



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Campus de São José do Rio Preto

---

Jairo Santos da Silva

Polinômios ortogonais no círculo unitário: medidas  
associadas a sequências periódicas

Tese de Doutorado  
Pós-Graduação em Matemática

---

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas  
Rua Cristóvão Colombo, 2265  
15054-000, São José do Rio Preto, São Paulo, Brasil  
Telefone: (17) 3221-2444. Fax: (17) 3221-2445

**Jairo Santos da Silva**

**Polinômios ortogonais no círculo unitário: medidas  
associadas a sequências periódicas**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali.

Coorientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga.

São José do Rio Preto

2017

Silva, Jairo Santos da.

Polinômios ortogonais no círculo unitário : medidas associadas a sequências periódicas / Jairo Santos da Silva. -- São José do Rio Preto, 2017

109 f.

Orientador: Cleonice Fátima Bracciali

Coorientador: Alagacone Sri Ranga

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Polinômios ortogonais.  
4. Sequências (Matemática) I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.  
II. Título.

CDU – 517.587

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE  
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

**Jairo Santos da Silva**

**Polinômios ortogonais no círculo unitário: medidas  
associadas a sequências periódicas**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

**Banca Examinadora**

---

Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali  
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto  
Orientadora

---

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo  
Professor Associado/ UFPB - João Pessoa

---

Prof. Dr. Valdir Antonio Menegatto  
Professor Titular/ USP - São Carlos

---

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi  
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto

---

Prof. Dr. Maurílio Boaventura  
Professor Livre Docente/ UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 20 de Fevereiro de 2017.

*Aos meus pais, Oziel e Rute,  
aos meus sogros e familiares,  
com muito amor e carinho,  
ofereço.*

*A minha amada esposa, Eusiene Silva,  
dedico.*

# Agradecimentos

A Deus acima de tudo, pois Ele tem suprido todas as minhas necessidades.

Um agradecimento especial à minha orientadora, Profa. Cleonice Fátima Bracciali, e ao meu coorientador, Prof. Alagacone Sri Ranga, pelos conselhos, incentivo, empenho e amizade dedicados durante todo o período em que me orientaram. Agradeço, também, pela paciência e confiança em mim depositadas, assim como, pela enorme contribuição tanto no meu crescimento intelectual como no meu desenvolvimento social.

Aos professores da pós-graduação, que contribuíram de forma essencial para a minha formação.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNESP, Campus de São José do Rio Preto, por ter me concedido a oportunidade de participar deste qualificado programa. Agradeço também aos funcionários da Seção Técnica de Pós-Graduação pela atenção e cordialidade.

À Universidade Federal do Maranhão e aos professores do Departamento de Matemática da UFMA pelo apoio e incentivo. Em especial, gostaria de agradecer ao Prof. Hilcias Jordão pela presteza de sempre e ao Prof. Marcos Antônio pela amizade e encorajamento desde os tempos de graduação.

À minha digníssima e amada esposa Eusiene Furtado Mota Silva pelo carinho, paciência, compreensão, incentivo e amor dedicados durante toda essa jornada. Principalmente durante os 18 meses que vivemos tão longe um do outro.

Aos meus queridos pais, Oziel e Rute, aos meus sogros, Ely e Eudes, e demais familiares, por toda força e carinho que me transmitiram ao longo do período que aqui passei.

Aos amigos e colegas de curso, Junior Augusto, Gislaine, Mariana, Yen, Luana, Gino, Ismael, Moisés, Fabiola, Paola, Cheienne, Willian, Marcelo, Heloísa, Rafael, Daniella e Michelli, pelo companheirismo e bons momentos desfrutados ao longo dessa ca-

minhada. Em especial, queria agradecer ao amigo Daniel, pela amizade, convivência, paciência e pelos muitos momentos de estudos e discussões, fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho.

Um agradecimento especial à família Veronese que de certo modo me acolheu como parte da mesma ao longo de toda minha estada em São José do Rio Preto. Obrigado queridos amigos, Daniel e Monaíse, pelos momentos maravilhosos desfrutados ao longo dessa jornada.

Ao professor A. Martínez-Finkelshtein da Universidade de Almería pela cordialidade de sempre e pelas valiosas sugestões que contribuíram para o desenvolvimento do artigo que deu origem ao Capítulo 4 desse trabalho.

A todos aqueles que, de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização desse trabalho.

Enfim, à CAPES, pelo auxílio financeiro.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu,  
mas pensar o que ninguém ainda pensou  
sobre aquilo que todo mundo vê.”

*Arthur Schopenhauer*

# Resumo

Foi mostrado recentemente que associado a um par de sequências reais (onde uma delas é uma sequência encadeada positiva) existe uma única medida de probabilidade não trivial com suporte no círculo unitário. No presente trabalho nossa principal contribuição é estudar o comportamento dessas medidas quando impomos algumas restrições de sinal e periodicidade sobre essas sequências. Precisamente, fornecemos uma estimativa para o suporte de tais medidas no caso em que a sequência que não é a sequência encadeada positiva satisfaz uma propriedade de sinal alternante. Além disso, quando esse par é tal que a sequência de parâmetros minimal da sequência encadeada positiva e a outra sequência são periódicas, mostramos que o estudo dessas medidas é completamente equivalente ao estudo de medidas associadas a coeficientes de Verblunsky periódicos: o que nos permite, neste caso, apresentar, estudar e caracterizar um novo espaço de medidas no círculo unitário. Por fim, estabelecemos informações sobre o suporte essencial de medidas no caso limite periódico, isto é, quando as sequências reais associadas são limite periódicas.

**Palavras-chave:** Polinômios ortogonais no círculo unitário. Medidas não triviais. Sequências encadeadas. Sequências reais periódicas. Coeficientes de Verblunsky periódicos.

# Abstract

It was shown recently that associated with a pair of real sequences (where one of them is a positive chain sequence) there exists a unique nontrivial probability measure supported on the unit circle. In the present work, our main contribution is to study the behavior of these measures when we impose some restrictions of sign and periodicity on these sequences. Precisely, we provide an estimate for the support of such measures in the event that the sequence which is not the positive chain sequence, satisfies an alternating sign property. Moreover, when this pair is such that the minimal parameter sequence of the positive chain sequence and the other sequence are periodic, we show that the study of these measures is completely equivalent to the study of measures associated with periodic Verblunsky coefficients: which allows us, in this case, to present, to study and to characterize a new space of measures on the unit circle. Finally, we establish information about the essential support of measures in the limit periodic case, i.e., when the associated real sequences are limit periodic.

**Keywords:** Orthogonal polynomials on the unit circle. Nontrivial measures. Chain sequences. Periodic real sequences. Periodic Verblunsky coefficients.

# Lista de Símbolos

Lista de símbolos dividida em alfabeto grego, alfabeto romano e não alfabético.

## Alfabeto Grego

- $\alpha_n = \alpha_n^{(\mu)}$  coeficientes de Verblunsky associados a uma medida  $\mu$  no círculo unitário; veja (1.15)
- $\bar{\alpha}_n^{(\mu)}$  conjugado de  $\alpha_n^{(\mu)}$
- $\delta_{m,n}$  delta de Kronecker; veja (1.2)
- $\Delta_n$  determinante de Toeplitz; veja (1.8)
- $\Delta(z)$  função discriminante; veja Subseção 1.2.2
- $\kappa_n$  constante de normalização tal que  $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = \kappa_n^{-2} = \int_{\mathbb{T}} |\phi_n(z)|^2 d\mu(z) = \|\phi_n\|^2$ ; veja Seção 1.2
- $\lambda_{n,j}$  autovalores da matriz  $A(d_2, d_3, \dots, d_n)$ ; veja (4.33)
- $\mu, \tilde{\mu}, \mu_n$  medidas em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$
- $\mu(\{z_0\})$  medida do ponto  $z_0$ , isto é, tamanho da massa em  $z = z_0$  na medida  $\mu$
- $\mu(\delta; \cdot)$  medida em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  com massa  $\delta$ ,  $0 \leq \delta < 1$ , em  $z = 1$
- $\nu_m = \nu_m^{(\psi)}$  momentos de uma medida  $\psi$ ; veja Definição 1.2 e (1.4)
- $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty = \{\rho_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  sequência de números complexos associada a uma medida  $\mu$  no círculo unitário; veja (1.24) e (1.26)
- $\bar{\rho}_n^{(\mu)}$  conjugado de  $\rho_n^{(\mu)}$
- $\sigma_{ess}(\mu)$  suporte essencial da medida  $\mu$ ; veja (1.5)
- $\{\tau_n(w)\}_{n=0}^\infty = \{\tau_n^{(\mu)}(w)\}_{n=0}^\infty$  sequência de números complexos associada a uma medida  $\mu$  no círculo unitário; veja (1.30)
- $\phi_n = \phi_n^{(\mu)} = \phi_n(\mu; \cdot)$  polinômios ortogonais no círculo unitário com relação a uma medida  $\mu$ ; veja Definição 1.5 e (1.10)

$\phi_n^*(z)$	polinômio recíproco de $\phi_n(z)$ , $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$ ; veja (1.15)
$\phi_n^*(\mu; \cdot)$	polinômio recíproco de $\phi_n(\mu; \cdot)$
$\varphi_n$	polinômios ortonormais no círculo unitário; veja (1.11)
$\omega_0$	medida (de probabilidade) de Lebesgue, $d\omega_0(z) = (2\pi iz)^{-1} dz$ , $z \in \mathbb{T}$

### Alfabeto Romano

$\{a_n\}_{n=1}^\infty$	sequência encadeada positiva; veja Definição 1.7
$\arg z$	argumento do número complexo $z$
$A \setminus B$	diferença entre os conjuntos $A$ e $B$ , isto é, $x \in A \setminus B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \notin B$
$A(d_2, d_3, \dots, d_n)$	matriz $n \times n$ associada à sequência encadeada positiva $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ ; veja (4.34)
$b_n$	$1 - 2m_n$ ; veja Seção 3.1
$B_j$	<i>band</i> associada a uma medida em $V_p$ ; veja (1.22)
$\mathcal{B}_j$	<i>band</i> associada a uma medida em $N_p$ ; veja Teorema 4.6
$\{c_n\}_{n=1}^\infty$	sequência de números reais
$\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$	$= \left\{ \{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty \right\}$ par de sequências reais associado a uma medida $\mu$ no círculo unitário; veja Teorema 1.14
$\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$	$= \left\{ \{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty \right\}$ par de sequências reais associado a uma medida $\mu$ no círculo unitário; veja Teorema 1.14
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$	arcos fechados de $\mathbb{T}$ ; veja (2.9) e (2.10)
$\{d_n\}_{n=1}^\infty$	sequência encadeada positiva; veja Definição 1.7 e Teorema 1.14
$d\mu_{ac}(\theta)$	parte absolutamente contínua da medida $\mu$ , isto é, se $d\mu = w \frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s$ , então $d\mu_{ac} = w \frac{d\theta}{2\pi}$ ; veja Seção 1.2
$d\mu_s(\theta)$	parte singular da medida $\mu$ , $d\mu_s = d\mu - d\mu_{ac}$ ; veja Seção 1.2
$D$	métrica sobre $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ ; veja (4.2)
$\{g_n\}_{n=0}^\infty$	sequência de parâmetros para uma sequência encadeada positiva; veja Definição 1.7

$\text{graf}(f)$	gráfico de uma função $f : A \rightarrow B$ , $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$
$G_j$	<i>gap</i> associado a uma medida em $V_p$ ; veja Subseção 1.2.2
$H_n$	determinante de Hankel de ordem $n + 1$ ; veja Seção 1.1
$\text{Im}(z)$	parte imaginária de um número complexo $z$
$\ell$	polinômio de Laurent; veja Seção 1.2
$\mathcal{L}$	funcional linear; veja (1.6)
$\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$	sequência minimal de parâmetros para uma sequência encadeada positiva; veja Definição 1.8
$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$	sequência maximal de parâmetros para uma sequência encadeada positiva; veja Definição 1.9
$\mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$	conjunto de medidas em $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ ; veja Seção 4.5
$N_p$	espaço das medidas de probabilidades não triviais no círculo unitário tais que as sequências dos respectivos pares associados $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ são periódicas com período $p$ ; veja (4.1)
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
$P_n^{(\psi)}$	polinômios ortogonais com relação a uma medida $\psi$ no intervalo $(a, b)$ ; veja Definição 1.3
$\mathcal{P}(\mathbb{T})$	espaço das medidas de probabilidades não triviais com suporte em $\mathbb{T}$
$R_n(z)$	polinômios associados a uma medida no círculo unitário; veja (1.28) e (1.29)
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^{\ell}$	conjunto das $\ell$ -uplas ordenadas de números reais
$\text{Re}(z)$	parte real de um número complexo $z$
$\text{sgn}(f(a))$	senal de uma função $f$ num ponto $a$ de seu domínio
$\text{supp}(\psi)$	suporte da função $\psi$ ; veja Definição 1.1 e Seção 1.2
$S$	espaço das medidas simétricas em $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ ; veja Definição 1.11
$T_n$	matriz de Toeplitz; veja Seção 1.2
$\mathbb{T}$	círculo unitário, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} :  z  = 1\}$
$\mathcal{T}_n$	polinômios de Chebyshev de primeira espécie; veja Exemplo 1.1

$U_p$	espaço das medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que suas correspondentes sequências de coeficientes de Verblunsky são periódicas “a menos de uma fase”; veja Observação 4.3
$V_p$	espaço das medidas de probabilidades não triviais no círculo unitário tais que as respectivas sequências de coeficientes de Verblunsky são periódicas com período $p$ ; veja (1.19)
$w(\theta)$	função peso associada a uma medida $\mu$ sobre $\mathbb{T}$ ; veja Seção 1.2
$\mathcal{W}_n(x)$	funções, definidas no intervalo $[-1, 1]$ , associadas aos polinômios $R_n(z)$ ; veja (1.32) e (1.33)
$\lfloor x \rfloor$	maior inteiro menor ou igual a $x$
$x_{n,j}$	zeros das funções $\mathcal{W}_n(x)$ , no intervalo $(-1, 1)$ , tais que $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$ , $\theta_{n,j} \in (0, 2\pi)$
$x_{n,j}^{(c)}$	zeros das funções $\mathcal{W}_n(x)$ quando $c_n = c$ , $n \geq 1$ ; veja Subseção 4.4.1
$\mathcal{X}_\ell$	subvariedade de $\mathbb{R}^\ell$ com dimensão $\ell - 1$ ; veja Seção 4.2 e (4.13)
$ z $	módulo do número complexo $z$
$\bar{z}$	conjugado do número complexo $z$
$z_j^+, z_j^-$	soluções da equação $ \Delta(z)  = 2$ ; veja Subseção 1.2.2
$z_{n,j}$	zeros dos polinômios $R_n(z)$ tais que $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ , $\theta_{n,j} \in [0, 2\pi]$
$z_{n,j}^{(c)}$	zeros dos polinômios $R_n(z)$ quando $c_n = c$ , $n \geq 1$ ; veja Subseção 4.4.1

### Não Alfabético

$\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$	produto interno associado a uma medida $\psi$ definida no intervalo $(a, b)$ ; veja Seção 1.1
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno associado a uma medida não trivial com suporte no círculo unitário; veja (1.7)
$\  \cdot \ $	norma associada a uma medida não trivial com suporte no círculo unitário; veja Seção 1.2
$\rightharpoonup$	convergência fraca
■	indica final de demonstração

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>24</b>
1.1 Polinômios ortogonais na reta real . . . . .	24
1.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário . . . . .	28
1.2.1 Polinômios para-ortogonais . . . . .	34
1.2.2 Coeficientes de Verblunsky periódicos: o espaço de medidas $V_p$ . . .	35
1.3 Sequências encadeadas positivas . . . . .	38
1.3.1 Polinômios ortogonais no círculo unitário via sequências encadeadas	41
<b>2 Estimativa para o Suporte de uma Classe de Medidas</b>	<b>47</b>
2.1 Resultados preliminares . . . . .	47
2.2 Estimativa relacionada a sequências de sinal alternante . . . . .	51
<b>3 Alguns Resultados Relacionados a Medidas em <math>V_p</math></b>	<b>55</b>
3.1 Caracterização em termos de um par de sequências reais . . . . .	55
3.1.1 Interpretação geométrica . . . . .	57
3.2 Uma nova abordagem para pontos puros de medidas em $V_p$ . . . . .	60
3.3 Um exemplo . . . . .	62
<b>4 O Espaço de Medidas <math>N_p</math></b>	<b>69</b>
4.1 Resultados preliminares . . . . .	70
4.2 Caracterização para medidas em $N_p \cap V_p$ . . . . .	76
4.3 Equivalência entre os espaços $N_p$ e $V_p$ . . . . .	79
4.4 Polinômios para-ortogonais associados . . . . .	83
4.4.1 Um caso especial . . . . .	87

4.5	O caso limite periódico . . . . .	90
4.6	Exemplos . . . . .	94
<b>Considerações Finais</b>		<b>101</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>103</b>
<b>A Resultados Auxiliares</b>		<b>107</b>

# Introdução

Uma função real  $\psi$ , definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , é chamada uma distribuição ou medida (positiva) em  $(a, b)$ , se  $\psi$  é limitada, não decrescente, com infinitos pontos de aumento e tal que as integrais de Stieltjes

$$\nu_k^{(\psi)} = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

existam.

Dizemos que uma sequência de polinômios  $\{P_n^{(\psi)}\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $\psi$  no intervalo  $(a, b)$ , se  $P_n^{(\psi)}$  é de grau exatamente  $n$  e

$$\langle P_m^{(\psi)}, P_n^{(\psi)} \rangle_{\psi} = \int_a^b P_m^{(\psi)}(x) P_n^{(\psi)}(x) d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \varrho_n^{(\psi)} \neq 0, & \text{para } m = n \end{cases}.$$

Os polinômios ortogonais satisfazem a muitas propriedades interessantes e são ferramentas essenciais para a solução de diversos problemas da Matemática Pura e Ciências Aplicadas. Por exemplo, os chamados polinômios ortogonais clássicos – polinômios de Jacobi, de Laguerre e de Hermite (com intervalos de ortogonalidade dados, respectivamente, por  $(a, b) = (-1, 1)$ ,  $(a, b) = (0, \infty)$  e  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ ), são soluções particulares da equação diferencial linear de segunda ordem (veja, por exemplo, [1, 27])

$$A(t)y'' + B(t)y' + \chi_n y = 0,$$

onde

$$\chi_n = -n \left[ \frac{1}{2}(n-1)A''(0) + B'(0) \right], \quad A(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & \text{para } (a, b) = (-1, 1) \\ t, & \text{para } (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & \text{para } (a, b) = (-\infty, \infty) \end{cases}$$

e  $B(t)$  é um polinômio de grau 1. Tal equação diferencial aparece em muitos modelos matemáticos em física atômica, eletrodinâmica e acústica.

Uma propriedade importante que podemos destacar dos polinômios ortogonais na reta real está relacionada aos seus zeros. Sabe-se que eles são todos reais, distintos e pertencentes ao intervalo de ortogonalidade  $(a, b)$  (veja, por exemplo, Chihara [12]). Em particular, os zeros desses polinômios são os nós das conhecidas Regras de Quadratura Gaussianas, que têm máximo grau de precisão algébrico. Outra propriedade fundamental, desses polinômios, é o fato que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Quando mônicos, esta relação é dada por

$$P_{n+1}^{(\psi)}(x) = (x - \beta_{n+1}^{(\psi)})P_n^{(\psi)}(x) - \gamma_{n+1}^{(\psi)}P_{n-1}^{(\psi)}(x), \quad n \geq 1,$$

com  $P_0^{(\psi)}(x) = 1$ ,  $P_1^{(\psi)}(x) = x - \beta_1^{(\psi)}$ ,  $\beta_n^{(\psi)} \in \mathbb{R}$  e  $\gamma_{n+1}^{(\psi)} > 0$ ,  $n \geq 1$ . Para mais informações sobre polinômios ortogonais na reta real, sugerimos os textos de Agarwal e Milovanović [1], Chihara [12], Gautschi [18], Geronimus [20], Ismail [24], Sri Ranga [37] e Szegő [38].

Seja  $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$  uma medida no círculo unitário  $\mathbb{T} = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . De acordo com a terminologia adotada em Simon [35], a medida  $\mu$  é dita não trivial se o seu suporte é um conjunto infinito e  $\mu$  é dita uma medida de probabilidade se  $\mu(\mathbb{T}) = 1$ .

Se  $\mu$  é uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário, podemos definir a sequência associada de polinômios ortogonais no círculo unitário,  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ , por

$$\int_{\mathbb{T}} \bar{z}^j \phi_n(z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} \phi_n(e^{i\theta}) d\mu(e^{i\theta}) = 0, \quad 0 \leq j \leq n-1, \quad n \geq 1,$$

onde  $\phi_n$  é um polinômio de grau exatamente  $n$ . Tomando  $\kappa_n^{-2} = \|\phi_n\|^2 = \int_{\mathbb{T}} |\phi_n(z)|^2 d\mu(z)$ , os polinômios ortonormais no círculo unitário são dados por  $\varphi_n(z) = \kappa_n \phi_n(z)$ ,  $n \geq 0$ .

Os polinômios ortogonais no círculo unitário (também conhecidos como polinômios de Szegő) foram introduzidos na primeira metade do século XX por Gabor Szegő. Nos últimos anos esses polinômios vêm recebendo muita atenção de diversos pesquisadores, principalmente em razão de suas aplicações em diversas áreas da Matemática. Regras de quadratura, processamento de sinais e teoria espectral são alguns dos muitos tópicos em que tais polinômios estão inseridos (veja, por exemplo, [9, 11, 14, 26, 28, 31, 34, 39]). Textos mais recentes sobre esses polinômios podem ser encontrados nos dois volumes de Simon [35, 36].

Os polinômios ortogonais no círculo unitário, mônicos, satisfazem a relação

$$\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1}\phi_{n-1}^*(z) \quad n \geq 1,$$

onde  $\alpha_{n-1} = -\overline{\phi_n(0)}$  e  $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$  denota o polinômio recíproco de  $\phi_n(z)$ .

Os números complexos  $\alpha_n$  são chamados de coeficientes de Verblunsky. Sabe-se que esses coeficientes são tais que  $|\alpha_n| < 1$  ( $n \geq 0$ ) e que, além disso, eles são suficientes para caracterizar completamente tanto os polinômios ortogonais como a medida a eles associada (veja, por exemplo, [35, Teorema 1.7.11]).

Dada uma sequência de polinômios ortogonais no círculo unitário  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ , podemos definir uma sequência de polinômios para-ortogonais no círculo unitário, associada à sequência  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ , da seguinte forma (veja, Jones et al. [25]):

$$z\phi_{n-1}(z) + \tilde{w}_n\phi_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1,$$

onde  $\{\tilde{w}_n\}_{n=0}^\infty$  é qualquer sequência de números complexos tais que  $|\tilde{w}_n| = 1$ .

Diferente dos polinômios ortogonais  $\phi_n$  que têm todos os seus  $n$  zeros dentro do disco unitário aberto, os polinômios para-ortogonais  $z\phi_{n-1}(z) + \tilde{w}_n\phi_{n-1}^*(z)$  têm todos os seus  $n$  zeros simples e no círculo unitário. Esta característica permite a utilização dos zeros destes polinômios para construção de fórmulas de quadratura no círculo unitário.

Segundo Chihara [12], uma sequência  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  é dita uma sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  tal que

$$0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \text{ para } n \geq 1, \quad \text{e} \quad a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \text{ para } n \geq 1.$$

A sequência  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada de sequência de parâmetros para a sequência encadeada positiva  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  e pode não ser única. Além disso, toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros minimal, denotada por  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ , obtida com  $m_0 = 0$ , e uma sequência de parâmetros maximal, denotada por  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$ , a qual é caracterizada pela condição que se  $g_0 > M_0$  então  $\{g_n\}_{n=1}^\infty$  gerada por  $g_n = a_n/(1 - g_{n-1})$ ,  $n \geq 1$ , não satisfaz  $0 < g_n < 1$ ,  $n \geq 1$ .

O uso da teoria de sequências encadeadas positivas para caracterização de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário teve grande destaque nos trabalhos de Castillo et al. [10] e Costa et al. [13]. Estes trabalhos terão um papel fundamental no decorrer desta tese.

Em Costa et al. [13] foi mostrado que dado um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, então correspondente a este par, existe uma única medida de probabilidade não trivial (digamos,  $\mu$ ) no círculo unitário e reciprocamente. Os resultados estabelecidos em [13] mostram que a sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  associada à medida  $\mu$  está diretamente relacionada

com as sequências reais  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ , onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de parâmetros minimal para a sequência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ . Desta forma, pode-se caracterizar uma medida  $\mu$ , no círculo unitário, tanto pela sequência de coeficientes de Verblunsky a ela associada como pelo seu respectivo par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  (ou  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ ).

A partir das sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  também é possível recuperar a medida de probabilidade, associada a estas sequências, usando certas funções racionais que seguem de polinômios que satisfazem a relação de recorrência de três termos

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , onde

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^n [1 - \rho_{j-1}\alpha_{j-1}]}{\prod_{j=1}^n [1 - \mathcal{R}e(\rho_{j-1}\alpha_{j-1})]} \frac{z\phi_n(z) - \rho_n\phi_n^*(z)}{z - 1}, \quad n \geq 0,$$

com  $\rho_n = \phi_n(1)/\phi_n^*(1)$ ,  $n \geq 0$ .

Em Castillo et al. [10], usando argumentos padrões envolvendo frações contínuas, expansões em séries, no infinito e na origem, e o Teorema da Seleção de Helly, os autores verificaram que a medida associada  $\mu$  é dada como o limite de uma subsequência de medidas discretas,  $\psi_n(e^{i\theta})$ , cujos pontos puros (aqueles diferente de  $z = 1$ ) são exatamente os zeros de  $R_n(z)$ .

Os resultados apresentados em [10] nos permitem dar informações sobre o suporte da medida  $\mu$  analisando os zeros  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , dos polinômios  $R_n(z)$ .

O primeiro objetivo desta tese é, justamente, obter uma estimativa para o suporte de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário associadas ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva qualquer e  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  tem uma propriedade de sinal alternante. Para isso, faremos uso daqueles resultados fornecidos em [10].

Existem muitos trabalhos na teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário que estudam medidas de probabilidade cujas sequências associadas de coeficientes de Verblunsky são  $p$ -periódicas, isto é,  $\alpha_{n+p} = \alpha_n$ ,  $n \geq 0$  e  $p \in \mathbb{N}$ . Resultados sobre o suporte essencial, função peso e possíveis pontos puros de tais medidas (bem como o tamanho da massa, quando existem) são completamente conhecidos. Por exemplo, os possíveis pontos puros dessas medidas são soluções da equação  $\phi_p(z) - \phi_p^*(z) = 0$  (veja [36, Capítulo 11]).

Denotaremos por  $V_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , o espaço de todas as medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que as respectivas sequências de coeficientes de Verblunsky são  $p$ -periódicas, ou seja,

$$\tilde{\mu} \in V_p \quad \text{se, e somente se,} \quad \alpha_{n+p}^{(\tilde{\mu})} = \alpha_n^{(\tilde{\mu})}, \quad n \geq 0.$$

Com esta notação, um outro objetivo da nossa pesquisa é estudar medidas em  $V_p$  obtidas por meio do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  possuem algumas restrições de sinal e periodicidade.

Um fato importante é que podemos ter uma medida,  $\tilde{\mu}$ , cuja sequência associada de coeficientes de Verblunsky é  $p$ -periódica (isto é,  $\tilde{\mu} \in V_p$ ) e tal que as sequências reais associadas,  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ , não são periódicas (veja, por exemplo, [15]). Por esta razão, introduzimos a notação  $N_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , para o espaço de todas as medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que as sequências dos respectivos pares associados  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$  são periódicas com período  $p$ , isto é,

$$\mu \in N_p \quad \text{se, e somente se,} \quad c_{n+p}^{(\mu)} = c_n^{(\mu)} \quad \text{e} \quad m_{n+p}^{(\mu)} = m_n^{(\mu)}, \quad n \geq 1.$$

Uma vez que o espaço  $V_p$  já é bem conhecido (veja, por exemplo, Simon [36]), existem muitas perguntas naturais sobre esse novo espaço  $N_p$ . Por exemplo, qual é o comportamento das medidas de probabilidade pertencentes ao espaço  $N_p$ ? Existem medidas em  $N_p \cap V_p$ ? Como escolher o par associado de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$  a fim de obter medidas em  $N_p \cap V_p$ ? Quais são as relações existentes entre os espaços  $N_p$  e  $V_p$ ? E sobre o comportamento das medidas tais que as sequências reais associadas  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  são limite  $p$ -periódicas, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{np+k} = l_k$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{np+k} = \tilde{l}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , o que podemos dizer?

Outro objetivo deste trabalho é, portanto, estudar esse novo espaço de medidas  $N_p$  e fornecer respostas aos questionamentos anteriores e a outras questões relacionadas.

Os resultados estabelecidos nesta tese estão distribuídos em quatro capítulos, como segue.

No Capítulo 1, introduzimos alguns conceitos e resultados preliminares da teoria de polinômios ortogonais na reta real e no círculo unitário (bem como das medidas associadas), polinômios para-ortogonais no círculo unitário, além do conceito e algumas propriedades de sequências encadeadas positivas. Nesse capítulo apresentamos, ainda, alguns resultados importantes, estabelecidos em Castillo et al. [10] e Costa et al. [13], que

conectam a teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário com a teoria de seqüências encadeadas positivas. Estes últimos resultados, como mencionado anteriormente, serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

O Capítulo 2 é dedicado a busca de uma estimativa para o suporte de uma classe de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário. Precisamente, usamos informações sobre os zeros de certos polinômios para-ortogonais no círculo unitário (no caso, os zeros dos polinômios  $R_n(z)$ ) para estimar o suporte daquelas medidas cujas seqüências  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  (dos pares associados de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ ) têm uma propriedade de sinal alternante, isto é,  $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$ , para  $n \geq 1$ , com  $\{\tilde{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência positiva (ou negativa) de números reais. Os resultados aqui apresentados são novos e estão organizados no artigo [7], em coautoria com Bracciali, Sri Ranga e Veronese, aceito para publicação na revista *Computational and Applied Mathematics* e disponível no modo *online first*.

No Capítulo 3, fornecemos alguns novos resultados relacionados a medidas em  $V_p$  com o uso da teoria de seqüências encadeadas positivas. Especificamente, utilizamos resultados encontrados em Costa et al. [13] para estabelecer uma caracterização de medidas pertencentes ao espaço  $V_p$  em termos de um par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma seqüência encadeada positiva. Além disso, considerando a seqüência de parâmetros minimal  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$  da seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ , vamos impor uma restrição de sinal sobre a seqüência  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e uma  $p$ -periodicidade sobre as seqüências  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$  para gerar medidas em  $V_p$ . Estas restrições (que nos levam a medidas no espaço  $V_p$ ) têm uma interpretação geométrica que será aqui estabelecida. Algumas informações sobre pontos puros de medidas em  $V_p$ , com o uso de seqüências encadeadas positivas, também serão apresentadas. Por fim, um exemplo será construído para ilustrar os principais resultados obtidos neste capítulo. Todos esses resultados também podem ser encontrados no artigo [7].

Finalmente, no Capítulo 4, deste trabalho, estudamos o espaço de medidas  $N_p$ , isto é, o espaço das medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que as seqüências dos respectivos pares associados  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  são periódicas com período  $p \in \mathbb{N}$ . Observamos que existe um homeomorfismo entre os espaços  $N_p$  e  $V_p$  tal que o conjunto dos seus pontos fixos é exatamente  $N_p \cap V_p$ , que é caracterizado por uma subvariedade de  $\mathbb{R}^p$  de dimensão  $p - 1$ . Considerando  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  o espaço de todas as medidas

de probabilidade não triviais no círculo unitário, definimos uma relação de equivalência sobre  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  e mostramos que os espaços  $N_p$  e  $V_p$  são “equivalentes por rotação”. Para ser preciso, provamos que dada qualquer medida de probabilidade  $\mu$  em  $N_p$  (exceto a medida de Lebesgue) existem exatamente  $p$  medidas em  $V_p$  que são equivalentes a  $\mu$  por rotação. Reciprocamente, dada qualquer medida  $\tilde{\mu}$  em  $V_p$  (exceto a medida de Lebesgue) provamos que existem exatamente  $p$  medidas em  $N_p$  que são equivalentes a  $\tilde{\mu}$  por rotação. Na Seção 4.4, estabelecemos alguns resultados referentes a polinômios para-ortogonais associados a medidas em  $N_p$ . Por exemplo, mostramos que os possíveis pontos puros de medidas em  $N_p$  são, exatamente, os zeros de certos polinômios para-ortogonais (de grau  $p$ ) associados a estas medidas. Na Seção 4.5, fornecemos informações sobre o suporte essencial das medidas associadas ao par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ , no caso em que as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  são limite  $p$ -periódicas, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_{np+k} = l_k$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{np+k} = \tilde{l}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . A Seção 4.6 é constituída por alguns exemplos que são úteis para discussão dos principais resultados estabelecidos neste capítulo. O estudo deste novo espaço de medidas  $N_p$  foi proposto no artigo [8], publicado em 2017 na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, novamente em colaboração com Bracciali, Sri Ranga e Veronese. Ressaltamos também que um dos exemplos apresentados na Seção 4.6 é consequência de um trabalho publicado em 2015 na revista *Applied Mathematics and Computation* em coautoria com Bracciali e Sri Ranga (veja [6]).

Visando tornar o texto mais autossuficiente possível, no Apêndice A, apresentamos alguns resultados auxiliares (da teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário) necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentamos de maneira objetiva os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Os resultados serão expostos sem demonstrações e as principais referências aqui utilizadas são: Castillo et al. [10], Chihara [12], Costa et al. [13], Ismail [24], Jones et al. [25], Simon [35, 36] e Szegő [38].

### 1.1 Polinômios ortogonais na reta real

Antes de falarmos sobre polinômios ortogonais no círculo unitário e respectivas medidas de probabilidade, que estão relacionados com os principais objetos de estudo deste trabalho, apresentamos, nesta seção, algumas definições e resultados sobre polinômios ortogonais na reta real, apenas o suficiente para a boa compreensão das próximas seções. Para mais detalhes sugerimos, por exemplo, os textos de Chihara [12], Ismail [24] e Szegő [38].

**Definição 1.1.** *Seja  $\psi$  uma função real, não decrescente e definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Chamamos de ponto de aumento de  $\psi$  qualquer ponto  $\xi \in (a, b)$  tal que  $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$  para todo  $\epsilon > 0$ . Em particular, o conjunto de pontos*

$$\text{supp}(\psi) = \{\xi \in (a, b) \mid \psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\}$$

*é chamado de suporte de  $\psi$ .*

Uma expressão do tipo

$$\int_a^b f(x) d\psi(x)$$

é conhecida como *integral de Riemann-Stieltjes* ou, simplesmente, *integral de Stieltjes* da função  $f$  com respeito a  $\psi$ . A função  $\psi$  é real, não decrescente, definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , e tem seus pontos de aumento contidos em  $(a, b)$ . Para a definição formal e outras propriedades da integral de Stieltjes veja, por exemplo, [3, 23, 33].

**Definição 1.2.** *Seja  $\psi$  uma função definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento, tal que as integrais de Stieltjes*

$$\nu_k^{(\psi)} = \int_a^b x^k d\psi(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

*existam. Então, dizemos que  $\psi$  é uma distribuição ou medida (positiva) em  $(a, b)$ .*

Os valores  $\nu_k^{(\psi)}$  são chamados de *momentos* da medida  $\psi$ . Quando o intervalo  $[a, b]$  é limitado os momentos  $\nu_k^{(\psi)}$  sempre existem, o que nem sempre ocorre se  $[a, b]$  é ilimitado. Se  $\nu_0^{(\psi)} = 1$ , a medida  $\psi$  é chamada de *medida de probabilidade*. Além disso, se os momentos  $\nu_k^{(\psi)}$  existem para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , dizemos que  $\psi$  é uma *medida forte* em  $(a, b)$ . Se a medida  $\psi$  estiver clara no contexto, seus momentos,  $\nu_k^{(\psi)}$ , serão denotados simplesmente por  $\nu_k$ . Outras informações sobre teoria da medida podem ser encontradas em [4] (veja também [32]).

Quando a função  $\psi$  é *absolutamente contínua*, podemos escrever  $d\psi(x) = w(x)dx$ , onde  $w$  é uma função não negativa e não identicamente nula. Neste caso, chamamos  $w$  de *função peso*. Além disso, se a medida  $\psi$  é definida em um intervalo  $(-a, a)$ ,  $0 < a \leq \infty$ , e satisfaz  $d\psi(x) = -d\psi(-x)$ , dizemos que  $\psi$  é uma *medida simétrica*.

A condição de que a medida  $\psi$  tem infinitos pontos de aumento (isto é, seu suporte é um conjunto infinito), garante que  $\psi$  é uma *medida não trivial* e que

$$\int_a^b p(x) d\psi(x) > 0,$$

para qualquer polinômio  $p(x) \geq 0$ , mas não identicamente nulo em  $(a, b)$ . Logo, podemos definir o *produto interno*  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$  da seguinte forma:

$$\langle p, q \rangle_\psi = \int_a^b p(x)q(x) d\psi(x),$$

onde  $p$  e  $q$  são polinômios definidos no intervalo  $(a, b)$ .

Passemos agora a definição de *sequência de polinômios ortogonais* com relação a uma medida  $\psi$  definida em um intervalo  $(a, b)$ .

**Definição 1.3.** Uma sequência de polinômios  $\{P_n^{(\psi)}\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $\psi$  no intervalo  $(a, b)$ , se  $P_n^{(\psi)}$  é de grau exatamente  $n$  e

$$\langle P_m^{(\psi)}, P_n^{(\psi)} \rangle_{\psi} = \int_a^b P_m^{(\psi)}(x)P_n^{(\psi)}(x)d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \varrho_n^{(\psi)} \neq 0, & \text{para } m = n \end{cases}. \quad (1.1)$$

Usando o delta de Kronecker  $\delta_{m,n}$ , definido por

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases}, \quad (1.2)$$

podemos reescrever a definição anterior como

$$\langle P_m^{(\psi)}, P_n^{(\psi)} \rangle_{\psi} = \int_a^b P_m^{(\psi)}(x)P_n^{(\psi)}(x)d\psi(x) = \varrho_n^{(\psi)}\delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Além disso, se  $\varrho_n^{(\psi)} = 1$ ,  $n \geq 0$ , a sequência  $\{P_n^{(\psi)}\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada de sequência de polinômios ortonormais com relação a  $\psi$ .

Note que, sob as condições da Definição 1.3, a sequência  $\{P_n^{(\psi)}\}_{n=0}^m$  forma uma base para o subespaço vetorial dos polinômios de grau no máximo  $m$ . Assim, se  $Q_m$  é um polinômio qualquer de grau exatamente  $m$ , então escrevendo  $Q_m$  como combinação linear dos polinômios ortogonais  $P_n^{(\psi)}$  e utilizando a relação de ortogonalidade dada em (1.1), temos

$$\langle Q_m, P_n^{(\psi)} \rangle_{\psi} = \int_a^b Q_m(x)P_n^{(\psi)}(x)d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m < n \\ q_{m,n}\varrho_n^{(\psi)} \neq 0, & \text{para } m = n \end{cases},$$

onde  $q_{m,m}$  é o coeficiente do termo de maior grau de  $Q_m$  (neste caso, estamos considerando os polinômios  $P_n^{(\psi)}$ ,  $n \geq 0$ , *mônicos*, isto é, com seus respectivos coeficientes dos termos de maior grau iguais a 1). Além disso, pode-se mostrar que uma condição necessária e suficiente para a existência de uma sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida  $\psi$  é que os *determinantes de Hankel*,  $H_n$ , de ordem  $n + 1$ ,

$$H_n = \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_1 & \dots & \nu_n \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n+1} & \dots & \nu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0,$$

sejam todos não nulos.

Os polinômios ortogonais  $P_n^{(\psi)}$  satisfazem uma relação de recorrência de três termos. Quando mônicos, essa relação é dada por

$$P_{n+1}^{(\psi)}(x) = (x - \beta_{n+1}^{(\psi)})P_n^{(\psi)}(x) - \gamma_{n+1}^{(\psi)}P_{n-1}^{(\psi)}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.3)$$

com  $P_0^{(\psi)}(x) = 1$ ,  $P_1^{(\psi)}(x) = x - \beta_1^{(\psi)}$  e os coeficientes  $\gamma_{n+1}^{(\psi)}$  e  $\beta_{n+1}^{(\psi)}$  tais que

$$\gamma_{n+1}^{(\psi)} = \frac{\varrho_n^{(\psi)}}{\varrho_{n-1}^{(\psi)}}, \quad n \geq 1, \quad \text{e} \quad \beta_{n+1}^{(\psi)} = \frac{\langle xP_n^{(\psi)}, P_n^{(\psi)} \rangle_\psi}{\varrho_n^{(\psi)}}, \quad n \geq 0,$$

onde

$$\varrho_n^{(\psi)} = \int_a^b [P_n^{(\psi)}(x)]^2 d\psi(x) = \gamma_{n+1}^{(\psi)}\gamma_n^{(\psi)} \dots \gamma_3^{(\psi)}\gamma_2^{(\psi)}\nu_0^{(\psi)}, \quad n \geq 1.$$

A recíproca desse resultado também é verdadeira e é conhecida na literatura como Teorema de Favard.

**Teorema 1.1.** (Favard) *Sejam  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$  seqüências de números reais arbitrários, com  $\beta_n \in \mathbb{R}$  e  $\gamma_{n+1} > 0$  para  $n \geq 1$ , e seja  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma seqüência de polinômios mônicos satisfazendo a relação de recorrência de três termos*

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \gamma_n P_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots,$$

com  $P_0(x) = 1$  e  $P_1(x) = x - \beta_1$ . Então, existe uma medida  $\psi$  com relação à qual a seqüência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é ortogonal.

Uma outra importante propriedade satisfeita pelos polinômios ortogonais  $P_n^{(\psi)}$  é que seus zeros são reais, distintos e pertencem ao intervalo  $(a, b)$ . Além disso, se denotarmos por  $\chi_{n,1}, \chi_{n,2}, \dots, \chi_{n,n}$  os zeros de  $P_n^{(\psi)}$ ,  $n \geq 1$ , em ordem crescente, então

$$\chi_{n+1,1} < \chi_{n,1} < \chi_{n+1,2} < \chi_{n,2} < \dots < \chi_{n+1,n} < \chi_{n,n} < \chi_{n+1,n+1}.$$

Ou seja, entre dois zeros consecutivos do polinômio  $P_{n+1}^{(\psi)}$  existe um único zero de  $P_n^{(\psi)}$ . Neste caso, dizemos que os zeros de  $P_n^{(\psi)}$  e  $P_{n+1}^{(\psi)}$  se *entrelaçam*.

Um exemplo bem conhecido e estudado de polinômios ortogonais na reta real são os *polinômios de Chebyshev* de primeira espécie, conhecidos em diversas literaturas como uma das seqüências de *polinômios ortogonais clássicos* (veja, por exemplo, [1]).

**Exemplo 1.1.** *Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie,  $\mathcal{T}_n$ , são ortogonais com relação à medida  $d\psi(x) = 1/\sqrt{1-x^2} dx$  no intervalo  $(-1, 1)$  e podem ser dados por*

$$\mathcal{T}_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Tomando  $x = \cos \theta$ , com  $\theta \in (0, \pi)$ , podemos escrever  $\mathcal{T}_n(x) = \cos(n\theta)$ ,  $n \geq 0$ , e, usando relações trigonométricas, mostra-se facilmente que

$$\mathcal{T}_{n+1}(x) = 2x\mathcal{T}_n(x) - \mathcal{T}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com  $\mathcal{T}_0(x) = 1$  e  $\mathcal{T}_1(x) = x$ . Por outro lado, utilizando indução finita em  $n$ , verificamos que o coeficiente do termo de maior grau do polinômio  $\mathcal{T}_n$ ,  $n \geq 1$ , é  $2^{n-1}$ . Além disso, pode-se mostrar que os zeros desses polinômios são dados por

$$\chi_{n,j} = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

e que tais polinômios satisfazem

$$\langle \mathcal{T}_n, \mathcal{T}_m \rangle_\psi = \int_{-1}^1 \mathcal{T}_n(x)\mathcal{T}_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n \neq 0, \\ \pi, & \text{se } m = n = 0. \end{cases}$$

## 1.2 Polinômios ortogonais no círculo unitário

Nesta seção, apresentamos algumas definições e resultados bem conhecidos, referentes a teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário (e medidas associadas), que podem ser encontrados, por exemplo, em Ismail [24], Simon [35, 36] e Szegő [38].

Seja  $\mu$  uma medida positiva no círculo unitário

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

parametrizado por  $z = e^{i\theta}$ , ou seja,  $\mu(e^{i\theta})$ , definida em  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , é uma função real, limitada e não decrescente, com infinitos pontos de aumento em  $\mathbb{T}$ , onde os momentos (trigonométricos) são dados por

$$\nu_m = \int_{\mathbb{T}} z^{-m} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\mu(e^{i\theta}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.4)$$

ou, equivalentemente,

$$\nu_m = \int_{\mathbb{T}} z^{-m} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\tilde{\mu}(\theta), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

uma vez que a medida  $\mu(e^{i\theta})$  induz uma outra medida positiva  $\tilde{\mu}(\theta)$ , com suporte em  $[0, 2\pi]$ , que chamaremos, simplesmente, de  $\mu(\theta)$  (esta notação será adotada algumas vezes neste trabalho).

Dizemos que  $z_0 \in \mathbb{T}$  é um *ponto puro* (ou *ponto de massa*) de  $\mu$ , se a medida desse ponto é positiva, isto é,  $\mu(\{z_0\}) > 0$ . Um ponto puro,  $z_0$ , é chamado *isolado* (ou *discreto*) se, e somente se, existe um conjunto aberto,  $A$ , em torno de  $z_0$ , tal que  $\mu(A \setminus \{z_0\}) = 0$ .

O *suporte essencial* de  $\mu$ , denotado por  $\sigma_{ess}(\mu)$ , é definido por

$$\sigma_{ess}(\mu) = \{z \in \text{supp}(\mu) : z \text{ não é um ponto puro isolado}\}, \quad (1.5)$$

onde  $\text{supp}(\mu)$  denota o suporte da medida  $\mu$ . Equivalentemente,  $z_0 \in \sigma_{ess}(\mu)$  se, e somente se, para qualquer conjunto aberto  $A$  em torno de  $z_0$ ,  $A \cap \sigma_{ess}(\mu)$  é um conjunto infinito.

Por uma combinação dos teoremas de Radon-Nikodym e da decomposição de Lebesgue (veja [4]), qualquer medida  $\mu$ , sobre  $\mathbb{T}$ , pode ser decomposta, unicamente, da seguinte maneira:

$$d\mu(\theta) = w(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s(\theta),$$

onde  $d\mu_s(\theta)$  é singular em relação a  $d\theta/2\pi$  e  $w \in L^1(\mathbb{T}, d\theta/2\pi)$ . Neste caso,  $d\mu_{ac}(\theta) = w(\theta)d\theta/2\pi$  e  $d\mu_s(\theta)$ , são chamadas, respectivamente, *parte absolutamente contínua* e *parte singular* da medida  $\mu$ . Além disso,  $w$  é chamada *função peso*.

Agora, usando a medida  $\mu$ , podemos definir o funcional linear

$$\mathcal{L}[z^m] = \int_{\mathbb{T}} z^m d\mu(z) = \nu_{-m}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.6)$$

sobre o espaço dos *polinômios de Laurent*, isto é, funções definidas em  $\mathbb{C}$  da forma

$$\ell(z) = \sum_{k=i}^j c_k z^k, \quad c_k \in \mathbb{C},$$

onde  $i$  e  $j$  são números inteiros tais que  $i \leq j$ . Claramente, temos

$$\mathcal{L}[\ell] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=i}^j c_k z^k\right] = \sum_{k=i}^j c_k \nu_{-k},$$

para qualquer polinômio de Laurent  $\ell$ .

Uma vez que a medida  $\mu$  é não trivial, isto é,  $\mu$  tem infinitos pontos de aumento no intervalo  $[0, 2\pi]$  (veja Definição 1.1), temos

$$\mathcal{L}[p] = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta}) d\mu(\theta) > 0,$$

para qualquer polinômio  $p(e^{i\theta}) \geq 0$ , com  $p(e^{i\theta}) \not\equiv 0$  em  $[0, 2\pi]$ . Assim, utilizando  $\mathcal{L}$ , podemos definir o produto interno,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , por

$$\langle p, q \rangle = \mathcal{L}[p(z)\overline{q(z)}] = \int_{\mathbb{T}} p(z)\overline{q(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} p(e^{i\theta})\overline{q(e^{i\theta})} d\mu(\theta), \quad (1.7)$$

onde  $p$  e  $q$  são polinômios definidos no círculo unitário. Além disso, usando (1.6) e o produto interno definido em (1.7), para todo polinômio  $\pi(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$  (com  $c_j \in \mathbb{C}$  e  $c_n \neq 0$ ) de grau  $n$ ,  $n \geq 0$ , a norma  $\|\cdot\|$  de  $\pi$ , é dada por

$$\|\pi\| = \left( \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \bar{c}_j c_k \nu_{j-k} \right)^{1/2}.$$

Considerando a sequência de momentos  $\{\nu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ , podemos definir, para  $n \geq 0$ , a matriz

$$T_n = \begin{pmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{pmatrix}$$

conhecida como *matriz de Toeplitz* associada à sequência  $\{\nu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ , cujo determinante,  $\Delta_n$ , chamado *determinante de Toeplitz*, é dado por

$$\Delta_{-1} = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_n & \nu_{n-1} & \cdots & \nu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0. \quad (1.8)$$

Observe que, de (1.4), temos

$$\bar{\nu}_{-n} = \int_0^{2\pi} \overline{e^{in\theta}} d\mu(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu(e^{i\theta}) = \nu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Consequentemente, a matriz  $T_n$  é *hermitiana*, isto é,  $T_n = \overline{T_n^t}$ .

A correspondente forma hermitiana

$$\mathcal{H}_n := \sum_{j,k=0}^n \nu_{j-k} \bar{c}_j c_k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n \nu_{j-k} \bar{c}_j c_k = \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=0}^n c_j z^j \right|^2 d\mu(\theta),$$

onde  $z = e^{i\theta}$  e  $c_j \in \mathbb{C}$ , é *positiva definida*, pois  $\mu$  é uma medida positiva não trivial. Logo,  $\Delta_n > 0$  para  $n \geq 0$ .

**Definição 1.4.** Dizemos que um funcional linear  $\mathcal{M}$ , onde  $\nu_m = \mathcal{M}[z^{-m}]$ , é *positivo definido* se  $\Delta_n > 0$ ,  $n \geq 0$ , e *quase definido* se  $\Delta_n \neq 0$ ,  $n \geq 0$ .

Usando a definição anterior, podemos concluir que o funcional  $\mathcal{L}$ , definido em (1.6), é um funcional linear positivo definido.

Podemos, agora, definir sequência de polinômios ortogonais com relação a uma medida  $\mu$  com suporte em  $\mathbb{T}$ , ou seja, sequência de *polinômios ortogonais no círculo unitário* (também conhecidos como *polinômios de Szegő*).

**Definição 1.5.** *Seja  $\mathcal{L}$  um funcional linear positivo definido (quase definido). Uma sequência de polinômios  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação a  $\mathcal{L}$ , se*

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \mathcal{L} \left[ \phi_n(z) \overline{\phi_m(z)} \right] = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \kappa_n^{-2} \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (1.9)$$

**Observação 1.1.** *Neste trabalho, vamos considerar apenas os polinômios  $\phi_n$  mônicos, isto é, com os coeficientes dos termos de maior grau iguais a 1.*

Se  $\mu$  é uma medida positiva com suporte em  $\mathbb{T}$ , usando (1.2), (1.7) e considerando a relação (1.9), podemos reescrever a definição de polinômios ortogonais no círculo unitário, com relação a  $\mu$ , da seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{T}} \phi_n(z) \overline{\phi_m(z)} d\mu(z) = \int_0^{2\pi} \phi_n(e^{i\theta}) \overline{\phi_m(e^{i\theta})} d\mu(e^{i\theta}) = \kappa_n^{-2} \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, \dots \quad (1.10)$$

Como  $\kappa_n^{-2} = \int_{\mathbb{T}} |\phi_n(z)|^2 d\mu(z) = \|\phi_n\|^2$ , então  $\kappa_n > 0$  e os *polinômios ortonormais no círculo unitário* são dados por

$$\varphi_n(z) = \kappa_n \phi_n(z), \quad n \geq 0. \quad (1.11)$$

Note que, sendo o funcional de momento  $\mathcal{L}$  (definido em (1.6) a partir da medida não trivial  $\mu$ ) positivo definido, podemos construir os polinômios ortonormais, com respeito a  $\mu$ , por meio do processo de Gram-Schmidt. Esses polinômios são de grau exatamente  $n$  e podem ser dados por

$$\varphi_0(z) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n+1} & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+2} & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_0 & \nu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \quad (1.12)$$

onde  $\Delta_n$  é dado em (1.8) e o coeficiente do termo de maior grau  $\kappa_n$  de  $\varphi_n$  é tal que

$$\kappa_n = \sqrt{\Delta_{n-1}/\Delta_n}.$$

De (1.12), temos que os polinômios ortogonais mônicos,  $\phi_n(z) = \frac{1}{\kappa_n} \varphi_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , são tais que

$$\phi_0(z) = 1 \quad \text{e} \quad \phi_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n+1} & \nu_{-n} \\ \nu_1 & \nu_0 & \cdots & \nu_{-n+2} & \nu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_0 & \nu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (1.13)$$

A relação (1.13) mostra a existência e unicidade dos polinômios de Szegő na forma mônica, já que  $\Delta_{n-1} \neq 0$ , e também é uma forma de se obter esses polinômios.

Como no caso dos polinômios ortogonais na reta real, usando (1.9), podemos mostrar a seguinte equivalência para a definição dos polinômios de Szegő:

$$\langle \phi_n, \pi_m \rangle = \mathcal{L} \left[ \phi_n(z) \overline{\pi_m(z)} \right] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \hat{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = n, \end{cases} \quad (1.14)$$

onde  $\pi_m$  é qualquer polinômio de grau  $m \leq n$ .

Diferente dos polinômios ortogonais na reta real, os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem uma relação de recorrência de três termos do tipo (1.3). Entretanto, os polinômios mônicos de Szegő satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \phi_n(z) &= z\phi_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} \phi_{n-1}^*(z), \\ \phi_n(z) &= (1 - |\alpha_{n-1}|^2)z\phi_{n-1}(z) - \bar{\alpha}_{n-1} \phi_n^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (1.15)$$

onde  $\alpha_{n-1} = -\overline{\phi_n(0)}$  e  $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$  denota o *polinômio recíproco* de  $\phi_n(z)$ .

Os números  $\alpha_n$ ,  $n \geq 0$ , são conhecidos na literatura como *coeficientes de Verblunsky* (*reflexão, Schur, Szegő* ou *Geronimus*) e serão extremamente utilizados neste trabalho. Pode-se mostrar que esses coeficientes satisfazem

$$|\alpha_n| < 1 \quad \text{e} \quad \nu_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 - |\alpha_k|^2) = \kappa_n^{-2} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}, \quad n \geq 0. \quad (1.16)$$

Além disso, usando a relação dada em (1.13), obtemos

$$\bar{\alpha}_n = \frac{(-1)^n}{\Delta_n} \begin{vmatrix} \nu_{-1} & \nu_{-2} & \cdots & \nu_{-n} & \nu_{-n-1} \\ \nu_0 & \nu_{-1} & \cdots & \nu_{-n+1} & \nu_{-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \nu_{n-2} & \nu_{n-3} & \cdots & \nu_{-1} & \nu_{-2} \\ \nu_{n-1} & \nu_{n-2} & \cdots & \nu_0 & \nu_{-1} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0.$$

Agora, podemos afirmar que dada uma medida de probabilidade não trivial  $\mu$ , com suporte no círculo unitário, então, associada a esta medida, existe uma única sequência de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  tais que  $|\alpha_n| < 1$ ,  $n \geq 0$ . Um dos resultados famosos na teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário, conhecido como Teorema de Verblunsky (também chamado “Teorema de Favard para o círculo”), fornece uma recíproca para este fato. O mesmo garante que esses polinômios, assim como as respectivas medidas associadas, são completamente caracterizados pela sequência de coeficientes  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  a eles associada.

**Teorema 1.2.** (Verblunsky) *Seja  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência arbitrária de números complexos, onde  $|\alpha_n| < 1$ ,  $n \geq 0$ . Então, associada a esta sequência, existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$ , com suporte no círculo unitário, tal que os polinômios  $\phi_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , gerados por (1.15), são os respectivos polinômios de Szegő mônicos.*

Em [35] podem ser encontradas quatro provas para o Teorema 1.2. Uma prova bem interessante para esse resultado também pode ser vista em [17].

Outra propriedade satisfeita pelos polinômios de Szegő é que seus zeros estão todos no disco unitário aberto  $|z| < 1$ .

**Exemplo 1.2.** *Consideremos a medida de Lebesgue  $\omega_0$  definida, como uma medida de probabilidade, por*

$$d\omega_0(z) = (2\pi iz)^{-1} dz, \quad z \in \mathbb{T}.$$

*A medida  $\omega_0$  é tal que  $\sigma_{ess}(\omega_0) = \text{supp}(\omega_0) = \mathbb{T}$  e um cálculo imediato nos mostra que os momentos trigonométricos, definidos em (1.4), são  $\nu_n^{(\omega_0)} = \delta_{0,n}$ ,  $n \geq 0$ , onde  $\delta_{0,n}$  é o delta de Kronecker, definido em (1.2).*

*Assim, usando (1.8) e (1.13), podemos obter os polinômios ortogonais no círculo unitário  $\phi_n^{(\omega_0)}$ , com relação a  $\omega_0$ . Neste caso,  $\phi_n^{(\omega_0)}(z) = z^n$ ,  $n \geq 0$ . Portanto, os coeficientes de Verblunsky associados à medida de Lebesgue  $\omega_0$  são explicitamente dados por*

$$\alpha_n^{(\omega_0)} = -\overline{\phi_{n+1}^{(\omega_0)}(0)} = 0, \quad n \geq 0.$$

*Note ainda que os zeros,  $z_{n,k}$ ,  $1 \leq k \leq n$ , dos polinômios  $\phi_n^{(\omega_0)}(z) = z^n$ ,  $n \geq 1$ , são todos iguais a zero (de multiplicidade  $n$ ). Este exemplo é conhecido, segundo Simon [35], como “caso livre”.*

### 1.2.1 Polinômios para-ortogonais

Como mencionamos anteriormente, todos os zeros dos polinômios de Szegő estão no disco unitário aberto  $|z| < 1$ . Essa propriedade difere daquela apresentada na seção anterior, com respeito aos polinômios ortogonais na reta real  $P_n$ , no sentido que, naquele caso, os zeros de  $P_n$  eram todos distintos e estavam contidos no intervalo de definição da medida associada  $\psi$ . No caso dos polinômios de Szegő, não podemos garantir que seus zeros são todos simples e muito menos afirmar que estão no círculo unitário  $\mathbb{T}$ . Entretanto, existe uma outra classe de polinômios onde esse resultado é verdadeiro. Essa classe faz parte de um grupo de polinômios chamados *polinômios para-ortogonais* no círculo unitário, apresentados a seguir.

**Definição 1.6.** *Seja  $\mu$  uma medida positiva no círculo unitário e consideremos o produto interno definido em (1.7). Uma sequência  $\{X_n\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a  $\mu$  se, para  $n \geq 0$ ,  $X_n$  é um polinômio de grau  $n$  que satisfaz*

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0, \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Os polinômios  $X_n$  são chamados de para-ortogonais, pois, diferentemente dos polinômios ortogonais  $\phi_n$ , satisfazem  $\langle X_n, 1 \rangle \neq 0$ . Assim,  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  não é uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a  $\mu$ .

Usando a definição dos polinômios recíprocos  $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$  e a relação dada em (1.14), pode-se mostrar que

$$\langle \phi_n^*, z^m \rangle = \begin{cases} \tilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.17)$$

Consequentemente, a sequência  $\{\phi_n^*\}_{n=0}^\infty$  também não representa uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a  $\mu$ .

**Exemplo 1.3.** *Consideremos os polinômios  $\phi_n(w_n, z)$  definidos por*

$$\phi_n(w_n, z) = \phi_n(z) + w_n \phi_n^*(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 0,$$

onde  $w_n \in \mathbb{C}$  e  $|w_n| = 1$ . Usando as relações (1.14) e (1.17) verificamos facilmente que a sequência  $\{\phi_n(w_n, z)\}_{n=0}^\infty$  satisfaz as condições da Definição 1.6. Logo,  $\{\phi_n(w_n, z)\}_{n=0}^\infty$  é

uma sequência de polinômios para-ortogonais com respeito a  $\mu$  e associada a sequência de polinômios ortogonais  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ . Além disso, usando as relações dadas em (1.15), podemos obter uma outra representação para os polinômios para-ortogonais  $\phi_n(w_n, z)$  (na forma mônica), a saber:

$$\phi_n(\tilde{w}_n, z) = z\phi_{n-1}(z) + \tilde{w}_n\phi_{n-1}^*(z), \quad \text{com } |\tilde{w}_n| = 1, \quad n \geq 1, \quad (1.18)$$

onde  $\phi_0(\tilde{w}_n, z) = 1$ .

Em Jones et al. [25], os autores consideraram o estudo dos polinômios para-ortogonais  $\phi_n(w_n, z)$  na forma  $\phi_n(z) + w_n\phi_n^*(z)$ , para  $w_n \in \mathbb{C}$  e  $|w_n| = 1$ . Uma propriedade interessante desses polinômios é que seus zeros são simples e estão no círculo unitário. Essa propriedade é extremamente importante, já que, neste caso, pode-se utilizar os zeros desses polinômios para construir *fórmulas de quadratura* no círculo unitário (veja, por exemplo, [25]).

Na última seção desse capítulo, apresentaremos certos polinômios para-ortogonais do tipo (1.18) e veremos como os zeros destes polinômios (que são todos simples e estão no círculo unitário) nos permitem construir uma medida cujo suporte poderá ser estimado a partir destes zeros.

### 1.2.2 Coeficientes de Verblunsky periódicos: o espaço de medidas $V_p$

Dado  $p \in \mathbb{N}$ , denotamos por  $V_p$  o espaço de todas as medidas de probabilidade não triviais, com suporte no círculo unitário, tais que as respectivas sequências de coeficientes de Verblunsky são periódicas com período  $p$  ( $p$ -periódicas), isto é,

$$\tilde{\mu} \in V_p \quad \text{se, e somente se,} \quad \alpha_{n+p}^{(\tilde{\mu})} = \alpha_n^{(\tilde{\mu})}, \quad n \geq 0. \quad (1.19)$$

Seja  $\tilde{\mu} \in V_p$  e considere a *função discriminante*  $\Delta(z) = z^{-p/2}\text{Tr}(T_p(z))$ , onde

$$T_p(z) = A(\alpha_{p-1}^{(\tilde{\mu})}, z) \times A(\alpha_{p-2}^{(\tilde{\mu})}, z) \times \dots \times A(\alpha_0^{(\tilde{\mu})}, z), \quad (1.20)$$

$$A(\alpha_j^{(\tilde{\mu})}, z) = (1 - |\alpha_j^{(\tilde{\mu})}|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} z & -\overline{\alpha_j^{(\tilde{\mu})}} \\ -\alpha_j^{(\tilde{\mu})}z & 1 \end{pmatrix}, \quad j = 0, \dots, p-1, \quad (1.21)$$

$z \in \mathbb{C}$  e  $\text{Tr}(T_p(z))$  denota o *traço* da matriz  $T_p(z)$ .

É bem conhecido (veja Simon [36]) que todas as  $p$  soluções distintas da equação  $\Delta(z) = 2$ , que denotamos por  $z_1^+, \dots, z_p^+$ , pertencem ao círculo unitário  $\mathbb{T}$ . Da mesma maneira, as  $p$  soluções distintas da equação  $\Delta(z) = -2$ , denotadas por  $z_1^-, \dots, z_p^-$ , também estão em  $\mathbb{T}$ . Usando estas soluções é possível mostrar que o círculo unitário pode ser decomposto em  $2p$  conjuntos alternantes  $G_1, B_1, G_2, \dots, B_p$  com cada *gap*,  $G_j$ , aberto e cada *band*,  $B_j$ , fechado (veja [36]). Além disso, cada *band*  $B_j$  é dada por

$$B_j = \{z \in \mathbb{T} : \arg(z_j^{\sigma_j}) \leq \arg(z) \leq \arg(z_j^{-\sigma_j})\}, \quad (1.22)$$

onde  $\sigma_j = (-1)^{j+1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ .

A Figura 1.1 ilustra um exemplo de ordenação das soluções de  $|\Delta(z)| = 2$  para  $p = 3$ , com respectivas *bands* e *gaps*.

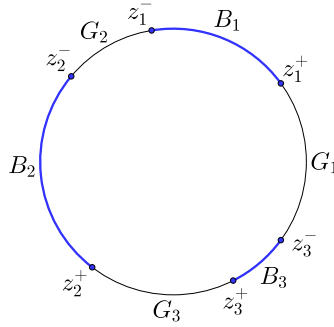


Figura 1.1: Ordenação das soluções de  $|\Delta(z)| = 2$ , *bands* e *gaps* para  $p = 3$ .

Agora, apresentaremos quatro resultados fundamentais (encontrados em Simon [36]) que fornecem uma completa caracterização de medidas de probabilidade no círculo unitário associadas a coeficientes de Verblunsky periódicos, isto é, medidas em  $V_p$ . O primeiro destes estabelece informações sobre a parte absolutamente contínua e a parte singular da medida.

**Teorema 1.3.** ([36]) *Seja  $\tilde{\mu} \in V_p$  tal que  $d\tilde{\mu} = w(\theta)d\theta/2\pi + d\tilde{\mu}_s$ . Se  $B_1, \dots, B_p$  são as correspondentes *bands* definidas em (1.22), então  $\sigma_{ess}(\tilde{\mu}) = \cup_{j=1}^p B_j$  e  $d\tilde{\mu}_s[\cup_{j=1}^p B_j] = \emptyset$ . Além disso, em cada arco aberto disjunto de  $\mathbb{T} \setminus \cup_{j=1}^p B_j$ ,  $\tilde{\mu}$  não tem suporte ou tem um único ponto puro.*

O próximo teorema fornece informações sobre a função peso associada  $w(\theta)$ .

**Teorema 1.4.** ([36]) *Seja  $\tilde{\mu} \in V_p$  tal que  $d\tilde{\mu} = w(\theta)d\theta/2\pi + d\tilde{\mu}_s$ . Então, para  $e^{i\theta} \in \cup_{j=1}^p B_j$ ,*

$$w(\theta) = \frac{\sqrt{4 - \Delta^2(e^{i\theta})}}{2|\mathcal{I}m(e^{-ip\theta/2})\varphi_p(e^{i\theta})|}.$$

Em particular,

- (i) em  $\cup_{j=1}^p B_j^{int}$ ,  $w(\theta) > 0$ , onde  $B_j^{int}$  denota o interior de  $B_j$ ;
- (ii) na fronteira de uma band que está ao lado de um gap fechado (um gap vazio),  $w(\theta) > 0$ ;
- (iii) na fronteira  $\theta_0$ , de uma band que está ao lado de um gap aberto,

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{w(\theta)}{c(\theta - \theta_0)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

se  $\varphi_p(e^{i\theta_0}) - \varphi_p^*(e^{i\theta_0}) \neq 0$ , onde  $c$  é uma constante;

- (iv) na fronteira  $\theta_0$ , de uma band que está ao lado de um gap aberto,

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} \frac{w(\theta)}{c(\theta - \theta_0)^{-\frac{1}{2}}} = 1$$

se  $\varphi_p(e^{i\theta_0}) - \varphi_p^*(e^{i\theta_0}) = 0$ , onde  $c$  é uma constante.

Finalmente, os dois teoremas seguintes estabelecem uma caracterização completa para os pontos puros de medidas em  $V_p$ .

**Teorema 1.5.** ([36]) *Seja  $\tilde{\mu} \in V_p$ . Se  $\phi_p$  é o  $p$ -ésimo polinômio ortogonal da sequência de polinômios ortogonais  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ , com relação à medida  $\tilde{\mu}$ , e  $\phi_p^*$  é o seu recíproco, então*

$$\pi(z) = \phi_p(z) - \phi_p^*(z)$$

*tem todos os seus zeros no conjunto dos gaps fechados (incluindo os extremos), um em cada gap fechado.*

**Teorema 1.6.** ([36]) *Seja  $\tilde{\mu} \in V_p$  e considere  $\theta_0$  um ponto em um gap fechado onde  $\phi_p(e^{i\theta_0}) - \phi_p^*(e^{i\theta_0}) = 0$ . Então,  $\tilde{\mu}$  não tem nenhum ponto puro no gap ou tem um único ponto puro em  $z_0 = e^{i\theta_0}$  com massa dada por*

$$\tilde{\mu}(\{z_0\}) = \frac{\sqrt{\Delta^2(e^{i\theta_0}) - 4}}{\left| \mathcal{R}e \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\varphi}_p^*(e^{i\theta_0}) \right|},$$

onde  $\tilde{\varphi}_p^*(z) = z^{-p/2} \varphi_p^*(z)$  e  $\varphi_p^*$  denota o recíproco do  $p$ -ésimo polinômio ortonormal  $\varphi_p(z) = \kappa_p \phi_p(z)$ .

No Capítulo 3 daremos uma caracterização para os possíveis pontos puros de medidas em  $V_p$ , assim como, uma nova expressão para o cálculo da massa desses pontos puros (quando existem), utilizando, nesse caso, a teoria de *sequências encadeadas positivas* que apresentamos a seguir.

Para mais detalhes sobre medidas associadas a coeficientes de Verblunsky periódicos veja, por exemplo, [19, 29, 30, 36].

### 1.3 Sequências encadeadas positivas

A teoria de sequências encadeadas foi introduzida por Wall [40] e tem sido minuciosamente explorada por Chihara [12] e muitos outros pesquisadores no estudo de polinômios ortogonais definidos em intervalos limitados da reta real. Por se tratar de um tema que também desempenha um importante papel na teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário, e por ser um conceito que será bastante utilizado no decorrer deste trabalho, apresentamos, a seguir, definições, exemplos e algumas propriedades relacionadas a sequências encadeadas positivas. Para um estudo mais detalhado e demonstrações dos resultados abaixo recomendamos o texto de Chihara [12].

**Definição 1.7.** *Uma sequência  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma sequência encadeada positiva se existe uma outra sequência  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  tal que*

- (i)  $0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1,$
- (ii)  $a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n \geq 1.$

Neste caso, a sequência  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada *sequência de parâmetros* para  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $g_0$  é dito o *parâmetro inicial*.

**Exemplo 1.4.** *A sequência constante  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a\}$ , com  $0 < a \leq 1/4$ , é uma sequência encadeada positiva com sequências de parâmetros*

$$\{g_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2} \right\} \quad \text{e} \quad \{h_n\}_{n=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1 - 4a}}{2} \right\}.$$

**Definição 1.8.** *Seja  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  é chamada *sequência minimal de parâmetros* para  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  se  $m_0 = 0$ .*

Os Teoremas 1.7 e 1.8, apresentados a seguir, mostram que, se uma sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros tal que seu parâmetro inicial é positivo, então a sequência encadeada positiva tem infinitas sequências de parâmetros. Além

disso, toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  tal que  $m_0 = 0$  e  $m_n < g_n$ ,  $n \geq 1$ , para qualquer outra sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ . Consequentemente, toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros minimal.

**Teorema 1.7.** ([12]) *Seja  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva e consideremos  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{h_n\}_{n=0}^\infty$  sequências de parâmetros para  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ . Então,  $g_n < h_n$  para  $n \geq 1$  se, e somente se,  $g_0 < h_0$ .*

**Teorema 1.8.** ([12]) *Seja  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Se  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  tem uma sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  tal que  $g_0 > 0$ , então, para cada  $h_0$  satisfazendo  $0 \leq h_0 < g_0$ , existe uma correspondente sequência de parâmetros  $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ .*

**Exemplo 1.5.** *A sequência encadeada positiva  $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{1/4\}$  tem sequência minimal de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^\infty = \{n/2(n+1)\}$ .*

**Definição 1.9.** *Seja  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Uma sequência de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada sequência maximal de parâmetros para  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  se, para qualquer outra sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$ , temos  $M_n > g_n$ ,  $n \geq 0$ .*

Utilizando o Teorema 1.7, podemos mostrar que toda sequência encadeada positiva possui uma sequência de parâmetros maximal. Além disso, o seguinte teorema, atribuído a Wall [40] (veja também Chihara [12]), fornece uma maneira prática para se verificar quando uma sequência de parâmetros é maximal.

**Teorema 1.9.** ([12, 40]) *Uma sequência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal para uma sequência encadeada positiva  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1-g_1)(1-g_2)\cdots(1-g_n)} = \infty.$$

**Exemplo 1.6.** *Considere novamente a sequência encadeada positiva  $\{a_n\}_{n=1}^\infty = \{a\}$ , com  $0 < a \leq 1/4$ . Sabemos que*

$$\{g_n\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \right\} \quad \text{e} \quad \{h_n\}_{n=0}^\infty = \left\{ \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2} \right\},$$

são sequências de parâmetros para  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ . Podemos utilizar o Teorema 1.9 para mostrar que  $\{g_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Observação 1.2.** *Caso a seqüência minimal de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$  de  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  coincida com a seqüência maximal de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$  de  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  (ou, equivalentemente, caso  $m_0 = M_0 = 0$ ), dizemos que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  determina seus parâmetros unicamente ou que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  é unicamente determinada. Caso contrário, dizemos que  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  é não unicamente determinada.*

Os dois próximos teoremas são bem conhecidos na teoria de seqüências encadeadas positivas e também serão utilizados neste trabalho.

**Teorema 1.10.** ([12]) *Seja  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência encadeada positiva. Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  então  $0 \leq a \leq 1/4$ .*

**Teorema 1.11.** ([12]) *Seja  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência encadeada positiva com seqüência de parâmetros  $\{g_n\}_{n=0}^{\infty}$ . Então,*

- (i)  $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$  é, também, uma seqüência encadeada positiva com seqüência de parâmetros  $\{g_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ ;
- (ii) se  $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^{\infty}$  denota a seqüência minimal de parâmetros para  $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ , então  $\hat{m}_n < m_{n+1}$ , para  $n \geq 0$ ;
- (iii)  $\{M_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$  é seqüência maximal de parâmetros para  $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ .

O Teorema 1.11 garante que se  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  é uma seqüência encadeada positiva, então  $\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$  também é seqüência encadeada positiva, bem como  $\{a_3, a_4, a_5, \dots\}$ ,  $\{a_4, a_5, a_6, \dots\}$ , etc. Nem sempre podemos estabelecer uma espécie de recíproca para este resultado. Entretanto, se  $\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$  é seqüência encadeada positiva não unicamente determinada, podemos encontrar  $a_1 > 0$  tal que  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  é uma seqüência encadeada positiva. Isto é o que nos afirma o próximo resultado.

**Teorema 1.12.** ([12]) *Seja  $\{a_2, a_3, a_4, \dots\}$  uma seqüência encadeada positiva e não unicamente determinada, cuja seqüência maximal de parâmetros é  $\{M_1, M_2, M_3, \dots\}$ , ou seja,  $M_1 \neq 0$ . Então, tomando  $a_1 = \lambda M_1$ , com  $0 < \lambda \leq 1$ , a seqüência  $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  também é uma seqüência encadeada positiva.*

Finalmente, apresentamos um resultado sobre seqüências encadeadas positivas e periódicas que também será utilizado neste trabalho.

**Teorema 1.13.** ([12]) *Se  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva e periódica com período  $p$ , então  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é também periódica com período  $p$  ao passo que  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é “quase periódica” no sentido que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{np+k} = l_k, \quad k = 0, 1, \dots, p-1.$$

### 1.3.1 Polinômios ortogonais no círculo unitário via sequências encadeadas

Como observamos no Teorema 1.2, associada a uma sequência arbitrária de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , onde  $|\alpha_n| < 1$ ,  $n \geq 0$ , existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$ , com suporte no círculo unitário, tal que os polinômios  $\phi_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , gerados pelas relações (1.15), são os respectivos polinômios de Szegő mônicos. Portanto, podemos afirmar que os polinômios ortogonais no círculo unitário são completamente caracterizados pela sequência de números complexos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , conhecidos como coeficientes de Verblunsky. Nesta seção, apresentamos alguns resultados que fornecem uma caracterização para medidas de probabilidade no círculo unitário em termos de um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva. Nosso objetivo, neste caso, é apresentar uma conexão entre a teoria de sequências encadeadas positivas e a teoria de polinômios ortogonais no círculo unitário que será extremamente útil para os resultados obtidos nos próximos capítulos deste trabalho.

Em Costa et al. [13], mostrou-se que dada qualquer medida de probabilidade não trivial no círculo unitário, correspondente a esta medida, existe um único par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva. A recíproca dessa afirmação também é verdadeira e estes resultados são fornecidos no seguinte teorema:

**Teorema 1.14.** ([13]) (a) *Dada uma medida de probabilidade não trivial  $\mu$  no círculo unitário, então, associado a esta medida, existe um único par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva. Especificamente, se  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de coeficientes de Verblunsky associada a  $\mu$ , então  $m_0 = 0$ ,*

$$c_n = -\frac{\operatorname{Im}(\rho_{n-1}\alpha_{n-1})}{1 - \operatorname{Re}(\rho_{n-1}\alpha_{n-1})} \quad e \quad m_n = \frac{1}{2} \frac{|1 - \rho_{n-1}\alpha_{n-1}|^2}{[1 - \operatorname{Re}(\rho_{n-1}\alpha_{n-1})]}, \quad n \geq 1, \quad (1.23)$$

onde a sequência  $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$  é tal que

$$\rho_0 = 1 \quad e \quad \rho_n = \rho_{n-1} \frac{1 - \bar{\rho}_{n-1} \bar{\alpha}_{n-1}}{1 - \rho_{n-1} \alpha_{n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (1.24)$$

e  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ . Além disso, a sequência maximal de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é tal que  $M_0$  é o valor do salto na medida em  $z = 1$ .

(b) Reciprocamente, dado um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, então, associada a este par, existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$  com suporte no círculo unitário. Especificamente, se  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , então

$$\alpha_{n-1} = \bar{\rho}_{n-1} \left[ \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 - ic_n} \right], \quad n \geq 1, \quad (1.25)$$

onde a sequência  $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$  é tal que

$$\rho_0 = 1 \quad e \quad \rho_n = \frac{1 - ic_n}{1 + ic_n} \rho_{n-1} = \prod_{k=1}^n \frac{1 - ic_k}{1 + ic_k}, \quad n \geq 1. \quad (1.26)$$

Além disso, a medida tem um salto  $M_0$  em  $z = 1$ , onde  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

A Figura 1.2 ilustra um diagrama de equivalências estabelecido a partir dos resultados da Seção 1.2 e da caracterização fornecida no Teorema 1.14.

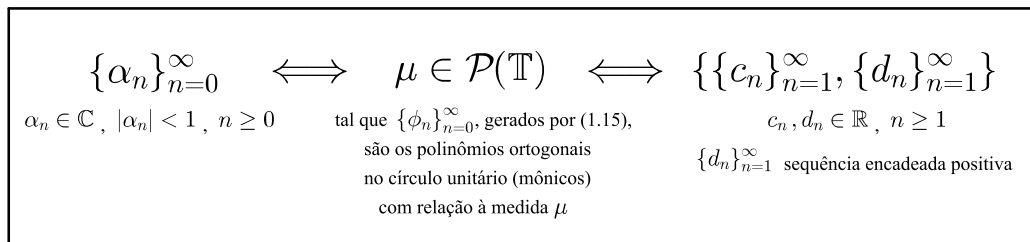


Figura 1.2: Caracterização de medidas no círculo unitário.

**Exemplo 1.7.** Seja  $\omega_0$  a medida de Lebesgue. Do Exemplo 1.2, sabemos que a sequência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\omega_0$  é a sequência nula. Logo, podemos utilizar o Teorema 1.14 para concluir que as sequências reais do par  $\{\{c_n^{(\omega_0)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\omega_0)}\}_{n=1}^\infty\}$ , associado a  $\omega_0$ , são tais que  $d_1^{(\omega_0)} = 1/2$ ,  $d_n^{(\omega_0)} = 1/4$  e  $c_n^{(\omega_0)} = 0$ , para  $n \geq 1$ , onde a sequência minimal de parâmetros  $\{m_n^{(\omega_0)}\}_{n=0}^\infty$  para  $\{d_n^{(\omega_0)}\}_{n=1}^\infty$  satisfaz  $m_0^{(\omega_0)} = 0$  e  $m_n^{(\omega_0)} = 1/2$ , para  $n \geq 1$ .

No Teorema 1.14, observamos que as seqüências de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  estão diretamente relacionadas com as seqüências reais  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ , onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência de parâmetros minimal para a seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , isto é,

$$d_n = (1 - m_{n-1})m_n, \quad n \geq 1, \quad (1.27)$$

com  $0 < m_n < 1$ ,  $n \geq 1$  e  $m_0 = 0$ . Além disso, as seqüências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  são os coeficientes da fórmula de recorrência de três termos (veja [13])

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (1.28)$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic_1)z + (1 - ic_1)$ , onde

$$R_n(z) = \frac{\prod_{j=1}^n [1 - \rho_{j-1}\alpha_{j-1}]}{\prod_{j=1}^n [1 - \mathcal{R}e(\rho_{j-1}\alpha_{j-1})]} \frac{z\phi_n(z) - \rho_n\phi_n^*(z)}{z - 1}, \quad n \geq 0, \quad (1.29)$$

com  $\rho_n = \phi_n(1)/\phi_n^*(1)$ ,  $n \geq 0$ . Assumindo que a medida tem um salto  $0 \leq \delta < 1$  em  $z = 1$ , o elemento  $d_1$  da seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , o qual não influencia na geração dos polinômios  $R_n(z)$ , é tal que  $d_1 = (1 - \delta)M_1 = (1 - M_0)M_1$ , onde  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência maximal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

Uma vez que  $|\rho_n| = 1$  para  $n \geq 0$  (confira Teorema 1.14), usando (1.29), observamos que os polinômios  $(z - 1)R_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , são polinômios para-ortogonais no círculo unitário (veja Exemplo 1.3). Consequentemente, os polinômios  $R_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , gerados pela relação de recorrência (1.28) e explicitados em (1.29), têm todos os seus zeros simples e pertencentes ao círculo unitário.

**Definição 1.10.** Dizemos que um polinômio  $S_n(z)$ , de grau  $n$ , é autoinversível, se ele for igual ao seu recíproco, isto é,

$$S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/\bar{z})} = S_n(z).$$

**Observação 1.3.** Da relação de recorrência de três termos (1.28), temos, para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} R_{n+1}^*(z) &= z^{n+1} \overline{R_{n+1}(1/\bar{z})} \\ &= [(1 - ic_{n+1}) + (1 + ic_{n+1})z] z^n \overline{R_n(1/\bar{z})} - 4d_{n+1}z z^{n-1} \overline{R_{n-1}(1/\bar{z})} \\ &= [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})] R_n^*(z) - 4d_{n+1}z R_{n-1}^*(z), \end{aligned}$$

onde  $R_0^*(z) = 1 = R_0(z)$  e  $R_1^*(z) = (1 - ic_1) + (1 + ic_1)z = R_1(z)$ . Consequentemente,  $R_n^*(z) = R_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , uma vez que  $R_n^*(z)$  e  $R_n(z)$  satisfazem a mesma relação de

recorrência de três termos e possuem as mesmas condições iniciais. Logo, os polinômios  $R_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , dados por (1.28), são polinômios autoinversíveis.

Um outro resultado estabelecido em Costa et al. [13] fornece informações sobre pontos puros de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário com o uso da teoria de sequências encadeadas positivas. Este resultado é obtido como consequência do critério de Wall para sequência maximal de parâmetros de sequências encadeadas positivas (veja Teorema 1.9).

**Teorema 1.15.** ([13]) *A medida de probabilidade  $\mu$ , com sequência associada de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$ , tem um ponto puro em  $w$  ( $|w| = 1$ ) se, e somente se,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \prod_{j=1}^n \frac{|1 - w\tau_{j-1}(w)\alpha_{j-1}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}|^2} \right] = s(w) < \infty.$$

Além disso, o tamanho da massa no ponto  $z = w$  é igual a  $t = [1 + s(w)]^{-1}$ . Aqui,  $\tau_0(w) = 1$  e

$$\tau_{j+1}(w) = \frac{\phi_{j+1}(w)}{\phi_{j+1}^*(w)} = \frac{w\tau_j(w) - \bar{\alpha}_j}{1 - w\tau_j(w)\alpha_j}, \quad j \geq 0. \quad (1.30)$$

**Observação 1.4.** *Dos resultados estabelecidos em [13], também temos  $\rho_n = \tau_n(1)$ ,  $n \geq 0$ , onde  $\rho_n$  é dado por (1.26) (ou, também, por (1.24)) e  $\tau_n(1)$  é definido por (1.30) quando  $w = 1$ .*

**Observação 1.5.** *Sejam  $\mu$  uma medida de probabilidade no círculo unitário e  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  a sequência de polinômios ortogonais (mônicos) com relação a  $\mu$ . Considere, ainda,  $w \in \mathbb{T}$  e  $\{\hat{\phi}_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios mônicos satisfazendo*

$$\hat{\phi}_n(z) = w^{-n}\phi_n(wz), \quad n \geq 1.$$

*Pode-se mostrar que  $\{\hat{\phi}_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência de polinômios ortogonais (mônicos) associada à medida  $\hat{\mu} = \hat{\mu}(w; \cdot)$ , dada por  $\hat{\mu}(z) = \mu(wz)$  (veja, por exemplo, [13]), e que  $\hat{\phi}_n^*(z) = \phi_n^*(wz)$ ,  $n \geq 0$ , onde  $\hat{\phi}_n^*(z) = z^n \overline{\hat{\phi}_n(1/\bar{z})}$  e  $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$  denotam os polinômios recíprocos de  $\hat{\phi}_n(z)$  e  $\phi_n(z)$ , respectivamente. Neste caso, diz-se que  $\hat{\mu}$  é uma rotação de  $\mu$ . Além disso, temos*

$$\hat{\alpha}_n = w^{n+1}\alpha_n \quad e \quad \hat{\rho}_n = \hat{\tau}_n(1) = w^{-n}\tau_n(w), \quad n \geq 0,$$

*onde  $\{\hat{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  são, respectivamente, as sequências de coeficientes de Verblunsky associadas às medidas  $\hat{\mu}$  e  $\mu$ ,  $\hat{\rho}_n$  é como em (1.26) (ou, também, como em (1.24)) e  $\tau_n(w)$  é dado por (1.30).*

A partir do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, também é possível recuperar uma única medida de probabilidade, associada a este par, através de um outro método encontrado em Castillo et al. [10], descrito como segue.

Considere a nova sequência de polinômios  $\{Q_n\}_{n=0}^\infty$  satisfazendo

$$Q_{n+1}(z) = [(1 + ic_{n+1})z + (1 - ic_{n+1})]Q_n(z) - 4d_{n+1}zQ_{n-1}(z), \quad n \geq 1,$$

com  $Q_0(z) = 0$  e  $Q_1(z) = 2d_1$ .

Sejam  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ ,  $n \geq 1$  e  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , os zeros dos polinômios  $R_n(z)$ , gerados pela relação de recorrência (1.28). Considere, ainda,  $\lambda_{n,0} = 1 - Q_n(1)/R_n(1)$  e  $\lambda_{n,j} = Q_n(z_{n,j})/[(1 - z_{n,j})R'_n(z_{n,j})]$ , com  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Foi provado em [10], que  $\sum_{j=0}^n \lambda_{n,j} = 1$  e  $\lambda_{n,j} > 0$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Além disso, definindo a sequência de funções escadas  $\psi_n(e^{i\theta})$ ,  $n \geq 1$ , em  $[0, 2\pi]$ , por

$$\psi_n(e^{i\theta}) = \begin{cases} 0, & \theta = 0, \\ \lambda_{n,0}, & 0 < \theta \leq \theta_{n,1}, \\ \sum_{j=0}^k \lambda_{n,j}, & \theta_{n,k} < \theta \leq \theta_{n,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \theta_{n,n} < \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

então, pelo Teorema da Seleção de Helly, uma subsequência de  $\psi_n(e^{i\theta})$  converge para a medida  $\mu(e^{i\theta})$  que está associada ao par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ . Neste caso, a sequência de polinômios ortogonais (mônicos) no círculo unitário,  $\{\phi_n(\mu; \cdot)\}_{n=0}^\infty$ , associada à medida  $\mu$ , é tal que  $\phi_0(\mu; z) = 1$  e

$$\phi_n(\mu; z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n (1 + ic_k)} [R_n(z) - 2(1 - m_n)R_{n-1}(z)], \quad n \geq 1, \quad (1.31)$$

onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

Como consequência do método descrito acima, obtemos uma relação direta entre os zeros dos polinômios  $R_n(z)$  e a medida associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , descrita pelo seguinte teorema:

**Teorema 1.16.** *Seja  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  um par de sequências reais, com  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Além disso, seja  $R_n(z)$  a sequência de polinômios dada por (1.28),  $\mu$  a medida associada a este par de sequências e suponha que os zeros de  $R_n(z)$  estão sobre um arco fechado  $\mathcal{C}$  do círculo unitário, para todo  $n \geq 1$ . Então, o suporte da medida  $\mu$  está contido em  $\mathcal{C} \cup \{1\}$ .*

O Teorema 1.16 fornece uma estimativa para o suporte de uma medida de probabilidade não trivial no círculo unitário, obtida a partir de um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva. Em [10], os autores verificaram que esta estimativa estava diretamente relacionada com a localização dos zeros  $z_{n,j} = e^{i\theta_{n,j}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  de  $R_n(z)$  ou, equivalentemente, dos zeros  $x_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  das funções  $\mathcal{W}_n(x)$  definidas, no intervalo  $[-1, 1]$ , por

$$\mathcal{W}_n(x) = 2^{-n} e^{-in\theta/2} R_n(e^{i\theta}), \quad n \geq 0, \quad (1.32)$$

onde  $x = \cos(\theta/2)$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

As funções  $\{\mathcal{W}_n\}_{n=0}^\infty$  satisfazem a relação de recorrência de três termos (veja [5, 16])

$$\mathcal{W}_{n+1}(x) = \left(x - c_{n+1} \sqrt{1-x^2}\right) \mathcal{W}_n(x) - d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.33)$$

com  $\mathcal{W}_0(x) = 1$  e  $\mathcal{W}_1(x) = x - c_1 \sqrt{1-x^2}$ . Além disso, para  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{W}_n(x)$  tem exatamente  $n$  zeros distintos  $x_{n,j} = \cos(\theta_{n,j}/2)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , no intervalo  $(-1, 1)$ .

Em Dimitrov e Sri Ranga [16], os autores provaram o entrelaçamento dos zeros de  $R_n(z)$  e  $R_{n+1}(z)$  mostrando a propriedade de entrelaçamento

$$-1 < x_{n+1,n+1} < x_{n,n} < x_{n+1,n} < \dots < x_{n,1} < x_{n+1,1} < 1, \quad n \geq 1, \quad (1.34)$$

para os zeros de  $\mathcal{W}_n(x)$  e  $\mathcal{W}_{n+1}(x)$ , que é uma consequência da relação de recorrência de três termos (1.33).

**Definição 1.11.** Dizemos que uma medida de probabilidade no círculo unitário  $\mu$  é simétrica se  $d\mu(z) = -d\mu(1/z)$ ,  $z \in \mathbb{T}$ . O espaço dessas medidas será denotado por  $S$ .

**Observação 1.6.** Resultados também estabelecidos em [10] garantem que  $\mu$  é uma medida simétrica se, e somente se,  $c_n = 0$ ,  $n \geq 1$ , onde a sequência real  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  é dada como no Teorema 1.14.

# Capítulo 2

## Estimativa para o Suporte de uma Classe de Medidas

Neste capítulo, consideramos o problema de encontrar uma estimativa para o suporte de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário cujas respectivas sequências  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ , associadas a estas medidas (veja Teorema 1.14), têm uma propriedade de sinal alternante, isto é,  $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$ , para  $n \geq 1$ , com  $\{\tilde{c}_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência positiva (ou negativa) de números reais. Os resultados aqui apresentados são novos e estão reunidos no artigo [7], aceito para publicação na revista *Computational and Applied Mathematics* e disponível no modo *online first*.

### 2.1 Resultados preliminares

Fornecemos, inicialmente, três lemas que serão extremamente úteis para obtenção dos principais resultados deste capítulo.

**Lema 2.1.** *Sejam  $R_n(z)$  satisfazendo (1.28) e  $\mathcal{W}_n(x)$  satisfazendo (1.33). Então, para  $c \in \mathbb{R}$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $c_n = (-1)^n c$ ,  $n \geq 1$ .
- (ii) Para  $n \geq 0$ ,  $R_{2n}(z)$  tem coeficientes reais e  $R_{2n+1}(z) = [(1 - ic)z + (1 + ic)] \tilde{R}_{2n}(z)$ , onde  $\tilde{R}_0(z) = 1$  e  $\tilde{R}_{2n}(z)$  é, também, um polinômio com coeficientes reais.
- (iii) Para  $n \geq 0$ , a função  $\mathcal{W}_{2n}(x)$  é um polinômio par de grau  $2n$  e  $\mathcal{W}_{2n+1}(x) = (x + c\sqrt{1 - x^2}) \tilde{\mathcal{W}}_{2n}(x)$ , com  $\tilde{\mathcal{W}}_0(x) = 1$  e  $\tilde{\mathcal{W}}_{2n}(x)$  um polinômio par de grau  $2n$ .

**Demonstração:** Primeiramente, vamos mostrar que (i) implica em (ii). De fato, supondo que  $c_n = (-1)^n c$ ,  $n \geq 1$ , como  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = [(1 + ic_1)z + (1 - ic_1)]$ , o resultado claramente ocorre para  $n = 0$ . Além disso, se a afirmativa (ii) é válida para  $n = k \in \mathbb{N}$ , então aplicando-se a relação de recorrência de três termos (1.28), temos

$$\begin{aligned} R_{2(k+1)}(z) &= [(1 + ic_{2k+2})z + (1 - ic_{2k+2})]R_{2k+1}(z) - 4d_{2k+2}zR_{2k}(z) \\ &= [(1 + ic)z + (1 - ic)][(1 - ic)z + (1 + ic)]\tilde{R}_{2k}(z) - 4d_{2k+2}zR_{2k}(z) \\ &= [(1 + c^2)z^2 + 2(1 - c^2)z + (1 + c^2)]\tilde{R}_{2k}(z) - 4d_{2k+2}zR_{2k}(z). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,  $R_{2(k+1)}(z)$  é um polinômio com coeficientes reais, já que  $\tilde{R}_{2k}(z)$  e  $R_{2k}(z)$  os são, por hipótese. Mais ainda, se usarmos novamente (1.28), obtemos

$$\begin{aligned} R_{2(k+1)+1}(z) &= [(1 + ic_{2k+3})z + (1 - ic_{2k+3})]R_{2k+2}(z) - 4d_{2k+3}zR_{2k+1}(z) \\ &= [(1 - ic)z + (1 + ic)]R_{2(k+1)}(z) - 4d_{2k+3}z[(1 - ic)z + (1 + ic)]\tilde{R}_{2k}(z) \\ &= [(1 - ic)z + (1 + ic)]\left[R_{2(k+1)}(z) - 4d_{2k+3}z\tilde{R}_{2k}(z)\right] \\ &= [(1 - ic)z + (1 + ic)]\tilde{R}_{2(k+1)}(z), \end{aligned}$$

onde  $\tilde{R}_{2(k+1)}(z) = R_{2(k+1)}(z) - 4d_{2k+3}z\tilde{R}_{2k}(z)$  é, também, um polinômio com coeficientes reais, uma vez que  $R_{2(k+1)}(z)$  e  $\tilde{R}_{2k}(z)$  têm coeficientes reais. Logo, utilizando o princípio de indução finita, concluímos que a afirmativa (ii) é verdadeira para todo  $n \geq 0$ , se (i) ocorre.

Provemos, agora, que (ii) implica em (iii). Com efeito, supondo que (ii) ocorre, então  $R_{2n}(z)$  é um polinômio com coeficientes reais para  $n \geq 0$ . Além disso, como  $R_{2n}(z)$  é um polinômio autoinversível (veja Observação 1.3) e, pela transformação (1.32),  $\mathcal{W}_{2n}(x) = (4e^{i\theta})^{-n}R_{2n}(e^{i\theta})$ , segue que  $\mathcal{W}_{2n}(x)$  é um polinômio par de grau  $2n$  na variável  $x = \cos(\theta/2)$  (veja Lema A.1 do Apêndice A). Analogamente, do fato de  $R_{2n+1}(z)$  ser um polinômio autoinversível e da hipótese que

$$R_{2n+1}(z) = [(1 - ic)z + (1 + ic)]\tilde{R}_{2n}(z),$$

onde  $\tilde{R}_{2n}(z)$  é um polinômio com coeficientes reais, temos, para  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{2n}^*(z) &= z^{2n}\overline{\tilde{R}_{2n}(1/\bar{z})} = \frac{z^{2n+1}\overline{R_{2n+1}(1/\bar{z})}}{(1 + ic) + (1 - ic)z} \\ &= \frac{R_{2n+1}^*(z)}{(1 - ic)z + (1 + ic)} = \frac{R_{2n+1}(z)}{(1 - ic)z + (1 + ic)} \\ &= \tilde{R}_{2n}(z), \end{aligned}$$

isto é,  $\widetilde{R}_{2n}(z)$  é, também, autoinversível, para  $n \geq 0$ . Portanto, pelo Lema A.1, se  $\widetilde{\mathcal{W}}_{2n}(x) = (4e^{i\theta})^{-n} \widetilde{R}_{2n}(e^{i\theta})$ , então  $\widetilde{\mathcal{W}}_{2n}(x)$  é um polinômio par de grau  $2n$ , com  $\widetilde{\mathcal{W}}_0(x) = 1$ . Além disso, usando (1.32), para  $n \geq 0$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2n+1}(x) &= 2^{-(2n+1)} e^{-i(2n+1)\theta/2} R_{2n+1}(e^{i\theta}) \\ &= 2^{-1} e^{-i\theta/2} [(1-ic)e^{i\theta} + (1+ic)] (4e^{i\theta})^{-n} \widetilde{R}_{2n}(e^{i\theta}) \\ &= \left(x + c\sqrt{1-x^2}\right) \widetilde{\mathcal{W}}_{2n}(x). \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que (iii) implica em (i). De fato, considerando a relação de recorrência de três termos (1.33) e supondo que (iii) ocorre, então, para  $s \geq 1$ , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{2s}(x) &= \left(x - c_{2s}\sqrt{1-x^2}\right) \mathcal{W}_{2s-1}(x) - d_{2s} \mathcal{W}_{2s-2}(x) \\ &= \left(x - c_{2s}\sqrt{1-x^2}\right) \left(x + c\sqrt{1-x^2}\right) \widetilde{\mathcal{W}}_{2s-2}(x) - d_{2s} \mathcal{W}_{2s-2}(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \left(x + c\sqrt{1-x^2}\right) \widetilde{\mathcal{W}}_{2s}(x) &= \mathcal{W}_{2s+1}(x) \\ &= \left(x - c_{2s+1}\sqrt{1-x^2}\right) \mathcal{W}_{2s}(x) - d_{2s+1} \mathcal{W}_{2s-1}(x) \\ &= \left(x - c_{2s+1}\sqrt{1-x^2}\right) \mathcal{W}_{2s}(x) - d_{2s+1} \left(x + c\sqrt{1-x^2}\right) \widetilde{\mathcal{W}}_{2s-2}(x). \end{aligned}$$

Consequentemente, como  $\mathcal{W}_{2s}(x)$ ,  $\mathcal{W}_{2s-2}(x)$ ,  $\widetilde{\mathcal{W}}_{2s}(x)$  e  $\widetilde{\mathcal{W}}_{2s-2}(x)$  são polinômios pares, podemos mostrar que

$$c_{2s} = c \quad \text{e} \quad c_{2s+1} = -c, \quad s \geq 1.$$

Além disso, se  $\mathcal{W}_1(x) = \left(x + c\sqrt{1-x^2}\right) \widetilde{\mathcal{W}}_0(x)$ , com  $\widetilde{\mathcal{W}}_0(x) = 1$ , então, usando a definição de  $\mathcal{W}_1(x)$  (dada como uma condição inicial para a fórmula de recorrência (1.33)), verificamos, facilmente, que  $c_1 = -c$ . ■

Considere agora os polinômios  $\hat{R}_n(z)$  satisfazendo

$$\hat{R}_{n+1}(z) = [(1 + i\hat{c}_{n+1})z + (1 - i\hat{c}_{n+1})]\hat{R}_n(z) - 4d_{n+1}z\hat{R}_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.1)$$

com  $\hat{R}_0(z) = 1$ ,  $\hat{R}_1(z) = (1 + i\hat{c}_1)z + (1 - i\hat{c}_1)$  e  $\hat{c}_n = -c_n$ .

O próximo lema estabelece uma relação entre os polinômios  $R_n(z)$  e  $\hat{R}_n(z)$ .

**Lema 2.2.** *Sejam  $R_n(z)$  satisfazendo (1.28) e  $\hat{R}_n(z)$  satisfazendo (2.1). Então, para  $n \geq 0$ , temos  $R_n(z) = \overline{\hat{R}_n(\bar{z})}$ .*

**Demonstração:** Claramente, o resultado ocorre para  $n = 0$ . Suponha que o resultado é válido para  $n = 1, 2, \dots, k$ . Então, usando as relações de recorrência (1.28) e (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} R_{k+1}(z) &= [(1 + ic_{k+1})z + (1 - ic_{k+1})]R_k(z) - 4d_{k+1}zR_{k-1}(z) \\ &= [(1 + ic_{k+1})z + (1 - ic_{k+1})]\overline{\hat{R}_k(\bar{z})} - 4d_{k+1}z\overline{\hat{R}_{k-1}(\bar{z})} \\ &= \overline{\hat{R}_{k+1}(\bar{z})}. \end{aligned}$$

Logo, usando o princípio de indução finita, temos  $R_n(z) = \overline{\hat{R}_n(\bar{z})}$ , para todo  $n \geq 0$ . ■

**Observação 2.1.** O Lema 2.2 fornece uma relação entre os zeros dos polinômios  $R_n(z)$  e os zeros de  $\hat{R}_n(z)$ , isto é, se  $z_{n,j}$  é um zero de  $R_n(z)$  então  $\bar{z}_{n,j}$  é um zero de  $\hat{R}_n(z)$ .

Denotando por  $\text{sgn}(f(a))$  o sinal de uma determinada função  $f$  num ponto  $a$  de seu domínio, podemos estabelecer o seguinte resultado:

**Lema 2.3.** Seja  $\mathcal{W}_n(x)$  satisfazendo (1.33), onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva e  $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$ , com  $\tilde{c}_n \geq c > 0$ , para  $n \geq 1$ . Se  $\varepsilon$  é um número real qualquer satisfazendo  $0 < \varepsilon < c$ , então

$$\text{sgn}(\mathcal{W}_n(x_j^{(\varepsilon)})) = (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}, \quad j \in \{0, 1\}, \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

onde  $x_0^{(\varepsilon)} = -c_\varepsilon/\sqrt{1+c_\varepsilon^2}$  e  $x_1^{(\varepsilon)} = c_\varepsilon/\sqrt{1+c_\varepsilon^2}$ , com  $c_\varepsilon = c - \varepsilon$ .

**Demonstração:** Note que o resultado ocorre claramente para  $n = 0$ , pois  $\mathcal{W}_0(x) = 1$ .

Se  $\varepsilon$  é um número real qualquer tal que  $0 < \varepsilon < c$  e  $c_\varepsilon = c - \varepsilon$ , então, para  $n \geq 1$ , temos  $\tilde{c}_n \geq c > c_\varepsilon > 0$ . Além disso, fazendo  $x_0^{(\varepsilon)} = -c_\varepsilon/\sqrt{1+c_\varepsilon^2}$  e  $x_1^{(\varepsilon)} = c_\varepsilon/\sqrt{1+c_\varepsilon^2}$ , podemos mostrar que, para  $n \geq 1$ ,

$$\text{sgn} \left( x_0^{(\varepsilon)} + \tilde{c}_n \sqrt{1 - [x_0^{(\varepsilon)}]^2} \right) = \text{sgn} \left( x_1^{(\varepsilon)} + \tilde{c}_n \sqrt{1 - [x_1^{(\varepsilon)}]^2} \right) = 1. \quad (2.3)$$

e

$$\text{sgn} \left( x_0^{(\varepsilon)} - \tilde{c}_n \sqrt{1 - [x_0^{(\varepsilon)}]^2} \right) = \text{sgn} \left( x_1^{(\varepsilon)} - \tilde{c}_n \sqrt{1 - [x_1^{(\varepsilon)}]^2} \right) = -1. \quad (2.4)$$

Daí, como  $\mathcal{W}_1(x) = x + \tilde{c}_1 \sqrt{1-x^2}$ , usando (2.3), podemos ver que o resultado também ocorre para  $n = 1$ .

Suponha, por indução, que a propriedade (2.2) é válida para  $n = 2, 3, \dots, k$ . Então, se  $k = 2s$ ,  $s \geq 1$ , temos

$$\text{sgn}(\mathcal{W}_{2s}(x_j^{(\varepsilon)})) = (-1)^s = -\text{sgn}(\mathcal{W}_{2s-1}(x_j^{(\varepsilon)})), \quad j \in \{0, 1\}. \quad (2.5)$$

Além disso, usando a relação de recorrência de três termos (1.33), obtemos

$$\mathcal{W}_{k+1}(x_j^{(\varepsilon)}) = \left( x_j^{(\varepsilon)} + \tilde{c}_{2s+1} \sqrt{1 - [x_j^{(\varepsilon)}]^2} \right) \mathcal{W}_{2s}(x_j^{(\varepsilon)}) - d_{2s+1} \mathcal{W}_{2s-1}(x_j^{(\varepsilon)}), \quad (2.6)$$

para  $j \in \{0, 1\}$ . Conseqüentemente, como  $d_{2s+1} > 0$  (pois  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma seqüência encadeada positiva), podemos usar (2.3), (2.5) e (2.6), para concluir que

$$\operatorname{sgn}(\mathcal{W}_{k+1}(x_j^{(\varepsilon)})) = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}_{2s}(x_j^{(\varepsilon)})) = (-1)^s = (-1)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Analogamente, se  $k = 2s + 1$ ,  $s \geq 1$ , então

$$\operatorname{sgn}(\mathcal{W}_{2s+1}(x_j^{(\varepsilon)})) = (-1)^s = \operatorname{sgn}(\mathcal{W}_{2s}(x_j^{(\varepsilon)})), \quad j \in \{0, 1\}. \quad (2.7)$$

Por outro lado, usando novamente a relação de recorrência (1.33), encontramos

$$\mathcal{W}_{k+1}(x_j^{(\varepsilon)}) = \left( x_j^{(\varepsilon)} - \tilde{c}_{2s+2} \sqrt{1 - [x_j^{(\varepsilon)}]^2} \right) \mathcal{W}_{2s+1}(x_j^{(\varepsilon)}) - d_{2s+2} \mathcal{W}_{2s}(x_j^{(\varepsilon)}), \quad (2.8)$$

para  $j \in \{0, 1\}$ . Uma vez que  $d_{2s+2}$  é um elemento da seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , obviamente  $d_{2s+2} > 0$ . Logo, utilizando as relações (2.4), (2.7) e (2.8), podemos afirmar que

$$\operatorname{sgn}(\mathcal{W}_{k+1}(x_j^{(\varepsilon)})) = -\operatorname{sgn}(\mathcal{W}_{2s+1}(x_j^{(\varepsilon)})) = (-1)^{s+1} = (-1)^{\lfloor (k+1)/2 \rfloor}, \quad j \in \{0, 1\}.$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, concluímos que a propriedade (2.2) ocorre para todo  $n \geq 0$ . ■

## 2.2 Estimativa relacionada a seqüências de sinal alternante

Seja  $\theta_c = \arccos((c^2 - 1)/(c^2 + 1)) \in [0, \pi]$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Ao longo desta seção,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  são dois arcos fechados do círculo unitário, definidos por

$$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{T} : 0 \leq \arg(z) \leq \theta_c\} \quad (2.9)$$

e

$$\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{T} : 2\pi - \theta_c \leq \arg(z) \leq 2\pi\}. \quad (2.10)$$

Iniciamos a busca da estimativa com o caso  $c_n = (-1)^n c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 2.1.** *Seja  $\mu$  a medida de probabilidade no círculo unitário, associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $c_n = (-1)^n c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, conforme Teorema 1.14. Então, o suporte de  $\mu$  está contido em  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .*

**Demonstração:** Claramente o resultado ocorre se  $c = 0$ , pois, neste caso,  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \mathbb{T}$ .

Suponha, sem perda de generalidade,  $c > 0$  e consideremos os polinômios  $R_n(z)$  dados pela relação de recorrência de três termos (1.28).

Pelo Teorema 1.16, é suficiente mostrar que todos os  $n$  zeros de  $R_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , estão sobre  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  ou, equivalentemente, em virtude da transformação (1.32), basta provar que todos os  $n$  zeros, em  $(-1, 1)$ , das funções  $\mathcal{W}_n(x)$ , dadas por (1.33), pertencem ao conjunto  $X = (-1, -c/\sqrt{1+c^2}] \cup [c/\sqrt{1+c^2}, 1)$ , para todo  $n \geq 1$ . Para isto, usaremos indução matemática sobre  $n$ .

Como  $\mathcal{W}_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2} = x + c\sqrt{1-x^2}$ , então, claramente seu único zero, em  $(-1, 1)$ ,  $x_{1,1} = -c/\sqrt{1+c^2}$ , pertence a  $X$ .

Suponha, agora, que os  $k$  zeros de  $\mathcal{W}_k(x)$ , em  $(-1, 1)$ , pertencem ao conjunto  $X$ , para  $k \in \mathbb{N}$ .

Se  $k = 2s$ ,  $s \geq 1$ , dos resultados estabelecidos no Lema 2.1, podemos afirmar que  $\mathcal{W}_{2s}(x)$  é um polinômio par (o que significa dizer que todos os seus  $2s$  zeros são simétricos em relação à origem) e, além disso,  $-c/\sqrt{1+c^2}$  é sempre um zero de  $\mathcal{W}_{2s+1}(x)$ .

Afirmamos que  $\mathcal{W}_{2s+1}(x)$  não possui nenhum zero no intervalo  $Y = (-1, 1) \setminus X = (-c/\sqrt{1+c^2}, c/\sqrt{1+c^2})$ . De fato, suponha, por absurdo, que  $\mathcal{W}_{2s+1}(x)$  possui pelo menos um zero em  $Y$ . Então, como  $-c/\sqrt{1+c^2}$  é também um zero de  $\mathcal{W}_{2s+1}(x)$ , podemos usar a propriedade de entrelaçamento dos zeros de  $\mathcal{W}_{2s+1}(x)$  e  $\mathcal{W}_{2s}(x)$ , dada em (1.34), para concluir que  $\mathcal{W}_{2s}(x)$  possui um zero em  $Y$ . Absurdo, já que, por hipótese de indução, todos os zeros de  $\mathcal{W}_{2s}(x)$  pertencem a  $X$ . Portanto, todos os zeros de  $\mathcal{W}_{k+1}(x) = \mathcal{W}_{2s+1}(x)$  também pertencem ao conjunto  $X$ .

Analogamente, se  $k = 2s - 1$ ,  $s \geq 1$ , então  $\mathcal{W}_{k+1}(x) = \mathcal{W}_{2s}(x)$  não possui nenhum zero no intervalo  $Y$ , pois se  $\mathcal{W}_{2s}(x)$  possuir pelo menos um zero em  $Y$ , então pela simetria (em relação à origem) dos zeros de  $\mathcal{W}_{2s}(x)$  e pela propriedade de entrelaçamento dos zeros de  $\mathcal{W}_{2s}(x)$  e  $\mathcal{W}_{2s-1}(x)$ , concluímos que  $\mathcal{W}_{2s-1}(x)$  tem pelo menos um zero em  $Y$ . Absurdo, uma vez que estamos supondo todos os zeros de  $\mathcal{W}_k(x) = \mathcal{W}_{2s-1}(x)$  pertencentes a  $X$ . Consequentemente, se  $k = 2s - 1$ ,  $s \geq 1$ , todos os zeros de  $\mathcal{W}_{k+1}(x)$  também pertencem ao conjunto  $X$ . ■

O Teorema 2.1 fornece uma estimativa para o suporte da medida no caso onde  $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$ , com  $\tilde{c}_n$  uma sequência constante ( $\tilde{c}_n = c$ , para  $n \geq 1$ ). Essa primeira estimativa nos motiva a estabelecer um resultado mais geral que será tratado no próximo teorema.

**Teorema 2.2.** *Seja  $\mu$  a medida de probabilidade no círculo unitário, associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$ , com  $\tilde{c}_n \geq c > 0$ , para  $n \geq 1$ , e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, conforme Teorema 1.14. Então, o suporte de  $\mu$  está contido em  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .*

**Demonstração:** Como na prova do teorema anterior, é suficiente verificar que todos os  $n$  zeros de  $R_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , estão sobre  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  ou, equivalentemente, é suficiente mostrar que todos os  $n$  zeros, em  $(-1, 1)$ , das funções  $\mathcal{W}_n(x)$ , dadas por (1.33), pertencem ao conjunto  $X = (-1, -c/\sqrt{1+c^2}] \cup [c/\sqrt{1+c^2}, 1)$ , para todo  $n \geq 1$ .

Seja  $\varepsilon$  um número real qualquer tal que  $0 < \varepsilon < c$  e consideremos os números  $x_0^{(\varepsilon)} = -c_\varepsilon/\sqrt{1+c_\varepsilon^2}$  e  $x_1^{(\varepsilon)} = c_\varepsilon/\sqrt{1+c_\varepsilon^2}$ , onde  $c_\varepsilon = c - \varepsilon$ .

Inicialmente, mostraremos que todos os  $n$  zeros de  $\mathcal{W}_n(x)$ , em  $(-1, 1)$ , pertencem ao conjunto

$$X^{(\varepsilon)} = (-1, x_0^{(\varepsilon)}] \cup [x_1^{(\varepsilon)}, 1).$$

Para isso, usaremos, mais uma vez, indução matemática sobre  $n$ .

Note que o único zero de  $\mathcal{W}_1(x) = x - c_1\sqrt{1-x^2} = x + \tilde{c}_1\sqrt{1-x^2}$ , em  $(-1, 1)$ , é  $x_{1,1} = -\tilde{c}_1/\sqrt{1+\tilde{c}_1^2}$ . Daí, como  $\tilde{c}_1 \geq c > c_\varepsilon$ , temos  $x_{1,1} \in X^{(\varepsilon)}$  e, portanto, o resultado ocorre para  $n = 1$ .

Agora, vamos supor que todos os  $k$  zeros de  $\mathcal{W}_k(x)$ , em  $(-1, 1)$ , pertencem a  $X^{(\varepsilon)}$ , onde  $k \in \mathbb{N}$ . Afirmamos que  $\mathcal{W}_{k+1}(x)$  não possui nenhum zero no intervalo

$$Y^{(\varepsilon)} = (-1, 1) \setminus X^{(\varepsilon)} = (x_0^{(\varepsilon)}, x_1^{(\varepsilon)}).$$

Com efeito, pelo Lema 2.3, temos  $\text{sgn}(\mathcal{W}_{k+1}(x_0^{(\varepsilon)})) = \text{sgn}(\mathcal{W}_{k+1}(x_1^{(\varepsilon)}))$ . Daí, se supormos, por absurdo, que  $\mathcal{W}_{k+1}(x)$  tem, pelo menos, um zero em  $Y^{(\varepsilon)}$ , então, deverá ter, pelo menos, dois zeros em  $Y^{(\varepsilon)}$ . Consequentemente, usando a propriedade de entrelaçamento dos zeros de  $\mathcal{W}_{k+1}(x)$  e  $\mathcal{W}_k(x)$ , dada em (1.34), devemos ter, pelo menos, um zero de  $\mathcal{W}_k(x)$  no intervalo  $Y^{(\varepsilon)}$ . Mas isso não pode ocorrer já que todos os zeros de  $\mathcal{W}_k(x)$  pertencem a  $X^{(\varepsilon)}$ . Portanto, pelo princípio de indução finita, todos os zeros de  $\mathcal{W}_n(x)$  pertencem a  $X^{(\varepsilon)}$ .

Finalmente, fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0$ , podemos afirmar que todos os  $n$  zeros, em  $(-1, 1)$ , de  $\mathcal{W}_n(x)$  pertencem ao conjunto  $X$ . ■

**Corolário 2.1.** *Seja  $\mu$  a medida de probabilidade no círculo unitário, associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$ , com  $\tilde{c}_n \leq c < 0$ , para  $n \geq 1$ , e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, conforme Teorema 1.14. Então, o suporte de  $\mu$  está contido em  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ .*

**Demonstração:** Fazendo  $\hat{c}_n = -c_n$ , observamos que  $\hat{c}_n = (-1)^n (-\tilde{c}_n)$ , com  $-\tilde{c}_n \geq -c > 0$ . Logo, se  $\hat{\mu}$  é a medida de probabilidade associada ao par de sequências reais  $\{\{\hat{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  (como no Teorema 1.14), então, da prova do Teorema 2.2, concluímos que os polinômios  $\hat{R}_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , dados por (2.1), têm todos os seus  $n$  zeros pertencentes a  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . Além disso, o suporte da medida  $\hat{\mu}$  está contido em  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ . Agora, o resultado segue de uma combinação do Lema 2.2 (veja também a Observação 2.1) com o Teorema 1.16. ■

A Figura 2.1 ilustra um caso particular da estimativa obtida no Teorema 2.2.

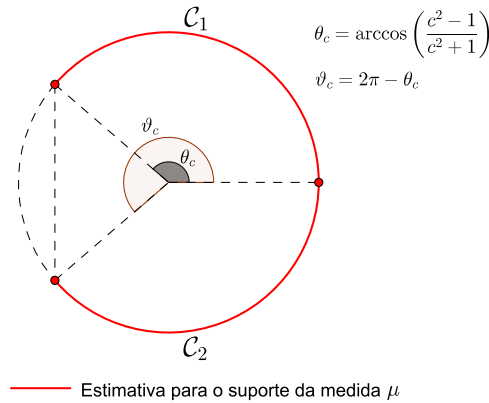


Figura 2.1: Caso  $0 < c < 1$ .

**Observação 2.2.** *No próximo capítulo forneceremos um exemplo onde é possível comparar a estimativa obtida neste capítulo, com o verdadeiro suporte da medida associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , para alguns casos onde a sequência minimal de parâmetros  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ , para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , é periódica de período 2.*

# Capítulo 3

## Alguns Resultados Relacionados a Medidas em $V_p$

Considere  $V_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , o espaço (das medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que as respectivas sequências de coeficientes de Verblunsky são  $p$ -periódicas) definido na Introdução deste trabalho (veja, também, Subseção 1.2.2). Neste capítulo, apresentamos alguns resultados novos sobre medidas em  $V_p$ , obtidas a partir de um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva. Vamos impor a restrição de sinal  $c_{2n} = -c_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ , sobre a sequência  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e uma  $p$ -periodicidade nas sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  (onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ ) para estabelecer uma caracterização para medidas no espaço  $V_p$  em termos do par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ . Veremos, ainda, uma nova abordagem para pontos puros de medidas em  $V_p$  com o uso da teoria de sequências encadeadas positivas.

Os resultados deste capítulo também podem ser encontrados no artigo [7], aceito para publicação na revista *Computational and Applied Mathematics*.

### 3.1 Caracterização em termos de um par de sequências reais

O primeiro teorema da presente seção fornece uma caracterização para medidas no espaço  $V_p$  em termos de um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva. Ao longo desta seção,  $b_n = 1 - 2m_n$ ,  $n \geq 1$ , onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Teorema 3.1.** *Seja  $\mu$  a medida de probabilidade no círculo unitário associado ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , conforme descrito no Teorema 1.14. Então,  $\mu \in V_p$  se, e somente se, para  $n \geq 0$ ,*

$$\frac{b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2}{1 + c_{n+1}^2} = \frac{b_{n+p+1}^2 + c_{n+p+1}^2}{1 + c_{n+p+1}^2} \quad (3.1)$$

e

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} \arg \left( \frac{1 + ic_j}{1 - ic_j} \right) = \arg \left( \frac{b_{n+1} - ic_{n+1}}{1 - ic_{n+1}} \right) - \arg \left( \frac{b_{n+p+1} - ic_{n+p+1}}{1 - ic_{n+p+1}} \right) + 2k_n\pi, \quad (3.2)$$

com  $k_n \in \mathbb{Z}$ . Aqui, se  $z \in \mathbb{C}$  é tal que  $z = re^{i(\theta_0 + 2k\pi)}$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $|z| = r$  e  $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ , então  $\arg z = \theta_0$ .

**Demonstração:** Seja  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  a sequência de coeficientes de Verblunsky associada a  $\mu$ . Da relação dada em (1.25), observamos que, para  $n \geq 0$ ,  $\alpha_{n+p} = \alpha_n$  (isto é,  $\mu \in V_p$ ) se, e somente se,

$$\bar{\rho}_{n+p} \left[ \frac{b_{n+p+1} - ic_{n+p+1}}{1 - ic_{n+p+1}} \right] = \bar{\rho}_n \left[ \frac{b_{n+1} - ic_{n+1}}{1 - ic_{n+1}} \right],$$

ou, equivalentemente, usando (1.26),

$$\left[ \prod_{j=n+1}^{n+p} \frac{1 + ic_j}{1 - ic_j} \right] \left[ \frac{b_{n+p+1} - ic_{n+p+1}}{1 - ic_{n+p+1}} \right] = \left[ \frac{b_{n+1} - ic_{n+1}}{1 - ic_{n+1}} \right].$$

Agora, o resultado segue comparando-se os módulos e os argumentos dos números

$$\left[ \prod_{j=n+1}^{n+p} \frac{1 + ic_j}{1 - ic_j} \right] \left[ \frac{b_{n+p+1} - ic_{n+p+1}}{1 - ic_{n+p+1}} \right] \quad \text{e} \quad \left[ \frac{b_{n+1} - ic_{n+1}}{1 - ic_{n+1}} \right], \quad n \geq 0.$$

■

**Corolário 3.1.** *Seja  $\mu$  a medida de probabilidade no círculo unitário associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  como no Teorema 1.14. Suponha que  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  são periódicas de período  $p$  e que a sequência  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  satisfaz  $c_{2s} = -c_{2s-1}$ , para  $s \geq 1$ . Então,*

(i) *se  $p$  é par,  $\mu \in V_p$ ;*

(ii) *se  $p$  é ímpar,  $\mu \in S \cap V_p$ , onde  $S$  denota o espaço das medidas simétricas sobre  $\mathbb{T}$ .*

**Demonstração:** Como as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  são  $p$ -periódicas, claramente a condição (3.1) do Teorema 3.1 ocorre, para  $n \geq 0$ . Além disso,

$$\arg \left( \frac{b_{n+1} - ic_{n+1}}{1 - ic_{n+1}} \right) = \arg \left( \frac{b_{n+p+1} - ic_{n+p+1}}{1 - ic_{n+p+1}} \right), \quad n \geq 0. \quad (3.3)$$

Agora, se  $p$  é par e  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  satisfaz  $c_{2s} = -c_{2s-1}$ , para  $s \geq 1$ , então

$$\sum_{j=n+1}^{n+p} \arg \left( \frac{1 + ic_j}{1 - ic_j} \right) = 2k_n\pi, \quad n \geq 0, \quad k_n \in \mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Logo, usando (3.3) e (3.4), concluímos que a condição (3.2) do Teorema 3.1 também é satisfeita. Consequentemente,  $\mu \in V_p$ .

Por outro lado, se  $p$  é ímpar, usando a periodicidade de  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e a hipótese que  $c_{2s} = -c_{2s-1}$ ,  $s \geq 1$ , concluímos que  $c_n = 0$ , para todo  $n \geq 1$ . Portanto,  $\mu$  é simétrica (veja Observação 1.6). Além disso, como  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$  é  $p$ -periódica e  $c_n = 0$ , para  $n \geq 1$ , as condições (3.1) e (3.2) do Teorema 3.1 podem ser facilmente verificadas. Portanto,  $\mu \in V_p$ . ■

**Observação 3.1.** *Seja  $N_p$  o espaço definido na Introdução deste trabalho, isto é, o espaço das medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que as seqüências dos respectivos pares associados  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  são periódicas com período  $p$ . Utilizando o Exemplo 1.7, podemos afirmar que  $\omega_0 \in N_p \cap V_p$  para qualquer  $p \in \mathbb{N}$ , onde  $\omega_0$  denota a medida de Lebesgue. Além disso, o Corolário 3.1 mostra que se escolhermos uma medida  $\mu \in N_p$  tal que  $c_{2s} = -c_{2s-1}$ ,  $s \geq 1$ , então  $\mu \in N_p \cap V_p$ . Logo, o conjunto  $(N_p \cap V_p) \setminus \{\omega_0\}$  é sempre não vazio. No próximo capítulo, estudaremos algumas propriedades importantes do espaço  $N_p$  e forneceremos uma caracterização para  $N_p \cap V_p$  em termos de uma subvariedade de  $\mathbb{R}^p$  de dimensão  $p - 1$ .*

### 3.1.1 Interpretação geométrica

O próximo resultado estabelece uma caracterização geométrica para a escolha de  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$  considerada no corolário anterior.

**Teorema 3.2.** *Considere  $p$  um número natural par e seja  $\mu$  a medida de probabilidade associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n\}_{n=1}^{\infty}\}$  como no Teorema 1.14. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *As seqüências  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$  são  $p$ -periódicas, com  $c_{2n} = -c_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ .*
- (ii) *A seqüência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ , associada à medida  $\mu$ , é  $p$ -periódica, isto é,  $\mu \in V_p$ . Além disso, para cada  $k \in \{0, 1, \dots, (p-2)/2\}$ , as retas  $r_{2k}$ , passando por  $\alpha_{2k}$  e 1, e  $r_{2k+1}$ , passando por  $\alpha_{2k+1}$  e  $-1$ , são paralelas.*

**Demonstração:** Se  $p$  é par e as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  são  $p$ -periódicas, com  $c_{2n} = -c_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ , então pelo Corolário 3.1 é imediato que  $\mu \in V_p$ . Por outro lado, usando (1.25) e (1.26), obtemos

$$\alpha_{2n} = \frac{b_{2n+1} + ic_{2n+2}}{1 + ic_{2n+2}} = 1 + \lambda_{2n}(-1 - ic_{2n+1}), \quad n \geq 0,$$

onde  $\lambda_{2n} = (1 - b_{2n+1})/(1 + c_{2n+1}^2)$  e, também,

$$\alpha_{2n+1} = \frac{b_{2n+2} - ic_{2n+2}}{1 + ic_{2n+2}} = -1 + \lambda_{2n+1}(-1 + ic_{2n+2}), \quad n \geq 0,$$

onde  $\lambda_{2n+1} = -(1 + b_{2n+2})/(1 + c_{2n+2}^2)$ .

Portanto, para cada  $k \in \{0, 1, \dots, (p-2)/2\}$ , podemos ver que  $\alpha_{2k} \in r_{2k}$  e  $\alpha_{2k+1} \in r_{2k+1}$ , onde  $r_{2k}$  e  $r_{2k+1}$  são retas com equações paramétricas dadas, respectivamente, por

$$r_{2k}(t) = 1 + t(-1 - ic_{2k+1}) \quad \text{e} \quad r_{2k+1}(t) = -1 + t(-1 + ic_{2k+2}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, como  $-1 - ic_{2k+1} = -1 + ic_{2k+2}$ , concluímos que as retas  $r_{2k}$  e  $r_{2k+1}$  são paralelas, para cada  $k \in \{0, 1, \dots, (p-2)/2\}$ .

Reciprocamente, consideremos  $\alpha_j = x_j + iy_j$ ,  $j \geq 0$ . Se  $j = 2s$ ,  $s \geq 0$ , podemos escrever

$$\alpha_{2s} = 1 + \tilde{\lambda}_{2s}(-1 - i\tilde{c}_{2s+1}), \quad s \geq 0, \quad (3.5)$$

onde

$$\tilde{\lambda}_{2s} = \frac{1 - \tilde{b}_{2s+1}}{1 + \tilde{c}_{2s+1}^2}, \quad \tilde{c}_{2s+1} = \frac{y_{2s}}{x_{2s} - 1} \quad \text{e} \quad \tilde{b}_{2s+1} = 1 + \frac{(x_{2s} - 1)^2 + y_{2s}^2}{x_{2s} - 1}. \quad (3.6)$$

Da mesma maneira, se  $j = 2s + 1$ ,  $s \geq 0$ , podemos também escrever

$$\alpha_{2s+1} = -1 + \tilde{\lambda}_{2s+1}(-1 + i\tilde{c}_{2s+2}), \quad s \geq 0, \quad (3.7)$$

onde

$$\tilde{\lambda}_{2s+1} = -\frac{1 + \tilde{b}_{2s+2}}{1 + \tilde{c}_{2s+2}^2}, \quad \tilde{c}_{2s+2} = -\frac{y_{2s+1}}{1 + x_{2s+1}} \quad \text{e} \quad \tilde{b}_{2s+2} = -1 + \frac{(1 + x_{2s+1})^2 + y_{2s+1}^2}{1 + x_{2s+1}}. \quad (3.8)$$

Uma vez que, por hipótese,  $\mu \in V_p$ , temos  $\alpha_{j+p} = \alpha_j$ ,  $j \geq 0$ . Consequentemente,  $x_{j+p} = x_j$  e  $y_{j+p} = y_j$ . Daí, como  $p$  é par, fazendo  $\tilde{b}_k = 1 - 2\tilde{m}_k$ ,  $k \geq 1$ , e usando os valores obtidos para  $\tilde{c}_k$  e  $\tilde{b}_k$  em (3.6) e (3.8), podemos verificar que

$$\tilde{c}_{n+p} = \tilde{c}_n \quad \text{e} \quad \tilde{m}_{n+p} = \tilde{m}_n, \quad n \geq 1. \quad (3.9)$$

Agora, para cada  $k \in \{0, 1, \dots, (p-2)/2\}$ , seja  $r_{2k}$  a reta passando por  $\alpha_{2k}$  e 1, e  $r_{2k+1}$  a reta passando por  $\alpha_{2k+1}$  e  $-1$ . Por hipótese,  $r_{2k}$  e  $r_{2k+1}$  são paralelas. Logo,

comparando os vetores diretores das retas  $r_{2k}$  e  $r_{2k+1}$  fornecidos, respectivamente, nas equações (3.5) e (3.7), obtemos

$$\tilde{c}_{2k+2} = -\tilde{c}_{2k+1}, \quad k \in \{0, 1, \dots, (p-2)/2\}. \quad (3.10)$$

Usando o resultado obtido em (3.10) e a  $p$ -periodicidade de  $\tilde{c}_n$  estabelecida na primeira igualdade de (3.9), temos

$$\tilde{c}_{2n+2} = -\tilde{c}_{2n+1}, \quad n \geq 0. \quad (3.11)$$

Além disso, substituindo os valores de  $\tilde{\lambda}_{2s}$  e  $\tilde{\lambda}_{2s+1}$  (dados em (3.6) e (3.8), respectivamente) nas equações (3.5) e (3.7), respectivamente, encontramos

$$\alpha_{2n} = \frac{\tilde{b}_{2n+1} - i\tilde{c}_{2n+1}}{1 - i\tilde{c}_{2n+1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{2n+1} = \frac{\tilde{b}_{2n+2} - i\tilde{c}_{2n+2}}{1 + i\tilde{c}_{2n+2}}, \quad n \geq 0. \quad (3.12)$$

Finalmente, utilizando a fórmula (1.25) para  $\alpha_n$  e as relações (1.26), (3.11) e (3.12), podemos usar indução matemática (sobre  $n$ ) para concluir que

$$\tilde{c}_n = c_n \quad \text{e} \quad \tilde{m}_n = m_n, \quad n \geq 1. \quad (3.13)$$

O resultado segue agora de (3.9), (3.11) e (3.13). ■

**Observação 3.2.** *O Teorema 3.2 mostra que podemos escolher uma sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$   $p$ -periódica ( $p$  par), com esses coeficientes sobre determinadas retas paralelas, escolhendo, equivalentemente, as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  também  $p$ -periódicas e tal que  $c_{2s+2} = -c_{2s+1}$ ,  $s \geq 0$ . Nas Figuras 3.1 e 3.2 ilustramos alguns exemplos de possíveis escolhas para  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ .*

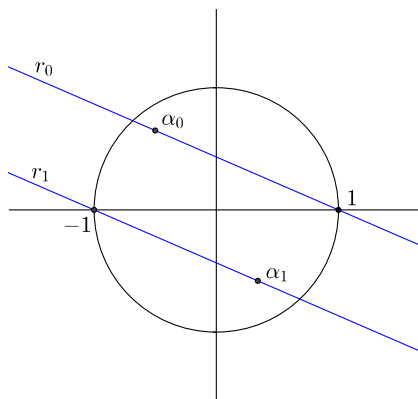


Figura 3.1: Coeficientes de Verblunsky associados à escolha  $\{c_n\}_{n=1}^\infty = \{-c, c, -c, c, \dots\}$

e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty = \{m_1, m_2, m_1, m_2, \dots\}$ , com  $c > 0$  e  $p = 2$ .

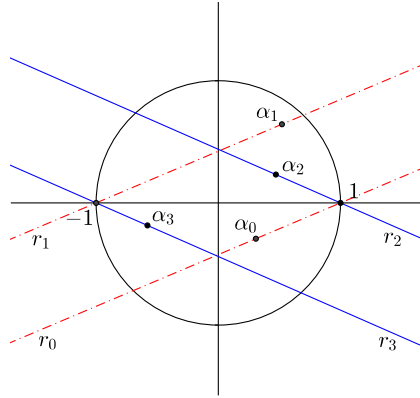


Figura 3.2: Coeficientes de Verblunsky associados à escolha  $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-c_2, c_2, -c_4, c_4, -c_2, c_2, \dots\}$  e  $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_1, m_2, \dots\}$ , com  $c_2 < 0$ ,  $c_4 > 0$  e  $p = 4$ .

## 3.2 Uma nova abordagem para pontos puros de medidas em $V_p$

Iniciamos esta seção com um lema que caracteriza um possível ponto puro (denotado por  $w$ ) de uma medida  $\tilde{\mu}$  em termos da sequência  $\{\tau_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$  definida em (1.30).

**Lema 3.1.** *Seja  $\tilde{\mu} \in V_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Então,  $w$  é um possível ponto puro da medida  $\tilde{\mu}$  se, e somente se, a sequência  $\{\tau_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ , definida em (1.30), é periódica de período  $p$ .*

**Demonstração:** Inicialmente, afirmamos que

$$\{\tau_n(w)\}_{n=0}^{\infty} \text{ é } p\text{-periódica se, e somente se, } \tau_p(w) = 1. \quad (3.14)$$

De fato, se  $\{\tau_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$  é  $p$ -periódica, então  $\tau_p(w) = \tau_0(w) = 1$ . Reciprocamente, se  $\tau_p(w) = 1$ , temos  $\tau_p(w) = 1 = \tau_0(w)$ . Além disso, se  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  é a sequência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\tilde{\mu}$  e se  $\tau_{p+k}(w) = \tau_k(w)$  ocorre para  $k \in \mathbb{N}$ , então, podemos usar a  $p$ -periodicidade da sequência  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  e a recorrência (1.30) para obter

$$\tau_{p+k+1}(w) = \frac{w\tau_{p+k}(w) - \bar{\alpha}_{p+k}}{1 - w\tau_{p+k}(w)\alpha_{p+k}} = \frac{w\tau_k(w) - \bar{\alpha}_k}{1 - w\tau_k(w)\alpha_k} = \tau_{k+1}(w).$$

Logo, por indução matemática, podemos afirmar que  $\{\tau_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$  é  $p$ -periódica.

Utilizando os Teoremas 1.5 e 1.6, observamos que  $w$  é um possível ponto puro de  $\tilde{\mu}$  se, e somente se,  $\phi_p(w) - \phi_p^*(w) = 0$ , onde  $\phi_p$  é o  $p$ -ésimo polinômio ortogonal da sequência de polinômios ortogonais  $\{\phi_n\}_{n=0}^{\infty}$  com relação à medida  $\tilde{\mu}$ , e  $\phi_p^*$  é o seu recíproco. Por outro lado, usando (1.30), a condição  $\phi_p(w) - \phi_p^*(w) = 0$  equivale a dizer que  $\tau_p(w) = 1$ . Assim,

$$\tau_p(w) = 1 \text{ se, e somente se, } w \text{ é um possível ponto puro de } \tilde{\mu}. \quad (3.15)$$

O resultado segue, portanto, das equivalências (3.14) e (3.15).  $\blacksquare$

O teorema a seguir é uma consequência do Teorema 1.15 e fornece uma maneira de identificar, a partir do ponto de vista de seqüências encadeadas, os pontos puros (e calcular as respectivas massas) de uma medida  $\tilde{\mu}$ , cuja seqüência associada de coeficientes de Verblunsky é  $p$ -periódica, isto é,  $\tilde{\mu} \in V_p$ . Em [36] há uma outra abordagem para o mesmo problema, sem o uso de seqüências encadeadas (veja Teorema 1.6).

**Teorema 3.3.** *Seja  $\tilde{\mu} \in V_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Consideremos  $\{\alpha_n^{(\tilde{\mu})}\}_{n=0}^\infty$  a seqüência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\tilde{\mu}$  e  $\{\tau_n^{(\tilde{\mu})}(w)\}_{n=0}^\infty$  a seqüência definida em (1.30). Suponha que  $w$  é um ponto no círculo unitário tal que  $\phi_p(w) - \phi_p^*(w) = 0$ , onde  $\phi_p$  é o  $p$ -ésimo polinômio ortogonal da seqüência de polinômios ortogonais  $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$  com relação à medida  $\tilde{\mu}$ , e  $\phi_p^*$  é o seu recíproco. Então,  $w$  é um ponto puro de  $\tilde{\mu}$  se, e somente se,*

$$\prod_{j=1}^p |1 - w\tau_{j-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2 < \prod_{j=1}^p [1 - |\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2].$$

Além disso, se  $w$  é um ponto puro de  $\tilde{\mu}$ , então o tamanho da massa neste ponto é dado por

$$\tilde{\mu}(\{w\}) = \frac{\gamma}{\gamma + \zeta},$$

$$\text{onde } \zeta = \sum_{n=1}^p \prod_{j=1}^n \frac{|1 - w\tau_{j-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2} \text{ e } \gamma = 1 - \prod_{j=1}^p \frac{|1 - w\tau_{j-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2}.$$

**Demonstração:** Consideremos  $q_j = |1 - w\tau_{j-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2 / [1 - |\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2]$ , para  $j \geq 1$ . Pelo Teorema 1.15 sabemos que  $w$  é um ponto puro de  $\tilde{\mu}$  se, e somente se, a soma infinita  $s(w) = \sum_{n=1}^\infty \prod_{j=1}^n q_j$  é convergente.

Por hipótese,  $w$  é um ponto no círculo unitário tal que  $\phi_p(w) - \phi_p^*(w) = 0$  ou, equivalentemente,  $w$  é um possível ponto puro da medida  $\tilde{\mu}$  (veja os Teoremas 1.5 e 1.6). Consequentemente, usando o Lema 3.1 e a  $p$ -periodicidade da seqüência  $\{\alpha_n^{(\tilde{\mu})}\}_{n=0}^\infty$ , obtemos

$$q_{j+p} = \frac{|1 - w\tau_{j+p-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j+p-1}^{(\tilde{\mu})}|^2}{1 - |\alpha_{j+p-1}^{(\tilde{\mu})}|^2} = \frac{|1 - w\tau_{j-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2} = q_j, \quad j \geq 1.$$

Portanto, fazendo  $q = \prod_{j=1}^p q_j$ , podemos escrever  $s(w)$  como

$$s(w) = q_1 \left( \sum_{n=0}^\infty q^n \right) + q_1 q_2 \left( \sum_{n=0}^\infty q^n \right) + \cdots + q_1 q_2 \cdots q_p \left( \sum_{n=0}^\infty q^n \right). \quad (3.16)$$

Observe que  $s(w)$  é convergente se, e somente se,  $|q| < 1$ . Daí,  $w$  é um ponto puro de  $\tilde{\mu}$  se, e somente se,

$$\prod_{j=1}^p \frac{|1 - w\tau_{j-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2} < 1,$$

ou, ainda,  $w$  é um ponto puro de  $\tilde{\mu}$  se, e somente se,

$$\prod_{j=1}^p |1 - w\tau_{j-1}^{(\tilde{\mu})}(w)\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2 < \prod_{j=1}^p [1 - |\alpha_{j-1}^{(\tilde{\mu})}|^2].$$

Além disso, se  $|q| < 1$  (isto é, se  $w$  é um ponto puro de  $\tilde{\mu}$ ), podemos usar (3.16) para concluir que

$$s(w) = \left(\frac{1}{1-q}\right) \left(\sum_{n=1}^p \prod_{j=1}^n q_j\right) = \frac{\zeta}{\gamma}. \quad (3.17)$$

Finalmente, pelo Teorema 1.15 e por (3.17), temos

$$\tilde{\mu}(\{w\}) = \frac{1}{1+s(w)} = \frac{\gamma}{\gamma+\zeta}.$$

■

### 3.3 Um exemplo

Nesta seção, apresentamos um exemplo que ilustra alguns dos resultados obtidos neste capítulo. Inicialmente, estabelecemos um teorema (e consequente corolário) que será importante para o desenvolvimento do referido exemplo.

Seja  $\mu$  a medida associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  (conforme Teorema 1.14), onde  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  satisfaz a condição  $c_{2n} = -c_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ . A partir da medida  $\mu$  desejamos obter uma nova medida  $\hat{\mu}$  associada ao par  $\{\{\hat{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{\hat{d}_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde a seqüência  $\{\hat{c}_n\}_{n=1}^\infty$  deve satisfazer a condição  $\hat{c}_{2n} = \hat{c}_{2n-1} = c_{2n}$ ,  $n \geq 1$ .

Consideremos a seqüência de números complexos  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ , dada por

$$\beta_n = -\left(\frac{1+ic_{2n}}{1-ic_{2n}}\right), \quad n \geq 1. \quad (3.18)$$

O próximo teorema mostra como obter a medida desejada  $\hat{\mu}$  a partir da medida  $\mu$  dada.

**Teorema 3.4.** *Seja  $\mu$  a medida de probabilidade no círculo unitário associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  como no Teorema 1.14 e tal que  $c_{2n} = -c_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ . Consideremos  $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$  a seqüência de números complexos definida por (3.18) e seja  $\hat{\mu}$  a medida associada a seqüência de coeficientes de Verblunsky  $\{\hat{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$ , dada por*

$$\hat{\alpha}_{2n+1} = \left(\prod_{j=1}^{n+1} \beta_j^2\right) \alpha_{2n+1} \quad e \quad \hat{\alpha}_{2n} = \left(\prod_{j=1}^n \beta_j^2\right) \beta_{n+1} \alpha_{2n}, \quad n \geq 0, \quad (3.19)$$

onde  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência de coeficientes de Verblunsky correspondente a  $\mu$ . Se  $\{\{\hat{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{\hat{d}_n\}_{n=1}^\infty\}$  é o par de seqüências reais associado à medida  $\hat{\mu}$  (como no Teorema 1.14) e se  $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência minimal de parâmetros para  $\{\hat{d}_n\}_{n=1}^\infty$ , então

$$\hat{c}_{2n} = \hat{c}_{2n-1} = c_{2n}, \quad \hat{m}_{2n-1} = 1 - m_{2n-1} \quad \text{e} \quad \hat{m}_{2n} = m_{2n}, \quad n \geq 1,$$

onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência minimal de parâmetros para a seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Demonstração:** Seja  $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$  a seqüência dada por (1.26) (veja Teorema 1.14). Usando a hipótese que  $c_{2n} = -c_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ , obtemos

$$\rho_{2n} = 1 \quad \text{e} \quad \rho_{2n+1} = \frac{1 + ic_{2n+2}}{1 - ic_{2n+2}}, \quad n \geq 0. \quad (3.20)$$

Logo, de (1.25) e (3.20), temos

$$\alpha_{2n} = \frac{1 - 2m_{2n+1} + ic_{2n+2}}{1 + ic_{2n+2}} \quad \text{e} \quad \alpha_{2n+1} = \frac{1 - 2m_{2n+2} - ic_{2n+2}}{1 + ic_{2n+2}}, \quad n \geq 0. \quad (3.21)$$

Agora, seja  $\{\check{m}_n\}_{n=0}^\infty$  a seqüência minimal de parâmetros para uma seqüência encadeada positiva  $\{\check{d}_n\}_{n=1}^\infty$  e seja  $\{\check{\alpha}_n\}_{n=0}^\infty$  a seqüência de coeficientes de Verblunsky correspondente à medida de probabilidade no círculo unitário  $\check{\mu}$ , associada ao par de seqüências reais  $\{\{\check{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{\check{d}_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde

$$\check{c}_{2n} = \check{c}_{2n-1} = c_{2n}, \quad \check{m}_{2n-1} = 1 - m_{2n-1} \quad \text{e} \quad \check{m}_{2n} = m_{2n}, \quad n \geq 1. \quad (3.22)$$

Usando as relações (1.25), (1.26), (3.18), (3.19), (3.21) e (3.22), podemos ver que, para  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_{2n+1} &= \left( \frac{1 + i\check{c}_{2n+1}}{1 - i\check{c}_{2n+1}} \right) \left( \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 + i\check{c}_k}{1 - i\check{c}_k} \right) \left[ \frac{1 - 2\check{m}_{2n+2} - i\check{c}_{2n+2}}{1 - i\check{c}_{2n+2}} \right] \\ &= \left( \frac{1 + ic_{2n+2}}{1 - ic_{2n+2}} \right)^2 \left[ \prod_{j=1}^n \left( \frac{1 + ic_{2j}}{1 - ic_{2j}} \right)^2 \right] \left[ \frac{1 - 2m_{2n+2} - ic_{2n+2}}{1 + ic_{2n+2}} \right] \\ &= \left( \prod_{j=1}^{n+1} \beta_j^2 \right) \alpha_{2n+1} = \hat{\alpha}_{2n+1}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \check{\alpha}_{2n} &= \left( \prod_{k=1}^{2n} \frac{1 + i\check{c}_k}{1 - i\check{c}_k} \right) \left[ \frac{1 - 2\check{m}_{2n+1} - i\check{c}_{2n+1}}{1 - i\check{c}_{2n+1}} \right] \\ &= \left[ \prod_{j=1}^n \left( \frac{1 + ic_{2j}}{1 - ic_{2j}} \right)^2 \right] \left[ - \left( \frac{1 + ic_{2n+2}}{1 - ic_{2n+2}} \right) \right] \left[ \frac{1 - 2m_{2n+1} + ic_{2n+2}}{1 + ic_{2n+2}} \right] \\ &= \left( \prod_{j=1}^n \beta_j^2 \right) \beta_{n+1} \alpha_{2n} = \hat{\alpha}_{2n}. \end{aligned}$$

Assim,  $\hat{\alpha}_n = \check{\alpha}_n$  para  $n \geq 0$ . Consequentemente, utilizando o Teorema 1.2, concluímos que  $\hat{\mu} = \check{\mu}$ . Portanto, da unicidade do par  $\{\{\hat{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{\hat{d}_n\}_{n=1}^\infty\}$ , dada pelo Teorema 1.14, temos  $\hat{m}_0 = \check{m}_0 = 0$ ,

$$\hat{c}_n = \check{c}_n \quad \text{e} \quad \hat{m}_n = \check{m}_n, \quad n \geq 1. \quad (3.23)$$

Agora, o resultado segue de (3.22) e (3.23). ■

**Corolário 3.2.** *Seja  $\mu$  a medida de probabilidade no círculo unitário associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  como no Teorema 1.14 e tal que  $c_n = (-1)^n c$ ,  $n \geq 1$  e  $c \in \mathbb{R}$ . Se  $\beta = -(1+ic)/(1-ic)$ ,  $\{\{\hat{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{\hat{d}_n\}_{n=1}^\infty\}$  é o par de seqüências reais associado à medida  $\hat{\mu}(z) = \mu(\beta z)$  e se  $\{\hat{m}_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência minimal de parâmetros para  $\{\hat{d}_n\}_{n=1}^\infty$ , então*

$$\hat{c}_n = c, \quad \hat{m}_{2n-1} = 1 - m_{2n-1} \quad \text{e} \quad \hat{m}_{2n} = m_{2n}, \quad n \geq 1,$$

onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência minimal de parâmetros para a seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

**Demonstração:** Uma vez que a medida  $\hat{\mu}$  é uma rotação da medida  $\mu$  pelo ponto  $\beta$ , isto é,  $\hat{\mu}(z) = \mu(\beta z)$ , os correspondentes coeficientes de Verblunsky se relacionam da seguinte forma (veja Observação 1.5):

$$\hat{\alpha}_n = \beta^{n+1} \alpha_n, \quad n \geq 0. \quad (3.24)$$

Além disso, como  $c_n = (-1)^n c$ ,  $n \geq 1$ , usamos (3.18) para concluir que

$$\beta_k = - \left( \frac{1 + ic_{2k}}{1 - ic_{2k}} \right) = - \left( \frac{1 + ic}{1 - ic} \right) = \beta, \quad k \geq 1. \quad (3.25)$$

Desta forma, de (3.24) e (3.25), observamos que as condições requeridas em (3.19) são satisfeitas e o resultado segue diretamente do Teorema 3.4. ■

Daremos início, neste momento, ao exemplo que ilustrará alguns dos resultados obtidos neste capítulo.

**Exemplo 3.1.** *Sejam  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  seqüências reais definidas, respectivamente, por*

$$c_n = (-1)^n c \quad \text{e} \quad d_n = (1 - m_{n-1})m_n, \quad n \geq 1,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e a seqüência real  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é tal que  $m_0 = 0$ ,

$$m_{2n-1} = \frac{1 - b_1}{2} \quad \text{e} \quad m_{2n} = \frac{1 - b_2}{2}, \quad n \geq 1,$$

com  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ,  $|b_1| < 1$  e  $|b_2| < 1$ .

Note que  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, onde  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sua sequência minimal de parâmetros. Além disso,  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  satisfaz  $c_{2n} = -c_{2n-1}$ ,  $n \geq 1$ , e as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  são periódicas de período 2.

Pelo Teorema 1.14, associado ao par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , existe uma única medida de probabilidade não trivial, digamos  $\mu$ , com suporte no círculo unitário.

Usando o Corolário 3.1, podemos concluir que  $\mu \in V_2$ , ou seja, a sequência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\mu$ , digamos  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ , é periódica com período  $p = 2$  (na Figura 3.1 ilustramos a posição desses coeficientes para um caso onde  $c > 0$ ).

A expressão em (1.26) e a definição de  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  nos garantem que

$$\rho_{2n} = 1 \quad e \quad \rho_{2n+1} = \frac{1 + ic}{1 - ic}, \quad n \geq 0. \quad (3.26)$$

Consequentemente, usando (1.25) e (3.26), obtemos

$$\alpha_{2n} = \frac{b_1 + ic}{1 + ic} = \frac{(b_1 + c^2) + ic(1 - b_1)}{1 + c^2}, \quad n \geq 0, \quad (3.27)$$

e

$$\alpha_{2n+1} = \frac{b_2 - ic}{1 + ic} = \frac{(b_2 - c^2) - ic(1 + b_2)}{1 + c^2}, \quad n \geq 0. \quad (3.28)$$

Neste caso, a função discriminante  $\Delta(z) = z^{-1}\text{Tr}(T_2(z))$  (definida na Subseção 1.2.2 por meio das relações (1.20) e (1.21)) é tal que

$$T_2(z) = (1 - |\alpha_0|^2)^{-1/2}(1 - |\alpha_1|^2)^{-1/2} \begin{pmatrix} z & -\bar{\alpha}_1 \\ -\alpha_1 z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & -\bar{\alpha}_0 \\ -\alpha_0 z & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí, utilizando os valores de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  obtidos, respectivamente, por meio das equações dadas em (3.27) e (3.28), podemos ver que

$$\Delta(e^{i\theta}) = 2 \left\{ \frac{1 + c^2}{[(1 - b_1^2)(1 - b_2^2)]^{1/2}} \cos \theta + \frac{b_1 b_2 - c^2}{[(1 - b_1^2)(1 - b_2^2)]^{1/2}} \right\}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (3.29)$$

Agora, vamos determinar as bands,  $B_1$  e  $B_2$ , associadas à medida  $\mu$ , conforme (1.22). Resolvendo a equação  $\Delta(e^{i\theta}) = 2$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , encontramos as soluções

$$\theta_1^+ = \arccos \left( \frac{((1 - b_1^2)^{1/2}(1 - b_2^2)^{1/2} + c^2 - b_1 b_2)}{1 + c^2} \right) \quad e \quad \theta_2^+ = 2\pi - \theta_1^+. \quad (3.30)$$

Da mesma forma, resolvendo  $\Delta(e^{i\theta}) = -2$ , obtemos

$$\theta_1^- = \arccos \left( \frac{c^2 - (1 - b_1^2)^{1/2}(1 - b_2^2)^{1/2} - b_1 b_2}{1 + c^2} \right) \quad e \quad \theta_2^- = 2\pi - \theta_1^-. \quad (3.31)$$

Logo, cada band  $B_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , é determinada pelos pontos  $z_j^+ = e^{i\theta_j^+}$  e  $z_j^- = e^{i\theta_j^-}$ . Precisamente,

$$B_1 = \{z \in \mathbb{T} : \theta_1^+ \leq \arg(z) \leq \theta_1^-\} \quad e \quad B_2 = \{z \in \mathbb{T} : \theta_2^- \leq \arg(z) \leq \theta_2^+\}, \quad (3.32)$$

onde  $\theta_j^+$  e  $\theta_j^-$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , são dados, respectivamente, por (3.30) e (3.31).

De (3.29), temos

$$\sqrt{4 - \Delta^2(e^{i\theta})} = 2 \sqrt{1 - \left[ \frac{(1 + c^2) \cos \theta + b_1 b_2 - c^2}{(1 - b_1^2)^{1/2} (1 - b_2^2)^{1/2}} \right]^2}, \quad \theta \in [0, 2\pi). \quad (3.33)$$

Por outro lado, se considerarmos o polinômio ortogonal normalizado  $\varphi_2(z) = \kappa_2 \phi_2(z)$  (da sequência,  $\{\varphi_n\}_{n=0}^\infty$ , de polinômios ortornormais com respeito a  $\mu$ ), podemos usar a primeira relação de (1.15) e a segunda expressão de (1.16) para concluir que

$$\varphi_2(z) = \frac{(1 + c^2)z^2 + [(b_1 b_2 - b_1 - 2c^2) + ic(b_2 + 1)]z + [(c^2 - b_2) - ic(b_2 + 1)]}{(1 - b_1^2)^{1/2} (1 - b_2^2)^{1/2}}.$$

Assim, para  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,

$$\mathcal{I}m(e^{-i\theta} \varphi_2(e^{i\theta})) = \frac{(1 + b_2)[\text{sen } \theta + c(1 - \cos \theta)]}{(1 - b_1^2)^{1/2} (1 - b_2^2)^{1/2}}. \quad (3.34)$$

Portanto, usando (3.33) e (3.34), podemos afirmar (pelo Teorema 1.4) que a função peso  $w(\theta)$  associada à medida  $\mu$  é dada por

$$w(\theta) = \frac{\sqrt{(1 - b_1^2)(1 - b_2^2) - [(1 + c^2) \cos \theta + b_1 b_2 - c^2]^2}}{|(1 + b_2)[\text{sen } \theta + c(1 - \cos \theta)]|},$$

onde  $\theta$  é tal que  $e^{i\theta} \in \cup_{j=1}^2 B_j$ .

De acordo com os Teoremas 1.5 e 1.6, para determinar os possíveis pontos puros de  $\mu$  precisamos resolver a equação  $\phi_2(z) - \phi_2^*(z) = 0$ , cujas soluções são

$$w_1 = 1 \quad e \quad w_2 = \frac{(c^2 - 1) - 2ci}{1 + c^2} = -\frac{1 + ic}{1 - ic}. \quad (3.35)$$

Podemos, agora, fornecer uma completa caracterização relativa a parte singular da medida  $\mu$  em termos dos parâmetros  $b_1$ ,  $b_2$  e  $c$ .

Primeiro, analisamos o candidato a ponto puro  $w_1 = 1$ . Usando a Observação 1.4, temos  $\tau_n(w_1) = \rho_n$ , onde a sequência  $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$  é dada por (3.26). Logo, a sequência  $\{\tau_n(w_1)\}_{n=0}^\infty$  é periódica de período  $p = 2$ , o que era esperado pelo Lema 3.1.

Pelo Teorema 3.3,  $w_1$  é um ponto puro de  $\mu$  se, e somente se,  $b_1 + b_2 > 0$ . Além disso, se  $b_1 + b_2 > 0$  então o tamanho da massa no ponto puro  $w_1$  é dado por

$$\mu(\{w_1\}) = \frac{b_1 + b_2}{1 + b_2}.$$

O outro candidato a ponto puro a ser analisado é o ponto  $w_2 = -(1 + ic)/(1 - ic)$ . Do Corolário 3.2, se  $\hat{\mu}(z) = \mu(w_2 z)$ , temos  $\hat{c}_n = c$ ,  $n \geq 1$ . Daí,

$$\hat{\rho}_n = \prod_{k=1}^n \frac{1 - i\hat{c}_k}{1 + i\hat{c}_k} = \left( \frac{1 - ic}{1 + ic} \right)^n, \quad n \geq 1,$$

com  $\hat{\rho}_0 = 1$ . Por outro lado, é conhecido que  $\hat{\rho}_n = \hat{\tau}_n(1) = w_2^{-n} \tau_n(w_2)$ ,  $n \geq 0$  (veja Observação 1.5). Assim, concluímos que  $\tau_n(w_2) = (-1)^n$ ,  $n \geq 0$ . Consequentemente,  $\{\tau_n(w_2)\}_{n=0}^\infty$  também é periódica de período  $p = 2$ , em acordo com o Lema 3.1.

Aplicando mais uma vez o Teorema 3.3, podemos concluir que  $w_2$  é um ponto puro da medida  $\mu$  se, e somente se,  $b_2 - b_1 > 0$ . No caso em que  $w_2$  é um ponto puro de  $\mu$ , obtemos

$$\mu(\{w_2\}) = \frac{b_2 - b_1}{1 + b_2}.$$

Finalmente, pelo Teorema 1.3, temos  $\sigma_{ess}(\mu) = \cup_{j=1}^2 B_j$ , onde  $B_j$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , é dado por (3.32). Portanto, como os possíveis pontos puros da medida  $\mu$  são aqueles estabelecidos em (3.35) ( $w_1$  no gap fechado  $G_1 \cup \{z_1^+, z_2^+\}$  e  $w_2$  no gap fechado  $G_2 \cup \{z_1^-, z_2^-\}$ , conforme Teorema 1.5), podemos verificar que o suporte de  $\mu$  está contido em  $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , onde  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  são os dois arcos fechados do círculo unitário, definidos, respectivamente, em (2.9) e (2.10). Isso era exatamente o que esperávamos, pois a medida  $\mu$  satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1 (veja também o Teorema 2.2).

As Figuras 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6 ilustram uma comparação entre a estimativa para o suporte da medida  $\mu$  (obtida no Capítulo 2) e o verdadeiro suporte de  $\mu$ , aqui obtido, em alguns casos particulares.

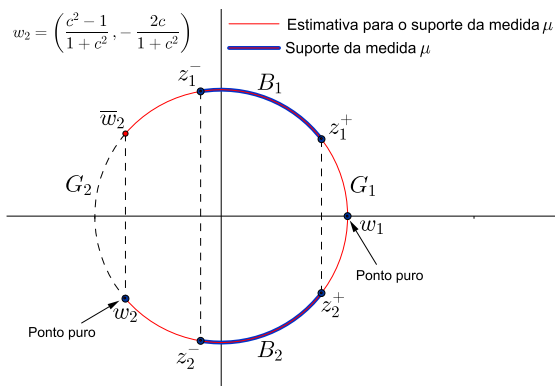


Figura 3.3: Caso  $0 < c < 1$  e  $b_2 > b_1 > 0$ .

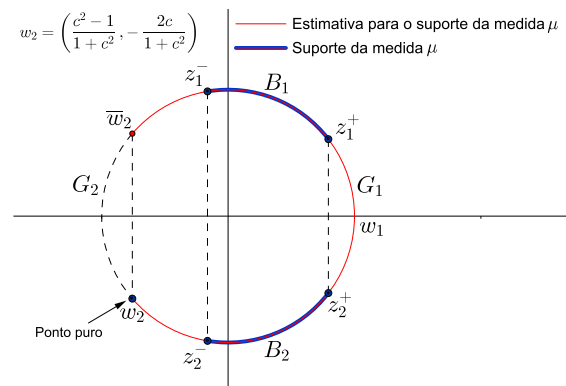


Figura 3.4: Caso  $0 < c < 1$  e  $0 < b_2 \leq -b_1$ .

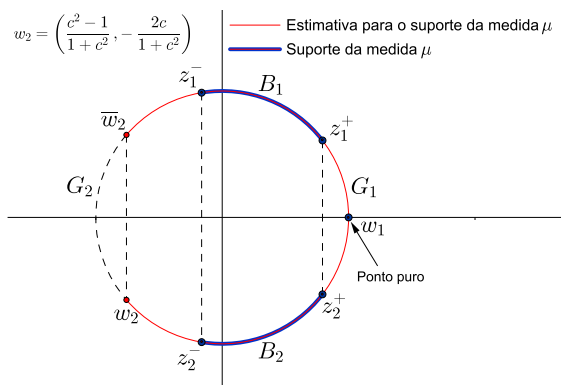


Figura 3.5: Caso  $0 < c < 1$  e  $0 < b_2 \leq b_1$ .

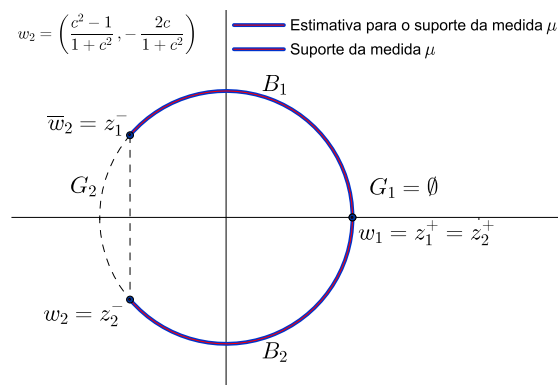


Figura 3.6: Caso  $0 < c < 1$  e  $b_1 = b_2 = 0$ .

**Observação 3.3.** No caso especial em que  $b_1 = b_2 = 0$ , a medida  $\mu$ , do Exemplo 3.1, que está associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde

$$c_n = (-1)^n c \quad e \quad d_n = \frac{1}{4}, \quad n \geq 1, \quad c \in \mathbb{R},$$

ou, equivalentemente, associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde

$$c_n = (-1)^n c \quad e \quad m_n = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1, \quad c \in \mathbb{R},$$

é tal que

$$\text{supp}(\mu) = \sigma_{ess}(\mu) = B_1 \cup B_2 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2,$$

com

$$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{T} : 0 \leq \arg(z) \leq \theta_c\} \quad e \quad \mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{T} : 2\pi - \theta_c \leq \arg(z) \leq 2\pi\},$$

onde  $\theta_c = \arccos((c^2 - 1)/(c^2 + 1)) \in [0, \pi]$ .

Neste caso, a estimativa obtida no Capítulo 2 (através do Teorema 2.1) é exata, conforme ilustra a Figura 3.6.

# Capítulo 4

## O Espaço de Medidas $N_p$

Do Teorema 1.14, sabemos que dado um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, então, associado a este par, existe uma única medida de probabilidade não trivial  $\mu$  com suporte no círculo unitário, e reciprocamente. Além disso, denotando por  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  a sequência minimal de parâmetros para  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ , podemos também afirmar que  $\mu$  é a única medida associado ao par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ .

Neste capítulo, estudamos o espaço das medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que as sequências dos respectivos pares associados,  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ , são periódicas com período  $p \in \mathbb{N}$ . Esse novo espaço, como mencionado anteriormente, será denotado por  $N_p$ . Desta forma,

$$\mu \in N_p \quad \text{se, e somente se,} \quad c_{n+p}^{(\mu)} = c_n^{(\mu)} \quad \text{e} \quad m_{n+p}^{(\mu)} = m_n^{(\mu)}, \quad n \geq 1. \quad (4.1)$$

Ao longo das próximas seções, estabelecemos algumas propriedades interessantes para o espaço  $N_p$ . Por exemplo, se escolhermos os  $p$  primeiros termos da sequência  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  (que está associada a uma medida em  $N_p$ ) de tal maneira que o vetor  $(c_1, c_2, \dots, c_p)$  pertença a uma certa subvariedade de  $\mathbb{R}^p$  de dimensão  $p - 1$ , então a medida considerada também estará em  $V_p$ , isto é, também terá sua correspondente sequência de coeficientes de Verblunsky  $p$ -periódica. Além disso, verificamos que o estudo de medidas pertencentes a  $N_p$  é completamente equivalente ao estudo de medidas pertencentes ao espaço  $V_p$ , cujas medidas já se encontram totalmente caracterizadas nos Capítulos 1 e 3. Também mostramos que os  $p$  possíveis pontos puros de uma medida em  $N_p$  correspondem, precisamente, aos  $p$  zeros de um determinado polinômio para-ortogonal associado a esta medida.

Como mencionado na Introdução desse trabalho, os resultados deste capítulo são novos e estão organizados no artigo [8] que foi publicado em 2017 na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications* em colaboração com Bracciali, Sri Ranga e Veronese. Além disso, na Seção 4.6, apresentamos um exemplo que é consequência direta de um trabalho publicado em 2015 na revista *Applied Mathematics and Computation* em coautoria com Bracciali e Sri Ranga (veja [6]).

## 4.1 Resultados preliminares

Seja  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  o espaço de todas as medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário. Consideremos a função  $D : \mathcal{P}(\mathbb{T}) \times \mathcal{P}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$D(\mu_1, \mu_2) := \sup \left\{ |\alpha_j^{(\mu_1)} - \alpha_j^{(\mu_2)}| : j \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}, \quad (4.2)$$

onde  $\{\alpha_j^{(\mu_1)}\}_{j=0}^\infty$  e  $\{\alpha_j^{(\mu_2)}\}_{j=0}^\infty$  são as sequências de coeficientes de Verblunsky associadas às medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente. Facilmente, podemos ver que  $D$  é uma métrica sobre  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  e, conseqüentemente, o par  $(\mathcal{P}(\mathbb{T}), D)$  é um espaço métrico.

Uma vez que os espaços  $V_p$  e  $N_p$  são subconjuntos de  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ , ambos são espaços (subespaços) métricos com a métrica induzida  $D$ . Escolhendo esta métrica apropriada, podemos provar que existe um homeomorfismo entre os espaços  $N_p$  e  $V_p$ . Em outras palavras, podemos mostrar que esses espaços têm o mesmo comportamento do ponto de vista topológico.

Antes de estabelecermos o homeomorfismo requerido, provemos o seguinte lema:

**Lema 4.1.** *Seja  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência de medidas em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  e, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , sejam  $\{\alpha_j^{(\mu_n)}\}_{j=0}^\infty$  e  $\{\{c_j^{(\mu_n)}\}_{j=1}^\infty, \{d_j^{(\mu_n)}\}_{j=1}^\infty\}$  as correspondentes sequências como no Teorema 1.14. Considere, ainda,  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$ , onde  $\{\alpha_j^{(\mu)}\}_{j=0}^\infty$  e  $\{\{c_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty, \{d_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty\}$  são suas correspondentes sequências como no Teorema 1.14. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\mu_n, \mu) = 0$ .
- (ii) Para cada  $j \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(\mu_n)} = \alpha_j^{(\mu)}$ .
- (iii) Para cada  $j \geq 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_j^{(\mu_n)} = c_j^{(\mu)}$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_j^{(\mu_n)} = d_j^{(\mu)}$ .

**Demonstração:** A equivalência entre os itens (i) e (ii) segue diretamente da definição da métrica  $D$ , dada em (4.2), e das definições de limite (de uma sequência) e supremo (de um conjunto).

Mostremos, agora, a equivalência entre os itens (ii) e (iii). Inicialmente, vamos supor que (ii) ocorre. Pelo Teorema 1.14, temos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho_0^{(\mu_n)} = 1 = \rho_0^{(\mu)}$ ,

$$\rho_j^{(\mu_n)} = \rho_{j-1}^{(\mu_n)} \frac{1 - \overline{\rho_{j-1}^{(\mu_n)}} \overline{\alpha_{j-1}^{(\mu_n)}}}{1 - \rho_{j-1}^{(\mu_n)} \alpha_{j-1}^{(\mu_n)}} \quad \text{e} \quad \rho_j^{(\mu)} = \rho_{j-1}^{(\mu)} \frac{1 - \overline{\rho_{j-1}^{(\mu)}} \overline{\alpha_{j-1}^{(\mu)}}}{1 - \rho_{j-1}^{(\mu)} \alpha_{j-1}^{(\mu)}}, \quad j \geq 1. \quad (4.3)$$

Neste caso, observe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_0^{(\mu_n)} = 1 = \rho_0^{(\mu)}$ . Logo, supondo, por indução, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_k^{(\mu_n)} = \rho_k^{(\mu)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , então, usando (4.3) e a hipótese dada em (ii), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{k+1}^{(\mu_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \rho_k^{(\mu_n)} \frac{1 - \overline{\rho_k^{(\mu_n)}} \overline{\alpha_k^{(\mu_n)}}}{1 - \rho_k^{(\mu_n)} \alpha_k^{(\mu_n)}} \right] = \rho_k^{(\mu)} \frac{1 - \overline{\rho_k^{(\mu)}} \overline{\alpha_k^{(\mu)}}}{1 - \rho_k^{(\mu)} \alpha_k^{(\mu)}} = \rho_{k+1}^{(\mu)}.$$

Assim, por indução matemática, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_j^{(\mu_n)} = \rho_j^{(\mu)}, \quad j \geq 0.$$

Daí, usando novamente (ii) e considerando as expressões dadas em (1.23), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_j^{(\mu_n)} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{I}m(\rho_{j-1}^{(\mu_n)} \alpha_{j-1}^{(\mu_n)})}{1 - \mathcal{R}e(\rho_{j-1}^{(\mu_n)} \alpha_{j-1}^{(\mu_n)})} = - \frac{\mathcal{I}m(\rho_{j-1}^{(\mu)} \alpha_{j-1}^{(\mu)})}{1 - \mathcal{R}e(\rho_{j-1}^{(\mu)} \alpha_{j-1}^{(\mu)})} = c_j^{(\mu)}, \quad j \geq 1,$$

e, analogamente,  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_j^{(\mu_n)} = m_j^{(\mu)}$ , para  $j \geq 1$ . Além disso, como  $m_0^{(\mu_n)} = 0 = m_0^{(\mu)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , podemos afirmar que (veja Teorema 1.14 e relação (1.27))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_j^{(\mu_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - m_{j-1}^{(\mu_n)}) m_j^{(\mu_n)} = (1 - m_{j-1}^{(\mu)}) m_j^{(\mu)} = d_j^{(\mu)}, \quad j \geq 1.$$

Reciprocamente, suponha que (iii) ocorre. Uma vez que  $m_0^{(\mu_n)} = 0 = m_0^{(\mu)}$ , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_1^{(\mu_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} d_1^{(\mu_n)} = d_1^{(\mu)} = m_1^{(\mu)}.$$

Agora, usando (iii) e admitindo, por hipótese de indução, que  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_k^{(\mu_n)} = m_k^{(\mu)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_{k+1}^{(\mu_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{d_{k+1}^{(\mu_n)}}{1 - m_k^{(\mu_n)}} \right] = \frac{d_{k+1}^{(\mu)}}{1 - m_k^{(\mu)}} = m_{k+1}^{(\mu)}.$$

Portanto, pelo princípio de indução finita,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_j^{(\mu_n)} = m_j^{(\mu)} \quad j \geq 1.$$

Consequentemente, das relações fornecidas em (1.25), (1.26) e da hipótese (iii), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_0^{(\mu_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 - 2m_1^{(\mu_n)} - ic_1^{(\mu_n)}}{1 - ic_1^{(\mu_n)}} \right] = \frac{1 - 2m_1^{(\mu)} - ic_1^{(\mu)}}{1 - ic_1^{(\mu)}} = \alpha_0^{(\mu)}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(\mu_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \prod_{k=1}^j \frac{1 + ic_k^{(\mu_n)}}{1 - ic_k^{(\mu_n)}} \right] \left[ \frac{1 - 2m_{j+1}^{(\mu_n)} - ic_{j+1}^{(\mu_n)}}{1 - ic_{j+1}^{(\mu_n)}} \right] = \alpha_j^{(\mu)}, \quad j \geq 1.$$

■

**Observação 4.1.** *A partir da primeira equivalência obtida no Lema 4.1, podemos dizer que convergência na métrica  $D$  é equivalente a convergência fraca em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ , uma vez que  $\mu_n \rightharpoonup \mu$  se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(\mu_n)} = \alpha_j^{(\mu)}$  para cada  $j \geq 0$  (veja Teorema A.1 do Apêndice A). Em outras palavras,  $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\mu_n, \mu) = 0$  se, e somente se,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} f d\mu_n = \int_{\mathbb{T}} f d\mu,$$

para qualquer função contínua  $f$ , de valor complexo sobre  $\mathbb{T}$ .

De posse do Lema 4.1, já podemos provar que os espaços  $N_p$  e  $V_p$  são homeomorfos. Para isso, definimos a função  $g_p : N_p \rightarrow V_p$ , que associa a cada medida  $\mu \in N_p$  uma outra medida  $\tilde{\mu} \in V_p$ , da seguinte forma:

$$g_p(\mu) := \tilde{\mu} \quad \text{se, e somente se,} \quad \alpha_j^{(\tilde{\mu})} = \alpha_j^{(\mu)}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1, \quad (4.4)$$

onde  $\{\alpha_j^{(\mu)}\}_{j=0}^{\infty}$  e  $\{\alpha_j^{(\tilde{\mu})}\}_{j=0}^{\infty}$  são as seqüências de coeficientes de Verblunsky associadas, respectivamente, às medidas  $\mu$  e  $\tilde{\mu}$ .

O Teorema 1.2 nos garante que a função  $g_p$  está bem definida. Daí, levando-se em consideração a métrica  $D$ , dada por (4.2), podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.** *Os espaços  $(N_p, D)$  e  $(V_p, D)$  são homeomorfos.*

**Demonstração:** Seja  $g_p : N_p \rightarrow V_p$  a função definida por (4.4). Inicialmente, vamos mostrar que  $g_p$  é uma bijeção. Com efeito, consideremos  $\mu_1$  e  $\mu_2$  duas medidas em  $N_p$  tais que  $g_p(\mu_1) = g_p(\mu_2)$ . Se  $g_p(\mu_1) = \tilde{\mu}_1$  e  $g_p(\mu_2) = \tilde{\mu}_2$ , com  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2 \in V_p$ , então, usando (4.4), obtemos

$$\alpha_j^{(\mu_1)} = \alpha_j^{(\tilde{\mu}_1)} = \alpha_j^{(\tilde{\mu}_2)} = \alpha_j^{(\mu_2)}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Consequentemente, de (1.25) e (1.26), temos

$$c_j^{(\mu_1)} = c_j^{(\mu_2)} \quad \text{e} \quad m_j^{(\mu_1)} = m_j^{(\mu_2)}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Daí, como  $\mu_1, \mu_2 \in N_p$ , podemos usar a unicidade dada no Teorema 1.14 para concluir que  $\mu_1 = \mu_2$ . Isto mostra a injetividade da função  $g_p$ .

Afirmamos que  $g_p$  é, também, sobrejetiva. De fato, para cada  $\tilde{\mu} \in V_p$ , seja  $\{\{c_j^{(\tilde{\mu})}\}_{j=1}^\infty, \{m_j^{(\tilde{\mu})}\}_{j=1}^\infty\}$  o par de seqüências reais associado a  $\tilde{\mu}$  (como no Teorema 1.14) e consideremos  $\mu \in N_p$  tal que

$$c_j^{(\mu)} = c_j^{(\tilde{\mu})} \quad \text{e} \quad m_j^{(\mu)} = m_j^{(\tilde{\mu})}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

onde  $\{\{c_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty, \{m_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty\}$  é o par de seqüências reais associado a  $\mu$ . Então, usando novamente as relações em (1.25) e (1.26), claramente, temos  $\alpha_j^{(\tilde{\mu})} = \alpha_j^{(\mu)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, p-1$  ou, equivalentemente,  $g_p(\mu) = \tilde{\mu}$ . Desta forma,  $g_p$  é sobrejetiva e, portanto, bijetiva.

Agora, precisamos provar que  $g_p$  e  $g_p^{-1}$  são funções contínuas na métrica  $D$ . Vamos iniciar com a função  $g_p$ . Considere uma seqüência qualquer de medidas  $\mu_n \in N_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , convergindo para uma medida  $\mu \in N_p$  na métrica  $D$ , isto é,  $D(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $g_p(\mu_n) = \tilde{\mu}_n$  e  $g_p(\mu) = \tilde{\mu}$ , com  $\tilde{\mu}, \tilde{\mu}_n \in V_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , então, pela definição de  $g_p$ , temos

$$\alpha_j^{(\tilde{\mu}_n)} = \alpha_j^{(\mu_n)} \quad \text{e} \quad \alpha_j^{(\tilde{\mu})} = \alpha_j^{(\mu)}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Logo, usando o Lema 4.1, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(\tilde{\mu}_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(\mu_n)} = \alpha_j^{(\mu)} = \alpha_j^{(\tilde{\mu})}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1. \quad (4.5)$$

Além disso, como  $\tilde{\mu}, \tilde{\mu}_n \in V_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , podemos afirmar que o limite dado em (4.5) ocorre para cada  $j \geq 0$ . Assim, usando mais uma vez o Lema 4.1, obtemos  $D(g_p(\mu_n), g_p(\mu)) = D(\tilde{\mu}_n, \tilde{\mu}) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto,  $g_p$  é contínua.

Podemos provar a continuidade de  $g_p^{-1}$  de maneira análoga. Com efeito, consideremos  $\tilde{\mu}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uma seqüência qualquer de medidas em  $V_p$  convergindo (na métrica  $D$ ) para uma medida  $\tilde{\mu} \in V_p$ , ou seja,  $D(\tilde{\mu}_n, \tilde{\mu}) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $\mu$  e  $\mu_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , são medidas em  $N_p$  tais que  $g_p^{-1}(\tilde{\mu}_n) = \mu_n$  e  $g_p^{-1}(\tilde{\mu}) = \mu$  então, pela definição de  $g_p^{-1}$  e pelo Lema 4.1, é fácil verificar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(\mu_n)} = \alpha_j^{(\mu)}, \quad j = 0, 1, \dots, p-1.$$

Consequentemente, usando o Teorema 1.14 e o fato que  $\mu, \mu_n \in N_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_j^{(\mu_n)} = c_j^{(\mu)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_j^{(\mu_n)} = d_j^{(\mu)}, \quad j \geq 1. \quad (4.6)$$

Por fim, de (4.6) e do Lema 4.1, concluímos que  $g_p^{-1}$  é contínua. ■

Agora, vamos obter condições necessárias e suficientes para que uma medida pertença ao espaço  $N_p$  do ponto de vista dos seus respectivos coeficientes de Verblunsky. Esta caracterização nos permitirá, dentre outras coisas, extrair informações sobre o conjunto dos pontos fixos do homeomorfismo  $g_p$ .

Considere  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  com seu par associado de seqüências reais,  $\{\{c_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty, \{m_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty\}$ , como no Teorema 1.14. Considere também sua correspondente seqüência de coeficientes de Verblunsky,  $\{\alpha_j^{(\mu)}\}_{j=0}^\infty$ . Das relações (1.25) e (1.26), temos

$$\alpha_{j-1}^{(\mu)} = \bar{\rho}_{j-1}^{(\mu)} \left[ \frac{1 - 2m_j^{(\mu)} - ic_j^{(\mu)}}{1 - ic_j^{(\mu)}} \right] \quad \text{e} \quad \rho_j^{(\mu)} = \frac{1 - ic_j^{(\mu)}}{1 + ic_j^{(\mu)}} \rho_{j-1}^{(\mu)} = \prod_{k=1}^j \frac{1 - ic_k^{(\mu)}}{1 + ic_k^{(\mu)}}, \quad j \geq 1,$$

com  $\rho_0^{(\mu)} = 1$ .

Então, se fizermos  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ , podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 4.2.** *Sejam  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  e  $\{\alpha_j^{(\mu)}\}_{j=0}^\infty$  sua correspondente seqüência de coeficientes de Verblunsky. Então,  $\mu \in N_p$  se, e somente se,  $\alpha_{j+p}^{(\mu)} = \lambda \alpha_j^{(\mu)}$ ,  $j \geq 0$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ .*

**Demonstração:** Assuma que  $\alpha_{j+p}^{(\mu)} = \lambda \alpha_j^{(\mu)}$ ,  $j \geq 0$ , onde  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ . Mostraremos que  $\mu \in N_p$  ou, equivalentemente, provaremos que  $c_{j+p}^{(\mu)} = c_j^{(\mu)}$  e  $m_{j+p}^{(\mu)} = m_j^{(\mu)}$ ,  $j \geq 1$ . De fato, usando (1.25), (1.26) e considerando  $j = 0$  em nossa hipótese, facilmente, temos  $c_{p+1}^{(\mu)} = c_1^{(\mu)}$  e  $m_{p+1}^{(\mu)} = m_1^{(\mu)}$ . Agora, suponha que

$$c_{j+p}^{(\mu)} = c_j^{(\mu)} \quad \text{e} \quad m_{j+p}^{(\mu)} = m_j^{(\mu)}, \quad 1 \leq j \leq k. \quad (4.7)$$

Usando novamente (1.25) e (1.26), obtemos

$$\alpha_{k+p}^{(\mu)} = \prod_{n=1}^p \left[ \frac{1 + ic_n^{(\mu)}}{1 - ic_n^{(\mu)}} \right] \prod_{n=p+1}^{p+k} \left[ \frac{1 + ic_n^{(\mu)}}{1 - ic_n^{(\mu)}} \right] \left[ \frac{1 - 2m_{k+p+1}^{(\mu)} - ic_{k+p+1}^{(\mu)}}{1 - ic_{k+p+1}^{(\mu)}} \right] \quad (4.8)$$

e

$$\alpha_k^{(\mu)} = \bar{\rho}_k^{(\mu)} \left[ \frac{1 - 2m_{k+1}^{(\mu)} - ic_{k+1}^{(\mu)}}{1 - ic_{k+1}^{(\mu)}} \right]. \quad (4.9)$$

Logo, como  $\alpha_{k+p}^{(\mu)} = \lambda \alpha_k^{(\mu)}$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ , a partir de (4.7), (4.8) e (4.9), podemos afirmar que

$$\frac{1 - 2m_{k+p+1}^{(\mu)} - ic_{k+p+1}^{(\mu)}}{1 - ic_{k+p+1}^{(\mu)}} = \frac{1 - 2m_{k+1}^{(\mu)} - ic_{k+1}^{(\mu)}}{1 - ic_{k+1}^{(\mu)}}$$

e, conseqüentemente,

$$c_{k+p+1}^{(\mu)} = c_{k+1}^{(\mu)} \quad \text{e} \quad m_{k+p+1}^{(\mu)} = m_{k+1}^{(\mu)}.$$

Portanto, por indução matemática, concluímos que  $c_{j+p}^{(\mu)} = c_j^{(\mu)}$  e  $m_{j+p}^{(\mu)} = m_j^{(\mu)}$ ,  $j \geq 1$ .

Reciprocamente, se  $\mu \in N_p$  então a sequência  $\{c_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty$  é  $p$ -periódica. Daí, fazendo  $\rho_p^{(\mu)} = \bar{\lambda}$ , temos

$$\rho_{j+p}^{(\mu)} = \prod_{k=1}^{j+p} \frac{1 - ic_k^{(\mu)}}{1 + ic_k^{(\mu)}} = \rho_p^{(\mu)} \prod_{k=p+1}^{j+p} \frac{1 - ic_k^{(\mu)}}{1 + ic_k^{(\mu)}} = \bar{\lambda} \prod_{k=1}^j \frac{1 - ic_k^{(\mu)}}{1 + ic_k^{(\mu)}} = \bar{\lambda} \rho_j^{(\mu)}, \quad j \geq 1. \quad (4.10)$$

Assim, de (1.25), (4.10) e da  $p$ -periodicidade do par  $\{\{c_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty, \{m_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty\}$ , obtemos

$$\alpha_{j+p}^{(\mu)} = \bar{\rho}_{j+p}^{(\mu)} \left[ \frac{1 - 2m_{j+p+1}^{(\mu)} - ic_{j+p+1}^{(\mu)}}{1 - ic_{j+p+1}^{(\mu)}} \right] = \lambda \bar{\rho}_j^{(\mu)} \left[ \frac{1 - 2m_{j+1}^{(\mu)} - ic_{j+1}^{(\mu)}}{1 - ic_{j+1}^{(\mu)}} \right] = \lambda \alpha_j^{(\mu)}, \quad j \geq 0.$$

Isto completa a prova. ■

**Corolário 4.1.** *Seja  $\mu \in N_p$ . Se existe  $\tilde{\mu} \in V_p$  tal que  $\sigma_{ess}(\mu) = \sigma_{ess}(\tilde{\mu})$  então  $\mu \in V_p \cap N_p$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, vamos assumir que  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$ , onde  $\omega_0$  denota a medida de Lebesgue. Então, temos  $\alpha_{j+p}^{(\tilde{\mu})} = \beta \alpha_j^{(\tilde{\mu})}$ ,  $j \geq 0$ , com  $\beta$  exatamente igual a 1. Por outro lado, como  $\mu \in N_p$ , o Teorema 4.2 nos garante que  $\alpha_{j+p}^{(\mu)} = \lambda \alpha_j^{(\mu)}$ ,  $j \geq 0$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ . Consequentemente, usando a hipótese que  $\sigma_{ess}(\mu) = \sigma_{ess}(\tilde{\mu})$ , devemos ter, necessariamente,  $\lambda = \beta = 1$  (veja Teorema A.4 do Apêndice A). Isto mostra que  $\mu \in V_p \cap N_p$ .

Agora, se  $\tilde{\mu} = \omega_0$ , então  $\sigma_{ess}(\mu) = \sigma_{ess}(\tilde{\mu}) = \mathbb{T}$ . Daí, pelo Teorema de Rakhmanov (veja Teorema A.3 do Apêndice A), podemos afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n^{(\mu)}| = 0. \quad (4.11)$$

Logo, usando (1.23) e (4.11), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(\mu)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{(\mu)} = \frac{1}{2}. \quad (4.12)$$

Uma vez que  $\mu \in N_p$ , as sequências  $\{c_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty$  e  $\{m_j^{(\mu)}\}_{j=1}^\infty$  são  $p$ -periódicas. Assim, utilizando (4.12), concluímos que

$$c_n^{(\mu)} = 0 \quad \text{e} \quad m_n^{(\mu)} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Mas, pelas relações (1.25) e (1.26), isto equivale a  $\alpha_n^{(\mu)} = 0$ ,  $n \geq 0$ . Portanto,  $\mu = \omega_0 \in V_p \cap N_p$  (veja Exemplo 1.2 e Observação 3.1) e isto completa a prova. ■

**Observação 4.2.** *A partir do Teorema 4.2 e da definição do homeomorfismo  $g_p$  (dada em (4.4)), é fácil ver que  $\mu \in N_p$  é um ponto fixo de  $g_p$  se, e somente se,  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)} = 1$ . Consequentemente, se denotarmos o conjunto dos pontos fixos de  $g_p$  por  $F_p$ , então, imediatamente, temos  $F_p = N_p \cap V_p$ .*

**Observação 4.3.** Segundo Simon [36], uma sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$  é chamada periódica “a menos de uma fase” se, para algum  $p \in \mathbb{N}$ , existe  $\lambda \in \mathbb{T}$  satisfazendo  $\alpha_{j+p} = \lambda\alpha_j$ ,  $j \geq 0$ . Assim, se  $U_p$  denota o espaço de todas as medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário tais que suas correspondentes sequências de coeficientes de Verblunsky são periódicas “a menos de uma fase”, então o Teorema 4.2 garante que  $N_p \subsetneq U_p$ . Além disso, claramente  $V_p \subsetneq U_p$ . Na próxima seção (veja o Teorema 4.3) apresentaremos uma caracterização para o conjunto  $F_p = N_p \cap V_p$  e veremos que  $(N_p \cap V_p) \setminus \{\omega_0\}$ ,  $N_p \setminus V_p$  e  $V_p \setminus N_p$  são conjuntos não vazios. A Figura 4.1 ilustra algumas relações estabelecidas para os conjuntos  $U_p$ ,  $V_p$  e  $N_p$ .

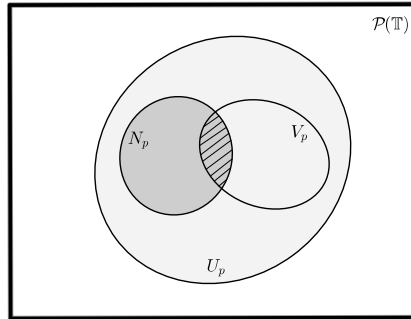


Figura 4.1: Algumas relações entre os conjuntos  $N_p$ ,  $V_p$  e  $U_p$ .

## 4.2 Caracterização para medidas em $N_p \cap V_p$

No Capítulo 3, deste trabalho, partindo-se de uma medida  $\mu \in N_p$ , foi mostrado como obter medidas em  $N_p \cap V_p = F_p$  para o caso em que a sequência associada  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  também satisfaz a condição  $c_{2s} = -c_{2s-1}$ ,  $s \geq 1$  (veja Observação 3.1).

Nesta seção, estamos interessados em caracterizar as possíveis escolhas para o par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$  que nos conduzem a medidas em  $F_p$ . A fim de fazer isso, vamos considerar o conjunto  $\mathcal{X}_\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , tal que  $\mathcal{X}_1 := \{0\} \subset \mathbb{R}$  e

$$\mathcal{X}_\ell := \left\{ (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell : x_\ell = -\frac{\operatorname{Im} \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j)}{\operatorname{Re} \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j)} \right\}, \quad \ell \geq 2. \quad (4.13)$$

Observe que  $\mathcal{X}_1 := \{0\} \subset \mathbb{R}$  é uma subvariedade 0-dimensional de  $\mathbb{R}$ . Além disso, para  $\ell \geq 2$ , considerando o conjunto fechado

$$Y = \left\{ (x_1, \dots, x_{\ell-1}) \in \mathbb{R}^{\ell-1} : \operatorname{Re} \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j) = 0 \right\}$$

e a função suave  $f : \mathbb{R}^{\ell-1} \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f(x_1, \dots, x_{\ell-1}) = -\frac{\mathcal{I}m \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j)}{\mathcal{R}e \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j)},$$

podemos concluir que  $\mathcal{X}_\ell = \text{graf}(f)$ .

Por outro lado, como  $\mathbb{R}^{\ell-1} \setminus Y$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^{\ell-1}$  com dimensão  $\ell - 1$  (já que é aberto) e  $f : \mathbb{R}^{\ell-1} \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}$  é suave, então  $\text{graf}(f)$  é, necessariamente, uma subvariedade de  $\mathbb{R}^\ell$  com dimensão  $\ell - 1$ .

Assim, para qualquer  $\ell \geq 1$ , o conjunto  $\mathcal{X}_\ell$  é uma subvariedade de  $\mathbb{R}^\ell$  com dimensão  $\ell - 1$ . As Figuras 4.2 e 4.3 ilustram a subvariedade  $\mathcal{X}_\ell$  quando  $\ell = 2$  e  $\ell = 3$ , respectivamente.

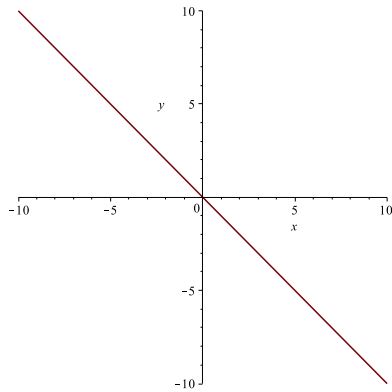


Figura 4.2: Subvariedade  $\mathcal{X}_2$ .

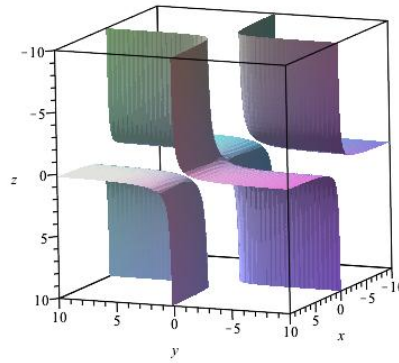


Figura 4.3: Subvariedade  $\mathcal{X}_3$ .

Com relação a subvariedade  $\mathcal{X}_\ell$ ,  $\ell \geq 1$ , podemos afirmar o seguinte:

**Proposição 4.1.** Para  $\ell \geq 1$ , seja  $\mathcal{X}_\ell$  definido por (4.13). Então,  $\mathcal{X}_\ell \times \{0\} \subset \mathcal{X}_{\ell+1}$ .

**Demonstração:** Seja  $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ . Note que

$$\prod_{j=1}^{\ell} (1 + ix_j) = \left[ \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j) \right] (1 + ix_\ell) \in \mathbb{R}$$

se, e somente se,

$$x_\ell \mathcal{R}e \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j) + \mathcal{I}m \prod_{j=1}^{\ell-1} (1 + ix_j) = 0.$$

Desta forma, usando (4.13), podemos afirmar que

$$(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathcal{X}_\ell \text{ se, e somente se, } \prod_{j=1}^{\ell} (1 + ix_j) \in \mathbb{R}, \quad \ell \geq 1. \quad (4.14)$$

Portanto, se  $\ell \geq 1$  e  $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathcal{X}_\ell$  então, da equivalência (4.14), obtemos

$$\left[ \prod_{j=1}^{\ell} (1 + ix_j) \right] [1 + i0] = \prod_{j=1}^{\ell} (1 + ix_j) \in \mathbb{R}.$$

Conseqüentemente, usando novamente (4.14), concluímos que  $(x_1, \dots, x_\ell, 0) \in \mathcal{X}_{\ell+1}$ . ■

O próximo teorema utiliza, exatamente, a subvariedade  $\mathcal{X}_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , para caracterizar o conjunto  $F_p = N_p \cap V_p$ .

**Teorema 4.3.** *Sejam  $\mu \in N_p$  (ou  $\mu \in V_p$ ) e  $\{c_j^{(\mu)}\}_{j=1}^{\infty}$  a seqüência real associada à medida  $\mu$ , como no Teorema 1.14. Então,  $\mu \in N_p \cap V_p$  se, e somente se,  $(c_1^{(\mu)}, \dots, c_p^{(\mu)}) \in \mathcal{X}_p$ .*

**Demonstração:** Usando o Teorema 4.2, podemos mostrar que

$$\mu \in N_p \cap V_p \text{ se, e somente se, } \frac{\prod_{j=1}^p (1 - ic_j^{(\mu)})}{\prod_{j=1}^p (1 + ic_j^{(\mu)})} = \rho_p^{(\mu)} = 1. \quad (4.15)$$

Por outro lado, temos

$$\frac{\prod_{j=1}^p (1 - ic_j^{(\mu)})}{\prod_{j=1}^p (1 + ic_j^{(\mu)})} = 1 \text{ se, e somente se, } \prod_{j=1}^p (1 + ic_j^{(\mu)}) \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

Agora, o resultado segue das equivalências (4.14), (4.15) e (4.16). ■

Seja  $S \subset \mathcal{P}(\mathbb{T})$  o espaço das medidas simétricas no círculo unitário (veja Definição 1.11). Então, vale o seguinte resultado:

**Corolário 4.2.**  *$S \cap N_p \subseteq V_p \cap N_p$ ,  $p \geq 1$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $p = 1$ .*

**Demonstração:** De acordo com a Observação 1.6,  $\mu \in S$  se, e somente se,  $c_n^{(\mu)} = 0$ ,  $n \geq 1$ . Portanto, se  $\mu \in S \cap N_p$ , temos  $(c_1^{(\mu)}, c_2^{(\mu)}, \dots, c_p^{(\mu)}) = (0, 0, \dots, 0) \in \mathcal{X}_p$ . Logo, usando o Teorema 4.3, concluímos que  $\mu \in V_p \cap N_p$ . Assim,  $S \cap N_p \subset V_p \cap N_p$ ,  $p \geq 1$ .

Além disso, se  $p = 1$  e  $\mu \in V_p \cap N_p$ , então, usando o Teorema 4.3 e a  $p$ -periodicidade da seqüência  $\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}$ , concluímos que  $c_n^{(\mu)} = 0$ , para todo  $n \geq 1$ . Conseqüentemente,  $\mu$  é simétrica e, portanto,  $\mu \in S \cap N_p$ .

Por outro lado, se  $p \geq 2$ , existe, por exemplo,  $\tilde{\mu} \in N_p \setminus S$  tal que

$$\{c_n^{(\tilde{\mu})}\}_{n=1}^{\infty} = \{c, \underbrace{-c, 0, 0, \dots, 0}_{p-2 \text{ fatores}}, -c, 0, 0, \dots, 0, \dots\}, \text{ com } c \neq 0.$$

Note que, claramente,  $(c, -c, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{p-2 \text{ fatores}}) \in \mathcal{X}_p$  (veja também Proposição 4.1). Daí, usando novamente o Teorema 4.3, temos  $\tilde{\mu} \in V_p \cap N_p$ . Logo,  $\tilde{\mu} \in V_p \cap N_p$ , entretanto, como  $\tilde{\mu} \in N_p \setminus S$ , devemos ter  $\tilde{\mu} \notin S \cap N_p$ . ■

**Observação 4.4.** *O Corolário 3.1 (do Capítulo 3) também segue, agora, diretamente do Teorema 4.3 uma vez que, se  $p$  é par e  $\mu$  é uma medida em  $N_p$  tal que sua sequência associada  $\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  (como no Teorema 1.14) satisfaz  $c_{2s}^{(\mu)} = -c_{2s-1}^{(\mu)}$ , para  $s \geq 1$ , então, claramente,  $\prod_{n=1}^p (1 + ic_n^{(\mu)}) \in \mathbb{R}$ . Daí, usando a equivalência (4.14) e o Teorema 4.3, podemos concluir que  $\mu \in N_p \cap V_p$ . O caso em que  $p$  é ímpar também pode ser visto como uma consequência direta do Teorema 4.3.*

### 4.3 Equivalência entre os espaços $N_p$ e $V_p$

Consideremos sobre o espaço  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  a seguinte relação:

$$\mu_1 \sim \mu_2 \text{ se, e somente se, existe } w \in \mathbb{T} \text{ tal que } \mu_1(z) = \mu_2(wz), \text{ para todo } z \in \mathbb{T}.$$

É fácil ver que a relação “ $\sim$ ”, definida acima, é, de fato, uma relação de equivalência sobre  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ . Neste caso, dizemos que  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são *equivalentes por rotação*. Além disso, denotamos a classe de equivalência de  $\mu_1$  por  $[\mu_1]$ .

Nesta seção, nosso principal objetivo é provar que

$$\{[\tilde{\mu}] : \tilde{\mu} \in V_p\} = \{[\mu] : \mu \in N_p\}, \quad (4.17)$$

ou seja, vamos mostrar que o estudo de medidas em  $N_p$  é completamente equivalente ao estudo de medidas em  $V_p$  via rotação ou, ainda, que os espaços  $N_p$  e  $V_p$  são “equivalentes por rotação”.

Considerando a medida de Lebesgue  $\omega_0$ , definida no Exemplo 1.2 (cujos respectivos coeficientes de Verblunsky são  $\alpha_n^{(\omega_0)} = 0$ , para  $n \geq 0$ ), temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.4.** *Sejam  $\mu \in N_p \setminus \{\omega_0\}$  e  $\tilde{\mu}(z) = \mu(\bar{w}z)$ ,  $w \in \mathbb{T}$ . Então,  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$  se, e somente se,  $w^p = \lambda$ , onde  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$ . Como  $\mu \in N_p \setminus \{\omega_0\}$ , existe  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  tal que  $\alpha_k^{(\mu)} \neq 0$ . Além disso, do Teorema 4.2, temos

$$\alpha_{k+p}^{(\mu)} = \lambda \alpha_k^{(\mu)}, \text{ com } \bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}. \quad (4.18)$$

Por outro lado, usando a hipótese que  $\tilde{\mu}(z) = \mu(\bar{w}z)$  e a Observação 1.5, obtemos

$$\alpha_{k+p}^{(\tilde{\mu})} = w^{-k-p-1} \alpha_{k+p}^{(\mu)} \quad \text{e} \quad \alpha_k^{(\tilde{\mu})} = w^{-k-1} \alpha_k^{(\mu)}. \quad (4.19)$$

Daí, como estamos assumindo  $\tilde{\mu}$  em  $V_p$ , temos  $\alpha_{k+p}^{(\tilde{\mu})} = \alpha_k^{(\tilde{\mu})}$ . Logo, usando (4.18), (4.19) e a última igualdade, concluímos que  $w^p = \lambda$ , onde  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ .

Reciprocamente, se  $w^p = \lambda$ , do Teorema 4.2, temos

$$\alpha_{n+p}^{(\mu)} = w^p \alpha_n^{(\mu)}, \quad n \geq 0. \quad (4.20)$$

Uma vez que  $\tilde{\mu}(z) = \mu(\bar{w}z)$  e  $\mu \neq \omega_0$ , então  $\tilde{\mu} \neq \omega_0$ . Além disso, podemos usar novamente a Observação 1.5 para obter

$$\alpha_{n+p}^{(\tilde{\mu})} = w^{-n-p-1} \alpha_{n+p}^{(\mu)} \quad \text{e} \quad \alpha_n^{(\tilde{\mu})} = w^{-n-1} \alpha_n^{(\mu)}, \quad n \geq 0. \quad (4.21)$$

Finalmente, utilizando os valores encontrados em (4.20) e (4.21), podemos afirmar que  $\alpha_{n+p}^{(\tilde{\mu})} = \alpha_n^{(\tilde{\mu})}$ ,  $n \geq 0$ , isto é,  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$ . ■

O Teorema 4.4 mostra que existem exatamente  $p$  medidas em  $V_p \setminus \{\omega_0\}$  que são equivalentes por rotação a uma dada medida em  $N_p \setminus \{\omega_0\}$ . Este resultado é uma consequência natural do Teorema 4.2. O próximo resultado lida com o problema oposto.

**Teorema 4.5.** *Sejam  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$  e  $\mu(z) = \tilde{\mu}(wz)$ ,  $w \in \mathbb{T}$ . Então,  $\mu \in N_p \setminus \{\omega_0\}$  se, e somente se,  $\tau_p^{(\tilde{\mu})}(w) = 1$ , onde  $\tau_p^{(\tilde{\mu})}(w)$  é dado por (1.30).*

**Demonstração:** Assuma que  $\mu \in N_p \setminus \{\omega_0\}$ . Como  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$  e  $\mu(z) = \tilde{\mu}(wz)$  ou, equivalentemente,  $\tilde{\mu}(z) = \mu(\bar{w}z)$ , o Teorema 4.4 nos garante que  $\bar{w}^p = \bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ . Por outro lado, da Observação 1.5, temos  $\rho_p^{(\mu)} = \bar{w}^p \tau_p^{(\tilde{\mu})}(w)$ . Daí, claramente,  $\tau_p^{(\tilde{\mu})}(w) = 1$ .

Para provar a recíproca da afirmativa vamos admitir  $w$  em  $\mathbb{T}$  tal que  $\tau_p^{(\tilde{\mu})}(w) = 1$ . Como  $\mu(z) = \tilde{\mu}(wz)$ , podemos usar mais uma vez a Observação 1.5 para concluir que

$$\alpha_{n+p}^{(\mu)} = w^{n+p+1} \alpha_{n+p}^{(\tilde{\mu})} \quad \text{e} \quad \alpha_n^{(\mu)} = w^{n+1} \alpha_n^{(\tilde{\mu})}, \quad n \geq 0, \quad (4.22)$$

e, além disso,

$$\rho_p^{(\mu)} = \bar{w}^p \tau_p^{(\tilde{\mu})}(w) = \bar{w}^p. \quad (4.23)$$

Agora, usando (4.22), (4.23) e o fato que  $\alpha_{n+p}^{(\tilde{\mu})} = \alpha_n^{(\tilde{\mu})}$ ,  $n \geq 0$  (pois  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$ ), obtemos

$$\alpha_{n+p}^{(\mu)} = \lambda \alpha_n^{(\mu)}, \quad n \geq 0,$$

com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ . Consequentemente, do Teorema 4.2,  $\mu \in N_p \setminus \{\omega_0\}$ . ■

O Teorema 4.5 nos diz que dada uma medida  $\tilde{\mu}$  ( $\tilde{\mu} \neq \omega_0$ ) com correspondente sequência de coeficientes de Verblunsky  $p$ -periódica, é sempre possível obter exatamente  $p$  medidas pertencentes a  $N_p \setminus \{\omega_0\}$  que são equivalentes por rotação à medida  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$ . Esse resultado também mostra como construir essas  $p$  medidas.

**Observação 4.5.** De acordo com o resultado obtido em (3.15), a condição  $\tau_p^{(\tilde{\mu})}(w) = 1$ , no Teorema 4.5, equivale a dizer que  $w$  é um possível ponto puro de  $\tilde{\mu}$ . Logo, o Teorema 4.5 diz que para obter uma medida  $\mu \in N_p \setminus \{\omega_0\}$  equivalente por rotação à medida  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$ , precisamos escolher  $w$  tal que  $w$  é um possível ponto puro de  $\tilde{\mu}$ .

A igualdade requerida em (4.17) é, portanto, uma consequência imediata dos Teoremas 4.4 e 4.5. Assim, para o espaço  $N_p$ , podemos afirmar o seguinte resultado (análogo àquele fornecido no Teorema 1.3 para o espaço  $V_p$ ):

**Teorema 4.6.** Seja  $d\mu = w(\theta)d\theta/2\pi + d\mu_s$  uma medida de probabilidade em  $N_p$ . Então, existem conjuntos fechados  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ , em  $\mathbb{T}$ , tais que  $\sigma_{ess}(\mu) = \cup_{j=1}^p \mathcal{B}_j$  e  $d\mu_s[\cup_{j=1}^p \mathcal{B}_j] = \emptyset$ . Além disso, em cada arco aberto disjunto de  $\mathbb{T} \setminus \cup_{j=1}^p \mathcal{B}_j$ ,  $\mu$  não tem suporte ou tem um único ponto puro.

Os próximos resultados nesta seção referem-se a pontos puros de medidas em  $N_p$ .

**Lema 4.2.** Seja  $\mu \in N_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Então,  $w$  é um possível ponto puro da medida  $\mu$  se, e somente se, a sequência  $\{\tau_n^{(\mu)}(w)\}_{n=0}^\infty$ , definida em (1.30), satisfaz  $\tau_{n+p}^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda}\tau_n^{(\mu)}(w)$ ,  $n \geq 0$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ .

**Demonstração:** Uma vez que a medida de Lebesgue  $\omega_0$  não tem qualquer ponto puro, podemos assumir, sem perda de generalidade,  $\mu \neq \omega_0$ .

Considere  $\tilde{\mu}(z) = \mu(\bar{w}_\lambda z)$ , onde  $w_\lambda$  é tal que  $w_\lambda^p = \lambda$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ . Assim, pelo Teorema 4.4, temos  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$ .

Note que  $\tilde{w}$  é um possível ponto puro de  $\tilde{\mu}$  se, e somente se,  $w = \bar{w}_\lambda \tilde{w}$  é um possível ponto puro de  $\mu$ . Por outro lado,  $\tilde{w}$  é um possível ponto puro de  $\tilde{\mu}$  se, e somente se,  $\tau_p^{(\tilde{\mu})}(\tilde{w}) = 1$  (veja (3.15)).

Se  $\phi_p(\tilde{\mu}; \cdot)$  e  $\phi_p(\mu; \cdot)$  são os  $p$ -ésimos polinômios ortogonais associados, respectivamente, às medidas  $\tilde{\mu}$  e  $\mu$ , também temos  $\phi_p(\tilde{\mu}; z) = w_\lambda^p \phi_p(\mu; \bar{w}_\lambda z)$  e  $\phi_p^*(\tilde{\mu}; z) = \phi_p^*(\mu; \bar{w}_\lambda z)$

(veja Observação 1.5). Consequentemente, usando (1.30), podemos ver facilmente que a condição  $\tau_p^{(\tilde{\mu})}(\tilde{w}) = 1$  é equivalente a

$$w_\lambda^p \frac{\phi_p(\mu; \bar{w}_\lambda \tilde{w})}{\phi_p^*(\mu; \bar{w}_\lambda \tilde{w})} = 1. \quad (4.24)$$

Além disso, como (4.24) é equivalente a  $\tau_p^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda}$ , concluímos que  $w$  é um possível ponto puro de  $\mu$  se, e somente se,  $\tau_p^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda}$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ .

Para concluir a prova do lema é suficiente mostrar que a condição  $\tau_p^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda}$  ocorre, se e somente se, a sequência  $\{\tau_n^{(\mu)}(w)\}_{n=0}^\infty$  é tal que  $\tau_{n+p}^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda} \tau_n^{(\mu)}(w)$ ,  $n \geq 0$ .

Assuma que  $w$  satisfaz  $\tau_p^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda}$ . Como,  $\tau_0^{(\mu)}(w) = 1$ , claramente temos  $\tau_p^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda} \tau_0^{(\mu)}(w)$ . Agora, suponha que

$$\tau_{k+p}^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda} \tau_k^{(\mu)}(w), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.25)$$

Então, usando (1.30), (4.25) e o Teorema 4.2, obtemos

$$\tau_{k+1+p}^{(\mu)}(w) = \frac{w \tau_{k+p}^{(\mu)}(w) - \bar{\alpha}_{k+p}^{(\mu)}}{1 - w \tau_{k+p}^{(\mu)}(w) \alpha_{k+p}^{(\mu)}} = \frac{w \bar{\lambda} \tau_k^{(\mu)}(w) - \bar{\lambda} \bar{\alpha}_k^{(\mu)}}{1 - w \bar{\lambda} \tau_k^{(\mu)}(w) \lambda \alpha_k^{(\mu)}} = \bar{\lambda} \tau_{k+1}^{(\mu)}(w).$$

Portanto, pelo princípio de indução finita, segue que  $\tau_{n+p}^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda} \tau_n^{(\mu)}(w)$ ,  $n \geq 0$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ .

Reciprocamente, se a sequência  $\{\tau_n^{(\mu)}(w)\}_{n=0}^\infty$  é tal que  $\tau_{n+p}^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda} \tau_n^{(\mu)}(w)$ ,  $n \geq 0$ , então, fazendo  $n = 0$ , é imediato que  $\tau_p^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda}$ . Isto completa a prova.  $\blacksquare$

Agora, podemos enunciar o seguinte resultado análogo àquele fornecido no Teorema 3.3 para medidas em  $V_p$ .

**Teorema 4.7.** *Seja  $\mu \in N_p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Consideremos  $\{\alpha_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  a sequência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\mu$  e  $\{\tau_n^{(\mu)}(w)\}_{n=0}^\infty$  a sequência definida em (1.30). Suponha que  $w \in \mathbb{T}$  é um possível ponto puro da medida  $\mu$ . Então,  $w$  é um ponto puro de  $\mu$  se, e somente se,*

$$\prod_{j=1}^p |1 - w \tau_{j-1}^{(\mu)}(w) \alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2 < \prod_{j=1}^p [1 - |\alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2].$$

Além disso, se  $w$  é um ponto puro de  $\mu$ , então o tamanho da massa neste ponto é dado por

$$\mu(\{w\}) = \frac{\gamma}{\gamma + \zeta},$$

$$\text{onde } \zeta = \sum_{n=1}^p \prod_{j=1}^n \frac{|1 - w \tau_{j-1}^{(\mu)}(w) \alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2} \text{ e } \gamma = 1 - \prod_{j=1}^p \frac{|1 - w \tau_{j-1}^{(\mu)}(w) \alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2}{1 - |\alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2}.$$

**Demonstração:** Para  $j \geq 1$ , seja  $q_j = |1 - w\tau_{j-1}^{(\mu)}(w)\alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2/[1 - |\alpha_{j-1}^{(\mu)}|^2]$ . Pelo Teorema 1.15, sabemos que  $w$  é um ponto puro de  $\mu$  se, e somente se, a soma infinita  $s(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=1}^n q_j$  é convergente.

Uma vez que  $\mu \in N_p$ , pelo Teorema 4.2, temos  $\alpha_{j+p}^{(\mu)} = \lambda\alpha_j^{(\mu)}$ ,  $j \geq 0$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ . Conseqüentemente, como  $w$  é um possível ponto puro de  $\mu$  e  $|\lambda| = 1$ , do Lema 4.2, concluímos que  $q_{j+p} = q_j$ ,  $j \geq 1$ . Agora, o resultado segue exatamente como na prova do Teorema 3.3. ■

**Observação 4.6.** O Lema 4.2 e o Teorema 4.7 também podem ser provados no caso geral onde  $\mu \in U_p$ , isto é, quando  $\mu$  é qualquer medida de probabilidade cuja correspondente seqüência de coeficientes de Verblunsky é periódica “a menos de uma fase” (neste caso,  $\lambda$  é qualquer número complexo tal que  $|\lambda| = 1$ ). Para isso, a hipótese  $\mu \in N_p$  deve ser substituída por  $\mu \in U_p$ . Assim, os coeficientes de Verblunsky associados a medida  $\mu$  satisfazem  $\alpha_{n+p}^{(\mu)} = \lambda\alpha_n^{(\mu)}$ ,  $n \geq 0$ , para  $\lambda \in \mathbb{T}$  e  $p \in \mathbb{N}$ . Portanto, na prova do Lema 4.2, considerando  $\tilde{\mu}(z) = \mu(\bar{w}_\lambda z)$ , onde  $w_\lambda$  é tal que  $w_\lambda^p = \lambda$ , com  $\lambda \in \mathbb{T}$ , usando a Observação 1.5, temos

$$\alpha_j^{(\tilde{\mu})} = \bar{w}_\lambda^{j+1}\alpha_j^{(\mu)}, \quad j \geq 0.$$

Conseqüentemente, como  $\alpha_{n+p}^{(\mu)} = \lambda\alpha_n^{(\mu)}$ ,  $n \geq 0$ , obtemos

$$\alpha_{n+p}^{(\tilde{\mu})} = \bar{w}_\lambda^{n+p+1}\lambda\alpha_n^{(\mu)} = \bar{w}_\lambda^{n+1}\alpha_n^{(\mu)} = \alpha_n^{(\tilde{\mu})}, \quad n \geq 0.$$

Portanto,  $\tilde{\mu} \in V_p \setminus \{\omega_0\}$  e a prova do Lema 4.2 segue analogamente. Além disso, note que a prova do Teorema 4.7 é análoga quando substituímos a hipótese  $\mu \in N_p$  por  $\mu \in U_p$ , uma vez que neste caso, temos  $\alpha_{n+p}^{(\mu)} = \lambda\alpha_n^{(\mu)}$ ,  $n \geq 0$ , com  $\lambda \in \mathbb{T}$  (isto é,  $|\lambda| = 1$ ).

## 4.4 Polinômios para-ortogonais associados

Em (4.1), caracterizamos uma medida  $\mu$  de  $N_p$  em termos da periodicidade das seqüências do par  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}\}$  que está associado à medida  $\mu$ , como no Teorema 1.14.

Agora, dada uma medida  $\mu$  em  $N_p$ , investigamos o que acontece com as seqüências do par associado  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}\}$ , onde  $\{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}$  é a seqüência encadeada positiva cuja seqüência minimal de parâmetros é, exatamente, a seqüência  $\{m_n^{(\mu)}\}_{n=0}^{\infty}$  (veja Teorema 1.14).

De acordo com o Teorema 1.11, se  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, então  $\{a_{n+1}\}_{n=1}^\infty$  é, também, uma sequência encadeada positiva. Além disso, se  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{a_n\}_{n=1}^\infty$  então  $\{M_{n+1}\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{a_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ . Assim, se  $\mu \in N_p$ , usando a  $p$ -periodicidade das sequências do par  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$ , associado à medida  $\mu$ , podemos afirmar o seguinte:

**Lema 4.3.** *Sejam  $\mu \in N_p$  e  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  o par de sequências reais associado à medida  $\mu$ , como no Teorema 1.14. Então as sequências reais do par  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  são  $p$ -periódicas e, além disso,  $\{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva não unicamente determinada.*

O próximo resultado é uma espécie de recíproca do Lema 4.3. Ele diz que qualquer medida  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$ , com  $\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$   $p$ -periódica e  $\{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva  $p$ -periódica e não unicamente determinada, é uma ligeira modificação de alguma medida específica em  $N_p$ .

**Lema 4.4.** *Seja  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  a medida associada ao par de sequências reais  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$ , como no Teorema 1.14. Suponha que  $\{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  e  $\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  são sequências  $p$ -periódicas. Então, existe  $0 \leq \epsilon < 1$  e  $\mu(0; \cdot) \in N_p$ , com massa zero em  $z = 1$ , tal que*

$$\int_{\mathbb{T}} \ell(z) d\mu(z) = (1 - \epsilon) \int_{\mathbb{T}} \ell(z) d\mu(0; z) + \epsilon \ell(1),$$

para qualquer polinômio de Laurent  $\ell$ .

**Demonstração:** Seja  $\epsilon$  ( $0 \leq \epsilon < 1$ ) a massa da medida  $\mu$  em  $z = 1$ . Consideremos a família de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário,  $\{\mu(\delta; \cdot) : 0 \leq \delta < 1\}$ , construída a partir de  $\mu$ , onde

$$\int_{\mathbb{T}} \ell(z) d\mu(\delta; z) = \frac{1 - \delta}{1 - \epsilon} \int_{\mathbb{T}} \ell(z) d\mu(z) + \frac{\delta - \epsilon}{1 - \epsilon} \ell(1), \quad 0 \leq \delta < 1, \quad (4.26)$$

para qualquer polinômio de Laurent  $\ell$ .

Para cada  $0 \leq \delta < 1$ , seja  $\{\{c_n(\delta)\}_{n=1}^\infty, \{d_n(\delta)\}_{n=1}^\infty\}$  o par de sequências reais associado à medida  $\mu(\delta; \cdot)$ , como no Teorema 1.14, e seja  $\{m_n(\delta)\}_{n=0}^\infty$  a sequência minimal de parâmetros para  $\{d_n(\delta)\}_{n=1}^\infty$ . Dos resultados estabelecidos em [13], para qualquer  $0 \leq \delta < 1$ , temos

$$c_n(\delta) = c_n^{(\mu)} \quad \text{e} \quad d_{n+1}(\delta) = d_{n+1}^{(\mu)}, \quad n \geq 1. \quad (4.27)$$

Além disso, se  $\{M_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  então

$$d_1(\delta) = (1 - \delta)M_1^{(\mu)}. \quad (4.28)$$

Como  $\{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva  $p$ -periódica, dos Teoremas 1.11 e 1.13, concluímos que  $\{M_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  é a sequência maximal de parâmetros para  $\{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$ , sendo  $\{M_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$ , também,  $p$ -periódica.

Portanto, se considerarmos a medida  $\mu(0; \cdot) \in \{\mu(\delta; \cdot) : 0 \leq \delta < 1\}$ , temos  $\delta = 0$  e, conseqüentemente, da segunda igualdade em (4.27) e de (4.28), podemos afirmar que a sequência encadeada positiva  $\{d_n(0)\}_{n=1}^\infty$  é tal que sua correspondente sequência minimal de parâmetros  $\{m_n(0)\}_{n=0}^\infty$  satisfaz  $m_n(0) = M_n^{(\mu)}$ ,  $n \geq 1$ . Desta forma,  $\{m_n(0)\}_{n=1}^\infty$  é  $p$ -periódica.

Por outro lado, usando a  $p$ -periodicidade da sequência  $\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  e a primeira igualdade em (4.27), obtemos

$$c_{n+p}(0) = c_{n+p}^{(\mu)} = c_n^{(\mu)} = c_n(0), \quad n \geq 1,$$

isto é,  $\{c_n(0)\}_{n=1}^\infty$  também é  $p$ -periódica. Assim,  $\mu(0; \cdot)$  pertence a  $N_p$  e o resultado segue de (4.26) com  $\delta = 0$ . ■

**Observação 4.7.** Basicamente, os Lemas 4.3 e 4.4 mostram que ao estudarmos o espaço  $N_p$  estamos, de fato, estudando as medidas em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  que estão associadas ao par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  (como no Teorema 1.14), onde  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$  são sequências  $p$ -periódicas.

Como consequência dos Lemas 4.3 e 4.4, e ainda, de alguns resultados encontrados em Castillo et al. [10] e Costa et al. [13], podemos afirmar o seguinte:

**Teorema 4.8.** (a) Dada  $\mu \in N_p$  tal que  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  é o seu correspondente par de sequências reais, como no Teorema 1.14, então associada a esta medida, existe uma sequência de polinômios  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  satisfazendo (1.28), com  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  um par de sequências reais  $p$ -periódicas e  $\{d_{n+1}^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva não unicamente determinada.

(b) Reciprocamente, dada uma sequência de polinômios  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  satisfazendo (1.28), com  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty\}$  um par de sequências reais  $p$ -periódicas e  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva não unicamente determinada, então associada a esta sequência, existe uma medida  $\mu \in N_p$ .

**Demonstração:** Se  $\mu \in N_p$  e  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  é o seu correspondente par de seqüências reais, como no Teorema 1.14, então, por resultados fornecidos em [13], existe uma seqüência de polinômios  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  satisfazendo (1.28). Agora, o item (a) segue do Lema 4.3.

Reciprocamente, consideremos  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  uma seqüência de polinômios satisfazendo (1.28), com  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty\}$  um par de seqüências reais  $p$ -periódicas e  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$  uma seqüência encadeada positiva não unicamente determinada.

Uma vez que  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$  é uma seqüência encadeada positiva não unicamente determinada, podemos afirmar que sua seqüência maximal de parâmetros  $\{M_{n+1}\}_{n=0}^\infty$  é tal que  $M_1 > 0$ . Logo, pelo Teorema 1.12, podemos obter uma nova seqüência encadeada positiva  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  fazendo  $d_1 = (1 - \epsilon)M_1$ , com  $0 \leq \epsilon < 1$ .

Assim, pelos resultados estabelecidos em [10], a partir da seqüência  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ , podemos recuperar uma única medida  $\hat{\mu}$  em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ , associada ao par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , tal que  $M_0 = \epsilon$  é o tamanho da massa em  $z = 1$ , onde  $M_0$  é o parâmetro inicial da seqüência maximal de parâmetros  $\{M_n\}_{n=0}^\infty$  de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ .

Agora, para completar a prova do item (b), usamos a medida  $\hat{\mu}$  e o Lema 4.4, para obter uma medida  $\mu = \hat{\mu}(0; \cdot) \in N_p$  (com massa zero em  $z = 1$ ) que, por construção, está associada a seqüência de polinômios  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$ . ■

Como mencionado no Capítulo 1 desse trabalho, os polinômios  $(z - 1)R_n(z)$ ,  $n \geq 0$ , dados por (1.29), são polinômios para-ortogonais no círculo unitário. O próximo resultado mostra que podemos usar, justamente, os zeros de um desses polinômios para determinar os possíveis pontos puros de uma medida em  $N_p$ .

**Teorema 4.9.** *Sejam  $\mu \in N_p$  e  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  a correspondente seqüência de polinômios satisfazendo a fórmula de recorrência (1.28). Então,  $w$  é um possível ponto puro da medida  $\mu$  se, e somente se,  $w$  satisfaz a equação  $(z - 1)R_{p-1}(z) = 0$ .*

**Demonstração:** A partir da prova do Lema 4.2, podemos afirmar que  $w$  é um possível ponto puro da medida  $\mu$  se, e somente se,  $\tau_p^{(\mu)}(w) = \bar{\lambda}$ , com  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)}$ , onde os números  $\rho_p^{(\mu)}$  e  $\tau_p^{(\mu)}(w)$  são dados, respectivamente, por (1.26) e (1.30).

Além disso, de (1.30), a condição  $\bar{\lambda} = \tau_p^{(\mu)}(w)$  é equivalente a  $\phi_p(\mu; w) - \bar{\lambda}\phi_p^*(\mu; w) = 0$ , onde  $\phi_p(\mu; \cdot)$  é o polinômio ortogonal, de grau  $p$ , associado à medida  $\mu$  e  $\phi_p^*(\mu; \cdot)$  é o seu recíproco, ou seja,  $\phi_p^*(\mu; z) = z^p \overline{\phi_p(\mu; 1/\bar{z})}$ .

Por outro lado, se  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  é o par de sequências reais associado à medida  $\mu$  e  $\{m_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros para  $\{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$ , então, de (1.31), temos

$$\phi_p(\mu; z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^p (1 + ic_k^{(\mu)})} [R_p(z) - 2(1 - m_p^{(\mu)})R_{p-1}(z)]. \quad (4.29)$$

Conseqüentemente, como  $R_n^*(z) = z^n \overline{R_n(1/\bar{z})} = R_n(z)$ ,  $n \geq 1$  (veja Observação 1.3), obtemos

$$\phi_p^*(\mu; z) = \frac{1}{\prod_{k=1}^p (1 - ic_k^{(\mu)})} [R_p(z) - 2(1 - m_p^{(\mu)})zR_{p-1}(z)]. \quad (4.30)$$

Portanto, uma vez que  $\bar{\lambda} = \rho_p^{(\mu)} = \prod_{k=1}^p (1 - ic_k^{(\mu)}) / (1 + ic_k^{(\mu)})$ , usando (4.29) e (4.30), concluímos que

$$\phi_p(\mu; w) - \bar{\lambda} \phi_p^*(\mu; w) = 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad (w - 1)R_{p-1}(w) = 0.$$

Isto completa a prova. ■

#### 4.4.1 Um caso especial

Agora, apresentamos um caso em que os zeros dos polinômios  $R_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , podem ser dados em termos dos coeficientes,  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$ , que aparecem na fórmula de recorrência (1.28).

Seja  $c_n = c$ ,  $n \geq 1$ , e  $\{d_{n+1}\}_{n=1}^\infty$  uma sequência encadeada positiva. Neste caso especial, a fórmula de recorrência de três termos (1.28) é dada por

$$R_{n+1}(z) = [(1 + ic)z + (1 - ic)]R_n(z) - 4d_{n+1}zR_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (4.31)$$

com  $R_0(z) = 1$  e  $R_1(z) = (1 + ic)z + (1 - ic)$ .

Como exposto no Capítulo 1, para estudar os zeros de  $R_n(z)$ ,  $n \geq 1$ , é conveniente estudar os zeros das funções  $\mathcal{W}_n(x)$  definidas por (1.32). Neste caso, a relação de recorrência de três termos (1.33), para  $\mathcal{W}_n(x)$ , pode ser reescrita como

$$(x - c\sqrt{1 - x^2}) \mathcal{W}_n(x) = \mathcal{W}_{n+1}(x) + d_{n+1} \mathcal{W}_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.32)$$

com  $\mathcal{W}_0(x) = 1$  e  $\mathcal{W}_1(x) = x - c\sqrt{1 - x^2}$ .

Agora, usando (4.32), para cada  $n \geq 1$  fixado, observamos que

$$(x - c\sqrt{1-x^2}) \begin{pmatrix} \mathcal{W}_0(x) \\ \mathcal{W}_1(x) \\ \mathcal{W}_2(x) \\ \vdots \\ \mathcal{W}_{n-2}(x) \\ \mathcal{W}_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & d_3 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{W}_0(x) \\ \mathcal{W}_1(x) \\ \mathcal{W}_2(x) \\ \vdots \\ \mathcal{W}_{n-2}(x) \\ \mathcal{W}_{n-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{W}_n(x) \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, usando a propriedade (1.34), concluímos que os zeros  $x_{n,j}^{(c)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , de  $\mathcal{W}_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , no intervalo  $(-1, 1)$ , são tais que

$$x_{n,j}^{(c)} - c\sqrt{1 - [x_{n,j}^{(c)}]^2} = \lambda_{n,j}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.33)$$

onde  $\lambda_{n,j}$  são os autovalores da matriz  $A(d_2, d_3, \dots, d_n)$  dada por

$$A(d_2, d_3, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & d_3 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

**Observação 4.8.** Quando  $n = 1$ , a matriz definida em (4.34) é reduzida a matriz nula.

Note que, fazendo  $c = 0$  em (4.33), temos  $x_{n,j}^{(0)} = \lambda_{n,j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Daí, como  $\mathcal{W}_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , tem exatamente  $n$  zeros distintos no intervalo  $(-1, 1)$ , podemos afirmar que a matriz  $A(d_2, d_3, \dots, d_n)$  tem os seus  $n$  autovalores,  $\lambda_{n,j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , todos distintos e tais que  $-1 < \lambda_{n,j} < 1$ , para  $1 \leq j \leq n$ .

Por outro lado, resolvendo (4.33), obtemos

$$x_{n,j}^{(c)} = \frac{\lambda_{n,j} + c\sqrt{1 - \lambda_{n,j}^2 + c^2}}{1 + c^2} \quad \text{ou} \quad x_{n,j}^{(c)} = \frac{\lambda_{n,j} - c\sqrt{1 - \lambda_{n,j}^2 + c^2}}{1 + c^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Entretanto, como  $\lambda_{n,j}$  satisfaz  $-1 < \lambda_{n,j} < 1$ , para  $1 \leq j \leq n$ , podemos verificar que, de fato, os zeros  $x_{n,j}^{(c)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , de  $\mathcal{W}_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , no intervalo  $(-1, 1)$ , são

$$x_{n,j}^{(c)} = \frac{\lambda_{n,j} + c\sqrt{1 - \lambda_{n,j}^2 + c^2}}{1 + c^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.35)$$

Desta forma, usando a transformação (1.32), concluímos que os zeros,  $z_{n,j}^{(c)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , dos polinômios  $R_n(z)$ , dados por (4.31), são tais que  $z_{n,j}^{(c)} = e^{i\theta_{n,j}^{(c)}}$ , onde  $\theta_{n,j}^{(c)} = 2 \arccos x_{n,j}^{(c)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Assim, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 4.10.** *Sejam  $\{R_n(z)\}_{n=0}^\infty$  e  $\{\mathcal{W}_n(x)\}_{n=0}^\infty$  as sequências dadas, respectivamente, por (4.31) e (4.32). Então, para cada  $n \geq 1$ , os zeros,  $x_{n,j}^{(c)}$ , de  $\mathcal{W}_n(x)$  são dados por (4.35) e os zeros,  $z_{n,j}^{(c)}$ , de  $R_n(z)$  são  $z_{n,j}^{(c)} = e^{i\theta_{n,j}^{(c)}}$ , onde  $\theta_{n,j}^{(c)} = 2 \arccos x_{n,j}^{(c)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .*

Se considerarmos a medida  $\mu \in N_p$  tal que a sequência  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ , do correspondente par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , satisfaz  $c_n = c$ ,  $n \geq 1$ , então, como consequência imediata dos Teoremas 4.9 e 4.10, temos o seguinte:

**Corolário 4.3.** *Sejam  $\mu \in N_p$ ,  $p \geq 2$ , e  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  o par de sequências reais associado à medida  $\mu$ , como no Teorema 1.14. Suponha que  $c_n = c$ , para  $n \geq 1$ . Então,  $w$  é um possível ponto puro da medida  $\mu$  se, e somente se,*

$$w \in \left\{ 1, e^{i\theta_{p-1,1}^{(c)}}, e^{i\theta_{p-1,2}^{(c)}}, \dots, e^{i\theta_{p-1,p-1}^{(c)}} \right\},$$

onde  $\theta_{p-1,j}^{(c)} = 2 \arccos x_{p-1,j}^{(c)}$  e  $x_{p-1,j}^{(c)}$  é dado por

$$x_{p-1,j}^{(c)} = \frac{\lambda_{p-1,j} + c\sqrt{1 - \lambda_{p-1,j}^2 + c^2}}{1 + c^2}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1,$$

com  $\lambda_{p-1,j}$  um autovalor da matriz  $A(d_2, d_3, \dots, d_{p-1})$ , definida como em (4.34).

**Observação 4.9.** *Se  $p = 1$  e  $\mu \in N_p$ , então, pelo Teorema 4.9, o único possível ponto puro de  $\mu$  é  $w = 1$ .*

**Corolário 4.4.** *Sejam  $\tilde{\mu} \in N_p$  ( $p$  par),  $\{\{\tilde{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{\tilde{d}_n\}_{n=1}^\infty\}$  o par de sequências reais associado à medida  $\tilde{\mu}$ , como no Teorema 1.14, e  $\{\tilde{m}_n\}_{n=0}^\infty$  a sequência minimal de parâmetros para  $\{\tilde{d}_n\}_{n=1}^\infty$ . Suponha que  $\tilde{c}_n = (-1)^n c$ ,  $n \geq 1$ . Então,  $w$  é um possível ponto puro da medida  $\tilde{\mu}$  se, e somente se,*

$$w \in \left\{ \beta, e^{i\hat{\theta}_{p-1,1}}, e^{i\hat{\theta}_{p-1,2}}, \dots, e^{i\hat{\theta}_{p-1,p-1}} \right\},$$

onde  $\beta = -\frac{1+ic}{1-ic}$ ,  $\hat{\theta}_{p-1,j} = \arg \beta + 2 \arccos \hat{x}_{p-1,j}^{(c)}$  e  $\hat{x}_{p-1,j}^{(c)}$  é dado por

$$\hat{x}_{p-1,j}^{(c)} = \frac{\hat{\lambda}_{p-1,j} + c\sqrt{1 - \hat{\lambda}_{p-1,j}^2 + c^2}}{1 + c^2}, \quad j = 1, 2, \dots, p-1,$$

com  $\hat{\lambda}_{p-1,j}$  um autovalor da matriz  $A(\hat{d}_2, \hat{d}_3, \dots, \hat{d}_{p-1})$  dada como em (4.34) e tal que  $\hat{d}_{2n} = \tilde{m}_{2n}\tilde{m}_{2n-1}$  e  $\hat{d}_{2n+1} = (1 - \tilde{m}_{2n})(1 - \tilde{m}_{2n+1})$ ,  $n = 1, 2, \dots, (p-2)/2$ .

**Demonstração:** Considere  $\beta = -(1+ic)/(1-ic)$  e seja  $\hat{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  tal que  $\hat{\mu}(z) = \tilde{\mu}(\beta z)$ . Se  $\{\{\hat{c}_n\}_{n=1}^\infty, \{\hat{d}_n\}_{n=1}^\infty\}$  é o par de sequências reais associado à medida  $\hat{\mu}$ , como no Teorema 1.14, então, pelo Corolário 3.2, temos

$$\hat{c}_n = c, \quad \hat{m}_{2n} = \tilde{m}_{2n} \quad \text{e} \quad \hat{m}_{2n-1} = 1 - \tilde{m}_{2n-1}, \quad n \geq 1.$$

Consequentemente, como  $\tilde{\mu} \in N_p$  e  $p$  é par, é fácil ver que  $\hat{\mu}$  também pertence a  $N_p$ . Além disso, usando o fato que  $\hat{d}_n = (1 - \hat{m}_{n-1})\hat{m}_n$ ,  $n \geq 1$ , obtemos

$$\hat{d}_{2n} = \tilde{m}_{2n}\tilde{m}_{2n-1} \quad \text{e} \quad \hat{d}_{2n+1} = (1 - \tilde{m}_{2n})(1 - \tilde{m}_{2n+1}), \quad n \geq 1.$$

Agora, o resultado segue do Corolário 4.3 e do fato que  $\hat{\mu}(z) = \tilde{\mu}(\beta z)$ . ■

## 4.5 O caso limite periódico

Na Seção 4.3, mostramos que todas as medidas  $\mu \in N_p$  são tais que  $\sigma_{\text{ess}}(\mu) = \cup_{j=1}^p \mathcal{B}_j$ , onde cada  $\mathcal{B}_j$  é um subconjunto fechado de  $\mathbb{T}$ . Em outras palavras, todas as medidas com par associado de sequências  $p$ -periódicas,  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  (como no Teorema 1.14), têm o seu suporte essencial consistindo de, no máximo,  $p$  arcos fechados e disjuntos do círculo unitário.

O principal objetivo desta seção é observar o que acontece com o suporte essencial de uma medida  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  que está associada a um par de sequências,  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$ , que são limite  $p$ -periódicas.

Dizemos que uma sequência de números complexos  $\{q_n\}_{n=1}^\infty$  é *limite  $p$ -periódica* se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{np+k} = l_k, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

com  $l_k$  pertencente ao plano complexo estendido.

Para obter os resultados desta seção, usamos algumas informações estabelecidas em Barrios Rolaniav e López Lagomasino [2], onde os autores consideraram o comportamento assintótico de razões de polinômios ortogonais no círculo unitário.

Vamos começar introduzindo algumas notações encontradas em [2]. Seja  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  e  $\{\alpha_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  a correspondente sequência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\mu$ . Dizemos que  $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$  se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{np+k}^{(\mu)}| = L_k \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\alpha}_{np+k}^{(\mu)}}{\bar{\alpha}_{np+k-1}^{(\mu)}} = A_k, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (4.36)$$

Em [2], os autores mostraram que, quando  $p = 1$  e  $L_1 \in (0, 1]$ , todas as medidas em  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1; A_1)$  têm o mesmo suporte essencial. Precisamente, qualquer medida  $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1; A_1)$  é tal que

$$\sigma_{ess}(\mu) = \{z \in \mathbb{T} : \theta_0 \leq \arg(z) - \arg(A_1) \leq 2\pi - \theta_0\}, \quad (4.37)$$

onde  $\sin(\theta_0/2) := L_1$ . Neste caso, diz-se que a sequência  $\{\alpha_n^{(\mu)}\}_{n=0}^{\infty}$  obedece a condição de López (veja [36]).

Para  $p \geq 2$ , também em [2], mostrou-se que, com a condição  $L_k \in (0, 1)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ , todas as medidas  $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$  também têm o mesmo suporte essencial e que este suporte é a união de, no máximo,  $p$  arcos fechados e disjuntos sobre  $\mathbb{T}$ .

O seguinte teorema fornece informações sobre o suporte essencial de medidas tais que as sequências dos seus respectivos pares  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}\}$  (como no Teorema 1.14) são limite  $p$ -periódicas, com  $p = 1$ .

**Teorema 4.11.** *Seja  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  a medida associada ao par  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}\}$ , como no Teorema 1.14. Suponha que  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(\mu)} = c$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{(\mu)} = m$  e  $d = (1 - m)m$ . Então, o seguinte ocorre.*

(i) *Se  $1 - 4d + c^2 = 0$  então  $\sigma_{ess}(\mu) = \mathbb{T}$ .*

(ii) *Se  $1 - 4d + c^2 \neq 0$  e  $c \in \mathbb{R}$  então*

$$\sigma_{ess}(\mu) = \{z \in \mathbb{T} : \theta_0 \leq \arg(z) - \arg(w) \leq 2\pi - \theta_0\},$$

*onde  $w = (1 - ic)/(1 + ic)$  e  $\theta_0 = 2 \arcsen\left(\sqrt{(1 - 4d + c^2)/(1 + c^2)}\right)$ . Em particular, quando  $m = 0$ , temos  $\sigma_{ess}(\mu) = \{-w\}$ .*

(iii) *Se  $c = \pm\infty$  então  $\sigma_{ess}(\mu) = \{1\}$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{\alpha_n^{(\mu)}\}_{n=0}^{\infty}$  a sequência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\mu$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(\mu)} = c$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{(\mu)} = m$  e  $d = (1 - m)m$ , de (1.25) e (1.26), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n+1}^{(\mu)}| = \sqrt{\frac{1 - 4d + c^2}{1 + c^2}}. \quad (4.38)$$

Por outro lado, novamente de (1.25) e (1.26), obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\alpha}_{n+1}^{(\mu)}}{\bar{\alpha}_n^{(\mu)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1 - ic_{n+1}^{(\mu)}}{1 + ic_{n+2}^{(\mu)}} \right) \left( \frac{1 - 2m_{n+2}^{(\mu)} + ic_{n+2}^{(\mu)}}{1 - 2m_{n+1}^{(\mu)} + ic_{n+1}^{(\mu)}} \right) \right]. \quad (4.39)$$

Agora, se  $1 - 4d + c^2 = 0$ , de (4.38), temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n+1}^{(\mu)}| = 0$  e, conseqüentemente, a afirmativa (i) ocorre (veja Teorema A.2 do Apêndice A).

Se  $1 - 4d + c^2 \neq 0$ , de (4.38), podemos afirmar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n+1}^{(\mu)}| = L_1$ , onde  $L_1 = \sqrt{(1 - 4d + c^2)/(1 + c^2)} \in (0, 1]$ . Além disso,  $1 - 4d + c^2 \neq 0$  implica  $d \neq 1/4$  ou  $c \neq 0$ . Assim, de (4.39), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\alpha}_{n+1}^{(\mu)}}{\bar{\alpha}_n^{(\mu)}} = \frac{1 - ic}{1 + ic} = w. \quad (4.40)$$

Portanto, fazendo  $A_1 = w$  em (4.40), a condição (4.36) é satisfeita (com  $p = 1$ ). Logo, a partir de (4.37), obtemos

$$\sigma_{ess}(\mu) = \{z \in \mathbb{T} : \theta_0 \leq \arg(z) - \arg(w) \leq 2\pi - \theta_0\},$$

onde  $\sin(\theta_0/2) = L_1$ . Além disso, se  $m = 0$ , podemos ver que  $\theta_0 = \pi$  e, portanto,  $\sigma_{ess}(\mu) = \{-w\}$ . Isto completa a prova de (ii).

Para mostrar (iii) é suficiente notar que se  $c = \pm\infty$  então, em (4.38), temos  $L_1 = 1$  e, em (4.40), temos  $A_1 = -1$ . Daí, usando novamente (4.37), obtemos  $\sigma_{ess}(\mu) = \{1\}$ . ■

**Observação 4.10.** *A partir de (1.27), podemos afirmar que o número  $d$ , mencionado no Teorema 4.11, é tal que  $d = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^{(\mu)}$ , onde  $\{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^{\infty}$  é a seqüência encadeada positiva associada à medida  $\mu$ , conforme o Teorema 1.14. Assim, utilizando o Teorema 1.10, temos  $d \leq 1/4$ . Logo, podemos ver que a condição  $1 - 4d + c^2 = 0$  reduz-se ao caso em que  $c = 0$  e  $d = 1/4$ .*

Os próximos resultados tratam do caso limite periódico para  $p \geq 2$ .

**Lema 4.5.** *Sejam  $p \geq 2$  e  $L_k \in (0, 1)$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ . Então,*

$$N_p \cap \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p) \neq \emptyset$$

se, e somente se, existem números  $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$  e  $m_1, \dots, m_p \in (0, 1)$  tais que

$$A_k = \left[ \frac{1 - ic_k}{1 + ic_{k+1}} \right] \left[ \frac{1 - 2m_{k+1} + ic_{k+1}}{1 - 2m_k + ic_k} \right] \quad e \quad L_k = \sqrt{\frac{(1 - 2m_{k+1})^2 + c_{k+1}^2}{1 + c_{k+1}^2}}, \quad (4.41)$$

para  $k = 1, 2, \dots, p$ , com  $c_{p+1} := c_1$  e  $m_{p+1} := m_1$ .

**Demonstração:** Suponha que existe uma medida  $\mu \in N_p \cap \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$ . Seja  $\{\alpha_n^{(\mu)}\}_{n=0}^{\infty}$  a seqüência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\mu$  e seja

$\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  o par de seqüências reais correspondente a  $\mu$ , como no Teorema 1.14. Uma vez que  $\mu \in N_p$ , temos

$$c_{np+k}^{(\mu)} = c_k^{(\mu)} \quad \text{e} \quad m_{np+k}^{(\mu)} = m_k^{(\mu)}, \quad n \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (4.42)$$

Além disso, como  $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$ , as condições dadas em (4.36) ocorrem.

Portanto, a partir de (1.25), (1.26), (4.36) e (4.42), obtemos

$$A_k = \left[ \frac{1 - ic_k^{(\mu)}}{1 + ic_{k+1}^{(\mu)}} \right] \left[ \frac{1 - 2m_{k+1}^{(\mu)} + ic_{k+1}^{(\mu)}}{1 - 2m_k^{(\mu)} + ic_k^{(\mu)}} \right] \quad \text{e} \quad L_k = \sqrt{\frac{[1 - 2m_{k+1}^{(\mu)}]^2 + [c_{k+1}^{(\mu)}]^2}{1 + [c_{k+1}^{(\mu)}]^2}},$$

para  $k = 1, 2, \dots, p$ . Assim, a primeira parte da prova é obtida quando fazemos  $c_k = c_k^{(\mu)}$  e  $m_k = m_k^{(\mu)}$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$ .

Reciprocamente, se existem números  $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$  e  $m_1, \dots, m_p \in (0, 1)$  tais que (4.41) ocorre, então, usando o Teorema 1.14, podemos construir uma medida  $\mu \in N_p$  fazendo

$$c_{np+k}^{(\mu)} = c_k \quad \text{e} \quad m_{np+k}^{(\mu)} = m_k, \quad n \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (4.43)$$

Por outro lado, de (1.25), (1.26), (4.41) e (4.43), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{np+k}^{(\mu)}| = \sqrt{\frac{(1 - 2m_{k+1})^2 + c_{k+1}^2}{1 + c_{k+1}^2}} = L_k, \quad k = 1, 2, \dots, p,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\alpha}_{np+k}^{(\mu)}}{\bar{\alpha}_{np+k-1}^{(\mu)}} = \left[ \frac{1 - ic_k}{1 + ic_{k+1}} \right] \left[ \frac{1 - 2m_{k+1} + ic_{k+1}}{1 - 2m_k + ic_k} \right] = A_k, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Consequentemente, a medida construída  $\mu$  satisfaz (4.36) e, portanto, também pertence a  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$ . ■

**Teorema 4.12.** *Sejam  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  e  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  o par de seqüências reais associado à medida  $\mu$ , como no Teorema 1.14. Suponha que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{np+k}^{(\mu)} = c_k, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_{np+k}^{(\mu)} = m_k, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (4.44)$$

com  $p \geq 2$ ,  $c_k \in \mathbb{R}$ ,  $m_k \in (0, 1)$  e  $(1 - 2m_k)^2 + c_k^2 > 0$ . Se  $\hat{\mu} \in N_p$  é tal que seu par associado de seqüências reais,  $\{\{c_n^{(\hat{\mu})}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\hat{\mu})}\}_{n=1}^\infty\}$ , satisfaz

$$c_{np+k}^{(\hat{\mu})} = c_k \quad \text{e} \quad m_{np+k}^{(\hat{\mu})} = m_k, \quad n \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (4.45)$$

então, as medidas  $\mu$  e  $\hat{\mu}$  têm o mesmo suporte essencial.

**Demonstração:** A partir de (1.25), (1.26) e (4.44), é fácil ver que a medida  $\mu$  satisfaz as condições em (4.36), isto é,  $\mu \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$ , onde

$$A_k = \left[ \frac{1 - ic_k}{1 + ic_{k+1}} \right] \left[ \frac{1 - 2m_{k+1} + ic_{k+1}}{1 - 2m_k + ic_k} \right] \quad \text{e} \quad L_k = \sqrt{\frac{(1 - 2m_{k+1})^2 + c_{k+1}^2}{1 + c_{k+1}^2}},$$

para  $k = 1, 2, \dots, p$ , com  $c_{p+1} = c_1$  e  $m_{p+1} = m_1$ .

Portanto, pelo Lema 4.5, segue que  $N_p \cap \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p) \neq \emptyset$ . Além disso, usando (1.25), (1.26) e (4.45), também temos que  $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$ .

Como todas as medidas em  $\mathcal{M}_{\mathbb{T}}(L_1, \dots, L_p; A_1, \dots, A_p)$  têm o mesmo suporte essencial, concluímos que  $\sigma_{ess}(\mu) = \sigma_{ess}(\hat{\mu})$ . ■

## 4.6 Exemplos

Nesta seção, apresentamos alguns exemplos que discutem os principais resultados obtidos neste capítulo.

**Exemplo 4.1.** Considere a medida  $\tilde{\mu} \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  associada aos polinômios ortogonais no círculo unitário  $\{\phi_n^{(\alpha)}\}_{n=0}^{\infty}$ , (com  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $0 < |\alpha| < 1$ ) conhecidos como polinômios de Geronimus (veja [20, 21, 22] e [35, p. 83]). Os respectivos coeficientes de Verblunsky, associados à medida  $\tilde{\mu}$ , são constantes, ou seja,

$$\alpha_n^{(\tilde{\mu})} = -\overline{\phi_{n+1}^{(\alpha)}(0)} = \alpha, \quad n \geq 0.$$

A partir dos resultados estabelecidos em [20] segue que  $\tilde{\mu}$ , como uma medida de probabilidade, é tal que

$$\int_0^{2\pi} \ell(e^{i\theta}) d\tilde{\mu}(e^{i\theta}) = \int_{\theta_{|\alpha|}}^{2\pi - \theta_{|\alpha|}} \ell(e^{i\theta}) \frac{\sqrt{\cos^2(\theta_{|\alpha|}/2) - \cos^2(\theta/2)}}{2\pi|1 + \alpha| \operatorname{sen}((\theta - \vartheta_{\alpha})/2)} d\theta,$$

quando  $\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 \leq 0$ , e

$$\int_0^{2\pi} \ell(e^{i\theta}) d\tilde{\mu}(e^{i\theta}) = \int_{\theta_{|\alpha|}}^{2\pi - \theta_{|\alpha|}} \ell(e^{i\theta}) \frac{\sqrt{\cos^2(\theta_{|\alpha|}/2) - \cos^2(\theta/2)}}{2\pi|1 + \alpha| \operatorname{sen}((\theta - \vartheta_{\alpha})/2)} d\theta + \delta_{\alpha} \ell(e^{i\vartheta_{\alpha}}),$$

quando  $\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 > 0$ . Aqui,  $\ell$  é um polinômio de Laurent qualquer e os valores de  $\vartheta_{\alpha}$ ,  $\theta_{|\alpha|}$  e  $\delta_{\alpha}$  são dados por

$$e^{i\vartheta_{\alpha}} = w_{\alpha} = \frac{1 + \bar{\alpha}}{1 + \alpha}, \quad \theta_{|\alpha|} = 2 \arcsen(|\alpha|) \quad \text{e} \quad \delta_{\alpha} = \frac{2(\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2)}{|1 + \alpha|^2}.$$

Assumindo  $\vartheta_\alpha$  tal que  $-\pi < \vartheta_\alpha < \pi$ , vamos considerar a medida rotacionada  $\tilde{\mu}(w_\alpha z)$ , denotada simplesmente por  $\mu$ . Isto é,

$$\mu(z) = \tilde{\mu}(w_\alpha z). \quad (4.46)$$

Note que  $\tilde{\mu} \in V_1$ . Além disso, se  $\{\{c_n^{(\tilde{\mu})}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\tilde{\mu})}\}_{n=1}^\infty\}$  é o par de seqüências reais associado à medida  $\tilde{\mu}$ , como no Teorema 1.14, então, usando os resultados fornecidos em [15], temos

$$c_n^{(\tilde{\mu})} = -\frac{4\operatorname{Im}(\alpha)|\alpha|(1-|\alpha|^2)^{n-1}}{(|\alpha| - \operatorname{Re}(\alpha))(1+|\alpha|)^{2n-1} + (|\alpha| + \operatorname{Re}(\alpha))(1-|\alpha|)^{2n-1}}, \quad n \geq 1, \quad (4.47)$$

e

$$m_n^{(\tilde{\mu})} = \frac{1}{2} \frac{(|\alpha| - \operatorname{Re}(\alpha))(1+|\alpha|)^{2n} + (|\alpha| + \operatorname{Re}(\alpha))(1-|\alpha|)^{2n}}{(|\alpha| - \operatorname{Re}(\alpha))(1+|\alpha|)^{2n-1} + (|\alpha| + \operatorname{Re}(\alpha))(1-|\alpha|)^{2n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (4.48)$$

Consequentemente, de (4.47) e (4.48), concluímos que  $\tilde{\mu} \in V_1 \setminus N_1$  sempre que  $\alpha \notin \mathbb{R}$ .

Agora, seja  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  o par de seqüências reais associado à medida  $\mu$ , como no Teorema 1.14 e  $\{\rho_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  a seqüência, também associada a  $\mu$ , definida em (1.24). Usando a Observação 1.5, podemos afirmar que

$$\alpha_n^{(\mu)} = w_\alpha^{n+1}\alpha, \quad n \geq 0. \quad (4.49)$$

Daí,  $\rho_n^{(\mu)} = w_\alpha^{-n}$ ,  $n \geq 0$ , e usando (1.23), obtemos

$$c_n^{(\mu)} = -\frac{\operatorname{Im}(\alpha)}{1 + \operatorname{Re}(\alpha)} \quad e \quad m_n^{(\mu)} = \frac{1}{2} \frac{1 - |\alpha|^2}{[1 + \operatorname{Re}(\alpha)]}, \quad n \geq 1. \quad (4.50)$$

Portanto, a partir de (4.50), concluímos que  $\mu \in N_1$ . Esse resultado era, justamente, o esperado pelo Teorema 4.5 (veja também a Observação 4.5), visto que  $w_\alpha$  é um possível ponto puro da medida  $\tilde{\mu}$ . Além disso, se  $\alpha \notin \mathbb{R}$  então  $\mu \in N_1 \setminus V_1$ .

Do Teorema 4.9,  $w = 1$  é o único possível ponto puro da medida  $\mu$ . Por outro lado, usando o Teorema 4.7, observamos que  $w = 1$  é um ponto puro de  $\mu$  se, e somente se,

$$|1 - \alpha_0^{(\mu)}|^2 < 1 - |\alpha_0^{(\mu)}|^2. \quad (4.51)$$

Uma vez que  $w_\alpha = (1 + \bar{\alpha})/(1 + \alpha)$  podemos usar (4.49) para concluir que a condição (4.51) é, justamente, equivalente a  $\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2 > 0$ . Exatamente como esperado, já que, por (4.46),  $w = 1$  é um ponto puro de  $\mu$  se, e somente se,  $w = w_\alpha$  é um ponto puro de  $\tilde{\mu}$ .

Se  $w = 1$  é ponto puro de  $\mu$  então, usando mais uma vez o Teorema 4.7 e, também, (4.49), podemos ver que o tamanho da massa em  $w = 1$  é  $\mu(\{1\}) = \gamma/(\gamma + \zeta)$ , com

$$\zeta = \frac{|1 - \alpha_0^{(\mu)}|^2}{1 - |\alpha_0^{(\mu)}|^2} = \frac{1 - |\alpha|^2}{|1 + \alpha|^2} \quad e \quad \gamma = 1 - \zeta = \frac{2(\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2)}{|1 + \alpha|^2}.$$

Consequentemente,

$$\mu(\{1\}) = \frac{2(\operatorname{Re}(\alpha) + |\alpha|^2)}{|1 + \alpha|^2} = \delta_\alpha,$$

mais uma vez como esperávamos, já que  $\mu(z) = \tilde{\mu}(w_\alpha z)$ .

Note também que, de (4.47) e (4.48), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(\tilde{\mu})} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{(\tilde{\mu})} = \frac{1}{2}(1 + |\alpha|).$$

Logo, usando o Teorema 4.11, obtemos

$$\sigma_{\text{ess}}(\tilde{\mu}) = \{z \in \mathbb{T} : \theta_0 \leq \arg(z) \leq 2\pi - \theta_0\},$$

onde  $\theta_0 = 2 \arcsen(|\alpha|) = \theta_{|\alpha|}$ , exatamente de acordo com os já conhecidos resultados para polinômios de Geronimus e associadas medidas.

**Exemplo 4.2.** Seja  $\mu(z; b_1, b_2, c) \in \mathcal{P}(\mathbb{T})$  a medida associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty, \{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty\}$  (como no Teorema 1.14) tal que

$$c_n^{(\mu)} = c \quad e \quad d_n^{(\mu)} = (1 - m_{n-1}^{(\mu)})m_n^{(\mu)}, \quad n \geq 1,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  e a seqüência minimal de parâmetros  $\{m_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$ , da seqüência encadeada positiva  $\{d_n^{(\mu)}\}_{n=1}^\infty$ , satisfaz  $m_0^{(\mu)} = 0$ ,

$$m_{2n-1}^{(\mu)} = \frac{1 - b_1}{2} \quad e \quad m_{2n}^{(\mu)} = \frac{1 - b_2}{2}, \quad n \geq 1,$$

com  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ ,  $|b_1| < 1$  e  $|b_2| < 1$ .

Se  $\{\alpha_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\mu$  e  $\{\rho_n^{(\mu)}\}_{n=0}^\infty$  é a seqüência dada no Teorema 1.14, também associada a  $\mu$ , então, usando as relações fornecidas em (1.25) e (1.26), obtemos

$$\rho_n^{(\mu)} = \left(\frac{1 - ic}{1 + ic}\right)^n \quad e \quad \alpha_n^{(\mu)} = \left(\frac{1 + ic}{1 - ic}\right)^n \left[\frac{1 - 2m_{n+1}^{(\mu)} - ic}{1 - ic}\right], \quad n \geq 0.$$

Se  $c \neq 0$ , podemos observar que  $\mu \in N_2 \setminus V_2$ , em acordo com o Teorema 4.3. Além disso,

$$\alpha_{n+2}^{(\mu)} = \lambda \alpha_n^{(\mu)}, \quad n \geq 0,$$

com  $\bar{\lambda} = \left(\frac{1-ic}{1+ic}\right)^2 = \rho_2^{(\mu)}$ , exatamente como esperado pelo Teorema 4.2.

As soluções para a equação  $w^2 = \lambda$  são

$$w_{\lambda,1} = \left(\frac{1+ic}{1-ic}\right) \quad e \quad w_{\lambda,2} = -\left(\frac{1+ic}{1-ic}\right).$$

Observe que, pelo Teorema 4.4, existem exatamente duas medidas em  $V_2$  que são equivalentes por rotação à medida  $\mu$ .

A primeira daquelas é a medida  $\tilde{\mu}(z; b_1, b_2, c) = \mu(\bar{w}_{\lambda,1}z; b_1, b_2, c)$ . Usando a Observação 1.5, podemos mostrar que a sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n^{(\tilde{\mu})}\}_{n=0}^\infty$ , associada à medida  $\tilde{\mu}$ , satisfaz

$$\alpha_{2n}^{(\tilde{\mu})} = \frac{b_1 - ic}{1 + ic} \quad e \quad \alpha_{2n+1}^{(\tilde{\mu})} = \frac{b_2 - ic}{1 + ic}, \quad n \geq 0,$$

confirmando, assim, que  $\tilde{\mu} \in V_2$ .

A segunda é a medida  $\hat{\mu}(z; b_1, b_2, c) = \mu(\bar{w}_{\lambda,2}z; b_1, b_2, c)$ . Se  $\{\{c_n^{(\hat{\mu})}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\hat{\mu})}\}_{n=1}^\infty\}$  é o par de sequências reais associado à medida  $\hat{\mu}$ , como no Teorema 1.14, então, a partir do Corolário 3.2, temos

$$c_n^{(\hat{\mu})} = (-1)^n c, \quad m_{2n}^{(\hat{\mu})} = m_{2n}^{(\mu)} = \frac{1-b_2}{2} \quad e \quad m_{2n-1}^{(\hat{\mu})} = 1 - m_{2n-1}^{(\mu)} = \frac{1+b_1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Portanto, usando novamente (1.25) e (1.26), confirmamos que, de fato,  $\hat{\mu} \in V_2$ , uma vez que sua correspondente sequência de coeficientes de Verblunsky,  $\{\alpha_n^{(\hat{\mu})}\}_{n=0}^\infty$ , é tal que

$$\alpha_{2n}^{(\hat{\mu})} = \frac{-b_1 + ic}{1 + ic} \quad e \quad \alpha_{2n+1}^{(\hat{\mu})} = \frac{b_2 - ic}{1 + ic}, \quad n \geq 0.$$

Além disso, pelo Teorema 4.3, podemos afirmar que

$$V_2 \cap N_2 = \{\hat{\mu}(z; b_1, b_2, c) : c \in \mathbb{R} \text{ e } b_1, b_2 \in (-1, 1)\}.$$

Se denotarmos a função peso de  $\hat{\mu}$  por  $\hat{w}(\theta)$ , então, aplicando os resultados fornecidos no Exemplo 3.1, obtemos

$$\hat{w}(\theta) = \frac{\sqrt{(1-b_1^2)(1-b_2^2) - [(1+c^2)\cos\theta - b_1b_2 - c^2]^2}}{|(1+b_2)[\sin\theta + c(1-\cos\theta)]|}. \quad (4.52)$$

Além disso, as bands  $\hat{B}_1$  e  $\hat{B}_2$ , associadas à medida  $\hat{\mu}$ , são determinadas pelos pontos  $\hat{z}_j^+ = e^{i\hat{\theta}_j^+}$  e  $\hat{z}_j^- = e^{i\hat{\theta}_j^-}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , com

$$\hat{\theta}_1^+ = \arccos\left(\frac{(1-b_1^2)^{1/2}(1-b_2^2)^{1/2} + c^2 + b_1b_2}{1+c^2}\right), \quad \hat{\theta}_2^+ = 2\pi - \hat{\theta}_1^+,$$

$$\hat{\theta}_1^- = \arccos\left(\frac{c^2 - (1 - b_1^2)^{1/2}(1 - b_2^2)^{1/2} + b_1 b_2}{1 + c^2}\right) \quad e \quad \hat{\theta}_2^- = 2\pi - \hat{\theta}_1^-.$$

Agora, podemos usar o fato que  $\hat{\mu}(z; b_1, b_2, c) = \mu(\bar{w}_{\lambda,2}z; b_1, b_2, c)$  para obter a função peso  $w(\theta)$  associada à medida  $\mu$ . Neste caso, se  $\eta = \arg(w_{\lambda,2})$  então, de (4.52), temos

$$w(\theta) = \hat{w}(\theta + \eta) = \frac{\sqrt{(1 - b_1^2)(1 - b_2^2) - [(1 + c^2)\cos(\theta + \eta) - b_1 b_2 - c^2]^2}}{|(1 + b_2)\{\sin(\theta + \eta) + c[1 - \cos(\theta + \eta)]\}}.$$

As bands  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ , associadas à medida  $\mu$  (como no Teorema 4.6), são determinadas pelos pontos  $z_j^+ = e^{i\theta_j^+}$  e  $z_j^- = e^{i\theta_j^-}$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , com

$$\theta_1^+ = \hat{\theta}_1^+ - \eta, \quad \theta_2^+ = 2\pi - \theta_1^+, \quad \theta_1^- = \hat{\theta}_1^- - \eta \quad e \quad \theta_2^- = 2\pi - \theta_1^-.$$

A partir do Teorema 4.9 (veja também o Corolário 4.3), os possíveis pontos puros da medida  $\mu$  são  $w_1 = 1$  e  $w_2 = \bar{w}_{\lambda,2}$ . Por outro lado, se  $\{\tau_n^{(\mu)}(w)\}_{n=0}^\infty$  é a sequência definida em (1.30), então, podemos verificar que

$$\tau_{n+2}^{(\mu)}(w_1) = \bar{\lambda}\tau_n^{(\mu)}(w_1) \quad e \quad \tau_{n+2}^{(\mu)}(w_2) = \bar{\lambda}\tau_n^{(\mu)}(w_2), \quad n \geq 0,$$

o que está de acordo com o Lema 4.2.

Aplicando o Teorema 4.7 podemos ver que  $w_1 = 1$  é, de fato, um ponto puro da medida  $\mu$  se, e somente se,  $b_1 + b_2 > 0$ . Além disso, se  $w_1$  é ponto puro de  $\mu$  então o tamanho da massa neste ponto é dado por

$$\mu(\{w_1\}) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \zeta_1} = \frac{b_1 + b_2}{1 + b_2}.$$

Analogamente,  $w_2 = \bar{w}_{\lambda,2}$  é, de fato, um ponto puro da medida  $\mu$  se, e somente se,  $b_2 - b_1 > 0$ . Se  $w_2$  é ponto puro de  $\mu$  então o tamanho da massa neste ponto é dado por

$$\mu(\{w_2\}) = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + \zeta_2} = \frac{b_2 - b_1}{1 + b_2}.$$

Estes resultados sobre os pontos puros da medida  $\mu$  são esperados pelo Exemplo 3.1, uma vez que  $\mu(z; b_1, b_2, c) = \hat{\mu}(w_{\lambda,2}z; b_1, b_2, c)$ .

O exemplo a seguir é mais uma aplicação do Teorema 4.11. Como mencionado no início desse capítulo, este exemplo é uma consequência direta de alguns resultados obtidos no artigo [6], publicado em 2015 na revista *Applied Mathematics and Computation* em coautoria com Bracciali e Sri Ranga.

**Exemplo 4.3.** *Sejam  $\psi^{(\kappa)}$ ,  $0 \leq \kappa < 1$ , medidas de probabilidade não triviais, com suporte no círculo unitário, dadas por*

$$\int_{\mathbb{T}} \ell(z) d\psi^{(\kappa)}(z) = (1 - \kappa) \int_{\mathbb{T}} \ell(z) \frac{1}{2\pi iz} dz + \kappa \ell(i),$$

para qualquer polinômio de Laurent  $\ell$ .

A partir dos resultados estabelecidos em [6], associado a cada uma das medidas  $\psi^{(\kappa)}$ ,  $0 \leq \kappa < 1$ , sabemos que existe um único par de seqüências reais  $\{\{c_n^{(\psi^{(\kappa)})}\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n^{(\psi^{(\kappa)})}\}_{n=1}^{\infty}\}$  tal que, para  $s \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} c_{4s+1}^{(\psi^{(\kappa)})} &= \frac{\kappa}{4s\kappa + 1}, & m_{4s+1}^{(\psi^{(\kappa)})} &= \frac{1}{2} \frac{(4s\kappa + 1)^2 + \kappa^2}{(4s\kappa + 1)^2}, \\ c_{4s+2}^{(\psi^{(\kappa)})} &= \frac{-2\kappa^2}{[(4s+1)\kappa + 1]^2}, & m_{4s+2}^{(\psi^{(\kappa)})} &= \frac{1}{2} \frac{(4s\kappa + 1)[[(4s+2)\kappa + 1]^2 + \kappa^2]}{[(4s+1)\kappa + 1]^3}, \\ c_{4s+3}^{(\psi^{(\kappa)})} &= \frac{-\kappa}{(4s+2)\kappa + 1}, & m_{4s+3}^{(\psi^{(\kappa)})} &= \frac{1}{2} \frac{[(4s+2)\kappa + 1]^2 - \kappa^2}{[(4s+2)\kappa + 1]^2}, \\ c_{4s+4}^{(\psi^{(\kappa)})} &= 0, & m_{4s+4}^{(\psi^{(\kappa)})} &= \frac{1}{2} \frac{(4s+2)\kappa + 1}{(4s+3)\kappa + 1}. \end{aligned}$$

Claramente, as seqüências  $\{c_n^{(\psi^{(\kappa)})}\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\{m_n^{(\psi^{(\kappa)})}\}_{n=1}^{\infty}$  satisfazem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^{(\psi^{(\kappa)})} = 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_n^{(\psi^{(\kappa)})} = \frac{1}{2}.$$

Consequentemente, usando o Teorema 4.11, temos

$$\sigma_{ess}(\psi^{(\kappa)}) = \mathbb{T}, \quad 0 \leq \kappa < 1.$$

Esse resultado é justamente o que esperávamos, uma vez que cada uma das medidas  $\psi^{(\kappa)}$ ,  $0 \leq \kappa < 1$ , é uma simples modificação da medida de Lebesgue  $d\omega_0(z) = (2\pi iz)^{-1} dz$ , apenas com a inclusão de um ponto de massa em  $z = i$ .

O último exemplo deste capítulo é uma aplicação do Teorema 4.12.

**Exemplo 4.4.** *Considere a família de medidas de probabilidade não triviais no círculo unitário  $\{\mu(\delta; \cdot) : 0 \leq \delta < 1\}$  tal que, para cada  $0 \leq \delta < 1$ ,  $\mu(\delta; \cdot)$  é a medida associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n(\delta)\}_{n=1}^{\infty}, \{m_n(\delta)\}_{n=1}^{\infty}\}$  (como no Teorema 1.14), onde*

$$c_n(\delta) = (-1)^n c \quad e \quad m_n(\delta) = \frac{1}{2} \frac{1 + (n-2)\delta}{1 + (n-1)\delta}, \quad n \geq 1, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4.53)$$

Como consequência de (4.53), podemos afirmar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_{2n+k}(\delta) = (-1)^k c \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} m_{2n+k}(\delta) = \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2. \quad (4.54)$$

Considere  $c \neq 0$  e seja  $\hat{\mu}$  a medida associada ao par de seqüências reais  $\{\{c_n^{(\hat{\mu})}\}_{n=1}^\infty, \{m_n^{(\hat{\mu})}\}_{n=1}^\infty\}$ , onde

$$c_n^{(\hat{\mu})} = (-1)^n c \quad e \quad m_n^{(\hat{\mu})} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1. \quad (4.55)$$

Usando os resultados estabelecidos no Exemplo 3.1 (veja também a Observação 3.3), temos  $\hat{\mu} \in N_2 \cap V_2$ . Além disso,  $\sigma_{ess}(\hat{\mu}) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ , com

$$\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{T} : 0 \leq \arg(z) \leq \theta_c\} \quad e \quad \mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{T} : 2\pi - \theta_c \leq \arg(z) \leq 2\pi\},$$

onde  $\theta_c = \arccos((c^2 - 1)(c^2 + 1)) \in [0, \pi]$ .

Logo, se  $c \neq 0$ , usando (4.54) e (4.55), o Teorema 4.12 nos garante que

$$\sigma_{ess}(\mu(\delta; \cdot)) = \sigma_{ess}(\hat{\mu}) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2, \quad 0 \leq \delta < 1.$$

Por outro lado, se  $c = 0$ , do Teorema 4.11, claramente temos

$$\sigma_{ess}(\mu(\delta; \cdot)) = \mathbb{T}, \quad 0 \leq \delta < 1.$$

Os resultados aqui obtidos podem ser confirmados observando-se que

$$\int_{\mathbb{T}} \ell(z) d\mu(\delta; z) = (1 - \delta) \int_{\mathbb{T}} \ell(z) d\hat{\mu}(z) + \delta \ell(1),$$

para qualquer polinômio de Laurent  $\ell$ .

# Considerações Finais

Como já mencionamos, a teoria dos polinômios ortogonais no círculo unitário (e medidas associadas) vem sendo muito estudada nos últimos anos por vários pesquisadores devido suas aplicações em diversos ramos da Matemática. Esses estudos já estão bem desenvolvidos no que se refere a análise das medidas por meio de sua correspondente sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$ . Entretanto, recentemente, com o uso da teoria de sequências encadeadas positivas, em Costa et al. [13] (assim como em Castillo et al. [10]), verificou-se que podemos, também, caracterizar uma medida de probabilidade, com suporte no círculo unitário, através de um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva. Além disso, se  $\{m_n\}_{n=0}^\infty$  é a sequência minimal de parâmetros de  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  então os coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  associados aos polinômios ortogonais com respeito à medida  $\mu$  são expressos por meio da relação

$$\alpha_{n-1} = \bar{\rho}_{n-1} \left[ \frac{1 - 2m_n - ic_n}{1 - ic_n} \right], \quad n \geq 1,$$

onde  $\rho_0 = 1$  e  $\rho_n = \prod_{k=1}^n (1 - ic_k)/(1 + ic_k)$ ,  $n \geq 1$ .

No presente trabalho, nosso objetivo foi, justamente, analisar o comportamento de algumas classes (ou conjuntos) de medidas quando impomos algumas restrições sobre as sequências do par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$  ou, equivalentemente, do par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$ .

Quando a sequência  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  satisfaz uma propriedade de sinal alternante (isto é,  $c_n = (-1)^n \tilde{c}_n$ , para  $n \geq 1$ , com  $\{\tilde{c}_n\}_{n=1}^\infty$  uma sequência de números reais positiva ou negativa) e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva qualquer, verificamos que sempre é possível estimar o suporte das correspondentes medidas.

Uma vez que o estudo de medidas associadas a sequências de coeficientes de Verblunsky periódicas já está completamente caracterizado (veja, por exemplo, Simon [36]), uma pergunta natural que surgiu foi a seguinte: de que maneira podemos tomar as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  a fim de obter uma medida cuja correspondente sequência de coeficientes de Verblunsky seja  $p$ -periódica? No Capítulo 3, desse trabalho, conseguimos

estabelecer uma resposta a esta pergunta. De fato, mostramos que era suficiente considerar  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$ , também,  $p$ -periódicas e tal que  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  satisfizesse uma restrição de sinal do tipo  $c_{2s} = -c_{2s-1}$ , para  $s \geq 1$ .

Como consequência do questionamento anterior, surgiu uma outra pergunta também interessante: qual o comportamento de uma medida associada ao par  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{m_n\}_{n=1}^\infty\}$  quando as sequências  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{m_n\}_{n=1}^\infty$  são  $p$ -periódicas? No Capítulo 4, observamos que, com uma adequada rotação, o estudo de uma tal medida é completamente equivalente ao estudo de uma medida que está associada a uma sequência de coeficientes de Verblunsky  $p$ -periódica.

As discussões descritas no terceiro e quarto parágrafos desta seção tiveram como resultado o artigo [7], aceito para publicação na revista *Computational and Applied Mathematics* e disponível no modo *online first*. Por outro lado, os resultados apresentados no Capítulo 4, dessa tese, deram origem ao artigo [8] publicado em 2017 na revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

Na mesma linha de caracterizar a medida através de um par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ , onde  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  é uma sequência encadeada positiva, vale salientar, ainda, que publicamos, em 2015, o artigo intitulado: *Explicit formulas for OPUC and POPUC associated with measures which are simple modifications of the Lebesgue measure* na revista *Applied Mathematics and Computation* (veja [6]). Esse trabalho também foi útil na produção de um dos exemplos descritos no Capítulo 4 dessa tese.

Muitos trabalhos recentes desenvolvidos pelo grupo de pesquisa, do qual fazemos parte, têm sido fruto dessa caracterização. Acreditamos que ainda podemos extrair outros resultados sob esse novo ponto de vista. Por exemplo, já existe uma teoria espectral formalizada quando partimos da caracterização da medida através da sequência de coeficientes de Verblunsky  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  a ela associada (veja [36]). E se olharmos para a medida a partir do par de sequências reais  $\{\{c_n\}_{n=1}^\infty, \{d_n\}_{n=1}^\infty\}$ ? Existe uma correspondente análise espectral para este caso? Será possível relacionar  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  e  $\{d_n\}_{n=1}^\infty$  com alguma matriz para aplicar a teoria espectral já existente?

Como observamos, essa nova perspectiva de caracterizar a medida é um tema bem atual que ainda poderá nos render belos frutos e servir de inspiração para muitos outros pesquisadores.

# Referências Bibliográficas

- [1] Agarwal, R.P.; Milovanović, G.V. Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials. *Appl. Math. Comput.*, v. 128, p. 151–166, 2002.
- [2] Barrios Rolanía, D.; López Lagomasino, G. Ratio asymptotics for polynomials orthogonal on arcs of the unit circle. *Constr. Approx.*, v. 15, p. 1–31, 1999.
- [3] Bartle, R.G. *Elementos de Análise Real*. Rio de Janeiro: Ed. Campus, 1983.
- [4] Bartle, R.G. *Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [5] Bracciali, C.F.; McCabe, J.H.; Pérez, T.E.; Sri Ranga, A. A class of orthogonal functions given by a three term recurrence formula. *Math. Comp.*, v. 85, p. 1837–1859, 2016.
- [6] Bracciali, C.F.; Silva, J.S.; Sri Ranga, A. Explicit formulas for OPUC and POPUC associated with measures which are simple modifications of the Lebesgue measure. *Appl. Math. Comput.*, v. 271, p. 820–831, 2015.
- [7] Bracciali, C.F.; Silva, J.S.; Sri Ranga, A.; Veronese, D.O. Orthogonal polynomials on the unit circle: Verblunsky coefficients with some restrictions imposed on a pair of related real sequences. *Comp. Appl. Math.*, 2016. In Press.
- [8] Bracciali, C.F.; Silva, J.S.; Sri Ranga, A.; Veronese, D.O. Verblunsky coefficients related with periodic real sequences and associated measures on the unit circle. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 445, p. 719–745, 2017.
- [9] Breuer, J.; Ryckman, E.; Simon, B. Equality of the spectral and dynamical definitions of reflection. *Comm. Math. Phys.*, v. 295, p. 531–550, 2010.

- [10] Castillo, K.; Costa, M.S.; Sri Ranga, A.; Veronese, D.O. A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula. *J. Approx. Theory*, v. 184, p. 146–162, 2014.
- [11] Castillo, K.; Garza, L.; Marcellán, F. Perturbations on the subdiagonals of Toeplitz matrices. *Linear Alg. Appl.*, v. 434, p. 1563–1579, 2011.
- [12] Chihara, T.S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. New York: Gordon and Breach, 1978.
- [13] Costa, M.S.; Felix, H.M.; Sri Ranga, A. Orthogonal polynomials on the unit circle and chain sequences. *J. Approx. Theory*, v. 173, p. 14–32, 2013.
- [14] Costa, M.S.; Godoy, E.; Lamblém, R.L.; Sri Ranga, A. Basic hypergeometric functions and orthogonal Laurent polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 140, p. 2075–2089, 2011.
- [15] Costa, M.S.; Lamblém, R.L.; McCabe, J.H.; Sri Ranga, A. Para-orthogonal polynomials from constant Verblunsky coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, v. 426, p. 1040–1060, 2015.
- [16] Dimitrov, D.K.; Sri Ranga, A. Zeros of a family of hypergeometric para-orthogonal polynomials on the unit circle. *Math. Nachr.*, v. 286, p. 1778–1791, 2013.
- [17] Erdélyi, T.; Nevai, P.; Zhang, J.; Geronimo, J. A simple proof of “Favard’s theorem” on the unit circle. *Att. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, v. 39, p. 551–556, 1991.
- [18] Gautschi, W. Orthogonal polynomials - constructive theory and applications. *J. Comput. Appl. Math.*, v. 12 e 13, p. 61–76, 1985.
- [19] Geronimus, Ya.L. On polynomials orthogonal on the unit circle, on trigonometric moment problem, and on allied Carathéodory and Schur functions. *Mat. Sb.*, v. 15, p. 99–130, 1944.
- [20] Geronimus, Ya.L. *Orthogonal Polynomials*, English translation of the appendix to the Russian translation of Szegő’s book [38], in “Two papers on special functions”, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, v. 108, p. 37–130. Providence: American Mathematical Society, 1977.

- [21] Golinskii, L.; Nevai, P.; Van Assche, W. Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle. *J. Approx. Theory*, v. 83, p. 392–422, 1995.
- [22] Golinskii, L.; Nevai, P.; Pintér, F.; Van Assche, W. Perturbation of orthogonal polynomials on an arc of the unit circle, II. *J. Approx. Theory*, v. 96, p. 1–33, 1999.
- [23] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 2*. New York: John Wiley & Sons, 1977.
- [24] Ismail, M.E.H. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*. In: Encyclopedia of Mathematics and its Applications. vol. 98. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.
- [25] Jones, W.B.; Njåstad, O.; Thron, W.J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle. *Bull. Lond. Math. Soc.*, v. 21, p. 113–152, 1989.
- [26] Kheifets, A.; Golinskii, L.; Peherstorfer, F.; Yuditskii, P. Scattering theory for CMV matrices: uniqueness, Helson-Szegő and strong Szegő theorems. *Integr. Equ. Oper. Theory*, v. 69, p. 479–508, 2011.
- [27] Milovanović, G.V.; Mitrinović, D.S.; Rassias, Th.M. *Topic in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros*. Singapore: World Scientific, 1994.
- [28] Peherstorfer, F. Positive trigonometric quadrature formulas and quadrature on the unit circle. *Math. Comp.*, v. 80, p. 1685–1701, 2011.
- [29] Peherstorfer, F.; Steinbauer, R. Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle, I. *J. Approx. Theory*, v. 85, p. 140–184, 1996.
- [30] Peherstorfer, F.; Steinbauer, R. Orthogonal polynomials on arcs of the unit circle, II. Orthogonal polynomials with periodic reflection coefficients. *J. Approx. Theory*, v. 87, p. 60–102, 1996.
- [31] Peherstorfer, F.; Volberg, A.; Yuditskii, P. CMV matrices with asymptotically constant coefficients. Szegő-Blaschke class, scattering theory. *J. Funct. Anal.*, v. 256, p. 2157–2210, 2009.

- 
- [32] Reed, M.; Simon, B. *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I. Functional Analysis*. New York: Academic Press, 1972.
- [33] Rudin, W. *Princípios de Análise Matemática*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1971.
- [34] Simanek, B. Weak convergence of CD kernels: a new approach on the circle and real line. *J. Approx. Theory*, v. 164, p. 204–209, 2012.
- [35] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 1. Classical Theory*. In: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [36] Simon, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle. Part 2. Spectral Theory*. In: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 54. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [37] Sri Ranga, A. *Polinômios Ortogonais e Similares*, Tese de Livre-Docência. São Carlos: ICMC, USP, 1990.
- [38] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*. In: American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23, 4. ed. Providence: American Mathematical Society, 1975.
- [39] Tsujimoto, S.; Zhedanov, A. Elliptic hypergeometric Laurent biorthogonal polynomials with a dense point spectrum on the unit circle. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, v. 5, p. 30, 2009.
- [40] Wall, H.S. *Analytic Theory of Continued Fractions*. New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1948.

# Apêndice A

## Resultados Auxiliares

O principal objetivo deste apêndice é apresentar alguns resultados auxiliares utilizados no decorrer desse trabalho. Os resultados serão expostos sem demonstrações, entretanto, fornecemos as devidas referências onde tais demonstrações podem ser encontradas.

Iniciamos com um lema estabelecido em Bracciali et al. [5]. Para isso, considere  $\mathbb{P}_m$  o espaço linear dos polinômios reais de grau no máximo  $m$  e seja  $\Omega_m$  o espaço linear (de dimensão  $m + 1$ ) das funções “reais” em  $[-1, 1]$ , definido da seguinte forma:  $\Omega_0 \equiv \mathbb{P}_0$  e, para  $m \geq 1$ ,  $\Omega_m$  é tal que se  $\mathcal{F} \in \Omega_m$  então

$$\mathcal{F}(x) = B^{(0)}(x) + \sqrt{1 - x^2}B^{(1)}(x),$$

onde  $B^{(0)}(x) \in \mathbb{P}_m$  e  $B^{(1)}(x) \in \mathbb{P}_{m-1}$  satisfazem

$$B^{(0)}(-x) = (-1)^m B^{(0)}(x) \quad \text{e} \quad B^{(1)}(-x) = (-1)^{m-1} B^{(1)}(x).$$

Assim, se  $\mathcal{F} \in \Omega_{2n}$  então  $B^{(0)}$  é um polinômio par de grau no máximo  $2n$  e  $B^{(1)}$  é um polinômio ímpar de grau no máximo  $2n - 1$ . Por outro lado, se  $\mathcal{F} \in \Omega_{2n+1}$  então  $B^{(0)}$  é um polinômio ímpar de grau no máximo  $2n + 1$  ao passo que  $B^{(1)}$  é um polinômio par de grau no máximo  $2n$ .

Em [5], os autores verificaram que funções pertencentes a  $\Omega_m$  podem ser conectadas a polinômios autoinversíveis de grau  $m$  (veja Definição 1.10). Isto é, dada  $\mathcal{F}_m \in \Omega_m$  então, associada a esta função, existe um único polinômio, digamos  $Q_m$ , que é um polinômio autoinversível de grau  $m$ . Precisamente,  $e^{-im\theta/2}Q_m(e^{i\theta}) = \mathcal{F}_m(x)$ , onde  $x = \cos(\theta/2)$ . O lema seguinte estabelece uma informação mais completa sobre esta conexão, a saber:

**Lema A.1.** *Seja  $x = \cos(\theta/2)$ . Então, o polinômio  $Q_m$  é autoinversível de grau  $m$  se, e somente se,*

$$e^{-im\theta/2}Q_m(e^{i\theta}) = \mathcal{F}_m(x) = B_m^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2}B_m^{(1)}(x),$$

onde  $B_m^{(0)}$  e  $B_m^{(1)}$  são polinômios reais de grau no máximo  $m$  e  $m-1$ , respectivamente, satisfazendo a simetria

$$B_m^{(0)}(-x) = (-1)^m B_m^{(0)}(x) \quad e \quad B_m^{(1)}(-x) = (-1)^{m-1} B_m^{(1)}(x).$$

Assim,

$$|Q_m(e^{i\theta})|^2 = [B_m^{(0)}(x) + \sqrt{1-x^2}B_m^{(1)}(x)]^2 \quad e \quad Q_m(1) = B_m^{(0)}(1).$$

Além disso,  $Q_m$  é um polinômio autoinversível com coeficientes reais se, e somente se,  $B_m^{(1)}$  é identicamente nulo.

**Demonstração:** Veja [5, Lema 2.1]. ■

Agora, apresentamos dois resultados que podem ser encontrados em Simon [35].

**Teorema A.1.** *Sejam  $\mu_n$  e  $\mu_\infty$  medidas em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ . Sejam, ainda,  $\nu_j^{(\mu_n)}$ ,  $\alpha_j^{(\mu_n)}$ ,  $\phi_j^{(\mu_n)}(z)$  e  $\varphi_j^{(\mu_n)}(z)$  seus respectivos momentos, coeficientes de Verblunsky, polinômios ortogonais mônicos e polinômios ortonormais. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $\mu_n \rightharpoonup \mu_\infty$ ;
- (ii) Para cada  $j \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_j^{(\mu_n)} = \nu_j^{(\mu_\infty)}$ ;
- (iii) Para cada  $j \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(\mu_n)} = \alpha_j^{(\mu_\infty)}$ ;
- (iv) Para cada  $j \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_j^{(\mu_n)}(z) = \phi_j^{(\mu_\infty)}(z)$ ;
- (iv) Para cada  $j \geq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_j^{(\mu_n)}(z) = \varphi_j^{(\mu_\infty)}(z)$ .

**Demonstração:** Veja [35, Teorema 1.5.6]. ■

**Teorema A.2.** *Sejam  $\mu_1$  e  $\mu_2$  duas medidas em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  tais que  $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$  e  $\{\beta_j\}_{j=0}^\infty$  são suas respectivas sequências de coeficientes de Verblunsky. Suponha que existe  $\lambda_j \in \mathbb{T}$  tal que*

$$\beta_j \lambda_j - \alpha_j \rightarrow 0 \quad e \quad \lambda_{j+1} \bar{\lambda}_j \rightarrow 1, \quad \text{quando } j \rightarrow \infty.$$

Então,  $\mu_1$  e  $\mu_2$  têm o mesmo suporte essencial.

**Demonstração:** Veja [35, Teorema 4.3.8]. ■

Finalmente, exibimos dois teoremas estabelecidos em Simon [36].

**Teorema A.3.** [Rakhmanov] *Seja  $d\mu = w(\theta)\frac{d\theta}{2\pi} + d\mu_s$  uma medida em  $\mathcal{P}(\mathbb{T})$  e considere*

$$\Lambda = \{e^{i\theta} \in \mathbb{T} : w(\theta) > 0\}.$$

*Se  $|\Lambda| = 2\pi$  (isto é,  $w(\theta) > 0$  para quase todo  $\theta \in [0, 2\pi)$ ), então*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n^{(\mu)}| = 0,$$

*onde  $\alpha_n^{(\mu)}$  é a sequência de coeficientes de Verblunsky associada à medida  $\mu$ .*

**Demonstração:** Veja [36, Capítulo 9]. ■

**Teorema A.4.** *Sejam  $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$  e  $\{\beta_j\}_{j=0}^\infty$  duas sequências de coeficientes de Verblunsky associadas, respectivamente, às medidas  $\mu_1$  e  $\mu_2$ . Suponha que, para  $\lambda$  e  $\tilde{\lambda}$  em  $\mathbb{T}$ , e para algum  $p \in \mathbb{N}$  fixo, vale*

$$\alpha_{j+p} = \lambda\alpha_j \quad e \quad \beta_{j+p} = \tilde{\lambda}\beta_j, \quad j \geq 0.$$

*Se  $\sigma_{ess}(\mu_1) = \sigma_{ess}(\mu_2)$ , então  $\lambda = \tilde{\lambda}$ . Aqui,  $\sigma_{ess}(\mu_1)$  denota o suporte essencial da medida  $\mu_1$  definido como em (1.5).*

**Demonstração:** Veja [36, Corolário 11.4.12].