UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

PROPRIEDADES ESPECTRAIS UNIFORMES PARA OPERADORES DE SCHRÖDINGER COM POTENCIAIS STURMIANOS

Mariane Pigossi
Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Presidente Prudente, março de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

PROPRIEDADES ESPECTRAIS UNIFORMES PARA OPERADORES DE SCHRÖDINGER COM POTENCIAIS STURMIANOS

Mariane Pigossi
Orientador: Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, março de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de Presidente Prudente

BANCA EXAMINADORA

Roberto de Almeida Prado

PROF. DR. ROBERTO DE ALMEIDA PRADO
ORIENTADOR

Ronan Antonio dos Reis

PROF. DR. RONAN ANTONIO DOS REIS
UNESP/FCT

PROF. DR. CESAR ROGERIO DE OLIVEIRA
UFSCar

Mariane Pigossi

MARIANE PIGOSSI

Presidente Prudente (SP), 06 de março de 2014.

RESULTADO: aprovado

Faculdade de Ciências e Tecnologia
Seção Técnica de Pós-Graduação
Rua Roberto Simonsen, 305 CEP 19060-900 Presidente Prudente SP
Tel 18 3229-5318 fax 18 3223-4519 posgrad@fct.unesp.br

FICHA CATALOGRÁFICA

P684p

Pigossi, Mariane.

Propriedades espectrais uniformes para operadores de Schrödinger com potenciais Sturmianos / Mariane Pigossi. - Presidente Prudente : [s.n.], 2014

65 f.

Orientador: Roberto de Almeida Prado

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia

Inclui bibliografia

1. Operadores de Schrödinger. 2. Teoria espectral de operadores. 3. Potenciais Sturmianos. I. Prado, Roberto de Almeida. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências e Tecnologia. III. Título.

A Deus, por me sustentar com sua destra fiel
e a minha família, dedico!

Agradecimentos

Manifesto minha sincera gratidão a todas as pessoas que fizeram parte de minha história, marcando minha vida com boas recordações, em especial:

A Deus, primeiramente, por ser meu esconderijo e fortaleza, socorro bem presente nas horas de lutas e dificuldades.

A toda minha família pelo amor, compreensão e apoio que sempre me deram, principalmente em minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Roberto de Almeida Prado pela paciência, dedicação profissional e excelente orientação, desde a graduação até agora, sempre me ajudando nas pesquisas e discussões e pelo incentivo na continuação de minha carreira acadêmica.

Aos professores do PósMAC e do Departamento de Matemática, em especial ao Prof. Dr. Ronan Antonio dos Reis pela orientação nos anos iniciais da graduação.

Aos colegas que comigo formaram a terceira turma do PósMAC, de um modo especial as preciosas amigas Gabriela e Luciene pela amizade, paciência e pelas muitas orações; agradeço ainda ao José Vanterler e a Patrícia pela excelente companhia durante esses dois anos.

Aos funcionários da seção de Pós-Graduação pelo auxílio prestado, disposição e boa vontade.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

"Ó profundidade das riquezas,
tanto da sabedoria como da ciência de Deus!
Quão insondáveis são os seus juízos,
e quão inescrutáveis, os seus caminhos!
Quem, pois, compreendeu o intento do Senhor?
Ou quem foi o seu conselheiro?
Ou quem lhe deu primeiro para que lhe seja recompensado?
Porque Dele, e por Ele, e para Ele são todas as coisas.
A Ele, pois, a glória eternamente. Amém!"
Romanos 11:33-36, Bíblia Sagrada

Sumário

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo estudar propriedades espectrais uniformes de operadores de Schrödinger discretos, unidimensionais, com potenciais Sturmianos. Baseando-se em trabalhos da literatura, demonstra-se que esses operadores possuem espectro puramente singular contínuo, suportado sobre um conjunto com medida de Lebesgue zero. Mostra-se também que, em relação a medida de Hausdorff, os referidos operadores com potenciais Sturmianos gerados por números de rotação de densidade limitada, possuem espectro puramente α-contínuo com $\alpha \in (0, 1)$.

Abstract

The present work intends to study uniform spectral properties of discrete one-dimensional Schrodinger operators with Sturmian potentials. Based on studies in the literature, it is shown that these operators have purely singular continuous spectrum supported on a set with Lebesgue measure zero. It is also shown that, for Hausdorff measure, such operators with Sturmian potentials generated by rotation number of bounded density have purely α-continuous spectrum with $\alpha \in (0, 1)$.

Capítulo

1

Introdução

A teoria espectral de operadores de Schrödinger tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores, por se tratar de um assunto importante e relevante para a área de Física-Matemática. A Mecânica Quântica utiliza a Análise Funcional como uma ferramenta essencial para o estudo da teoria espectral. Neste trabalho vamos estudar o tipo espectral de operadores de Schrödinger 1D com potenciais Sturmianos, sendo esses modelos de extrema importância na Física, pois representam estruturas quase-cristalinas unidimensionais (veja [24, 41]).

Consideremos uma rede unidimensional representada pelo conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ e em cada vértice $j \in \mathbb{Z}$ colocamos um átomo n_j que gera um potencial $V(j) \in \mathbb{R}$. Na chamada aproximação *tight binding*, o Hamiltoniano de um elétron nesse ambiente é dado por

$$(Hu)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n), \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}). \tag{1.1}$$

Matematicamente, este modelo é conhecido como o *operador de Schrödinger discreto 1D*. Nesse caso o Laplaciano dicreto é o operador diferença finita $\Delta = -u(n+1) - u(n-1)$, que é limitado. Neste modelo supõe-se que não há interações entre os elétrons e que os átomos estão fixos na rede. Supondo que o potencial V assume apenas um número finito de valores reais, temos que H é um operador limitado e auto-adjunto e, portanto, seu espectro é um conjunto compacto da reta (veja [16]).

Um caso que no últimos anos tem atraído grande interesse, tanto de físicos como de matemáticos, é o estudo de operadores do tipo (1.1) em que os potenciais V pertencem a uma classe que fica entre os potenciais periódicos V_p (que induzem espectro absolutamente contínuo) e os potenciais aleatórios V_a (que induzem espectro pontual) e, algumas vezes, são matematicamente modelados por sequências quase-periódicas. O estudo de operadores da forma (1.1) com potenciais quase-periódicos teve especial motivação após a descoberta experimental de estruturas quase-cristalinas (que são estruturas em que os átomos não estão dispostos nem de maneira periódica, como num cristal, e nem de maneira aleatória, como num material amorfo). Um dos interesses nessas estruturas é investigar as propridades de difusão elétrica dos quase-cristais.

Matematicamente, o espectro do operador H, denotado por $\sigma(H)$, é definido como o complementar do conjunto resolvente

$$\rho(H) = \{E \in \mathbb{C} : (H - EI)^{-1} \text{ é um operador linear limitado}\}.$$

Os valores de E para os quais a solução de $Hu = Eu$ pertence ao espaço de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z})$, são os autovalores de H, e o fecho do conjunto de autovalores é chamado espectro pontual de H, denotado por $\sigma_p(H)$. O restante do espectro é o espectro contínuo, denotado por $\sigma_c(H)$, que pode ser decomposto em espectro absolutamente contínuo $\sigma_{ac}(H)$ e espectro singular contínuo $\sigma_{sc}(H)$, de acordo com a decomposição de Lebesgue da parte contínua da medida espectral de H (veja [17]). Na Física os níveis energéticos de um átomo ou de uma molécula são chamados de espectro.

O propósito deste trabalho é estudar em detalhes o espectro de operadores de Schrödinger com potenciais Sturmianos, que são gerados por rotações na circunferência $\mathbb{S}^1$. Mais precisamente, estudamos o espectro de cada operador de Schrödinger da família:

$$(H_{\lambda,\theta,\beta}u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + \lambda V_{\theta,\beta}(n)u(n), \quad u \in \ell^2(\mathbb{Z}), \tag{1.2}$$

com os potenciais Sturmianos

$$V_{\theta,\beta}(n) = \chi_{[1-\theta,1)}(n\theta + \beta \mod 1), \tag{1.3}$$

em que $\theta \in (0, 1)$ é um número de rotação irracional, $\beta \in [0, 1)$ é a fase, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é a constante de acoplamento e "mod 1" representa o resto da divisão de $n\theta + \beta$ por 1 onde o quociente de tal divisão é um número inteiro (veja [34]).

A família de operadores de Schrödinger $H_{\lambda,\theta,\beta}$, definidos por (1.2) com os potenciais Sturmianos (1.3), descreve um modelo padrão de quase-cristais unidimensionais e tem sido estudada em vários artigos. Esta fornece uma generalização natural da família Fibonacci de operadores, que corresponde ao número de rotação $\theta_F = (\sqrt{5} - 1)/2$, chamado razão áurea. Esses operadores tem chamado a atenção, pois eles exibem espectro puramente singular contínuo, suportado sobre um conjunto com medida de Lebesgue zero, para todos os parâmetros λ, θ, β, além de possuirem propriedades espectrais notáveis. Tais propriedades são convenientemente estudadas no âmbito de operadores aleatórios. Para isso, fixamos λ, θ e consideramos a família (em β) de operadores $(H_{\lambda,\theta,\beta})_{\beta\in[0,1)}$, a qual é uma família ergódica discreta. A demonstração de que o espectro desses operadores é puramente singular contínuo está baseada nos trabalhos [1] e [11]. Estende-se uma aproximação usada por Süto [42] no caso Fibonacci, levando-se em conta propriedades particulares das sequências Sturmianas.

Obtém-se uma identificação completa do tipo espectral do modelo (1.2) com os potenciais Sturmianos (1.3), descrita no teorema abaixo (veja [11]).

Teorema 1.1. *Para todos os parâmetros λ, θ, β, o operador $H_{\lambda,\theta,\beta}$ definido por (1.2)-(1.3) tem espectro puramente singular contínuo, suportado sobre um conjunto com medida de Lebesgue zero.*

A demonstração do teorema acima segue da ausência dos espectros pontual e absolutamente contínuo, de acordo com a classificação espectral (veja [17]).

Para demonstrarmos a ausência do espectro absolutamente contínuo considera-se o expoente de Lyapunov, que indica a taxa de crescimento exponencial da norma das matrizes de transferência. Mostra-se que o espectro de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ coincide com o conjunto das energias onde o expoente de Lyapunov se anula. Devido a ergodicidade e minimalidade da família $(H_{\lambda,\theta,\beta})_{\beta\in[0,1)}$, mostra-se, a partir de resultados importantes obtidos em [29] e [32], que o espectro de cada operador dessa família tem medida de Lebesgue zero e, consequentemente, a ausência do espectro absolutamente contínuo.

Para demonstrarmos a ausência do espectro pontual usa-se o formalismo das matrizes de transferência, uma ferramenta básica no estudo das propriedades espectrais de modelos unidimensionais desse tipo, em que o estudo das propriedades espectrais de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ recai no estudo de produtos de matrizes 2×2, chamadas matrizes de transferência. A partir do traço dessas matrizes obtém-se um sistema dinâmico, denominado aplicação traço. Utilizando um lema técnico, chamado lema da partição, e uma versão do Argumento de Gordon 2-blocos estima-se o crescimento das soluções da equação de autovalores associadas a energias do espectro.

Quando as propriedades "ausência de espectro pontual" e "espectro com medida de Lebesgue zero" são obtidas para um modelo de Schrödinger com potencial aperiódico assumindo um número finito de valores, resulta que o espectro deste operador é puramente singular contínuo [12]. Os operadores de Schrödinger $H_{\lambda,\theta,\beta}$ definidos por (1.2), com potenciais Sturmianos (1.3), são exemplos em que ocorrem estas propriedades espectrais.

Rogers e Taylor [38, 39] desenvolveram uma teoria de decomposição de medidas Borelianas com relação às medidas de Hausdorff. Estas medidas são fundamentais na investigação do tipo espectral, pois com elas podemos classificar conjuntos com medida de Lebesgue zero. Em particular, para cada $\alpha \in [0,1]$, uma medida Boreliana finita μ pode ser decomposta de modo único como $\mu = \mu_{\alpha c} + \mu_{\alpha s}$, sendo $\mu_{\alpha c}$ uma medida α-contínua (isto é, $\mu_{\alpha c}(S) = 0$ para todo Boreliano S com medida de Hausdorff $h^{\alpha}(S) = 0$) e $\mu_{\alpha s}$ uma medida α-singular (isto é, existe um Boreliano S com $\mu_{\alpha s}(\mathbb{R} \setminus S) = 0$ e $h^{\alpha}(S) = 0$). Medidas α-contínuas são limites de medidas uniformemente α-Hölder, e este é um elo muito importante (veja Capítulo 2 - Seção 2.7).

Dizemos que uma medida Boreliana μ é uniformemente α-Hölder, para $\alpha \in [0,1]$, se existe uma constante C de forma que $\mu(I) \leq C|I|^{\alpha}$, para todo intervalo I com $|I| < 1$. Estamos interessados no caso em que μ representa medidas espectrais.

Apresentaremos a demonstração de que para os potenciais Sturmianos (1.3), com números de rotação de densidade limitada, existem cotas superiores e inferiores do tipo $C_1 L^{\gamma_1} \leq \|u\|_L \leq C_2 L^{\gamma_2}$, onde $\|u\|_L$ denota a norma de u sobre um intervalo de comprimento $L \geq 1$, com L suficientemente grande, para todas as soluções u da equação de autovalores, com condições iniciais normalizadas (veja [8, 11]). Com estas estimativas é possível caracterizarmos, tomando $\alpha = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$, o espectro α-contínuo de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ (que, por definição, é o espectro de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ restrito ao subespaço $\ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha c} = \{\psi\colon \mu_\psi \text{ é } \alpha - \text{contínua}\}$). Para isso usaremos uma ferramenta importante, que será demonstrada na Seção 5.2, conhecida como desigualdade de Jitomirskaya-Last (veja [26]). Mais precisamente, será apresentada a demonstração do seguinte resultado [11]:

Teorema 1.2. *Seja θ um número irracional de densidade limitada. Então para todo $\lambda \neq 0$, existe $\alpha = \alpha(\lambda, \theta) > 0$ tal que para todo $\beta \in [0, 1)$ e toda $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ de suporte finito, a medida espectral para o par $(H_{\lambda,\theta,\beta}, \phi)$ é uniformente α-Hölder. Em particular, $H_{\alpha,\theta,\beta}$ tem espectro puramente α-contínuo.*

No Capítulo 2 introduzimos alguns conceitos preliminares para o nosso estudo sobre o modelo de Schrödinger com potenciais Sturmianos. Dividimos o mesmo em sete seções onde estudamos algumas propriedades desses potenciais, tais como a decomposição do número irracional θ em frações continuadas, e então encontramos uma aproximação racional $\frac{p_n}{q_n}$ para esses potenciais. Apresentamos também um lema muito importante chamado lema da partição, que nos permite particionar a sequência $V_{\theta,\beta}$ em blocos s_n ou s_{n-1}. Nas próximas seções definimos para o operador de Schrödinger discreto a equação de autovalores e, a partir desta, obtemos as matrizes de transferência associadas ao operador. Considerando a limitação do traço das matrizes de transferência associadas ao operador com potencial Sturmiano, estudamos fórmulas recursivas para tais matrizes, a fim de obter uma relação recursiva para seus traços e assim definimos um sistema dinâmico chamado aplicação traço, cujo estudo é importante tanto para exclusão do espectro pontual, quanto na propriedade do espectro possuir medida de Lebesgue zero. Após isto, definimos as m-funções de Weyl-Tichmarsh, as medidas de Hausdorff e α-derivada superior de uma medida, onde enunciamos um resultado que caracteriza os conjuntos onde as medidas $\mu_{\alpha c}, \mu_{\alpha s}$ estão concentradas.

No Capítulo 3 estudamos alguns conceitos básicos sobre a teoria ergódica de uma família de operadores de Schrödinger. Devido a teoria de Kotani, é possível excluir o espectro absolutamente contínuo de operadores de Schrödinger com potenciais aperiódicos assumindo um número finito de valores. Aplicamos este resultado para os potenciais Sturmianos, os quais geram uma família de operadores de Schrödinger estritamente ergódica, em que o estudo espectral consiste em analisar somente o espectro pontual e singular contínuo.

O Capítulo 4 consiste no estudo do comportamento das soluções da equação de autovalores para os modelos Sturmianos. Obtemos estimativas do tipo $C_1 L^{\gamma_1} \leq ||u||_L \leq C_2 L^{\gamma_2}$, com $L \geq 1$ suficientemente grande, para energias no espectro e para todas as soluções u, com condições iniciais normalizadas, da correspondente equação de autovalores. Utilizando uma estimativa que implica na limitação inferior de tais soluções, obteremos a ausência do espectro pontual dos operadores definidos em (1.2). Portanto, utilizando a ausência do espectro absolutamente contínuo (demonstrada no Capítulo 3) juntamente com a ausência do espectro pontual, apresentamos a demonstração do Teorema 1.1.

Finalmente, no Capítulo 5 apresentamos a demonstração do Teorema 1.2. Para isso utilizamos as estimativas que obtivemos para o modelos Sturmianos no Capítulo 4 e a desigualdade de Jitomiskaya-Last, que será demonstrada na Seção 5.1.

Capítulo

2

Preliminares

Neste capítulo discutiremos alguns resultados e definições preliminares que serão utilizados nos próximos capítulos. Tais resultados serão importantes nas demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2.

2.1 Propriedades dos potenciais Sturmianos

Neta seção vamos tratar de algumas propriedades dos potenciais Sturmianos, bem como a expansão do número irracional θ em frações continuadas, sua aproximação racional e a decomposição do potencial em palavras canônicas, as quais obedecem algumas relações recursivas.

Dado o número de rotação $\theta \in (0,1)$ irracional, temos a sua expansão em frações continuadas (veja [28, 31]):

$$\theta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}} = [a_1, a_2, a_3 \ldots]$$

com os $a_n \in \mathbb{N}$ unicamente determinados.

As aproximações racionais $\frac{p_n}{q_n}$ de θ satisfazem

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \ \forall n \geq 2 \tag{2.1}$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_1, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \ \forall n \geq 2. \tag{2.2}$$

O número θ é dito um número de densidade limitada se

$$d(\theta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i < \infty. \tag{2.3}$$

`Observação:` O conjunto dos números de densidade limitada possui medida de Lebesgue zero (veja [31]).

Com as notações acima, valem as seguintes propriedades (cujas demonstrações podem ser encontradas em [31]):

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}, \tag{2.4}$$

$$\|k\theta\| \geq \|q_n\theta\|, \ \forall k \in [1, ...q_{n+1}[, \tag{2.5}$$

onde $\|x\| = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x+n|$ é a distância de x a $\mathbb{Z}$.

Defina as palavras s_n sobre o alfabeto $\mathcal{A} = \{0,1\}$ por

$$s_{-1} = 1, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = s_0^{a_1-1}s_{-1}, \quad s_n = s_{n-1}^{a_n}s_{n-2}, \ n \geq 2. \tag{2.6}$$

Em particular, a palavra s_n tem comprimento q_n para cada $n \geq 0$. Por definição, para cada $n \geq 2$, s_{n-1} é um prefixo de s_n e $|s_n| \to \infty$. Portanto, o seguinte limite (à direita) existe,

$$c_\theta = \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{2.7}$$

A relação entre c_θ e a sequência $V_{\theta,0}$ é dada pela proposição a seguir, que é uma consequência direta de (2.7) e do fato que $s_n = V_{\theta,0}(1)...V_{\theta,0}(q_n), \ n \geq 1$.

Proposição 2.1. $V_{\theta,0}$ restrito a $\{1,2,3,...\}$ coincide com c_θ.

Proposição 2.2. Para cada $n \geq 2$, $s_n s_{n+1} = s_{n+1}s_{n-1}^{a_n-1}s_{n-2}s_{n-1}$.

Demonstração. Segue diretamente da relação (2.6). De fato,

$$\begin{aligned} s_n s_{n+1} &= s_n s_n^{a_{n+1}} s_{n-1} = s_n^{a_{n+1}} s_n s_{n-1} = s_n^{a_{n+1}} s_{n-1}^{a_n} s_{n-2} s_{n-1} \\ &= s_{n+1} s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-2} s_{n-1}. \end{aligned}$$

■

Devido a relação acima, a palavra $s_n s_{n+1}$ tem s_{n+1} como prefixo.

Definição 2.3. Uma palavra $w = w_1 \dots w_n$ é conjugada de uma palavra $v = v_1 \dots v_n$ se para algum $i \in \{1,...,n\}$, temos que

$$w_1 \dots w_n = v_i \dots v_n v_1 \dots v_{i-1},$$

isto é, se w é obtido de v por uma permutação cíclica de seus símbolos.

Lema 2.4. *Seja* $V_{\theta,0}(n) = \chi_{[1-\theta,1)}(n\theta \text{ mod } 1)$. *Então*

i) $V_{\theta,0}(n) = [(n+1)\theta] - [n\theta], \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ n \neq -1,$ *em que* $[\cdot]$ *denota a parte inteira.*

ii) $V_{\theta,0}(q_n + k) = V_{\theta,0}(k), \quad 1 \leq k < q_{n+1} - 1.$

iii) $V_{\theta,0}(-n) = V_{\theta,0}(n-1), \quad n \geq 2.$

Demonstração. *i)* $V_{\theta,0}(n) = 1 \Leftrightarrow n\theta - [n\theta] \in [1-\theta, 1) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}; m+1-\theta \leq n\theta \leq m+1$ com $n\theta < m+1 < n\theta + \theta$, isto é, $m = [n\theta]$. Por outro lado,

$$[(n+1)\,\theta] - [n\theta] = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

pois $0 \leq [(n+1)\theta] - [n\theta] \leq (n+1)\theta - [n\theta] = \{n\theta\} + \theta < 2$, onde $\{\cdot\}$ denota a parte fracionária. Por fim temos,

$$[(n+1)\theta] - [n\theta] = 1 \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}; m+1-\theta \leq n\theta \leq m+1,$$

sendo $m = [n\theta]$.

ii) Temos que $q_n\theta - p_n = (-1)^n \|q_n\theta\|$ e $\|m\theta\| > \|q_n\theta\|$ $\forall m < q_{n+1}, m \neq q_n$. Logo, usando *i)* segue que

$$\begin{aligned} V_{\theta,0}(q_n+k) &= [(q_n+k+1)\theta] - [(q_n+k)\theta] = [(k+1)\theta + q_n\theta - p_n] - [k\theta + q_n\theta - p_n] \\ &= [(k+1)\theta] - [k\theta] = V_{\theta,0}(k). \end{aligned}$$

iii) Por *i)* segue que

$$V_{\theta,0}(-n) = [(-n+1)\theta] - [-n\theta] = [\theta - n\theta] + [n\theta] = [n\theta] - [(n-1)\theta] = V_{\theta,0}(n-1). \quad \blacksquare$$

Devido a simetria no potencial dada no *Lema 2.4 iii)* podemos trabalhar com $n \geq 1$ em $V_{\theta,0}(n)$.

2.2 Lema da partição

Nesta seção abordaremos o conceito de n-partição de uma sequência assumindo valores 0 ou 1. Demonstraremos que cada sequência $(V_{\theta,\beta}(k))_{k\in\mathbb{Z}}$ possui uma única n-partição para todo $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$. Para detalhes veja [13].

Notemos que as palavras s_n definidas em (2.6) podem ser relacionadas com as sequências $V_{\theta,\beta}$ da seguinte forma: para cada par (n, θ), cada sequência $V_{\theta,\beta}$ pode ser particionada em blocos da forma s_n ou s_{n-1} para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Definição 2.5. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ dado. Uma (n, θ)-partição de uma função $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ é um sequência de pares (I_j, z_j), $j \in \mathbb{Z}$, tal que

i) os conjuntos $I_j = \{d_j, d_j+1, ..., d_{j+1}-1\} \subset \mathbb{Z}$ particionam $\mathbb{Z}$;

ii) $1 \in I_0$;

iii) cada bloco $z_j \in \{s_n, s_{n-1}\}$;

iv) a restrição de f a I_j é z_j. Isto é, $f_{d_j} f_{d_j+1} \cdots f_{d_{j+1}-1} = z_j$.

Vamos omitir a dependência de θ, se for claro a qual θ nos referimos. Em particular, escrevemos n-partição em vez de (n,θ)-partição.

Como $s_0 = 0$ e $s_{-1} = 1$, cada $f : \mathbb{Z} \to \{0,1\}$ admite uma 0-partição. Será de fundamental importância para nossa análise do problema de autovalores para $H_{\lambda,\theta,\beta}$ que para as sequências $V_{\theta,\beta}$ existe uma única n-partição para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Nesse contexto introduzimos o próximo lema.

Lema 2.6. *Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $\beta \in [0,1)$, existe uma única n-partição de $V_{\theta,\beta}$.*

Demonstração. Seja $\theta = [a_1, a_2, \cdots]$ a expansão em frações continuadas de θ.

Vamos mostrar primeiramente que existe uma única n-partição de $V_{\theta,0}$.

Existência: Vamos mostrar que existem n-partições de $(V_{\theta,0}(k))_{k\geq 1}$. De fato, por (2.6), (2.7) e pela Proposição 2.1, é claro que existe uma n-partição de $V_{\theta,\beta}(k)_{k\geq 1}$ para todo n.

Unicidade: Segue por indução. Como $s_0 = 0$ e $s_{-1} = 1$, a unicidade é clara para $n = 0$. Se $n = 1$ e $a_1 = 1$, $s_1 = s_{-1} = 1$ e $s_0 = 0$. Assim a unicidade também é clara. Se $n = 1$ e $a_1 > 1$ temos que $s_1 = 0^{a_1-1}1$ e $s_0 = 0$. Portanto as posições deles determinam as posições dos blocos s_1 de forma única. Agora assumimos a unicidade para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Seja uma $(n+1)$-partição de $V_{\theta,0}$. Substituindo s_{n+1} na $(n+1)$-partição por $s_n^{a_{n+1}} s_{n-1}$ de acordo com a (2.6) e mantendo s_n obtemos a n-partição de $V_{\theta,0}$. Por construção, as posições de s_{n-1} na n-partição determina as posições de s_{n+1} na $(n+1)$-partição. Como a n-partição é única, as posições dos blocos s_{n+1} na $(n+1)$-partição também é única. Além disso, todos os blocos na $(n+1)$-partição são da forma s_{n+1} ou s_n, assim toda $(n+1)$-partição é unicamente determinada.

Fixe $\beta \in [0,1)$. Como θ é irracional, existe uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $n_k \in \mathbb{N}$, tal que a sequência $(T^{n_k} V_{\theta,0})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $V_{\theta,\beta}$ quando $k \to \infty$, na topologia produto sobre $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Devido a primeira parte da demonstração, segue que $(T^{n_k} V_{\theta,0})$ admite uma única n-partição para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Para usar isso e concluir a demonstração, introduzimos a seguinte notação de convergência:

Seja f_k, $k \in \mathbb{N}$ e f funções para as quais existem únicas n-partições denotadas por (I_j^k, z_j^k) e (I_j, z_j), respectivamente. Dizemos que f_k converge para f no n-sentido, quando $k \to \infty$, se para todo $C > 0$, existe um k_0 de modo que para $k \geq k_0$,

$$(I_j^k, z_j^k) = (I_j, z_j) \ \ \forall I_j \subset (-C, C).$$

Claramente, obtemos o resultado se mostrarmos a seguinte afirmação:

Afirmação. Para cada n existe uma única n-partição de $V_{\theta,\beta}$ e a sequência $(T^{n_k} V_{\theta,0})_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge para $V_{\theta,\beta}$ no n-sentido, quando $k \to \infty$.

De fato, demonstremos a afirmação por indução. Para isso, consideremos dois casos.

Caso 1. $a_1 = 1$. Como $s_{-1} = s_1 = 1$ e $s_0 = 0$, os casos $n = 0$ e $n = 1$ são imediatos. Suponha a afirmação verdadeira para $n \geq 1$ fixado. Seja (I_j, z_j) uma n-partição de $V_{\theta,\beta}$. Por (2.6) a existência de uma $(n+1)$-partição de $V_{\theta,\beta}$ seguirá se mostrarmos que à esquerda de cada bloco da forma s_{n-1} na n-partição de $V_{\theta,\beta}$, existe pelo menos a_{n+1}

blocos s_n. Isto é, temos que mostrar que $z_j = s_{n-1}$ para $j \in \mathbb{Z}$ implica que $z_k = s_n$ para $k = j - a_{n+1}, \cdots, j-1$. Como $T^{n_k}V_{\theta,0}$ admite uma única n-partição para cada $n \in \mathbb{N}_0$, existem pelo menos a_{n+1} blocos s_n à esquerda de cada bloco s_{n-1} na n-partição de $T^{n_k}V_{\theta,0}$. Como $T^{n_k}V_{\theta,0}$ converge para $V_{\theta,\beta}$ no n sentido, a afirmação é verdadeira para $V_{\theta,\beta}$. Isto garante a existência de uma $(n+1)$-partição de $V_{\theta,\beta}$. A unicidade da $(n+1)$-partição segue da unicidade da n-partição como em i). Como os blocos s_{n+1} na $(n+1)$-partição de $V_{\theta,\beta}$ surgem de blocos da forma $s_n^{a_{n+1}}s_{n-1}$ na n-partição de $V_{\theta\beta}$, então a convergência de $T^{n_k}V_{\theta,0}$ para $V_{\theta,\beta}$ no n sentido implica na convergência no $(n+1)$-sentido. Isto demonstra a afirmação no Caso 1.

Caso 2. $a_1 > 1$. Como $s_{-1} = 1$ e $s_0 = 0$, o caso $n = 0$ é imediato. Fixemos $n \geq 0$. Se $n > 0$ podemos continuar exatamente como no Caso 1. Se $n = 0$, continuamos como no Caso 1 após substituir $a_{n+1} = a_1$ por $a_1 - 1 \geq 1$. Isto demonstra o Caso 2.

■

A propriedade de decomposição dos potenciais Sturmianos em palavras canônicas é dada pelo seguinte lema. Para mais detalhes veja [13].

Lema 2.7. (Lema da partição). *Para todo $n \in \mathbb{N}_0$ e todo $\beta \in [0,1)$, existe uma única n-partição (I_j, z_j) de $V_{\theta,\beta}$. Além disso, se $z_j = s_{n-1}$, então $z_{j-1} = z_{j+1} = s_n$. Se $z_j = s_n$, então existe um intervalo $I = \{d, d+1, ..., d+l-1\} \subset \mathbb{Z}$ contendo j e de comprimento $l \in \{a_{n+1}, a_{n+1}+1\}$ tal que $z_i = s_n$ para todo $i \in I$ e $z_{d-1} = z_{d+l} = s_{n-1}$.*

Demonstração. Pela parte da existência do Lema 2.6, existe uma $(n+1)$-partição de $V_{\theta,\beta}$. Pela parte da unicidade do Lema 2.6 e da fórmula $s_{n+1} = s_n^{a_{n+1}}s_{n-1}$, todos os blocos da forma s_{n-1} na n-partição de $V_{\theta,\beta}$ surgem de blocos da forma s_{n+1} na $(n+1)$-partição. Isto mostra que não existe $j \in \mathbb{Z}$ com $z_j^n = z_{j+1}^n = s_{n-1}$ e que existem pelo menos a_{n+1} blocos da forma s_n entre dois blocos da forma s_{n-1}. Existem no máximo $a_{n+1}+1$ de tais blocos, pois não existem dois blocos adjacentes da forma s_n na $(n+1)$-partição. Isto demonstra o lema. ■

2.3 Matrizes de transferência

Sejam $H_{\lambda,\theta,\beta}$ os operadores de Schrödinger definidos por (1.2) com os potenciais Sturmianos (1.3). Considere a correspondente equação de autovalores

$$(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)u = 0. \tag{2.8}$$

Algumas ferramentas mais utilizadas na teoria de operadores de Schrödinger unidimensionais são resultados que estabelecem uma ligação entre o comportamento de soluções de (2.8) e propriedades espectrais dos operadores $H_{\lambda,\theta,\beta}$.

Se u é solução de (2.8), temos

$$u(n+1) + u(n-1) + \lambda V_{\theta,\beta}(n)u(n) = Eu(n). \tag{2.9}$$

Escrevendo (2.9) na forma matricial, temos, para $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - \lambda V_{\theta,\beta}(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Iterando a equação (2.10), obtemos

$$\begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E - \lambda V_{\theta,\beta}(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} E - \lambda V_{\theta,\beta}(1) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix}.$$

Escrevendo

$$T(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(n)) := \begin{pmatrix} E - \lambda V_{\theta,\beta}(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$U(n+1) := \begin{pmatrix} u(n+1) \\ u(n) \end{pmatrix}$$

segue que

$$U(n+1) = T(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(n)) \cdots T(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(1)) U(1), \; n \geq 1.$$

Observe que $det\ T(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(n)) = 1$ para todo n.

Definição 2.8. Fixados a constante de acoplamento λ e a energia E, então para cada $w = w_1 \cdots w_n \in \mathcal{A}^n$ definimos a matriz de transferência $M(\lambda, E, w)$ por

$$M(\lambda, E, w) := T(\lambda, E, w_n) \cdots T(\lambda, E, w_1).$$

Se u é solução de (2.8), temos

$$U(n+1) = M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(1) \cdots V_{\theta,\beta}(n)) U(1).$$

Definimos o expoente de Lyapunov $\gamma(E) = \gamma(E, \lambda)$ por

$$\gamma(E) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \| M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(1) \cdots V_{\theta,\beta}(n)) \|.$$

Esse limite existe β $\ell - qtp$, em que ℓ é a medida de Lebesgue, e independe de β (veja [3, 6, 19]). Note que $\gamma(E) \geq 0$, pois $\| M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(1) \cdots V_{\theta,\beta}(n)) \| \geq 1$ (veja [3]).

Teorema 2.9. *(Osceledec) Suponha* $\{T(\lambda, E, V(n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de matrizes reais* 2×2 *satisfazendo*

i) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \| T(\lambda, E, V(n)) \| = 0$*;*

ii) $detT(\lambda, E, V(n)) = 1$.

Se $\gamma := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|T(\lambda, E, V(n)) \cdots T(\lambda, E, V(1))\| > 0$ *então existe um subespaço unidimensional* $U \subset \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|T(\lambda, E, V(n)) \cdots T(\lambda, E, V(1))u\| = -\gamma, \quad \forall u \in U$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|T(\lambda, E, V(n)) \cdots T(\lambda, E, V(1))u\| = \gamma, \quad \forall u \notin U.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [6]. Assim, no caso do expoente de Lyapunov positivo, temos uma compreensão completa do comportamento assintótico das soluções no infinito.

Para $\beta = 0,\ \theta \in (0,1),\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $E \in \mathbb{R}$, introduzimos as notações

$$M_n := M(\lambda, E, V_{\theta,0}(1) \cdots V_{\theta,0}(q_n)) = T(\lambda, E, V_{\theta,0}(q_n)) \cdots T(\lambda, E, V_{\theta,0}(1)), \quad n \geq 1$$

e

$$M_0 := \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Usando o fato que $s_n = V_{\theta,0}(1) \cdots V_{\theta,0}(q_n)$, o Lema 2.4 (ii) e a definição (2.6) obtemos o seguinte resultado:

Proposição 2.10. $M_{n+1} = M_{n-1} M_n^{a_{n+1}}, \quad \forall n \geq 1.$

É importante ressaltar que a Proposição 2.10 não vale para $\beta \neq 0$. Usando a definição

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a Proposição 2.10 pode ser estendida para o caso $n = 0$.

Consideremos o operador de Schrödinger $H : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ definido por

$$(Hu)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n), \tag{2.12}$$

em que o potencial $V : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ é uma sequência limitada de números reais, e a correspondente equação de autovalores

$$Hu = Eu. \tag{2.13}$$

Fixado $E \in \mathbb{R}$, sejam $u^{\pm}_{1,\varphi,E}$ e $u^{\pm}_{2,\varphi,E}$ soluções de (2.13), definidas em $\mathbb{Z}^{\pm}$ ($\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, ...\}$ e $\mathbb{Z}^{-} = \{..., -2, -1, 0\}$), com condições inicias:

$$\begin{cases} u^{\pm}_{1,\varphi,E}(0) = -sen\varphi & u^{\pm}_{2,\varphi,E}(0) = \cos\varphi \\ u^{\pm}_{1,\varphi,E}(1) = \cos\varphi & u^{\pm}_{2,\varphi,E}(1) = sen\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \tag{2.14}$$

`Observação:` Como (2.13) é uma equação a diferença finita de 2ª ordem, o espaço das soluções tem dimensão 2 e portanto, para cada $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, $u^{\pm}_{1,\varphi,E}$ e $u^{\pm}_{2,\varphi,E}$ com condições iniciais (2.14) geram todas as soluções de (2.13). Variando φ no intervalo $(-\pi/2, \pi/2]$, obtém-se todas as soluções u da equação (2.13) (com normalização $|u(0)|^2 + |u(1)|^2 = 1$).

Analogamente ao que foi feito acima, obtemos as matrizes de transferência para o operador (2.12) com potencial arbitrário.

Definição 2.11. O Wronskiano entre duas soluções u e v de (2.13) é

$$W[u,v](n) = u(n+1)v(n) - u(n)v(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

`Observação:`

i) Da definição de $M(\lambda, E, V(n))$ obtemos

$$W[u^{\pm}_{1,\varphi,E}, u^{\pm}_{2,\varphi,E}](n) = \det\left(M(\lambda, E, V(n))\right) = 1, \ \forall n \in \mathbb{Z}^{\pm}.$$

ii) No máximo uma das soluções $u^{\pm}_{1,\varphi,E}$ ou $u^{\pm}_{2,\varphi,E}$ pertence a $\ell^2(\mathbb{Z}^{\pm})$, pois

$$\begin{aligned} 1 = \left|W[u^{\pm}_{1,\varphi,E}, u^{\pm}_{2,\varphi,E}](n)\right| &= \left|\left\langle \begin{pmatrix} u^{\pm}_{1,\varphi,E}(n+1) \\ u^{\pm}_{1,\varphi,E}(n) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u^{\pm}_{2,\varphi,E}(n) \\ -u^{\pm}_{2,\varphi,E}(n+1) \end{pmatrix} \right\rangle\right| \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} u^{\pm}_{1,\varphi,E}(n+1) \\ u^{\pm}_{1,\varphi,E}(n) \end{pmatrix} \right\| . \left\| \begin{pmatrix} u^{\pm}_{2,\varphi,E}(n) \\ u^{\pm}_{2,\varphi,E}(n+1) \end{pmatrix} \right\|, \end{aligned}$$

com

$$\left\| \begin{pmatrix} u^{\pm}_{j,\varphi,E}(n+1) \\ u^{\pm}_{j,\varphi,E}(n) \end{pmatrix} \right\|^2 = \left|u^{\pm}_{j,\varphi,E}(n+1)\right|^2 + \left|u^{\pm}_{j,\varphi,E}(n)\right|^2, \quad j = 1, 2.$$

Para qualquer função $u : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$, denotemos por $\|u\|_L$ a norma de u sobre um intervalo de comprimento L, isto é,

$$\|u\|_L \equiv \left[\sum_{n=1}^{[L]} |u(n)|^2 + (L - [L])|u([L]+1)|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.15}$$

em que $[L]$ denota a parte inteira de L. Analogamente, para funções $u : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{C}$, definimos

$$\|u\|_L \equiv \left[\sum_{n=0}^{[L]-1} |u(-n)|^2 + (L - [L])|u(-[L])|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.16}$$

Dados um operador H da forma (2.12) e $E \in \mathbb{R}$, sejam $u^{\pm}_{1,\varphi,E}$ e $u^{\pm}_{2,\varphi,E}$ as soluções de (2.13), definidas em $\mathbb{Z}^{\pm}$, satisfazendo (2.14). Agora, dado $\epsilon > 0$, definimos os comprimentos $L^{\pm}_{\varphi}(\epsilon) \in (0,\infty)$, via a igualdade

$$\left\| u^{\pm}_{1,\varphi,E} \right\|_{L^{\pm}_{\varphi}(\epsilon)} \left\| u^{\pm}_{2,\varphi,E} \right\|_{L^{\pm}_{\varphi}(\epsilon)} = \frac{1}{2\epsilon}. \tag{2.17}$$

`Observação:` Como $W[u^{+}_{1,\varphi,E}, u^{+}_{2,\varphi,E}] = 1$, no máximo uma das soluções $u^{+}_{1,\varphi,E}$ ou $u^{+}_{2,\varphi,E}$ pertencem a $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ e, portanto, o lado esquerdo de (2.17) é uma função contínua de L^{+}_{φ}, monotonamente crescente, que é menor ou igual a 1 para $L^{+}_{\varphi} = 1$ e tende a infinito quando $L^{+}_{\varphi} \to \infty$. Por outro lado, $\frac{1}{2\epsilon}$ é função contínua de ϵ, monotonamente decrescente, que tende a infinito quando $\epsilon \to 0$. Assim, a função $L^{+}_{\varphi}(\epsilon)$ está bem definida por (2.17) e $L^{+}_{\varphi}(\epsilon) \to \infty$ para $\epsilon \to 0$. Analogamente, a função $L^{-}_{\varphi}(\epsilon)$ está bem definida por (2.17) e $L^{-}_{\varphi}(\epsilon) \to \infty$ para $\epsilon \to 0$.

2.4 Aplicação traço

Nesta seção vamos estudar fórmulas recursivas para os traços das matrizes de transferência, a fim de obter um sistema dinâmico chamado aplicação traço, cujo estudo será importante tanto para a exclusão do espectro pontual, quanto na propriedade do espectro possuir medida de Lebesgue zero. No caso Sturmiano, a limitação do traço pode ser investigada através do estudo desse sistema dinâmico, o qual é induzido por estruturas repetitivas do correspondente potencial. Essas estruturas estão presentes nesse caso, podendo ser exibida usando a expansão em frações continuadas do número de rotação irracional associado ao potencial (ver [1]).

Lema 2.12. *Para cada matriz $M_{2\times 2}$ com $detM = 1$ e para todo $a \in \mathbb{N}$ tem-se:*

i) $M^a = S_{a-1}(\xi)M - S_{a-2}(\xi)I$ *com* $\xi = trM$ *e* $S_a(\xi)$ *os polinômios de Chebyshev:*

$$S_a(\xi) = S_{a-1}(\xi)\xi - S_{a-2}(\xi), \quad S_1(\xi) = \xi, \quad S_0(\xi) = 1, \quad S_{-1}(\xi) = 0. \tag{2.18}$$

Usando a relação recursiva, segue que a quantidade $S_aS_{a-2} - S^2_{a-1}$ *é independente de* a*, isto é,*

$$S_aS_{a-2} - S^2_{a-1} = const. = S_1S_{-1} - S^2_0 = -1. \tag{2.19}$$

ii) *Se* $|\xi| = |trM| > 2$ *então*

$$S_a(\xi) = (sgn\ \xi)^a\, \frac{sh(a+1)\theta}{sh\theta}, \ \forall a \geq 1,$$

com $\theta > 0$ *em que* $\xi = \pm 2ch\theta = \pm\left(e^{\theta} + e^{-\theta}\right)$, $sh\theta = \left(e^{\theta} - e^{-\theta}\right)/2$ *e* sgn *denota a função sinal. Além disso,* $S_a(\xi) < |\xi|^a$.
Se $|\xi| = 2$ *então* $S_a(\xi) = (sgn\ \xi)^a(a+1), \ \forall a \geq 1$;
se $|\xi| < 2, \ \xi = 2cos\theta$ *com* $\theta \in (0,\pi)$*, então*

$$S_a(\xi) = \frac{sen(a+1)\theta}{sen\theta}, \quad \forall a \geq 1.$$

Neste caso, $S_a(\xi) < a + 1$.

Demonstração. Veja [1]. ■

A proposição a seguir nos dá uma importante fórmula recursiva para os traços das matrizes de transferência, a partir da qual definimos um sistema dinâmico chamado aplicação traço, dado por:

$$\begin{aligned} \xi_n \ &: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & \quad E \mapsto \xi_n(E) := trM_n(E) \end{aligned}$$

em que $n \geq 1$, o qual será importante em nosso estudo espectral. Denotemos $\xi_n(E)$ por ξ_n.

Proposição 2.13. Para todo $n \geq 1$ seja $\xi_n := trM_n$. Se $|\xi_{n-1}| > 2$ então

$$\xi_{n+1} = \xi_n S_{a_{n+1}-1}(\xi_n)\frac{S_{a_n}(\xi_{n-1})}{S_{a_n-1}(\xi_{n-1})} - \xi_{n-1}S_{a_{n+1}-2}(\xi_n) - \xi_{n-2}\frac{S_{a_{n+1}-1}(\xi_n)}{S_{a_n-1}(\xi_{n-1})}. \tag{2.20}$$

`Observação:` Na proposição acima assumimos $|\xi_{n-1}| > 2$ para termos $S_{a_n-1}(\xi_{n-1}) \neq 0$, enquanto que no caso $S_{a_n-1}(\xi_{n-1}) = 0$ usando o Lema 2.12 temos $M_{n-1}^{a_n} = -S_{a_n-2}(\xi_{n-1})I = S_{a_n}(\xi_{n-1})I = \pm I$, isto é, $\xi_n = \pm\xi_{n-2}$, e é possível encontrar uma relação entre ξ_{n+1} e ξ_{n-2}, ξ_{n-3}.

Demonstração. (**Proposição 2.13**). Pela Proposição 2.10 e Lema 2.12 temos

$$M_{n+1} = M_{n-1}M_n^{a_{n+1}} = M_{n-1}M_nS_{a_{n+1}-1}(\xi_n) - M_{n-1}S_{a_{n-1}-2}(\xi_n), \tag{2.21}$$

$$M_n = M_{n-2}M_{n-1}^{a_n} = M_{n-2}M_{n-1}S_{a_n-1}(\xi_{n-1}) - M_{n-2}S_{a_n-2}(\xi_{n-1}), \tag{2.22}$$

$$M_nM_{n-1} = M_{n-2}M_{n-1}^{a_{n+1}} = M_{n-2}M_{n-1}S_{a_n}(\xi_{n-1}) - M_{n-2}S_{a_n-1}(\xi_{n-1}). \tag{2.23}$$

De (2.22)

$$M_{n-2}M_{n-1} = \frac{M_n + M_{n-2}S_{a_n-2}(\xi_{n-1})}{S_{a_n-1}(\xi_{n-1})}. \tag{2.24}$$

De (2.23) e (2.24)

$$M_nM_{n-1} = \frac{M_n + M_{n-2}S_{a_n-2}(\xi_{n-1})}{S_{a_n-1}(\xi_{n-1})}S_{a_n}(\xi_{n-1}) - M_{n-2}S_{a_n-1}(\xi_{n-1}). \tag{2.25}$$

Tomando o traço de (2.21) e usando (2.25),

$$\begin{aligned} trM_{n+1} \ &= \ \xi_{n+1} = \left[S_{a_n}(\xi_{n-1})\frac{\xi_n + \xi_{n-2}S_{a_n-2}(\xi_{n-1})}{S_{a_n-1}} - \xi_{n-2}S_{a_n-1}(\xi_{n-1})\right]S_{a_{n+1}-1}(\xi_n) \\ &- \ \xi_{n-1}S_{a_{n+1}-2}(\xi_n) = \xi_nS_{a_{n+1}-1}(\xi_n)\frac{S_{a_n}(\xi_{n-1})}{S_{a_{n+1}-1}(\xi_{n-1})} \\ &+ \ \xi_{n-2}S_{a_{n+1}-1}(\xi_n)\left[\frac{S_{a_{n-2(\xi_{n-1})}}}{S_{a_n-1}(\xi_{n-1})}S_{a_n}(\xi_{n-1}) - S_{a_n-1}(\xi_{n-1})\right] - \xi_{n-1}S_{a_{n+1}-2}(\xi_n) \end{aligned}$$

e por (2.19)

$$\frac{S_{a_{n-2}}(\xi_{n-1})S_{a_n}(\xi_{n-1})}{S_{a_n-1}(\xi_{n-1})} - S_{a_n-1}(\xi_{n-1}) = \frac{-1}{S_{a_n-1}(\xi_{n-1})}. \tag{2.26}$$

Assim, substituindo (2.26) na fórmula do traço de M_{n+1} obtemos o resultado desejado. ■

O próximo resultado estabelece que os traços ξ_n satisfazem uma relação invariante em n.

Proposição 2.14. Seja $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sequência gerada por (2.20) com

$$\xi_{-1} = 2, \quad \xi_0 = E, \quad \xi_1 = S_{a_1-1}(E)(E-\lambda) - S_{a_1-2}(E)2.$$

Então a quantidade

$$I_n := \xi_{n+1}^2 + \xi_n^2 + [tr(M_n M_{n+1})]^2 - \xi_{n+1}\xi_n \; tr[M_n M_{n+1}]$$

é constante em n e $I_n = \lambda^2 + 4$.

Demonstração. Usando a relação

$$tr(AB) = tr(A)tr(B) - tr(AB^{-1}) \tag{2.27}$$

que vale para matrizes 2×2 com $detA = detB = 1$, podemos mostrar o seguinte:

$$I_n = tr\left(M_{n+1}^{-1} M_n^{-1} M_{n+1} M_n\right) + 2.$$

De fato, usando (2.27) três vezes temos

$$tr\left(M_{n+1}^{-1} M_n^{-1} M_{n+1} M_n\right) = [tr(M_{n+1}M_n)]^2 - tr(M_n^2 M_{n+1}^2)$$

$$= [tr(M_{n+1}M_n)]^2 - tr(M_n)tr(M_n M_{n+1}^2) - trM_{n+1}^2$$

$$= [tr(M_{n+1}M_n)]^2 + trM_{n+1}^2 - tr(M_n)[tr(M_n M_{n+1})tr(M_{n+1}) - tr(M_n)]$$

$$= [tr(M_{n+1}M_n)]^2 + [trM_{n+1}]^2 + [trM_n]^2 - tr(M_n)tr(M_n M_{n+1})tr(M_{n+1}) - 2.$$

Além disso, a relação recursiva nos dá

$$tr(M_{n+1}^{-1} M_n^{-1} M_{n+1} M_n) = tr(M_{n+1} M_n M_{n+1}^{-1} M_n^{-1})$$

$$= tr(M_{n-1} M_n^{a_{n+1}+1} (M_n^{a_{n+1}})^{-1} M_{n-1}^{-1} M_n) = tr(M_{n-1} M_n M_{n-1}^{-1} M_n^{-1}) = I_{n-1} - 2.$$

Assim $I_n = I_{n-1} = I_0$. Mostremos agora que $I_0 = \lambda^2 + 4$.

De fato, $I_0 = \xi_1^2 + \xi_0^2 + [tr(M_0M_1)]^2 - \xi_1\xi_0 tr[M_0M_1]$. Por definição (2.11) de M_0, $\xi_0 = trM_0 = E$. Temos que

$$M_1 = M_{-1}M_0 = \begin{pmatrix} E-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

e então $\xi_1 = E - \lambda$.

Se $a_1 = 1$,

$$M_0M_1 = \begin{pmatrix} E(E-\lambda)-1 & -E \\ E-\lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} I_0 &= (E-\lambda)^2 + E^2 + [E(E-\lambda)-2]^2 - (E-\lambda)E[E(E-\lambda)-2] \\ &= (E-\lambda)^2 + E^2 - 2E(E-\lambda) + 4 = [(E-\lambda)-E]^2 + 4 = \lambda^2 + 4. \end{aligned}$$

Se $a_1 > 1$,

$$M_1 = \begin{pmatrix} E-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a_1-1}$$

e $\xi_1 = trM_1 = S_{a_1-1}(E)(E-\lambda) - S_{a_1-2}(E)2$. Temos ainda que

$$M_0M_1 = \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E-\lambda & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Usando o Lema 2.12 obtemos que

$$\begin{aligned} M_0M_1 = S_{a_1-2}(E) &\begin{pmatrix} E^2(E-\lambda) - -2E & -E(E-\lambda)+1 \\ E(E-\lambda)-1 & -(E-\lambda) \end{pmatrix} \\ &- S_{a_1-3} \begin{pmatrix} E(E-\lambda)-1 & -E \\ E-\lambda & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$tr(M_0M_1) = S_{a_1-2}(E)[E^2(E-\lambda) - 2E - (E-\lambda)] - S_{a_1-3}(E)[E(E-\lambda)-1].$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \xi_1^2 + \xi_0^2 + [tr(M_0M_1)]^2 - \xi_0\xi_1 tr[M_0M_1] \\
&= S^2_{a_1-1}(E)(E-\lambda)^2 - 4(E-\lambda)S_{a_1-1}(E)S_{a_1-2}(E) \\
&+ 4S^2_{a_1-2}(E) + E^2 + S^2_{a_1-2}(E)[E^2(E-\lambda) - 2E - (E-\lambda)]^2 \\
&- 2S_{a_1-2}(E)[E^2(E-\lambda) - 2E - (E-\lambda)]S_{a_1-3}(E)[E(E-\lambda) - 2] \\
&+ S^2_{a_1-3}(E)[E(E-\lambda)-2]^2 - E[(E(E-\lambda)-2)S_{a_1-2}(E) - (E-\lambda)S_{a_1-3}(E)] \\
&\quad [S_{a_1-2}(E)(E^2(E-\lambda) - 2E) - S_{a_1-2}(E)(E-\lambda) - S_{a_1-3}(E)(E-\lambda) - 2)] \\
&= S^2_{a_1-2}(E)(E-\lambda)^2 - 4(E-\lambda)S_{a_1-1}(E)(S_{a_1-3}(E)E - S_{a_1-4}(E)) \\
&+ 4S^2_{a_1-2}(E) + E^2 + S_{a_1-2}(E)^2[E^2(E-\lambda) - 2E - (E-\lambda)^2] \\
&- 2S_{a_1-2}(E)[E^2(E-\lambda) - 2E - (E-\lambda)](S_{a_1-4}(E)E - S_{a_1-5}(E))[E(E-\lambda)-2] \\
&+ S_{a_1-3}(E)^2[E(E-\lambda)-2]^2 - E[(E(E-\lambda)-2)S_{a_1-2}(E) - (E-\lambda)S_{a_1-3}(E)] \\
&\quad [S_{a_1-2}(E)(E^2(E-\lambda) - 2E) - S_{a_1-2}(E)(E-\lambda) - S_{a_1-3}(E)(E-\lambda) - 2)].
\end{aligned}
$$

Usando o fato que $S_aS_{a-2} - S^2_{a-1} = -1$ (Lema 2.12) obtemos que $I_0 = \lambda^2 + 4$. ■

Como o espectro independe de β (veja Lema 3.7) podemos então considerar o caso $\beta = 0$, para o qual temos todas as relações recursivas sobre os traços das matrizes de transferência, como foi mostrado anteriormente. Assim, obteremos uma condição necessária e suficiente para que o traço de M_n fique limitado.

Proposição 2.15. Seja $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sequência gerada por (2.20) com

$$\xi_{-1} = 2, \quad \xi_0 = E, \quad \xi_1 = S_{a_1-1}(E)(E-\lambda) - S_{a_1-2}(E)2.$$

Então $\{\xi_n\}$ é não-limitada se, e somente se, existe $N \geq 0$ tal que

$$|\xi_{N-1}| \leq 2, \quad |\xi_N| > 2, \quad |\xi_{N+1}| > 2. \tag{2.28}$$

Este N é único, $|\xi_{n+2}| > \frac{|\xi_{n+1}||\xi_n|}{2} > 2$ para todo $n \geq N$ e existe $C > 1$ tal que $\frac{|\xi_n|}{2} > C^{q_n}$. Se $\{\xi_n\}$ é limitada, então $|\xi_n| < 2 + \sqrt{8+\lambda^2}$.

Demonstração. Supondo (2.28) verdadeiro para algum $N \geq 0$, então por (2.20) e pela relação

$$\left|\frac{S_{a_{N+1}}(\xi_N)}{S_{a_{N+1}-1}(\xi_N)}\right| = \frac{sh(a_{N+1}+1)\theta_N}{sh(a_{N+1})\theta_N} = ch\theta_N + \frac{cha_{N+1}\theta_N}{sha_{N+1}\theta_N}\, sh\theta_N,$$

temos

$$
\begin{aligned}
|\xi_{N+2}| &\geq |\xi_{N+1}||S_{a_{N+1}-1}(\xi_{N+1})|\left[\frac{1}{2}|\xi_n| + \frac{cha_{N+1}\theta_N}{sha_{N+1}\theta_N}sh\theta_N\right] - \\
&- \left\{|\xi_N||S_{a_{N+2}-2}(\xi_{N+1}) + |\xi_{N-1}|\left|\frac{S_{a_{N+2}-1}(\xi_{N+1})}{S_{a_{N+1}-1}(\xi_N)}\right|\right\} \\
&= \frac{1}{2}|\xi_{N+1}||\xi_N|\frac{sha_{N+2}\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}} + \xi_{N+1}\frac{sha_{N+2}\theta_{N+1}cha_{N+1}\theta_N sh\theta_N}{sh\theta_{N+1}sha_{N+1}\theta_N} - \\
&- |\xi_N|\frac{sh(a_{N+2}-1)\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}} - |\xi_{N-1}|\frac{S_{a_{N+2}-1}(\xi_{N+1})}{S_{a_{N+1}-1}(\xi_N)} \\
&= |\xi_N|cha_{N+2}\theta_{N+1} + |\xi_N|\frac{sh(a_{N+2}-1)\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}} - |\xi_{N+1}|\frac{sha_{N+2}\theta_{N+1}cha_{N+1}\theta_N}{sh\theta_{N+1}sha_{N+1}\theta_N} - \\
&\quad |\xi_N|\frac{sh(a_{N+2}-1)\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}} - |\xi_{N-1}|\left|\frac{S_{a_{N+2}-1}(\xi_{N+1})}{S_{a_{N+1}-1}(\xi_N)}\right| \\
&\geq |\xi_N||cha_{N+2}\theta_{N+1}| \geq \frac{|\xi_N||\xi_{N+1}|}{2}, \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

pois o cosseno hiperbólico é crescente,

$$ch\theta_{N+1}\frac{sha_{N+2}\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}} = cha_{N+2}\theta_{N+1} + \frac{sh(a_{N+2}-1)\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}}$$

e

$$
\begin{gathered}
2ch\theta_N\frac{sh(a_{N+2}-1)\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}} + 2ch\theta_{N+1}\frac{sh(a_{N+2})\theta_{N+1}cha_{N+1}\theta_N sh\theta_N}{sh\theta_{N+1}sha_{N+1}\theta_N} > \\
2ch\theta_N\frac{sh(a_{N+2}-1)\theta_{N+1}}{sh\theta_{N+1}} + 2\frac{sha_{N+2}\theta_{N+1}sh\theta_N}{sh\theta_{N+1}sha_{N+1}\theta_N}.
\end{gathered}
$$

De (2.29) por indução para todo $n > N$ temos

$$|\xi_{n+2}| \geq |\xi_n||cha_{n+2}\theta_{n+1}| > \frac{|\xi_n||\xi_{n+1}|}{2}$$

o que implica

$$\frac{|\xi_{n+2}|}{2} > \frac{|\xi_n|}{2}\left(\frac{|\xi_{n+1}|}{2}\right)^{a_{n+2}}.$$

Daí, $|\xi_n|/2 > C^{q_n}$ com $C > 1$. Para $n = N$, $|\xi_{n-1}| \leq 2 < |\xi_n|$, $|\xi_{n+1}| < |\xi_{n+2}| < \ldots$. Claramente essas desigualdades não valem para outros valores de n.

Se (2.28) não vale para $N \geq 0$, isto significa que:

$$\text{se } |\xi_n| > 2 \text{ então } \quad |\xi_{n-1}| \leq 2 \quad e \quad |\xi_{n+1}| \leq 2. \qquad (2.30)$$

Caso contrário, obtém-se (2.28) para $N \leq n$; de fato, $|\xi_{-1}| = 2$, seja $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N}; n \geq 0, |\xi_n| > 2\}$. Isto implica $|\xi_{n_0-1}| \leq 2$ e por oposição de (2.28), $|\xi_{n_0+1}| \leq 2$ e portanto para $n_1 = \min\{n \in \mathbb{N}; n > n_0 + 1; |\xi_n| > 2\}$, n_2,.... Este argumento mostra que a oposição de (2.28) implica (2.30). Devemos agora distinguir entre duas possibilidades:

i) vale (2.30) e $|tr(M_n M_{n-1})| \leq 2$;

ii) vale (2.30) e $|tr(M_n M_{n-1})| \geq 2$.

No caso *i)* usando a Proposição (2.14),

$$I_{n-1} = \xi_n^2 + \xi_{n-1}^2 + [tr(M_n M_{n-1})]^2 - \xi_n \xi_{n-1} tr(M_n M_{n-1}) = \lambda^2 + 4 \geq \xi_n^2 - 4|\xi_n|$$

o que implica $|\xi_n| \leq 2 + \sqrt{8 + \lambda^2}$.
Caso *ii)* é impossível, pois (2.21), (2.30) e $|tr(M_n M_{n-1})| \geq 2$ implica: se $\xi_n = \pm 2ch\theta_n$, $\theta_n > 0$, e usando que $sh(\theta_n + \theta_m) \geq sh\theta_n + sh\theta_m$, obtemos

$$|\xi_{n+1}| = |trM_{n+1}| \geq 2\frac{sha_{N+1}\theta_N}{sh\theta_N} - 2\frac{sh(a_{N+1}-1)\theta_N}{sh\theta_N} \geq 2,$$

em contradição com (2.30). ∎

2.5 m-Funções de Weyl-Tichmarsh

Nesta seção introduzimos as m-funções de Weyl-Tichmarsh e, utilizando o teorema espectral, obtemos uma caracterização das mesmas através da função de Green, a qual é o núcleo do operador resolvente. Para referências veja [5, 11, 27].

Para $z = E + i\epsilon$ considere a equação

$$Hu = zu. \tag{2.31}$$

Se $\epsilon > 0$ então $z \notin \sigma(H)$ e, portanto, o expoente de Lyapunov $\gamma(z) > 0$ pelo argumento de Combes-Thomas, que pode ser encontrado em [5]. Daí, pelo Teorema 2.9 existem soluções $\widehat{u}_z^{\pm} \neq 0$ de (2.31) de forma que

$$|\widehat{u}_z^{\pm}(\pm n)| \leq ce^{-\gamma(z)n},$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ e para alguma constante $c < \infty$. Isto implica que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{u}_z^{\pm}(\pm n)|^2 \leq c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-2\gamma(z)}\right)^n = c^2 \frac{e^{2\gamma(z)}}{e^{2\gamma(z)} - 1} < \infty.$$

Como o Wrosnkiano de soluções é constante, temos que $\widehat{u}_z^{\pm}$ são as únicas soluções de (2.31) que estão em $\ell^2(\mathbb{Z}^{\pm})$.

Sejam $u_{1,\varphi,z}^{\pm}$ e $u_{2,\varphi,z}^{\pm}$ soluções de (2.31), definidas em $\mathbb{Z}^{\pm}$, com condições iniciais (2.14). Como (2.31) é uma equação a diferença finita de 2ª ordem, o espaço das soluções tem dimensão 2 e, portanto, $\{u_{i,\varphi,z}^{\pm}\}_{i=1,2}$ forma uma base para este espaço em $\mathbb{Z}^{\pm}$. Assim, as soluções $\widehat{u}_z^{\pm}$ são escritas de modo único como

$$\widehat{u}_z^{\pm} = [\widehat{u}_z^{\pm}(0)cos\varphi + \widehat{u}_z^{\pm}(1)sen\varphi]u_{2,\varphi,z}^{\pm} + [-\widehat{u}_z^{\pm}(0)sen\varphi + \widehat{u}_z^{\pm}(1)cos\varphi]u_{1,\varphi,z}^{\pm}.$$

Sejam $\widehat{u}^{\pm}_{\varphi,z} \equiv \widehat{u}^{\pm}_z$ com normalizações $\widehat{u}^{\pm}_z(0)cos\varphi + \widehat{u}^{\pm}_z(1)sen\varphi = 1$. Portanto,

$$\widehat{u}^{\pm}_{\varphi,z} = u^{\pm}_{2,\varphi,z} + [-\widehat{u}^{\pm}_z(0)sen\varphi + \widehat{u}^{\pm}_z(1)cos\varphi]u^{\pm}_{1,\varphi,z} \quad e \quad \widehat{u}^{\pm}_z(0) = 1.$$

Definição 2.16. Para $z = E + i\epsilon$ no semi-plano superior ($\epsilon > 0$), as m-funções de Weyl-Titchmarsh à direita e à esquerda são definidas unicamente por

$$\widehat{u}^{\pm}_{\varphi,z} = u^{\pm}_{2,\varphi,z} \mp m^{\pm}_{\varphi}(z)u^{\pm}_{1,\varphi,z}.$$

Quando $\varphi = 0$, usaremos a notação $m^{\pm} = m^{\pm}_0$. Segue diretamente da Definição 2.16 que

$$m^{\pm}(z) = \mp\widehat{u}^{\pm}_z(1). \tag{2.32}$$

As funções $m^{\pm}$ e $m^{\pm}_{\varphi}$ se relacionam da seguinte forma:

$$m^{\pm}(z) \overset{(2.32)}{=} \mp\frac{\widehat{u}^{\pm}_z(1)}{\widehat{u}^{\pm}_z(0)} = \mp\frac{\widehat{u}^{\pm}_{\varphi,z}(1)}{\widehat{u}^{\pm}_{\varphi,z}(0)} \overset{(def\ 2.16)}{=} \frac{m^{\pm}_{\varphi}(z)cos\varphi \mp sen\varphi}{cos\varphi \pm m^{\pm}_{\varphi}(z)sen\varphi}. \tag{2.33}$$

Denotemos por $H^{\pm}$ os operadores da forma (2.12) restritos a $\ell^2(\mathbb{Z}^{\pm})$.

Definição 2.17. As funções de Green para o operador H^+ são definidas por

$$G^{+}_{\varphi}(n,m,z) = \begin{cases} \dfrac{u^{+}_{1,\varphi,z}(n)\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(m)}{W[\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}, u^{+}_{1,\varphi,z}]}, & n \le m \\ \\ \dfrac{u^{+}_{1,\varphi,z}(m)\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}{W[\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}, u^{+}_{1,\varphi,z}]}, & m \le n \end{cases}$$

com $m, n \in \mathbb{Z}^+$.

Para cada $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, tem-se que $G^{+}_{\varphi}(n,m,z)$ é o núcleo do operador $(H^+ - z)^{-1}$, isto é,

$$[(H^+ - z)^{-1}\psi](n) = \sum_{m=1}^{\infty} G^{+}_{\varphi}(n,m,z)\psi(m), \quad \forall\psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^+). \tag{2.34}$$

De fato, para cada $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$ tomando

$$u_{\varphi}(n,z) = \sum_{m=1}^{\infty} G^{+}_{\varphi}(n,m,z)\psi(m)$$

usando a Definição 2.17 temos

$$u_{\varphi}(n,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^{+}_{1,\varphi,z}(m)\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}{W[\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}, u^{+}_{1,\varphi,z}]}\psi(m) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{u^{+}_{1,\varphi,z}(n)\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(m)}{W[\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}, u^{+}_{1,\phi,z}]}\psi(m).$$

Aplicando H^+ na expressão e fazendo alguns cálculos, vem que

$$H^+ u_\varphi(n,z) = z u_\varphi(n,z) + \psi(n)$$

donde segue o resultado.

Tomando $\psi = e_1 = (1, 0, ...)$ em (2.34) obtemos

$$[(H^+ - z)e_1](n) = \sum_{m=1}^{\infty} G_\varphi^+(n,m,z) e_1(m) = G_\varphi^+(n,1,z).$$

Consideremos, em $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$, a medida espectral $\mu^+ \equiv \mu_{e_1}$ associada a e_1 (que é vetor cíclico para H_+). Pelo teorema espectral temos

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\mu^+(t)}{t-z} &= \langle (H^+ - z)^{-1} e_1, e_1 \rangle \\
&= G_\varphi^+(1,1,z) \\
&\overset{(def_2.17)}{=} \frac{u_{1,\varphi,z}^+(1)\widehat{u}_{\varphi,z}^+(1)}{\widehat{u}_{\varphi,z}^+(1)u_{1,\varphi,z}^+(0) - \widehat{u}_{\varphi,z}^+(0)u_{1,\varphi,z}^+(1)} \\
&\overset{(def_2.16)}{=} -\cos\varphi sen\varphi + m_\varphi^+(z)\cos^2\varphi. \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

No caso particular, $\varphi = 0$ temos

$$m^+(z) = \int \frac{d\mu^+(t)}{t-z}.$$

Analogamente em $\mathbb{Z}^-$, tem-se

$$\int \frac{d\mu^-(t)}{t-z} = \langle (H^- - z)^{-1} e_0, e_0 \rangle = \cos\varphi sen\varphi + m_\varphi^-(z)\cos^2\varphi$$

em que $\mu^- \equiv \mu_{e_0}$ é a medida espectral associada ao vetor $e_0 = (..., 0, 0, 1)$ (que é cíclico para o operador H^-).

Consideremos agora o espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$. Vamos descrever as funções G_φ e $m(z)$.

Definição 2.18. As funções de Green para o operador H são definidas por

$$G_\varphi(n,m,z) = \begin{cases} \dfrac{\widehat{u}_{\varphi,z}^-(n)\widehat{u}_{\varphi,z}^+(m)}{W[\widehat{u}_{\varphi,z}^+, \widehat{u}_{\varphi,z}^-]}, & n \leq m \\[2ex] \dfrac{\widehat{u}_{\varphi,z}^-(m)\widehat{u}_{\varphi,z}^+(n)}{W[\widehat{u}_{\varphi,z}^+, \widehat{u}_{\varphi,z}^-]}, & m \leq n \end{cases}$$

com $n, m \in \mathbb{Z}$.

Mostra-se de modo análogo a (2.34) que, para cada $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$, $G_\varphi(n,m,z)$ é o núcleo do operador resolvente $(H-z)^{-1}$, isto é,

$$[(H-z)^{-1}\psi](n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_\varphi(n,m,z)\psi(m), \quad \forall \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

A m-função $m(z)$ na reta toda é dada através do traço de uma matriz $M(z)$ que satisfaz (veja [11]):

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} M(z) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \langle a\delta_0 + b\delta_1, (H-z)^{-1}(a\delta_0 + \delta_1)\rangle. \tag{2.36}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (2.36) temos

$$\begin{aligned}
\langle a\delta_0 + b\delta_1, (H-z)^{-1}(a\delta_0 + \delta_1)\rangle &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} (a\delta_0 + b\delta_1)(m)(aG_\varphi(m,0,z) + bG_\varphi(m,1,z))) \\
&= a^2 G_\varphi(0,0,z) + abG_\varphi(0,1,z) + baG_\varphi(1,0,z) \\
&+ b^2 G_\varphi(1,1,z) \\
&= a^2 \left(\frac{\widehat{u}^-_{\varphi,z}(0)\widehat{u}^+_{\varphi,z}(0)}{W[\widehat{u}^+_{\varphi,z}, \widehat{u}^-_{\varphi,z}]} \right) + ab \left(\frac{\widehat{u}^-_{\varphi,z}(0)\widehat{u}^+_{\varphi,z}(1)}{W[\widehat{u}^+_{\varphi,z}, \widehat{u}^-_{\varphi,z}]} \right) \\
&+ ba \left(\frac{\widehat{u}^-_{\varphi,z}(0)\widehat{u}^+_{\varphi,z}(0)}{W[\widehat{u}^+_{\varphi,z}, \widehat{u}^-_{\varphi,z}]} \right) + b^2 \left(\frac{\widehat{u}^-_{\varphi,z}(1)\widehat{u}^+_{\varphi,z}(1)}{W[\widehat{u}^+_{\varphi,z}, \widehat{u}^-_{\varphi,z}]} \right) \\
&= a^2[(cos\varphi + m^+_\phi(z)sen\varphi)(cos\varphi - m^-_\varphi(z)sen\varphi)] \\
&+ ab[(cos\varphi - m^-_\varphi(z)sen\varphi)(sen\varphi - m^+_\varphi(z)cos\varphi)] \\
&+ ba[(cos\varphi - m^-_\varphi(z)sen\varphi)(sen\varphi - m^+_\varphi(z)cos\varphi)] \\
&+ b^2[(sen\varphi - m^+_\varphi(z)cos\varphi)(sen\varphi + m^-_\varphi(z)cos\varphi)].
\end{aligned}$$

Escolhendo $\varphi = 0$ obtemos

$$\langle a\delta_0 + b\delta_1, (H-z)^{-1}(a\delta_0 + \delta_1)\rangle = \frac{a^2 - abm^+(z) - bam^+(z) - b^2 m^+(z)m^-(z)}{-m^+(z) - m^-(z)}.$$

Por outro lado, desenvolvendo o lado direito de (2.36) obtemos

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a^2 m_{11} + abm_{12} + bam_{21} + b^2 m_{22}.$$

Assim,

$$M(z) = \frac{1}{-m^+(z) - m^-(z)} \begin{bmatrix} 1 & -m^+(z) \\ -m^+(z) & -m^+(z)m^-(z) \end{bmatrix}.$$

Definimos a m-função $m(z) = tr(M(z))$ (veja [5]), ou seja,

$$m(z) = \frac{m^+(z)m^-(z) - 1}{m^+(z) + m^-(z)}. \tag{2.37}$$

Em $\ell^2(\mathbb{Z})$ a medida espectral é $\mu = \mu^+ + \mu^-$, em que $\mu^+ = \mu_{e_1}$, $\mu^- = \mu_{e_0}$ e o par de vetores $\{e_0, e_1\}$ é cíclico para o operador H. Pelo teorema espectral temos

$$m(z) = \int \frac{d\mu(t)}{t - z},$$

ou seja, a m-função é a transformada de Borel da medida espectral μ.

2.6 Medidas de Hausdorff

Nesta seção vamos apresentar a definição de medida de Hausdorff α-dimensional. Para referências veja [18, 37].

Definição 2.19. Para qualquer subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ e $\alpha \in [0, 1]$, a medida de Hausdorff α-dimensional, h^α, é dada por

$$h^\alpha(S) = \lim_{\delta \to 0} \left(\inf_{\delta-coberturas} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^\alpha \right)$$

sendo a δ-cobertura uma cobertura de S por uma coleção enumerável de intervalos $\{I_i\}_{i=1}^\infty$, $S \subset \cup_{i=1}^\infty$, com $|I_i| < \delta$ ($|I|$ denota o comprimento do intervalo I). A restrição de h^α aos Borelianos é chamada de medida de Hausdorff α-dimensional.

`Observação:`

i) O limite acima existe para qualquer $S \subset \mathbb{R}$.

ii) h^1 coincide com a medida de Lebesgue e h^0 é a medida contagem.

iii) h^α pode ser definida também para $\alpha < 0$ ou $\alpha > 1$. Para $\alpha < 0$, $h^\alpha(S) = \infty$, $\forall S \neq \emptyset$ e para $\alpha > 1$, $h^\alpha(\mathbb{R}) = 0$. Assim, não existe interesse maior em tais α's.

iv) Para $\alpha < 1$, h^α não é σ-finita.

v) Seja $\alpha < t$ $(\alpha, t \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0)$. Suponha que $S \subset \cup_{i=1}^\infty I_i$, com $|I_i| < \delta$. Temos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^{\alpha - t} |I_i|^t > \delta^{\alpha - t} \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^t.$$

Assim, se $h^t(S) > 0 \Rightarrow h^s(S) \geq \lim_{\delta \to 0} \delta^{\alpha - t} h^t(S) = \infty \Rightarrow h^\alpha(S) = \infty$. Analogamente mostra-se que $h^\alpha(S) < \infty \Rightarrow h^t(S) = 0$. Portanto, para qualquer $\emptyset \neq S \subset \mathbb{R}$, existe um único valor $\dim_H S \in [0,1]$ (chamado de dimensão de Hausdorff de S) em que

$$h^\alpha(S) = \begin{cases} 0 \text{ se } & \alpha > \dim_H S \\ \infty \text{ se } & \alpha < \dim_H S. \end{cases}$$

$h^{\dim_H S}(S)$ pode ser zero, finito ou infinito.

Definição 2.20. Seja μ uma medida em $\mathbb{R}$ definida sobre os Borelianos.

i) μ é chamada α-contínua se $\mu(S) = 0$ para todo Boreliano S com $h^\alpha(S) = 0$.

ii) μ é chamada α-singular se existe um Boreliano S com $\mu(\mathbb{R} \setminus S) = 0$ e $h^\alpha(S) = 0$.

2.7 α-Derivada superior de uma medida

Nesta seção introduzimos a α-derivada superior de uma medida Boreliana finita e apresentamos um resultado, devido a Rogers e Taylor, que caracteriza conjuntos em que as medidas α-contínua e α-singular estão concentradas. Para referências veja [37, 38, 39].

Definição 2.21. Sejam μ uma medida Boreliana finita em $\mathbb{R}$, $\alpha \in [0,1]$ e $I_0 \subset \mathbb{R}$ intervalo com $|I_0| = 1$. Para cada $x \in I_0$, definimos a α-derivada superior de μ em x por

$$D^\alpha_\mu(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{\substack{x \in I \\ |I| < \epsilon}} \frac{\mu(I)}{|I|^\alpha}$$

em que o supremo é feito sobre todos os sub-intervalos I de I_0, com I aberto relativo a I_0, $x \in I$ e $|I| < \epsilon$.

Rogers e Taylor [38, 39] desenvolveram uma teoria de decomposição de medidas em relação às medidas de Hausdorff. Podemos decompor de modo único

$$\mu = \mu_{\alpha c} + \mu_{\alpha s}$$

sendo $\mu_{\alpha c}$ uma medida α-contínua e $\mu_{\alpha s}$ uma medida α-singular.

Apresentaremos a seguir um resultado (devido à Rogers e Taylor [38]) que caracteriza conjuntos em que $\mu_{\alpha c}$ e $\mu_{\alpha s}$ estão concentradas.

Teorema 2.22. *Suponha que $\alpha \in [0,1]$ e que μ é uma medida Boreliana finita em $\mathbb{R}$. Sejam*

$$T^\alpha_0 = \{x \in \mathbb{R} : D^\alpha_\mu(x) = 0\},$$
$$T^\alpha_1 = \{x \in \mathbb{R} : 0 < D^\alpha_\mu(x) < \infty\} \quad e$$
$$T^\alpha_\infty = \{x \in \mathbb{R} : D^\alpha_\mu(x) = \infty\}.$$

Então

i) T_0^α, T_1^α *e* T_∞^α *são conjuntos de Borel;*

ii) $\mu_{\alpha c} = \mu_{|_{T_0^\alpha \cup T_1^\alpha}} \equiv \mu((T_0^\alpha \cup T_1^\alpha) \cap \cdot)$ *e* $\mu_{\alpha s} = \mu_{|_{T_\infty^\alpha}} \equiv \mu(T_\infty^\alpha \cap \cdot)$.

Corolário 2.23. *Sejam μ uma medida Boreliana finita em $\mathbb{R}$ e $\alpha \in [0,1]$. Se $D_\mu^\alpha(E) = \infty$ $\mu - qtp$ então μ é α-singular e se $D_\mu^\alpha(E) < \infty$ $\mu - qtp$ então μ é α-contínua.*

Demonstração. Segue diretamente do Teorema 2.22. ■

Definição 2.24. Uma medida Boreliana μ em $\mathbb{R}$ é uniformemente α-Hölder ($U\alpha H$), $0 \leq \alpha \leq 1$, se existe $0 < C < \infty$ de forma que $\mu(I) \leq C|I|^\alpha$, para todo intervalo I com $|I| < 1$.

Vamos terminar esta seção comentando sobre uma decomposição adequada do espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$. Para cada $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ denotemos por μ_ψ a medida espectral para o par (H, ψ), em que H é auto-adjunto. Definimos os seguintes subespaços:

$$\ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha c} \equiv \{\psi : \mu_\psi \text{ é } \alpha - \text{contínua}\} \quad (\text{subespaço } \ \alpha\text{-contínuo}),$$
$$\ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha s} \equiv \{\psi : \mu_\psi \text{ é } \alpha - \text{singular}\} \quad (\text{subespaço } \ \alpha\text{-singular}).$$

Temos que $\ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha c}$ e $\ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha s}$ são subespaços fechados, mutuamente ortogonais, invariantes por H e $\ell^2(\mathbb{Z}) = \ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha c} \oplus \ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha c}$. Além disso,

$$\ell^2(\mathbb{Z})_{U\alpha H} \equiv \{\psi : \mu_\psi \text{ é } U\alpha H\}$$

é um subespaço vetorial e $\overline{\ell^2(\mathbb{Z})_{U\alpha H}} = \ell^2(\mathbb{Z})_{\alpha c}$.

Definição 2.25. Os espectros α-contínuo ($\sigma_{\alpha c}(H)$) e α-singular ($\sigma_{\alpha s}(H)$) do operador H são definidos como sendo o espectro da restrição de H aos correspondentes subespaços.

Com esta definição, temos $\sigma(H) = \sigma_{\alpha c}(H) \cup \sigma_{\alpha s}(H)$.

Capítulo

3

Ausência de Espectro Absolutamente Contínuo para $H_{\lambda,\theta,\beta}$

Neste capítulo vamos obter um resultado fundamental para classificação espectral dos operadores de Schrödinger com potenciais Sturmianos, que é mostrar que o espectro desses operadores tem medida de Lebesgue zero e, consequentemente, a ausência do espectro absolutamente contínuo. Para isso, estudaremos alguns conceitos básicos sobre a teoria ergódica de uma família de operadores de Schrödinger e devido a teoria de Kotani, é possível excluir o espectro absolutamente contínuo de operadores de Schrödinger com potenciais quase-periódicos que assumem um número finito de valores.

3.1 Família ergódica de operadores de Schrödinger

Nesta seção vamos apresentar definições e resultados básicos para uma família ergódica de operadores de Schrödinger, os quais são extremamente importantes para o desenvolvimento desse trabalho. Em particular, a teoria de Kotani é essencial nos resultados sobre a ausência do espectro absolutamente contínuo e na propriedade sobre o espectro com medida de Lebesgue zero, do modelo em estudo (veja [1, 14]).

Vamos realizar um breve estudo sobre a construção de uma família ergódica de operadores de Schrödinger associados aos potencias Sturmianos $V_{\theta,\beta}$, que são gerados por rotações na circunferência $\mathbb{S}^1$. Para mais detalhes ver [12, 44].

Definição 3.1. Sejam Ω um espaço métrico compacto e $T : \Omega \to \Omega$ um homeomorfismo.

i) O par (Ω, T) é chamado um sistema dinâmico topológico.

ii) Dado $\omega \in \Omega$, o conjunto $\mathbb{O}(\omega) = \{T^n\omega : n \in \mathbb{Z}\}$ é chamado a órbita de ω.

iii) Seja $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel de Ω. Uma medida de probabilidade μ é dita estacionária se $\mu(T(B)) = \mu(B)$, para cada $B \in \mathcal{B}$.

iv) Um conjunto de Borel B é chamado invariante se $T(B) = B$.

v) Uma medida estacionária é chamada ergódica se todo conjunto invariante tem medida 0 ou 1.

Definição 3.2. Um sistema dinâmico topológico (Ω, T) é dito:

1. Minimal se a órbita de cada $\omega \in \Omega$ é densa em Ω.

2. Unicamente ergódico se existe uma única medida ergódica.

3. Estritamente ergódico se for minimal e unicamente ergódico.

É um fato bem conhecido que se existe uma única medida estacionária, então a medida é necessariamente ergódica.

Definição 3.3. Uma família ergódica de operadores de Schrödinger $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ é chamada minimal se para cada par $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ a sequência V_{ω_1} é o limite pontual de transladados de V_{ω_2}.

`Observação:` A minimalidade da família ergódica $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ segue da minimalidade do sistema dinâmico (Ω, T).

Definição 3.4. Dados um sistema dinâmico topológico (Ω, T), uma medida ergódica μ e uma função mensurável $g : \Omega \to \mathbb{R}$, define-se para cada $\omega \in \Omega$ uma sequência infinita bilateral $V_\omega : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ por $V_\omega(n) = g(T^n\omega)$. Esta sequência gera o operador de Schrödinger discreto unidimensional H_ω sobre $\ell^2(\mathbb{Z})$, o qual atua sobre cada $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ por

$$(H_\omega u)(n) = u(n+1) + u(n-1) + V_\omega(n)u(n).$$

A família $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ é chamada uma família ergódica de operadores de Schrödinger.

Com as definições em mente, estamos aptos para mostrar que a família de operadores de Schrödinger Sturmianos $(H_{\lambda,\theta,\beta})_{\beta\in[0,1)}$ é ergódica e minimal.

Exemplo 3.5. Seja $\Omega = \mathbb{S}^1$ (circunferência unitária), o qual é um conjunto compacto e pode ser representado (identificado) pelo intervalo $[0, 1)$. Definimos a aplicação $T_\theta : \mathbb{S}^1 \hookleftarrow$ por

$$T_\theta\beta = \beta + \theta \ (\text{mod } 1).$$

Para cada $\theta \in (0, 1)$ irracional, temos que não existem órbitas periódicas e que a órbita de qualquer ponto é densa em $\mathbb{S}^1$. Além disso, é bem conhecido que a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{S}^1$ é unicamente estacionária [10], logo o sistema é unicamente ergódico. Como toda órbita é densa, temos que o sistema é minimal. Portanto, (Ω, T_θ) é estritamente ergódico (veja [12, 44]).

Definimos a função mensurável $g : \Omega \to \mathbb{R}$ como $g(\beta) = \chi_{[1-\theta,1)}(\beta)$, e daí obtemos os potenciais

$$V_{\theta,\beta}(n) = g(T^n\beta) = \chi_{1-\theta,1)}(n\theta + \beta \text{ mod } 1).$$

Assim, concluímos que $(H_{\lambda,\theta,\beta})_{\beta\in[0,1)}$ é uma família ergódica e minimal de operadores de Schrödinger.

Outra possibilidade de obter uma família de tais potenciais é considerar a sequência $V_{\theta,0}(n) = \chi_{[1-\theta,1)}(n\theta \bmod 1), n \in \mathbb{N}$. Definindo o *hull* $\Omega = \Omega_\theta$ por

$$\Omega_\theta = \{\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \omega = \lim T^{n_i} V_{\theta,0},\ n_i \to \infty\},$$

onde $T : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $Tu(n) = u(n+1)$ denota o shift sobre $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $\Omega_\theta \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ é um conjunto compacto, temos que o sistema dinâmico (Ω_θ, T) é estritamente ergódico, com uma única medida ergódica μ dada sobre conjuntos cilindros pela frequência das respectivas palavras [20]. Relembremos que a σ-álgebra de Borel é gerada pelos conjuntos cilíndricos

$$[b_0...b_{l-1}]_{[m,m+l-1]} = \{\omega \in \Omega : \omega_{m+i} = b_i, 0 \leq i \leq l-1\},$$

$m \in \mathbb{Z}, l \geq 1, b_i \in \{0,1\}, 0 \leq i \leq l-1$. Temos que a única medida ergódica de Borel μ sobre Ω satisfaz

$$\mu([b_0...b_{l-1}]_{[m,m+l-1]}) = d(b_0...b_{l-1}),$$

onde $d(b_0...b_{l-1})$ é a frequência da palavra $b_0...b_{l-1}$ em $V_{\theta,0}$, isto é,

$$d(b_0...b_{l-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp \{j \leq n : V_{\theta,0}(j) \cdots V_{\theta,0}(j+l-1) = b_0...b_{l-1}\}$$

a qual é sempre estritamente positiva. A função g, que gera os potenciais neste caso, é dada por $g(\omega) = f(\omega_0)$, onde $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$.

Temos que ambas as maneiras de se obter os potenciais de $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ correspondentes aos parâmetros λ, θ, β induz à famílias de operadores de Schrödinger ergódicas e minimais.

Uma relação entre os conjuntos Ω_θ e $\{V_{\theta,\beta} : \beta \in [0,1)\}$ pode ser encontrada em [12].

3.2 Espectro com medida de Lebesgue zero

A ausência uniforme do espectro absolutamente contínuo e espectro com medida de Lebesgue zero foram demonstrados para todos os parâmetros nos modelos Sturmianos [1].

Os resultados que serão discutidos a partir de agora são de fundamental importância para a demonstração do Teorema 3.14. Como o espectro de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ independe de β (Lema 3.7) vamos denotá-lo por $\sum$.

Teorema 3.6. *Seja $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ uma família ergódica e minimal de operadores de Schrödinger. Então $\sigma(H_\omega) = \sum$ e $\sigma_{ac}(H_\omega) = \sum_{ac}$, para todo $\omega \in \Omega$.*

A demonstração de que o espectro independe de $\omega \in \Omega$ pode ser encontrada em [36]. Last e Simon [32] demonstraram que o espectro absolutamente contínuo é o mesmo para todos os membros de uma família ergódica e minimal de operadores de Schrödinger.

Consequentemente, podemos escolher qualquer membro dessa família para estudarmos o espectro ou o espectro absolutamente contínuo, o que torna mais fácil o estudo espectral.

Agora vamos estender para potenciais contínuos à direita, o resultado bem conhecido de Hamiltonianos quase-periódicos sobre a independência de β, para todo $\beta \in [0, 1)$, do espectro (veja [36]).

Lema 3.7. *Para quaisquer* $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1)$ *tem-se que* $\sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_1}) = \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_2})$.

Demonstração. Como $H_{\lambda,\theta,\beta_1+n\theta} = T_n^{-1} H_{\lambda,\theta,\beta_1} T_n$, onde T_n é a translação por n em $\ell^2(\mathbb{Z})$, então para qualquer $n \in \mathbb{Z}$

$$\sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_1+n\theta}) = \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_1}). \tag{3.1}$$

O potencial é pontualmente contínuo à direita em β, ou seja,

$$\lim_{h \to 0^+} V_{\theta,\beta+h}(n) = V_{\theta,\beta}(n).$$

De fato, basta tomar $h > 0$ suficientemente pequeno de modo que $n\theta + \beta, n\theta + \beta + h \in [1 - \theta, 1)$ ou $n\theta + \beta, n\theta + \beta + h \notin [1 - \theta, 1)$. Logo, para todo $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tem-se

$$||H_{\lambda,\theta,\beta+h}\psi - H_{\lambda,\theta,\beta}\psi||^2 = |\lambda|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |V_{\theta,\beta+h}(n) - V_{\theta,\beta}(n)|^2 |\psi(n)|^2 \stackrel{h \to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

ou seja, o Hamiltoniano $H_{\lambda,\theta,\beta}$ é fortemente contínuo à direita em β. Além disso, se A e A_m são operadores auto-adjuntos limitados sobre um espaço de Hilbert tais que $A = s - \lim A_m$, então $\sigma(A) \subset \sigma(A_m)$ para algum m grande (ver [36], p. 290). Sendo θ irracional, existe $(n_k) \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq \beta_1 + n_k\theta - \beta_2 \to 0$ quando $k \to \infty$. Assim, $\sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_2}) \subset \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_1+n_k\theta})$ para k grande e por (3.1)

$$\sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_2}) \subset \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta_1}).$$

■

Considere o conjunto B das energias em que a aplicação traço fica limitada:

$$B = \{E \in \mathbb{R} : |y_n| < C_\lambda, \ \forall n \geq 1\}$$

onde $y_n = tr(M(\lambda, E, s_n))$ e a constante $C_\lambda = 2 + \sqrt{8 + \lambda^2}$ é dada pela Proposição 2.15.

Nosso interesse agora é relacionar o conjunto B com o espectro $\sigma(H_{\lambda,\theta,\beta}) = \sum$. Temos o seguinte resultado:

Proposição 3.8. $\sum \subseteq B$.

Demonstração. Considere $\beta = 0$. Segue de um procedimento de aproximação forte que

$$\bigcup_{N \in \mathbb{N}} Int \left(\bigcap_{n \geq N} \{E \in \mathbb{R} : |tr(M(\lambda, E, s_n))| > 2\} \right) \subseteq \rho(H_{\lambda,\theta,0}). \tag{3.2}$$

De fato, de modo análogo a [42] temos que $\rho_n = \{E \in \mathbb{R} : |tr(\lambda, E, s_n)| > 2\} = \rho(H_n)$ onde $H_n = H_{n,\lambda,\theta,0}$ são operadores periódicos de período q_n, cujos valores do potencial sobre um período são dados por s_n, e $H_{\lambda,\theta,0} = s - \lim H_n$. Além disso, sabemos que se H e H_n são operadores auto-adjuntos limitados sobre um espaço de Hilbert tais que $H = s - \lim H_n$, então $\sigma(H) \subset \sigma(H_n)$ para algum n grande (ver [36], p. 290). Com isso, obtemos então (3.2).

Usando (3.2) e o fato de que B^c é um conjunto aberto [42] tal que

$$B^c = \cup_{n=N}^{\infty}(\cap_{k=n}^{\infty}\rho_k), \ N \geq 0,$$

obtemos (veja [42]) as inclusões:

$$B^c \subseteq \bigcup_{N\in\mathbb{N}} Int(\bigcap_{n\geq N} \rho(H_n)) \subseteq \rho(H_{\lambda,\theta,0}).$$

■

Como consequência desta proposição, segue um importante resultado sobre a limitação uniforme do traço das matrizes de transferência para energias no espectro.

Denotamos

$$x_n = \xi_{n-1} = tr(M(\lambda, E, s_{n-1})), \ y_n = \xi_n = tr(M(\lambda, E, s_n)) \text{ e } z_n = tr(M(\lambda, E, s_n s_{n-1})).$$

Corolário 3.9. *Para cada λ existe uma constante $\tilde{C}_\lambda \in (1, \infty)$ de modo que para todo irracional θ, todo $E \in \sum$ e todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$max\{|x_n|, |y_n|, |z_n|\} \leq \tilde{C}_\lambda, \tag{3.3}$$

Demonstração. Se $E \in \sum$ então pela Proposição 3.8 existe uma constante C_λ tal que

$$|x_n| = |tr(M(\lambda, E, s_{n-1}))| \leq C_\lambda \quad \text{e} \quad |y_n| = |tr(M(\lambda, E, s_n))| \leq C_\lambda.$$

Vamos mostrar que $|z_n| \leq \bar{C}_\lambda$ para alguma constante $\bar{C}_\lambda$. Usando o fato de que os traços satisfazem o invariante de Fricke-Vogt:

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 - x_n y_n z_n = \lambda^2 + 4$$

$$\Rightarrow z_n^2 - x_n y_n z_n + x_n^2 + y_n^2 - \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow z_n = \frac{x_n y_n \pm \sqrt{x_n^2 y_n^2 - 4x_n^2 - 4y_n^2 + 4\lambda^2 + 16}}{2}$$

$$\Rightarrow |z_n| \leq \frac{C_\lambda^2 + \sqrt{C_\lambda^4 + 4\lambda^2 + 16}}{2} = \bar{C}_\lambda.$$

Tomando $\tilde{C}_\lambda = max\{C_\lambda, \bar{C}_\lambda\}$ segue o resultado. ■

Seja

$$\mathcal{A} = \{E \in \mathbb{R} : \gamma(E) = 0\}.$$

A proposição seguinte mostra que para as energias em que a aplicação traço é limitada, o expoente de Lyapunov se anula.

Proposição 3.10. $B \subseteq \mathcal{A}$.

Demonstração. Suponha que exista $E \in B$ tal que $\gamma(E) > 0$. Considere λ, θ fixos e escolha $\beta \in [0, 1)$ para o qual $\gamma(E)$ existe. Pelo Teorema 2.9 existe uma solução $u \neq 0$ de $H_{\lambda,\theta,\beta}u = Eu$ satisfazendo

$$\|U(m)\| \leq Ce^{-m\gamma(E)} \tag{3.4}$$

onde

$$U(m) = \begin{pmatrix} u(m+1) \\ u(m) \end{pmatrix}.$$

Agora, as palavras $s_n s_n$ ocorrem infinitas vezes em $V_{\theta,\beta}$ (veja [2, 13]). Como $E \in B$ existe uma constante $C_\lambda \geq 1$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$|tr(M(\lambda, E, s_n))| \leq C_\lambda \tag{3.5}$$

em que $s_n = V_{\theta,0}(1) \cdots V_{\theta,0}(q_n)$. Utilizando a Proposição 2.3 de [14] temos que s_n ocorre em $V_{\theta,\beta}$ para todo β, como sendo $V_{\theta,\beta}(k) \cdots V_{\theta,\beta}(k + q_n)$ para $k \geq m_0$. Assim, podemos usar a limitação do traço da matriz de tansferência para todo β. Tomemos m_0 tal que, para todo $m \geq m_0$ e todo $k \in \mathbb{N}$, a solução u satisfaz

$$||U(m + k)|| \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma(E)k}||U(m)||. \tag{3.6}$$

Escolhemos n de modo que $e^{-\frac{1}{2}\gamma(E)|s_n|} < \frac{1}{2C_\lambda}$. Olhemos para uma ocorrência de $s_n s_n$ em $V_{\theta,\beta}$, isto é, $s_n s_n = V_{\theta,\beta}(l + 1) \cdots V_{\theta,\beta}(l + 2|s_n|)$, tal que $l \geq m_0$. Segue do Teorema de Cayley-Hamilton que

$$U(l + 2|s_n|) - tr(M(\lambda, E, s_n))U(l + |s_n|) + U(l) = 0. \tag{3.7}$$

De (3.5) e (3.7) obtemos

$$2C_\lambda \max\{||U(l+2|s_n|)||, ||U(l+|s_n|)||\} \geq ||U(l+2|s_n|)||+C_\lambda||U(l+|s_n|)|| \geq ||U(l)||. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em (3.6) com $l = m$ e $k = |s_n|$ ou $k = 2|s_n|$ obtém-se

$$||U(m + k)|| \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma(E)k}||U(m)|| \leq e^{-\frac{1}{2}\gamma(E)k}2C_\lambda||U(m + k)||.$$

Assim,

$$||U(m + k)||(1 - e^{-\frac{1}{2}\gamma(E)k}2C_\lambda) \leq 0$$

o que é um absurdo. ∎

`Observação:` A inclusão acima pode ser demonstrada seguindo [1] ou combinando *Lema* 5 de [1] juntamente com o *Teorema* 1 de [14].

Proposição 3.11. $\mathcal{A} \subseteq \sum$.

Demonstração. Seja $E \in \rho(H_{\lambda,\theta,\beta})$. Pelo argumento de Combes-Thomas [33] a função de Green $G_{\lambda,\theta,\beta}$ correspondente, solução da equação $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)G_{\lambda,\theta,\beta}(n,k) = \delta_{n,k}$, decai exponencialmente:

$$|G_{\lambda,\theta,\beta}(n,k)| < Ce^{-a|n-k|}, \quad \text{onde} \quad a = \ln(c \; dist(E, \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})) + 1).$$

Isto implica que a solução da equação $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)\phi = 0$ com condições iniciais $\phi(0) = 1$ e $\phi(-1) = 0$ cresce exponencialmente com taxa estritamente positiva, pois o Wronskiano é constante. Por outro lado, temos que para $\beta \; \ell - qtp$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \|M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(1) \cdots V_{\theta,\beta}(n))\| = \gamma(E)$$

e

$$|\phi(n)|^2 < |\phi(n)|^2 + |\phi(n+1)|^2 < \|M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(1) \cdots V_{\theta,\beta}(n))\|^2 .$$

Isto implica que $\gamma(E) > 0$. ∎

Das proposições acima obtemos a seguinte consequência:

Corolário 3.12. $\sum = \mathcal{A} = B$.

A seguir enunciamos um importante lema devido a Kotani, a partir do qual relacionamos o expoente de Lyapunov com o espectro absolutamente contínuo [29].

Lema 3.13. *(***Kotani***) Dado uma família ergódica de operadores de Schrödinger discretos unidimensionais com potenciais assumindo um número finito de valores, tem-se*

$$\ell(\{E \in \mathbb{R} : \gamma(E) = 0\}) = 0$$

onde $\gamma(\cdot)$ denota o expoente de Lyapunov e ℓ a medida de Lebesgue.

O Teorema 3.6 juntamente com o Lema 3.13 e o Corolário 3.12 permitem excluir o espectro absolutamente contínuo de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ para todos os parâmetros λ, θ, β. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

Teorema 3.14. *Para todos os parâmetros λ, θ, β, o operador $H_{\lambda,\theta,\beta}$ tem espectro absolutamente contínuo vazio, suportado sobre um conjunto com medida de Lebesgue zero.*

Demonstração. Combinando o Corolário 3.12 com o Lema 3.13 obtemos que

$$\ell(\sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})) = 0, \quad \beta\ \ell - qtp.$$

Para λ, θ fixados, a família $(H_{\lambda,\theta,\beta})_{\beta\in[0,1)}$ é ergódica e minimal, logo pelo Teorema 3.6 concluímos que

$$\ell(\sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})) = 0, \quad \forall\ \beta \in [0,1).$$

Como $\sigma_{ac}(H_{\lambda,\theta,\beta}) \subset \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$ implica que $\ell(\sigma_{ac}(H_{\lambda,\theta,\beta})) = 0$, ou seja, $\sigma_{ac}(H_{\lambda,\theta,\beta}) = \emptyset$ para todos os parâmetros λ, θ, β. ■

Assim, quando estudamos o tipo espectral de $(H_{\lambda,\theta,\beta})_{\beta\in[0,1)}$ precisamos apenas analisar o espectro pontual e o espectro singular contínuo de $(H_{\lambda,\theta,\beta})_{\beta\in[0,1)}$.

Capítulo

4

Comportamento das Soluções

Neste capítulo aplicaremos a teoria desenvolvida no Capítulo 2 para estudar propriedades espectrais uniformes de operadores de Schrödinger da forma (1.1), especialmente com potenciais Sturmianos. Mostraremos que os referidos operadores possuem espectro pontual vazio para todos os parâmetros λ, θ, β e utilizando o Teorema 3.14 demonstraremos o Teorema 1.1. Apresentaremos também a demonstração de que para os potenciais Sturmianos, com números de rotação de densidade limitada, existem cotas superiores e inferiores do tipo $C_1 L^{\gamma_1} \leq \|u\|_L \leq C_2 L^{\gamma_2}$, com $L > 0$ suficientemente grande, para todas as soluções u com condições iniciais normalizadas (no sentido que $|u(0)|^2 + |u(1)|^2 = 1$) da equação de autovalores (2.8). Com estas estimativas é possível caracterizarmos, tomando $\alpha = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}$, o espectro α-contínuo de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ (veja Capítulo 5).

4.1 Limitação inferior das soluções e ausência de espectro pontual para $H_{\lambda,\theta,\beta}$

Estabeleceremos cotas inferiores na "metade da reta", para todas as soluções de (2.8), referentes aos potenciais Sturmianos com números de rotação de densidade limitada. Mostraremos também que o espectro pontual de $H_{\lambda,\theta,\beta}$ é vazio para todos os parâmetros λ, θ, β. Como o espectro pontual é o fecho do conjunto de seus autovalores, isto é, o fecho do conjunto das energias $E \in \mathbb{R}$ tais que $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$ é solução da equação (2.8), tomaremos como base tal equação para nosso estudo neste capítulo. Além disso, apresentaremos a demonstração do Teorema 1.1, enunciado na introdução. Também será nosso objetivo nesta seção apresentar a demonstração do seguinte resultado [11]:

Proposição 4.1. Suponha que a sequência (q_n) associada ao número de rotação θ satisfaça $q_n \leq C_\theta^n$. Então, para todo λ existem $\gamma_1 > 0$, $C_1 < \infty$ tais que para todo $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$ e todo $\beta \in [0, 1)$, qualquer solução u de (2.8) com condição inicial normalizada satisfaz

$$\|u\|_L \geq C_1 L^{\gamma_1}$$

para L suficientemente grande.

Para demonstrarmos a Proposição 4.1 usaremos alguns lemas a seguir. Primeiramente, observemos que o comportamento de $\|u\|_L$ pode ser investigado através de

$$\|U\|_L = \left(\sum_{n=1}^{[L]} \|U(n)\|^2 + (L - [L]) \|U([L]+1)\|^2 \right)^{1/2}$$

em que $L \in \mathbb{R}$, $L \geq 1$, sendo

$$U(n) = \begin{pmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{pmatrix} \qquad e \qquad \|U(n)\|^2 = |u(n)|^2 + |u(n-1)|^2,$$

pois $\frac{1}{2} \|U\|_L^2 \leq \|u\|_L^2 \leq \|U\|_L^2$.

Utilizando a limitação uniforme dos traços, vamos obter estimativas sobre o crescimento de $\|U\|_L$ para energias no espectro e soluções com condições iniciais normalizadas da correspondente equação de autovalores.

O próximo resultado é baseado em uma versão do argumento de Gordon 2-blocos. Mais precisamente, temos [11]:

Lema 4.2. *Fixe λ, θ, β. Suponha que $V_{\theta,\beta}(j)...V_{\theta,\beta}(j+2k-1)$ é conjugado de $(s_{n-1})^2$, $(s_n)^2$ ou $(s_n s_{n-1})^2$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $l \leq k$ e todo $j \in \{1, ..., l\}$. Seja $E \in \sum$. Então toda solução u, com condição inicial normalizada, de $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)u = 0$ satisfaz*

$$\|U\|_{l+2k} \geq D_\lambda \|U\|_l$$

com $D_\lambda = \left(1 + \frac{1}{4\tilde{C}_\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, em que $\tilde{C}_\lambda$ é dado pelo Corolário 3.9.

Demonstração. Considere algum $j \in \{1, ..., l\}$. Por definição, temos

$$U(j+k) = M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(j)...V_{\theta,\beta}(j+k-1))U(j)$$

$$e \;\; U(j+2k) = M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(j)...V_{\theta,\beta}(j+2k-1))U(j).$$

Como, por hipótese, $V_{\theta,\beta}(j)...V_{\theta,\beta}(j+2k-1)$ é conjugado de $(s_n)^2$, $(s_{n-1})^2$ ou $(s_{n-1}s_n)^2$, temos

$$U(j+2k) = [M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(j)...V_{\theta,\beta}(j+k-1)]^2 U(j).$$

Daí, aplicando o teorema de Cayley-Hamilton, vem

$$U(j+2k) - tr[M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(j)...V_{\theta,\beta}(j+k-1))]U(j+k) + U(j) = 0. \qquad (4.1)$$

Além disso, pelo Corolário 3.9,

$$|tr[M(\lambda, E, V_{\theta,\beta}(j)...V_{\theta,\beta}(j+k-1))]| \leq \tilde{C}_\lambda \tag{4.2}$$

para $\tilde{C}_\lambda > 1$. De (4.1) e (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} 2\tilde{C}_\lambda \max\{\|U(j+2k)\|, \|U(j+k)\|\} &\geq \|U(j+2k)\| + \tilde{C}_\lambda \|U(j+k)\| \\ &\geq \|U(j)\| \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq l$. Isto implica que

$$\begin{aligned} \|U(j+k)\|^2 + \|U(j+2k)\|^2 &\geq (\max\{\|U(j+2k)\|, \|U(j+k)\|\})^2 \\ &\geq \frac{1}{4\tilde{C}_\lambda^2} \|U(j)\|^2 \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq l$. Assim,

$$\begin{aligned} \|U\|_{l+2k}^2 &= \sum_{m=1}^{l+2k} \|U(m)\|^2 \\ &= \sum_{m=1}^{l} \|U(m)\|^2 + \sum_{m=l+1}^{l+2k} \|U(m)\|^2 \\ &\geq \sum_{m=1}^{l} \|U(m)\|^2 + \sum_{m=1}^{l} (\|U(m+k)\|^2 + \|U(m+2k)\|^2) \\ &\geq \sum_{m=1}^{l} \|U(m)\|^2 + \frac{1}{4\tilde{C}_\lambda^2} \sum_{m=1}^{l} \|U(m)\|^2 \\ &= \left(1 + \frac{1}{4\tilde{C}_\lambda^2}\right) \|U\|_l^2 . \end{aligned}$$

■

Agora, usaremos os Lemas 2.7 e 4.2 para estimar o crescimento de $\|U\|_L$, com energias no espectro e soluções da equação de autovalores (veja [11]).

Lema 4.3. *Seja λ, θ, β arbitrários, $E \in \sum$ e u uma solução, com condição inicial normalizada, da equação de autovalores (2.8). Então para cada $n \geq 8$, vale a desigualdade*

$$\|U\|_{q_n} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-8}}$$

onde $D_\lambda = \left(1 + \frac{1}{4\tilde{C}_\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Demonstração. Usaremos o Lema 2.7 e exibiremos quadrados nos potenciais, no sentido que eles satisfazem as hipóteses do Lema 4.2. Para demonstrarmos o lema, mostraremos que

$$\|U\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-4}}$$

para todos λ, θ, β, todo $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$, todas soluções u da equação de autovalores e todo $n \geq 4$, pois $q_{n+4} \geq 2(q_{n+1} + q_n) + q_{n-1}$.

Fixe λ, θ, β e $n \geq 4$. Considere a n-partição de $V_{\theta,\beta}$. Como queremos exibir quadrados para a origem, consideremos os seguintes casos:

Caso 1. $z_0 = s_{n-1}$.

Pelo Lema 2.7 $z_1 = s_n$. Como s_{n-1} é prefixo de s_n e $z_2 \in \{s_n, s_{n-1}\}$ então $z_2 = s_{n-1}a$, sendo a uma palavra apropriada. Por (2.6) e pela Proposição 2.2 temos

$$\begin{aligned} z_0 z_1 z_2 &= s_{n-1} s_n s_{n-1} a \\ &= s_{n-1} s_{n-1}^{a_n} s_{n-2} s_{n-1} a \\ &= s_{n-1} s_{n-1}^{a_n} s_{n-1} s_{n-3}^{a_{n-2}-1} s_{n-4} s_{n-3} a \\ &= s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-1}^{a_n-1} s_{n-3}^{a_{n-2}-1} s_{n-4} s_{n-3} a. \end{aligned}$$

Se $a_n \geq 2$ então $z_0 z_1 z_2 = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-1} s_{n-1}^{a_n-2} b = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-4} d$, com palavras apropriadas b, d. Se $a_n = 1$ então

$$z_0 z_1 z_2 = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-3}^{a_{n-2}-1} s_{n-4} s_{n-3} a$$

e usando (2.6) obtemos (se $a_{n-2} = 1$ ou $a_{n-2} \geq 2$) que $z_0 z_1 z_2 = s_{n-1} s_{n-1}^2 s_{n-4} v$ com uma palavra apropriada v. Portanto, aplicando o Lema 4.2 para $l = q_{n-4}$ e $k = q_{n-1}$ obtemos

$$\|U\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq \|U\|_{q_{n-4}+2q_{n-1}} D_\lambda \|U\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 2. $z_0 = s_n$ e $z_1 = s_n$.

Se $z_2 = s_{n-1}$ então pelo Lema 2.7, $z_3 = s_n$. Aplicando a Proposição 2.2 obtemos $z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-2}^{a_{n-1}-1} s_{n-3} s_{n-2}$, e de (2.6) vem que

$$z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-3} w,$$

com w palavra apropriada. Se $z_2 = s_n$ então como s_{n-1} é um prefixo de s_n e $z_3 \in \{s_n, s_{n-1}\}$ temos que $z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-1} r$ com r palavra apropriada. Daí, por (2.6), $z_0 z_1 z_2 z_3 = s_n s_n^2 s_{n-3} s$, com uma palavra s. Portanto, aplicando o Lema 4.2 com $l = q_{n-3}$ e $k = q_n$ obtemos

$$\|U\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq \|U\|_{q_{n-3}+2q_n} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-3}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 3. $z_0 = s_n$ e $z_1 = s_{n-1}$.

Sejam $z_j^{'}$ os blocos da $(n+1)$-partição de $V_{\theta,\beta}$. Pela unicidade da n-partição temos $z_0^{'} = s_{n+1}$. Consideremos os seguintes subcasos:

Caso 3.1. $z_{n+1}^{'}$.

Analogamente ao caso 2, isso implica que $s_0^{'} s_1^{'}$ é seguido por $s_{n+1} s_{n-2}$ e daí aplicando o

Lema 4.2 com $l = q_{n-2}$ e $k = q_{n+1}$ obtemos

$$\|U\|_{2(q_{n+1}+q_n)+q_{n-1}} \geq \|U\|_{q_{n-2}+2q_{n+1}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-2}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 3.2. $z_1^{'} = s_n$.
Segue do Lema 2.7 que $z_2^{'} = s_{n+1}$. Novamente consideremos dois subcasos.
Caso 3.2.1. $z_3^{'} = s_n$.
Este caso ocorre somente se $a_{n+2} = 1$. Pelo Lema 2.7, $z_4^{'} = s_{n+1}$. Como s_n é um prefixo de s_{n+1} e $z_5^{'} \in \{s_n, s_{n+1}\}$, por (2.6) temos

$$z_0^{'}z_1^{'}z_2^{'}z_3^{'}z_4^{'}z_5^{'} = s_{n+1}(s_ns_{n+1})^2s_nw^{'} = s_{n+1}(s_ns_{n+1})^2s_{n-1}s_{n-1}^{a_n-1}s_{n-2}w^{'}$$

com uma palavra apropriada $w^{'}$. Aplicando o Lema 4.2 com $l = q_{n-1}$ e $k = q_n + q_{n+1}$ obtemos

$$\|U\|_{q_{n-1}+2(q_n+q_{n+1})} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-1}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-4}}.$$

Caso 3.2.2. $z_3^{'} = s_{n+1}$.
Considere as consequências deste caso particular para os blocos na n-partição. Temos

$$z_0z_1\cdots z_{2a_{n+1}+4} = s_ns_{n-1}s_ns_n^{a_{n+1}}s_{n-1}s_n^{a_{n+1}}s_{n-1}.$$

Como s_n é um prefixo de s_{n+1}, este bloco deve ser seguido por s_n. Portanto, temos a sequência de blocos

$$s_ns_{n-1}s_ns_n^{a_{n+1}}s_{n-1}s_n^{a_{n+1}}s_{n-1}s_n. \tag{4.3}$$

Usando a Proposição 2.2 podemos reescrever (4.3) como

$$s_ns_{n-1}s_ns_n^{a_{n+1}}s_{n-1}s_n^{a_{n+1}}s_ns_{n-2}^{a_{n-1}-1}s_{n-3}s_{n-2},$$

o qual pode ser interpretado como

$$s_ns_{n-1}s_ns_n^{a_{n+1}}s_{n-1}s_ns_n^{a_{n+1}}s_{n-2}^{a_{n-1}-1}s_{n-3}s_{n-2}.$$

Observe que $s_{n-1}s_ns_n^{a_{n+1}}$ é conjugado de $s_ns_{n+1} = s_ns_n^{a_{n+1}}s_{n-1}$. Assim, aplicando o Lema 4.2 com $l = q_{n-3}$ e $k = q_n + q_{n+1}$ obtemos

$$\|U\|_{2(q_{n+1}q_n)+q_{n-1}} \geq \|U\|_{q_{n-3}+2(q_n+q_{n-1})} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-3}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{n-4}}.$$

Como os casos 1, 2 e 3 cobrem todas as possíveis escolhas de z_0, z_1, o lema está demonstrado. ∎

Em particular, o Lema 4.3 permite excluir os autovalores do espectro de $H_{\lambda,\theta,\beta}$, para todos os parâmetros λ, θ, β. Mais precisamente, temos

Corolário 4.4. *Para todos os parâmetros λ, θ, β, o operador $H_{\lambda,\theta,\beta}$ tem espectro pontual vazio.*

Demonstração. Sejam λ, θ, β arbitrários, $E \in \sum$ e u uma solução, com condição inicial normalizada, de $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)u = 0$. Então pelo Lema 4.3 temos

$$\|U\|_{q_{8n}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{8n-8}} \geq \ldots \geq D_\lambda^n \|U\|_{q_0} = D_\lambda^n \|U\|_1 = D_\lambda^n, \ \forall n \geq 1.$$

Isto implica que

$$\|U\|_{\ell^2}^2 \geq \|U\|_{q_{8n}}^2 \geq D_\lambda^{2n}, \ \forall n \geq 1 \quad com \quad D_\lambda \geq 1.$$

Fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\|U\|_{\ell^2}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|U(m)\|^2 = \infty.$$

Assim, para todos os parâmetros λ, θ, β, não existe solução u em ℓ^2. Portanto, para todos os parâmetros λ, θ, β, o operador $H_{\lambda,\theta,\beta}$ tem espectro pontual vazio. ∎

Demonstração. (Teorema 1.1). Segue diretamente do Teorema 3.14 e Corolário 4.4∎

Agora vamos estimar o crescimento da sequência (q_n) quando θ é de densidade limitada, mostrando que esses números satisfazem a hipótese da Proposição 4.1.

Lema 4.5. *Suponha que θ seja um número de densidade limitada. Então existe uma constante C_θ de forma que $q_n \leq C_\theta^n$.*

Demonstração. Comparando a sequência (q_n) com a sequência (r_n) gerada pela recursão

$$r_{n+1} = 2a_{n+1} r_n$$

com condição inicial $r_1 = 2a_1$, temos que $q_n \leq r_n$ e

$$r_n = \prod_{i=1}^{n} 2a_i. \tag{4.4}$$

Por hipótese, θ é um número de densidade limitada, logo existe uma constante B_θ tal que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 2a_i \leq B_\theta$. Daí, por (4.4) obtemos

$$\ln(q_n)^{1/n} \leq \ln(r_n)^{1/n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(2a_i) \leq B_\theta,$$

o que implica que $q_n \leq (e^{B_\theta})^n$. Portanto, existe uma constante $C_\theta = e^{B_\theta}$ tal que

$$q_n \leq C_\theta^n.$$

∎

Embora (q_n) cresça exponencialmente com n, o próximo resultado mostra que a subsequência $\|U\|_{q_{8n}}$ cresce pelo menos polinomialmente em n.

Lema 4.6. *Suponha que a sequência (q_n) associada a θ satisfaça $q_n \leq C_\theta^n$. Então, para todo λ, existe $\gamma = \gamma(\lambda, \theta) > 0$ tal que*

$$\|U\|_{q_{8n}} \geq q_{8n}^{\gamma}$$

para qualquer solução u de $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)u = 0$, com condição inicial normalizada, correspondente a $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$.

Demonstração. Pelo Lema 4.3 temos

$$\|U\|_{q_{8n}} \geq D_\lambda \|U\|_{q_{8n-8}} \geq ... \geq D_\lambda \|U\|_{q_0} = D_\lambda^n, \ \forall n \geq 1,$$

com $D_\lambda > 1$. Escolha $\gamma > 0$ de modo que $C_\theta^{8\gamma} \leq D_\lambda$. Assim,

$$\frac{\|U\|_{q_{8n}}}{q_{8n}^{\gamma}} \overset{hip.}{\geq} \frac{D_\lambda^n}{C_\theta^{8n\gamma}} = \left(\frac{D_\lambda}{C_\theta^{8\gamma}}\right)^n \geq 1,$$

o que implica que $\|U\|_{q_{8n}} \geq q_{8n}^{\gamma}$. ■

Vamos estimar a quantidade $\|U\|_L$ para L suficientemente grande, fazendo a interpolação para os $L's$ não-inteiros.

Demonstração. (Proposição 4.1). Devido ao Lema 4.6, para todo λ existe $\gamma = \gamma(\lambda, \theta) > 0$ tal que $\|U\|_{q_{8n}} \geq q_{8_n}^{\gamma}$, para qualquer solução u de $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)u = 0$, com condição inicial normalizada, correspondente a $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$. Por hipótese, existe $1 < C_{\theta,1} < \infty$ tal que $q_{8_n} \leq C_{\theta,1}^n$ e sabemos que existe $1 < C_{\theta,2} < \infty$ tal que $q_{8_n} \geq C_{\theta,2}^n$. Escolha $\epsilon \in \left(\frac{\ln C_{\theta,1} - \ln C_{\theta,2}}{\ln C_{\theta,1}}\gamma, \gamma\right)$. Seja $\gamma_1 \equiv \gamma - \epsilon$. Temos

$$\gamma - \frac{\ln C_{\theta,1} - \ln C_{\theta,2}}{\ln C_{\theta,1}}\gamma > \gamma - \epsilon > 0.$$

Daí,

$$\gamma \ln C_{\theta,1} - \gamma \ln C_{\theta,1} + \gamma \ln C_{\theta,2} > \gamma_1 \ln C_{\theta,1} \ \text{e} \ \gamma_1 > 0,$$

o que implica

$$\ln C_{\theta,1}^{\gamma_1} - \ln C_{\theta,2}^{\gamma} < 0.$$

Logo,

$$\frac{C_{\theta,1}^{\gamma_1}}{C_{\theta,2}^{\gamma}} < 1.$$

Escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{C_{\theta,1}^{\gamma_1}}{C_{\theta,2}^{\gamma}}\right)^n \leq \frac{1}{C_{\theta,1}^{\gamma_1}}$$

e tome L suficientemente grande de modo que $q_{8n} \leq L < q_{8(n+1)}$. Assim,

$$\|U\|_L \geq \|U\|_{q_{8n}} \geq q_{8n}^{\gamma} \geq C_{\theta,2}^{n\gamma} \geq C_{\theta,1}^{(n+1)\gamma_1} \geq q_{8(n+1)}^{\gamma_1} \geq L^{\gamma_1}.$$

Portanto existe $C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tal que

$$\|u\|_L \geq C_1 \|U\|_L \geq C_1 L^{\gamma_1}$$

para qualquer solução u, com condição inicial normalizada, de $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)u = 0$, com L suficientemente grande. ■

4.2 Limitação superior das soluções

Nesta seção apresentaremos uma limitação superior, polinomial em L, para as soluções u com condições iniciais normalizadas. Para mais detalhes veja referências [22, 23]. Mais precisamente, nosso objetivo é mostrar o seguinte resultado:

Proposição 4.7. Seja θ um número de densidade limitada. Então para todo $\lambda \neq 0$, existem $\gamma_2 > 0$, $C_2 < \infty$, tais que para cada $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$ e cada $\beta \in [0, 1)$, toda solução u de (2.8), com condição inicial normalizada, satisfaz

$$\|u\|_L \leq C_2 L^{\gamma_2} \quad \forall L \geq 1.$$

Para demonstrarmos a Proposição 4.7 seguiremos o seguinte caminho: estimaremos a norma das matrizes de transferência $M(m) = M(\lambda, E, V_{\theta,0}(1) \cdots V_{\theta,0}(m))$, as quais podem ser escritas como um produto de matrizes $M_i^{\epsilon_i}$, onde $m = \sum_{i=0}^{N} \epsilon_i q_i$, com ϵ_i inteiro. A técnica usada estabelece uma relação entre as triplas $(M_n, M_{n+1}, Z_{n+1} = M_n M_{n+1})$ e $(M_{n-1}, M_n, Z_n = M_{n-1}, M_n)$ escrita na forma matricial (Lema 4.8 e Lema 4.9):

$$\begin{pmatrix} I \\ M_{n+1} \\ M_n \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} I \\ M_n \\ M_{n-1} \\ Z_n \end{pmatrix},$$

assim existem matrizes $D(n, k)$ satisfazendo

$$\begin{pmatrix} I \\ M_{n+k+1} \\ M_{n+k} \\ Z_{n+k+1} \end{pmatrix} = D(n, k) \begin{pmatrix} I \\ M_{n+1} \\ M_n \\ Z_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Como os coeficientes dessas matrizes são funções polinomiais de $y_i = trM_i$ e $z_i = trZ_i = tr(M_{i-1}M_i)$, usando a Proposição 3.9 obtemos a limitação uniforme dos traços.

Avaliando os coeficientes de $D(n,k)$ (Lema 4.11) implica (Corolário 4.12) a existência de uma constante J tal que

$$||M_n|| \leq J^{\sum_{i=1}^{n} a_i},$$
$$||Z_n|| \leq J^{\sum_{i=1}^{n} a_i}.$$

Por indução, obtemos

$$||M_0^{\epsilon_0} \cdots M_N^{\epsilon_N}|| \leq K^{\sum_{i=0}^{N} \epsilon_i} L^{\sum_{i=0}^{N} a_i},$$

e, consequentemente, $||M(m)|| \leq Cm^{\gamma}$, sendo θ um número de densidade limitada.

Vamos começar relacionando as triplas (M_n, M_{n+1}, Z_{n+1}) e (M_{n-1}, M_n, Z_n) através de $B_n \in SL(4,\mathbb{R})$.

Lema 4.8. *Para cada inteiro n, a matriz $B_n \in SL(4,\mathbb{R})$ definida por*

$$\begin{pmatrix} I \\ M_{n+1} \\ M_n \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} I \\ M_n \\ M_{n-1} \\ Z_n \end{pmatrix}$$

é

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S_{a_{n+1}-2} & S_{a_{n+1}-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_{n-1} - S_{a_{n+1}} - z_n S_{a_{n+1}-2} & y_{n+1} & -S_{a_{n+1}-3} & S_{a_{n+1}-2} \end{pmatrix},$$

onde $S_k(y_n)$ são os polinômios de Chebyshev (ver Lema 2.12). Note que $S_{-k}(y_n) = -S_{k-2}(y_n)$. Para simplificarmos a notação omitiremos a dependência de y_n dos S_k.

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_{n-1}M_n^{a_{n+1}} = M_{n-1}S_{a_{n+1}-1}M_n - S_{a_{n+1}-2}M_{n-1} \\ &= S_{a_{n+1}-1}Z_n - S_{a_{n+1}-2}M_{n-1}\ , \\ Z_{n+1} &= M_nM_{n+1} = M_n(M_{n+1}^{-1})^{-1} = M_n(y_{n+1}1 - M_{n+1}^{-1}) \\ &= y_{n+1}M_n - M_n(M_{n-1}M_n^{a_{n+1}})^{-1} \\ &= y_{n+1}M_n - (M_n^{-1})^{a_{n+1}-1}M_{n-1}^{-1} \\ &= y_{n+1}M_n - S_{a_{n+1}-2}Z_n^{-1} + S_{a_{n+1}-3}(y_{n-1}1 - M_{n-1}) \\ &= (y_{n-1}S_{a_{n+1}-3} - z_nS_{a_{n+1}-2})1 + y_{n+1}M_n - S_{a_{n+1}-3}M_{n-1} + S_{a_{n+1}-2}Z_n. \end{aligned}$$

Além disso, $B_n \in SL(4,\mathbb{R})$ pois $detB_n = S_{a_{n+1}-2}^2 - S_{a_{n+1}-1}S_{a_{n+1}-3} = 1.$ ∎

Definimos $D(n,k)$, para cada par de inteiros k e n, por

$$\begin{aligned} D(n,0) &= I \quad se \quad n \geq 0 \ e \\ D(n,k+1) &= B_{n+k+1} D(n,k) \ se \ k \geq 0, n \geq 0, \end{aligned}$$

com $D(n,k)$ matriz 4×4. Assim, o Lema 4.8 implica

$$\begin{pmatrix} I \\ M_{n+k+1} \\ M_{n+k} \\ Z_{n+k} \end{pmatrix} = D(n,k) \begin{pmatrix} I \\ M_{n+1} \\ M_n \\ Z_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Seja $D(n,k)_{i,j}$ os coeficientes da i-ésima linha e j-ésima coluna de $D(n,k)$.

Lema 4.9. *Para cada par de inteiros n e k, tem-se*

$$\begin{aligned} D(n,k+1)_{1j} &= \delta_{1j}, && (4.5) \\ D(n,k+1)_{2j} &= -S_{a_{n+k+2}-2} D(n,k)_{3j} + S_{a_{n+k+2}-1} D(n,k)_{4j}, && (4.6) \\ D(n,k+1)_{3j} &= D(n,k)_{2j}, && (4.7) \\ D(n,k+1)_{4j} &= (y_{n+k} S_{a_{n+k+2}-3} - z_{n+k+1} S_{a_{n+k+2}-2}) D(n,k)_{1j} \\ &+ y_{n+k+2} D(n,k)_{2j} - S_{a_{n+k+2}-3} D(n,k)_{3j} \\ &+ S_{a_{n+k+2}-2} D(n,k)_{4j}. && (4.8) \end{aligned}$$

Demonstração. Segue diretamente de $D(n,k+1) = B_{n+k+1} D(n,k)$. ■

O próximo resultado nos dá uma fórmula para os coeficientes da matriz $D(n,k)$.

Corolário 4.10. *Se $k \geq 1$, $n \geq 0$, $j \in \{1,2,3,4\}$, então*

$$\begin{aligned} D(n,k+1)_{2j} &= -S_{a_{n+k+2}-2} D(n,k-1)_{2j} + S_{a_{n+k+2}-1} D(n,k)_{4j}, && (4.9) \\ D(n,k+1)_{4j} &= (y_{n+k} S_{a_{n+k+2}-3} - z_{n+k+1} S_{a_{n+k+2}-2}) \delta_{1j} \\ &+ y_{n+k+2} D(n,k)_{2j} - S_{a_{n+k+2}-3} D(n,k)_{3j} \\ &+ S_{a_{n+k+2}-2} D(n,k)_{4j}. && (4.10) \end{aligned}$$

Utilizando o Corolário 4.10 limitaremos superiormente o módulo dos coeficientes de $D(n,k)$ através de:

Lema 4.11. *Se $E \in \sigma(H)$, então*

$$|D(n,k)_{ij}| \leq K^{\sum_{p=n+2}^{n+k+1} a_p}, \quad i \in \{1,2\}, \quad j \in \{1,2,3,4\},$$

com $K = 4\max(2, \sup|y_n|, \sup|z_n|)$.

Demonstração. Pela Proposição 3.9, $\sup\{|y_n|, |z_n|\} < \infty$. Seja $c = \max\{2, \sup|y_n|, \sup|z_n|\}$. Pelo Lema 2.12 temos que $|S_a(y)| \leq |y|^{a+1}, a > 0, y \in \mathbb{R}$. Mostremos por indução sobre k. De fato, para $k = 1$:

$$\begin{aligned}
D(n,1) &= B_{n+1}, \\
|D(n,1)_{2j}| &\leq \left|S_{a_{n+2}-2}\right| + \left|S_{a_{n+2}-1}\right| \leq c^{a_{n+2}-1} + c^{a_{n+2}} \leq K^{a_{n+2}}, \\
|D(n,1)_{4j}| &\leq \left|y_n S_{a_{n+2}-3}\right| + \left|z_{n+1} S_{a_{n+2}-2}\right| + |y_{n+2}| + \left|S_{a_{n+2}-3}\right| + \left|S_{a_{n+2}-2}\right| \\
&\leq K^{a_{n+2}} \left((c^{a_{n+2}-1} + c^{a_{n+2}} + c + c^{a_{n+2}-2} + c^{a_{n+2}-1}) \frac{1}{K^{a_{n+2}}} \right) \\
&\leq K^{a_{n+2}} \left(\frac{c^{a_{n+2}}}{K^{a_{n+2}}} \right) \left(\frac{1}{c} + 1 + \frac{1}{c^{a_{n+2}-1}} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{c} \right) \leq K^{a_{n+2}},
\end{aligned}$$

pois $K \geq 4c$ e $c \geq 2$. Assumimos o lema para $l \in \{1, ..., k\}$. Usando o Corolário 4.9 obtemos que

$$\begin{aligned}
|D(n,k+1)_{2j}| &\leq c^{a_{n+k+2}-1} |D(n,k-1)_{2j}| + c^{a_{n+k+2}} |D(n,k)_{4j}| \\
&\leq K^{\sum_{l=n+2}^{n+k+1} a_l} \left(\frac{c^{a_{n+k+2}-1}}{K^{a_{n+k+1}}} + c^{a_{n+k+2}} \right) \\
&\leq K^{\sum_{l=n+2}^{n+k+1} a_l} K^{a_{n+k+2}}.
\end{aligned}$$

Analogamente obtemos para $|D(n,k+1)_{4j}|$. ■

Obteremos a existência de uma constante J que limita as normas M_n e Z_n.

Corolário 4.12. *Se $E \in \sigma(H)$, então*

$$\|M_n\| \leq J^{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \tag{4.11}$$

$$\|Z_n\| \leq J^{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \tag{4.12}$$

com $J = \max(K, 4||M_1||, 4||M_0||, 4||Z_1||, 4)$.

Demonstração. De

$$\begin{pmatrix} I \\ M_{n+1} \\ M_n \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = D(0,n) \begin{pmatrix} I \\ M_1 \\ M_0 \\ Z_1 \end{pmatrix},$$

obtemos

$$
\begin{aligned}
\|M_{n+1}\| &= D(0,n)_{21}I + D(0,n)_{22}M_1 + D(0,n)_{23}M_0 + D(0,n)_{24}Z_1 \\
&\leq \sum_{j=1}^{4} |D(0,n)_{2j}| \max\left(\|M_1\|, \|M_0\|, I, \|Z_1\|\right) \\
&\leq 4K^{\sum_{i=2}^{n+1} a_i} \max\left(\|M_1\|, \|M_0\|, I, \|Z_1\|\right) \\
&\leq J^{\sum_{i=2}^{n+1} a_i} J = J^{\sum_{i=2}^{n+1} a_i + 1} \leq J^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i},
\end{aligned}
$$

com $J = \max(K, 4||M_1||, 4||M_0||, 4||Z_1||)$. Segue analogamente (4.12). ■

Agora limitaremos as normas dos produtos de matrizes $M_n M_{n+k}$ e $M_n Z_{n+k}$.

Corolário 4.13. *Se $E \in \sigma(H)$, então para $n \geq 0$ e $k \geq 1$ tem-se*

$$
\|M_n M_{n+k}\| \leq L^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} K^{\sum_{i=n+2}^{n+k} a_i},
$$
$$
\|M_n Z_{n+k}\| \leq L^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} K^{\sum_{i=n+2}^{n+k} a_i},
$$

com $L = J(4 + 2c)$.

Demonstração. Temos que

$$
\begin{aligned}
M_n M_{n+k} &= M_n[D(n,k-1)_{21}I + D(n,k-1)_{22}M_{n+1} + D(n,k-1)_{23}M_n \\
&\quad + D(n,k-1)_{24}Z_{n+1}] \\
&= D(n,k-1)_{21}M_n + D(n,k-1)_{22}Z_{n+1} + D(n,k-1)_{23}(y_n M_n - 1) \\
&\quad + D(n,k-1)_{24}(y_n Z_{n+1} - M_{n+1}) \\
&= -D(n,k-1)_{23}1 - D(n,k-1)_{24}M_{n+1} + [D(n,k-1)_{21} \\
&\quad + y_n D(n,k-1)_{23}]M_n + [D(n,k-1)_{22} + y_n D(n,k-1)_{24}]Z_{n+1}. \quad (4.13)
\end{aligned}
$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\|M_n M_{n+k}\| &\leq K^{\sum_{i=n+2}^{n+k} a_i} \left(1 + J^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} + (1+c)J^{\sum_{i=1}^{n} a_i} + (1+c)J^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}\right) \\
&\leq K^{\sum_{i=n+2}^{n+k} a_i} L^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} \\
&\quad + \left(\frac{J}{L}\right)^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} \left(J^{-\sum_{i=1}^{n+1} a_i} + 1 + (1+c)J^{a_{n+1}}(1+c)\right) \\
&\leq K^{\sum_{i=n+2}^{n+k} a_i} L^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} + \left(\frac{J}{L}\right)^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} (4+2c) \\
&\leq K^{\sum_{i=n+2}^{n+k} a_i} L^{\sum_{i=1}^{n+1} a_i}.
\end{aligned}
$$

O mesmo argumento segue para estimar $||M_n Z_{n+k}||$. ∎

Por indução obteremos uma limitação superior para o produto de matrizes $M_{n_1} \cdots M_{n_k}$.

Lema 4.14. *Sejam $E \in \sigma(H)$ e $k \geq 2$. Para qualquer conjunto finito de inteiros crescentes n_i, tem-se*

$$\|M_{n_1} \cdots M_{n_k}\| \leq L^{\sum_{i=1}^{n_1+1} a_i} K^{\sum_{i=n_1+2}^{n_k} a_i},$$
$$\left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k-1}} Z_{n_k}\right\| \leq L^{\sum_{i=1}^{n_1+1} a_i} K^{\sum_{i=n_1+2}^{n_k} a_i}$$

Demonstração. A demonstração será feita por indução, e a segunda desigualdade é demonstrada de modo análogo a primeira. Para $k = 2$, pelo Corolário 4.13 temos

$$\begin{aligned} \|M_{n_1} M_{n_2}\| &= \left\|M_{n_1} M_{n_1+(n_2-n_1)}\right\| \leq L^{\sum_{i=1}^{n_1+1} a_i} K^{\sum_{i=n_1+2}^{n_2} a_i}, \\ \|M_{n_1} Z_{n_2}\| &\leq L^{\sum_{i=1}^{n_1+1} a_i} K^{\sum_{i=n_1+2}^{n_k} a_i}. \end{aligned}$$

Assumimos que o lema vale para $l \in \{1, ..., k\}$. Vamos estimar $\left\|M_{n_1} \cdots M_{n_k} M_{n_{k+1}}\right\|$. Usando (4.13), $M_{n_k} M_{n_{k+1}}$ é linearizado em $(I, M_{n_k}, M_{n_{k+1}}, Z_{n_{k+1}})$ e obtemos

$$\begin{aligned} \left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k+1}}\right\| &\leq D_{23} \left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k-1}}\right\| + D_{24} \left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k-1}} M_{n_{k+1}}\right\| \\ &+ (D_{21} + y_{n_k} D_{23}) \|M_{n_1} \cdots M_{n_k}\| \\ &+ (D_{22} + y_{n_k} D_{24}) \left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k-1}} Z_{n_k}\right\|, \end{aligned}$$

onde $D_{ij} = D(n_k, n_{k+1} - n_k - 1)_{ij}$;

$$\begin{aligned} \left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k+1}}\right\| &\leq 4(1+c) K^{\sum_{i=n_k+2}^{n_k+1} a_i} \max\{\left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k-1}}\right\|, \\ &\quad \left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k-1}} M_{n_{k+1}}\right\|, \|M_{n_1} \cdots M_{n_k}\|, \left\|M_{n_1} \cdots M_{n_{k-1}} Z_{n_k}\right\|\} \\ &\leq 4(1+c) K^{\sum_{i=n_k+2}^{n_{k+1}} a_i} K^{\sum_{i=n_k+2}^{n_k} a_i} L^{\sum_{i=1}^{n_1+1} a_i} \\ &\leq K^{\sum_{i=n_k+2}^{n_{k+1}} a_i} K^{\sum_{i=n_k+2}^{n_k} a_i} L^{\sum_{i=1}^{n_1+1} a_i}. \end{aligned}$$

∎

Por indução obteremos uma limitação superior para a norma do produto de matrizes $M_0^{\epsilon_0} \cdots M_N^{\epsilon_N}$.

Lema 4.15. *Sejam $E \in \sigma(H)$ e $N \geq 2$. Para qualquer conjunto finito de inteiros ϵ_i, tem-se*

$$\|M_0^{\epsilon_0} \cdots M_N^{\epsilon_N}\| \leq K^{\sum_{i=0}^{N} \epsilon_i} L^{\sum_{i=1}^{N+1} a_i}.$$

Demonstração. Reescreva $M_0^{\epsilon_0}\cdots M_N^{\epsilon_N} = M_{n_1}^{\epsilon_{n_1}}\cdots M_{n_k}^{\epsilon_{n_k}}$, onde todos os ϵ_{n_i} são diferentes de zero. Faremos a demonstração por indução em k. De fato, para $k=1$:

$$\begin{aligned}
\|M_{n_1}\| &\leq L^{\sum\limits_{i=1}^{n_1+1} a_i}, \\
\left\|M_{n_1}^{\epsilon_1}\right\| &\leq c^{\epsilon_{n_1}}\|M_{n_1}\| + c^{\epsilon_{n_1}-1} \\
&\leq c^{\epsilon_1} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_1+1} a_i} + c^{\epsilon_{n_1}-1} \\
&\leq K^{\epsilon_{n_1}} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_1+1} a_i}.
\end{aligned}$$

Assumimos o lema para $l \in \{1,\cdots,n\}$ e mostremos recursivamente em p que

$$\left\|M_{n_1}^{\epsilon_{n_1}}\cdots M_{n_p}^{\epsilon_{n_p}} M_{n_{p+1}}\cdots M_{n_{k+1}}\right\| \leq K^{\sum\limits_{j=1}^{p}\epsilon_{n_j}} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_{k+1}+1} a_i}. \tag{4.14}$$

Note que $\sum_{j=1}^{p}\epsilon_{n_j} = \sum_{j=1}^{n_p}\epsilon_j$. Para $p=1$,

$$\begin{aligned}
\left\|M_{n_1}^{\epsilon_1} M_{n_2}\cdots M_{n_{k+1}}\right\| &\leq c^{\epsilon_{n_1}}\left\|M_{n_1}\cdots M_{n_{k+1}}\right\| + c^{\epsilon_{n_1}-1}\left\|M_{n_2}\cdots M_{n_{k+1}}\right\| \\
&\leq c^{\epsilon_{n_1}} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_1+1} a_i} K^{\sum\limits_{i=n_1+2}^{n_k+1} a_i} + c^{\epsilon_{n_1}-1} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_2+2} a_i} K^{\sum\limits_{i=n_2+2}^{n_k+1} a_i} \\
&\leq K^{\epsilon_{n_1}} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_k+1} a_i} K^{\sum\limits_{i=n_1+2}^{n_k+1} a_i}.
\end{aligned}$$

Assumindo (4.14), mostremos agora para $p = k+1$:

$$\begin{aligned}
\left\|M_{n_1}^{\epsilon_1}\cdots M_{n_p}^{\epsilon_{n_p}} M_{n_{p+1}}^{\epsilon_{n_{p+1}}} M_{n_{p+2}}\cdots M_{n_{k+1}}\right\| &\leq c^{\epsilon_{n_{p+1}}}\left\|M_{n_1}^{\epsilon_{n_1}}\cdots M_{n_p}^{\epsilon_{n_p}} M_{n_{p+1}}\cdots M_{n_{k+1}}\right\| \\
&+ c^{\epsilon_{n_{p+1}}-1}\left\|M_{n_1}^{\epsilon_{n_1}}\cdots M_{n_p}^{\epsilon_{n_p}} M_{n_{p+1}}\cdots M_{n_{k+1}}\right\| \\
&\leq c^{\epsilon_{n_{p+1}}} K^{\sum\limits_{j=1}^{p}\epsilon_{n_j}} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_{k+1}+1} a_i} \\
&+ c^{\epsilon_{n_{p+1}}-1} K^{\sum\limits_{i=1}^{p}\epsilon_{n_j}} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_{k+1}+1} a_i} \\
&\leq K^{\epsilon_{n_{p+1}}} K^{\sum\limits_{i=1}^{p}\epsilon_{n_j}} L^{\sum\limits_{i=1}^{n_{k+1}+1} a_i}.
\end{aligned}$$

■

Considerando $m = \sum_{i=0}^{N}\epsilon_i q_i$ onde ϵ_i são inteiros, mostraremos que $M(m)$ pode ser escrito como um produto de matrizes $M_0^{\epsilon_0}\cdots M_N^{\epsilon_N}$ e então, usando o Lema 4.15, obteremos uma limitação superior para tal produto.

Teorema 4.16. *Para qualquer inteiro m decomposto como $m = \sum_{i=0}^{N}\epsilon_i q_i$ tem-se*

1. $M(m) = M_0^{\epsilon_0}\cdots M_N^{\epsilon_N}$;

2. $||M(m)|| \leq K^{\sum_{i=0}^{N}\epsilon_i} L^{\sum_{i=1}^{N+1} a_i}$.

Demonstração. Segue do Lema 2.4 *ii*) que $v(k+q_n) = v(k),\ se\ 1 \leq k \leq q_{n+1}-1$. Daí,

$$\begin{aligned}
M(m) &= M\left(\sum_{i=0}^{N}\epsilon_i q_i\right) \\
&= T\left(\sum_{i=0}^{N-1}\epsilon_i q_i + \epsilon_N q_N\right)\cdots T\left(\epsilon_N q_N + 1\right) T\left(\epsilon_N q_N\right)\cdots T\left(1\right) \\
&= T\left(\sum_{i=0}^{N-1}\epsilon_i q_i\right)\cdots T\left(1\right)\left[T\left(\epsilon_N q_N\right)\cdots T\left(1\right)\right], \\
T\left(\epsilon_N q_N\right)\cdots T\left(1\right) &= T\left((\epsilon_N - 1)q_N + q_N\right)\cdots T\left((\epsilon_N-1)q_N + 1\right)\cdots T\left(1\right) \\
&= T\left((\epsilon_N-1)q_N\right)\cdots T\left(1\right)\cdots T\left((\epsilon_N-1)q_N\right)\cdots T\left(1\right) = M_N^{\epsilon_N}.
\end{aligned}$$

Assim, $M(m) = M_0^{\epsilon_0}\cdots M_N^{\epsilon_N}$.

O item 2 segue diretamente do Lema 4.15. ■

Apresentamos agora um lema que será de fundamental importância para demonstrarmos a limitação superior da norma das matrizes de transferência $M(m)$ e, consequentemente, a limitação das soluções da equação (2.8).

Lema 4.17. *Seja N definido por $q_N \leq m < q_{N+1}$. Então temos a expansão (necessariamente única)*

$$m = \sum_{i=0}^{N}\epsilon_i q_i$$

onde

$$\epsilon_N = \left[\frac{m}{q_N}\right](\neq 0),\ \ \epsilon_i = \left[\left(m - \sum_{j=i+1}^{N}\epsilon_j q_j\right)/q_i\right] \in \{1,\cdots,a_{i+1}\},\ \ 1\leq i\leq N-1.$$

Demonstração. Faremos a demonstração por indução em N. Se $q_0 = 1 \leq m < q_1 = a_1$ então $m = \epsilon_0 q_0 = \epsilon_0$ onde $1 \leq \epsilon_0 < a_1$. Assumimos que o lema vale para $m < q_{N+1}$. Se $q_{N+1} \leq m < q_{N+2}$ e $\epsilon_{N+1} = \left[\frac{m}{q_{N+1}}\right]$, então

$$m - \epsilon_{N+1}q_{N+1} < q_{N+1} \qquad e \qquad (m - \epsilon_{N+1}q_{N+1}) = \sum_{i=0}^{N}\epsilon_i q_i.$$

Além disso,

$$\epsilon_{N+1} = \left[\frac{m}{q_{N+1}}\right] \leq \left[\frac{q_{N+2}}{q_{N+1}}\right] = \left[a_{N+2} + \frac{q_{N-2}}{q_{N+1}}\right] = a_{N+2}.$$ ■

Considerando o número de rotação θ de densidade limitada, estimaremos a norma da matriz $M(m)$ utilizando o Teorema 4.16 e o Lema 4.17.

Corolário 4.18. *Se θ é um número de densidade limitada, então*

$$||M(m)|| \leq Cm^{\gamma}$$

onde $\gamma = 4d(\theta)\log L/\log 2$ *e* $C = L^{4d(\theta)}$.

Demonstração. Pelo Teorema 4.16 tem-se $||M(m)|| \leq K^{\sum_{i=0}^{N}\epsilon_i} L^{\sum_{i=1}^{N+1} a_i}$. Sabemos que $m \geq q_N \geq \left(\sqrt{2}\right)^{N-1}$ (veja [28]), então $2\frac{\log m}{\log 2} + 1 \geq N$. Pelo Lema 4.17 temos que

$$\sum_{i=0}^{N} \epsilon_i \leq \sum_{i=0}^{N} a_i$$

e

$$\|M(m)\| \leq \left(L^2\right)^{\left(\frac{2\log m}{\log 2}+2\right)\left\{\left[\frac{1}{N+1}\right]\sum_{i=1}^{N+1} a_i\right\}} \leq L^{4d(\theta)\frac{\log m}{\log 2}+4d(\theta)} = Cm^{\gamma},$$

onde $\gamma = 4d(\theta)\log L/\log 2$ e $C = L^{4d(\theta)}$. ■

Agora estamos preparados para demonstrar que toda solução da equação (2.8), com condição inicial normalizada, tem um limite superior polinomial em L.

Demonstração. (Proposição 4.7). Pela relação

$$\begin{pmatrix} u(m+1) \\ u(m) \end{pmatrix} = M(m) \begin{pmatrix} u(1) \\ u(0) \end{pmatrix},$$

implica que $|u(m)| \leq ||M(m)|| \max\left(|u(1)|, |u(0)|\right)$. Como $||M(m)|| \leq Cm^{\gamma}$ obtemos $|u(m)| \leq Wm^{\gamma}$, onde $W = C\max(|u(1)|, |u(0)|)$. Daí, temos que $||U(m)||^2 = |u(m)|^2 + |u(m-1)|^2 \leq 2W^2m^{2\gamma}$. Assim,

$$||U||_L^2 \leq 2W^2L^{2\gamma+1} + 2W^2 2^{2\gamma} L^{2\gamma} \leq 2^{2\gamma+2}W^2L^{2\gamma+1}.$$

Portanto, existem $\gamma_2 = \gamma + 1/2$ e $C_2 = 2^{\gamma+1}W$ tais que

$$||u||_L \leq ||U||_L \leq C_2 L^{\gamma_2}, \quad \forall L \geq 1.$$

Observe que demonstramos o resultado para as soluções da equação (2.8) correspondentes a $\beta = 0$. Devido a continuidade à direita em β do potencial, das matrizes de transferência e a continuidade da norma L, obtemos que para cada $\beta \in [0, 1)$, toda solução u de (2.8), com condição inicial normalizada, satisfaz

$$||u||_L \leq C_2 L^{\gamma_2}, \quad \forall L \geq 1.$$

■

Capítulo

5

Espectro α-Contínuo para $H_{\lambda,\theta,\beta}$

Neste capítulo estabeleceremos a continuidade do espectro de operadores H do tipo (2.12), através de cotas inferiores e superiores da forma $C_1(E)L^{\gamma_1} \leq ||u||_L \leq C_2(E)L^{\gamma_2}$, para todas as soluções u de (2.13), com condições iniciais normalizadas, e com $L \geq 1$ suficientemente grande. Utilizando essas cotas obtidas no Capítulo 4, para os potenciais Sturmianos com números de rotação de densidade limitada, demonstraremos o Teorema 1.2. Para mais detalhes veja referências [11, 26, 27].

5.1 Desigualdade de Jitomirskaya-Last

Nesta seção consideraremos o operador H^+ (H restrito a $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$) definido por (2.12), a correspondente equação de autovalores (2.13) e as soluções $u^+_{1,\varphi,E}$ e $u^+_{2,\varphi,E}$, definidas em $\mathbb{Z}^+$, satisfazendo as condições iniciais (2.14). Apresentaremos uma relação, devido à Jitomirskaya-Last, envolvendo as m-funções à direita e as soluções $u^+_{1,\varphi,E}$, $u^+_{2,\varphi,E}$ de (2.13). Essa teoria pode ser desenvolvida de modo analogo em $\mathbb{Z}^-$.

Para $z = E+i\epsilon$ ($\epsilon > 0$), sejam $\widehat{u}^+_{\varphi,z}$ as soluções à direita da equação (2.31) que estão em $\ell^2(\mathbb{Z}^+)$ e $m^+_\varphi(z)$ as correspondentes m-funções à direita, de acordo com a Definição 2.16. Assim, vale a seguinte relação:

Lema 5.1. $Im(m^+_\varphi(z)) = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n)|^2$.

Demonstração. Como $\widehat{u}^+_{\varphi,z}$ é solução de (2.31) temos

$$\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n+1) + \widehat{u}^+_{\varphi,z}(n-1) + V(n)\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n) = z\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n).$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\overline{\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n)}$ obtemos

$$\overline{\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n)}\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n+1) + \overline{\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n)}\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n-1) + |\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n)|^2 V(n) = z|\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n)|^2.$$

Tomando as partes imaginárias de ambos os lados e lembrando que $V(n) \in \mathbb{R}$ segue que

$$Im\left(\overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n+1) + \overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n-1)\right) = \epsilon|\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)|^2.$$

Somando ambos os lados de 1 a ∞ vem que

$$\sum_{n=1}^{\infty} Im\left(\overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(1)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(0) + \overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n+1) + \overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n+1)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)\right) = \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)|^2.$$

Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Im\left(\overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(1)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(0) + \overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n+1) + \overline{\overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n+1)}\right) = \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)|^2$$

o que implica

$$Im\left(\overline{\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(1)}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(0)\right) = \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)|^2.$$

Pela Definição 2.16 e por (2.14) obtemos

$$Im\left((\overline{sen\varphi - m^{+}_{\varphi}cos\varphi})(cos\varphi + m^{+}_{\varphi}sen\varphi)\right) = \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)|^2$$

do qual segue que

$$Im\left(cos^2\varphi\ \left(\overline{-m^{+}_{\varphi}(z)}\right) + sen^2\varphi\ m^{+}_{\varphi}(z)\right) = \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)|^2$$

e assim,

$$Im\left(m^{+}_{\varphi}(z)\right) = \epsilon\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n)|^2. \qquad \blacksquare$$

O próximo resultado relaciona as soluções das equações (2.13) e (2.31), e chamaremos esta relação de fórmula de variação dos parâmetros para o caso discreto.

Lema 5.2. *Para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, $\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}$ satisfaz a equação*

$$\begin{aligned}\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(n) &= u^{+}_{2,\varphi,E}(n) - m^{+}_{\varphi}(z)u^{+}_{1,\varphi,E}(n) - i\epsilon u^{+}_{2,\varphi,E}(n)\sum_{k=1}^{n}u^{+}_{1,\varphi,E}(k)\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(k) \\ &\quad + i\epsilon u^{+}_{1,\varphi,E}(n)\sum_{k=1}^{n}\widehat{u}^{+}_{2,\varphi,E}(k)\widehat{u}^{+}_{\varphi,z}(k) \qquad (5.1)\end{aligned}$$

com $\widehat{u}^{+}_{1,\varphi,E}$ e $\widehat{u}^{+}_{2,\varphi,E}$ soluções de $H^+u = Eu$ satisfazendo (2.14).

Demonstração. Seja $\widehat{w}^{+}_{\varphi}(n)$ o lado direito de (5.1) para $n \in \mathbb{Z}^+$ e seja $\widehat{w}^{+}_{\varphi}(0) = cos\varphi + m^{+}_{\varphi}(z)sen\varphi$. Usando o fato que $u^{+}_{1,\varphi,E}$, $u^{+}_{2,\varphi,E}$ são soluções de (2.13) e a constância do

Wronskiano ($W[u^+_{1,\varphi,E}, u^+_{2,\varphi,E}](n) = 1,\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$), verifica-se que $\{\widehat{w}^+_\varphi(n)\}_{n=0}^\infty$ satisfaz

$$\widehat{w}^+_\varphi(n+1) = -\widehat{w}^+_\varphi(n-1) + (E - V(n))\widehat{w}^+_\varphi(n) + i\epsilon\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n) \tag{5.2}$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$. Agora, $\widehat{u}^+_{\varphi,z}$ é solução de (2.31), logo

$$\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n+1) = -\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n-1) + (E + i\epsilon - V(n))\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n) \tag{5.3}$$

para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$. Observe que, pela Definição 2.16 e por (2.14),

$$\begin{aligned}\widehat{w}^+_\varphi(0) &= cos\varphi + m^+_\varphi(z)sen\varphi = \widehat{u}^+_{\varphi,z}(0),\\ \widehat{w}^+_\varphi(1) &= sen\varphi - m^+_\varphi(z)cos\varphi = \widehat{u}^+_{\varphi,z}(1).\end{aligned}$$

Suponhamos, por indução, que $\widehat{w}^+_\varphi(k) = \widehat{u}^+_{\varphi,z}(k),\ \forall k \leq n$. De (5.2) e (5.3) obtemos que $\widehat{w}^+_\varphi(n+1) = \widehat{u}^+_{\varphi,z}(n+1)$. Portanto, $\widehat{w}^+_\varphi(n) = \widehat{u}^+_{\varphi,z}(n),\ \forall n \geq 0$. ∎

A desigualdade a seguir relaciona as m-funções à direita $m^+_\varphi(z)$ com as soluções $u^+_{1,\varphi,E}$ e $u^+_{2,\varphi,E}$ (linearmente independentes) de $H^+u = Eu$.

Teorema 5.3. *(**desigualdade Jitomirkaya-Last**) Seja H^+ definido por (2.12), e sejam $E \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$ dados. Então, vale a desigualdade*

$$\frac{5-\sqrt{24}}{\left|m^+_\varphi(E+i\epsilon)\right|} < \frac{||u^+_{1,\varphi,E}||_{L^+_\varphi(\epsilon)}}{||u^+_{2,\varphi,E}||_{L^+_\varphi(\epsilon)}} < \frac{5+\sqrt{24}}{\left|m^+_\varphi(E+i\epsilon)\right|}. \tag{5.4}$$

Demonstração. De (5.1) segue que

$$\begin{aligned}|\widehat{u}^+_{\varphi,z}(n)| &\geq |u^+_{2,\varphi,E}(n) - m^+_\varphi(z)u^+_{1,\varphi,E}(n)| - \epsilon(|u^+_{2,\varphi,E}(n)|\sum_{k=1}^{n}|u^+_{1,\varphi,E}(k)||\widehat{u}^+_{\varphi,z}(k)|\\ &\quad + |u^+_{1,\varphi,E}(n)|\sum_{k=1}^{n}|u^+_{2,\varphi,E}(k)||\widehat{u}^+_{\varphi,z}(k)|)\\ &\geq |u^+_{2,\varphi,E}(n) - m^+_\varphi(z)u^+_{1,\varphi,E}(n)| - \epsilon(|u^+_{2,\varphi,E}(n)|||u^+_{1,\varphi,E}||_n||\widehat{u}^+_{\varphi,z}||_n\\ &\quad + |u^+_{1,\varphi,E}(n)|||u^+_{2,\varphi,E}||_n||\widehat{u}^+_{\varphi,z}||_n)\\ &\geq |u^+_{2,\varphi,E}(n) - m^+_\varphi(z)u^+_{1,\varphi,E}(n)| - \epsilon(|u^+_{2,\varphi,E}(n)|||u^+_{1,\varphi,E}||_{L^+_\varphi}||\widehat{u}^+_{\varphi,z}||_{L^+_\varphi}\\ &\quad + |u^+_{1,\varphi,E}(n)|||u^+_{2,\varphi,E}||_{L^+_\varphi}||\widehat{u}^+_{\varphi,z}||_{L^+_\varphi})\end{aligned}$$

para $1 \leq n \leq L^+_\varphi$. Usando a norma $||\cdot||_L$ resulta

$$||\widehat{u}^+_{\varphi,z}||_{L^+_\varphi} \geq ||u^+_{2,\varphi,E} - m^+_\varphi(z)u^+_{1,\varphi,E}||_{L^+_\varphi} - 2\epsilon||u^+_{2,\varphi,E}||_{L^+_\varphi}||u^+_{1,\varphi,E}||_{L^+_\varphi}||\widehat{u}^+_{\varphi,z}||_{L^+_\varphi}$$

para qualquer $L^+_\varphi > 1$.

Considerando $L_\varphi^+ = L_\varphi^+(\epsilon)$, o que implica $2\epsilon||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+}||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+} = 1$ (por (2.17)), obtemos

$$2||\widehat{u}_{\varphi,z}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)} \geq ||u_{2,\varphi,E}^+ - m_\varphi^+(z)u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}. \tag{5.5}$$

Pelo Lema 5.1 e por (5.5) temos

$$\begin{aligned}
\frac{4Im(m_\varphi^+(z))}{\epsilon} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}|\widehat{u}_{\varphi,z}^+(n)|^2 \\
&> 4||\widehat{u}_{\varphi,z}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}^2 \\
&\geq ||u_{2,\varphi,E}^+ - m_\varphi^+(z)u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}^2 \\
&\geq ||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)} + |m_\varphi^+(z)|^2||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}^2 \\
&\quad -2|m_\varphi^+(z)|||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Temos por (2.17) que $2\epsilon||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+}||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+} = 1$, e multiplicando ambos os lados de (5.6) por 2ϵ, vem que

$$8Im(m_\varphi^+(z)) > \frac{||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}{||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}} + |m_\varphi^+(z)|^2\frac{||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}{||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}} - 2|m_\varphi^+(z)|,$$

o que implica

$$|m_\varphi^+(z)|^2\frac{||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}{||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}} + \frac{||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}{||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}} - 10|m_\varphi^+(z)| < 0. \tag{5.7}$$

Resolvendo (5.7) como uma inequação quadrática na variável $|m_\varphi^+(z)|$ obtemos

$$(5-\sqrt{24})\frac{||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}{||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}} < |m_\varphi^+(z)| < (5+\sqrt{24})\frac{||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}{||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}$$

e, portanto,

$$\frac{5-\sqrt{24}}{|m_\varphi^+(z)|} < \frac{||u_{1,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}}{||u_{2,\varphi,E}^+||_{L_\varphi^+(\epsilon)}} < \frac{5+\sqrt{24}}{|m_\varphi^+(z)|}.$$

■

5.2 α-Continuidade para os modelos Sturmianos

Nesta seção caracterizaremos o espectro α-contínuo do operador H do tipo (2.12) através de cotas superiores e inferiores da forma $C_1(E)L^{\gamma_1} \leq ||u||_L \leq C_2(E)L^{\gamma_2}$, para todas as soluções u com condições iniciais normalizadas (no sentido que $|u(0)|^2+|u(1)|^2 = 1$) de (2.13), e com $L \geq 1$ suficientemente grande, tomando $\alpha = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$. Aplicaremos tal resultado para os modelos Sturmianos, utilizando as limitações superiores e inferiores das soluções de (2.8) obtidas no Capítulo 4.

Primeiramente mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 5.4. *Sejam $\sigma(H)$ o espectro de H e μ_ϕ a medida espectral para o par (H, ϕ), com $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Suponha que existem constantes γ_1, γ_2 tais que, para cada $E \in \sigma(H)$, toda solução u de (2.13), com condição inicial normalizada, satisfaz a estimativa*

$$C_1(E)L^{\gamma_1} \leq ||u||_L \leq C_2(E)L^{\gamma_2} \tag{5.8}$$

para $L \geq 1$ suficientemente grande e constantes $C_1(E), C_2(E) > 0$. Seja $\alpha = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$. Então H tem espectro puramente α-contínuo, isto é, para qualquer $\phi \in \ell^2$, μ_ϕ é puramente α-contínua. Além disso, se as constantes $C_1(E), C_2(E)$ podem ser escolhidas independentemente de $E \in \sigma(H)$, então para qualquer $\phi \in \ell^2$ de suporte finito, μ_ϕ é uniformemente α-Hölder.

Para demonstrarmos o Teorema 5.4 seguiremos o seguinte caminho: com a estimativa (5.8) e por intermédio da desigualdade de Jitomirskaya-Last obteremos a estimativa $|m_\varphi^+(E+i\epsilon)| \leq C_3\epsilon^{\alpha-1}$, $\forall\varphi$ (veja Lema 5.5), em que m_φ^+ são as m-funções à direita, $E \in \mathbb{R}$ e C_3 é uma constante positiva. Em seguida, relacionaremos m_φ^+ com a m-função m na reta toda, obtendo a estimativa $|m(E+i\epsilon)| \leq C_3\epsilon^{\alpha-1}$ (veja Teorema 5.6). Ainda mais, supondo que C_1, C_2 independem de E em (5.8), teremos pelo Lema 5.5 que C_3 independe de E e usando o fato que m é a transformada de Borel da medida espectral μ, demonstraremos que μ é $U\alpha H$ (veja Teorema 5.6). Por último, relacionaremos as medidas μ e μ_ϕ para qualquer $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$.

Vamos começar relacionando a estimativa (5.8) com as m-funções m_φ^+ à direita.

Lema 5.5. *Fixe $E \in \mathbb{R}$. Suponha que toda solução de (2.13) com $|u(0)|^2 + |u(1)|^2 = 1$ satisfaz a estimativa*

$$C_1L^{\gamma_1} \leq ||u||_L \leq C_2L^{\gamma_2}$$

para $L \geq 1$ suf. grande e $C_1, C_2 > 0$. Então

$$\sup_\varphi |m_\varphi^+(E+i\epsilon)| \leq C_3\epsilon^{\alpha-1} \tag{5.9}$$

com $\alpha = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$ e $0 < C_3 < \infty$.

Demonstração. Considerando as soluções $u_{1,\varphi,E}^+$ e $u_{2,\varphi,E}^+$ de $(H-E)u = 0$ com condições iniciais (2.14) e usando a hipótese temos

$$\frac{||u_{1,\varphi,E}^+||_L}{(||u_{2,\varphi,E}^+||_L)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} \geq \frac{C_1L^{\gamma_1}}{(C_2L^{\gamma_2})^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} = \frac{C_1}{C_2^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}L^{\gamma_1-\gamma_2(\frac{\alpha}{2-\alpha})} = \frac{C_1}{C_2^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}} > 0$$

$\forall\varphi \in (-\pi/2, \pi/2]$ e $L \geq 1$ suficientemente grande.

Pela desigualdade Jitomirskaya-Last temos que

$$\frac{5-\sqrt{24}}{2^{1-\alpha}\epsilon^{1-\alpha}|m_\varphi^+(z)|} < \left(\frac{||u_{1,\varphi,E}^+||_L}{||u_{2,\varphi,E}^+||_L^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}}\right)^{2-\alpha} < \frac{5+\sqrt{24}}{2^{1-\alpha}\epsilon^{1-\alpha}|m_\varphi^+(z)|},$$

o que implica

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon^{1-\alpha}|m_\varphi^+(E+i\epsilon)| < \infty,\ \forall\varphi\in(-\pi/2,\pi/2].$$

Assim, existe $0 < C_3 < \infty$ com $|m_\varphi^+(E+i\epsilon)| \leq C_3\epsilon^{\alpha-1}$, $\forall\varphi\in(-\pi/2,\pi/2]$. Portanto,

$$\sup_\varphi |m_\varphi^+(E+i\epsilon)| < C_3\epsilon^{\alpha-1}$$

para algum $0 < C_3 < \infty$. ■

Como o par de vetores $\{e_0, e_1\}$ é cíclico para H, consideramos a medida espectral $\mu = \mu_{e_0} + \mu_{e_1}$. O próximo resultado relaciona as m-funções m_φ^+ à direita com a m-função m na reta toda.

Teorema 5.6. *Suponha que a estimativa (5.8) valha para todo $E \in \sigma(H)$ com C_1, C_2 independentes de E. Então, para qualquer função $g : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^+ = \{x+iy, y>0\}$, tem-se*

$$\left|\frac{m^+(E+i\epsilon)g(E+i\epsilon)-1}{m^+(E+i\epsilon)+g(E+i\epsilon)}\right| \leq C_3\epsilon^{\alpha-1} \tag{5.10}$$

para todo $\epsilon > 0$. Em particular, tomando $g = m^-$ obtém-se

$$|m(E+i\epsilon)| = \left|\frac{m^+(E+i\epsilon)m^-(E+i\epsilon)-1}{m^+(E+i\epsilon)+m^-(E+i\epsilon)}\right| \leq C_3\epsilon^{\alpha-1}. \tag{5.11}$$

Consequentemente, μ é uniformemente α-Hölder e, em particular, μ é α-contínua.

Demonstração. Fixe $E \in \sigma(H)$ e $\epsilon > 0$. Introduzindo novas variáveis $z = e^{2i\varphi}$ e $\nu = \frac{m^+-i}{m^++i}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1+\nu z}{1-\nu z} &= \frac{1+\left(\frac{m^+-i}{m^++i}\right)e^{2i\varphi}}{1-\left(\frac{m^+-1}{m^++i}\right)e^{2i\varphi}} \\
&= \frac{e^{i\varphi}\left(e^{-i\varphi}+\left(\frac{m^+-i}{m^++i}\right)e^{i\varphi}\right)}{e^{i\varphi}\left(e^{-i\varphi}-\left(\frac{m^+-i}{m^++i}\right)e^{i\varphi}\right)} \\
&= \frac{(\cos\varphi - isen\varphi)(m^++i)+(m^+-i)(\cos\varphi+isen\varphi)}{(\cos\varphi - isen\varphi)(m^++i)-(m^+-i)(\cos\varphi+isen\varphi)} \\
&= \frac{sen\varphi+\cos\varphi\ m^+}{i(\cos\varphi - sen\varphi\ m^+)} \\
&= -im_\varphi^+.
\end{aligned}$$

■

Assim, podemos reescrever (5.9) como

$$\sup_{|z|=1}\left|\frac{1+\nu z}{1-\nu z}\right| \leq C_3\epsilon^{\alpha-1}.$$

Note que $Im(m^+) > 0$ implica $|\nu| < 1$ e, portanto, $(1+\nu z)/(1-\nu z)$ define uma função analítica sobre $\{z : |z| \leq 1\}$. O ponto $z_1 = \frac{g-i}{g+i}$ está no interior do disco unitário ($|z_1| < 1$) pois $Im(g) > 0$.

Pelo princípio do módulo máximo temos

$$\sup_{|z|\le 1}\left|\frac{1+\nu z}{1-\nu z}\right| = \sup_{|z|=1}\left|\frac{1+\nu z}{1-\nu z}\right| \le C_3\epsilon^{\alpha-1}.$$

Usando esta desigualdade para o ponto z_1 obtemos

$$\left|\frac{m^+g-1}{m^+ + g}\right| = \left|\frac{1+\nu z_1}{1-\nu z_1}\right| \le C_3\epsilon^{\alpha-1},$$

e, portanto, a estimativa (5.10) está demonstrada. Em particular, tomando $g = m^-$ e usando (2.37) obtém-se (5.11). Além disso, como

$$m(E+i\epsilon) = \int \frac{d\mu(t)}{t-(E+i\epsilon)}$$

temos de (5.11)

$$\begin{aligned}
\mu((E-\epsilon,E+\epsilon)) &= \int_{E-\epsilon}^{E+\epsilon} \frac{(t-E)^2+\epsilon^2}{(t-E)^2+\epsilon^2}d\mu(t)\\
&\le 2\epsilon\int_{E-\epsilon}^{E+\epsilon}\frac{\epsilon}{(t-E)^2+\epsilon^2}d\mu(t)\\
&= 2\epsilon Im(m(E+i\epsilon))\\
&\le 2\epsilon|m(E+i\epsilon)|\\
&\le 2^{1-\alpha}C_3(2\epsilon)^\alpha
\end{aligned}$$

para todos $E\in\sigma(H)$, $\epsilon>0$. Portanto, μ é $U\alpha H$. Em particular

$$\limsup_{\epsilon\to 0}\frac{\mu(E-\epsilon,E+\epsilon)}{(2\epsilon)^\alpha} < \infty,$$

donde μ é α-contínua.

Agora estamos preparados para relacionar a estimativa (5.8) com o espectro α-contínuo de H.

Demonstração. (Teorema 5.4). Dado $\phi\in\ell^2(\mathbb{Z})$ com suporte finito (i.e., ϕ é suportada em $\{-N,...,N,N+1\}$) existem polinômios P_0 e P_1, ambos de grau $\le N$, em que $\phi = P_0(H)e_0 + P_1(H)e_1$ (veja [5]). Assim,

$$\mu_\phi = P_0(E)\mu_{e_0} + P_1(E)\mu_{e_1} \le f(E)\mu,\ \forall E\in\sigma(H), \tag{5.12}$$

com $f(E) = \max\{P_0(E),P_1(E)\}$ e $\mu = \mu_{e_0}+\mu_{e_1}$. Como $\sigma(H)$ é compacto e f é contínua, segue que f é limitada em $\sigma(H)$. Se C_1, C_2 são independentes de E, então pelo Teorema 5.6, μ é $U\alpha H$. Logo, existe $0<k_1<\infty$ de forma que

$$\mu((E-\epsilon,E+\epsilon)) \le k_1(2\epsilon)^\alpha,$$

para todo $E \in \sigma(H)$. De (5.12) obtemos

$$\mu_\phi((E-\epsilon, E+\epsilon)) \leq f(E)\mu((E-\epsilon, E+\epsilon)) \leq k_1 k_2 (2\epsilon)^\alpha$$

para todo $E \in \sigma(H)$ e algum $0 < k_2 < \infty$. Portanto, μ_ϕ é $U\alpha H$.

Se C_1, C_2 dependem de E, então C_3 também depende de E e neste caso, μ não é $U\alpha H$. Porém, concluímos que μ é α-contínua. Como $\mu_\phi \ll \mu$, segue que μ_ϕ é α-contínua. ■

`Observação:` O Teorema 5.4 é estabelecido na "metade da reta à direita" e, claramente, há uma versão análoga na "metade da reta à esquerda".

Agora aplicamos o Teorema 5.4 para os modelos Sturmianos, ou seja, apresentamos a

Demonstração. (Teorema 1.2). Por hipótese, θ é um número de densidade limitada, então para todo $\lambda \neq 0$, existem $\gamma_1, \gamma_2 > 0$, $C_1, C_2 < \infty$, tais que para cada $E \in \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$ e qualquer $\beta \in [0,1)$, toda solução u de $(H_{\lambda,\theta,\beta} - E)u = 0$, com condição inicial normalizada, satisfaz (veja Proposições 4.1 e 4.7)

$$C_1 L^{\gamma_1} \leq ||u||_L \leq C_2 L^{\gamma_2}$$

com $L \geq 1$ suficientemente grande e $C_1, C_2 > 0$ independentes de E. Seja $\alpha = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}$. Assim, pelo Teorema 5.4, para todo $\beta \in [0,1)$ e todo $\phi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ de suporte finito, a medida espectral para o par $(H_{\lambda,\theta,\beta}, \phi)$ é uniformemente α-Hölder. Em particular, $H_{\lambda,\theta,\beta}$ tem espectro puramente α-contínuo. ■

Capítulo

6

Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos o tipo espectral da família $H_{\lambda,\theta,\beta}$ de operadores de Schrödinger discretos, unidimensionais, com potenciais Sturmianos, e concluímos que possuem espectro puramente singular contínuo, suportado sobre um conjunto de medida de Lebesgue zero, para todos os parâmetros λ, θ, β, sendo $\theta \in (0,1)$ irracional.

Tendo em vista os resultados obtidos sobre a classificação espectral com relação a medida de Lebesgue, estudamos também a α-continuidade ($\alpha \in (0,1)$) do espectro de cada operador de Schrödinger $H_{\lambda,\theta,\beta}$, com θ de densidade limitada. Utilizando a teoria desenvolvida por Jitomirskaya-Last e a decomposição de Rogers-Taylor (decomposição das medidas Borelianas em relação a medida de Hausdorff) investigamos o tipo espectral desses operadores em termos de estimativas sobre o comportamento de soluções das respectivas equações de autovalores. Com essas estimativas é possível caracterizar o espectro α-contínuo de cada operador $H_{\lambda,\theta,\beta}$. Uma questão importante que também pode ser estudada é estimar a dimensão de Hausdorff $\dim_H \sigma(H_{\lambda,\theta,\beta})$ do espectro, que é uma questão muito importante, pois esta fornece informações bastante valiosas sobre a dinâmica do sistema quântico associado.

Como trabalho futuro pode-se investigar a aplicação dos resultados estudados para uma nova classe de potenciais quase-periódicos. Considera-se uma "Thue-Morserização" de (2.6), ou seja,

$$s_0 = 0, s_1 = 1, ..., s_{n+1} = s_n^{a_n}\overline{s_n}, \quad n \geq 1 \tag{6.1}$$

(a barra em s_n significa trocar 0 por 1 e 1 por 0 na palavra). Agora, se $\theta = (\sqrt{5}-1)/2$, de (6.1) obtém-se o modelo Thue-Morse. A questão que surge é a possibilidade de se obter uma classificação espectral completa para os operadores de Schrödinger (1.2) com potenciais gerados por esta nova classe de sequências quase-periódicas (6.1).

Referências Bibliográficas

[1] BELLISSARD, J., IOCHUM, B., SCOPPOLA, E. and TESTARD, D.: Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, *Commun. Math. Phys.* **125**, 527-543 (1989).

[2] BERSTEL, J.: Recent Results in Sturmian Words, in *Developments in Language Theory* (J. Dassow and A. Salomaa, eds.), World Scientific, Singapore, 13-24 (1996).

[3] BOUGEROL, Ph. and LACROIX, J.: Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger operators (Boston, Stuttgart: Birkhäuser, 1985).

[4] BOVIER, A. and GHEZ, J.-M.: Spectral Properties of One-Dimensional Schrödinger Operators with Potentials Generated by Substitutions, *Commun. Math. Phys.* **158**, 45-66 (1993).

[5] CARMONA, R. and LACROIX, J.: Spectral Theory of Random Schrödinger Operators (Boston: Birkhäuser, 1990).

[6] CYCON, H. L., FROESE, R., KIRSCH, W. and SIMON, B.: Schrödinger Operators, with Application to Quantum Mechanics and Global Geometry (Berlin: Springer, 1987).

[7] DAMANIK, D.: Substitution Hamiltonians with Bounded Trace Map Orbits, *J. Math. Anal. Appl.* **249**, 393-411 (2000).

[8] DAMANIK, D.: α-Continuity Properties of One-Dimensional Quasicrystals, *Commun. Math. Phys.* **192**, 169-182 (1998).

[9] DAMANIK, D.: Singular Continuous Spectrum for the Period Doubling Hamiltonian on a Set of Full Measure, *Commun. Math. Phys.* **196**, 477-483 (1998).

[10] DAMANIK, D.: Gordon-Type Arguments in the Spectral Theory of One-Dimensional Quasicrystals, Directions in Mathematical Quasicrystals, CRM Monogr. Ser. **13**, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 277-305 (2000).

[11] DAMANIK, D., KILLIP, R. and LENZ, D.: Uniform Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, III. α-Continuity, *Commun. Math. Phys.*, **212**, 191-204 (2000).

[12] DAMANIK, D. and LENZ, D.: Half-line Eigenfunction Estimates and Purely Singular Continuous Spectrum of Zero Lebesgue Measure, *Forum Math.* **16**, 109-128 (2004).

[13] DAMANIK, D. and LENZ, D.: Uniform Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, I. Absence of Eigenvalues, *Commun. Math. Phys.* **207**, 687-696 (1999).

[14] DAMANIK, D. and LENZ, D.: Uniform Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, II. The Lyapunov Exponent, *Lett. Math. Phys.* **50**, 245-257 (1999).

[15] DAMANIK, D. and LENZ, D.: Uniform Spectral Properties of One-Dimensional Quasicrystals, IV. Quasi-Sturmian Potentials, *J. Anal. Math.* **90**, 115-139 (2003).

[16] DE OLIVEIRA, C. R.: Introdução à Análise Funcional, Projeto Euclides (Rio de Janeiro: IMPA, 2010).

[17] DE OLIVEIRA, C. R.: Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics, Progress in Mathematical Physics, v. 54 (Basel: Birkhaüser, 2008).

[18] FALCONER, K.: The Geometry of Fractal Sets (Cambridge: Cambridge U. Press, 1985).

[19] FURSTENBERG, H. and KESTEN H.: Products of Random Matrices, *Ann. Math. Stat.* **31**, 457-469 (1960).

[20] HOF, A.: Some Remarks on Discrete Aperiodic Schrödinger Operators, *J. Stat. Phys.* **72**, 1353-1374 (1993).

[21] HOFFMAN, K. e KUNZE R.: Álgebra Linear (São Paulo: Editora da USP, 1971).

[22] IOCHUM, B., RAYMOND, L. and TESTARD, D.: Resistance of One-Dimensional Quasicrystals, *Physica A* **187**, 353-368 (1992).

[23] IOCHUM, B. and TESTARD, D.: Power Law Growth for the Resistance in the Fibonacci Model, *J. Stat. Phys.* **65**, 715-723 (1991).

[24] JANOT, CH. and DUBOIS, J. M.: Editors: Quasicrystalline Materials. Grenoble 21-25 march 1988 (Singapore: World Scientific, 1988).

[25] JITOMIRKAYA, S. and LAST, Y.: Dimensional Hausdorff Properties of Singular Continuous Spectra, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1765-1769 (1996).

[26] JITOMIRSKAYA, S. and LAST, Y.: Power-Law Subordinacy and Singular Spectra, I. Half Line Operators, *Acta Math.* **183**, 171-189 (1999).

[27] JITOMIRSKAYA, S. and LAST, Y.: Power-Law Subordinacy and Spectra Singular, II. Line Operators, *Commun. Math. Phys.* **211**, 643-658 (2000).

[28] KHINCHIN, A.Ya.: Continued Fractions (Mineola: Dover Publications, 1997).

[29] KOTANI, S.: Jacobi Matrices with Random Potentials Taking Finitely Many Values, *Rev. Math. Phys.* **1**, 129-133 (1989).

[30] KREYSZIG, E.: Introductory Funcional Analysis With Aplications (New York: John Wiley and Sons, 1978).

[31] LANG, S.: Introduction to Diophantine Approximations (New York: Addison-Wesley, 1966).

[32] LAST, Y. and SIMON, B.: Eigenfunctions, Transfer Matrices, and Absolutely Continuous Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators, *Invent. Math.* **135**, 329-367 (1999).

[33] MARTINELLI, F. and SCOPPOLA, E.: Introduction to the Mathematical Theory of Anderson Localization, *Rivista del Nuovo Cimento* **10** (1987).

[34] MORSE, M. and HEDLUND, G.A.: Symbolic dynamics. II: Sturmian trajectories, *Am. J. Math.* **62**, 1-42 (1940).

[35] OSCELEDEC, V.: A Multiplicative Ergodic Theorem. Lyapunov Characteristic Numbers for Dynamical Systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197-231 (1968).

[36] REED, M. and SIMON B.: Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. I: Functional Analysis (New York: Academic Press, 1972).

[37] ROGERS, C.A.: Hausdorff Measures (London: Cambridge Univ. Press, 1970).

[38] ROGERS, C.A. and TAYLOR, S.J.: The Analysis of Additive Set Functions in Euclidean Space, *Acta Math.* **101**, 273-302 (1959).

[39] ROGERS, C.A. and TAYLOR, S.J.: Additive Set Functions in Euclidean Space, *Acta Math.* **109**, 207-240 (1963).

[40] ROYDEN, H. L.: Real Analysis (New York: Macmillan, 1988).

[41] STEINHARDT, P.J. and OSTLUND, S.: The Physics of Quasicrystals (Singapore: World Scientific, 1987).

[42] SÜTO, A.: The Spectrum of a Quasiperiodic Schrödinger Operator, *Commun. Math. Phys.* **111**, 409-415 (1987).

[43] SÜTO, A.: Singular Continuous Spectrum on a Cantor Set of Zero Lebesgue Measure for the Fibonacci Hamiltonian, *J. Stat. Phys.* **56**, 525-531 (1989).

[44] WALTERS, P.: An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematicas, v. **79** (New York: Springer, 1982).