

Trabalho de Conclusão de Curso
Curso de Graduação em Física

O Potencial Quark-Antiquark na Metodologia AdS/CFT

Lucas Pimentel Colmanetti

Prof. Dr. Luiz Antonio Barreiro

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Lucas Pimentel Colmanetti

O potencial quark-antiquark na metodologia AdS/CFT

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Geociências e
Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro,
da Universidade Estadual Paulista Júlio
de Mesquita Filho, parte dos requisitos
para a obtenção do grau em Bacharel em
Física.

Rio Claro - SP

2023

C716p

Colmanetti, Lucas Pimentel

O Potencial Quark-Antiquark na Metodologia AdS/CFT / Lucas Pimentel

Colmanetti. -- Rio Claro, 2023

49 p.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Física) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientador: Luiz Antonio Barreiro

1. Física. 2. Teoria de Campos. 3. Equação de Dirac. 4. Metodologia AdS/CFT. I.
Título.

Lucas Pimentel Colmanetti

O Potencial quark-antiquark na Metodologia AdS/CFT

Estágio Supervisionado ou Trabalho de Graduação apresentado ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, parte dos requisitos para obtenção do grau de Bacharel em Física.

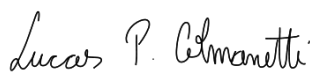
Comissão Examinadora

Luiz Antonio Barreiro

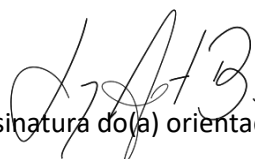
Alexandre Mesquita

Ricardo Paupitz

Rio Claro, 22 de novembro de 2023.



Assinatura do(a) aluno(a)


assinatura do(a) orientador(a)

Dedico este trabalho a minha avó, que me fez sonhar os sonhos que torno realidade hoje.

Agradecimentos

Pensar em quem ou o que mais me motivou a chegar até onde me encontro é uma tarefa e tanto, principalmente devido ao fato de que sou um pouco prolixo para escrever. Porém, após certo tempo refletindo, entendi que cada um dos que vou citar durante esse breve comentário tiveram sua importância, e definitivamente, cada um através de sua singela forma, me tornaram quem sou hoje.

Para começar, quero agradecer minha família, tanto meus pais, Lúcia e Eduardo, que apesar de conflitos me possibilitaram cada uma das oportunidades que tive, minha irmã, Livia, que finalmente pode se gabar por ter um irmão que faz algo complicado e chique, palavras dela, não minhas, e aos meus avós, Maria Shirley, José, Nilton e Maria Helena, em especial esta última, que foi minha perda mais recente e uma das maiores motivações para que eu não desistisse de todo o caminho que trilhei.

Em seguida, aos meus amigos, são muitos nomes para colocar aqui, mas todos possuem sua importância, aqueles que conheço do tempo que eu mal sabia o que era um físico, João Pedro Rezende e Augusto Benate. Os que conheci no começo de minha graduação Enzo, Camila, Matheus e Thiago. Aqueles que troquei poucas palavras, que vieram antes ou depois de mim neste departamento como alunos, cada um de vocês tem sua importância para mim.

Os que ganhei contato com o tempo e hoje são como família pra mim, Bruna, Lucas de Lazari, Lourenço, Lucas Amadeu, Leonardo Almeida, Roberta, Thayarak, Juliana, João Pedro, Polyana. E por fim, nesta parte, agradeço a alguém que demorou aparecer, mas presenciou boa parte da minha luta nesta reta final, agradeço a minha namorada Talita Santos El Hindi, por me ouvir e apreciar tanto minhas reclamações quanto minhas euforias sobre matemática e o universo que tanto me impressiona.

Também agradeço aos professores do departamento, em especial ao meu orientador Luiz Antonio Barreiro, ao professor Alexandre Mesquita, ao técnico André pelas risadas e aprendizados nos laboratórios, e ao meu primeiro professor de cálculo, Vinicius Wasques, por me mostrarem como eu de fato amo o que eu escolhi, e como um dia quero mostrar isso para alguém assim como eles fizeram comigo.

Por fim e não menos importante, eu agradeço ao pequeno garoto que chegou nesta universidade sem saber o que esperar, perdido e cheio de conflitos, por não desistir, e finalmente se provar, por menor que seja, alguém que se encontrou e que tem orgulho de quem é para si mesmo.

Resumo

O estudo de partículas elementares é uma área que traz diversos resultados coerentes e possui um dos modelos mais bem consolidados de toda a física, o modelo padrão de partículas. Contudo, ainda existem lacunas que precisam ser estudadas e compreendidas, um dos métodos atuais utilizados para tentar melhor compreender o funcionamento das partículas é a metodologia AdS/CFT, proposta por Maldacena, para tratar problemas não perturbativos de forma perturbativa em um espaço que permita tal abordagem. Sendo assim, neste trabalho foi realizada uma introdução e revisão bibliográfica sobre os conceitos necessários para a compreensão do assunto discutido, abrangendo temas desde relatividade até teoria quântica de campos a fim de adentrar no tema principal do texto, a metodologia AdS/CFT. Ademais, é discutido o funcionamento de um campo escalar na conjectura proposta por Maldacena, que por sua vez é o pilar principal para o desenvolvimento das equações tratadas, que juntamente com uma compreensão qualitativa da teoria de cordas, torna possível encontrar o potencial de um par quark-antiquark. Em seguida, é realizado o estudo do funcionamento deste potencial na equação de Dirac, tratando então de uma abordagem relativística, de forma que foi utilizada uma aproximação com o potencial central de Coulomb, o que permitiu a análise de dois métodos, o método de série de potências, e o de recorrência de hipergeométricas confluentes, em que ambos entregam o mesmo resultados para os níveis de energia em um potencial central. Por fim, utilizamos o potencial encontrado para o par quark-antiquark, juntamente com os métodos mostrados a fim de encontrar os níveis de energia do problema, percebemos que se tratam de níveis quantizados que são descritos pelo número quântico principal e o momento angular relacionado ao spin do problema. Portanto, concluímos que é possível encontrar níveis de energia discreto, bem como tanto o potencial quanto os níveis de energia podem ser aplicados e mais profundamente estudados, como em problemas termodinâmicos ou de espalhamento.

Palavras-chave: Potencial quark-antiquark. Teoria de campos quântica. Espaço Anti-de-Sitter

Abstract

The study of elementary particles is an area that provides many coherent results and has one of the most well-established models in all of physics, the standard particle model. However, there are still gaps that need to be studied and understood. One of the current methods used to try to better understand the functioning of particles is the AdS/CFT methodology, proposed by Maldacena, to treat nonperturbative problems in a perturbative way in a space that allows such an approach. Therefore, in this work, an introduction and bibliographical review was carried out on the concepts necessary to understand the subject discussed, covering topics from relativity to quantum field theory in order to enter the main theme of the text, the AdS/CFT methodology. In addition, the operation of a scalar field in the conjecture proposed by Maldacena is discussed, which in turn is the main pillar for the development of the equations dealt with, which together with a qualitative understanding of string theory, makes it possible to find the potential of a quark-antiquark pair. Next, we study how this potential works in the Dirac equation, dealing with a relativistic approach, using an approximation to the central Coulomb potential, which allowed us to analyze two methods, the power series method and the confluent hypergeometric recurrence method, both of which give the same results for the energy levels in a central potential. Finally, we used the potential found for the quark-antiquark pair, together with the methods shown in order to find the energy levels of the problem, and realized that these are quantized levels that are described by the principal quantum number and the angular momentum related to the spin of the problem. We therefore conclude that it is possible to find discrete energy levels, and that both the potential and the energy levels can be applied and studied further, as in thermodynamic or scattering problems.

Keywords: Quark-Antiquark potential. Quantum field theory. Anti-de-Sitter space.

Sumário

1	Introdução	7
2	Revisão bibliográfica e conceitos fundamentais	8
2.1	Relatividade	8
2.2	Espaço Anti-de-Sitter	11
2.3	Teoria de Grupos	13
2.4	Teoria de campos, Clássica e Quântica	16
3	Campo escalar no espaço Anti-de-Sitter	23
4	O potencial Quark-Antiquark	28
5	Equação de Dirac para o potencial quark-antiquark	34
5.1	Solução para a equação de Dirac	34
5.2	Analogia com o potencial de Coulomb	37
6	Conclusão	48
7	Referências	49

1 Introdução

A ideia de partículas elementares tem sido estudada desde muito tempo, seja pelo campo da física nuclear ou pela física de altas energias. Logo, uma consequência disso foi a descoberta de partículas tão fundamentais quanto os elétrons, como é o caso dos quarks e dos bósons, bem como suas antipartículas relacionadas. As interações entre essas partículas são de grande interesse da física atual, uma vez que elas descrevem um dos modelos mais aceitos até os dias atuais, o modelo padrão de partículas [1].

Com isso em mente, o foco deste trabalho é estudar a interação entre um quark e sua antipartícula, o antiquark, com o objetivo de entender o potencial gerado pela interação delas, bem como desenvolver uma possível solução para a equação de Dirac utilizando o potencial encontrado. Para isso, adentramos em um modelo cuja principal característica é a dualidade entre o espaço Anti-de-Sitter(AdS) e a teoria de campos conforme. O primeiro trata de um espaço como o de Minkowski, onde a teoria da relatividade de Einstein se encontra, com uma dimensão espacial extra, isto é, 3 dimensões espaciais, uma temporal e outra extra de espaço, comumente nomeamos de AdS_5 , onde 5 é o número de $d + 1$ dimensões utilizadas. A segunda vem de uma parte fundamental da física, a conservação de quantidades perante simetrias, onde o teorema de Noether [2] mostra que lagrangianas invariantes sob algumas transformações conservam uma corrente de uma determinada quantidade tratada pelo sistema, tais correntes podem ser relacionadas a grandezas físicas quaisquer existentes no problema.

A ideia da dualidade foi proposta por Maldacena [3], e é discutida com maior rigor durante o texto, contudo, a ideia principal é que soluções para problemas encontrados na teoria conforme estão presentes no limite do espaço AdS, isto é, quando colapsamos a dimensão extra do sistema, ao preço de uma mudança na funcionalidade dos operadores da teoria, trazendo assim uma possível relação entre um espaço que não necessita de uma teoria gravitacional para ser construído e uma visão de conservação perante simetrias, tornando assim um espaço dual para ambas as teorias.

Desta forma, é interessante realizar uma revisão de conceitos importantes que serão utilizados durante o desenvolvimento do trabalho, como por exemplo, a teoria da relatividade [4] e a notação utilizada, a teoria de grupos [2,5] e sua visão de transformações lineares e matricial, a própria teoria de campos clássica e quântica [2,4,6], e lógico, uma introdução as ideias de espaço Anti-de-Sitter [7] e a conjectura de Maldacena [3].

2 Revisão bibliográfica e conceitos fundamentais

2.1 Relatividade

2.1.1 Intervalos

A ideia de relatividade utilizada para esta discussão se pauta nos princípios estabelecidos pela teoria de Einstein. Isto é, as leis da física precisam ser as mesmas para quaisquer dois referenciais inerciais, e a velocidade de propagação de informação entre esses referenciais é uma constante, dada pela velocidade da luz [4]

$$c = 2.998 \times 10^8 m/s . \quad (1)$$

A teoria relativística é importante quando tratamos de intervalos de espaço ou tempo em determinadas energias, sendo assim, é necessário definir o conceito de intervalo por si só. Para compreender um intervalo, é preciso saber o que é um evento, que por sua vez, é o que define quando (tempo) e onde (espaço) algo ocorreu, ou seja, num meio tridimensional, um evento é definido pelas três coordenadas de posição e uma coordenada temporal.

Com isso em mente, é possível ilustrar um experimento mental para definir de fato um intervalo. Colocando o primeiro evento como a emissão de um sinal de luz, no ponto (x_1, y_1, z_1) e no instante t_1 , e o segundo evento como a recepção desse sinal no ponto (x_2, y_2, z_2) e no instante t_2 , podemos calcular a distância percorrida por tal sinal [4].

Por um lado, essa distância pode ser interpretada como $d = c(t_2 - t_1)$, por outro, também é dada por:

$$d = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} . \quad (2)$$

Sendo assim, essas distâncias possuem o mesmo valor, ou seja, escrevemos

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 , \quad (3)$$

de forma que:

$$[c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = s_{12} . \quad (4)$$

A equação (1.4) é o que fica definido por intervalo, que também pode ser generalizado para qualquer referencial inercial K' com suas respectivas coordenadas, e escrito em forma diferencial:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 , \quad (5)$$

ou seja, como os intervalos devem ser os mesmos para ambos os referenciais inerciais,

concluimos que:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = ds'^2 \quad (6)$$

2.1.2 Notação relativística

Uma das mais importantes partes para tal tipo de estudo, tanto relativístico quanto de múltiplas dimensões, é a notação relativística dada por quadrivetores. Sendo assim, as coordenadas de qualquer evento dadas por, ct, x, y e z podem ser consideradas como componentes de um espaço vetorial de quatro dimensões, onde são denotadas por x^i , de forma que $i = 0, 1, 2, 3$ [2, 5, 8], e

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z. \quad (7)$$

É importante também introduzir um objeto matemático chamado de métrica. Ela por sua vez, é usada para escrever os coeficientes dos diferenciais do intervalo. No caso mais simples, é uma matriz formada por uma diagonal de $+/-1$.

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

e sua inversa fica definida como

$$\eta^{\mu\nu-1} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

O símbolo η é relacionado somente com a métrica utilizada na relatividade especial, de forma mais genérica, utilizamos o símbolo g para representar uma métrica qualquer [2]. Logo, podemos concluir que:

$$gg^{-1} = I, \quad (10)$$

onde I é a matriz identidade.

Também definimos a seguinte propriedade da métrica:

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\rho}. \quad (11)$$

Em que δ_{μ}^{ρ} é a função delta de Kronecker. Utilizando a ideia mostrada na equação (7), podemos definir os quadrivetores covariantes, com índices subscritos, e contravariantes,

com índices sobrescritos que serão muito convenientes durante os cálculos.

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) , \quad (12)$$

onde x_μ é um quadrivetor covariante

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) , \quad (13)$$

e x^μ é um quadrivetor contravariante

Tais vetores se transformam de forma diferente sob uma transformação de Lorentz, mas essa discussão não é cabível no momento do texto, uma vez que a ideia de covariância é extensa e não será diretamente aplicada neste trabalho. Sendo assim, podemos utilizar essa métrica para relacionar esses tipos de vetores da seguinte forma:

$$x_\alpha = g_{\alpha\beta} x^\beta \quad x^\alpha = g^{\alpha\beta} x_\beta . \quad (14)$$

Analisando a métrica e utilizando a ideia de multiplicação de matrizes podemos verificar que os vetores obedecem a seguinte lógica para a relatividade especial:

$$x_0 = x^0 \quad x_1 = -x^1 \quad x_2 = -x^2 \quad x_3 = -x^3 . \quad (15)$$

essa notação também se estende para derivadas, que por sua vez são apresentadas da seguinte por:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^0} = \partial_0 , \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x^1} = \partial_1 , \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x^2} = \partial_2 , \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x^3} = \partial_3 . \quad (19)$$

Os índices funcionam da mesma forma que com vetores:

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu , \quad (20)$$

de forma geral:

$$\partial_0 = \partial^0 \quad \partial_i = -\partial^i . \quad (21)$$

Já os quadrivetores podem ser representados de algumas formas.

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3), \quad A_\mu = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) , \quad (22)$$

ou ainda

$$A^\mu = (A^0, \vec{A}), \quad A_\mu = (A_0, -\vec{A}), \quad (23)$$

ambas denotam os mesmos tipos de vetores covariantes e contravariantes, sendo apenas uma escolha de notação mais curta.

Tratando de vetores, é lógico deixar explícito como é definido a magnitude de um quadrivetor. Utilizamos o somatório de Einstein, onde é sempre subentendido que existe uma soma sobre índices repetidos, ou seja:

$$l_\alpha l^\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 l_\alpha l^\alpha = l_0 l^0 + l_1 l^1 + l_2 l^2 + l_3 l^3, \quad (24)$$

e o produto escalar sob essa ótica é:

$$A \cdot A = A^\mu A_\mu = A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3 = g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu. \quad (25)$$

Claramente essa magnitude é um escalar, ou seja, ela é invariante sob transformações, principalmente as de Lorentz. Esse mesmo produto escalar pode ser utilizado para as derivadas que definimos anteriormente, dando origem ao operador d'alembertiano:

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (26)$$

O quadrado na equação anterior, sim é de fato um quadrado, é o operador conhecido por D'alembertiano, uma generalização do operador Laplaciano com uma dimensão temporal.

2.2 Espaço Anti-de-Sitter

Um dos principais conceitos a serem estudados é o espaço anti-de-Sitter. Trata-se de um espaço construído sobre uma variedade Lorentziana, um caso específico de métrica que será utilizada, simplesmente conexa, simétrico e com uma curvatura negativa. Trataremos o espaço anti-de-Sitter como AdS para facilitar a nomenclatura, ele recebe este nome devido ao físico William de Sitter, o termo anti é adicionado devido à curvatura contrária ao proposto por ele.

Encontrar uma geometria associada a uma teoria quântica de campos costuma se tratar de um problema complicado. Porém, se a teoria se encontra em um ponto fixo com uma função β que desaparece, ela possui uma invariância conforme, é uma teoria de campos conforme, ou em inglês conformal field theory (CFT), e então é possível encontrar tal métrica [7].

De forma geral, queremos utilizar esse espaço e encontrar uma transformação conforme, isto é, uma transformação que faça $x_\mu \rightarrow x'_\mu$ e ao mesmo tempo obedeça a seguinte

propriedade:

$$g'_{\rho\sigma}(x') \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) , \quad (27)$$

em que $g'_{\rho\sigma}$ e $g_{\mu\nu}$ são os tensores definidos como métricas de cada um dos espaços onde ocorre a transformação, de forma que $\Omega(x)$ é um fator de proporção de escala.

A ideia central agora é pensar em um espaço com $d + 1$ dimensões, isto é, a parte espacial e temporal do problema é dada por $\vec{x} = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^d)$ e a última dimensão é tratada por z . Também é possível tratar como um vetor $(t, \vec{x}, z)$. Em seguida, precisamos entender como se dá a invariância de um intervalo em tal espaço, sendo assim, o intervalo entre dois pontos fica dado por:

$$ds^2 = \Omega(z)(-dt^2 + d(\vec{x}^2) + dz^2) . \quad (28)$$

Precisamos que esse intervalo seja invariante de escala, isto é, que o intervalo seja invariante sobre a transformação $(t, \vec{x}, z) \rightarrow \lambda(t, \vec{x}, z)$, onde λ é um fator de escala a ser descoberto.

Portanto, para que ds^2 seja invariante sobre essa transformação, precisamos que $\Omega \rightarrow \lambda^{-1}\Omega$, o que é satisfeito caso $\Omega(z) = \frac{L}{z}$. Logo, colocando essa função em (25) temos que

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2}(dt^2 + d(\vec{x}^2) + dz^2) . \quad (29)$$

Que é um elemento de linha do espaço AdS com $d+1$ dimensões, ou simplesmente AdS_{d+1} . L é um fator de escala global, também conhecido como raio do espaço anti-de-Sitter. Contudo, a solução conforme se encontra no limite em que $z = 0$, uma vez que a ideia proposta por Maldacena para encontrar soluções perturbativas neste espaço se encontra no limite entre as dimensões do problema, o que será melhor estudado ao decorrer do texto.

Essa métrica (29) é a solução da equação de ação gravitacional do tipo:

$$I = \frac{1}{16\pi G_N} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} [-2\Lambda + R + c_2 R^2 + c_3 R^3 + \dots] . \quad (30)$$

Em que G_N é a constante newtoniana, c_i são constantes, $g = \det(g_{\mu\nu})$, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ é a curvatura escalar, e Λ é a constante cosmológica.

Tomando $c_2 = c_3 = \dots = 0$, a ação I se torna a equação de Einstein-Hilbert, uma ação da relatividade geral com uma constante cosmológica. Nesse caso, temos as equações de movimento de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\Lambda g_{\mu\nu} . \quad (31)$$

Tomando o traço de ambos os lados podemos encontrar a curvatura escalar.

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = 2 \frac{d+1}{d-1} \Lambda . \quad (32)$$

Colocando esse resultado em (28) obtemos o tensor de Ricci, ou seja, $R_{\mu\nu}$, proporcional à métrica

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \frac{2}{d-1} . \quad (33)$$

Enquanto que pela definição ele deveria ser algo do tipo

$$R_{\mu\nu} = -\frac{d}{L^2} g_{\mu\nu} . \quad (34)$$

Comparando então as duas equações, (33) e (34), temos que a constante cosmológica pode ser definida como:

$$\Lambda g_{\mu\nu} \frac{2}{d-1} = -\frac{d}{L^2} g_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda = -\frac{d(d-1)}{2L^2} . \quad (35)$$

Que é uma constante negativa. Sendo assim, utilizando este resultado na equação (32) podemos encontrar a curvatura escalar do espaço AdS_{d+1} com raio L dada por:

$$R = -\frac{d(d+1)}{L^2} . \quad (36)$$

Neste trabalho, tomaremos um sistemas de 3+1 dimensões, ou seja $d = 4$, o que significa que estudaremos situações em um espaço AdS_5 .

2.3 Teoria de Grupos

2.3.1 Definição de grupo

Uma ideia muito importante na física atual é o conceito de teoria de grupos, que constitui um papel importante quando tratamos de simetrias, uma vez que a teoria de grupos é muito utilizada para definir e interpretar transformações, que caso não alterem as equações de movimento, são simétricas. Sendo assim, é importante compreender e deixar claro alguns pontos e interpretações existentes desta teoria [2].

Primeiro, é necessário entender a definição de grupo. Um grupo L é um conjunto de elementos $\{a, b, c, \dots\}$ que contém uma regra de composição, ou uma operação de multiplicação tal qual se $a \in L$ e $b \in L$ então o produto $ab \in L$

Existem também, quatro axiomas que um grupo deve obedecer, sendo eles, associatividade, elemento identidade, elemento inverso e ordem [2], definidos a seguir:

Associatividade: $(ab)c = a(bc)$

Elemento identidade: $ae = ea = a$

Elemento inverso: $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Ordem: A ordem do grupo é o número de elementos pertencentes a L

2.3.2 Parâmetro de grupos e geradores

A ideia de grupo pode ser relacionada com o conceito de função. Para uma função

$y = f(x)$ obtemos um valor de y para um dado x , de forma análoga, um grupo é definido em função de seus parâmetros, ou seja, um elemento l qualquer pode ser definido utilizando os parâmetros do grupo L

$$l = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) , \quad (37)$$

desta forma, o elemento neutro e fica definido por:

$$e = L(0, 0, \dots, 0) . \quad (38)$$

Com isto definido, é possível discutir a ideia de geradores, apesar de existirem grupos com uma quantidade finita de elementos, boa parte dos grupos possui um número infinito de elementos, porém com uma quantidade finita de parâmetros contínuos variáveis.

Logo, tomando a ideia já expressa anteriormente em função dos ângulos θ_i , a ideia de rotações surge como uma das principais formas de grupos existentes na física. Sendo assim, temos que os ângulos variam em um limite finito, $[0, 2\pi]$, e então o grupo é parametrizado por um número finito de parâmetros [2]. Portanto, fica definido o conhecido como Grupo de Lie, onde L depende de um conjunto finito de parâmetros θ_i , e as derivadas dos elementos do grupo existem.

Por fim, definimos os geradores do grupo, isto é, tomando as derivadas dos elementos com respeito aos parâmetros, encontramos a forma com que o grupo é gerado:

$$X = \frac{\partial l}{\partial \theta} \big|_{\theta=0} . \quad (39)$$

De forma mais genérica, pensando que existem n geradores e que uma rotação $-\theta$ desfaz uma outra rotação θ , as rotações possuem uma representação ortogonal ou unitária, no caso da ideia quântica, queremos que os gerados sejam hermitianos, sendo assim, a forma genérica deles é dada por:

$$X_i = -i \frac{\partial l}{\partial \theta_i} \big|_{\theta_i=0} . \quad (40)$$

Esses geradores formam um espaço vetorial, ou seja, dois geradores somados criam um terceiro gerador, e um gerador multiplicado por um escalar continua sendo um gerador, de forma que eles obedecem a *Álgebra de Lie*

$$[X_i, X_j] = i f_{ijk} X_k . \quad (41)$$

Onde f_{ijk} é a constante de estrutura do grupo, em que caso $f_{ijk} = 0$ temos que o grupo é abeliano, e para o oposto o grupo é não abeliano.

2.3.3 Rotações e Grupos de Simetria

Rotações são um tipo muito especial de simetria que aparecem em vários problemas,

sendo assim, nada mais justo do que explicar o que é um grupo de simetria através delas. Sendo assim, definimos uma rotação como uma mudança de referencial do tipo:

$$x' = x \cos(\theta) + y \sin(\theta) , \quad (42)$$

$$y' = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta) , \quad (43)$$

de forma que podemos escrever essa relação em forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos(\theta) & y \sin(\theta) \\ -x \sin(\theta) & y \cos(\theta) \end{pmatrix} . \quad (44)$$

Onde fica definido:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} . \quad (45)$$

Denotamos essa matriz de *matriz de rotação*.

É fácil ver também que o produto de R com sua transposta R^T é a matriz identidade.

$$RR^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (46)$$

e que $R(-\theta) = R^T$, devido a paridade das funções seno e cosseno. Outro ponto importante é que uma rotação mantém a norma de um vetor qualquer invariante, para visualizar isso, escrevemos a rotação da seguinte maneira:

$$x'_j = R_{ij} x_i . \quad (47)$$

Onde x'_j é o vetor rotacionado de um ângulo θ . E definimos a relação de ortogonalidade, entre as matrizes de rotação, como segue:

$$\sum_j R_{ij}^T R_{jk} = \delta_{ik} = 1_{ij} . \quad (48)$$

Com isso definido, é possível ver que a norma de um vetor rotacionado é invariante, que é o equivalente a mostrar:

$$\sum_i x'_i x'_i = \sum_{i,j,k} R_{ij} x_j R_{ik} x_k = \sum_{i,j,k} x_j R_{ji}^T R_{ik} x_k = \sum_j x_j x_j . \quad (49)$$

Logo, fica verificado tanto a característica de ortogonalidade das matrizes de rotação, quanto a invariância da norma do vetor rotacionado. Algo muito parecido ocorre, por exemplo, com as transformações de Lorentz, onde a norma do intervalo transformado também é invariante. O que permite relacionar dois sistemas de referencia, K e K' , onde

o segundo se desloca em uma velocidade v constante em relação ao segundo:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Onde $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. De forma que chegamos novamente no discutido na sessão 2.1.2, um quadrivetor x^μ sendo modificado por um tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Este é um exemplo de grupo de simetria, chamado de $SO(2)$, ou especial ortogonal 2×2 , recebe este nome devido a suas características discutidas anteriormente, ortogonal remete a sua ortogonalidade, especial ao fato dos determinantes das matrizes de rotação serem iguais a 1, e 2×2 devido ao formato das matrizes.

2.4 Teoria de campos, Clássica e Quântica

2.4.1 Introdução a teoria de campos

A teoria clássica de campos trás várias mudanças para a forma com que se é estudada a mecânica que conhecemos. A principal diferença é a mudança do objeto de estudo em questão, deixamos de visualizar a mecânica como algo simplesmente corpuscular e tentamos entendê-la através de objetos conhecidos como campos [4].

Para a mecânica lagrangiana, comumente conhecida, nos pautamos em coordenadas generalizadas $(q_i, \dot{q}_i)$, de forma que tanto a lagrangiana L e o hamiltoniano H são descritos através dessas coordenadas e suas taxas de variação.

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i p_i - L. \quad (51)$$

Já para a teoria de campos, as coordenadas generalizadas passam a ser tratadas por campos $(\varphi, \partial_\mu \varphi)$, de forma que agora tanto a lagrangiana e o hamiltoniano são definidos de uma nova maneira, através de densidades:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad (52)$$

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(\varphi, \pi), \quad (53)$$

de forma que ambos estão relacionados:

$$\mathcal{L}(\varphi, \dot{\varphi}) = \pi(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} - \mathcal{H}(\varphi, \pi), \quad (54)$$

e também fica definido o momento canônico conjugado:

$$\pi(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} . \quad (55)$$

Essas mudanças permitem explorar uma quantidade infinita de graus de liberdade, sendo essa a principal diferença encontrada na teoria de campos.

2.4.2 Euler-Lagrange

Durante o estudo de teoria quântica de campos, em inglês quantum field theory (QFT), boa parte da abordagem é feito em termos da Lagrangiana, já que diferente do hamiltoniano, ela é independente do quadri-momento p^μ , de forma que é invariante sob transformações de Lorentz. Com isso em mente, uma das ferramentas mais utilizadas no estudo de QFT é a ação:

$$\mathcal{S} = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x . \quad (56)$$

Com ela, é possível aplicar o princípio de mínima ação, que diz que a ação sempre deve ser mínima em algum fenômeno, ou seja, $\delta \mathcal{S} = 0$. Logo, a fim de determinar a equação de Euler-Lagrange para um campo qualquer φ , faremos o seguinte [2,5]

Escrevemos um diferencial para a densidade lagrangiana, $\delta \mathcal{L}$, considerando os limites a e b fixos ,como sendo:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi , \quad (57)$$

de forma que a variação da ação se torna:

$$\delta \mathcal{S} = \int_a^b d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi \right] = 0 . \quad (58)$$

Usando $\delta \varphi = \varphi' - \varphi$, percebemos que:

$$\partial_\mu \delta \varphi = \partial_\mu \varphi' - \partial_\mu \varphi = \delta(\partial_\mu \varphi) . \quad (59)$$

e a primeira integral então fica reescrita:

$$\int_a^b d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \varphi]} \partial_\mu(\delta \varphi) , \quad (60)$$

que pode ser integrado por partes, onde o termo de contorno some uma vez que os limites são fixos.

$$\int_a^b d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \varphi]} \partial_\mu(\delta \varphi) = \cancel{\delta \varphi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \varphi]} \Big|_a^b} - \int_a^b d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \varphi]} \right) \delta \varphi . \quad (61)$$

Logo, a variação fica dada por:

$$\delta \mathcal{S} = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \varphi]} \right) \right] \delta \varphi = 0 , \quad (62)$$

em que os limites foram omitidos. O termo $\delta\varphi$ é arbitrário, restando somente o fato de que o termo entre colchetes é nulo para que a variação seja também nula. Esta é então a equação de Euler-Lagrange para um campo φ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \right) = 0 \quad (63)$$

2.4.3 Simetrias e teoria conforme

Outro ponto muito trabalhado na teoria de campos é o uso de simetrias e da teoria conforme. Através do teorema de Noether, um dos mais bonitos teoremas matemáticos, fica estabelecido uma relação entre simetria e leis de conservação através do formalismo lagrangiano, ou seja, o fato de quantidades conservadas como carga, momento e energia, existirem está diretamente relacionado com a invariância sob certas transformações das lagrangianas relacionadas a estas quantidades .

Um exemplo importante de conservação é o tensor de energia e momento. Sua definição aparece quando tentamos realizar uma pequena variação no espaço-tempo [2], da seguinte forma:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + l^\mu , \quad (64)$$

em que l^μ é um parâmetro arbitrário que descreve uma pequena variação.

Realizando uma expansão de Taylor num campo que sofreu este tipo de transformação encontramos que:

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + l) = \varphi(x) + l^\mu \partial_\mu \varphi . \quad (65)$$

Porém, uma pequena variação em um campo φ é descrita por $\varphi = \varphi + \delta\varphi$, que por comparação com (65) permite escrever:

$$\delta\varphi = l^\mu \partial_\mu \varphi . \quad (66)$$

Retomando as equação (57):

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi , \quad (67)$$

e utilizando a equação de Euler-Lagrange (63):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \right) , \quad (68)$$

é possível reescrever a variação da lagrangiana como sendo:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \right) \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta (\partial_\mu \varphi) , \quad (69)$$

ou

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu \varphi]} \right) \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta \varphi) , \quad (70)$$

que é facilmente percebido como uma regra do produto, tornando a variação:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \delta\varphi \right) . \quad (71)$$

Agora, substituindo $\delta\varphi = l^\nu \partial_\nu\varphi = \partial_\nu\varphi l^\nu$:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\nu\varphi \right) l^\nu . \quad (72)$$

em que o índice foi trocado devido repetição. Outra forma de analisar a variação da lagrangiana é :

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu(\mathcal{L})l^\mu = \delta_\nu^\mu \partial_\mu(\mathcal{L})l^\nu , \quad (73)$$

e então podemos comparar as equações (72) e (73)

$$\delta\mathcal{L} = \delta_\nu^\mu \partial_\mu(\mathcal{L})l^\nu = \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\nu\varphi \right) l^\nu , \quad (74)$$

rearranjando:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\nu\varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) l^\nu = 0 . \quad (75)$$

Como o fator l^ν é arbitrário, a única opção a fim de tornar a expressão nula é que a derivada do termo entre parênteses seja nulo, isto é, que ele seja constante. Essa quantidade é definida como o tensor de energia e momento:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\varphi]} \partial_\nu\varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} , \quad (76)$$

é interessante notar que:

$$T_0^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \mathcal{H} . \quad (77)$$

Com essa discussão fica definido a importância e uma forma de interpretar a conservação de energia através de simetria na teoria de campos.

2.4.4 Equações de Klein-Gordon e Dirac

Uma das formas propostas para lidar com a teoria de campos em seu nível quântico foi a promoção de ordem das derivadas temporais, o que acarretou na equação de Klein-Gordon [2,5,6]:

$$\hbar \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \varphi + m^2 c^4 \varphi = 0 , \quad (78)$$

que quando tratada em unidades naturais[4], $\hbar = c = 1$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi + m^2 \varphi = 0 , \quad (79)$$

que pode ser ainda mais simplificada utilizando a equação (26):

$$(\square + m^2) \varphi = 0 . \quad (80)$$

Essa é a equação de Klein-Gordon, uma das possibilidades pensadas para a teoria quântica de campos. Contudo, essa equação traz uma interpretação não intuitiva sobre a visão probabilística da mecânica quântica, seus resultados acabam por gerar energias e densidades de probabilidade negativas dependendo da forma que se abordam alguns problemas com essa equação.

A energia negativa pode ser interpretada como uma solução para descrever os estados de energia de antipartículas, contudo a probabilidade negativa não possui uma interpretação física coerente.

Outra forma de interpretar a teoria quântica de campos foi proposta por Dirac, onde o caminho escolhido é o oposto à equação de Klein-Gordon, ao invés de promover as derivadas temporais, consideramos as derivadas espaciais como sendo somente de primeira ordem.

Relembrando a equação de Schrodinger temos que:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi , \quad (81)$$

em que $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V$ é o operador hamiltoniano. Entretanto, Dirac alterou a forma com que o operador hamiltoniano é interpretado, o escolhendo de forma a satisfazer os requisitos da relatividade especial. Assumindo então que uma partícula nesta equação possui massa de repouso m [2], encontramos que:

$$\hat{H} = c\vec{\alpha} \cdot (-i\hbar \nabla) + \beta mc^2 , \quad (82)$$

em que α e β estão relacionados às matrizes de Dirac de ordem 4×4 .

2.4.5 Matrizes de Dirac

Utilizando a matriz identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (83)$$

é possível escrever as matrizes de Dirac da seguinte maneira:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (84)$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (85)$$

$$\gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (86)$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (87)$$

de forma que os fatores $\vec{\alpha}$ e β estão relacionados por:

$$\gamma^0 = \beta, \quad (88)$$

$$\gamma^i = \beta \alpha_i. \quad (89)$$

Uma das propriedades dessas matrizes está relacionada ao seu anticomutador $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\}$, isto é:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (90)$$

o que relaciona diretamente as matrizes de Dirac com a métrica do espaço tempo.

Existem formas de melhor expressar a equação de Dirac em função dessas matrizes gama, uma delas decorre multiplicando a equação (82) por β , utilizando $c = \hbar = 1$ e aplicando-a em um estado ψ :

$$\beta \hat{H} \psi = \beta \vec{\alpha} \cdot (-i\nabla) \psi + \beta^2 m \psi. \quad (91)$$

Como $\hat{H} = i \frac{\partial}{\partial t}$ temos:

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\beta \alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\beta \alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta^2 m \psi, \quad (92)$$

utilizando (88) e (89):

$$i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = -i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (93)$$

lembrando que $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (94)$$

onde essa é a forma mais simplificada da equação de Dirac utilizando as matrizes gama.

3 Campo escalar no espaço Anti-de-Sitter

A fim de compreender a ideia do potencial quark-antiquark, é necessário entender o funcionamento de um campo escalar no espaço Anti-de-Sitter, isto é, entender o funcionamento de um campo escalar em um espaço AdS, que é o espaço utilizado durante esta discussão.

Primeiramente, é necessário definirmos a métrica desse espaço, que é a mesma mostrada na equação (29). Contudo, podemos reescrevê-la de uma forma mais simples de ser interpretada. Escrevemos então:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} [dz^2 + \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu] \quad (95)$$

Onde dz^2 se refere a uma dimensão extra, enquanto $\delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ entrega a dimensão espacial conhecida. Essa métrica pode ser escrita na forma matricial, o que torna mais fácil visualizar alguns dos passos a seguir. Trocaremos então o termo ds^2 por g_{MN} que é mostrado da seguinte forma generalizada:

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} \frac{L^2}{z^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{z^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{z^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{L^2}{z^2} \end{pmatrix}. \quad (96)$$

Essa matriz possui $d+1$ termos na diagonal, representando a quantidade de dimensões do problema, d dimensões de espaço e $+1$ dimensão extra. Sendo assim, dizemos que o espaço a ser utilizado é um espaço AdS_{d+1} , com $d+1$ dimensões.

O próximo passo é entender como funciona a ação de um campo escalar φ neste espaço AdS_{d+1} e sua respectiva equação de movimento, que é derivada da aplicação de Euler-Lagrange neste campo. Sendo assim, temos a seguinte ação pra um campo escalar qualquer φ :

$$S = -\frac{1}{2} \int d^{d+1}x \sqrt{g} [g^{MN} \partial_M \varphi \partial_N \varphi + m^2 \varphi^2], \quad (97)$$

onde fica implícito que:

$$S = \int d^{d+1}x \mathcal{L}, \quad (98)$$

em que a lagrangiana $\mathcal{L}$ é:

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{g}}{2} [g^{MN} \partial_M \varphi \partial_N \varphi + m^2 \varphi^2]. \quad (99)$$

De forma que utilizando a equação de Euler-Lagrange obtemos a equação de movi-

mento para esse campo escalar φ como segue

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_M \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_M \varphi]} = 0 , \quad (100)$$

a parte esquerda da equação (100) sai de forma direta:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[-\frac{\sqrt{g}}{2} m^2 \varphi^2 \right] = -\sqrt{g} m^2 \varphi . \quad (101)$$

Por outro lado, a derivação a direita é um tanto quanto complicada, necessitando do levantamento e abaixamento de índices durante o desenvolvimento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_M \varphi]} = \frac{\partial}{\partial [\partial_M \varphi]} \left[-\frac{\sqrt{g}}{2} (g^{MN} \partial_M \varphi \partial_N \varphi) \right] , \quad (102)$$

podemos retirar as constantes $\frac{-\sqrt{g}}{2}$ e g^{MN} do argumento da derivada, o que nos resulta em:

$$\frac{-\sqrt{g}}{2} g^{MN} \frac{\partial}{\partial [\partial_M \varphi]} (\partial_M \varphi \partial_N \varphi) , \quad (103)$$

utilizando o fato de que $\partial_N = g^{MN} \partial^M$ vemos que:

$$\frac{\partial}{\partial [\partial_M \varphi]} (\partial_M \varphi \partial_N \varphi) = \frac{\partial}{\partial [\partial_M \varphi]} (g^{MN} \partial_M \varphi \partial^M \varphi) , \quad (104)$$

e como $\partial^M \varphi \partial_M \varphi = (\partial^M \varphi)^2$ fica claro que:

$$\frac{\partial}{\partial [\partial_M \varphi]} (\partial^M \varphi)^2 = 2 \partial^M \varphi . \quad (105)$$

Substituindo em (103) encontramos o resultado para a derivação a direita:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_M \varphi]} = \frac{-\sqrt{g}}{2} g^{MN} 2 g^{MN} \partial^M \varphi = -\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \varphi , \quad (106)$$

finalmente, a equação de Euler-Lagrange resulta em:

$$-\sqrt{g} m^2 \varphi + \partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \varphi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \varphi) - m^2 \varphi = 0 . \quad (107)$$

Contudo, esta equação possui a métrica g^{MN} e o determinante $g = \det(g_{MN})$, queremos então utilizar a equação (107) para determinar de fato a equação de movimento de um campo escalar. Começamos por entender que a métrica g^{MN} difere de g_{MN} , mas são relacionadas através de $g^{MN} g_{MN} = I$, ou seja, $g^{MN} = (g_{MN})^{-1}$, logo:

$$g^{MN} = \begin{pmatrix} \frac{z^2}{L^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{z^2}{L^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z^2}{L^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{z^2}{L^2} \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Já o determinante pode ser calculado através da diagonal principal da matriz g_{MN} , de forma que $g = \left(\frac{z}{L}\right)^{2(d+1)}$, o que implica diretamente que $\sqrt{g} = \left(\frac{z}{L}\right)^{d+1}$. Com essas informações, desenvolvemos a derivada parcial em relação ao índice M na equação (107), e então utilizamos essas consideração a fim de obter uma simplificação:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_M (\sqrt{g} g^{MN} \partial_N \varphi) - m^2 \varphi = 0, \quad (109)$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} [\partial_M (\sqrt{g} g^{MN}) \partial_N \varphi + \sqrt{g} g^{MN} \partial_M \partial_N \varphi] - m^2 \varphi = 0. \quad (110)$$

Considerando que o primeiro termo do colchete $\sqrt{g} g^{MN}$ é dependente somente da variável z

$$\partial_M (\sqrt{g} g^{MN}) \partial_N \varphi = \partial_z \left(\left(\frac{L}{z} \right)^{d+1} \left(\frac{L}{z} \right)^{-2} \right) \partial_z \varphi. \quad (111)$$

O segundo termo é independente de z

$$\sqrt{g} g^{MN} \partial_M \partial_N \varphi = \left(\frac{L}{z} \right)^{d+1} \left(\frac{L}{z} \right)^{-2} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi. \quad (112)$$

A equação (107) fica reescrita como:

$$\left(\frac{z}{L} \right)^{d+1} \left[\partial_z \left(\left(\frac{L}{z} \right)^{d+1} \left(\frac{L}{z} \right)^{-2} \right) \partial_z \varphi + \left(\frac{L}{z} \right)^{d+1} \left(\frac{L}{z} \right)^{-2} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi \right] - m^2 \varphi = 0. \quad (113)$$

E para fim de simplificação:

$$\left(\frac{z}{L} \right)^{d+1} [\partial_z (L^{d-1} z^{1-d}) \partial_z \varphi + L^{d+1} z^{1-d} \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi] - m^2 \varphi = 0. \quad (114)$$

Usando o fato de que $\frac{L^{d-1}}{L^{d+1}} = L^{-2}$ e $z^{d+1} z^{1-d} = z^2$, rearranjando os termos:

$$z^{d+1} (L^{-2} \partial_z (z^{1-d} \partial_z \varphi)) + L^{-2} z^2 \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi - m^2 \varphi = 0. \quad (115)$$

E por fim, encontramos a equação de movimento para este campo escalar através das equações de Euler-Lagrange:

$$z^{d+1} \partial_z (z^{1-d} \partial_z \varphi) + z^2 \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \varphi - m^2 L^2 \varphi = 0 \quad (116)$$

Com a equação de movimento em mão, queremos utilizar uma transformada de Fourier, a fim de relacionar o campo φ e a coordenada x^μ através de uma função $f_k(z)$ [7], isto é:

$$\varphi(z, x^\mu) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{ik \cdot x} f_k(z) . \quad (117)$$

Que quando substituída na equação (72) resulta:

$$z^{d+1} \partial_z (z^{1-d} \partial_z f_k) - k^2 z^2 f_k - m^2 L^2 f_k = 0 . \quad (118)$$

Queremos então resolver esta equação para pequenos valores de z , ou seja, para um contorno próximo de $z = 0$. Escolhemos uma função $f_k \approx z^\beta$, com um expoente qualquer, como uma ideia inicial, a fim de compreender o funcionamento de β quando próximo a valores pequenos de z , ou seja, tratar a teoria como uma função β que desaparece, a fim de encontrar uma teoria conforme relacionada ao sistema.

Temos então:

$$z^{d+1} \partial_z (z^{1-d} \partial_z z^\beta) - k^2 z^2 z^\beta - m^2 L^2 z^\beta = 0 . \quad (119)$$

Como o termo $\partial_z (z^{1-d} \partial_z z^\beta) = \beta(\beta - d)z^{-d-1+\beta}$, a expressão é simplificada para:

$$z^{d+1} \beta(\beta - d)z^{-d-1+\beta} - k^2 z^2 z^\beta - m^2 L^2 z^\beta = 0 , \quad (120)$$

$$\beta(\beta - d)z^\beta - k^2 z^2 z^\beta - m^2 L^2 z^\beta = 0 . \quad (121)$$

De forma que o termo z^2 vai para 0 quando $z = 0$ e os termos z^β são simplificados:

$$\beta(\beta - d) - m^2 L^2 = 0 . \quad (122)$$

Então os valores de β são facilmente obtidos através da resolução de (78), são eles:

$$\beta = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2} . \quad (123)$$

Sendo assim, com β definido, podemos interpretar a função $f_k(z)$ como uma soma de ambas as contribuições de β para a exponencial z^β , isto é, podemos definir o comportamento de $f_k(z)$ para $z \rightarrow 0$ como:

$$f_k(z) \approx A(k)z^{d-\Delta} + B(k)z^\Delta . \quad (124)$$

onde fica definido $\Delta = \frac{d}{2} + \nu$; $\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2 L^2}$.

Com a função $f_k(z)$ definida, é possível realizar a transformada inversa de Fourier, retornando para o espaço de posição.

$$\mathcal{F}^{-1}[f_k(z)] = \varphi(z, x) = A(x)z^{d-\Delta} + B(x)z^\Delta , \quad z \rightarrow 0 . \quad (125)$$

Note que para Δ ser real, é necessário que ν pertença ao conjunto de números reais, $\nu \in \mathbb{R}$, o que só ocorre caso $m^2 \geq -\left(\frac{d}{2L}\right)^2$, que é conhecido como o Breitenlohner-Freedman (BF) bound [7].

Isso implica que o termo m^2 pode ser negativo, mas é necessário que tal limiar seja satisfeito. Sendo assim:

$$d - \Delta \leq \Delta \iff \nu = 2\Delta - d \geq 0 , \quad (126)$$

o que de fato é satisfeito próximo a borda, ou seja, o termo $z^{d-\Delta}$ é o termo dominante quando $z \rightarrow 0$. Logo, é plausível negligenciar o termo dependente de z^Δ e trabalhar com a seguinte aproximação:

$$\varphi(z = \epsilon, x) \approx \epsilon^{d-\Delta} A(x) , \quad (127)$$

em que estudamos o contorno $z = \epsilon$, para um ϵ pequeno.

Para o caso em que $m^2 > 0$, a parcela $d - \Delta$ é negativa, e logo o termo dominante, $z^{d-\Delta}$ diverge quando $z = \epsilon \rightarrow 0$. Logo, para remover tal divergência, é necessário definir uma nova função, $\phi(x)$, a qual chamaremos de fonte, usaremos ela a fim de anular os fatores que tornam o termo dominante divergente no limite estudado.

$$\phi = \lim_{z \rightarrow 0} z^{d-\Delta} \varphi(z, x) , \quad (128)$$

com essa definição, ϕ é uma função sempre finita, de forma que podemos reescrever:

$$\varphi(z, x) = z^{d-\Delta} A(x) = z^{d-\Delta} \phi(x) , \quad (129)$$

de forma que $\phi(x) = A(x)$

Por fim, um ponto interessante a observar, é o significado do fator Δ . Para isto, lembramos que para um operador $\mathcal{O}$ dual a φ a ação de contorno é a seguinte [7]:

$$S_c \sim \int d^d x \sqrt{\gamma_\epsilon} \varphi(\epsilon, x) \mathcal{O}(\epsilon, x) , \quad (130)$$

onde $\gamma_\epsilon = \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^{2d}$ é o determinante da métrica utilizada para o contorno $z = \epsilon$. Então, substituindo $\varphi(\epsilon, x) = \epsilon^{d-\Delta} \phi(x)$ em (130), encontramos:

$$S_c \sim \int d^d x \left(\frac{L}{\epsilon}\right)^d \epsilon^{d-\Delta} \phi(x) \mathcal{O}(\epsilon, x) = L^d \int d^d x \phi(x) \epsilon^{-\Delta} \mathcal{O}(\epsilon, x) , \quad (131)$$

de forma que para que S_c seja finita e independente de ϵ , precisamos que

$$\mathcal{O}(\epsilon, x) = \epsilon^\Delta \mathcal{O}(x)$$

Contudo, ao transformar de $z = 0$ para $z = \epsilon$, no ponto de vista da teoria quântica de campos, é uma transformação de escala, ou seja, o fator Δ deve ser interpretado como a dimensão escalar de massa do operador dual $\mathcal{O}$. Ou seja, a transformação $\mathcal{O}(\epsilon, x) = \epsilon^\Delta \mathcal{O}(x)$ é a renormalização da função de onda de $\mathcal{O}$, que pode ser interpretado como a mudança principal entre os espaços de 4 e 5 dimensões, a transição entre os dois espaços desta dualidade AdS-CFT. Da mesma forma, segue que $d - \Delta$ é a dimensão escalar de massa da fonte ϕ .

4 O potencial Quark-Antiquark

Para esta parte, é necessário lembrar que quarks são partículas elementares sujeitas a todas as interações conhecidas na física, porém, esta abordagem se dá principalmente na interação nuclear forte, ou seja, na carga de cor¹. Para começar a discussão sobre o potencial de um par quark-antiquark, iremos considerar uma carga se movendo ao longo de uma curva fechada $\mathcal{C}$ no espaço-tempo da eletrodinâmica quântica, essa ideia é interessante pois permite quantificar a interação dos quarks através de um potencial que pode ser trabalhado no futuro. Sendo assim, a ação necessária para que exista o movimento desta carga é dada por [7]:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu} , \quad (132)$$

onde na interpretação das integrais de caminhos e propagadores de Feynmann, é o equivalente à adição desse valor a uma exponencial complexa, isto é:

$$e^{i\mathcal{S}_{\mathcal{C}}} = e^{i \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu}} \equiv W(\mathcal{C}) , \quad (133)$$

de forma que $W(\mathcal{C})$ é chamado de Wilson loop, ou loop de Wilson [7], trata-se de uma holonomia de um campo de calibre A_{μ} ao longo da curva fechada $\mathcal{C}$ ².

É possível notar que $W(\mathcal{C})$ é o vetor de fase de Aharonov-Bohm devido à propagação de um quark ao longo do contorno $\mathcal{C}$. Outro detalhe importante é que $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$ pode ser interpretado como a amplitude necessária para a criação de um par $q\bar{q}$ (quark-antiquark) que se propaga e imediatamente se aniquila.

Para o caso deste estudo, queremos considerar um contorno para este loop em formato retangular, em um espaço Euclidiano convencional, ou seja o tempo é um escalar complexo, $t = i\tau$, em que as dimensões do retângulo serão dadas por T e d .

Sendo assim, o loop é a magnitude da propagação de um par $q\bar{q}$ separado por uma distância d , que pode ser calculado através do formalismo Hamiltoniano. Por definição, o loop é dado pela forma:

$$W(\mathcal{C}) = Tr P exp \left[i \oint_{\mathcal{C}} A_{\mu} dx^{\mu} \right] , \quad (134)$$

onde Tr é o traço sobre os índices e P o operador de ordenação de caminho.

Comparando (132) e (56) é possível perceber que para este caso, $A_{\mu} = \mathcal{L}$, já que a ação S necessariamente depende da densidade Lagrangiana. O conceito de densidade Hamiltoniana relaciona ambas densidades da seguinte forma na teoria de campos:

$$\mathcal{L} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{H} , \quad (135)$$

¹A carga de cor está relacionada à interação nuclear forte, estudada pela cromodinâmica quântica [9].

²Holonomia é o termo utilizado para definir uma mudança em um dado vetor quando se movimenta em torno de uma curva fechada [10].

o que permite reescrever a equação (134):

$$W(\mathcal{C}) = \text{Tr} P \exp \left[i \oint_{\mathcal{C}} (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}) dx^\mu \right] . \quad (136)$$

Sendo assim, o valor esperado para este loop, $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$, é:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = \langle \text{Tr} P \exp \left[i \oint_{\mathcal{C}} (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}) dx^\mu \right] \rangle , \quad (137)$$

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = \langle \text{Tr} P \exp \left[i \oint_{\mathcal{C}} \pi \dot{\varphi} dx^\mu \right] \exp \left[-i \oint_{\mathcal{C}} \mathcal{H} dx^\mu \right] \rangle , \quad (138)$$

em que o termo imaginário na segunda exponencial é anexado ao diferencial de tempo existente em dx^μ .

Ou seja, a parte espacial desta segunda exponencial retorna o valor médio da densidade Hamiltoniana, que é basicamente o valor de energia esperado para o sistema em uma determinada distância d , enquanto o termo temporal entrega uma determinada distância percorrida pela partícula no tempo através da curva $\mathcal{C}$. Logo, fica entendido que o valor esperado para o loop, $\langle W(\mathcal{C}) \rangle$, é proporcional à essa exponencial:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle \propto e^{-TE(d)} . \quad (139)$$

De fato, quando $T \rightarrow \infty$ encontra-se que:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim e^{-TE(d)} , \quad (140)$$

onde $E(d)$ é a energia do par $q\bar{q}$ separados a uma distância d . Em uma teoria confinada, a energia cresce linearmente com a distância entre o par $q\bar{q}$ [7].

$$E(d) \approx \sigma d , \quad (141)$$

sendo σ uma constante. Dessa forma, fica evidente que o loop, em uma teoria confinada, satisfaz a lei da área:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \langle W(\mathcal{C}) \rangle \sim e^{-T\sigma d} \sim e^{-\sigma A} , \quad (142)$$

sendo A a área envolvida pela curva $\mathcal{C}$.

Em seguida, é necessário introduzir o conceito de folha mundo, e adentrar, de forma qualitativa, em uma interpretação da teoria de cordas. A folha mundo é um espaço bidimensional euclidiano, e para nosso caso, representaremos o loop, $W(\mathcal{C})$, por uma corda aberta, cuja folha mundo tem um contorno $\partial\Sigma$ definido por uma D-brana que descreve a curva $\mathcal{C}$.

A fim de tornar os quarks infinitamente massivos, (não dinâmicos), empurramos a D-brana para o contorno AdS , o que implica que $\partial\Sigma = \mathcal{C}$ se encontra no limite AdS $z = 0$.

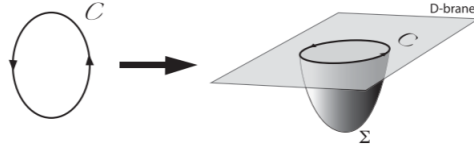


Figura 1: Um Wilson loop ao longo de uma curva fechada $\mathcal{C}$ é idealizada holograficamente como o contorno da superfície Σ [7].

O que acaba por definir o loop de uma outra maneira:

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle = Z_{corda}(\partial\Sigma = \mathcal{C}) = e^{-\mathcal{S}(\mathcal{C})} , \quad (143)$$

em que $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ é a ação de Nambu-Goto.

Com isso tudo definido, finalmente aplicamos essas ideias para calcular a energia respectiva a este par $q\bar{q}$ em um espaço $\mathcal{N} = 4$ SYM. Logo, consideramos uma corda que termina no limite AdS_5 , sendo estendida através de uma das coordenadas do calibre escolhido, por exemplo $x^1 = x$. Parametrizamos então a forma com que a corda é incorporada no AdS_5 com uma função $z = z(x)$, onde a derivada de z em relação a x é descrita por z' [7].

O primeiro passo é reescrever a métrica no formato euclidiano:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} [dt^2 + (1 + z'^2)dx^2] . \quad (144)$$

Por definição, a ação de Nambu-Goto pode ser calculada através da seguinte expressão:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int dt \int \sqrt{g} dx , \quad (145)$$

onde α' é o parâmetro de declive relacionado à corda, e $\sqrt{g} = \det(g_{\mu\nu})$ é o determinante da métrica escolhida.

Logo, é possível substituir o determinante da métrica (144) na equação (145), de forma que a integral em dt é simplesmente uma constante T , resultando em:

$$\mathcal{S} = \frac{TL^2}{2\pi\alpha'} \int dx \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z^2} , \quad (146)$$

onde fica visível que a Lagrangiana do problema é:

$$\mathcal{L} = \frac{TL^2}{2\pi\alpha'} \frac{\sqrt{1 + z'^2}}{z^2} . \quad (147)$$

Concluimos então que a lagrangiana deste problema é equivalente a uma situação clássica, com a seguinte diferença, o "tempo" ao qual se refere é na verdade a variável x , de forma que a posição generalizada é $z(x)$, e o momento é sua derivada, $z'(x)$.

A lagrangiana então definida é dependente somente da posição z do problema, ou seja $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, resultando em uma forma de conservação de energia. Logo, o seguinte formalismo pode ser aplicado:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} z' + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} z'' . \quad (148)$$

Com a equação de Euler-Lagrange, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'}$, (aqui o tempo é tratado como x), podemos reescrever (148)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = z' \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} z'' , \quad (149)$$

e então:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left(z' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \right) = \frac{d}{dx} \left(\mathcal{L} - z' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \right) = 0 , \quad (150)$$

o termo interno ao parenteses é o conhecido hamiltoniano, $\mathcal{H}$, e para o caso que a lagrangiana independe do "tempo", ele é uma constante.

O próximo passo é utilizar essa ideia de conservação, escrevemos:

$$z' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} - \mathcal{L} = \mathcal{H} , \quad (151)$$

em que $\mathcal{H}$ é uma constante. Substituindo $\mathcal{L} = \frac{TL^2}{2\pi\alpha'} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{z^2}$ e realizando a derivada no termo a esquerda obtemos:

$$z' \frac{TL^2}{2\pi\alpha'} \frac{z'}{z^2 \sqrt{1+z'^2}} - \frac{TL^2}{2\pi\alpha'} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{z^2} = \mathcal{H} , \quad (152)$$

o termo $\frac{TL^2}{2\pi\alpha'}$ pode ser inserido na constante $\mathcal{H}$:

$$\frac{z'^2}{z^2 \sqrt{1+z'^2}} - \frac{\sqrt{1+z'^2}}{z^2} = \mathcal{H} , \quad (153)$$

e após algumas simplificações:

$$\frac{1}{z^2 \sqrt{1+z'^2}} = \mathcal{H} . \quad (154)$$

Sendo assim, para que o termo à esquerda seja constante, o denominador necessariamente é uma constante, chamaremos de $\mathcal{H}'$:

$$z^2 \sqrt{1+z'^2} = \mathcal{H}' . \quad (155)$$

Ao considerar esta configuração para a corda a condição de contorno que a função $z(x)$ deve satisfazer é [7]:

$$z(x = -d/2) = z(x = d/2) = 0 \quad (156)$$

onde d é a distância entre os quarks.

Logo, a função $z(x)$ torna-se nula nas bordas do contorno. É lógico que exista um valor de x que implique um valor máximo para z . Neste caso, por simetria, esse valor é

$x = 0$, o que implica diretamente que $z'(x = 0) = 0$. De tal forma, o valor máximo é uma constante em x , definindo então um valor $z_* = z(x = 0)$ é possível determinar a constante $\mathcal{K}'$ substituindo z por z_* em (155)

$$z^2 \sqrt{1 + z'^2} = z_*^2 \sqrt{1 + z'^2(x = 0)} = \mathcal{K}' , \quad (157)$$

como $z'(x = 0) = 0$, então:

$$z_*^2 = \mathcal{K}' . \quad (158)$$

Utilizando (158) na equação (155), encontramos uma maneira de escrever z' :

$$z^2 \sqrt{1 + z'^2} = z_*^2 \Rightarrow z' = \pm \frac{\sqrt{z_*^4 - z^4}}{z^2} , \quad (159)$$

os sinais positivos e negativos estão relacionados a cada um dos lados da corda.

Como definido anteriormente, $z' = \frac{dz}{dx}$, e integrando (115) encontramos uma expressão para x :

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{\sqrt{z_*^4 - z^4}}{z^2} \Rightarrow x = \pm \int_{z_*}^z \frac{\epsilon^2}{\sqrt{z_*^4 - \epsilon^4}} d\epsilon , \quad (160)$$

em que fizemos $z = \epsilon$ devido aos limites de integração.

A solução de (160) é encontrada utilizando uma mudança de variável, $\epsilon = z_* y$ e $d\epsilon = z_* dy$, também chamada de variável reescalada, escrevemos então:

$$x = \pm \int_1^{z/z_*} \frac{y^2}{\sqrt{1 - y^4}} dy . \quad (161)$$

Aplicando a condição de contorno de (156):

$$\frac{d}{2} = z_* \int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{1 - y^4}} dy , \quad (162)$$

cuja solução para z_* é:

$$z_* = \frac{d}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \right)^2 . \quad (163)$$

Concluimos que z_* e d são proporcionais

Em seguida, calcularemos a ação na camada de massa, a fim de finalmente encontrar o potencial do par quark-antiquark. Usaremos a conservação definida em (155) na integral de (146), onde $\sqrt{1 + z'^2} = \frac{z_*^2}{z^2}$:

$$\mathcal{S} = \frac{TL^2 z_*^2}{2\pi\alpha'} \int \frac{dx}{z^4} , \quad (164)$$

para resolver essa integral, mudamos a variável de x para z , o que é feito através do seguinte jacobiano:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{z'} = \frac{z^4}{\sqrt{z_*^2 - z^4}} . \quad (165)$$

Como z pode assumir dois valores, a ação na casca é:

$$\mathcal{S} = \frac{2TL^2 z_*^2}{2\pi\alpha'} \int_{\epsilon}^{z_*} \frac{dz}{z^2 \sqrt{z_*^4 - z^4}} . \quad (166)$$

ou de forma mais simples:

$$\mathcal{S} = \frac{TL^2}{\pi\alpha' z_*} I_{\epsilon} , \quad (167)$$

onde I_{ϵ} é a integral após a mudança de variável $z = z_* y$:

$$I_{\epsilon} = \int_{\epsilon/z_*}^1 \frac{dy}{y^2 \sqrt{1 - y^4}} . \quad (168)$$

A solução dessa integral é dada em forma de uma função hipergeométrica ${}_2F_1$ [11]. Trata-se da seguinte situação:

$$I_{\epsilon} = - \frac{{}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; y^4\right)}{y} \Big|_{\epsilon/z_*}^1 , \quad (169)$$

para o limite superior o resultado é:

$$- \frac{{}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 1^4\right)}{1} = - \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = - \frac{\pi^{3/2} \sqrt{2}}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2} , \quad (170)$$

já o limite inferior, quando ϵ é suficientemente pequeno, resulta no inverso de ϵ/z_* :

$$- \frac{{}_2F_1\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; (\epsilon/z_*)^4\right)}{\epsilon/z_*} = -z_*/\epsilon . \quad (171)$$

Logo, o resultado fica dado por:

$$I_{\epsilon} = - \frac{\pi^{3/2} \sqrt{2}}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2} + z_*/\epsilon , \quad (172)$$

e o resultado da ação na camada de massa:

$$\mathcal{S} = \frac{TL^2}{\pi\alpha' z_*} \left[- \frac{\pi^{3/2} \sqrt{2}}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2} + z_*/\epsilon \right] . \quad (173)$$

A ação na camada que encontramos é também definida pelo produto entre T e E , em que E é a energia do par quark-antiquark que contém o tão procurado potencial. Por comparação entre $\mathcal{S} = TE$ e a equação (173) vemos que:

$$E = - \frac{4\pi^2 L^2}{\alpha' \left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^4} \frac{1}{d} + \frac{L^2}{\pi\alpha'} \frac{1}{\epsilon} \quad (174)$$

onde o valor de z_* definido em (163) foi utilizado no processo.

O termo dependente de ϵ na equação (174) é divergente quando $\epsilon \rightarrow 0$, esse termo é diretamente relacionado às massas das partículas (quark-antiquark). Podemos verificar calculando a ação euclídeana de uma única corda que vai de $z = \epsilon$ até $z = \infty$ em um x fixo. Essa configuração é descrita usando t e z como coordenadas de volume. A métrica é obtida então mantendo x como uma constante:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} (dt^2 + dz^2) . \quad (175)$$

E a ação de Nambu-Goto fica escrita por:

$$\mathcal{S}_{corda} = \frac{T}{2\pi\alpha'} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{L^2}{z^2} dz = \frac{TL^2}{2\pi\alpha'\epsilon} \quad (176)$$

Lembrando $S = TE$, a energia para duas cordas paralelas é dada por:

$$E_{//} = \frac{2L^2}{2\pi\alpha'\epsilon} , \quad (177)$$

que é o encontrado no segundo termo de (174).

Logo, o termo divergente pode ser renormalizado, e finalmente fica definido o potencial para o par $q\bar{q}$:

$$V_{q\bar{q}} = E - E_{//} = -\frac{4\pi^2 L^2}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4\right) \alpha' d} , \quad (178)$$

Reescrevendo $L^2 = \sqrt{N^2 g_{YM} \alpha'}$, ou ainda $L^2 = \sqrt{\lambda} \alpha'$, temos que:

$$V_{q\bar{q}} = -\frac{4\pi^2 \sqrt{\lambda}}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4\right) d} . \quad (179)$$

A dependência do tipo Coulombiana de $1/d$ é uma consequência direta da invariância conforme da teoria.

5 Equação de Dirac para o potencial quark-antiquark

5.1 Solução para a equação de Dirac

Para encontrar uma solução genérica para a equação de Dirac precisamos considerar potenciais vetoriais e escalares, como o caso do potencial de Coulomb para o átomo de hidrogênio, então, o potencial escalar, $U(x)$ é colocado juntamente com a massa do sistema, enquanto o potencial vetorial $V_0(x)$ é somado a energia E do sistema [12]. Com essas considerações, escrevemos a equação de Dirac da seguinte forma:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(m + U(x)) + V_0(x)]\psi(\vec{x}, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) . \quad (180)$$

Considerando agora que a função de onda possa ser separada em duas funções, uma espacial e outra que evolui no tempo do tipo $\psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x})e^{-iEt}$ é fácil ver que:

$$[\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(m + U(x)) + V_0(x)]\psi(\vec{x})e^{-iEt} = E\psi(\vec{x})e^{-iEt} . \quad (181)$$

Em seguida, utilizamos as definições de α e β discutidas na seção 2.4.5:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} , \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} , \quad (182)$$

em que $\vec{\sigma}$ são as matrizes de Pauli e I é a matrix 2×2 identidade, e definimos a função $\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$ como um espinor de Dirac. Com isso encontramos o seguinte:

$$\begin{pmatrix} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (m + U + V_0)\phi \\ -(m + U - V_0)\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\phi \\ E\chi \end{pmatrix} , \quad (183)$$

ou seja:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\chi + (m + U + V_0)\phi = E\phi , \quad (184)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi - (m + U - V_0)\chi = E\chi . \quad (185)$$

Levando em conta o resultado encontrado em (184) e (185), bem como o potencial encontrado em (179), podemos procurar uma possível solução para a equação de Dirac relacionada a este potencial de tipo central. Caso U e V_0 sejam potenciais independentes de ângulos, a função de onda pode ser parcialmente expandida [12].

As quantidades conservadas neste caso são os valores de j^2, j_3 , energia E , e K , onde $\vec{j} = \left(\vec{l} + \frac{1}{2}\Sigma\right)$ e $K = \beta\left(\Sigma \cdot \vec{l} + 1\right)$. Usamos $\Sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$, e o autovalor de K é denotado por $-\kappa$. De forma que:

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{l} + 1\right)\phi = -\kappa\phi \quad e \quad \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{l} + 1\right)\chi = \kappa\chi , \quad (186)$$

também é possível notar a seguinte propriedade:

$$K^2 = \beta^2 \left(\vec{\Sigma} \cdot \vec{l} + 1\right)^2 , \quad (187)$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 \left[\begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{l} & 0 \\ 0 & \vec{l} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 , \quad (188)$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} \left(\vec{l} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\vec{l} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} , \quad (189)$$

por outro lado;

$$j^2 = \begin{pmatrix} \left(\vec{l} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\vec{l} + \frac{\vec{\sigma}}{2}\right)^2 \end{pmatrix}, \quad (190)$$

de forma que ao expandir K^2 e j^2 :

$$K^2 = \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{l}\right)^2 + 2\vec{\sigma} \cdot \vec{l} + 1, \quad j^2 = l^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{l} + \frac{3}{4} \quad (191)$$

e sabendo que:

$$\left(\vec{\sigma} \cdot \vec{l}\right)^2 = l^2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{l}, \quad (192)$$

$$K^2 = l^2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{l} + 1 = j^2 + \frac{1}{4}. \quad (193)$$

O que implica diretamente que os autovalores $\kappa = \pm \left(j + \frac{1}{2}\right)$.

Queremos então encontrar uma solução para a função de onda do tipo:

$$\psi_{j,j_3}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_k(r) \mathcal{Y}_{j,j_l}^{j_3}(\hat{r}) \\ i f_k(r) \mathcal{Y}_{j,j_l'}^{j_3}(\hat{r}) \end{pmatrix}. \quad (194)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{j,l}^{j_3} &= \left(l, \frac{1}{2}, j_3 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | j, j_3\right) Y_l^{j_3 - \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \left(l, \frac{1}{2}, j_3 + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | j, j_3\right) Y_l^{j_3 + \frac{1}{2}}(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (195)$$

e os valores entre parenteses à esquerda são os coeficientes de Clebsch-Gordon do tipo $(j_1, j_2, m_1, m_2 | J, M)$, e os valores podem ser consultados em [13].

Utilizando a equação (195), e os valores dos correspondentes Clebsch-Gordons, podemos ver que:

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2},0}^{\frac{1}{2}} = \mathcal{Y}_0^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (196)$$

e também:

$$\mathcal{Y}_{\frac{1}{2},1}^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} Y_1^0(\hat{r}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} Y_1^1(\hat{r}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (197)$$

Em seguida, consideramos o termo $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})\phi$ na equação (185) e reescrevemos da seguinte forma:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})g_k(r)\mathcal{Y}_{j,l}^{j_3} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{r^2}[(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})]g_k(r)\mathcal{Y}_{j,l}^{j_3}. \quad (198)$$

Usando então $(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) = (\vec{r} \cdot \vec{p}) + i\vec{\sigma} \cdot \vec{l}$, $(\vec{\sigma} \cdot \vec{l})\phi = -(\kappa + 1)\phi$ e $\vec{p} = -i\nabla$ é possível mostrar que:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})g_k(r)\mathcal{Y}_{j,l}^{j_3} = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}||\vec{r}|}[-i(\vec{r} \cdot \nabla) + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{l})]g_k(r)\mathcal{Y}_{j,l}^{j_3}, \quad (199)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})g_k(r)\mathcal{Y}_{j,l}^{j_3} = -i \left[\frac{d}{dr}g_k(r) + (\kappa + 1)\frac{g_k(r)}{r} \right] (\vec{\sigma} \cdot \hat{r})\mathcal{Y}_{j,l}^{j_3}. \quad (200)$$

O próximo passo então, é definir o que é $(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})$. Para isso relembremos que:

$$\hat{r} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{e}_y + \cos(\theta)\hat{e}_z, \quad (201)$$

e

$$S_+ = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), \quad S_- = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y), \quad S_z = \frac{1}{2}\sigma_z, \quad (202)$$

e juntamente com os valores para os orbitais Y [11], encontramos:

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{r}) = 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_1^{-1}S_+ - 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}Y_1^1S_- + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0S_z. \quad (203)$$

De forma que é possível provar

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{r})\mathcal{Y}_{j,l}^{j_3} = -\mathcal{Y}_{j,l'}^{j_3}, \quad (204)$$

levando tudo isso em consideração e substituindo os resultados encontrados nas equações (184) e (185) determinamos uma solução para a equação de Dirac para potenciais genéricos independentes de ângulos:

$$\frac{dg_k}{dr} + \frac{\kappa + 1}{r}g_k - (m + U - V_0)f_k = Ef_k, \quad (205)$$

$$\frac{df_k}{dr} + \frac{1 - \kappa}{r}f_k - (m + U + V_0)g_k = -Ef_k. \quad (206)$$

5.2 Analogia com o potencial de Coulomb

O potencial encontrado para o par $q\bar{q}$ na equação (179) se assemelha bastante com um potencial do tipo Coulombiano, $V \sim \frac{1}{d}$, a menos da constante gerada pelo sistema em específico. Sendo assim, nesta parte do trabalho, utilizaremos um procedimento semelhante ao tratamento para o potencial de Coulomb encontrado em [14,15,16].

São possíveis duas abordagens, a primeira aqui discutida é através do método de séries de potência a fim de evitar funções hipergeométricas, já a outra, se baseia nelas. Sendo assim, as duas abordagens chegam à mesma conclusão, porém é válido entendê-las e perceber como dialogam bem.

5.2.1 Solução por série de potências

Primeiro, levaremos em conta que as equações (205) e (206) podem ser reformuladas através de uma extensa discussão baseada em operadores do grupo $SO(2N)$ na teoria de grupos [14,15]. Contudo, esta discussão está fora do escopo matemático e motivação deste trabalho, portanto, partimos da reconstrução destas equações da seguinte forma.

Sabemos o valor de $\kappa + 1$ para a função g_k é dado por:

$$(\kappa + 1)g_k = (l + 1)g_K , \quad (207)$$

da mesma forma para a função f_k :

$$(1 - \kappa)f_k = (1 - (-l))f_k = (l + 1)f_k , \quad (208)$$

durante a discussão sobre o operador K [14,15], o valor para K fica definido por:

$$K = \pm \frac{2l + D - 1}{2} , \quad (209)$$

em que D é o número de dimensões do problema.

Sendo assim, para $D = 3$ temos que $K = \pm(l + 1)$. Contudo, para as funções g_K e f_K , os valores encontrados são:

$$Kg_K = Kg_K , \quad Kf_K = -Kf_K , \quad (210)$$

como $\kappa = l + 1$ tanto para g_k e f_k , podemos determinar que:

$$(\kappa + 1)g_k = Kg_K , \quad (1 - \kappa)f_k = -Kf_K , \quad (211)$$

de forma que as equações ficam reescritas como:

$$\begin{aligned} \frac{dg_K}{dr} + \frac{K}{r}g_K &= (E - V(r) + M)f_K , \\ -\frac{df_K}{dr} + \frac{K}{r}f_K &= (E - V(r) - M)g_k , \end{aligned} \quad (212)$$

Considerando agora a forma mais genérica para o potencial, incluímos um termo coulombiano do tipo $V_c = -\frac{A_1}{r}$, que pode ser interpretado como uma troca de fótons sem massa entre um lépton e o núcleo que ele orbita, e um termo de potencial escalar $V_e = -\frac{A_2}{r}$, que é interpretado como uma troca de méson sem massa, criando uma massa efetiva dependente da posição da partícula.

Sendo assim, os potenciais são diferentes para as funções g_k e f_k :

$$V(r) = V_c + V_e , \quad V(r) = V_c - V_e . \quad (213)$$

Ou seja, as componentes radiais do problema então respeitam as seguintes equações dife-

renciais:

$$\begin{aligned} \frac{dg_K}{dr} + \frac{K}{r}g_K &= \left(E + M + \frac{A_1 - A_2}{r}\right) f_K , \\ -\frac{df_K}{dr} + \frac{K}{r}f_K &= \left(E - M + \frac{A_1 + A_2}{r}\right) g_K . \end{aligned} \quad (214)$$

Para normalizar as funções de onda nos estados ligados do problema definimos:

$$\lambda = 2r\xi , \quad \xi = \sqrt{M^2 - E^2} , \quad |E| < M , \quad (215)$$

e a variação $d\lambda = 2\xi dr$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dg_K}{d\lambda} + \frac{K}{\lambda}g_K\right) 2\xi &= \left(E + M + \frac{A_1 - A_2}{\lambda}2\xi\right) f_K , \\ \left(\frac{df_K}{d\lambda} - \frac{K}{\lambda}f_K\right) 2\xi &= -\left(E - M + \frac{A_1 + A_2}{\lambda}2\xi\right) g_K , \end{aligned} \quad (216)$$

resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{dg_K}{d\lambda} + \frac{K}{\lambda}g_K &= \left(\frac{E + M}{2\xi} + \frac{A_1 - A_2}{\lambda}\right) f_K , \\ \frac{df_K}{d\lambda} - \frac{K}{\lambda}f_K &= -\left(\frac{E - M}{2\xi} + \frac{A_1 + A_2}{\lambda}\right) g_K . \end{aligned} \quad (217)$$

Agora é necessário definir quais funções dependentes de λ queremos trabalhar, para este problema, ficam definidas as seguintes funções:

$$\begin{aligned} g_K &= e^{-\frac{\lambda}{2}}\sqrt{M + E} [\phi_1 + \phi_2] , \\ f_K &= e^{-\frac{\lambda}{2}}\sqrt{M - E} [\phi_1 - \phi_2] . \end{aligned} \quad (218)$$

Substituindo essas funções em (217):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\lambda} + \frac{d\phi_2}{d\lambda} &= -\frac{K}{\lambda}(\phi_1 + \phi_2) \\ &+ \left[\frac{E + M}{2\xi} + \frac{A_1 - A_2}{\lambda}\right] \frac{M - E}{\xi}(\phi_1 - \phi_2) \\ -\frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) + \frac{d\phi_1}{d\lambda} - \frac{d\phi_2}{d\lambda} &= \frac{K}{\lambda}(\phi_1 - \phi_2) \\ &- \left[\frac{E - M}{2\xi} + \frac{A_1 + A_2}{\lambda}\right] \frac{M + E}{\xi}(\phi_1 + \phi_2) \end{aligned} \quad (219)$$

Somando e simplificando a expressão encontramos:

$$\begin{aligned} -\phi_1 + 2\frac{d\phi_1}{d\lambda} &= -2\frac{K}{\lambda}\phi_2 + \phi_1 + \frac{(A_1 - A_2)}{\lambda}\frac{m - E}{\xi}(\phi_1 - \phi_2) \\ &- \frac{(A_1 + A_2)}{\lambda}\frac{m + E}{\xi}(\phi_1 + \phi_2) . \end{aligned} \quad (220)$$

Enquanto subtraindo e simplificando:

$$\begin{aligned} -\phi_2 + 2\frac{d\phi_2}{d\lambda} &= -2\frac{K}{\lambda}\phi_1 - \phi_2 + \frac{(A_1 - A_2)}{\lambda}\frac{m - E}{\xi}(\phi_1 - \phi_2) \\ &+ \frac{(A_1 + A_2)}{\lambda}\frac{m + E}{\xi}(\phi_1 + \phi_2) . \end{aligned} \quad (221)$$

Agrupando os termos:

$$\frac{d\phi_1}{d\lambda} = \left(1 - \frac{(A_1 E + A_2 M)}{\lambda \xi}\right) \phi_1 - \left(\frac{K}{\lambda} + \frac{A_1 M + A_2 E}{\lambda \xi}\right) \phi_2 , \quad (222)$$

e

$$\frac{d\phi_2}{d\lambda} = \left(-\frac{K}{\lambda} + \frac{A_1 M + A_2 E}{\lambda \xi}\right) \phi_1 + \left(\frac{A_1 E + A_2 M}{\lambda \xi}\right) \phi_2 , \quad (223)$$

este é um resultado geral para as funções ϕ_1, ϕ_2 , contudo, é necessário um passo antes de determinar uma solução para (222) e (223).

Primeiro, precisamos analisar o sistema em uma região próxima a $r \approx 0$, onde os termos proporcionais à massa e energia podem ser desconsiderados, a fim de entender o funcionamento das equações nesta região. Logo:

$$\begin{aligned} \frac{dg_K}{dr} &= -\frac{K}{r}g_K + \frac{A_1 - A_2}{r}f_k , \\ \frac{df_K}{dr} &= +\frac{K}{r}f_k - \frac{A_1 + A_2}{r}g_k , \end{aligned} \quad (224)$$

supondo que as equações g_K e f_K se comportem como uma função potência, isto é:

$$g_K = ar^\gamma \quad e \quad f_K = br^\gamma , \quad (225)$$

reescrevemos as equações:

$$\begin{aligned} a\gamma r^{\gamma-1} + K a r^{\gamma-1} - (A_1 - A_2) b r^{\gamma-1} &= 0 , \\ b\gamma r^{\gamma-1} - K b r^{\gamma-1} + (A_1 + A_2) a r^{\gamma-1} &= 0 , \end{aligned} \quad (226)$$

e simplificamos:

$$\begin{aligned} a(\gamma + K) - b(A_1 - A_2) &= 0 , \\ a(A_1 + A_2) + b(\gamma - K) &= 0 . \end{aligned} \quad (227)$$

Trata-se de um sistema linear em a e b , cujo solução só existe caso o determinante seja nulo:

$$\begin{vmatrix} \gamma + K & A_2 - A_1 \\ A_1 + A_2 & \gamma - K \end{vmatrix} = \gamma^2 - K^2 + A_1^2 - A_2^2 = 0, \quad (228)$$

e o valor de γ é $\gamma = \pm \sqrt{K^2 - A_1^2 + A_2^2}$.

Agora, com o valor de γ definido e as equações (222) e (223), podemos utilizar o método de solução por série através das seguintes séries de potência:

$$\phi_1 = \lambda^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} A_{1m} \lambda^m, \quad \phi_2 = \lambda^\gamma \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \lambda^m, \quad (229)$$

levando em (222) e (223):

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma + m) A_{1m} \lambda^{\gamma+m-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} A_{1m-1} \lambda^{\gamma+m-1} \\ &- \left(\frac{A_1 E + A_2 M}{\xi} \right) \sum_{m=0}^{\infty} A_{1m} \lambda^{\gamma+m-1} \\ &- \left(K + \frac{A_1 M + A_2 E}{\xi} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \lambda^{\gamma+m-1}, \end{aligned} \quad (230)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (\gamma + m) \beta_m \lambda^{\gamma+m-1} &= \left(-k + \frac{A_1 M + A_2 E}{\xi} \right) \sum_{m=0}^{\infty} A_{1m} \lambda^{\gamma+m-1} \\ &+ \left(\frac{A_1 E + A_2 M}{\xi} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m \lambda^{\gamma+m-1}, \end{aligned} \quad (231)$$

comparando os coeficientes encontramos:

$$\begin{aligned} (\gamma + m) A_{1m} &= A_{1m-1} - \left(\frac{A_1 E + A_2 M}{\xi} \right) A_{1m} \\ &- \left(K + \frac{A_1 M + A_2 E}{\xi} \right) \beta_m, \end{aligned} \quad (232)$$

e

$$(\gamma + m) \beta_m = \left(-k + \frac{A_1 M + A_2 E}{\xi} \right) A_{1m} + \left(\frac{A_1 E + A_2 M}{\xi} \right) \beta_m. \quad (233)$$

Estas relações são condizentes com as estruturas das funções hipergeométricas [11,14,15,16] que serão discutidas mais a frente. Mais especificamente, na equação (233) é possível encontrar uma relação entre os coeficiente A_{1m} e β_m que determina os valores de energia para os números quânticos $n = 1, 2, 3, \dots$ através de combinações entre as funções

hipergeométricas.

$$\frac{\beta_1}{A_{1_m}} = \frac{-K + \frac{A_1 M + A_2 E}{\xi}}{m + \gamma - \frac{A_1 E + A_2 M}{\xi}} = \frac{K - \frac{A_1 M + A_2 E}{\xi}}{n' - m}, \quad (234)$$

onde foi definido $n' = \frac{A_1 E + A_2 M}{\xi} - \gamma$. De forma que o número quântico n é:

$$n = n' + j + \frac{1}{2}, \quad (235)$$

e assume somente valores naturais. Isto implica que:

$$n - j - \frac{1}{2} + \gamma = \frac{A_1 E + A_2 M}{\sqrt{M^2 - E^2}}. \quad (236)$$

Simplificando a expressão podemos determinar os valores possíveis para a energia do sistema:

$$\left[A_1^2 + \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right) \right] E^2 + 2A_1 A_2 M E = M^2 \left(n - j - \frac{1}{2} + \gamma \right)^2 - A^2 M^2, \quad (237)$$

$$E^2 + \frac{2A_1 A_2 M}{A_1^2 + (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} + M^2 \frac{A_2^2 - (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2}{A_2^2 + (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} = 0,$$

e finalmente obtemos valores para E :

$$E = M \frac{-A_1 A_2}{A_2^2 + (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} \pm M \left[\left(\frac{-A_1 A_2}{A_2^2 + (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} \right)^2 - \frac{A_2^2 - (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2}{A_1^2 - (n - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (238)$$

Esta é a solução para os níveis de energia para um potencial do tipo coulombiano. Contudo, para o caso estudado, não estamos levando em conta o potencial vetorial entre os mésons, par $q\bar{q}$, e sim apenas o potencial escalar gerado por eles $V_{q\bar{q}} = -\frac{4\pi^2\sqrt{\lambda}}{(\Gamma(\frac{1}{4}))^4} \frac{1}{d}$, logo, devemos estudar o caso em que $A_2 = 0$.

Se $A_2 = 0$. $\gamma = \sqrt{K^2 - A_1^2}$ e $n = n_{01} = n'_{01} + j + \frac{1}{2}$, em que $n'_{01} = \frac{A_2 M}{\xi} - \gamma$, temos que o valor para E é:

$$E = \pm M \left[1 + \frac{A_1^2}{(n_{10} - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (239)$$

com $A_1 = \frac{4\pi^2\sqrt{\lambda}}{(\Gamma(\frac{1}{4}))^4}$

$$E = \pm M \left[1 + \frac{16\pi^4\lambda}{(\Gamma(\frac{1}{4}))^8 (n_{10} - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (240)$$

Concluimos que estes são os valores de energia quantizados pelo número quântico n_{10} para o potencial gerado por um par quark-antiquark.

5.2.2 Solução com funções hipergeométricas

Este problema pode também ser abordado da seguinte maneira [12,13], após uma discussão sobre o operador K e a função de Dirac, cuja matemática não cabe a este trabalho, é possível formular o problema de uma maneira semelhante através das seguintes equações e desenvolvimento:

$$\frac{dg(r)}{dr} + \frac{K}{r}g(r) = [E - V(r) - M] f(r) , \quad (241)$$

$$-\frac{df(r)}{dr} + \frac{K}{r}f(r) = [E - V(r) + M] g(r) , \quad (242)$$

em que $K = \pm(2l + D - 1)/2$ ainda é o operador utilizado no tratamento anterior. Novamente, consideramos dois potenciais, um coulombiano $V_c = -\frac{A_1}{r}$ e um escalar $V_s = -\frac{A_2}{r}$, de forma que novamente o termo escalar é adicionado ao termo de massa.

Construímos então o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dg_{KE}(r)}{dr} + \frac{K}{r}g_{KE}(r) = \left(E - M + \frac{A_1 + A_2}{r} \right) f_{KE}(r) , \quad (243)$$

$$-\frac{df_{KE}(r)}{dr} + \frac{K}{r}f_{KE}(r) = \left(E + M + \frac{A_1 - A_2}{r} \right) g_{KE}(r) , \quad (244)$$

e afim de estudar os estados ligados introduzimos novamente o termo $\lambda = 2r\xi$, em que $\xi = \sqrt{M^2 - E^2}$, utilizando $d\lambda = 2\xi dr$ modificamos as equações para:

$$\frac{dg_{KE}}{d\lambda} + \frac{K}{\lambda}g_{KE} = \left(-\frac{1}{2} \frac{M - E}{\xi} + \frac{A_1 + A_2}{\lambda} \right) f_{KE} , \quad (245)$$

$$\frac{df_{KE}}{d\lambda} - \frac{K}{\lambda}f_{KE} = \left(-\frac{1}{2} \frac{M + E}{\xi} - \frac{A_1 - A_2}{\lambda} \right) g_{KE} , \quad (246)$$

e agora escolhemos as funções para trabalhar o problema, desta vez, utilizando as seguintes funções:

$$g_{KE} = \sqrt{M - E}[\phi_1 + \phi_2] , \quad (247)$$

$$f_{KE} = \sqrt{M + E}[\phi_1 - \phi_2] ,$$

que ao substituirmos em (243) e (244):

$$\phi'_1 + \phi'_2 + \frac{K}{\lambda}[\phi_1 + \phi_2] = \left[-\frac{1}{2} + \frac{A_1 + A_2}{\lambda} \frac{M + E}{\xi} \right] [\phi_1 - \phi_2] , \quad (248)$$

$$\phi'_1 - \phi'_2 - \frac{K}{\lambda}[\phi_1 - \phi_2] = \left[-\frac{1}{2} - \frac{A_1 - A_2}{\lambda} \frac{M - E}{\xi} \right] [\phi_1 + \phi_2] ,$$

em que $\phi' = \frac{d\phi_1}{d\lambda}$ e $\phi'_2 = \frac{d\phi_2}{d\lambda}$. De modo que sua soma:

$$\phi'_1 - \left(\frac{A_1 E + A_2 M}{\lambda \xi} - \frac{1}{2} \right) \phi_1 = - \left(\frac{K}{\lambda} + \frac{A_1 M + A_2 E}{\lambda \xi} \right) \phi_2 , \quad (249)$$

e sua subtração:

$$\phi'_2 + \left(\frac{A_1 E + A_2 M}{\lambda \xi} - \frac{1}{2} \right) \phi_2 = - \left(\frac{K}{\lambda} - \frac{A_1 M + A_2 E}{\lambda \xi} \right) \phi_1 . \quad (250)$$

Para simplificar o problema definimos:

$$\tau = \frac{A_1 E + A_2 M}{\xi} , \quad \tau' = \frac{A_1 M + A_2 E}{\xi} , \quad (251)$$

e então:

$$\phi'_1 - \left(\frac{\tau}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \phi_1 = - \frac{\tau' + K}{\lambda} \phi_2 , \quad (252)$$

$$\phi'_2 + \left(\frac{\tau}{\lambda} - \frac{1}{2} \right) \phi_2 = \frac{\tau' - K}{\lambda} \phi_1 ,$$

das quais obtemos equações diferenciais de segunda ordem[14,15]:

$$\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{1}{4} + \frac{\tau + \frac{1}{2}}{\lambda} - \frac{\eta^2}{\lambda^2} \right) \right] \phi_1 = 0 , \quad (253)$$

$$\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{1}{4} + \frac{\tau - \frac{1}{2}}{\lambda} - \frac{\eta^2}{\lambda^2} \right) \right] \phi_2 = 0 ,$$

onde $\eta^2 = K^2 - A_1^2 + A_2^2$ é análogo ao γ^2 calculado durante o método de série de potências, para o caso do potencial de Coulomb, escolhemos $\eta = \sqrt{K^2 - A_1^2 + A_2^2} > 0$. Essas equações são um caso especial da equação de Tricomi[9] do tipo:

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \left(a + \frac{b}{x} \right) \frac{dy}{dx} + \left(\alpha + \frac{\alpha}{x} + \frac{\delta}{x^2} \right) y = 0 . \quad (254)$$

Queremos então definir ϕ_1 e ϕ_2 para que elas possuam comportamentos bem definidos

na origem e no infinito, para isto as funções devem ser algo do tipo:

$$\phi_1 = \lambda^\eta e^{-\lambda/2} R_1 , \quad \phi_2 = \lambda^\eta e^{-\lambda/2} R_2 , \quad (255)$$

que são funções com o mesmo comportamento que as séries definidas no método de série de potências. Substituindo nas equações diferenciais (253):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_1}{d\lambda^2} + \left(-1 + \frac{1+2\eta}{\lambda} \right) \frac{d}{d\lambda} R_1 + \frac{\tau-\eta}{\lambda} R_1 &= 0 , \\ \frac{d^2 R_2}{d\lambda^2} + \left(-1 + \frac{1+2\eta}{\lambda} \right) \frac{d}{d\lambda} R_2 + \frac{\tau-\eta-1}{\lambda} R_2 &= 0 , \end{aligned} \quad (256)$$

cujas soluções são as funções hipergeométricas confluentes h[12,13]:

$$R_1 = a_0 \Phi(\eta - \tau, 2\eta + 1; \lambda) , \quad (257)$$

$$R_2 = b_0 \Phi(1 + \eta - \tau, 2\eta + 1; \lambda) ,$$

o que mostra que as funções ϕ_1 e ϕ_2 podem ser escritas como combinações destas funções hipergeométricas.

O interessante agora é encontrar a relação entre a_0 e b_0 através da recorrência entre funções hipergeométrica confluentes [11]:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d}{dz} \Phi(\alpha, \gamma; z) &= \alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1; z) , \\ z \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1; z) &= \gamma \Phi(\alpha + 1, \gamma; z) - \gamma \Phi(\alpha, \gamma; z) , \end{aligned} \quad (258)$$

$$\begin{aligned} \alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1; z) &= (\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma + 1; z) + \gamma \Phi(\alpha, \gamma; z) , \\ \alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma; z) &= (z + 2\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma; z) + (\gamma - \alpha) \Phi(\alpha - 1, \gamma; z) , \end{aligned}$$

com as relações de (258), as funções em (257) e as equações diferenciais (256) é possível mostrar que:

$$\left(\frac{\eta - \tau}{\lambda} a_0 + \frac{\tau' + K}{\lambda} b_0 \right) \Phi(1 + \eta - \tau, 2\eta + 1; \lambda) = 0 , \quad (259)$$

como não queremos que $a_0 = b_0 = 0$, temos:

$$b_0 = \frac{\tau - \eta}{\tau' + K} a_0 . \quad (260)$$

Finalmente retornamos às funções g_{KE} e f_{KE} em (247), que são reescritas como:

$$g_{KE} = N_{KE\sqrt{M-E}\lambda^\eta e^{-\frac{\lambda}{2}}} \quad (261)$$

$$\times [(\tau' + K)\Phi(\eta - \tau, 2\eta + 1; \lambda) + (\tau - \eta)\Phi(1 + \eta - \tau, 2\eta + 1; \lambda)] ,$$

$$f_{KE} = N_{KE\sqrt{M-E}\lambda^\eta e^{-\frac{\lambda}{2}}} \quad (262)$$

$$\times [(\tau' + K)\Phi(\eta - \tau, 2\eta + 1; \lambda) - (\tau - \eta)\Phi(1 + \eta - \tau, 2\eta + 1; \lambda)] ,$$

onde o fator $N_{KE} = a_0(\tau' + K)^{-1}(2\sqrt{M^2 - E^2})^{-1/2}$ pode ser determinado através da propriedade de normalização das funções de onda [14,15]. Para estudar os autovalores deste sistema utilizamos o fato de que queremos soluções finitas no infinito, isto implica que:

$$\tau - \eta = n' = 0, 1, 2, \dots , \quad (263)$$

de forma que quando $n' = 0 \rightarrow \eta = \tau$ e

$$K^2 = \tau^2 + A_1^2 - A_2^2 = (\tau')^2 , \quad (264)$$

então K precisa ser positivo para existir uma solução não trivial.

Introduzimos assim o número quântico principal:

$$n = |K| - (D - 3)/2 + n' = |K| - (D - 3)/2 + \tau - \eta = l + 1 + n' = 1, 2, \dots , \quad (265)$$

deixando clara a relação:

$$\tau = n' + \eta \rightarrow \frac{A_1 E + A_2 M}{\sqrt{M^2 - E^2}} = n - |K| + \frac{D - 3}{2} , \quad (266)$$

que é análoga a equação (236) para $D = 3$. Sendo assim, resolvendo para a energia e utilizando $n' + \eta = \zeta$:

$$E = M \left[-\frac{A_1 A_2}{A_1^2 + \zeta^2} \pm \left[\left(\frac{A_1 A_2}{A_1^2 + \zeta^2} \right)^2 - \frac{A_2^2 - \zeta^2}{A_1^2 + \zeta^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right] . \quad (267)$$

Esta expressão é a mesma encontrada pelo método de série de potências, apenas utilizando definições diferentes para as constantes. Como discutido anteriormente o caso de interesse para este trabalho é quando $A_2 = 0$, $\gamma = \sqrt{K^2 - A_1^2}$, $n = n_{01} = n'_{01} + j + \frac{1}{2}$, $n'_{01} = \frac{A_2 M}{\xi} - \gamma$, de modo que:

$$E = \pm M \left(1 + \frac{A_1^2}{\zeta^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \pm M \left[1 + \frac{A_1^2}{(n_{10} - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} . \quad (268)$$

Logo, os valores encontrados para o potencial do par $q\bar{q}$ são novamente encontrados

utilizando $A_1 = \frac{4\pi^2\sqrt{\lambda}}{(\Gamma(\frac{1}{4}))^4}$, resultando em:

$$E = \pm M \left[1 + \frac{16\pi^4\lambda}{(\Gamma(\frac{1}{4}))^8 (n_{10} - j - \frac{1}{2} + \gamma)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (269)$$

6 Conclusão

Neste trabalho foi desenvolvido uma revisão teórica de conceitos importantes para o estudo de física de partículas, bem como um aprofundamento sobre os mecanismos da teoria de campos e a dualidade entre o espaço AdS e a teoria conforme de campos, tornando possível a discussão sobre o potencial existente entre um par de partículas, mais especificamente um par quark-antiquark.

Sendo assim, construímos de forma detalhada o espaço a ser utilizado, bem como a relação dual, mostrando a mudança que ocorre ao se transpor um espaço de $4+1$ dimensões para um de $3+1$, adentrando em uma discussão parecida com a proposta por Maldacena. Em seguida, utilizando alguns conceitos básicos de teoria de cordas para definir os limites do nosso problema calculamos o potencial gerado por um par quark-antiquark através de uma renormalização para a energia total encontrada na camada de massa [7].

Portanto, concluímos que o potencial encontrado se comporta de forma semelhante a um potencial Coulombiano, o que tornou possível o estudo da equação de Dirac com tal potencial. Utilizamos dois métodos, série de potências e a recorrência de funções hipergeométricas confluentes, para encontrar os níveis de energia permitidos pelo problema, de forma que os resultados obtidos são coerentes entre si.

Além disso, com base nos conhecimentos adquiridos durante este trabalho, é possível ampliar o estudo deste potencial. Uma das ideias possíveis é descrever o espelhamento gerado utilizando este potencial como uma barreira, ou até mesmo encontrar alguma relação com os diagramas de Feynman para definir níveis de energias associados a espalhamento eletrônico próximo a um núcleo.

7 Referências

- 1 S. F. Novaes. Standard Model: An Introduction. [hep-ph/0001283].
- 2 D. McMahon. Quantum field theory demystified. McGraw Hill Professional; 2008.
- 3 J. M. Maldacena. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity, Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231 [hep-th/9711200].
- 4 L. D. Landau, E.M. Lifshitz. The Classical Theory of Fields. 4a ed. Moscow; 1994.
- 5 T. Lancaster, S.J. Blundell, Quantum Field Theory for the Gifted Amateur. Oxford: Oxford University Press; 2014.
- 6 L.H. Ryder. Quantum Field Theory. Cambridge: Cambridge University Press; 1996.
- 7 A.V. Ramallo. Introduction to the AdS/CFT correspondence. Springer Proceedings in Physics. 2015:411-474 [hep-th/1310.4319v3].
- 8 L. A. Barreiro. Aspectos de Partículas e Campos. 2017. Trabalho em desenvolvimento.
- 9 M. E. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory. CRC Press; 2019
- 10 B. M. Victor ,Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. Proc. R. Soc. Lond. A392: 45-57
- 11 A. Erdelyi. Higher Transcendental Functions McGraw-Hill, Vol. 1. New York; 1953, p. 249.
- 12 R.K. Bhaduri. Models of the Nucleon From Quarks to Soliton. Ontario: Addison-Wesley Publishing Company; 1988.
- 13 A.R. Edmonds. Angular momentum in quantum mechanics. Geneve: 1955.
- 14 S.H. Dong. On the Dirac Equation with a Coulomb Potential in $D + 1$ Dimensions. Phys. Scr. 2003;67:377-380.
- 15 S.H. Dong. On the Bound States of the Dirac Equation with a Coulomb Potential in $2+1$ Dimensions. Phys. Scr. 2003;67:89-92.
- 16 E.S. Rodrigues. Equação de Dirac com Potenciais Escalar e Vetorial via Supersimetria[Tese de Mestrado]. Campina Grande(PB): Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande; 2011.
- 17 L. A. Barreiro. Apostila de física nuclear. 2021. Trabalho em desenvolvimento.