#}(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\bar{\alpha}_1) = \varphi(\bar{\alpha}_2).$$

Assim, temos bem definido o homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \varphi: C_n(X)_G &\rightarrow C_n(Y) = C_n(X/G) \\ \bar{\alpha} &\mapsto \varphi(\bar{\alpha}) = \varphi(\overline{\sum a_i \sigma_i}) = p_{\#}(\alpha) = \sum a_i G(\sigma_i) \end{aligned}$$

Além disso,

- φ é injetora;

De fato,

$$\varphi(\overline{\sum a_i \sigma_i}) = 0 \Rightarrow \sum a_i G(\sigma_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0.$$

Logo,

$$\sum a_i \sigma_i = 0 \Rightarrow \overline{\sum a_i \sigma_i} = 0.$$

- φ é sobrejetora;

De fato,

$$\forall x = \sum a_i G(\sigma_i) \in C_n(X/G), \exists y = \sum a_i \bar{\sigma}_i \in C_n(X)_G \text{ tal que } \varphi(y) = x.$$

Portanto, φ é isomorfismo e ,

$$C_*(Y) \simeq C_*(X)_G.$$

■

Proposição 2.5.2 Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo, então $H_*(G) \simeq H_*(Y)$.

Demonstração : Como Y é um $K(G, 1)$, pela proposição 1.2.2, temos que o complexo celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y , $\varepsilon : C_*(\tilde{Y}) \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Deste modo, $H_*(G) \simeq H_*(C_*(\tilde{Y})_G)$.

Além disso, $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre, e por [23], 5.5.14, temos que o complexo de órbitas é dado por $\tilde{Y}/G \simeq Y$.

Assim, pela proposição 2.5.1, $C_*(\tilde{Y})_G \simeq C_*(Y)$.

Logo,

$$H_*(G) \simeq H_*(C_*(\tilde{Y})_G) \simeq H_*(C_*(Y)) \simeq H_*(Y).$$

Portanto, $H_*(G) \simeq H_*(Y)$.

■

Em alguns tratamentos da Teoria de grupos, este resultado é tomado como uma definição de $H_*(G)$.

Exemplo 2.5.1 Consideremos Y o bouquet de círculos indexado por um conjunto S , $Y = \bigvee_{s \in S} S^1$.

Pelo exemplo 1.2.3, temos que Y é um $K(F(S), 1)$, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado pelo conjunto S .

Assim, pela proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(F(S)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0 \quad (K(F(S), 1) \text{ é conexo}); \\ \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 1; \quad (= F(S)_{ab}) \\ 0, & \text{c.c. } (*) \end{cases}$$

(*) $K(F(S), 1)$ é um CW -complexo de dimensão 1. Logo, não temos células de dimensão maior que 1 e, portanto, $H_i(K(F(S), 1)) = 0$, para $i > 1$.

Exemplo 2.5.2 Seja Y a soma conexa de n toros ($Y = \#_{i=1}^n T_i^2$).

Pelo exemplo 1.2.4, Y é um $K(G, 1)$, onde $G = \left\langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g, \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$.

Portanto, pela proposição anterior

$$H_i(Y) = H_i(G) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} & (2g \text{ vezes}) \text{ se } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{se } i = 2 \\ 0 & \text{se } i \geq 3. \end{cases}$$

Exemplo 2.5.3 Sejam $G \simeq \mathbb{Z}^{(n)} \simeq \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ e $Y = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional).

Pelo exemplo 1.2.2, T^n é um $K(G, 1)$.

Logo,

$$H_i(G) = H_i(T^n) = \mathbb{Z}^{k_i}, \text{ onde } k_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Proposição 2.5.3 Se G tem torção, então não existe $K(G, 1)$ -complexo de dimensão finita. Em particular, $K(G, 1)$ não pode ser variedade.

Demonstração : Seja t um elemento de torção de G e consideremos $H = \langle t \rangle$ o grupo cíclico finito de ordem n .

Suponhamos que exista um $K(G, 1)$ -complexo de dimensão finita m , e consideremos $\tilde{Y}$ o recobrimento universal de Y . Então, pela proposição 1.2.2, temos que

$$0 \longrightarrow C_m(\tilde{Y}) \longrightarrow C_{m-1}(\tilde{Y}) \longrightarrow \dots \longrightarrow C_1(\tilde{Y}) \longrightarrow C_0(\tilde{Y}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Além disso, pelo lema 1.1.2, tal resolução também é resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$.

Deste modo, temos $H_i(H) = 0, \forall i > m$, o que é um absurdo, pelo exemplo 2.2.3.

Logo, não existe $K(G, 1)$ de dimensão finita.

Agora, se $K(G, 1) = M^n$ (variedade de dimensão n), $K(G, 1)$ seria um complexo de dimensão finita.

Portanto, não pode ser variedade. ■

Proposição 2.5.4 *Se Y é um $K(G, 1)$ -complexo, então $H^*(G) \simeq H^*(Y)$.*

Demonstração : Seja $p : X \rightarrow Y$ recobrimento universal de Y .

Vimos que $\varepsilon : C_*(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Vamos mostrar que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z})$.

Para isto, consideremos as aplicações:

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z}) \\ f &\mapsto \varphi(f); \varphi(f)(1 \otimes u) = f(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z}) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z}) \\ g &\mapsto \psi(g); \psi(g)(u) = g(1 \otimes u) \end{aligned}$$

Temos que φ e ψ são homomorfismos e $\varphi^{-1} = \psi$.

Assim, φ é isomorfismo.

Deste modo, temos

$$\begin{aligned} H^*(G) &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(G, \mathbb{Z}) = H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z})) \stackrel{\text{prop.2.1.1}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z})) \\ &\stackrel{\text{prop.2.5.1}}{\simeq} H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X/G), \mathbb{Z})) \\ &\simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(Y), \mathbb{Z})) \\ &= H^*(Y, \mathbb{Z}) \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(Y). \end{aligned}$$

Portanto, $H^*(G) \simeq H^*(Y)$. ■

O exemplo a seguir nos mostra que, em geral, a homologia do espaço X é diferente da homologia do grupo X .

Exemplo 2.5.4 Seja $X = \mathbb{R}$. Temos que $\mathbb{R}$ é um CW-complexo de dimensão 1 e $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo. Consideremos dois casos:

- $\mathbb{R}$ como um espaço:

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = \pi_1(\mathbb{R})_{ab} = \{0\}_{ab} = \{0\}.$$

- $\mathbb{R}$ como um grupo:

$$H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = H_1(K(\mathbb{R}, 1), \mathbb{Z}) = \pi_1(K(\mathbb{R}, 1))_{ab} = \mathbb{R}_{ab} = \mathbb{R}.$$

Assim, a homologia do CW-complexo $\mathbb{R}$ é diferente da homologia do grupo $\mathbb{R}$.

Lema 2.5.1 Seja A um grupo abeliano com G -ação trivial. Temos

- (a) $F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$.
- (b) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A)$.

Demonstração :

- (a) Vamos definir:

$$\begin{aligned} f : F \times A &\rightarrow F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A \\ (x, a) &\mapsto f(x, a) := \bar{x} \otimes a. \end{aligned}$$

Verifica-se facilmente que f é biaditiva e, assim, pela propriedade universal do produto tensorial ([25], V.1.1), existe um homomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : F \otimes_{\mathbb{Z}G} A &\rightarrow F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A \\ x \otimes a &\mapsto \varphi(x \otimes a) = \bar{x} \otimes a. \end{aligned}$$

Consideremos, agora

$$\begin{aligned} g : F_G \times A &\rightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \\ (\bar{x}, a) &\mapsto g(\bar{x}, a) := x \otimes a. \end{aligned}$$

Mostra-se facilmente que g está bem definida e é biaditiva. Novamente por [25], V.1.1, temos um homomorfismo bem definido:

$$\begin{aligned} \psi : F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A &\rightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \\ \bar{x} \otimes a &\mapsto \psi(\bar{x} \otimes a) = x \otimes a. \end{aligned}$$

As aplicações φ e ψ são tais que uma é inversa da outra.

Logo,

$$F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A.$$

(b) Consideremos as aplicações :

$$\begin{aligned} \theta : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A) \\ f &\mapsto \theta(f); \theta(f)(\bar{x}) = f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \\ g &\mapsto \rho(g); \rho(g)(x) = g(\bar{x}). \end{aligned}$$

Tais aplicações são homomorfismos e, $\theta = \rho^{-1}$.

Portanto,

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A).$$

■

Proposição 2.5.5 Se M é um $\mathbb{Z}G$ -módulo trivial, então

$$(a) H_*(G, M) \simeq H_*(K(G, 1), M);$$

$$(b) H^*(G, M) \simeq H^*(K(G, 1), M).$$

Demonstração : Seja $Y = K(G, 1)$ e X o recobrimento universal de Y . Temos

$$\begin{aligned} (a) H_*(G, M) &= H_*(C_*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}G} M) \stackrel{\text{lema 2.5.1(a)}}{\simeq} H_*(C_*(X, \mathbb{Z})_G \otimes_{\mathbb{Z}} M) \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} H_*(C_*(X)_G \otimes_{\mathbb{Z}} M) \\ &\stackrel{\text{prop. 2.5.1}}{\simeq} H_*(C_*(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} M) \\ &= H_*(Y, M). \end{aligned}$$

Portanto, $H_*(G, M) \simeq H_*(K(G, 1), M)$.

$$\begin{aligned} (b) H^*(G, M) &= H^*(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X, \mathbb{Z}), M)) \stackrel{\text{lema 2.5.1(b)}}{\simeq} H^*(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X, \mathbb{Z})_G, M)) \\ &\stackrel{\text{not.}}{=} H^*(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, M)) \\ &\stackrel{\text{prop. 2.5.1}}{\simeq} H^*(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(Y), M)) \\ &= H^*(Y, M). \end{aligned}$$

Portanto, $H^*(G, M) \simeq H^*(K(G, 1), M)$.

■

Observação 2.5.1 Existe, também, uma interpretação topológica para $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$, considerando-se M como um $\mathbb{Z}G$ -módulo não trivial:

- $H_*(G, M) \simeq H_*(K(G, 1), \mathcal{M})$
- $H^*(G, M) \simeq H^*(K(G, 1), \mathcal{M})$

onde $\mathcal{M}$ é o sistema de coeficientes locais associado ao RG -módulo M ([13]).

(Co)homologia Relativa

3.1 A Definição de $H^*(G, S; M)$ e $H_*(G, S; M)$

Nesta seção, apresentaremos a definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $S = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G .

Ribes introduziu em [27] a definição de (co)homologia relativa, $H^*(G, S; M)$ e $H_*(G, S; M)$, para um grupo G e S um subgrupo de G . A definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $S = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G foi introduzida por Bieri e Eckmann em [4]. Esta definição introduzida por Bieri e Eckmann é uma generalização da apresentada por Ribes, no sentido que, tomando $S = \{S\}$, as duas definições coincidem (a menos de isomorfismo). Este fato é demonstrado em [2].

Em [4], a teoria de (co)homologia está definida sobre o anel $\mathbb{Z}$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Aqui estabeleceremos com a (co)homologia definida sobre um anel comutativo com unidade R com coeficientes em um RG -módulo M .

Definição 3.1.1 Um par grupo (G, S) consiste de um grupo G e uma família $S = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G , não necessariamente distintos.

Denotaremos por $R(G/S)$ o R -módulo livre gerado pelas classes gS_i , no qual G atua por multiplicação à esquerda. Assim,

$$R(G/S) = \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i) \cong \bigoplus_{i \in I} \bigoplus_{g \in G/S_i} R$$

Portanto,

$$R(G/S) \cong \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i)$$

Capítulo 3

(Co)homologia Relativa

3.1 A Definição de $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ e $H_*(G, \mathcal{S}; M)$

Nesta seção, apresentaremos a definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G .

Ribes introduziu em [27] a definição de (co)homologia relativa, $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ e $H_*(G, \mathcal{S}; M)$, para um grupo G e S um subgrupo de G . A definição de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G foi introduzida por Bieri e Eckmann em [4]. Esta definição introduzida por Bieri e Eckmann é uma generalização da apresentada por Ribes, no sentido que, tomando $\mathcal{S} = \{S\}$, as duas definições coincidem (a menos de isomorfismo). Este fato é demonstrado em [2].

Em [4], a teoria de (co)homologia está definida sobre o anel $\mathbb{Z}$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo. Aqui trabalharemos com a (co)homologia definida sobre um anel comutativo com unidade R com coeficientes em um RG -módulo M .

Definição 3.1.1 *Um par grupo $(G, \mathcal{S})$ consiste de um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G , não necessariamente distintos.*

Denotaremos por $R(G/\mathcal{S})$ o R -módulo livre gerado pelas classes $g.S_i$, no qual G atua por multiplicação à esquerda. Assim,

$$R(G/\mathcal{S}) = \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i) \stackrel{\text{Corol. 1.4.1}}{\simeq} \bigoplus_{i \in I} \text{Ind}_{S_i}^G R.$$

Portanto,

$$R(G/\mathcal{S}) \simeq \bigoplus_{i \in I} \text{Ind}_{S_i}^G R.$$

Consideremos $\epsilon : R(G/S) \rightarrow R$ a aplicação aumentação, que leva cada gerador $g.S_i$ em $1 \in R$ e denotemos por Δ o núcleo de ϵ ($\Delta = \ker(\epsilon)$).

Definição 3.1.2 *Sejam (G, S) um par grupo, $S = \{S_i, i \in I\}$ e M um RG -módulo. Os grupos de (co)homologia relativa para (G, S) , com coeficientes em M são, para todo $k \in \mathbb{Z}$, definidos por*

$$H^k(G, S; M) := H^{k-1}(G; \text{Hom}_R(\Delta, M))$$

$$H_k(G, S; M) := H_{k-1}(G; \Delta \otimes_R M)$$

onde as ações de G em $\text{Hom}_R(\Delta, M)$ e $\Delta \otimes_R M$ são dadas, respectivamente, por $gf(x) = gf(g^{-1}x)$ e $g(x \otimes m) = gx \otimes gm$ (ações diagonais).

Observações :

(1) Segue da definição que, para $k \leq 0$,

$$H^k(G, S; M) = 0 \text{ e } H_k(G, S; M) = 0.$$

(2) Por convenção, se tomarmos a família vazia ($S = \emptyset$), definimos, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$H^k(G, \emptyset; M) := H^k(G; M) \text{ e } H_k(G, \emptyset; M) := H_k(G; M)$$

(3) É conveniente escrevermos, para qualquer família $S = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G ,

$$H_k(S; M) = \bigoplus_{i \in I} H_k(S_i; M) \text{ e } H^k(S; M) = \prod_{i \in I} H^k(S_i; M),$$

onde M é um RS -módulo, isto é, um RS_i -módulo, para todo i . Se M é um RG -módulo, então M é um RS -módulo por restrição de escalares.

3.2 (Co)homologia Relativa como funtor de Duas Variáveis

Neste parágrafo, veremos que $H_*(-, -; -)$ e $H^*(-, -; -)$ são funtores de duas variáveis $((G, S); M)$. Mostraremos primeiramente, com detalhes, que a cohomologia relativa é um funtor contravariante numa determinada categoria $\mathcal{C}$. Os resultados para homologia relativa são análogos.

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são pares $((G, \mathcal{S}); M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G e M é um RG -módulo e, cujos homomorfismos são aplicações :

$$\psi : ((G, \mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}); M) \longrightarrow ((L, \mathcal{R} = \{R_j, j \in J\}); N)$$

consistindo de:

- a) Um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow L$;
- b) Uma aplicação $\pi : I \rightarrow J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$;
- c) Um homomorfismo de RG -módulos $\phi : N \rightarrow M$ tal que $\phi(\alpha(g)n) = g\phi(n)$, isto é, ϕ é um homomorfismo de RG -módulos via α .

Vamos ver que, nestas condições, existe um homomorfismo

$$\psi^* : H^*(L, \mathcal{R}; N) \longrightarrow H^*(G, \mathcal{S}; M),$$

induzido pela ψ .

Sejam

$$\epsilon_G : R(G/\mathcal{S}) \longrightarrow R \text{ tal que } \epsilon_G(xS_i) = 1, x \in G \text{ e}$$

$$\epsilon_L : R(L/\mathcal{R}) \longrightarrow R \text{ tal que } \epsilon_L(yR_j) = 1, y \in L$$

as aumentações usuais.

Denotemos por Δ_G o núcleo de ϵ_G e por Δ_L o núcleo de ϵ_L .

Definamos

$$\rho : R(G/\mathcal{S}) \longrightarrow R(L/\mathcal{R}) \text{ por}$$

$$\rho(xS_i) = \alpha(x)R_{\pi(i)}$$

nos geradores e estendamos ρ por linearidade.

Temos que ρ está bem definida, é homomorfismo, e $\rho(\Delta_G) \subset \Delta_L$.

Deste modo, podemos definir $\bar{\rho} := \rho|_{\Delta_G} : \Delta_G \longrightarrow \Delta_L$.

Temos então, definida uma aplicação

$$(\bar{\rho}, \phi)^{\#} : Hom_R(\Delta_L, N) \longrightarrow Hom_R(\Delta_G, M),$$

dada por:

$$(\bar{\rho}, \phi)^{\#}(f) = \phi \circ f \circ \bar{\rho},$$

onde $\phi : M \longrightarrow N$ é dada em (c).

Por simplicidade, denotemos $\text{Hom}_R(\Delta_L, N)$ por $\mathcal{N}$ e $\text{Hom}_R(\Delta_G, M)$ por $\mathcal{M}$.

Temos que $\mathcal{N}$ é um RL -módulo com L -ação diagonal

$$(yf)(x) = yf(y^{-1}x), \quad (I)$$

para todo $x \in \Delta_L$, $f \in \mathcal{N}$ e $y \in L$.

Da mesma forma, $\mathcal{M}$ é um RG -módulo com G -ação diagonal.

Lema 3.2.1 A aplicação $(\bar{\rho}, \phi)^\# : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}$, definida anteriormente, satisfaz a condição

$$(\bar{\rho}, \phi)^\#(\alpha(g)f) = g(\bar{\rho}, \phi)^\#(f),$$

para todo $f \in \mathcal{N}$ e todo $g \in G$, isto é, $(\bar{\rho}, \phi)^\#$ é uma aplicação de RG -módulos, onde $\mathcal{N}$ é visto como RG -módulo via α .

Demonstração : Inicialmente, notemos que:

- $\rho : R(G/S) \longrightarrow R(L/R)$ é tal que $\rho(gu) = \alpha(g)\rho(u)$, para todo $g \in G$ e $u \in R(G/S)$ (*).

De fato, verifiquemos a afirmação acima nos geradores de $R(G/S)$.

Para isto, seja XS_i um gerador de $R(G/S)$. Temos:

$$\rho(g(XS_i)) = \rho(gXS_i) = \alpha(gX)R_{\pi(i)} = \alpha(g)\alpha(X)R_{\pi(i)} = \alpha(g)(\alpha(X)R_{\pi(i)}) = \alpha(g) \cdot \rho(XS_i).$$

Logo, $\rho(g(XS_i)) = \alpha(g) \cdot \rho(XS_i)$, para todo XS_i gerador de $R(G/S)$.

Portanto, $\rho(gu) = \alpha(g)\rho(u)$, para todo $g \in G$ e $u \in R(G/S)$.

Agora, sejam $f \in \mathcal{N}$ e $u \in \Delta_G = \text{Ker}(\epsilon_G)$. Temos que:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}, \phi)^\#(\alpha(g)f)(u) &= (\phi \circ (\alpha(g)f) \circ \bar{\rho})(u) = \phi(\alpha(g)f(\bar{\rho}(u))) \stackrel{I}{=} \phi(\alpha(g)f(\alpha(g^{-1}\bar{\rho}(u)))) = \\ &= g\phi(f(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u))) = g(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (g(\bar{\rho}, \phi)^\#(f))(u) &= g((\bar{\rho}, \phi)^\#(f)(g^{-1}u)) = g((\phi \circ f \circ \bar{\rho})(g^{-1}u)) = g((\phi \circ f)(\bar{\rho}(g^{-1}u))) = \\ &= g(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u)). \end{aligned}$$

Logo,

$$(\bar{\rho}, \phi)^\#(\alpha(g)f) = g(\bar{\rho}, \phi)^\#(f),$$

ou seja, $(\bar{\rho}, \phi)^\#$ é uma aplicação de RG -módulos.

■

Teorema 3.2.1 $H^*((-, -); -)$ é um funtor contravariante na categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração : Denotemos por ψ a aplicação $(G \xrightarrow{\alpha} L, \mathcal{N} \xrightarrow{(\bar{\rho}, \phi)^{\#}} \mathcal{M})$.

Pelo Lema Anterior, $(\bar{\rho}, \phi)^{\#}$ é uma aplicação de RG -módulos e, assim, temos que ψ induz, para todo $k \in \mathbb{Z}$, um homomorfismo $\bar{\psi}^k : H^k(L, \mathcal{N}) \rightarrow H^k(G, \mathcal{M})$.

Mas, por definição,

$$H^k(G, \mathcal{S}; M) = H^{k-1}(G, \mathcal{M}) \text{ e } H^k(L, \mathcal{R}; N) = H^{k-1}(L; \mathcal{N}).$$

Logo, temos o homomorfismo induzido:

$$\psi^* : H^k(L, \mathcal{R}; N) \rightarrow H^k(G, \mathcal{S}; M).$$

Verifica-se facilmente que:

- Se $\psi : ((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow ((G, \mathcal{S}); M)$ é a aplicação identidade, então a aplicação

$$\psi^* : H^*((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow H^*((G, \mathcal{S}); M)$$

é o homomorfismo identidade.

- Se $\psi : ((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow ((L, \mathcal{R}); N)$ e $\gamma : ((L, \mathcal{R}); N) \rightarrow ((K, \mathcal{O}); P)$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então

$$(\gamma \circ \psi)^* = \psi^* \circ \gamma^*.$$

Portanto, $H^*((-, -); -)$ é um funtor contravariante em $\mathcal{C}$. ■

Para a homologia relativa, a situação é análoga, isto é, se considerarmos a categoria $\mathcal{D}$, cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$ mas os morfismos são aplicações $\psi : ((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow ((L, \mathcal{R}); N)$ consistindo de (a), (b) e, (c)' : $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\phi(gm) = \alpha(g)\phi(m)$

mostra-se, analogamente, que existe um homomorfismo induzido

$$\psi_* : H_*((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow H_*((L, \mathcal{R}); N)$$

e que $H_*((-, -); -)$ é um funtor covariante na categoria $\mathcal{D}$.

Proposição 3.2.1 *Sejam $(G, \mathcal{S} = \{S_i, i \in I\})$ um par grupo e M um RG -módulo. Então, temos as seqüências exatas longas:*

$$(i) \dots \longrightarrow H^k(G; M) \xrightarrow{\text{res}_{\mathcal{S}}^G} \prod_{i \in I} H^k(S_i; M) \longrightarrow H^{k+1}(G, \mathcal{S}; M) \xrightarrow{I} H^{k+1}(G; M) \longrightarrow \dots$$

$$(ii) \dots \longrightarrow H_{k+1}(G; M) \xrightarrow{\rho} H_{k+1}(G, \mathcal{S}; M) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} H_k(S_i; M) \xrightarrow{\text{cor}_{\mathcal{S}}^G} H_k(G; M) \longrightarrow \dots,$$

que são naturais no RG -módulo M e no par $(G, \mathcal{S})$, onde

$$\text{res}_{\mathcal{S}}^G : H^k(G; M) \longrightarrow \prod_{i \in I} H^k(S_i; M), \text{ é dada por } \text{res}_{\mathcal{S}}^G([f]) = (\text{res}_{S_i}^G[f])_i \text{ e}$$

$$\text{cor}_{\mathcal{S}}^G : \bigoplus_{i \in I} H_k(S_i; M) \longrightarrow H_k(G; M) \text{ é dada por } \text{cor}_{\mathcal{S}}^G\left(\sum_{k=1}^r [f_{ik}]\right) = \sum \text{cor}_{S_i}^G[f_{ik}]$$

são as aplicações induzidas, no nível k de (co)homologia, pelas inclusões $S_i \xrightarrow{i} G$.

Demonstração : (i) Consideremos a seguinte seqüência exata de RG -módulos:

$$0 \longrightarrow \Delta \xrightarrow{i} R(G/\mathcal{S}) \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0 \quad (3.2.1.1),$$

onde ϵ é a aplicação aumentação ($\epsilon(gS_i) = 1, \forall g \in G, \forall i \in I$), $\Delta := \text{Ker}(\epsilon)$ e i a inclusão.

Como R é R -livre, logo R -projetivo, temos que esta seqüência cinde e, deste modo, por [18], a seqüência

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\epsilon^\#} \text{Hom}_R(R(G/\mathcal{S}), M) \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_R(\Delta, M) \longrightarrow 0$$

também é exata, onde $i^\#(\varphi) = \varphi \circ i$ e $\epsilon^\#(\varphi) = \varphi \circ \epsilon$.

Seja $F \longrightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG . Como os F_i 's são RG -projetivos temos, por [18], 1.9.4(e), que para todo n ,

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(F_n, \text{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_n^\#} \text{Hom}_{RG}(F_n, \text{Hom}_R(R(G/\mathcal{S}), M)) \xrightarrow{\widetilde{i}_n^\#} \\ \xrightarrow{\widetilde{i}_n^\#} \text{Hom}_{RG}(F_n, \text{Hom}_R(\Delta, M)) \longrightarrow 0$$

é exata e, assim, temos a seqüência exata curta de complexos de cocadeias

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(F, \text{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}^\#} \text{Hom}_{RG}(F, \text{Hom}_R(R(G/\mathcal{S}), M)) \xrightarrow{\widetilde{i}^\#} \\ \xrightarrow{\widetilde{i}^\#} \text{Hom}_{RG}(F, \text{Hom}_R(\Delta, M)) \longrightarrow 0,$$

onde $\widetilde{i}^\#(\varphi) = i^\# \circ \varphi$ e $\widetilde{\epsilon}^\#(\varphi) = \epsilon^\# \circ \varphi$.

Agora, esta sequência exata curta de complexos induz a seguinte sequência exata longa em cohomologia (ver Prop. 2.4.1):

$$0 \longrightarrow H^n(G; \text{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow{\epsilon_n^*} H^n(G; \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i), M)) \xrightarrow{i_n^*} \\ \xrightarrow{i_n^*} H^n(G; \text{Hom}_R(\Delta, M)) \xrightarrow{\tau_n} H^{n+1}(G; \text{Hom}_R(R, M)) \longrightarrow \dots,$$

onde $(\epsilon_n^*)([\varphi]) = [\epsilon^\# \circ \varphi]$; $(i_n^*)([\varphi]) = [i^\# \circ \varphi]$ e τ_n é o homomorfismo de conexão.

Mas, $\text{Hom}_R(R, M) \simeq M$, através do isomorfismo $\psi : M \longrightarrow \text{Hom}_R(R, M)$ dado por $\psi(m) := f_m$ tal que $f_m(1) = m$, isto é, $\psi(m)(1) = m$ (e estendendo por linearidade).

Deste modo, $H^n(G; M) \xrightarrow{\psi^*} H^n(G; \text{Hom}_R(R, M))$, onde ψ^* é induzido de ψ e dado por $\psi^*[f] = [\psi \circ f]$.

Vamos mostrar que

$$H^n(G; \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i), M)) \simeq \prod_{i \in I} H^n(S_i; M), \quad (3.2.1.2)$$

através de um isomorfismo, que denotaremos por ρ^* ; e, então, lembrando que $H^n(G; \text{Hom}_R(\Delta, M)) = H^{n+1}(G, \mathcal{S}, M)$, a sequência exata acima toma a forma:

$$\dots \longrightarrow H^n(G; M) \xrightarrow{\rho^* \circ \epsilon_n^* \circ \psi^*} \prod_{i \in I} H^n(S_i; M) \rightarrow H^{n+1}(G, \mathcal{S}; M) \rightarrow H^{n+1}(G; M) \rightarrow \prod_{i \in I} H^n(S_i; M) \rightarrow \dots$$

Além disso, mostremos que $\rho^* \circ \epsilon_n^* \circ \psi^* = \text{res}_S^G$, onde $\text{res}_S^G([f]) = (\text{res}_i[f])_{i \in I}$, com $\text{res}_i : H^n(G; M) \rightarrow H^n(S_i; M)$ induzida pela inclusão $S_i \hookrightarrow G$.

Para mostrarmos (3.2.1.2) e que $\rho^* \circ \epsilon_n^* \circ \psi^* = \text{res}_S^G$, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(G; M) & \xrightarrow{\psi^*} & H^n(G; \text{Hom}_R(R, M)) & \xrightarrow{\epsilon_n^*} & H^n(G; \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i), M)) & & \\ & & & & \downarrow \phi^* & & \\ & & & & H^n(G; \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i), M)) & & \\ & & & & \downarrow \gamma & & \\ & & & & \prod_{i \in I} H^n(G; \text{Hom}_R(R(G/S_i), M)) & & \\ & & & & \downarrow \varphi^* = (\varphi_i^*)_{i \in I} & & \\ & & & & \prod_{i \in I} H^n(G; \text{Coin}_{S_i}^G M) & & \\ & & & & \downarrow (\pi_i^*)_{i \in I} & & \\ & & & & \prod_{i \in I} H^n(G; M) & & \\ & & & & \downarrow (\text{res}_i)_{i \in I} & & \\ & & & & \prod_{i \in I} H^n(S_i, M) = H^n(\mathcal{S}; M) & & \\ & \searrow \text{res}_S^G & & & & & \end{array}$$

onde as aplicações ϕ^* , φ^* , $(\pi_i^*)_{i \in I}$, γ e $(\text{res}_i)_{i \in I}$ são dadas por:

- ϕ^* é a induzida, no nível n de cohomologia, de

$$\phi : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i), M\right) \longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i), M),$$

definida por $\phi(f) = (f \circ j_i)_{i \in I}$, onde $j_i : R(G/S_i) \longrightarrow R(G/S) = \bigoplus R(G/S_i)$ é a inclusão.

- φ^* é a induzida do isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi = (\varphi_i)_{i \in I} : \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i), M) &\longrightarrow \prod_{i \in I} \text{Coind}_{S_i}^G M \\ (f_i)_{i \in I} &\longmapsto (\varphi_i(f_i))_{i \in I} \end{aligned}$$

onde ,

$$\begin{aligned} \varphi_i : \text{Hom}_R(R(G/S_i), M) &\longrightarrow \text{Coind}_{S_i}^G M \\ f_i &\longmapsto \varphi_i(f_i) : RG \rightarrow M \\ x &\mapsto x f_i(x^{-1} S_i) \end{aligned}$$

- (π_i^*) é a induzida, no nível n de cohomologia, de

$$\pi_i : \text{Coind}_{S_i}^G M \longrightarrow M$$

é tal que $\pi_i(f_i) = f_i(1)$.

- $\gamma : H^n(G, \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i); M)) \longrightarrow \prod_{i \in I} H^n(G, \text{Hom}_R(R(G/S_i); M))$ é tal que $\gamma([f]) = ([p_j \circ f])_{j \in I}$, onde $p_j : \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i); M) \longrightarrow \text{Hom}_R(R(G/S_i); M)$ é a projeção.
- $(res_i)_{i \in I} : \prod_{i \in I} H^n(G; M) \longrightarrow \prod_{i \in I} H^n(S_i; M)$ tal que $(res_i)_{i \in I}([\phi_i]_{i \in I}) = (res_i([\phi_i]))_{i \in I}$.

Observemos que $\varphi^*, \gamma, \phi^*$ e $(res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} = (res_i \circ \pi_i^*)_{i \in I}$ são isomorfismos, onde $(res_i \circ \pi_i^*)$ é o Isomorfismo de Shapiro (ver Obs. 2.4.1), para cada $i \in I$.

Assim, $\rho^* = (res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^* \circ \gamma \circ \phi^*$ é isomorfismo e, temos que

$$H^n(G, \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i); M)) \simeq \prod_{i \in I} H^n(S_i; M),$$

ou seja, (3.2.1.2) é verdadeira.

Agora,

$$(\rho^* \circ \epsilon_n^* \circ \psi^*)([f]) = (\rho^* \circ \epsilon_n^*)([\psi \circ f]) = \rho^*([\epsilon^\# \circ \psi \circ f]) = ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^* \circ \gamma \circ \phi^*)([\epsilon^\# \circ \psi \circ f]) =$$

$$\begin{aligned}
&= ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^* \circ \gamma)([\phi \circ \epsilon^\# \circ \psi \circ f]) = ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^*)([p_i \circ \phi \circ \epsilon^\# \circ \psi \circ f])_{i \in I} = \\
&= ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I})([\varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \epsilon^\# \circ \psi \circ f])_{i \in I} = (res_i[\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \epsilon^\# \circ \psi \circ f])_{i \in I}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
(\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \epsilon^\# \circ \psi \circ f)(x) &= (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \epsilon^\# \circ \psi)(f(x)) = (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi)(\epsilon^\#(\psi(f(x)))) = \\
&= (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi)(\psi(f(x)) \circ \epsilon) = (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i)(\psi(f(x)) \circ \epsilon \circ j_k)_{k \in I} = (\pi_i \circ \varphi_i)(\psi(f(x)) \circ \epsilon \circ j_i) = \\
&= \pi_i(\varphi_i(\psi(f(x)) \circ \epsilon \circ j_i)) = (\varphi_i(\psi(f(x)) \circ \epsilon \circ j_i))(1) = (\psi(f(m)) \circ \epsilon \circ j_i)(1.S_i) = \psi(f(m))(1) = \\
&= f(m), \forall x \in F, \text{ onde } F \text{ é uma resolução projetiva de } R \text{ sobre } RG.
\end{aligned}$$

Logo,

$$res_i[\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \epsilon^\# \circ \psi \circ f] = res_i[f]$$

e, portanto,

$$(\rho^* \circ \epsilon_n^* \circ \psi^*)[f] = (res_i[f])_{i \in I} = res_S^G.$$

(ii) Consideremos novamente a seqüência exata de RG -módulos:

$$0 \longrightarrow \Delta \xrightarrow{i} R(G/S) \xrightarrow{\epsilon} R \longrightarrow 0 \quad (3.2.1.1),$$

onde ϵ é a aplicação aumentação ($\epsilon(gS_i) = 1, \forall g \in G, \forall i \in I$), $\Delta := \text{Ker}(\epsilon)$ e i a inclusão.

Como R é R -livre, logo R -projetivo, temos que esta seqüência cinde e, deste modo, por [18], 1.7.10, a seqüência

$$0 \longrightarrow \Delta \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes id} R(G/S) \otimes_R M \xrightarrow{\epsilon \otimes id} R \otimes M \longrightarrow 0$$

também é exata.

Seja $F \longrightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG . Temos, então, a seguinte seqüência exata curta de complexos de cadeias:

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow F \otimes_{RG} (\Delta \otimes_R M) &\xrightarrow{i^\#} F \otimes_{RG} (R(G/S) \otimes_R M) \xrightarrow{\epsilon^\#} \\
&\xrightarrow{\epsilon^\#} F \otimes_{RG} (R \otimes_R M) \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

onde $\epsilon^\#(x \otimes_{RG} (gS_i \otimes_R m)) = x \otimes_{RG} (1 \otimes_R m)$ e $i^\#(x \otimes_{RG} (s \otimes_R m)) = x \otimes_{RG} (i(s) \otimes_R m)$.

Agora, pela Prop. 2.4.1(i), esta seqüência induz a seguinte seqüência exata longa em homologia:

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H_{n+1}(G; R \otimes_R M) \xrightarrow{\tau_{n+1}} H_n(G; \Delta \otimes_R M) \xrightarrow{i_*} \\ \xrightarrow{i_*} H_n(G; R(G/\mathcal{S}) \otimes_R M) \xrightarrow{\epsilon_*} H_n(G; R \otimes_R M) \xrightarrow{\tau_n} H_{n-1}(G; \Delta \otimes_R M) \dots, \end{aligned}$$

onde i_* e ϵ_* são os homomorfismos induzidos de $i_{\#}$ e $\epsilon_{\#}$ em homologia e τ_n é o homomorfismo de conexão no nível n .

Mas, $R \otimes_R M \simeq M$, através do isomorfismo θ , dado por $\theta(1 \otimes m) = m$ (e estendido por linearidade).

Assim, $H_n(G; R \otimes_R M) \simeq H_n(G; M)$, através do isomorfismo θ^* , induzido por θ , definido por

$$\theta^*[x \otimes (1 \otimes m)] = [x \otimes \theta(1 \otimes m)] = [x \otimes m].$$

Agora,

$$H_n(G; \Delta \otimes_R M) := H_{n+1}(G, \mathcal{S}, M).$$

Mostremos que

$$\bigoplus_{i \in I} H^n(S_i; M) \simeq H^n(G; R(G/\mathcal{S}) \otimes_R M), \quad (3.2.1.3)$$

através de um isomorfismo, que denotaremos por α_* ; e, assim, a sequência exata acima tomará a forma:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(G; M) \longrightarrow H_{n+1}(G, \mathcal{S}; M) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) \xrightarrow{\theta_* \circ \epsilon_* \circ \alpha_*} H_n(G; M) \rightarrow H_n(G, \mathcal{S}; M) \rightarrow \dots$$

Mostremos também que $\theta_* \circ \epsilon_* \circ \alpha_* = \text{cor}_S^G$, onde $\text{cor}_S^G([f]) : \bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) \rightarrow H_n(G; M)$ é definida por

$$\text{cor}_S^G([x_i \otimes_{RS_i} m_i]_{i \in I}) = \sum_{i \in I} [x_i \otimes_{RG} m_i].$$

Para mostrarmos (3.2.1.3) e que $\theta_* \circ \epsilon_* \circ \alpha_* = \text{cor}_S^G$, consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c}
 \bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) \xrightarrow{(cor_i)_{i \in I}} \bigoplus_{i \in I} H_n(G; M) \xrightarrow{(J_{i*})_{i \in I}} \bigoplus_{i \in I} H_n(G; Ind_{S_i}^G M) \\
 \searrow \text{cor}_S^G \quad \downarrow (\varphi_{i*})_{i \in I} \\
 \quad \quad \quad \bigoplus_{i \in I} H_n(G; (R(G/S_i) \otimes_R M)) \\
 \quad \quad \quad \downarrow \gamma \\
 \quad \quad \quad H_n(G; \bigoplus_{i \in I} (R(G/S_i) \otimes_R M)) \\
 \quad \quad \quad \downarrow h_* \\
 \quad \quad \quad H_n(G; (\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i) \otimes_R M)) \\
 \quad \quad \quad \downarrow \epsilon_* \\
 \quad \quad \quad H_n(G; R \otimes_R M) \\
 \quad \quad \quad \downarrow \theta_* \\
 \quad \quad \quad H_n(G, M)
 \end{array}$$

onde :

- h_* é a induzida em homologia de

$$h : \bigoplus_{i \in I} (R(G/S_i) \otimes M) \longrightarrow (\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i)) \otimes M,$$

definida por $h(\overline{g_i} \otimes m_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} ((r_k)_{k \in I} \otimes m_i)$, onde $r_k = 0$, se $k \neq i$ e, $r_k = \overline{g_i}$, se $k = i$.

- φ_{i*} é a induzida de

$$\varphi_i : Ind_{S_i}^G M \longrightarrow (R(G/S_i) \otimes_R M),$$

dada por $\varphi_i(g \otimes m) = \overline{g_i} \otimes gm$.

- θ_* é a induzida em homologia de

$$\theta : R \otimes M \longrightarrow M$$

definida por

$$\theta(1 \otimes m) = m.$$

- $cor_i : H_n(S_i; M) \longrightarrow H_n(G; M)$, dada por

$$cor_i([x \otimes_{RS_i} m]) = [x \otimes_{RG} m]$$

é a induzida da inclusão $S_i \hookrightarrow G$.

- ϵ_* é a induzida em homologia de $\epsilon : \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i) \otimes M \longrightarrow R \otimes M$, dada por

$$\epsilon(gS_i \otimes m) = 1 \otimes m.$$

- $\gamma([x_i \otimes_{RG} (\bar{g}_i \otimes_R m_i)])_{i \in I} = [\sum_{i \in I} x_i \otimes_R (r_k)_{k \in I}]$, onde $r_k = 0$, se $k \neq i$ e $r_k = \bar{g}_i \otimes m_i$, se $k = i$.
- J_{i*} é induzida de $J_i : M \longrightarrow \text{Ind}_{S_i}^G M$, dada por $J_i(m) = 1 \otimes m$.

Observemos que $h_*, \gamma, (\varphi_{i*})_{i \in I}$ e $(J_{i*})_{i \in I} \circ (cor_i)_{i \in I} = (J_{i*} \circ cor_i)_{i \in I}$ são isomorfismos, onde $J_{i*} \circ cor_i$ é o Isomorfismo de Shapiro (ver Obs. 2.4.1), para cada $i \in I$.

Deste modo, $\alpha_* = h_* \circ \gamma \circ (\varphi_i)_{i \in I} \circ (J_i)_{i \in I} \circ (cor_i)_{i \in I}$ é isomorfismo, ou seja,

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) \simeq H_n(G; R(G/S) \otimes_R M),$$

provando (3.2.1.3).

Agora, é fácil ver, através das definições das aplicações envolvidas, que

$$\theta_* \circ \epsilon_* \circ \alpha_*([x_i \otimes_{RS_i} m_i])_{i \in I} = \sum_{i \in I} [x_i \otimes_{RG} m_i].$$

Portanto,

$$\theta_* \circ \epsilon_* \circ \alpha_* = cor_*^G.$$

■

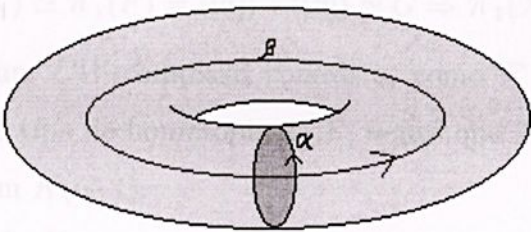
3.3 Interpretação Topológica da (Co)homologia Relativa

Neste parágrafo, veremos a relação entre a (co)homologia relativa de grupos e a (co)homologia relativa de espaços topológicos.

Definição 3.3.1 Um par grupo (G, S) , $S = \{S_i, i \in I\}$, é **realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane** $(X, Y) = K(G, S, 1)$ se:

- (i) X é um $K(G, 1)$ complexo celular;
- (ii) Y é um subcomplexo cujas componentes $Y_i, i \in I$, são $K(S_i, 1)$ complexos, de tal modo que a aplicação $i_\# : \pi_1(Y_i) \rightarrow \pi_1(X)$, induzida da inclusão $i : Y_i \rightarrow X$, é injetiva e aplica $\pi_1(Y_i)$ sobre $S_i \subset G$, depois de uma conveniente mudança do ponto base.

Exemplo 3.3.1 Sejam $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $\mathcal{S} = \{S\}$, onde $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$.
Consideremos X o toro T^2 e, α e β os laços mostrados na figura abaixo:



Temos que $\pi_1(T^2) = \langle [\alpha] \rangle \oplus \langle [\beta] \rangle \simeq G$, identificando $[\alpha]$ com a e $[\beta]$ com b . Assim, sendo T^2 conexo e o recobrimento de T^2 contrátil, temos que $X = T^2$ é um $K(G, 1)$.

Agora, seja Y o laço representado por α .
Temos que $Y \sim S^1$. Logo, pelo exemplo 1.2.1, Y é um $K(S, 1)$ -complexo.
Além disso, observemos que

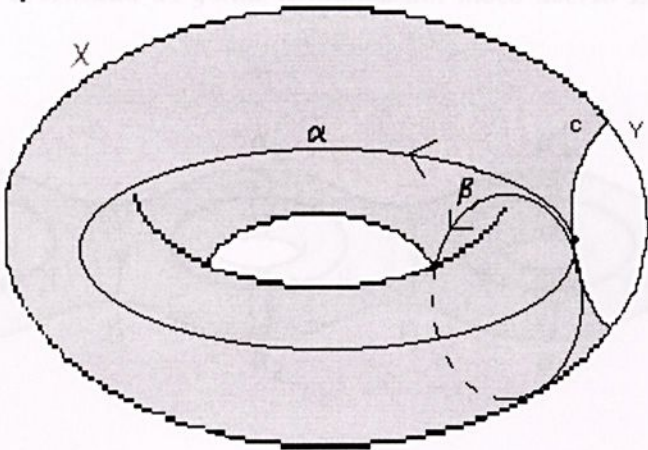
$$i_{\#} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$$
$$[\alpha] \mapsto [i \circ \alpha],$$

onde $i : Y \rightarrow X$ é a inclusão, é injetora.
Portanto, $(X, Y) \sim (T^2, S^1)$ é um par Eilenberg-MacLane realizando $(G, \mathcal{S})$.

Exemplo 3.3.2 Sejam $G = \langle t \rangle * \langle s \rangle$ e $\mathcal{S} = \{S\}$, onde $S = \langle sts^{-1}t^{-1} \rangle$.

Temos que $(G, \mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é o toro T^2 menos um disco aberto D e Y é o bordo de X .

De fato, consideremos α, β os laços representados na figura abaixo:



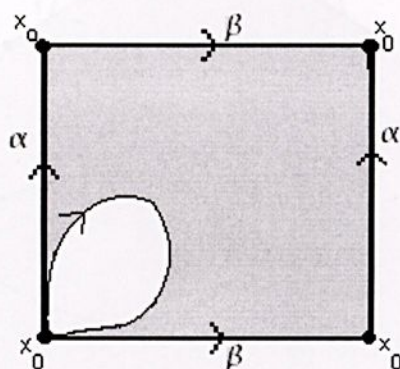
Temos que X tem o mesmo tipo de homotopia da figura oito, que denotaremos por F .

Logo,

$$\pi_1(X) \simeq \pi_1(F) = \langle [\alpha] \rangle * \langle [\beta] \rangle \simeq G \Rightarrow \pi_1(X) \simeq G.$$

Além disso, X é um CW -complexo conexo e, como F tem recobrimento universal contrátil e X tem o mesmo tipo de homotopia de F , temos que X tem recobrimento universal contrátil. Portanto, X é um $K(G, 1)$.

Agora, representando X como na figura seguinte, vemos que



$$\pi_1(Y) \simeq \langle sts^{-1}t^{-1} \rangle = S.$$

Temos que $Y \sim S^1$. Logo, pelo Exemplo 1.2.1, Y é um $K(S, 1)$ -complexo (Y é um CW -complexo conexo com recobrimento contrátil).

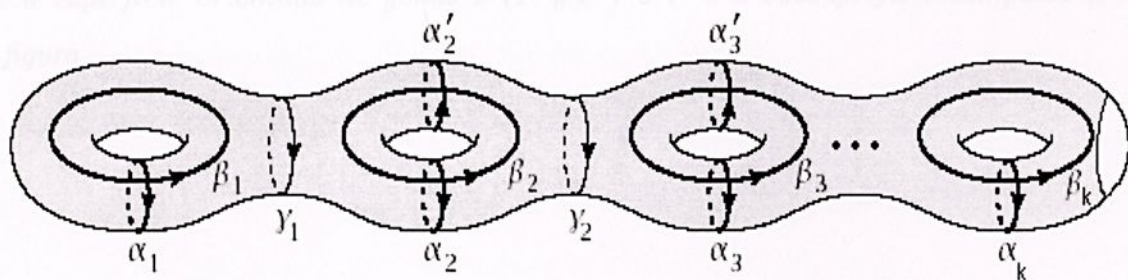
A aplicação $i_{\#} : \pi_1(Y) = S \rightarrow \pi_1(X) = G$, induzida da inclusão, é injetora.

Portanto, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.3 Mais geralmente, sejam $G = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle * \dots * \langle a_k \rangle * \langle b_k \rangle$ e $S = \left\langle \prod_{i=1}^k [a_i, b_i] \right\rangle$.

Temos que (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é a superfície orientada de genus k menos um disco aberto D e Y é o bordo de X .

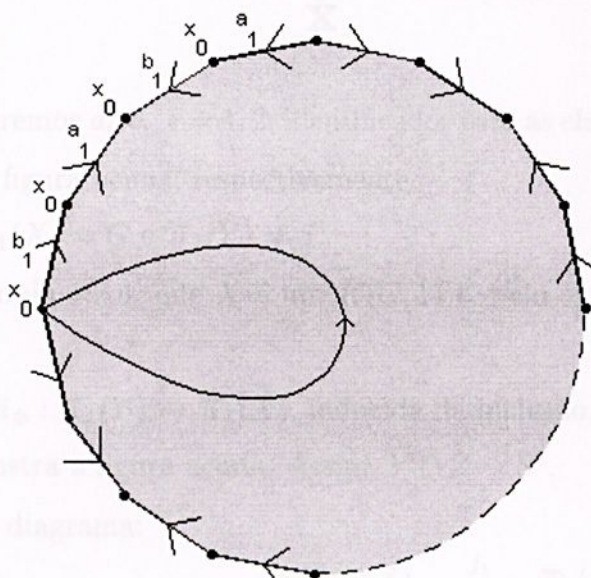
De fato,



consideremos $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, k$, identificamos com as classes de homotopia dos laços α_i, β_i representados na figura acima, respectivamente.

Temos que X tem o mesmo tipo de homotopia do bouquet de $2k$ círculos, o qual denotaremos por R . Logo, sendo R um $K(G, 1)$, pelo exemplo 1.2.3, temos que X é um complexo $K(G, 1)$.

Agora, representando X como na figura seguinte,



vemos que $\pi_1(Y) \simeq \left\langle \prod_{i=1}^k [a_i, b_i] \right\rangle = S$.

Como já vimos no exemplo anterior, $Y \sim S^1$ e, assim, Y é um $K(S, 1)$.

Observemos que a aplicação $i_{\#} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$, induzida pela inclusão, é injetora.

Portanto, (X, Y) é um par de Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

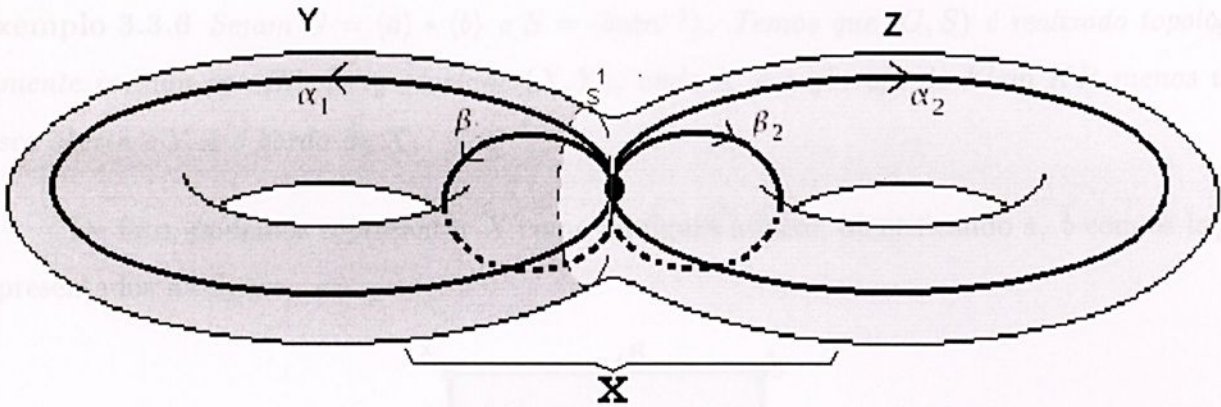
Exemplo 3.3.4 Sejam $G = \left\langle a_1, b_1, a_2, b_2; \prod_{i=1}^2 [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$ e $S = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle$.

Temos que (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é a superfície orientada de gênero 2 ($T^2 \# T^2$) e Y é a subsuperfície compacta como mostra a figura

Portanto, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.5 Sejam G um grupo e $S = \{1\}$ o subgrupo trivial. Consideremos $X = K(G, 1)$ e o vértice $x_0 \in X$. O par (G, S) é realizado topologicamente por $(X, \{x_0\})$.

De fato, $\{x_0\}$ é um $K(S, 1)$ -subcomplexo de $X = K(G, 1)$.



De fato, consideremos $a_i, b_i, i = 1, 2$; identificados com as classes de homotopia dos laços α_i, β_i representados na figura acima, respectivamente.

Desta forma, $\pi_1(X) = G$ e $\pi_1(Y) = S$.

Vimos, no Exemplo 1.2.4, que X é um $K(G, 1)$ e, pelo exemplo 3.3.2 anterior, temos que Y é um $K(S, 1)$.

Mostremos que $i_{\#} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$, induzida da inclusão, é injetora.

Seja Z como mostra a figura acima. Assim, $Y \cap Z \sim S^1$.

Consideremos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y \cap Z) & \xrightarrow{j_1} & \pi_1(Z) \\ j_2 \downarrow & & \downarrow j_3 \\ \pi_1(Y) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_1(X) \end{array}$$

onde $i_{\#}, j_1, j_2, j_3$ são todas induzidas das inclusões.

Temos que

$$\pi_1(Y \cap Z) = \pi_1(S^1) = \langle \alpha \rangle$$

e j_1 não é homotópico a zero em Z . Logo, j_1 é injetora.

Analogamente, temos que j_2 é injetora. Logo, por [8], Lema II.7.4, $i_{\#}$ e j_3 também são injetoras e, então, podemos ver $\pi_1(Y)$ como subgrupo de $\pi_1(X)$.

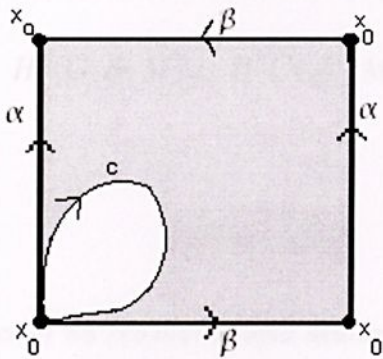
Portanto, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.5 Sejam G um grupo e $S = \{1\}$ o subgrupo trivial. Consideremos $X = K(G, 1)$ e o vértice $x_0 \in X$. O par (G, S) é realizado topologicamente por $(X, \{x_0\})$.

De fato, $\{x_0\}$ é um $K(S, 1)$ subcomplexo de $X = K(G, 1)$.

Exemplo 3.3.6 Sejam $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ e $S = \langle baba^{-1} \rangle$. Temos que (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é a garrafa de Klein KB menos um disco aberto e Y é o bordo de X .

De fato, podemos representar X como na figura abaixo, identificando a, b com os laços representados na figura

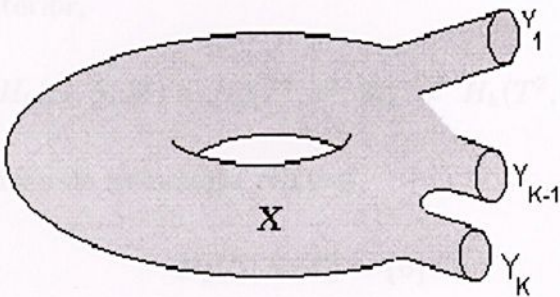


Aqui, como no Exemplo 3.3.2, temos que X tem o mesmo tipo de homotopia da figura oito e, assim, podemos concluir que X é um $K(G, 1)$.
De acordo com a figura acima, temos que

$$\pi_1(Y) = \langle baba^{-1} \rangle = S.$$

Novamente, Y é homeomorfo a S^1 . Logo, Y é um $K(S, 1)$.
Portanto, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.7 Consideremos agora X o toro T^2 menos k discos abertos e Y o bordo de X .



Consideremos $G = \pi_1(X)$ e $S = \{S_i = \pi_1(Y_i), i = 1, \dots, k\}$. Temos que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) . ([4], 9.2).

Veremos agora, sem demonstração, um resultado que relaciona a (co)homologia de grupos com a (co)homologia de pares Eilenberg-MacLane.

Teorema 3.3.1 *Se (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando o par grupo (G, S) e M é um RG -módulo trivial, então*

$$H_k(G, S; M) \simeq H_k(X, Y; M) \text{ e,}$$

$$H^k(G, S; M) \simeq H^k(X, Y; M).$$

Demonstração : [4], Teo. 1.3. ■

Observação 3.3.1 *Como no caso da (co)homologia absoluta, se M for um RG -módulo qualquer, também existe uma interpretação topológica, a saber:*

$$H_k(G, S; M) \simeq H_k(X, Y; \mathcal{M}) \text{ e } H^k(G, S; M) \simeq H^k(X, Y; \mathcal{M}),$$

onde $\mathcal{M}$ é o sistema de coeficientes locais no $K(G, 1)$ associado ao RG -módulo M .

Exemplo 3.3.8 Cálculo de (Co)homologia Relativa de Grupos através de (Co)homologia de Espaços:

Seja G o grupo abeliano livre com dois geradores, isto é, $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e consideremos $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Pelo exemplo 3.3.1, temos que (G, S) é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane (T^2, S^1) .

Pelo Teorema Anterior,

$$H_k(G, S; \mathbb{Z}) \simeq H_k(T^2, S^1; \mathbb{Z}) \stackrel{Not.}{=} H_k(T^2, S^1).$$

Agora, pela definição de homologia relativa,

$$H_0(G, S; \mathbb{Z}) = \{0\}.$$

Logo, $H_0(T^2, S^1) = \{0\}$.

Usando a seqüência exata longa de homologia

$$\dots \rightarrow H_n(S^1) \rightarrow H_n(T^2) \rightarrow H_n(T^2; S^1) \rightarrow H_{n-1}(S^1) \rightarrow \dots \rightarrow H_0(S^1) \rightarrow H_0(T^2) \rightarrow 0, \quad (\Delta)$$

vamos calcular $H_k(T^2, S^1)$, para $k \geq 1$.

Sabemos que

$$H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 1; \\ 0, & \text{se } n \neq 0, 1. \end{cases}$$

e,

$$H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } n = 0, 2; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } n = 1; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Assim, temos que $H_n(T^2; S^1) = \{0\}$, para $n \geq 3$, e a sequência (Δ) toma a seguinte forma:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} H_2(T^2; S^1) \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_3} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_4} H_1(T^2; S^1) \xrightarrow{\varphi_5} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_6} \mathbb{Z} \rightarrow 0.$$

Analisemos a aplicação $\varphi_3 : H_1(S^1) = \mathbb{Z} \rightarrow H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, induzida da inclusão $S^1 \xrightarrow{i} T^2$.

Temos que $H_1(S^1) = \pi_1(S^1)$ e $H_1(T^2) = \pi_1(T^2)$. Logo, φ_3 é a induzida da inclusão $S^1 \xrightarrow{i} T^2$ no grupo fundamental, isto é,

$$\varphi_3 = i_{\#} : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(T^2).$$

Agora, sabemos que φ_3 é injetora (é a inclusão de $S = \mathbb{Z}$ em $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Logo,

$$\text{Ker}(\varphi_3) = \{0\} \text{ e } \text{Im}(\varphi_3) = \mathbb{Z}.$$

Temos também que

$$\mathbb{Z} = \text{Im}(\varphi_1) = \text{Ker}(\varphi_2) \text{ e } H_2(T^2, S^1)/_{\text{Ker}(\varphi_2)=\mathbb{Z}} \simeq \text{Im}(\varphi_2) = \text{Ker}(\varphi_3) = \{0\}.$$

Deste modo, $H_2(T^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Agora,

$$\text{Im}(\varphi_3) = \mathbb{Z} = \text{Ker}(\varphi_4) \text{ e } \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/_{\text{Ker}(\varphi_4)=\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \simeq \text{Im}(\varphi_4),$$

de onde concluímos que $\text{Ker}(\varphi_5) = \text{Im}(\varphi_4) \simeq \mathbb{Z}$.

Assim, $H_1(T^2, S^1)/_{\text{Ker}(\varphi_5)=\mathbb{Z}} \simeq \text{Im}(\varphi_5) = \{0\}$, pois φ_6 é isomorfismo e, temos então, $H_1(T^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Portanto,

$$H_k(G, S, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 1, 2; \\ \{0\}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Determinemos agora $H^k(G, S, \mathbb{Z})$.

Para isto, usaremos os cálculos anteriores e o seguinte resultado:

“Seja R um domínio de ideais principais e suponhamos $H_{q-1}(X, Y; R)$ finitamente gerado. Sejam T_{q-1} o submódulo de torção de $H_{q-1}(X, Y; R)$ e F_q a parte livre de $H_q(X, Y; R)$. Então,

$$H^q(X, Y; R) \simeq F_q \oplus T_{q-1}. \quad [16], 23.18.”$$

Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais e os grupos de homologia relativa $H_k(T^2, S^1; \mathbb{Z})$ são livres, finitamente gerados, temos

$$H^k(T^2, S^1; \mathbb{Z}) \simeq H_k(T^2, S^1; \mathbb{Z}).$$

Assim,

$$H^k(T^2, S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 1, 2; \\ \{0\}, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Portanto,

$$H^k(G, S; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } k = 1, 2; \\ \{0\}, & \text{c.c.} \end{cases}$$



Capítulo 4

Grupos e Pares de Dualidade

Antes de estudarmos os importantes conceitos de grupos e pares de dualidade, apresentamos algumas definições, tais como dimensão (co)homológica, resoluções de tipo finito, grupos de tipo FP , FP_n e FL .

4.1 Dimensão (Co)homológica

Denotemos por R um anel comutativo com unidade.

Definição 4.1.1 *Seja G um grupo. A dimensão cohomológica do grupo G sobre R , denotada por $cd_R G$, é definida por*

$$cd_R G = \inf \{n : H^i(G, M) = 0, \text{ para } i > n \text{ e para todo } RG\text{-módulo } M\} =$$

$$= \sup \{n : H^n(G, M) \neq 0 \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}.$$

Analogamente, definimos a **dimensão homológica** de G sobre R , denotada por $hd_R G$, como

$$hd_R G = \sup \{n : H_n(G; M) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\}.$$

Observação 4.1.1 *Se R admite uma resolução projetiva sobre RG , de comprimento finito, isto é,*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

então, $cd_R G \leq n$ e $hd_R G \leq n$.

Observação 4.1.2 *Temos $cd_R G \geq 0$, pois*

$$H^0(G, R) \stackrel{\text{prop.}}{\simeq} R^G \simeq R \neq 0.$$

Observação 4.1.3 *Pode-se mostrar que, se $cd_R G < \infty$, então*

$$cd_R G = \sup\{k : H^k(G, F) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo livre } F\}.$$

Exemplo 4.1.1 *Seja G um grupo cíclico infinito.*

Pelo Exemplo 2.2.2, temos

$$\begin{cases} H^0(G, M) = M^G; \\ H^1(G, M) = M_G; \\ H^i(G, M) = 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Assim, $cd_{\mathbb{Z}} G \leq 1$. Como $H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, segue que

$$cd_{\mathbb{Z}} G = \sup\{n : H^n(G; M) \neq 0, \text{ para um } RG\text{-módulo } M\} = 1.$$

Portanto, $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$.

Exemplo 4.1.2 *Se G é o grupo finito de ordem n , então $cd_{\mathbb{Z}} G = \infty$.*

De fato, pelo Exemplo 2.2.3, temos

$$H^i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i = 0; \\ 0, & \text{se } i \text{ é ímpar}; \\ \mathbb{Z}_n, & \text{se } i \text{ é par}. \end{cases}$$

Logo, $cd_{\mathbb{Z}} G = \infty$.

Definição 4.1.2 *Seja G um grupo. Dizemos que G tem **R -torção** se existe um elemento g em G cuja ordem, denotada por $o(g)$, é finita e não invertível em R (isto é, $o(g)$ é um inteiro $n > 0$ tal que $n \cdot 1_R$ não é invertível em R).*

Exemplo 4.1.3 $\mathbb{Z}_2$ tem $\mathbb{Z}_2$ -torção, pois existe $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$ tal que $o(\bar{1}) = 2$ e $2 \cdot \bar{1} = \bar{2} = \bar{0}$, que é não invertível em $\mathbb{Z}_2$.

Observação 4.1.4 $cd_R G = 0$ se, e somente se, G é finito sem R -torção. ([3], 2.4.12(a))

Exemplo 4.1.4 O único grupo finito que não tem $\mathbb{Z}$ -torção (isto é, é livre de torção) é o grupo trivial.

De fato, seja $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ um grupo finito que não tem $\mathbb{Z}$ -torção. Então, para qualquer $g_i \in G$, temos que $o(g_i)$ é infinita ou invertível em $\mathbb{Z}$.

Mas, $o(g_i)$ divide $o(G) = n$ ($o(g_i)|n \Rightarrow n = o(g_i).a$, $a \in \mathbb{Z}$). Logo, para todo $g_i \in G$, temos $o(g_i)$ finita.

Assim, $o(g_i)$ é invertível em $\mathbb{Z}$. Então, $o(g_i) = 1$, para todo $g_i \in G$ e, deste modo, $g_i = e$, para todo $g_i \in G$.

Portanto, $G = \{e\}$, ou seja, G é trivial.

Exemplo 4.1.5 $cd_{\mathbb{Z}}G = 0$ se, e somente se, G é o grupo trivial ($G = \{1\}$).

De fato, seja $G = \{1\}$. Temos

$$H^i(G, M) = \begin{cases} M^G, & \text{se } i = 0; \\ 0, & \text{se } i \neq 0. \end{cases}$$

Agora, como $H^0(G; \mathbb{Z}) \stackrel{\text{prop.}}{\cong} \mathbb{Z}^G = \mathbb{Z}$ (pois a G -ação é trivial), temos que $cd_{\mathbb{Z}}G = 0$.

Reciprocamente, suponhamos $cd_{\mathbb{Z}}G = 0$. Deste modo, pela Observação anterior, G é finito e sem $\mathbb{Z}$ -torção.

Mas, pelo Exemplo anterior, o único grupo finito que não tem $\mathbb{Z}$ -torção é o grupo trivial.

Portanto, G é o grupo trivial.

Exemplo 4.1.6 Se G é um grupo livre gerado por um conjunto S , isto é, $G \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ (s cópias de $\mathbb{Z}$, $s \geq 1$), então

$$cd_{\mathbb{Z}}G = 1.$$

De fato, pelo Exemplo 1.2.7,

$$0 \rightarrow (\mathbb{Z}G)^{(S)} \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 1.

Assim, pela Obs. (1) anterior,

$$cd_{\mathbb{Z}}G \leq 1.$$

Se $cd_{\mathbb{Z}}G = 0$, teríamos que $G = \{1\}$.

Portanto, $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$.

Observação 4.1.5 A recíproca do exemplo anterior, para grupos finitamente gerados, também é verdadeira e foi demonstrada por Swan em [36]. Isto é, se $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$, então G é um grupo livre.

Proposição 4.1.1 Seja H um subgrupo de G . Então,

$$cd H \leq cd G.$$

A igualdade é válida se $cd G < \infty$ e $[G : H] < \infty$.

Demonstração: Seja $cd H = n$. Então, por definição, existe M tal que $H^n(H, M) \neq 0$ e $H^k(H, M) = 0$, $k > n$.

Mas,

$$0 \neq H^n(H, M) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^n(G, \text{Coind}_H^G M).$$

Deste modo,

$$H^n(G, \text{Coind}_H^G M) \neq 0,$$

ou seja, existe $N = \text{Coind}_H^G M$ tal que $H^n(G, N) \neq 0$. Assim, $cd G \geq n$.

Portanto,

$$cd H \leq cd G.$$

Consideremos, agora, as hipóteses $cd G < \infty$ e $[G : H] < \infty$.

Seja $cd G = n$. Pela observação 4.1.3, existe um RG -módulo livre F , com $H^n(G, F) \neq 0$.

Suponhamos F' um RH -módulo de mesmo posto que F . Assim, podemos escrever

$$F = \bigoplus_{j \in J} (RG)_j \quad \text{e} \quad F' = \bigoplus_{j \in J} (RH)_j$$

Temos:

$$\text{Ind}_H^G F' = RG \otimes_{RH} F' = RG \otimes_{RH} \left(\bigoplus_{j \in J} RH \right)_j = \bigoplus_{j \in J} (RG \otimes_{RH} RH)_j \simeq \bigoplus_{j \in J} (RG)_j = F.$$

Deste modo,

$$H^n(G, F) = H^n(G, \text{Ind}_H^G F') \stackrel{\text{prop. 1.4.3}}{\simeq} H^n(G, \text{Coind}_H^G F') \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^n(H, F').$$

Visto que $H^n(G, F) \neq 0$, temos $H^n(H, F') \neq 0$. Logo, existe F' tal que $H^n(H, F') \neq 0$ e, deste modo, $cd H \geq n = cd G$, isto é, $cd G \leq cd H$.

Portanto, $cd G = cd H = n$. ■

Corolário 4.1.1 Se $cd\,G < \infty$, então G é livre de torção.

Demonstração : Suponhamos que G não seja livre de torção. Desta forma, G contém um subgrupo H cíclico finito não trivial.

Pelo exemplo 2.2.3, temos $cd\,H = \infty$. Então, pela proposição anterior, $cd\,G = \infty$, o que nos dá uma contradição.

Portanto, G é livre de torção. ■

Definição 4.1.3 Seja G um grupo. Dizemos que G tem **dimensão cohomológica virtual finita** sobre R e denotamos por $vcd_R G < \infty$, se existe um subgrupo S de G com $[G : S] < \infty$ e $cd_R S < \infty$.

Exemplo 4.1.7 Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ e $S = \mathbb{Z}$ subgrupo de G . Temos que $[G : S] = n < \infty$ e $cd_{\mathbb{Z}} S = 1$, de acordo com o Exemplo acima. Logo,

$$vcd_{\mathbb{Z}} G < \infty.$$

Proposição 4.1.2 Seja G um grupo. Se G não tem $\mathbb{Z}$ -torção, então G não tem $\mathbb{Z}_p$ -torção, para todo $p \in \mathbb{N}$.

Demonstração : Se G não tem $\mathbb{Z}$ -torção então, para todo g em G , $o(g)$ é infinita ou invertível em $\mathbb{Z}$.

Seja $g \in G$. Se $o(g) = \infty$, temos que g não é elemento de torção.

Suponhamos $o(g) = n$, com n invertível em $\mathbb{Z}$. Então, $n = 1$ e, assim,

$$n \cdot \bar{1} = \bar{1}, \text{ que é invertível em } \mathbb{Z}_p.$$

Logo, G não tem $\mathbb{Z}_p$ -torção. ■

O exemplo a seguir nos mostra que a recíproca da Proposição anterior é falsa.

Exemplo 4.1.8 Se p é ímpar, então $\mathbb{Z}_p$ não tem $\mathbb{Z}_2$ -torção mas, tem $\mathbb{Z}$ -torção.

De fato, se $x \in \mathbb{Z}_p$, então $o(x)$ divide p e, assim, $o(x)$ é ímpar. Logo, $o(x) = 2k + 1$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Assim, em $\mathbb{Z}_2$,

$$o(x) \cdot \bar{1} = \overline{o(x)} = \overline{2k+1} = \overline{2k} + \bar{1} = \bar{1},$$

que é invertível em $\mathbb{Z}_2$. Logo, $\mathbb{Z}_p$ não tem $\mathbb{Z}_2$ -torção.

Agora, $\mathbb{Z}_p = \langle \bar{1} \rangle$, com $o(\bar{1}) = p$, que não é invertível em $\mathbb{Z}$. Logo, $\mathbb{Z}_p$ tem $\mathbb{Z}$ -torção.

4.2 Resoluções de Tipo Finito

Nesta seção, apresentaremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados que serão utilizados em seções posteriores.

Lema 4.2.1 (Lema de Schanuel) *Sejam*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad 0 \longrightarrow K' \xrightarrow{i'} P' \xrightarrow{\pi'} M \longrightarrow 0$$

seqüências exatas, com P e P' projetivos. Então, $P \oplus K' \simeq P' \oplus K$.

Demonstração : [8], Cap. VIII, Lema 4.2. ■

Proposição 4.2.1 *As seguintes condições sobre um R -módulo M são equivalentes:*

- (i) *Existe uma seqüência exata $R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0$, para inteiros m, n ;*
- (ii) *Existe uma seqüência exata $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, para módulos projetivos finitamente gerados P_0, P_1 ;*
- (iii) *M é finitamente gerado e, para toda sobrejeção $\varepsilon : P \rightarrow M$, com P finitamente gerado e projetivo, $\text{Ker } \varepsilon$ é finitamente gerado.*

Demonstração : [8], Cap. VIII, Prop. 4.1. ■

Definição 4.2.1 O R -módulo M é dito **finitamente apresentado** se as condições da proposição anterior são válidas. Uma seqüência exata como em (i), fornece uma **apresentação finita** de M , com n geradores e m relações.

Definição 4.2.2 Uma resolução ou resolução parcial (P_i) é de **tipo finito** se cada P_i é finitamente gerado.

Definição 4.2.3 Um módulo M é de **tipo** FP_n ($n \geq 0$) se existe uma resolução projetiva parcial:

$$P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

de tipo finito.

Podemos concluir que, para a condição FP_0 , temos: $P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, e daí, M é finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$ -módulo. A condição FP_1 é uma apresentação finita: $P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ de M , e as condições $FP_2, FP_3, \dots$, são sucessivos “reforços” da definição de apresentação finita.

O próximo resultado é uma generalização do Lema de Schanuel.

Lema 4.2.2 Sejam

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\partial'_n} P'_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \cdots \longrightarrow P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

seqüências exatas com P_i e P'_i projetivos para $i \leq n-1$. Então

$$P_0 \oplus P'_1 \oplus P_2 \oplus P'_3 \oplus \cdots \simeq P'_0 \oplus P_1 \oplus P'_2 \oplus P_3 \oplus \cdots$$

Conseqüentemente, se P_i e P'_i são finitamente gerados para $i \leq n-1$, então P_n é finitamente gerado se, e somente se, P'_n é finitamente gerado.

Demonstração : [8], Cap. VIII, Lema 4.4. ■

O resultado a seguir é uma generalização da proposição anterior.

Exemplo 4.3.1 Todo grupo G é de tipo FP_0 , pois $\mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$, onde ϵ é a aplicação aumentação, é uma resolução parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento zero.

Proposição 4.3.1 G é de tipo FP_1 se, e somente se, G é finitamente gerado.

Proposição 4.2.2 Para qualquer módulo M e qualquer inteiro $n \geq 0$, as seguintes condições são equivalentes:

- (i) Existe uma resolução parcial $F_n \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, com cada F_i livre de posto finito;
- (ii) M é de tipo FP_n ;
- (iii) M é finitamente gerado e, para toda resolução projetiva parcial

$$P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

de tipo finito com $k < n$, $\text{Ker } \partial_k$ é finitamente gerado.

Demonstração : [8], Cap. VIII, Prop. 4.3. ■

Proposição 4.2.3 As seguintes condições sobre um módulo M são equivalentes:

- (i) M admite uma resolução livre de tipo finito;
- (ii) M admite uma resolução projetiva de tipo finito;
- (iii) M é de tipo FP_n , para todo inteiro $n \geq 0$.

Demonstração : [8], Cap. VIII, Prop. 4.5. ■

Definição 4.2.4 Dizemos que M é de **tipo** FP_∞ se as condições da proposição anterior são válidas.

4.3 Grupos de Tipo FP_n

Vamos considerar a teoria da seção anterior, para o caso $R = \mathbb{Z}G$ e $M = \mathbb{Z}$.

Definição 4.3.1 Dizemos que G é de **tipo** FP_n ($0 \leq n \leq \infty$) se $\mathbb{Z}$ é de tipo FP_n como um $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Exemplo 4.3.1 Todo grupo é de tipo FP_0 , pois $\mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$, onde ε é a aplicação aumentação, é uma resolução parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento zero.

Proposição 4.3.1 G é de tipo FP_1 se, e somente se, G é finitamente gerado.

Demonstração : [8], pg. 197. ■

Proposição 4.3.2 Se G é finitamente apresentado, então G é de tipo FP_2 .

Demonstração : [8], pg. 197. ■

Observação 4.3.1 A recíproca da proposição anterior é falsa. Um contra-exemplo foi dado em [6].

A próxima proposição relaciona a condição FP_n de um grupo G com a de um subgrupo H de índice finito.

Proposição 4.3.3 Seja H um subgrupo de G de índice finito. Então, G é de tipo FP_n ($0 \leq n \leq \infty$) se, e somente se, H é de tipo FP_n .

Demonstração : [8], Cap. VIII, 5.1. ■

Proposição 4.3.4 Sejam G um grupo de tipo FP_∞ e n um inteiro tal que $H^n(G, \mathbb{Z}G) = 0$. Então, $H^n(G, F) = 0$, para todo $\mathbb{Z}G$ -módulo livre F .

Demonstração : [8], Cap. VIII, 5.2. ■

4.4 Grupos de Tipo FP e FL

Nesta seção, combinaremos as duas condições de finitude vistas até agora (dimensão cohomológica e FP_n).

Definição 4.4.1 Uma resolução projetiva é **finita** se é de tipo finito e de comprimento finito.

Definição 4.4.2 Um grupo G é de **tipo FP** sobre R se R admite uma resolução projetiva finita $\epsilon : P \rightarrow R$ sobre RG , isto é, $\epsilon : P \rightarrow R$ é de comprimento finito, com cada P_i finitamente gerado como RG -módulo.

Proposição 4.4.1 G é de tipo FP se, e somente se,

(i) $\text{cd } G < \infty$ e (ii) G é de tipo FP_∞ .

Demonstração : [8], Cap. VIII, 6.1..

Observação 4.4.1 Se G é do tipo FP sobre $\mathbb{Z}$, então G é do tipo FP sobre R , pois se $\epsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, então $\bar{\epsilon} : P \otimes_R R \rightarrow R$ é uma resolução projetiva finita de R sobre RG .

Exemplo 4.4.1 Segue diretamente dos Exemplos 1.2.6 e 1.2.7, respectivamente, que $F(S)$, onde $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, e $\mathbb{Z}$ são do tipo FP sobre $\mathbb{Z}$.

Definição 4.4.3 Dizemos que G é de **tipo FL** se R admite uma resolução livre finita sobre RG .

Observação 4.4.2 É claro que, se G é de tipo FL, então G é de tipo FP.

Interpretação Topológica para Grupos de Tipo FP e FL

Um grupo ser de tipo FP significa, intuitivamente, que certas condições de finitude (tais como dimensão cohomológica finita) são satisfeitas por G .

Quando se trata de CW-complexos, satisfazer condições de finitude significa ter um número finito de células ou dimensão finita. Como para todo grupo G existe um CW-complexo $Y = K(G, 1)$, veremos agora quais condições de finitude deve satisfazer Y se G for do tipo FP ou FL.

Proposição 4.4.2 Se existe um complexo $K(G, 1)$ finito, então G é de tipo FL.

Demonstração : Seja Y um $K(G, 1)$ complexo finito. Pela proposição 1.2.2, o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Logo, G é de tipo FL.

■

Em vista da proposição anterior, temos os seguintes exemplos de grupos de tipo FL:

Exemplo 4.4.2 Grupos livres de posto finito: $G = F(S)$, S : finito (bouquet de círculos) são do tipo FL.

Exemplo 4.4.3 Grupos de superfície: Y = soma conexa de g toros ou g planos projetivos, ($Y \neq S^2$, $Y \neq P^2$) são do tipo FL.

Exemplo 4.4.4 Grupos abelianos livres de posto finito: $Y = S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n -dimensional) são do tipo FL.

A propriedade FP também admite uma interpretação topológica e, para isso, precisamos da definição a seguir.

Definição 4.4.4 Um espaço topológico Y é **finitamente dominado** se existe um CW complexo finito K , tal que Y é um retrato de K , isto é, existem aplicações contínuas $i : Y \rightarrow K$ e $r : K \rightarrow Y$, com $r \circ i = id_Y$.

Teorema 4.4.1 Seja G um grupo. Se existe um $K(G, 1)$ finitamente dominado, então G é de tipo FP.

Demonstração : [8], VIII.6.4

■

Se G for finitamente apresentado, as recíprocas das Proposições e Teorema acima são verdadeiras, isto é,

Teorema 4.4.2 Seja G um grupo finitamente apresentado. Se G é de tipo FL (respec. FP), então existe um complexo $K(G, 1)$ finito (respec. finitamente dominado).

Demonstração : [8], VIII. 7.1.

■

4.5 Grupos de Dualidade

Veremos agora o importante conceito de **grupos de dualidade**, isto é, grupos que satisfazem certos isomorfismos de dualidade em homologia e cohomologia.

Definição 4.5.1 Um grupo G é denominado **grupo de dualidade de dimensão n sobre R** , ou simplesmente um **D^n -grupo sobre R** , se existe um RG -módulo C , chamado **módulo dualizante** de G , e isomorfismos naturais tais que

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo RG -módulo M , onde $C \otimes_R M$ é visto como RG -módulo com a G -ação diagonal.

Se $C \simeq R$ como RG -módulo, dizemos que G é um **grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre R** , ou simplesmente um **PD^n -grupo sobre R** . Neste caso, se a ação de G em $C \simeq R$ é trivial, dizemos que G é **orientável**. Caso contrário, G é dito **não orientável**.

Observação 4.5.1 Se $R = \mathbb{Z}_2$, já vimos que a única ação possível de G em R é trivial. Assim, PD^n -grupos sobre $\mathbb{Z}_2$ são sempre orientáveis.

Mostremos agora que o módulo dualizante C e a dimensão n que aparecem na definição de um grupo de dualidade são determinados por G .

Proposição 4.5.1 Seja G um grupo de dualidade sobre R de dimensão n e com módulo dualizante C . Então,

- (i) $C \neq 0$;
- (ii) $C \simeq H^n(G; RG)$;
- (iii) $n = cd_R G$. Em particular, G não tem R -torção.

Demonstração : (i) Usando $k = 0$ e $M = R$ no isomorfismo de dualidade, temos

$$H^0(G; R) \simeq H_n(G; C \otimes_R R) \simeq H_n(G; C).$$

Agora, $H^0(G; R) \simeq R^G = R$ (pois R é visto como RG -módulo com a G -ação trivial).

Assim,

$$H_n(G; C) \simeq R \neq \{0\}.$$

Portanto, $C \neq 0$.

(ii) Usando $k = n$ e $M = RG$ no isomorfismo de dualidade, temos:

$$H^n(G; RG) \simeq H_0(G; C \otimes_R RG) \stackrel{\text{Prop. 2.2.1 e 1.3.1}}{\simeq} (C \otimes_R RG) \otimes_{RG} R \simeq C \otimes_R (RG \otimes_{RG} R) \simeq C \otimes_R R \simeq C.$$

Portanto, $C \simeq H^n(G; RG)$.

(iii) Por (i) e (ii), temos que $H^n(G; RG) \neq \{0\}$. Logo, $n \leq cd_R G$.

Por outro lado,

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M) = 0, \text{ se } k > n, \text{ pois } n - k < 0.$$

Assim, $cd_R G \leq n$. Portanto, $cd_R G = n$.

■

Observação 4.5.2 Foi demonstrado em [3], Teo. 3.9.2, que todo grupo de dualidade sobre R é de tipo FP sobre R .

Logo, para definirmos grupos de dualidade, poderíamos nos restringir à categoria dos grupos de tipo FP .

Em [8], 8.10.1, é demonstrado que *as seguintes condições são equivalentes para um grupo de tipo FP :*

(i) Existem um inteiro n e um RG -módulo C tais que

$$H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, C \otimes_R M)$$

para todos os RG -módulos M e todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Existem isomorfismos naturais

$$H^i(G, -) \simeq H_{n-i}(G, C \otimes -),$$

onde $n = cd_R G$ e $C = H^n(G, RG)$, para todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.

(iii) Existe um inteiro n tal que $H^i(G, RG \otimes A) = 0$, para todo $i \neq n$ e todos os grupos abelianos A .

Assim, se G é um grupo do tipo FP e quisermos mostrar que G é um grupo de dualidade, basta mostrarmos que a condição (i) é verdadeira.

Usaremos este resultado nos exemplos que seguem.



Exemplo 4.5.1 Se G é cíclico infinito, então G é um PD^1 -grupo sobre $\mathbb{Z}$.

De fato, temos que G é de tipo FP e, vimos no Exemplo 2.2.2, que

$$H_1(G, M) = M^G \stackrel{\text{Prop. 2.2.2}}{\simeq} H^0(G, M).$$

$$H^1(G, M) = M_G \stackrel{\text{Prop. 2.2.1}}{\simeq} H_0(G, M).$$

$$H^n(G, M) = 0 = H_{1-n}(G, M), \quad \forall n \geq 2.$$

Portanto, G é um PD^1 -grupo.

Exemplo 4.5.2 Seja $G = F(S)$ o grupo livre com k geradores, $1 \leq k < \infty$. Temos que G é um D^1 -grupo, e não é um PD^1 -grupo, se $k > 1$.

De fato, já vimos que G é de tipo FP sobre $\mathbb{Z}$ e que $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$ (exemplo 4.1.6).

Vamos mostrar que a condição (iii) do teorema acima é verdadeira, isto é, que $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$, para todo grupo abeliano A e $i \neq 1$.

De fato,

$$H^0(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = H^0(G, \text{Ind}_{\{1\}}^G A) \stackrel{\text{Prop. 2.2.2}}{\simeq} (\text{Ind}_{\{1\}}^G A)^G \stackrel{\text{Prop. 1.4.6}}{=} 0$$

e $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$, para $i > 1$ (pois $cd G = 1$).

Logo, G é um D^1 -grupo.

Agora, consideremos $k > 1$.

Temos que $H_0(G) = \mathbb{Z}$, o qual é finitamente gerado, e $H_1(G) = \mathbb{Z}^k$ é também finitamente gerado.

Agora, considerando F_1 e T_1 denotando, respectivamente, a parte livre e de torção de $H_1(G)$, temos

$$F_1 = \mathbb{Z}^k \text{ e } T_1 = \{0\}$$

Como $\mathbb{Z}$ é domínio de ideais principais temos, por [16], pág. 136, Prop. 23.18, que

$$H^1(G) \simeq F_1 \oplus \{0\} = \mathbb{Z}^k \oplus \{0\} = \mathbb{Z}^k$$

Por outro lado, como G é um D^1 -grupo, temos

$$H^1(G) = H^1(G, \mathbb{Z}) \simeq H_0(G, C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \simeq H_0(G, C).$$

Se $C \simeq \mathbb{Z}$, com G -ação trivial, temos

$$H_0(G, C) \simeq H_0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Mas, $H_0(G, C) \simeq H^1(G) \simeq \mathbb{Z}^k$. Logo, $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^k$, o que é um absurdo, pois $k > 1$.

Se $C \simeq \mathbb{Z}$, com G -ação não trivial, temos que $g \cdot n = -n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall g \in G$.

Deste modo,

$$B = \langle g \cdot n - n; n \in \mathbb{Z} \text{ e } g \in G \rangle \simeq 2\mathbb{Z}.$$

Assim,

$$H_0(G; C) \simeq C_G = \mathbb{Z}/B \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Logo,

$$H_0(G, C) = \mathbb{Z}^k \simeq \mathbb{Z}_2, \text{ o que é um absurdo.}$$

Então, C não é isomorfo a $\mathbb{Z}$ e, portanto, G não é um PD^1 -grupo sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplo 4.5.3 Se $G \simeq \mathbb{Z}_r$ (grupo cíclico finito de ordem r) então, G não é um grupo de dualidade de Poincaré.

De fato, se G fosse um PD^n -grupo, para algum n , teríamos

$$H^k(G, M) \simeq H_{n-k}(G, M),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $\mathbb{Z}G$ -módulo M .

Em particular, para $M = \mathbb{Z}$, teríamos

$$H^k(G, \mathbb{Z}) \simeq H_{n-k}(G, \mathbb{Z}) \quad (*)$$

Mas, pelo exemplo 2.2.3, temos

$$H^{2k}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Se $(*)$ for verdadeira, teremos

$$H_{n-2k}(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Seja $k_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $2k_0 > n$. Logo, $n - 2k_0 < 0$ e, assim, $H_{n-2k_0}(G, \mathbb{Z}) = \{0\}$, o que nos dá uma contradição.

Nos exemplos acima, o anel R usado foi sempre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. A classe de grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ está contida na classe de grupos de dualidade sobre R , onde R é qualquer anel comutativo com unidade, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 4.5.2 *Se G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ com módulo dualizante C , então G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R com módulo dualizante $C \otimes_{\mathbb{Z}} R$.*

Demonstração : Seja M um RG -módulo. Temos que:

$$\begin{aligned} H^k(G; M) &\simeq H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} (M \otimes_R R)) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} (R \otimes_R M)) \simeq \\ &\simeq H_{n-k}(G; (C \otimes_{\mathbb{Z}} R) \otimes_R M). \end{aligned}$$

Logo, existe $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$ tal que $H^k(G; M) = H_{n-k}(G; C' \otimes_R M)$.

Portanto, G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R , com módulo dualizante $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$. ■

Observação 4.5.3 *Os grupos que aparecem nos Exemplos anteriores são, de acordo com a proposição acima, grupos de dualidade sobre R . Em particular, são grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}_2$.*

A Proposição a seguir caracteriza os grupos de dualidade em dimensões baixas.

Proposição 4.5.3 (i) G é um grupo de dualidade de dimensão 0 sobre R se, e somente se, G é finito sem R -torção. (ou, a ordem de G é finita e invertível em R);
(ii) G é um grupo de dualidade de dimensão 1 sobre R se, e somente se, G é finitamente gerado e $cd_R G = 1$.

Demonstração : [3], Prop.9.17. ■

Exemplo 4.5.4 (a) O grupo trivial $\{1\}$ é o único D^0 -grupo sobre $\mathbb{Z}$.

De fato, é claro que $\{1\}$ é um D^0 -grupo sobre $\mathbb{Z}$. Agora, se G é um D^0 -grupo, então, pela Proposição anterior, $n = o(G)$ é finita e invertível em $\mathbb{Z}$. Logo, $n = 1$. Portanto, G é trivial.

(b) Todo grupo finito de ordem n ímpar é um D^0 -grupo sobre $\mathbb{Z}_2$ pois, neste caso, $n.1$ é invertível em $\mathbb{Z}_2$.

(c) $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ é um D^1 -grupo sobre $\mathbb{Z}$, pois é finitamente gerado e $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$.

Proposição 4.5.4 *Sejam G grupo e H subgrupo de G . Se G é um PD^n -grupo e $[G : H] < \infty$ então, H é um PD^n -grupo.*

Demonstração : Sendo G um PD^n -grupo, temos

$$H^k(G; A) \simeq H_{n-k}(G; A), \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \text{ e todo } \mathbb{Z}G\text{-módulo } A.$$

Assim,

$$\begin{aligned} H^k(H, M) &\stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^k(G, \text{Coind}_H^G M) \stackrel{\text{dualidade}}{\simeq} H_{n-k}(G, \text{Coind}_H^G M) \stackrel{\text{prop.1.4.3}}{\simeq} \\ &\stackrel{\text{prop.1.4.3}}{\simeq} H_{n-k}(G, \text{Ind}_H^G M) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H_{n-k}(H, M). \end{aligned}$$

Portanto, H é um PD^n -grupo ■

4.6 Interpretação Topológica para Grupos de Dualidade de Poincaré

A teoria de grupos de dualidade de Poincaré está relacionada com a teoria de variedades asféricas, ou seja, variedades X que têm o mesmo tipo de homotopia de um complexo $K(G, 1)$, onde $G = \pi_1(X)$, que chamaremos de $K(G, 1)$ -variedades.

De fato,

para uma $K(G, 1)$ -variedade n -dimensional fechada (compacta e sem bordo), são válidos os seguintes resultados:

(I) G é de tipo FL e $cd\ G = n$ ([8], VIII. 8.1).

(II) $H^i(G, \mathbb{Z}G) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq n; \\ \Omega, & \text{se } i = n. \end{cases}$

onde Ω é o módulo de orientação do recobrimento universal X de Y . [8], VIII.8.2.

Observação 4.6.1 Ω é um grupo cíclico infinito com dois geradores, correspondendo às duas orientações de X .

A ação de G em X induz uma ação de G em Ω , com um elemento γ de G atuando como ± 1 , ou seja, para $\omega \in \Omega$, temos

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \omega &= \omega, & \text{se a ação preserva orientação} \\ \gamma \cdot \omega &= -\omega, & \text{caso contrário.} \end{aligned}$$

Além disso, G atua trivialmente em Ω se, e somente se, Y é orientável.

Teorema 4.6.1 *Se G é um grupo tal que existe uma variedade esférica X fechada (compacta e sem bordo) de dimensão n , com $\pi_1(X) = G$, então G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ e, conseqüentemente, sobre R .*

Demonstração: Seja X uma variedade esférica n -dimensional fechada, isto é, uma $K(G, 1)$ -variedade fechada. Por (I), G é de tipo FL (logo, é FP) e $cd\ G = n$.

$$\text{Além disso, por (II), } H^i(G, \mathbb{Z}G) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq n; \\ \Omega, & \text{se } i = n. \end{cases}$$

onde $\Omega \simeq \mathbb{Z}$ como grupo abeliano.

Pelo teorema [8], VIII.10.1, pág. 220, G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n (orientável $\Leftrightarrow Y$ for orientável).

Exemplo 4.6.1 *O toro $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ é uma variedade esférica fechada de dimensão n . Logo, $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$.*

Exemplo 4.6.2 *Seja F uma superfície fechada.*

Pelo Teorema de Classificação de Superfícies ([26], I.5.1), temos as seguintes possibilidades para F :

- $F = S^2$;
- $F = T^2$;
- $F = P^2$ (plano projetivo);
- $F = T^2 \# \dots \# T^2$ (soma conexa de n toros);
- $F = P^2 \# \dots \# P^2$ (soma conexa de n planos projetivos);

Destas, somente S^2 e P^2 não são esféricas.

Portanto,

$$\begin{aligned} \pi_1(T^2) &= \langle a, b; [a, b] = 1 \rangle \\ \pi_1(T^2 \# \dots \# T^2) &= \left\langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \right\rangle \\ \pi_1(P^2 \# \dots \# P^2) &= \left\langle a_1, \dots, a_n; \prod_{i=1}^n a_i^2 = 1 \right\rangle \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

são grupos de dualidade de Poincaré de dimensão 2 sobre $\mathbb{Z}$.

Não é conhecido se todo grupo de dualidade de Poincaré G de dimensão n , $n > 2$, sobre $\mathbb{Z}$ admite uma variedade esférica fechada X , com $\pi_1(X) = G$.

O caso $n = 2$ foi provado por Eckmann-Müller e Linell em [11] e [12]. Daí, G é um grupo de dualidade de dimensão 2 sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, G é um grupo superfície infinito (isto é, G é o grupo fundamental de uma superfície fechada diferente de S^2 e P^2).

Em [10] Dicks e Dunwoody estenderam este resultado para PD^2 -grupos livres de torção sobre qualquer anel comutativo de característica zero.

Se G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 3, que é solúvel, então Thomas provou em [37] que a conjectura é verdadeira. No entanto, o caso geral $n \geq 3$ está ainda em aberto.

4.7 Pares de Dualidade

Definição 4.7.1 *Seja $(G, \mathcal{S})$ um par grupo. A **dimensão cohomológica** de $(G, \mathcal{S})$ sobre R , denotada por $cd_R(G, \mathcal{S})$, é dada por*

$$cd_R(G, \mathcal{S}) = \sup.\{n : H^n(G, \mathcal{S}; A) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo } A\}.$$

Se não existe tal inteiro n , dizemos que $cd_R(G, \mathcal{S}) = \infty$.

Definição 4.7.2 *Um **par de dualidade de dimensão n sobre R (D^n -par)** consiste de um par grupo $(G, \mathcal{S})$ e um RG -módulo C , onde $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família finita de D^{n-1} -subgrupos de G com módulo dualizante C (visto como RS_i -módulo por restrição) e, temos os isomorfismos naturais:*

$$H^k(G; A) \simeq H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_R A)$$

$$H^k(G, \mathcal{S}; A) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R A),$$

para todo RG -módulo A e todo $k \in \mathbb{Z}$.

Se $C \simeq R$, $(G, \mathcal{S})$ é chamado **par de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n - par)**.

Neste caso, cada $S_i \in \mathcal{S}$ é um PD^{n-1} -subgrupo de G .

Observação 4.7.1 (a) O conceito de grupo de dualidade é um caso particular do conceito de par de dualidade, considerando $\mathcal{S} = \emptyset$, pois

$$H_k(G, \emptyset; M) := H_k(G; M) \text{ e } H^k(G, \emptyset; M) := H^k(G; M)$$

(b) Em [4], Bieri e Eckmann definiram originalmente D^n -pares $(G, \mathcal{S})$ como sendo um par grupo $(G, \mathcal{S})$, com $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ uma família não necessariamente finita e os S_i 's não necessariamente D^{n-1} -subgrupos de G , satisfazendo isomorfismos naturais dados pelo produto cap.

É claro que D^n -par no sentido da definição anterior é também D^n -par no sentido de Bieri-Eckmann. Reciprocamente, se $(G, \mathcal{S})$ é um D^n -par com módulo dualizante C , no sentido de Bieri-Eckmann, temos por [4], Teo.4.2, que $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família finita de subgrupos de G e, cada S_i é um D^{n-1} -subgrupo com módulo dualizante C (visto como RS_i -módulo por restrição). Assim, $(G, \mathcal{S})$ é um D^n -par no sentido da definição anterior.

Proposição 4.7.1 Se $(G, \mathcal{S})$ é um D^n -par com módulo dualizante C , então G é um D^{n-1} -grupo com módulo dualizante $\Delta \otimes_R C$.

Demonstração : Sendo $(G, \mathcal{S})$ é um D^n -par, temos que

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_R M) := H_{n-k-1}(G; \Delta \otimes_R (C \otimes_R M)) \simeq H_{(n-1)-k}(G; (\Delta \otimes_R C) \otimes_R M).$$

Como todos os isomorfismos acima são naturais, temos que G é um D^{n-1} -grupo. ■

Proposição 4.7.2 Seja $(G, \mathcal{S})$ um D^n -par com módulo dualizante C . Então,

(i) $C \simeq H^n(G, \mathcal{S}; RG) \neq 0$ e $H^k(G, \mathcal{S}; RG) = 0$, se $k \neq n$;

(ii) $n = cd_R(G, \mathcal{S})$.

Demonstração : (i) Temos que

$$H^k(G, \mathcal{S}; RG) \stackrel{D^n\text{-par}}{\simeq} H_{n-k}(G; C \otimes_R RG) \simeq H_{n-k}(G; RG \otimes_R C) \stackrel{\text{def.}}{\simeq}$$

$$\stackrel{\text{def.}}{\simeq} H_{n-k}(G; \text{Ind}_{\{1\}}^G C) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H_{n-k}(\{1\}; C) = \begin{cases} C, & \text{se } k = n; \\ 0, & \text{se } k \neq n. \end{cases}$$

Logo, $H^n(G, \mathcal{S}; RG) \simeq C$ e $H^k(G, \mathcal{S}; RG) = 0$, se $k \neq n$.

Mostremos que $C \neq 0$.

De fato,

$$H^0(G; R) \stackrel{D^n\text{-par}}{\simeq} H_n(G, \mathcal{S}; C \otimes_R R) \simeq H_n(G, \mathcal{S}; C).$$

Por outro lado, $H^0(G; R) \simeq R^G = R$.

Assim, $H_n(G, \mathcal{S}; C \otimes_R R) = H_n(G, \mathcal{S}; C) \simeq R \neq 0$. Logo, $C \neq 0$, pois

$$C = 0 \Rightarrow H_n(G, \mathcal{S}; 0) = H_{n-1}(G, \Delta \otimes 0) \simeq 0.$$

Portanto, $C \simeq H^n(G, \mathcal{S}; RG) \neq 0$.

(ii) Temos que

$$H^k(G, \mathcal{S}; A) \stackrel{D^n\text{-par}}{\simeq} H_{n-k}(G; C \otimes_R A) = 0,$$

para $k > n$ e qualquer RG -módulo A . Logo, $cd_R(G, \mathcal{S}) \leq n$.

Como $H^n(G, \mathcal{S}; RG) \simeq C \neq 0$ (por (i)), temos que $cd_R(G, \mathcal{S}) \geq n$.

Portanto, $cd_R(G, \mathcal{S}) = n$. ■

A categoria dos pares de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ está contida na categoria sobre R , onde R é um anel comutativo com unidade, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 4.7.3 *Se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$, então $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de dimensão n sobre R .*

Demonstração : Se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade sobre $\mathbb{Z}$, com módulo dualizante C , então temos que $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, \dots, r\}$ é uma família finita de D^{n-1} -subgrupos de G (sobre $\mathbb{Z}$) com módulo dualizante C .

Pela Prop. 4.5.2, cada S_i é um D^{n-1} -subgrupo sobre R com módulo dualizante $C \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Consideremos M um RG -módulo. Logo, M é também um $\mathbb{Z}G$ -módulo e, temos:

$$\begin{aligned} H^k(G, \mathcal{S}; M) &\stackrel{D^n\text{-par}}{\simeq} H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G; (C \otimes_{\mathbb{Z}} R) \otimes_R M) \\ H^k(G; M) &\stackrel{D^n\text{-par}}{\simeq} H_{n-k}(G, \mathcal{S}; C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G, \mathcal{S}; (C \otimes_{\mathbb{Z}} R) \otimes_R M). \end{aligned}$$

Como os isomorfismos envolvidos são naturais, temos que $(G, \mathcal{S})$ é um D^n -par sobre R com módulo dualizante $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$. ■

Exemplo 4.7.1 Sejam $R = \mathbb{Z}_2$, $G = \langle t \rangle \oplus \langle s \rangle = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $S = \langle t^2 \rangle \oplus \langle s \rangle \simeq 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Então, (G, S) é um PD^3 -par sobre $\mathbb{Z}_2$.

De fato, temos que $G/S = \{\overline{(t, 1)}, \overline{(1, 1)}\} = \{(\bar{t}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1})\} \simeq \{\bar{1}, \bar{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Calculemos $\Delta = \text{Ker}(\epsilon)$, onde $\epsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é a aplicação aumentação.

Temos:

$$\mathbb{Z}_2(G/S) = \mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}_2) = \{\alpha\bar{1} + \beta\bar{T} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{T}, \bar{1} + \bar{T}\}.$$

Agora, $\epsilon(0) = 0$; $\epsilon(\bar{1}) = 1$ e $\epsilon(\bar{1} + \bar{T}) = \epsilon(\bar{1}) + \epsilon(\bar{T}) = 1 + 1 = 0$.

Logo, $\Delta = \{0, \bar{1} + \bar{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Portanto, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) = M$ e $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M = M$.

Como G é PD^2 -grupo, temos:

$$H_{3-k}(G, S; M) := H_{3-k-1}(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) = H_{2-k}(G; M) \simeq H^k(G; M)$$

e,

$$\begin{aligned} H^k(G, S; M) &:= H^{k-1}(G, \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) = \\ &= H^{k-1}(G; M) \simeq H_{2-(k-1)}(G; M) = H_{3-k}(G; M) \end{aligned}$$

e, deste modo, como os isomorfismos envolvidos são naturais, temos que (G, S) é um PD^3 -par.

4.8 Interpretação Topológica para Pares de Dualidade de Poincaré

O seguinte resultado pode ser encontrado em [4] e mostra a relação entre PD^n -pares e variedades e também fornece um critério para se produzir exemplos de PD^n -pares através de modelos topológicos.

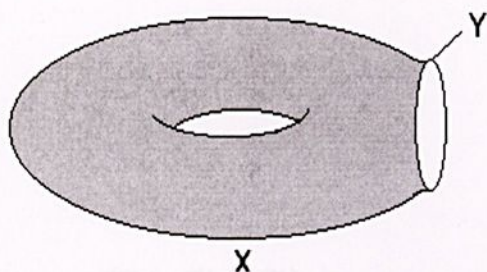
Teorema 4.8.1 Se (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X, Y) = K(G, S, 1)$, onde X é uma n -variedade orientável com bordo, compacta e $Y = \partial X$, então (G, S) é um PD^n -par sobre $\mathbb{Z}$ (consequentemente, (G, S) é um PD^n -par sobre R).

Demonstração : [4], 6.3.

■

Usando este resultado, veremos alguns exemplos de PD^n -pares.

Exemplo 4.8.1 Consideremos X o toro T^2 menos um disco aberto e $Y = \partial X$.



Sejam $G = \pi_1(X) \simeq \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \pi_1(Y) \simeq \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Já vimos, em Exemplo 3.3.2, que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Como X é uma variedade de dimensão 2, com bordo, compacta orientável e $Y = \partial X$, então (G, S) é um PD^2 -par sobre R ($= \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$).

Exemplo 4.8.2 Seja X a superfície orientada de genus $g \geq 1$ da qual um disco aberto foi removido e consideremos $Y = \partial X$. Assim, $G = \pi_1(X)$ é um grupo livre com $2g$ geradores $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ e $S = \pi_1(Y) = \langle [a_1, b_1], \dots, [a_g, b_g] \rangle$, onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$.

Pelo Ex. 3.3.3, temos que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) . Logo, pelo Teo. Ant., (G, S) é um PD^2 -par.

Exemplo 4.8.3 Generalizando os exemplos anteriores, consideremos X uma superfície fechada da qual um número finito m ($m > 2$, se $X = S^2$) de discos abertos foi removido e, seja $Y = \partial X$.

Temos que $Y = \bigcup_{i=1}^m Y_i$, onde cada $Y_i \simeq S^1$.

Sejam $G = \pi_1(X)$ e $S = \{S_i = \pi_1(Y_i) \simeq \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m\}$. Então, (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) , de acordo com o Exemplo 3.3.7. Logo, pelo Teorema anterior, (G, S) é um PD^2 -par.

Observação 4.8.1 A recíproca do Teo. acima, isto é, 'Se (G, S) é um par de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}$ de dimensão n , então (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é uma n -variedade compacta com bordo e $Y = \partial X$ ', é verdadeira, para $n \leq 2$. ([11] e [12])

Em [10], Dicks e Dunwoody provaram que, se (G, S) é um par de dualidade de Poincaré de dimensão $n \leq 2$ sobre um anel comutativo com unidade R e G é livre de torção, então a recíproca do Teorema é verdadeira.

Capítulo 5

O Invariante $E(G, S)$

Neste capítulo estudamos o invariante cohomológico $E(G, S, M)$, onde G é um grupo, S é uma família não vazia de subgrupos de G , não necessariamente distintos, de índice infinito em G , e M é um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo. O nosso objetivo é estudar um caso particular de $E(G, S, M)$, onde $S = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$, o qual denotamos por $E(G, S)$. Veremos algumas caracterizações de $E(G, S)$ em casos especiais e alguns resultados no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade. Como resultado principal, veremos uma condição necessária para que um par (G, S) seja um D^n -par.

5.1 A definição do invariante $E(G, S, M)$

Definição 5.1.1 Sejam (G, S) um par grupo, com $S = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G (não necessariamente distintos), e M um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo. Suponhamos $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$. Definimos

$$E(G, S, M) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G,$$

onde $\text{res}_S^G : H^1(G; M) \rightarrow \prod_{i \in I} H^1(S_i; M)$ é a aplicação dada na sequência exata longa

$$0 \rightarrow H^0(G; M) \xrightarrow{\varphi} \prod_{i \in I} H^0(S_i; M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, S; M) \xrightarrow{j} H^1(G; M) \xrightarrow{\text{res}_S^G} \prod_{i \in I} H^1(S_i; M) \rightarrow \dots$$

da Proposição 3.2.1.

Proposição 5.1.1 Sejam (G, S) um par grupo, onde $S = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G , com $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$, e M um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo, então:

$$E(G, S, M) = 1 + \dim \frac{H^1(G, S; M)}{(\prod_{i \in I} M^{S_i})/M^G},$$

onde $M^{S_i} = H^0(S_i; M)$ e $M^G = H^0(G; M)$.

Demonstração : Da exatidão da seqüência anterior, temos que

$$\begin{aligned} E(G, \mathcal{S}, M) &= 1 + \dim \operatorname{Ker} \operatorname{res}_{\mathcal{S}}^G = 1 + \dim \frac{H^1(G, \mathcal{S}, M)}{\operatorname{Ker} J} = 1 + \dim \frac{H^1(G, \mathcal{S}, M)}{\operatorname{Im}(\delta)} = \\ &= 1 + \dim \frac{H^1(G, \mathcal{S}, M)}{\prod_{i \in I} H^0(S_i; M) / \operatorname{Ker} \delta} = 1 + \dim \frac{H^1(G, \mathcal{S}, M)}{\prod_{i \in I} H^0(S_i; M) / \operatorname{Im}(\varphi)} = \\ &= 1 + \dim \frac{H^1(G, \mathcal{S}, M)}{\prod_{i \in I} H^0(S_i; M) / H^0(G; M)} = 1 + \dim \frac{H^1(G, \mathcal{S}; M)}{(\prod_{i \in I} M^{S_i}) / M^G}. \end{aligned}$$

Demonstração : Pela Proposição 5.2.1, temos a seguinte seqüência exata longa:

■

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são pares $((G, \mathcal{S}); M)$, onde G é um grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G e M é um RG -módulo e, cujos homomorfismos são aplicações :

$$\psi : ((G, \mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}); M) \longrightarrow ((L, \mathcal{R} = \{R_j, j \in J\}); N)$$

consistindo de:

- a) Um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow L$;
- b) Uma aplicação $\pi : I \rightarrow J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$;
- c) Um homomorfismo de RG -módulos $\phi : N \rightarrow M$ tal que $\phi(\alpha(g)n) = g\phi(n)$, isto é, ϕ é um homomorfismo de RG -módulos via α .

Observamos que um isomorfismo $\psi : ((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow ((L, \mathcal{R}); N)$ na categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

- a) $\alpha : G \rightarrow L$ isomorfismo de grupos;
- b) Uma aplicação $\pi : I \rightarrow J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$;
- c) $\phi : N \rightarrow M$ isomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$ -módulos.

Proposição 5.1.2 Se, na categoria $\mathcal{C}$, $((G, \mathcal{S}); M)$ e $((L, \mathcal{R}); N)$ são isomorfos então, temos que

$$E(G, \mathcal{S}, M) = E(L, \mathcal{R}, N),$$

isto é, $E(G, \mathcal{S}, M)$ é um invariante na categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração : [1], III.1.3.

■

Veremos agora uma caracterização de $E(G, \mathcal{S}, M)$ em termos de “Característica de Euler Parcial”.

Proposição 5.1.3 *Sejam $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, com $[G : \mathcal{S}] = \infty$, para todo $S \in \mathcal{S}$ e M um $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo. Suponhamos que os grupos de cohomologia $H^0(G; M)$, $H^0(\mathcal{S}; M)$ e $H^1(G, \mathcal{S}; M)$ tenham dimensão finita. Então,*

$$E(G, \mathcal{S}; M) = 1 + \dim H^0(G; M) - \dim H^0(\mathcal{S}; M) + \dim H^1(G, \mathcal{S}; M).$$

Demonstração : Pela Proposição 3.2.1, temos a seguinte seqüência exata longa:

$$0 \rightarrow H^0(G; M) \xrightarrow{\chi} H^0(\mathcal{S}; M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; M) \xrightarrow{J} H^1(G; M) \xrightarrow{\text{res}_S^G} H^1(\mathcal{S}; M) \rightarrow \dots,$$

a qual fornece a seguinte seqüência exata curta:

$$0 \rightarrow H^0(G; M) \xrightarrow{\chi} H^0(\mathcal{S}; M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, \mathcal{S}; M) \xrightarrow{J} \text{Im}(J) = \text{Ker}(\text{res}_S^G) \rightarrow 0.$$

Como χ, δ e J são transformações lineares de dimensão finita, temos que

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(\text{res}_S^G) &= \dim \text{Im} J = \dim H^1(G, \mathcal{S}; M) - \dim \text{Ker} J = \dim H^1(G, \mathcal{S}; M) - \dim \text{Im}(\delta) = \\ &= \dim H^1(G, \mathcal{S}; M) - [\dim H^0(\mathcal{S}; M) - \dim \text{Ker} \delta] = \dim H^1(G, \mathcal{S}; M) - \dim H^0(\mathcal{S}; M) + \\ &+ \dim \text{Ker} \delta = \dim H^1(G, \mathcal{S}; M) - \dim H^0(\mathcal{S}; M) + \dim \text{Im}(\chi) = \dim H^1(G, \mathcal{S}; M) - \\ &- \dim H^0(\mathcal{S}; M) + \dim H^0(G; M). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} E(G, \mathcal{S}; M) &= 1 + \dim \text{Ker}(\text{res}_S^G) = 1 + \dim \text{Im} J = \\ &= 1 + \dim H^0(G; M) - \dim H^0(\mathcal{S}; M) + \dim H^1(G, \mathcal{S}; M). \end{aligned}$$

■

5.2 Interpretação Topológica para $E(G, \mathcal{S}; M)$

Temos também uma interpretação topológica para $E(G, \mathcal{S}; M)$ em termos de pares Eilenberg-MacLane.

Proposição 5.2.1 *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G , com $[G : S] = \infty$, e M um $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo. Se $(G, \mathcal{S})$ é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , então*

$$E(G, S, M) = 1 + \dim \frac{H^1(X, Y; \mathcal{M})}{M^S / M^G},$$

onde $\mathcal{M}$ é o sistema de coeficientes locais dados pelo $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo M .

Demonstração : [2], pg.5

Corolário 5.2.1 Nas hipóteses da proposição anterior, se M é um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo com G -ação trivial, então

$$E(G, S, M) = 1 + \dim H^1(X, Y; M).$$

Exemplo 5.2.1 Sejam X o toro T^2 menos um disco aberto $\overset{\circ}{D}^2$ e $Y = \partial X$. Temos que (G, S) , onde $G = \pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \pi_1(Y) \simeq \mathbb{Z}$, é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane (X, Y) .

Usando a Dualidade de Poincaré-Lefschetz e a fórmula de Kunnetth ([16], 28.18 e 29.11), temos que

$$H^1(X, Y; \mathbb{Z}_2) \simeq H_1(X; \mathbb{Z}_2) \simeq H_1(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \simeq \pi_1(X)_{ab} \otimes \mathbb{Z}_2 \simeq (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Assim, pelo corolário anterior,

$$E(G, \{S\}, \mathbb{Z}_2) = 1 + \dim H^1(X, Y; \mathbb{Z}_2) = 1 + 2 = 3.$$

5.3 O Invariante $E(G, S)$

Estudaremos agora um caso particular de $E(G, S; M)$. Fixaremos, então, $S = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S) = \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2$.

Denota-se $E(G, \{S\}; \mathbb{Z}_2(G/S))$ por $E(G, S)$.

Segue então que,

$$E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G,$$

onde $\text{res}_S^G : H^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ é a aplicação restrição.

Proposição 5.3.1 $E(G, S)$ é um invariante algébrico para pares de grupos (G, S) , com $[G : S] = \infty$, isto é, se $\alpha : (G, S) \rightarrow (L, K)$ é um isomorfismo de pares de grupos, tais que $[G : S] = [L : K] = \infty$, então

$$E(G, S) = E(L, K).$$

Demonstração : Mostremos que $((G, S), \mathbb{Z}_2(G/S))$ e $((L, K), \mathbb{Z}_2(L/K))$ são isomorfos na categoria $\mathcal{C}$.

Consideremos $\alpha : (G, S) \rightarrow (L, K)$ um isomorfismo de pares de grupos, isto é, $\alpha : G \rightarrow L$ é um isomorfismo de grupos, com $\alpha(S) = K$.

Devemos mostrar que existe $\phi : \mathbb{Z}_2(L/K) \rightarrow \mathbb{Z}_2(G/S)$ isomorfismo de grupos abelianos tal que $\phi(\alpha(g).u) = g.\phi(u)$, para $g \in G$ e $u \in \mathbb{Z}_2(L/K)$.

Para isto, seja

$\phi : \mathbb{Z}_2(L/K) \rightarrow \mathbb{Z}_2(G/S)$ definida nos geradores por

$$\phi(xK) := \alpha^{-1}(x)S$$

e estendida por linearidade.

Temos:

- ϕ está bem definida, pois α é isomorfismo e $\alpha(S) = K$;
- ϕ é homomorfismo, por definição;
- ϕ é injetora, pois

$$\begin{aligned} \phi(x_1K) = \phi(x_2K) &\Rightarrow \alpha^{-1}(x_1)S = \alpha^{-1}(x_2)S \Rightarrow (\alpha^{-1}(x_1))^{-1}(\alpha^{-1}(x_2)) \in S \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha^{-1}(x_1^{-1}x_2) \in S \Rightarrow x_1^{-1}x_2 \in K \Rightarrow x_1K = x_2K. \end{aligned}$$

- ϕ é sobrejetora, pois

$$\forall yS \in \mathbb{Z}_2(G/S), \exists \alpha^{-1}(y)K \in \mathbb{Z}_2(L/K) \text{ tal que}$$

$$\phi(\alpha^{-1}(y)K) = yS.$$

- $\phi(\alpha(g).xK) = \phi((\alpha(g).x)K) = \alpha^{-1}(\alpha(g).x)S = (g.\alpha^{-1}(x))S = g.\phi(xK)$.

Logo, ϕ é um isomorfismo de grupos abelianos e, deste modo, temos que $((G, S), \mathbb{Z}_2(G/S))$ e $((L, K), \mathbb{Z}_2(L/K))$ são isomorfos.

Portanto, pela Proposição 5.1.2, temos que

$$E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S)) = E(L, K, \mathbb{Z}_2(L/K)),$$

ou seja, $E(G, S) = E(L, K)$.

■

Proposição 5.3.2 *Seja G um grupo e S um subgrupo de G , com $[G : S] = \infty$. Então,*

(a) $E(G, S) = 1 + \dim \frac{\text{Der}(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}.$

(b) Se $\text{res}_S^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S))$ for trivial, então

$$E(G, S) = 1 + \dim H^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S)).$$

(c) Se S é normal em G , então

$$E(G, S) = 1 + \dim H^1(G/S, \mathbb{Z}_2(G/S)).$$

Demonstração : (a) Segue diretamente da proposição 2.4.3.

(b) Se $\text{res}_S^G = 0$, temos $\text{Ker } \text{res}_S^G = H^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S))$ e, assim,

$$E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G = 1 + \dim H^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S)).$$

(c) Se S é normal em G , segue da proposição 2.4.2 que $\text{Ker } \text{res}_S^G \simeq H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S)^S)$. Mas, para $gS \in \mathbb{Z}_2(G/S)$, temos $sgS = gS$, para todo $s \in S$ pois, sendo S normal em G , $g^{-1}sg \in S$, para todo $s \in S$. Assim, $s\alpha = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2(G/S)$ e todo $s \in S$.

Logo, $\mathbb{Z}_2(G/S)^S = \mathbb{Z}_2(G/S)$ e, temos

$$E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G = 1 + \dim H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S)).$$

■

Exemplo 5.3.1 *Sejam $G = S \oplus H$, onde S, H são subgrupos de G e $H \simeq \mathbb{Z}$. Temos que S é normal em G e, assim, pela proposição anterior,*

$$E(G, S) = 1 + \dim H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S)).$$

Agora, temos que $G/S \simeq H$ e, deste modo, $\mathbb{Z}_2(G/S) \simeq \mathbb{Z}_2H$.

Logo, $E(G, S) = 1 + \dim H^1(H; \mathbb{Z}_2H)$.

Como H é um subgrupo de dualidade de Poincaré de dimensão 1, temos que

$$H^1(H; \mathbb{Z}_2H) \simeq H_0(H; \text{Ind}_{\{1\}}^H \mathbb{Z}_2) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H_0(\{1\}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Portanto,

$$E(G, S) = 1 + \dim \mathbb{Z}_2 = 1 + 1 = 2.$$

Exemplo 5.3.2 Segue, do exemplo anterior, que $E(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^{n-1}) = 2$ e $E(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_m) = 2$, onde $\mathbb{Z}_m$ é o grupo cíclico finito de ordem m .

Exemplo 5.3.3 Sejam G um grupo e S um subgrupo de índice infinito em G . Se S é finito de ordem ímpar, então temos que a ordem de S , denotada por $|S|$, é invertível em $\mathbb{Z}_2(G/S)$. Assim, por [8], III.10.2, temos que $H^1(S, \mathbb{Z}_2(G/S)) = 0$.

Deste modo, temos que a aplicação res_S^G é trivial e, portanto, pela proposição anterior,

$$E(G, S) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)).$$

Exemplo 5.3.4 Se $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \langle b \rangle = \mathbb{Z}$, então $E(G, S) = \infty$.

De fato, todo elemento de G pode ser escrito de forma única como $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}$, onde $n \geq 1$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{Z}$ e são diferentes de zero, exceto possivelmente α_1 e β_n . Seja f um elemento de $\text{Der}(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$. Notemos que f depende somente de $f(a)$, pois

$$(1) f(a^\alpha) = \sum_{i=0}^{\alpha-1} a^i f(a) \text{ e } f(a^{-\alpha}) = \sum_{i=1}^{\alpha} a^{-i} f(a), \text{ para todo } \alpha > 0.$$

$$(2) f(a^\alpha b^\beta) = a^\alpha f(b^\beta) + f(a^\alpha) = f(a^\alpha), \text{ pois } f|_S = 0,$$

$$f(a^{\alpha_1} b^{\beta_1} a^{\alpha_2} b^{\beta_2}) = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} f(a^{\alpha_2} b^{\beta_2}) + f(a^{\alpha_1} b^{\beta_1}) = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} f(a^{\alpha_2}) + f(a^{\alpha_1}),$$

e, na situação mais geral,

$$f(a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_n} b^{\beta_n}) = \sum_{j=1}^n a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_{j-1}} b^{\beta_{j-1}} f(a^{\alpha_j}).$$

Agora, para duas classes de S , temos

$$g_1 S = g_2 S \Leftrightarrow g_1 = g_2 b^\beta, \text{ para algum } \beta \in \mathbb{Z}.$$

Assim, $E = \{1\} \cup \{a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \dots a^{\alpha_{k-1}} b^{\beta_{k-1}} a^{\alpha_k}, \text{ onde } k \geq 1, \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z} \text{ e são diferentes de } 0, \text{ exceto possivelmente } \alpha_1\}$ é o conjunto de representantes das classes à esquerda gS . Sejam $f_j, j \in \mathbb{Z}$, as derivações dadas por $f_j(a) = b^j a S$. Usando o fato que $\mathbb{Z}_2(G/S)$ é o grupo abeliano livre, sendo geradores as classes $gS, g \in E$, pode-se verificar que $f_j \notin P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, e $\{f_j + P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S)), j \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto infinito de elementos linearmente independentes de $\frac{\text{Der}(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}{P(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))}$.

Exemplo 5.3.5 Seja G um grupo infinito e $S = \{1\}$ o subgrupo trivial. Então, pela proposição anterior, (c), temos

$$E(G, \{1\}) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2 G).$$

Observação 5.3.1 Hopf e Specker definiram o end clássico de grupos $e(G)$ e Specker mostrou que, se G é um grupo infinito, então $e(G) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$. Assim, o invariante $E(G, S)$ é uma generalização do end clássico $e(G)$.

Proposição 5.3.3 Sejam S e T subgrupos de G satisfazendo $S \leq T \leq G$. Se $[G : S] = \infty$ e $[G : T] < \infty$, então

$$E(G, S) \leq E(T, S).$$

Demonstração : Sejam $f : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(G/T))$ o $\mathbb{Z}_2 G$ -isomorfismo composto

$$\mathbb{Z}_2(G/S) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 G \otimes_{\mathbb{Z}_2 T} (\mathbb{Z}_2 T \otimes_{\mathbb{Z}_2 S} \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\cong} \text{Ind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S)) \xrightarrow{\cong} \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))$$

e $\pi : \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S)) \rightarrow \mathbb{Z}_2(T/S)$ a projeção natural.

Então,

$$\pi \circ f : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}_2(T/S).$$

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{\text{res}_S^G} & H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \\ (id_G, f)^* \downarrow \approx & & \downarrow \\ (id_S, \pi \circ f)^* \downarrow & & \\ H^1(G; \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(G/S))) & & \\ (j, \pi)^* \downarrow \approx & & \\ H^1(T; \mathbb{Z}_2(T/S)) & \xrightarrow{\text{res}_S^T} & H^1(S; \mathbb{Z}_2(T/S)) \end{array}$$

onde $j : T \rightarrow G$ é a inclusão.

Podemos ver que o diagrama acima é comutativo e

$$(j, \pi \circ f)^*(\text{Ker res}_S^G) \subset \text{Ker res}_S^T.$$

Assim, como $(j, \pi \circ f)^*$ é isomorfismo, temos um monomorfismo

$$(j, \pi \circ f)^*|_{\text{Ker res}_S^G} : \text{Ker res}_S^G \rightarrow \text{Ker res}_S^T.$$

Logo, $\dim \text{Ker res}_S^G \leq \dim \text{Ker res}_S^T$. Portanto, $E(G, S) \leq E(T, S)$.

■

Observações: (1) A desigualdade acima não é verdadeira se $[G : T] = \infty$. Por exemplo, se $S = \{1\}$, $T = \langle a \rangle = \mathbb{Z}$ e $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ temos, por exemplos anteriores, $E(G, S) = \infty > E(T, S) = 2$.

(2) Em geral, não existe relação entre $E(G, T)$ e $E(G, S)$, com $S \leq T \leq G$ e $[G : T] = \infty$.

Exemplo 5.3.6 Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$, $T = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \{\bar{1}\}$ e $S = \mathbb{Z} \oplus \{1\} \oplus \{\bar{1}\}$. Temos $[G : T] = 2$, $[G : S] = \infty$ e $[T : S] = \infty$. Assim, pela proposição anterior, $E(G, S) \leq E(T, S)$. Mas, pelo exemplo 5.3.1, temos que $E(T, S) = 2$. Portanto, $E(G, S) \leq 2$.

Vimos, nos exemplos, 5.3.1, 5.3.2 e 5.3.4, cálculos em que o invariante $E(G, S)$ assume os valores 2 ou ∞ . Veremos mais adiante exemplos de pares (G, S) onde $E(G, S) = 1$.

Nosso objetivo é provar que, sob certas hipóteses, $E(G, S)$ só assume os valores 1, 2 ou ∞ . Não sabemos se o mesmo é verdadeiro sob hipóteses mais gerais. Para tal objetivo, necessitamos do seguinte lema.

Lema 5.3.1 Se G é um grupo infinito finitamente gerado, com $\text{vcd } G < \infty$, então qualquer $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de $H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$ tem dimensão 0, 1 ou ∞ , quando considerado como $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial.

Demonstração : Sendo $\text{vcd } G < \infty$, por definição, existe S subgrupo de G , com $[G : S] < \infty$ e $\text{cd } S < \infty$. Assim, por [1], Teo. I.4.16(i), temos que $H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$ é $\mathbb{Z}_2 S$ -isomorfo a $H^1(S; \mathbb{Z}_2 S)$. Logo, todo $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de $H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$ pode ser visto, em particular, como um $\mathbb{Z}_2 S$ -submódulo de $H^1(S; \mathbb{Z}_2 S)$.

Deste modo, basta demonstrarmos o Lema para o subgrupo S .

Seja V um $\mathbb{Z}_2 S$ -submódulo de $H^1(S; \mathbb{Z}_2 S)$, com $0 < \dim V < \infty$. Como G é finitamente gerado e $[G : S] < \infty$ então, por [29](1.6.11), temos que S é finitamente gerado. Assim, por Prop. 4.3.1, S é do tipo FP_1 .

Agora, do fato de G ser infinito e $[G : S] < \infty$, temos que S é infinito. Logo, pela Prop. 1.4.6, temos

$$(\text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2)^S = (\mathbb{Z}_2 S)^S = H^0(S; \mathbb{Z}_2 S) = 0.$$

Deste modo, por [3] ou [15], concluímos que

$$H^1(S; \mathbb{Z}_2 S) \simeq \mathbb{Z}_2$$

e, assim, $\dim V=1$.

Portanto, qualquer $\mathbb{Z}_2G$ -submódulo de $H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$ tem dimensão 0, 1 ou ∞ , quando considerado como $\mathbb{Z}_2$ -espaço vetorial.

Observação 5.3.2 No artigo [15], Farrel afirma que o resultado anterior é válido supondo apenas G finitamente apresentado. Porém, não encontramos a demonstração deste fato em nenhuma das referências pesquisadas. ■

Estamos agora em condições de demonstrar o seguinte fato:

Teorema 5.3.1 Sejam G um grupo, $S \leq T$ subgrupos de G , com S normal em T e $[G : S] = \infty$. Suponhamos que T/S seja finitamente gerado, com $\text{vcd}(T/S) < \infty$, e que

$$\varphi^* : H^1(G; \text{Ind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))) \rightarrow H^1(G; \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))),$$

induzida do mergulho $\varphi : \text{Ind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S)) \rightarrow \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))$ seja monomorfismo. Então,

$E(G, S)$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞ .

Demonstração : Como $E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G$, onde res_S^G é a aplicação restrição ($\text{res}_S^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S))$), mostremos que $\text{Ker } \text{res}_S^G$ é $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -isomorfo a um $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -submódulo de $H^1(T/S; \mathbb{Z}_2(T/S))$. Assim, pelo Lema Anterior, teremos o resultado desejado.

Denotemos por $\bar{g}$ a classe $g.S$, $g \in G$, e consideremos a aplicação

$$\phi : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}_2(T/S)$$

$$\bar{g} \mapsto \varphi(g \otimes \bar{1})(1),$$

onde φ é o mergulho definido por

$$\varphi : \text{Ind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S)) \rightarrow \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))$$

$$g \otimes m \mapsto \varphi(g \otimes m) = g \cdot \varphi_0(m),$$

onde $\varphi_0 : \mathbb{Z}_2(T/S) \rightarrow \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))$ é tal que

$$\varphi_0(m)(h) = \begin{cases} hm, & \text{se } h \in S; \\ 0, & \text{se } h \notin S. \end{cases}$$

Na verdade, ϕ é a composta das seguintes aplicações :

$$\psi : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}_2 G \otimes_T \mathbb{Z}_2(T/S),$$

$$\bar{g} \mapsto g \otimes \bar{1}$$

$$\varphi : \mathbb{Z}_2 G \otimes_T \mathbb{Z}_2(T/S) = \text{Ind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S)) \rightarrow \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S)) = \text{Hom}_T(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2(T/S)) \text{ e,}$$

$$\pi : \text{Hom}_T(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2(T/S)) \rightarrow \mathbb{Z}_2(T/S) \text{ definida por}$$

$\pi(f) = f(1)$, para todo $f \in \text{Hom}_T(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2(T/S))$ e 1 identificado com a unidade $1.e \in \mathbb{Z}_2 G$, ou seja,

$$\phi = \pi \circ \varphi \circ \psi.$$

Explicitamente, temos

$$\phi(\bar{g}) = \begin{cases} \overline{g \cdot 1}, & \text{se } g \in T; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Consideremos $\text{id}_G : G \rightarrow G$ e a inclusão $i : T \hookrightarrow G$. Temos que $(i, \phi)^* : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(T; \mathbb{Z}_2(T/S))$ é a composta $(i, \pi)^* \circ (\text{id}_G, \varphi)^* \circ (\text{id}_G, \psi)^* = (i, \pi)^* \circ \varphi^* \circ \psi^*$ e é monomorfismo, pois $(i, \pi)^* : H^1(G; \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))) \rightarrow H^1(T; \mathbb{Z}_2(T/S))$ é isomorfismo de Shapiro (Prop. 2.3.1), φ^* é monomorfismo, por hipótese, e ψ^* é isomorfismo, pois ψ o é.

Temos também que $\phi^* : H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^1(S; \mathbb{Z}_2(T/S))$ é induzida de (id_S, ϕ) .

Seja $p : T \rightarrow T/S$ a projeção canônica. Por [8], VII.6.4., temos a seqüência exata

$$0 \rightarrow H^1(T/S; \mathbb{Z}_2(T/S)) \xrightarrow{p^*} H^1(T; \mathbb{Z}_2(T/S)) \xrightarrow{\text{res}_S^T} H^1(S; \mathbb{Z}_2(T/S)),$$

com $\text{Im}(p^*) = \text{Ker } \text{res}_S^T$. Logo,

$$H^1(T/S; \mathbb{Z}_2(T/S)) \simeq \text{Ker } \text{res}_S^T.$$

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) & \xrightarrow{\text{res}_S^G} & H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \\ \downarrow (i, \phi)^* & (I) & \downarrow \phi^* = (\text{id}_S, \phi) \\ H^1(T/S; \mathbb{Z}_2(T/S)) & \xrightarrow{p^*} & H^1(T; \mathbb{Z}_2(T/S)) \xrightarrow{\text{res}_S^T} H^1(S; \mathbb{Z}_2(T/S)) \end{array}$$

Do fato de S ser normal em T temos definida uma ação à direita de T/S em $\mathbb{Z}_2(G/S)$, isto é, $\overline{gn} = \overline{g\bar{n}}$. Temos também uma ação natural à direita de T/S em $\mathbb{Z}_2(T/S)$ dada por $\overline{nn_1} = \overline{n\bar{n}_1}$.

Logo, $\mathbb{Z}_2(G/S)$ e $\mathbb{Z}_2(T/S)$ são $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -módulos à direita e podemos ver facilmente que induzem estrutura de $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -módulos à direita no grupos de cohomologia acima, a saber:

$$[f].\bar{n} = [f.\bar{n}], \text{ onde } (f.\bar{n})(x) = f(x).\bar{n},$$

com f representando uma classe de cohomologia e $f(x) \in \mathbb{Z}_2(G/S)$ ou $f(x) \in \mathbb{Z}_2(T/S)$.

As aplicações $\text{res}_S^G, \text{res}_S^T$ e p^* são aplicações de $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -módulos.

Veriquemos que $(i, \phi)^*$ é $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -aplicação.

Primeiramente, notemos que ϕ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -módulos. De fato,

$$\phi(\bar{g}.\bar{n}) = \begin{cases} \overline{gn}, & \text{se } g \in T; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad e,$$

$$\phi(\bar{g}).\bar{n} = \begin{cases} \overline{gn}, & \text{se } g \in T; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $\phi(\bar{g}.\bar{n}) = \phi(\bar{g}).\bar{n}$. Deste modo, $(i, \phi)^*$ é $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -monomorfismo.

Como res_S^G é $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -homomorfismo, temos que $\text{Ker } \text{res}_S^G$ é $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -submódulo de $H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S))$.

Do fato do diagrama (I) ser comutativo temos que

$$(i, \phi)^*(\text{Ker } \text{res}_S^G) \subset \text{Ker } \text{res}_S^T.$$

Logo, $p^{*-1}((i, \phi)^*(\text{Ker } \text{res}_S^G))$ é um $\mathbb{Z}_2(T/S)$ -submódulo de $H^1(T/S; \mathbb{Z}_2(T/S))$. Assim,

$$\dim \text{Ker } \text{res}_S^G = \dim (i, \phi)^*(\text{Ker } \text{res}_S^G) \quad ((i, \phi)^* \text{ é monomorfismo})$$

$$= \dim p^{*-1}((i, \phi)^*(\text{Ker } \text{res}_S^G)) \quad (p^* \text{ é monomorfismo})$$

$$= 0, 1 \text{ ou } \infty. \quad (\text{Lema Anterior})$$

Portanto,

$$E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G = 1, 2 \text{ ou } \infty.$$

■

Corolário 5.3.1 *Sejam $S \leq T \leq G$ grupos, com S normal em T , $[G : T] < \infty$ e $[G : S] = \infty$. Se T/S é finitamente gerado e $\text{vcd}(T/S) < \infty$, então $E(G, S)$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞ .*

Demonstração : Sendo $[G : T] < \infty$, pela Prop. 1.4.3, temos que

$$\varphi : \text{Ind}_T^G M \rightarrow \text{Coind}_T^G M$$

é isomorfismo, para qualquer $\mathbb{Z}_2 T$ -módulo M . Em particular, para $M = \mathbb{Z}_2(T/S)$. Assim, $\varphi^* : H^1(G; \text{Ind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S))) \rightarrow H^1(G; \text{Coind}_T^G(\mathbb{Z}_2(T/S)))$, induzida de φ , é monomorfismo e estamos nas hipóteses do Teorema Anterior.

Portanto, $E(G, S)$ assume os valores 1, 2 ou ∞ .

■

Exemplo 5.3.7 Sejam G um PD^n -grupo e S um PD^{n-1} -subgrupo de G , com $[N : S] = \infty$, onde N é o normalizador de S em G . Por [20], Lema 3.1, temos que $[G : N] < \infty$ e N/S tem um subgrupo cíclico L/S de índice finito. Assim, $\text{vcd}(N/S) = 1$.

Além disso, como G é finitamente gerado, temos que N e, deste modo, N/S , são finitamente gerados. Logo, estamos nas hipóteses do Corolário Anterior e, portanto, $E(G, S) = 1, 2$ ou ∞ .

Exemplo 5.3.8 Seja H um grupo, com $\text{vcd } H < \infty$ e H finitamente gerado (por exemplo, H igual ao grupo livre com n geradores, $n > 1$). Consideremos os grupos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p$, onde p é qualquer inteiro positivo. Temos que $\mathbb{Z}$ atua em $\mathbb{Z}_p$, da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p$$

$$(n, \bar{m}) \rightarrow n \cdot \bar{m} = (-1)^n \cdot \bar{m}.$$

Logo, podemos tomar o produto semi-direto $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}$, onde a operação de grupo é dada por

$$(\bar{n}, a) * (\bar{m}, b) = (\bar{n} + a \cdot \bar{m}, a + b) = (\bar{n} + (-1)^a \bar{m}, a + b).$$

Sejam $G = H \oplus (\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z})$, $N = H \oplus (\{0\} \rtimes \mathbb{Z})$ e $S = \{0\} \rtimes \mathbb{Z}$.

Se $p = 2$, temos que a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_2$ é trivial e, assim, $\mathbb{Z}_2 \rtimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$. Se $p \neq 2$, a ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}_p$ não é trivial e S não é normal em G .

Temos que $[G : N] < \infty$, $S \triangleleft N$, $[N : S] = \infty$ e $N/S \simeq H$.

Logo, estamos nas hipóteses do Corolário anterior e, portanto, $E(G, S) = 1, 2$ ou ∞ .



T.1363/05



5.4 Interpretação Topológica de $E(G, S)$

Neste parágrafo veremos uma interpretação de $E(G, S)$ em termos de cohomologia relativa de CW-complexos, tomada com coeficientes locais.

Proposição 5.4.1 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G , com $[G : S] = \infty$. Se (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando topologicamente (G, S) , então*

$$E(G, S) = 1 + \dim \frac{H^1(X, Y; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S},$$

onde $H^1(X, Y; \mathbb{Z}_2(G/S))$ é tomada com coeficientes locais dados pelo $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo $\mathbb{Z}_2(G/S)$.

Demonstração : Segue da proposição 5.2.1.

■

Exemplo 5.4.1 *Sejam $G = \langle t \rangle * \langle s \rangle$, $S = \langle sts^{-1}t^{-1} \rangle$ e $H = \langle s \rangle$. Consideremos X igual ao toro T^2 menos um disco aberto $Y = \partial X$. Vimos, no Exemplo 3.3.2, que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) . Logo, pela Prop. Anterior e Exemplo 5.5.4, temos*

$$E(G, S) = 1 + \dim \frac{H^1(X, Y; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} = 1.$$

Exemplo 5.4.2 *Sejam $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Temos que (G, S) é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane (T^2, S^1) e, então,*

$$E(G, S) = 1 + \dim \frac{H^1(T^2, S^1; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)^S} \stackrel{S:\text{normal em } G}{=} 1 + \dim \frac{H^1(T^2, S^1; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)}.$$

Como $E(G, S) = 2$, pelo exemplo 5.3.1, segue que

$$\frac{H^1(T^2, S^1; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\mathbb{Z}_2(G/S)} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Exemplo 5.4.3 *Seja G um grupo infinito e $S = \{1\}$ o subgrupo trivial. Temos*

$$E(G, \{1\}) = 1 + \dim \frac{H^1(X, \{x_0\}; \mathbb{Z}_2 G)}{\mathbb{Z}_2 G},$$

onde X é um $K(G, 1)$ e x_0 é o vértice de X .

5.5 O Invariante $E(G, S)$ e dualidade

Vamos agora estudar o invariante $E(G, S)$ no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade.

Usaremos os isomorfismos de dualidade para computar $E(G, S)$ em alguns casos especiais.

Proposição 5.5.1 *Sejam G um D^n -grupo com módulo dualizante C e S um subgrupo de G . Então,*

- (i) *Se S é um D^{n-1} -subgrupo de G com módulo dualizante $\text{Res}_S^G C$ (em particular, se G e S são grupos de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}_2$), então $E(G, S) \leq 2$.*
- (ii) *Se $\text{hd } S \leq n - 2$, então $E(G, S) = 1$.*

Demonstração : (i) Pela Proposição 4.1.1, temos que, em (i) e (ii), $[G : S] = \infty$. Logo, podemos definir $E(G, S)$. Além disso,

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \stackrel{G:D^n\text{-grupo}}{=} H_{n-1}(G; C \otimes \mathbb{Z}_2(G/S)) = H_{n-1}(G; C \otimes \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2) \stackrel{\text{Prop. 1.4.5}}{=}$$

$$\stackrel{\text{Prop. 1.4.5}}{=} H_{n-1}(G; \text{Ind}_S^G(\text{Res}_S^G C \otimes \mathbb{Z}_2)) \stackrel{\text{Shapiro}}{=} H_{n-1}(S; \text{Res}_S^G C \otimes \mathbb{Z}_2).$$

Como, por hipótese, S é um D^{n-1} -subgrupo de G com módulo dualizante $\text{Res}_S^G C$, temos:

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) = H_{n-1}(S; \text{Res}_S^G C \otimes \mathbb{Z}_2) \stackrel{\text{hip.}}{=} H^0(S; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Logo, $\dim \text{Ker } \text{res}_S^G \leq 1$.

Portanto, $E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G \leq 2$.

(ii) Agora, se $\text{hd } S < n - 1$, temos que

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) = H_{n-1}(S; \text{Ind}_S^G((\text{Res}_S^G C) \otimes \mathbb{Z}_2)) = 0.$$

Logo, $\text{Ker } \text{res}_S^G = 0$ e, portanto,

$$E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G = 1.$$

■

Exemplo 5.5.1 Se $G = \mathbb{Z}^k$ e $S = \mathbb{Z}^{k-2}$, então $E(G, S) = 1$.

De fato, temos $hd S = k - 2$ e, como vimos acima, G é um PD^k -grupo.

Portanto, pela Proposição Anterior (ii), $E(G, S) = 1$.

Exemplo 5.5.2 Se G é um PD^n -grupo qualquer, $n \geq 2$, e S um subgrupo finito de G , então $E(G, S) = 1$.

De fato, como G é um D^n -grupo, pela Proposição 4.5.1, G não tem $\mathbb{Z}_2$ -torção. Logo, S não tem $\mathbb{Z}_2$ -torção. Deste modo, pela Proposição 4.5.3, S é um D^0 -subgrupo e, assim, $hd S = 0 \leq n - 2$.

Portanto, pela Proposição Anterior (ii), $E(G, S) = 1$.

Exemplo 5.5.3 Seja $G = \pi_1(M^3)$, onde $M = X \times S^1$, com X a superfície orientada de genus 2. Temos, então,

$$G = \pi_1(M^3) = H \times K,$$

onde $H = \langle a_1, b_1, a_2, b_2; (a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1})(a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}) = 1 \rangle$ e $K = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Consideremos $S = \langle a_1 a_2^{-1} \rangle$. Então, G é um PD^3 -grupo, H é um PD^2 -subgrupo e K, S são PD^1 -subgrupos. Portanto, pela Proposição Anterior,

$$E(G, K) = E(G, S) = 1, \quad E(G, H) \leq 2 \quad \text{e} \quad E(H, S) \leq 2.$$

Veremos agora um resultado que nos dá uma condição necessária para que um par grupo (G, S) seja um D^n -par.

Teorema 5.5.1 Se (G, S) é um D^n -par, com $[G : S] = \infty$, então $E(G, S) = 1$.

Demonstração: Observemos, primeiramente, que a hipótese $[G : S] = \infty$ implica $n > 1$, pois se (G, S) é um D^1 -par, pela Prop. 4.7.1, G é um D^0 -grupo e, assim, pela Prop. 4.5.3, G é finito. Logo, $[G : S] < \infty$. Absurdo!

Consideremos a seqüência exata longa (Definição 5.1.1) para o par (G, S) e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$:

$$0 \rightarrow H^0(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow H^0(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{\delta} H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{J} \\ \xrightarrow{J} H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \xrightarrow{\text{res}_S^G} H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \rightarrow \dots$$

Seja C o módulo dualizante de (G, S) . Então,

$$\begin{aligned} H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S)) &\simeq H_{n-1}(G; C \otimes \mathbb{Z}_2(G/S)) && \text{(Dualidade)} \\ &\simeq H_{n-1}(G; C \otimes \text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2) \\ &\simeq H_{n-1}(G; \text{Ind}_S^G ((\text{Res}_S^G C) \otimes \mathbb{Z}_2)) && \text{(Prop. 1.4.5)} \\ &\simeq H_{n-1}(S; (\text{Res}_S^G C) \otimes \mathbb{Z}_2) && \text{(Shapiro)} \\ &= H_{n-1}(S; C \otimes \mathbb{Z}_2) \\ &\simeq H^0(S; \mathbb{Z}_2) \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 && \text{(ação trivial em } \mathbb{Z}_2\text{)}. \end{aligned}$$

Agora, observemos que

$$H^0(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \stackrel{\text{Prop. 2.2.2}}{\simeq} (\mathbb{Z}_2(G/S))^G \stackrel{\text{corol. 1.4.1}}{\simeq} (\text{Ind}_S^G \mathbb{Z}_2)^G \stackrel{\text{Prop. 1.4.5}}{=} 0, \text{ pois } [G : S] = \infty.$$

Assim, pela exatidão da seqüência, temos $\text{Ker } \delta = 0$, ou seja, δ é injetora.

Logo, sendo $H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq \mathbb{Z}_2$, temos que

$$H^0(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq \mathbb{Z}_2 \text{ ou } H^0(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) = 0.$$

Mas,

$$H^0(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq (\mathbb{Z}_2(G/S))^S, \text{ o qual contém } \{0, 1S\} \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Assim, $H^0(S; \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Logo,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \text{res}_S^G &\simeq \text{Im}(J) \simeq \frac{H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\text{Ker } J} = \frac{H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S))}{\text{Im}(\delta)} = \\ &= \frac{H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S))}{H^0(S; \mathbb{Z}_2(G/S))/\text{Ker } \delta} = \frac{H^1(G, S; \mathbb{Z}_2(G/S))}{H^0(S; \mathbb{Z}_2(G/S))} \simeq \frac{\mathbb{Z}_2}{\mathbb{Z}_2} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$E(G, S) = 1 + \dim \text{Ker } \text{res}_S^G = 1.$$

■

Exemplo 5.5.4 Consideremos $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Então, $E(G, S) = 1$.

De fato, por Exemplo 4.8.1, (G, S) é um PD^2 -par. Portanto, pela Proposição Anterior, $E(G, S) = 1$.

Observação 5.5.1 Sejam $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, $H = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Não existe isomorfismo de pares de grupos $\psi : (G, S) \rightarrow (G, H)$, ou seja, não existe isomorfismo $\alpha : G \rightarrow G$, com $\alpha(S) = H$.

De fato, se existisse tal isomorfismo, teríamos $E(G, S) = E(G, H)$. Porém, pelo exemplo anterior, $E(G, S) = 1$, enquanto que $E(G, H) = \infty$, pelo exemplo 5.3.4. Portanto, (G, S) não é isomorfo a (G, H) .

Observação Final: Invariantes ends foram estudados também por outros autores. Houghton, em [17], e Scott, em [32], deram uma definição do número de ends $e(G, S)$ de um par de grupo e Kropholler e Roller, em [21], introduziram um outro invariante end denotado por $\tilde{e}(G, S)$. Esses dois invariantes estão relacionados entre si e com o invariante $E(G, S)$. Vale, por exemplo, que “Se G é um grupo e S um subgrupo de G , com $[G : S] = \infty$, então $E(G, S) \leq e(G, S) \leq \tilde{e}(G, S)$ ” (ver [21] e [2]). No entanto, os invariantes $e(G, S)$ e $\tilde{e}(G, S)$ não fornecem condições para que (G, S) seja um PD^n -par, como ocorre com o invariante $E(G, S)$. Há exemplos de PD^n -pares com $e(G, S) = \tilde{e}(G, S) = \infty$ e exemplos de PD^n -pares com $e(G, S) = \tilde{e}(G, S) = 1$ (ver [2], Observação 3.4 (3)).

[17] Houghton, R. W., *Homological criteria for finiteness*, *Canad. Math. Bull.* 20, pp. 129-135, 1978.

[32] Scott, R. W., *Cohomology of Groups*, G.T.M. 57, Springer-Verlag, New York, 1962.

[21] Crook, D. M., *Cohomologia e Ends de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IBILCE/UNESP, 1997.

[10] Dickson, W., Dunwoody, M., *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1984.

[11] Eckmann, B., Müller, H., *Profinite Duality Groups of Discrete Type*, *Comment. Math. Helvetici* 55, pp. 510-520, 1980.

Referências Bibliográficas

- [1] Andrade, M.G.C.; *Invariantes Relativos e Dualidade*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, Campinas, 1992.
- [2] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *A Relative Cohomological Invariant for Pairs of Groups*, Manuscripta Math. 83, 1994.
- [3] Bieri, R.; *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Math. Notes, Queen Mary College, London, 1976.
- [4] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Relative Homology and Poincaré Duality for Group Pairs*, Journal of Pure and Applied Algebra 13, pp. 277-319, 1978.
- [5] Bieri, R.; Eckmann B.; *Finiteness properties of duality groups*, Comment. Math. Helv. 49, pp. 74-83, 1974.
- [6] Bestvina, M.; Brady, N.; *Morse theory and finiteness properties of groups*, Invent. Math., 129, n° 03, p.445-470, 1997.
- [7] Brown, K. S.; *Homological criteria for finiteness*, Comment. Math. Helv. 50, pp. 129-135, 1975.
- [8] Brown, K. S.; *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Springer-Verlag, New York, 1982.
- [9] Cioca, D. M.; *Cohomologia e Ends de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 1997.
- [10] Dicks, W.; Dunwoody, M.; *Groups acting on graphs*, Cambridge University Press, 1988.
- [11] Eckmann, B.; Müller, H.; *Poincaré Duality Groups of Dimension Two*, Comm. Math. Helvetici 55, pp. 510-520, 1980.



- [12] Eckmann, B.; Linell, P.A.; *Poincaré Duality Groups of Dimension Two II*, Comm. Math. Helv. 58, pp. 111-114, 1983.
- [13] Eilenberg, S.; *Homology of Spaces with Operators I*, Trans. Amer. Math. Soc. 61, pp. 378-417, 1947; errata 62 (1947) 548.
- [14] Eilenberg, S.; Ganea, T.; *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, Ann. of Maths. 65, pp. 517-518, 1957.
- [15] Farrel, F.T.; *Poincaré Duality and groups of type (FP)*, Comment. Math. Helv. 50, pp. 187-195, 1975.
- [16] Greenberg, M.J.; *Lectures on Algebraic Topology*, W.A., Benjamin, Inc., 1966.
- [17] Houghton, C.H.; *Ends of locally compact groups and their coset spaces*, J. Aust. Math. Soc. 17, 274-284, 1974.
- [18] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day Series in Mathematics, Holden-Day Inc. São Francisco, 1968.
- [19] Johnson, F.E.A.; Wall, C.T.C.; *On groups satisfying Poincaré duality*, Annals of Math. 96, pp. 592-598, 1972.
- [20] Kropholler, P.H.; Roller, M.A.; *Splittings of Poincaré duality groups*, Math. Z. 97, pp. 421-438, 1988.
- [21] Kropholler, P.H.; Roller, M.A.; *Relative ends and duality groups*, Journal of Pure and Appl. Algebra 61, pp. 187-210, 1989.
- [22] Lázaro, C. A.; *Módulos e (Co)homologia de Grupos*, Relatório Científico FAPESP, 2002.
- [23] Lima, E.L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [24] Macedo, B.L.; *Propriedades Homológicas de Finitude e Grupos de Dualidade*, Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2002.
- [25] MacLane, S.; *Homology*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.



- [26] Massey, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1967.
- [27] Ribes, L.; *On a Cohomology Theory for Pairs of Groups*, Proc. of the A.M.S. 21, pp. 230-234, 1969.
- [28] Papani, F.M.G.; *Cohomologia de Grupos, Dualidade e Aplicações ao estudo do Invariante Algébrico $E(G, S, M)$* , Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 1997.
- [29] Robinson, D.J.S.; *A Course in the Theory of Groups*, G.T.M. 80, Springer, Berlin, 1982.
- [30] Rotman, J.J.; *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press, Inc., 1979.
- [31] Schubert, H.; *Topology*, MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.
- [32] Scott, P.; *Ends of pairs of groups*, Journal Pure and Appl. Algebra 11, 179-198, 1977.
- [33] Serre, J. P.; *Cohomologie des groupes discrets*, Ann of Math. Studies 70, pp. 77-169, 1971.
- [34] Spanier, E.H.; *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, New York, Inc., 1966.
- [35] Stallings, J.R.; *On torsion free groups with infinitely many ends*, Ann. of Math. 88, pp. 312-334, 1968.
- [36] Swan, R.; *Groups of cohomological dimension one*, J. of Algebra 12, pp. 585-610, 1969.
- [37] Thomas, C.B.; *Splittings theorems for certain PD^3 -groups*, Math. Z. 186, pp.201-209, 1984.
- [38] Vick, J.W.; *Homology Theory*, Academic Press, Inc., 1973.
- [39] Wall, C.T.C.; *Finiteness conditions for CW-complexes*, Ann. of Maths. 81, pp. 56-69, 1965.
- [40] Wall, C.T.C.; *Finiteness conditions for CW-complexes II*, Proc. Royal Soc. A. 295, pp. 129-139, 1966.
- [41] Whitehead, G.W.; *Elements of Homotopy Theory*, G.T.M. 61, Springer-Verlag, New York, 1978.



