UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO" FACULDADE DE CIÊNCIAS/CAMPUS DE BAURU PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS DE TECNOLOGIAS DE MATERIAIS

O LIMIAR ENTRE OS REGIMES DO TIPO I E TIPO II DE SUPERCONDUTORES DO PRIMEIRO GRUPO

Thiago de Oliveira Calsolari

Orientador:

Edson Sardella

BAURU 2021

Thiago de Oliveira Calsolari

O LIMIAR ENTRE OS REGIMES DO TIPO I E TIPO II DE SUPERCONDUTORES DO PRIMEIRO GRUPO

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ciência e Tecnologia de Materiais da Universidade Estadual Paulista como parte dos pré-requisitos para a obtenção do título de Mestre.

BAURU 2021

C1651	Calsolari, Thiago de Oliveira O LIMIAR ENTRE OS REGIMES DO TIPO I E TIPO II DE SUPERCONDUTORES DO PRIMEIRO GRUPO / Thiago de Oliveira Calsolari Bauru, 2020 70 p.
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru Orientador: Edson Sardella
	1. Supercondutor do tipo I. 2. Supercondutor do tipo II. 3. Supercondutor mesoscópico. 4. Vórtice gigante. 5. \kappa crítico. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências, Bauru. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Bauru



ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE THIAGO DE OLIVEIRA CALSOLARI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE MATERIAIS, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 05 dias do mês de novembro do ano de 2020, às 09:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de THIAGO DE OLIVEIRA CALSOLARI, intitulada **"O LIMIAR ENTRE OS REGIMES DO TIPO I E TIPO II DE SUPERCONDUTORES DO PRIMEIRO GRUPO"** . A Comissão Examinadora foi constituida pelos seguintes membros: Prof. Dr. EDSON SARDELLA (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Física / Faculdade de Ciências de Bauru - UNESP, Prof. Dr. RAFAEL ZADOROSNY (Participação Virtual) do(a) Departamento de Física e Química / Unesp - Câmpus de Ilha Solteira, Prof. Dr. ANDRE LUIZ MALVEZZI (Participação Virtual) do(a) Departamento de Física de Bauru - UNESP. Após a exposição pelo mestrando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: $\underline{APPO} = \underline{APPO}$. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Edsom Sardella

Prof. Dr. EDSON SARDELLA

Faculdade de Ciências - Câmpus de Bauru -Av. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, 17033360, Bauru - São Paulo http://www.fc.unesp.br/#1/posmatCNPJ: 48.031.918/0028-44.

Dedicatória

- *Aos meus pais e irmãos, pelo incentivo, suporte, por sempre acreditarem em todos os meus projetos e principalmente pelo carinho e amor que nunca me faltaram.*
- *Ao meu amor Júlia, pelo amor, carinho, paciência, companhia em todas as situações e por entender o tempo necessário para a conclusão deste trabalho.*
- A Deus por essa oportunidade em minha vida e por me guardar em todas as viagens para Bauru.

Agradecimentos

- Ao meu orientador, Edson Sardella, pelos ensinamentos e descontração desde a época de graduação, por sua sinceridade, honestidade e por sempre acreditar em mim em meio a tantas intempéries que ocorreram para a conclusão deste trabalho.
- A minha chefia de trabalho na UFSCar, professores Luis Manoel e Giulianna, por terem me incentivado a realizar este projeto e terem me concedido o afastamento necessário para a sua realização.
- O presente trabalho foi desenvolvido com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.
- A Carol e a Letícia da secretaria do POSMAT pela disposição em me ajudar, tirando dúvidas e me orientando em meio a burocracia do sistema. A todos que encontrei nessa jornada e participaram direta ou indiretamente. Em especial ao Leonardo Cadorim, pela parceria nas simulações e discussões da física envolvida no problema.
- Aos meus colegas de trabalho na UFSCar que sempre estiveram dispostos a cooperarem na divisão do trabalho devido minhas ausências. Agradeço especialmente ao Caetano Troiani, por assumir a responsabilidade do laboratório de Física e por sempre me incentivar a concluir este trabalho.
- A todos que, direta ou indiretamente, deram a sua contribuição para que esse projeto fosse realizado.

Resumo

No presente trabalho, resolvendo numericamente as equações de Ginzburg-Landau 3D, estudamos o limiar entre supercondutores do tipo I e tipo II em filmes finos mesoscópicos. Determinamos a dependência da temperatura com o parâmetro crítico de Ginzburg-Landau $\kappa_c(d)$, abaixo do qual o supercondutor se comporta como tipo I para uma dada espessura *d* do filme. O efeito das dimensões da amostra no limiar foi também investigado. Além disso, relatamos uma nova configuração de vórtice gigante com um mínimo local do campo magnético no centro do núcleo. Finalmente, apresentamos alguns resultados que sugerem que a interação vórtice-vórtice não é monotônica, variando de atração de longo alcance a repulsão de curto alcance.

Palavras chave: supercondutor do tipo I, supercondutor do tipo II, supercondutor mesoscópico, vórtice gigante, κ crítico.

Abstract

In the present work, by numerically solving the 3D Ginzburg-Landau equations, we have studied the crossover between type I and type II superconductivity on mesoscopic superconducting thin films. We determined the dependence on temperature of the critical Ginzburg-Landau parameter $\kappa_c(d)$, below which the superconductor behaves as type I for a given thickness d of the film. The effect of the sample dimensions on this crossover was also investigated. Furthermore, we report a novel giant vortex configuration with a local minimum of the magnetic field at the core center. Finally, we present some results suggesting that the vortex-vortex interaction is not monotonic, varying from long range attraction to short range repulsion.

Key words: type I, superconductor, type II superconductor, mesocopic superconductor, giant vortex, critical κ .

SUMÁRIO

1	ntrodução	4	
	1 Revisão Histórica	4	
	2 O Fenômeno da Supercondutividade	7	
	3 Visão geral da Tese	10	
2	2 Teorias Fenomenológicas da Supercondutividade		
		11	
		11	
	2.1.2 Primeira Abordagem da Teoria de London	11	
	2.1.3 Segunda Abordagem da Teoria de London	13	
	2 Teoria Fenomenológica de Ginzburg-Landau	15	
	3 Comprimentos Característicos	20	
	2.3.1 O Comprimento de Coerência - (ξ)	20	
	2.3.2 O Comprimento de Penetração de London - (λ)	22	
	2.3.3 Parâmetro de Ordem de Ginzburg-Landau - (κ)	23	
	4 Equações de Ginzburg-Landau Dependentes do Tempo- TDGL	25	
	5 Campos Críticos	26	
	6 Fluxo Quantizado	28	
	7 Vórtices	30	
	2.7.1 Supercondutores Macroscópicos	30	
	2.7.2 Supercondutores Mesoscópicos	32	
2	Mátodo de Variáncie de Ligação	2/1	
3	1 Vietodo de Variaveis de Ligação		
).1 Introdução		
	2 Metodo Numerico	24 24	
	3.2.1 Equações IDGL	24 26	
	3.2.2 Onidades Admensionals	20 20	
	3.2.4 Discretização dos Equações TDCI	50 11	
	2. Determinação dos Passos do Tompo At	41 47	
	4 Outros Sistemas de Unidades	47 10	
	4 Outros Sistemas de Onidades	40 40	
	6 Dependencia das Constantes renomenologicas com a temperatura	49	
	6 Resumo	49	
4	imiar entre os regimes do Tipo I e Tipo II de Supercondutores do Primeiro Grupo	51	
	1 Introdução	51	
	2 Formalismo Teórico	53	
	3 Parâmetros Críticos	55	
	4 Configuração de Vórtices	58	
	4.4.1 Zero Field Cooled	59	
	4.4.2 Field Cooled	62	
	5 Informações sobre as Simulações	63	

5 Conclusões

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO

1.1 Revisão Histórica

Estava registrado no caderno de anotações do físico holandês Heike Kamerlingh Onnes em 8 de abril de 1911, as palavras "Kwik nagenoeg nul" ("mercúrio praticamente zero") que faziam referência à descoberta de um estranho fenômeno até então desconhecido dos cientistas da época. Onnes acabava de verificar o que ele próprio chamou posteriormente de supercondutividade ou fenômeno supercondutor [1]. Depois de ter liquefeito o hélio pela primeira vez em 1908, ele e seu colaborador Gilles Holst observaram três anos depois que o mercúrio, ao ser submetido a uma temperatura abaixo de 4.2 K, por essa técnica de resfriamento, apresentava efeito Joule nulo, ou seja, a resistência do material à passagem de corrente elétrica era zero. Assim, a corrente poderia fluir pelo material sem apresentar nenhuma dissipação. Essa temperatura em que o material começava a apresentar o novo estado foi chamada, posteriormente, de temperatura de transição de fase, ou temperatura crítica T_c , sendo essa característica da transição entre o estado supercondutor e o estado normal. Experimentos posteriores utilizando chumbo e estanho mostraram que a supercondutividade não era apenas inerente ao mercúrio, mas a vários outros metais, sendo que cada um possui uma T_c associada. Onnes investigou também se a resistência no estado supercondutor era exatamente zero ou aproximadamente zero através de um aparato que consistia em uma corrente fluindo por um anel supercondutor. Essa análise viria a ser repetida com maior precisão por Mills e Files [2] sendo constatado que essas supercorrentes tinham um tempo de vida de mais de 100000 anos. Outra característica intrínseca a esses materiais foi descrita

por dois cientistas em 1933. Walter Meissner e Robert Ochsenfeld [3] notaram que, no estado supercondutor, esses materiais exibiam a propriedade (diamagnetismo perfeito) de excluir o campo magnético (não tão forte) externo aplicado de seu interior. Essa propriedade ficou conhecida como efeito Meissner, deixando sua marca como uma das assinaturas características dos supercondutores.

Desde sua descoberta, a supercondutividade tem se mostrado um desafio para diversos cientistas, sendo que só em 1935, aproximadamente 25 anos após a sua descoberta, dois físicos teóricos (e também irmãos), Fritz e Hanz London [4] contribuíram com a primeira teoria fenomenológica (de característica macroscópica) que daria uma descrição simples, e ao mesmo tempo sucinta de como funcionavam esses materiais na condição supercondutora. Utilizando as Equações de Maxwell, a teoria era capaz de explicar como a corrente e o campo magnético atuam dentro de um supercondutor, fazendo relação com os fenômenos observados por Onnes e Meissner. Deste modo, a teoria engloba com sucesso a resistência zero e o diamagnetismo perfeito, mostrando a existência de um comprimento fundamental $\lambda(T)$ dado como a profundidade em que o campo penetra no material.

Posteriormente, em 1950, uma importante teoria fenomenológica surgiu, baseada nas ideias apresentadas pelos irmãos London e inspirada pela Teoria de Landau para transições de fase de segunda ordem. Elaborada por Vitaly Ginzburg e Lev Landau [5], essa teoria ficou conhecida como a teoria de Ginzburg-Landau ou simplesmente GL e, de fato, ela consegue ir além de sua antecessora tanto em consistência como na apresentação de resultados mais elegantes. Basicamente, a teoria associa uma função de onda Ψ (**r**) (chamada de parâmetro de ordem) com os elétrons supercondutores e o potencial vetor **A** (**r**). Ela apresenta duas equações características, uma descrevendo a variação do parâmetro de ordem no espaço e a outra o campo magnético local. A primeira delas contém um comprimento fundamental que é o chamado comprimento de coerência $\xi(T)$, a distância ao longo da qual o parâmetro de ordem tem uma variação significativa. Já a segunda equação é essencialmente a lei de Ampère e possui um comprimento fundamental que é o de penetração mencionado anteriormente. Uma das características importantes dessa teoria é a de que ela consegue descrever a destruição da supercondutividade através da temperatura e do campo magnético aplicado. A teoria também apresenta um terceiro parâmetro adimensional chamado de parâmetro de Ginzburg-Landau, $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$, o qual leva à existência de dois tipos de supercondutores: tipo I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) e tipo II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$), demonstrando que para o limite de $\kappa \to \infty$, a teoria de London era obtida.

No ano de 1956, o físico russo Alexei A. Abrikosov [6] propôs que haveria a possibilidade de alguns tipos de supercondutores aceitarem uma penetração de fluxo de campo magnético em seu interior, sendo que essas linhas de campo penetradas eram quantizadas e se organizavam em um arranjo ordenado em que prevalecesse a minimização de energia. Esse estado posteriormente ficou conhecido como estado misto, coexistindo no material regiões supercondutoras e normais. Nesse estado misto, o campo magnético fica aprisionado, sendo rodeado por supercorrentes elétricas, tendo uma configuração que chamamos de vórtices.

Apesar da teoria GL ter sido recebida com certa relutância pelos cientistas da época, pois ela não tratava da questão de como o material se torna supercondutor, Lev Gorkov [7] mostrou em 1959 que a mesma pode ser obtida como um caso particular de outra teoria chamada BCS [8]. A teoria BCS foi proposta em 1957 por Bardeen, Cooper e Schrieffer, esta é atualmente a teoria mais conhecida para explicar como um material se torna supercondutor do ponto de vista microscópico.

Em meados dos anos 80, K. A. Míller e J. G. Berdnoz [9] publicam sua descoberta da supercondutividade em altas temperaturas em relação às ligas metálicas utilizadas até então, com T_c acima do valor máximo previsto pela teoria BCS. Esses supercondutores de alta temperatura descobertos por Míller e Berdnoz, primeiramente, eram compostos cerâmicos à base de lantânio que poderiam ser resfriados com nitrogênio líquido ao invés de hélio líquido. Essa técnica de resfriamento ajudaria a viabilizar o processo no geral, pois em termos de custos financeiros, o nitrogênio líquido é mais barato que o hélio líquido, o que potencializa de forma geral um maior leque de aplicações.

Não demorou muito para pesquisadores começarem a sonhar com várias tecnologias novas na área, desde cabos elétricos capazes de transportar energia elétrica por longas distâncias sem apresentar perdas, até magnetos utilizados em: trens supercondutores, contadores de fótons, sensores e computadores quânticos. Apesar de nem toda tecnologia, com algumas exceções como os trens supercondutores, ter sido desenvolvida de modo satisfatório para levar ao nosso cotidiano, pesquisadores do mundo inteiro têm se esforçado para tornar esse sonho uma realidade.

1.2 O Fenômeno da Supercondutividade

A primeira característica inerente desses materiais foi descoberta por Karmelingh Onnes ao resfriar o mercúrio a uma temperatura próxima de 4.2 K, na qual essa amostra apresentava resistência elétrica de 0Ω , como mostra a Figura 1.1.



Figura 1.1: Gráfico histórico de Onnes: resistência do mercúrio sólido em função da temperatura. (Fonte: [1]).

Os dados da Figura 1.1 ilustram a primeira observação referente ao fenômeno. Nessa figura, é constatado que a partir de determinada T_c , a resistência elétrica cai para zero, ocorrendo uma transição de fase entre o estado normal e o estado supercondutor.

A segunda característica inerente desses materiais foi descoberta por W. Meissner e R. Ochsenfeld, podendo ser ilustrada como no experimento hipotético mostrado na Figura 1.2.

No supercondutor, a exclusão das linhas de campo ocorre independentemente da história magnética a qual o material tenha sido submetido, ou seja, no primeiro caso o supercondutor e o condutor hipotético perfeito são submetidos a um resfriamento e posteriormente é aplicado um campo magnético externo (não muito forte). O resultado obtido é de que, independente do material, essas linhas de campo serão sempre expulsas.

Já para o segundo caso, os dois são submetidos a um resfriamento e ao mesmo tempo é aplicado um campo magnético externo (não muito forte), sendo verificado como resultado

7



Figura 1.2: Experimento hipotético ilustrando a diferença entre um supercondutor e um condutor perfeito. Experimento 1: amostras resfriadas sem a presença de um campo magnético aplicado. Experimento 2: amostras resfriadas na presença de um campo magnético aplicado. (Fonte: próprio autor)

que apenas o supercondutor expulsa as linhas de campo aplicado. O resultado dessa experiência ficou conhecido como efeito Meissner. É interessante mencionar que o grau da exclusão de fluxo magnético pode depender do material ou das condições em que foi realizada a medida. Essa combinação entre resistência zero e efeito Meissner resulta em uma distinção clara entre um supercondutor e um hipotético condutor perfeito.

Esses materiais possuem uma relação importante com o campo magnético aplicado, pois esse campo não pode ser arbitrariamente alto. O seu valor está intrinsecamente relacionado a cada valor de temperatura, fazendo uma fronteira entre o estado supercondutor e o estado normal. Um gráfico geral para vários materiais é ilustrado na Figura 1.3. Qualquer campo acima do campo crítico $H_c(T)$, o supercondutor vai para o estado normal; este campo é conhecido como campo crítico termodinâmico.

A terceira característica inerente desses materiais é possuírem uma transição de fase de segunda ordem para H = 0, ou seja, esses materiais apresentam uma descontinuidade no seu calor específico.



Figura 1.3: Gráfico geral da dependência do campo crítico $H_c(T)$ pela temperatura para diversos materiais. (Fonte: [10])

Na Figura 1.4 é apresentada uma tabela periódica com vários elementos que se tornam supercondutores: a) sobre pressão ambiente (destacados em rosa), b) sobre altas pressões (destacados em vermelho) e c) elementos que não são supercondutores (destacados em branco).



Figura 1.4: Tabela periódica dos elementos supercondutores. Onde: a) sobre pressão ambiente (destacados em rosa), b) sobre altas pressões (destacados em vermelho) e c) elementos que não são supercondutores (destacados em branco). (Fonte: [11])

1.3 Visão geral da Tese

No Capítulo 2 apresentaremos as duas principais teorias fenomenológicas que descrevem os materiais supercondutores do ponto de vista macroscópico. Iremos discutir a teoria de London, em seguida a teoria de Ginzburg-Landau e suas principais características, a saber, os comprimentos fundamentais, a quantização de fluxo, e os campos críticos.

No Capítulo 3 apresentaremos o método de variáveis de ligação (talvez o mais utilizado) para resolver as equações de Ginzburg-Landau.

No Capítulo 4 iremos apresentar os resultados, onde encontramos a dependência do parâmetro de Ginzburg-Landau com a espessura de um filme supercondutor para o qual este torna-se do tipo I em tipo II. Iremos também mostrar como a temperatura influência na relação ente estas duas grandezas.

Por fim, no Capítulo 5 iremos apresentar as considerações finais.

CAPÍTULO 2

TEORIAS FENOMENOLÓGICAS DA SUPERCONDUTIVIDADE

2.1 Teoria Fenomenológica dos Irmãos London

2.1.1 Introdução

Com a descoberta da supercondutividade * e suas peculiaridades, os físicos da época consideraram necessário explicar três características inerentes a esses materiais:

a) A queda abrupta da resistência elétrica para zero quando a temperatura T está abaixo da temperatura crítica T_c ;

b) Exclusão total do campo magnético no interior do supercondutor (efeito Meissner);

c) Descontinuidade no calor específico próximo a temperatura de transição de fase, T_c , entre o estado supercondutor e o estado normal.

A primeira teoria fenomenológica que descreve essas três características foi a teoria dos irmãos London. Proposta de duas formas diferentes, essa teoria consegue descrever o campo magnético em um supercondutor adicionando duas novas equações ao conjunto padrão das conhecidas equações de Maxwell.

2.1.2 Primeira Abordagem da Teoria de London

A primeira versão desta teoria considera o supercondutor como um condutor perfeito. Tomando como base o modelo de Drude-Lorentz temos que a ação de um campo elétrico sobre um elétron gera uma aceleração constante. Pela segunda lei de Newton, podemos escrever:

^{*}Este capítulo foi todo baseado em [12] e [13].

$$m \dot{\mathbf{v}} = -\frac{m}{\tau} \mathbf{v} + e \mathbf{E} . \tag{2.1}$$

Fazemos a contribuição de atrito tender a zero $(\tau \rightarrow \infty)$ pela consideração de um condutor perfeito restando apenas o segundo termo depois da igualdade, onde m é a massa dos portadores de carga (elétrons), e a carga elementar e $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v}/dt$ a sua aceleração. Considerando uma densidade de corrente supercondutora $\mathbf{J} = ne\mathbf{v}$, onde v é a velocidade de elétrons supercondutores e n a densidade desses elétrons (assumida uniforme), acoplamos a densidade de corrente na equação (2.1) reescrevendo-a da seguinte forma:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \mathbf{E} . \tag{2.2}$$

A equação (2.2) é conhecida como a primeira equação de London e é equivalente à segunda lei de Newton aplicada aos elétrons do supercondutor. Esses elétrons estão livres e são acelerados por um campo elétrico, mostrando que quando temos uma corrente estacionária, não temos um campo elétrico dentro do material.

Partindo da equação de Ampère-Maxwell e da lei de Faraday, podemos escrever:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \qquad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \,. \tag{2.4}$$

Fazendo algumas manipulações algébricas com as equações (2.2), (2.3) e (2.4) obtemos o seguinte resultado:

$$\frac{\partial \left(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{h} + \frac{4\pi n e^2}{mc^2} \mathbf{h} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} \right)}{\partial t} = 0.$$
(2.5)

Pelo argumento matemático de que a derivada de uma constante é igual a zero, podemos supor que todo termo que está dentro do parênteses na equação acima é igual a zero[†]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{4\pi n e^2}{mc^2} \mathbf{h} + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} = 0$$
 (2.6)

[†]O lado direito da equação (2.5) é matematicamente nulo. Este resultado também poderia ser obtido através da interpretação física do efeito de Meissner. Este argumento é suficiente para descrever a penetração superficial do campo magnético. Posteriormente veremos que esta equação não é nula quando existir nucleação de vórtices no supercondutor.

Considerando o estado estacionário, a equação (2.6) torna-se:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \frac{4\pi n e^2}{m c^2} \mathbf{h} = 0$$
 (2.7)

Definimos o comprimento de penetração de London como sendo:

$$\lambda_L^2 = \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \,. \tag{2.8}$$

Assim, podemos escrever a equação (2.7) como:

$$\lambda_L^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \mathbf{h} = 0 . \tag{2.9}$$

A equação (2.9) é conhecida como a segunda equação de London. Essa equação nos fornece informação a respeito do diamagnetismo dos materiais supercondutores, mostrando que o campo magnético não pode penetrar no supercondutor para além de uma camada de espessura λ_L .

2.1.3 Segunda Abordagem da Teoria de London

A segunda abordagem proposta pelos irmãos London é baseada em um modelo de dois fluidos. O modelo de dois fluidos parte da ideia de um deles ser um fluido sem viscosidade (superfluido) e o outro, um fluido com viscosidade finita (fluido normal). Assumindo que a energia livre associada aos dois fluidos pode ser dividida em três partes, podemos escrever:

$$F = F_N + F_{Kin} + F_{Mag} , (2.10)$$

onde F é a energia livre, F_N é a energia do fluido no estado normal, F_{Kin} é a energia cinética do fluido em movimento e F_{Mag} a energia armazenada no campo magnético. As duas úlimas contribuições são dadas por:

$$F_{Mag} = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{h}^2 \left(\mathbf{r} \right) d^3 r , \qquad (2.11)$$

e

$$F_{Kin} = \int \frac{1}{2} \rho\left(\mathbf{r}\right) v^2 d^3 r , \qquad (2.12)$$

onde $\rho(\mathbf{r})$ é a densidade de massa referente ao superfluido. Considerando $\rho = nm$, onde né a densidade de pares supercondutores, $\mathbf{v} = \frac{1}{ne}\mathbf{J}$ e utilizando a Lei de Ampère, podemos rearranjar a equação (2.12) da seguinte forma:

$$F_{Kin} = \frac{1}{8\pi} \int \lambda_L^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{h} d^3 r . \qquad (2.13)$$

Somando todas as contribuições para a energia livre, temos que:

$$F = F_N + \frac{1}{8\pi} \int \left[\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + \lambda_L^2 \nabla \times \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{h} \right] d^3 r .$$
(2.14)

Agora, substituindo o funcional:

$$\mathscr{F}_L = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + \lambda_L^2 \nabla \times \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{h} , \qquad (2.15)$$

na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathscr{F}_L}{\partial \mathbf{h}} - \mathbf{\nabla} \times \left[\frac{\partial \mathscr{F}_L}{\partial (\mathbf{\nabla} \times \mathbf{h})} \right] = 0 , \qquad (2.16)$$

finalmente temos a segunda Equação de London (2.9) tratando h variacionalmente para a minimização da energia total.

Consideramos agora um supercondutor semi-infinto o ocupando o espaço x > 0. O domínio x < 0 é o espaço livre (vácuo). Consideramos ainda um campo magnético externo ao longo do eixo z, paralelo ao plano yz. Neste cenário, o campo local é invariante ao longo dos eixos y e z, variando ao longo de x apenas. Podemos escrever $\mathbf{h} = h_z \hat{\mathbf{z}}$. Usando a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{h}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{h}) - \nabla^2 \mathbf{h}$, e $\nabla \cdot \mathbf{h} = 0$, a equação (2.17) toma a forma:

$$\frac{d^2 h_z}{dx^2} - \frac{1}{\lambda^2} h_z = 0 , \qquad (2.17)$$

cuja solução é dada por:

$$\mathbf{h}_z(x) = \hat{\mathbf{z}} H e^{-x/\lambda_L} \,. \tag{2.18}$$

Este resultado está ilustrado na Figura 2.1.

Considerando a condição 2.18, encontramos a densidade de corrente induzida através da lei de Ampère. Temos que:

$$\mathbf{J} = -\hat{\mathbf{y}}\frac{c}{4\pi\lambda}He^{-x/\lambda_L} \ . \tag{2.19}$$



Figura 2.1: Comprimento de penetração de London λ_L . (Fonte: próprio autor).

A equação 2.19 nos permite verificar como o campo magnético é impedido de entrar no interior do supercondutor a uma distância $x \gtrsim \lambda_L$. Esse decaimento do campo magnético, de acordo com uma função exponencial, é devido a uma corrente de blindagem (ou circuitação) que atua dentro do supercondutor.

Deste modo, a teoria de London consegue descrever o diamagnetismo dos supercondutores. Apesar de não entrar em detalhes sobre o mecanismo microscópico da supercondutividade, essa teoria dá suporte ao efeito Meissner adequadamente. Embora ela tenha algumas limitações, tal como assumir a estrutura de vórtices como objetos pontuais, a descrição da supercondutividade a campo constante muito menor que o campo crítico superior[‡], ela é capaz de descrever as propriedades estruturais e eletrônicas da rede de vórtices. Portanto, para aumentar a generalidade foi necessário a elaboração de uma teoria livre destas limitações, a qual permitisse estudar a estrutura de vórtices para qualquer intensidade de campo aplicado.

2.2 Teoria Fenomenológica de Ginzburg-Landau

Devido às limitações na teoria da supercondutividade fenomenológica da época, Vitaly L. Ginzburg e Lev D. Landau abordaram o problema a partir de um ponto de vista termodinâmico. Ginzburg e Landau notaram que para a transição do estado supercondutor nas

[‡]O campo suficiente para destruir a supercondutividade no interior do material, exceto na superfície em uma fina camada de espessura λ_L

proximidades da temperatura crítica T_c , havia uma transição de fase de segunda ordem, e partindo da Teoria de Landau para esse tipo de transição de fase, eles inserem um novo parâmetro de ordem. Esse parâmetro apresenta comportamento equivalente à magnetização estudada na teoria de Landau (podendo ser tratado como um fenômeno quântico macroscópico) se anulando na fase desordenada ($T > T_c$), ou sendo diferente de zero na fase ordenada ($T < T_c$).

Na sequência, iremos partir da magnetização estudada na Teoria de Landau para posteriormente fazermos uma analogia com a supercondutividade.

Para a magnetização, o ponto de transição de fase é chamado de temperatura de Curie (T_c) , sendo M diferente de zero abaixo dessa temperatura. Landau observou que a magnetização era pequena perto da transição de fase e apresentava variações suaves no espaço até atingir o valor nulo, de modo que a função poderia ser considerada contínua. A partir dessa observação, a energia livre poderia ser escrita em uma série de potências da magnetização:

$$F = F_0 + \alpha M^2 + \frac{\beta}{2} M^4$$
 (2.20)

onde F_0 é a energia para a magnetização igual a zero. Olhando para (2.20) nota-se que a constante β é responsável pela concavidade da curva gerada pela função e que, se seu valor for negativo, a energia será mínima para um valor arbitrariamente alto de magnetização, fato esse que acarretaria em divergência. O valor de β , portanto, deve ser positivo para que possamos ter um valor finito de energia mínima. O mesmo já não ocorre para a constante α que pode assumir tanto valores positivos, quanto negativos, sendo α responsável pelas formas que a curva da função (2.20) pode assumir, não implicando em divergência. Assim, podemos escrever:

- se $\alpha > 0$, o mínimo ocorre em M = 0;
- se $\alpha < 0$, o mínimo ocorre em $M \neq 0$.

Na sequência, precisamos relacionar o parâmetro de ordem com a temperatura para termos uma transição de fase de segunda ordem. Sabemos que α deve ser negativo para termos um mínimo de magnetização diferente de zero, conforme ilustrado na Figura 2.2.Portanto podemos escrever a relação:

- $\alpha(T) = a(T T_c)$, para $T \leq T_c$;
- $\alpha(T) = 0$, para $T > T_c$;





Figura 2.2: Funções de Energia Livre para $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. (Fonte: próprio autor).

Os mínimos de *F* mostrados na Figura 2.2 podem ser obtidos da seguinte forma:

$$\frac{\partial F}{\partial M} = 0 \Longrightarrow [\alpha(T) + \beta M^2] M = 0.$$
(2.21)

Resolvendo a equação 2.21 obtemos duas soluções:

$$\alpha > 0 \Rightarrow M = 0 \qquad \text{para} \quad T > T_c ,$$

$$\alpha \le 0 \Rightarrow M^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{a(T - T_c)}{\beta} \text{ para} \quad T \le T_c.$$
(2.22)

Notamos que, em (2.22), conforme a temperatura vai aumentando (considerando $T < T_c$), o módulo de M vai diminuindo até se anular em $T = T_c$.

Ginzburg e Landau fizeram analogia para a supercondutividade adotando a mesma ideia utilizada na teoria de transição de fase de Landau. É elegido uma função de onda complexa chamada de parâmetro de ordem $\psi(\mathbf{r})$, tal que seu módulo é proporcional à densidade de pares de Cooper $n_s(\mathbf{r})$. O parâmetro de ordem pode ser interpretado como uma função de onda dos portadores de carga do supercondutor. Ao contrário da teoria de London, $\psi(\mathbf{r})$ não é espacialmente homogênea. Assim como na magnetização da teoria de Landau, o parâmetro de ordem é tomado com valores pequenos perto da transição de fase e com variações suaves no espaço, de modo que a energia livre possa ser expandida em uma série de potências do $|\psi(\mathbf{r})|^2$ e do potencial vetor **A**. Para que a função de onda possa ser complexa, apenas a forma $|\psi|^2$ (que é proporcional a densidade de pares de Cooper $n_s(\mathbf{r})$), pode entrar na expansão de energia livre. Portanto, podemos escrever:

$$F = F_0 + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4.$$
 (2.23)

De forma análoga ao que foi feito para a magnetização, podemos escrever a minimização de energia da função (2.23) como se segue:

$$\alpha > 0 \Rightarrow |\psi| = 0 \qquad \text{para} \quad T > T_c ,$$

$$\alpha \le 0 \Rightarrow |\psi|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{a(T - T_c)}{\beta} \text{ para} \quad T \le T_c.$$
(2.24)

Devido à características de inomogeneidade do estado supercondutor, a quantidade *F* pode ser tratada como energia livre e ser escrita da seguinte forma:

$$F = F_0 + \int \mathscr{F}_C[\psi(\mathbf{r})] d^3r$$
(2.25)

onde F_0 corresponde à energia do estado normal e $\mathscr{F}_C = \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4$.

Efeitos relacionados ao comprimento de coerência não estão sendo levados em consideração na equação (2.25), ou seja, isso significa que não está sendo considerado um aumento de energia em relação a uma distorção espacial no parâmetro de ordem. Ginzburg e Landau consideraram esses efeitos e fizeram uma pequena correção na relação acima, acrescentando um termo que seria o gradiente do parâmetro de ordem:

$$\mathscr{F}_G = \frac{\hbar^2}{2m^*} |\nabla \psi|^2 , \qquad (2.26)$$

onde o termo $\hbar^2/2m^*$ seria o termo associado a energia cinética na mecânica quântica, sendo $m^* = 2m$ a massa efetiva do par de Cooper e *m* é massa do elétron.

A fim de levar em conta os efeitos da aplicação de campo magnético, Ginzburg e Landau substituíram o momento canônico $\mathbf{p} = -i\hbar \nabla$ pelo momento linear cinético:

$$\mathbf{p} = -i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} . \tag{2.27}$$

Desta forma, a equação (2.26) torna-se:

$$\mathscr{F}_{G} = \frac{\hbar^{2}}{2m^{*}} \left| \left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{ie^{*}}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right) \psi \right|^{2} .$$
(2.28)

Para finalizar, é considerado um termo de contribuição da energia armazenada no campo magnético para o cálculo da densidade de energia livre. Temos que:

$$\mathscr{F}_h = \frac{1}{8\pi} h^2(\mathbf{r}) , \qquad (2.29)$$

Portanto, a energia livre total pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = F_0 + \int \left(\mathscr{F}_C + \mathscr{F}_G + \mathscr{F}_h\right) d^3 r$$

$$= F_0 + \int \left\{ \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left[\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right] \psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi} h^2 \right\} d^3 r .$$
(2.30)

Para minimizar o funcional (2.30) em relação a ψ e A, podemos utilizar as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \psi} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial (\boldsymbol{\nabla} \psi)} \right] = 0,$$

$$\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \mathbf{A}} - \boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A})} \right] = 0.$$
(2.31)

De posse dessas relações, finalmente obtemos as duas equações de Ginzburg-Landau:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left[\boldsymbol{\nabla} - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right]^2 \psi + \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0 , \qquad (2.32)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \frac{e^*}{2m^*} \left\{ \bar{\psi} \left[-i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right] \psi + \psi \left[+i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right] \bar{\psi} \right\} .$$
(2.33)

A segunda das equações de Ginzburg-Landau pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{h} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_s , \qquad (2.34)$$

onde

$$\mathbf{J}_{s} = \frac{-i\hbar e^{*}}{2m^{*}} \left[\bar{\psi} \nabla \psi - \psi \nabla \bar{\psi} \right] - \frac{(e^{*})^{2}}{m^{*}c} |\psi| \mathbf{A} , \qquad (2.35)$$

é chamada de densidade de corrente supercondutora. A equação (2.34) nada mais é do que a lei de Ampère.

2.3 Comprimentos Característicos

No contexto da teoria de Ginzburg-Landau existem duas escalas de comprimentos fundamentais. O primeiro deles é o comprimento de coerência $\xi(T)$, onde é medido a variação espacial do parâmetro de ordem. Já o segundo, o comprimento de penetração de London $\lambda(T)$, é responsável pela variação do campo magnético no interior do supercondutor.

2.3.1 O Comprimento de Coerência - (ξ)

Consideraremos para uma primeira análise um caso envolvendo uma inomogeneidade do parâmetro de ordem gerada pela presença de um contorno, na ausência de campos e correntes. Tomamos um supercondutor semi-infinito e escrevemos a primeira equação de Ginzburg-Landau em sua forma unidimensional (considerando a direção x e uma fronteira no plano de origem yz separando o espaço livre do supercondutor). Temos que:

$$\alpha \psi + \beta \psi^3 - \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0 , \qquad (2.36)$$

onde estamos considerando ψ uma função real. Para o estado supercondutor, a constante α é negativa, então podemos escrever $\alpha = -|\alpha|$ e substituindo na equação (2.36), obtemos:

$$- |\alpha|\psi + \beta\psi^3 - \frac{\hbar^2}{2m^*}\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0.$$
 (2.37)

A equação (2.37) pode ser convenientemente reescrita fazendo mudança $\psi = \sqrt{|\alpha|/\beta} f$. Expressando o parâmetro de ordem em termos de f, a equação (2.37) torna-se:

$$-f + f^3 - \xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 , \qquad (2.38)$$

onde ξ é o comprimento de coerência, o qual é definido por:

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \,. \tag{2.39}$$

A fim de resolver a equação (2.38), usaremos condição de contorno $f^2 = 1$ para $x \to \infty$, pois em uma posição longe da fronteira a amostra é perfeitamente supercondutora; para $x \to \infty$, podemos também considerar df/dx = 0.

Na sequência, multiplicando a equação (2.38) por f' = df/dx, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{\xi^2(f')^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4}\right] = 0 , \qquad (2.40)$$

de onde encontramos:

$$-\frac{\xi^2 (f')^2}{2} - \frac{f^2}{2} + \frac{f^4}{4} = C.$$
(2.41)

Usando as condições de contorno, obtemos C = -1/4. Assim, podemos escrever:

$$\xi^2 (f')^2 = \frac{1}{2} (1 - f^2)^2, \qquad (2.42)$$

que resolvida a partir de métodos de integração, nos fornece:

$$f = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi}\right). \tag{2.43}$$

A Figura 2.3 ilustra o comportamento desta função (2.43). Esse gráfico nos mostra como o parâmetro de ordem varia dentro de um material supercondutor, precisamente, em uma interface vácuo-supercondutor.

Podemos obter a relação do comprimento de coerência como função da temperatura. Uma vez que $\alpha(T) = -aT_c[1 - (T/T_c)]$, substituindo na equação (2.39) escrevemos:

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^* a T_c}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = \xi(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}.$$
(2.44)

Note que no limite $T \to T_c$, $\xi \to \infty$. Em outras palavras, próximo à temperatura crítica, os pares de Cooper perdem a coerência, dando assim lugar ao estado normal.



Figura 2.3: Ilustração do comportamento da função (2.43). O parâmetro de ordem varia na interface vácuo-supercondutor ao longo de uma distância correspondente ao comprimento de coerência ξ . (Fonte: próprio autor).

2.3.2 O Comprimento de Penetração de London - (λ)

Para a segunda análise utilizamos uma ideia semelhante àquela para obtermos o comprimento de coerência, mas com uma diferença. Agora consideraremos o material na presença de campo aplicado e o parâmetro de ordem homogêneo em todo espaço como no estado de Meissner, $|\psi|^2 = |\alpha|/\beta$. A partir dessas considerações, na equação (2.35) da densidade de corrente supercondutora, torna-se:

$$\mathbf{J}_{s} = -\frac{(e^{*})^{2}}{m^{*}c}|\psi|^{2}\mathbf{A}.$$
(2.45)

Usando a lei de Ampère (2.34), vem que:

$$\frac{m^* c^2 \beta}{4\pi (e^*)^2 |\alpha|} \nabla \times \mathbf{B} + \mathbf{A} = 0.$$
(2.46)

Por fim, aplicamos o rotacional em ambos os lados da equação (2.46), encontramos:

$$\lambda^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{h} + \mathbf{h} = 0 , \qquad (2.47)$$

que é a segunda equação de London (2.7) com a diferença de que agora o comprimento de penetração depende da temperatura e é escrito como segue:

$$\lambda^{2}(T) = \frac{m^{*}c^{2}\beta}{4\pi(e^{*})^{2}|\alpha|}$$

$$= \frac{m^{*}c^{2}\beta}{4\pi(e^{*})^{2}|\alpha|} \left(1 - \frac{T}{T_{c}}\right)^{-1}$$

$$= \lambda^{2}(0) \left(1 - \frac{T}{T_{c}}\right)^{-1}.$$
(2.48)

Note que no limite $T \to T_c$, $\lambda \to \infty$. Ou seja, próximo a temperatura crítica o campo local é aproximadamente uniforme, destruindo assim a supercondutividade.

2.3.3 Parâmetro de Ordem de Ginzburg-Landau - (κ)

O parâmetro de Ginzburg-Landau κ é definido como a razão entre os comprimentos de penetração de London e de coerência, respectivamente:

$$\kappa = \frac{\lambda(T)}{\xi(T)} . \tag{2.49}$$

Uma vez que os comprimentos fundamentais possuem a mesma dependência com a temperatura, κ não depende de T. Isto é válido para temperaturas próximas a T_c , conforme veremos na Seção 3.5. Em seu trabalho inovador [6], Abrikosov mostrou que, para $\kappa < 1/\sqrt{2}$, ou seja, quando λ é menor do que $\sqrt{2}\xi$, o comportamento do parâmetro de ordem e do campo magnético na interface supercondutor-vácuo será de acordo com o painel superior da Figura 2.4. No entanto, se $\kappa > 1/\sqrt{2}$, o comportamento destas mesmas grandezas é ilustrado no painel inferior da Figura 2.4. Este critério, determinado primeiramente por Abrikosov, é o que diferencia os supercondutores do tipo I dos do tipo II.

Esta classificação pode ser obtida por meio da energia de barreira de superfície livre de Gibbs a qual é dada por:


Figura 2.4: Ilustração da variação de **B** e ψ em uma interface supercondutor-vácuo. Para o caso de $\kappa < 1/\sqrt{2}$ o supercondutor é do tipo I e apresenta uma energia de superfície positiva. Para o caso de $\kappa > 1/\sqrt{2}$ o supercondutor é do tipo II e apresenta uma energia de superfície negativa. (Fonte: [14]).

$$G = \int \left[\alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{8\pi} (\mathbf{h} - \mathbf{H})^2 \right] d^3r .$$
 (2.50)

Considere um supercondutor semi-infinito preenchendo o espaço y > 0. Paralelo ao plano xz é aplicado um campo $\mathbf{H} = H\hat{\mathbf{z}}$. Multiplicando a equação a primeira equação de Ginzburg-Landau (2.32) e integrando o resultado, obtemos:

$$\int \left[\alpha |\psi|^2 + \beta |\psi|^4 + \frac{\hbar^2}{2m^*} \left| \left(\boldsymbol{\nabla} - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 \right] d^3r = 0 , \qquad (2.51)$$

onde usamos a condição de contorno $\hat{\mathbf{n}} \cdot \left(\nabla - \frac{ie^*}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi = 0$, onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor normal à superfície, e integração por partes.

Usando (2.51) a identidade resultado na equação (2.50), encontramos:

$$G = \int \left[\frac{1}{8\pi} (\mathbf{h} - \mathbf{H})^2 - \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \right] d^3r .$$
 (2.52)

Considere o campo aplicado igual ao campo crítico termodinâmico, o qual descreveremos mais detalhadamente na Seção 2.5, $H = H_c = 4\pi \alpha^2/\beta$. Assim, a energia livre de Gibbs, equação (2.52), por unidade de área, pode ser reescrita como:

$$\frac{G}{A} = \frac{H_c^2}{8\pi} \int \left[\left(\frac{h-H}{H_c} \right)^2 - \left| \frac{\psi}{\psi_{\infty}} \right|^4 \right] dy , \qquad (2.53)$$

onde $\psi_{\infty} = \sqrt{-\alpha/\beta}$ é o parâmetro de ordem do estado de Meissner. A quantidade $\gamma = G/A$ é definida como energia de barreira de superfície. Considerando $H = H_c$, vem que:

$$\gamma = \frac{h_c^2}{8\pi} \int \left[\left(\frac{h}{H_c} - 1 \right)^2 - \left| \frac{\psi}{\psi_{\infty}} \right|^4 \right] dy , \qquad (2.54)$$

Vimos anteriormente que o campo local decai exponencialmente a partir da superfície, $h(y) = He^{-y/\lambda}$ e que $\psi(y) = \psi_{\infty} \tanh \sqrt{2}y/\xi$. Tendo isto em vista, consideremos as seguintes aproximações: $h(y) = H_c$ para todo $y < \lambda$ e, nulo para $y > \lambda$; $\psi(y) = 0$ para todo $y < \xi$, e $\psi(y) = \psi_{\infty}$ para $y > \xi$. Assim:

$$\gamma = -\frac{h_c^2}{8\pi} (\lambda - \xi) . \qquad (2.55)$$

Se a energia de barreira de superfície for negativa, então o sistema será instável (propenso) à formação de *estrutura de domínios* e estável em caso contrário. Com efeito, $\gamma < 0$ para $\lambda > \xi$ ($\kappa > 1$) e positivo em caso contrário ($\kappa < 1$). Isto define o limiar entre supercondutores do tipo I e tipo II. Ginzburg e Landau determinaram este limiar encontrando o valor exato $\kappa = 1/\sqrt{2}$.

2.4 Equações de Ginzburg-Landau Dependentes do Tempo-TDGL

Em 1959 Lev Gorkov [7] demonstrou que a teoria GL poderia ser obtida como um caso particular da teoria BCS [8] e em 1968 derivou as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo para o parâmetro de ordem e o potencial vetor. O novo cenário trazido por essas equações possibilitava o estudo dos supercondutores no estado de não equilíbrio.

De acordo com Gorkov, as equações (2.32), (2.33) e (2.35) podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*D} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e^*}{\hbar}\varphi\right)\psi = -\frac{1}{2m^*}\Pi^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi, \qquad (2.56)$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_s - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{h} , \qquad (2.57)$$

onde $\Pi = \left(-i\hbar \nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\right)$ é a derivada covariante e a densidade de corrente supercondutora é dada por:

$$\mathbf{J}_{s} = \frac{e^{*}}{m^{*}} \mathbb{R}\mathrm{e}\left[\bar{\psi}\mathbf{\Pi}\psi\right] \ . \tag{2.58}$$

O significado de cada uma das constantes presentes nas equações (2.56) e (2.57) será especificado no Capítulo 3.

Estas equações são importantes para o estudo de sistemas supercondutores sob aplicação de correntes de transporte. No entanto, também podem ser usadas como um método de relaxação para obtenção de soluções estacionárias das equações de Ginzburg-Landau independentes do tempo.

2.5 Campos Críticos

Conforme vimos na Seção anterior, exitem dois tipos de supercondutor, os do tipo I e do tipo II. O que diferencia um tipo do outro é o valor do parâmetro de Ginzburg-Landau. Nessa Seção discutiremos estes dois tipos sob o ponto de vista dos campos críticos que delimitam os estados de Meissner, estado misto, e estado normal. Os chamados supercondutores do tipo I são aqueles que, ao serem submetidos a um campo magnético aplicado, apresentam o estado de Meissner abaixo de um valor de campo crítico H_c . Para valores de H acima deste campo, ocorre destruição abrupta da característica supercondutora. Já os supercondutores do tipo II apresentam o estado de Meissner até um campo crítico inferior H_{c_1} . Entretanto, quando o material experimenta um aumento de campo, ao invés da supercondutividade ser totalmente destruída como nos supercondutores do tipo I, o material do tipo-II permite a penetração de algumas linhas de fluxo magnético, entre H_{c_1} e o campo crítico superior H_{c_2} . Essa "faixa" de campo é denominada de estado misto. Neste estado, o supercondutor apresenta quantização de fluxo magnético, onde se formam vórtices até que o campo magnético aplicado alcance o valor de campo H_{c_2} onde a supercondutividade é totalmente destruída no interior do material, exceto na superfície. O estado misto representa uma coexistência de regiões normais com domínios supercondutores. As Figuras 2.5 e 2.6 ilustram essas características através de diagramas de fase.



Figura 2.5: Campo em unidades de $H_c(0)$ em função da temperatura em unidades de T_c . A linha $H_c(T)$ representa a transição entre os estados normal e de Meissner em um supercondutor do tipo I. (Fonte: próprio autor).

A magnetização é outra quantidade física importante no estudo da supercondutividade. Esta quantidade é dada por $\mathbf{M} = \frac{(\mathbf{B}-\mathbf{H})}{4\pi}$, onde \mathbf{B} é definido como a média espacial do campo magnético local h. Em supercondutores do tipo I, o campo é totalmente expelido da amostra abaixo de H_c , ou seja, $\mathbf{B} = 0$ de tal modo que $-4\pi\mathbf{M} = \mathbf{H}$. Acima de H_c , $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, de tal forma que a magnetização anula-se identicamente. Por outro lado, para supercondutores do tipo II, imediatamente acima do estado de Meissner, em $H = H_{c1}$, a magnetização decresce monotonicamente até se anular no segundo campo crítico H_{c2} . Esses comportamentos de magnetização estão ilustradas no gráfico da Figura 2.7.



Figura 2.6: Campo *H* em função da temperatura *T*. As linhas $H_{c1}(T)$, $H_{c2}(T)$ e $H_{c3}(T)$ representam as transições, estado de Meissner - estado misto, estado misto - supercondutividade superficial e supercondutividade superficial - estado normal, respectivamente. É interessante notar a representação triangular da rede de vórtices de Abrikosov no estado misto para uma amostra homogênea e sem defeitos. (Fonte: próprio autor).

2.6 Fluxo Quantizado

Nesta Seção iremos discutir a quantização de fluxo magnético em supercondutores do tipo II, onde veremos que ela é sempre um múltiplo inteiro de um quantum de fluxo. Substituindo $\psi = |\psi|e^{i\phi}$ na densidade de corrente supercondutora (2.35), encontramos:

$$\mathbf{A} = \frac{\hbar c}{2e} \nabla \phi - \frac{\mathbf{J} m^* c}{4e^2 |\psi|^2} \,. \tag{2.59}$$

Utilizando o teorema de Stokes, obtemos:

$$\oint_{C} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_{S} \mathbf{\nabla} \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS = \Phi \,, \qquad (2.60)$$

onde S é uma superfície bilateral limitada por um caminho fechado C. Assim, integrando a



Figura 2.7: Gráfico da magnetização para supercondutores dos tipos I e II. Para o tipo I, a transição do estado supercondutor para o estado normal é representada pela linha tracejada $H = H_c$. Para o tipo II, os estados de Meissner e misto podem ser evidenciados pelas regiões coloridas *azul* ($0 \le H \le H_{c1}$) e *amarela* ($H_{c1} \le H \le H_{c2}$), respectivamente. (Fonte: próprio autor).

equação (2.59) vem que:

$$\frac{\hbar c}{2e} \oint_C \nabla \phi \, d\mathbf{r} - \frac{m^* c}{4e^2} \oint_C \frac{\mathbf{J}}{|\psi|^2} \, d\mathbf{r} = \Phi \; . \tag{2.61}$$

Admitindo a existência de *n* quanta, encerrados pela trajetória *C*, e que, em uma volta completa em torno do centro do vórtice a fase varia de 2π , teríamos uma variação de $2\pi n$, segundo regra de quantização de Bohr-Sommerfeld [15] para o movimento de um elétron. Assim, temos que:

$$\Phi = n\frac{hc}{2e} - \frac{m^*c}{4e^2} \int_C \frac{\mathbf{J}}{|\psi|^2} \, d\mathbf{r} \, .$$
(2.62)

Considerando supercondutores de dimensões muito maiores do que o comprimento de penetração λ , existe um caminho C fechado ao longo do qual $\mathbf{J} = 0$. Portanto, podemos escrever:

$$\Phi = n\frac{hc}{2e} = n\Phi_0 , \qquad (2.63)$$

onde n é chamado de número quântico de fluxóide e é um número inteiro. Essa equação

mostra que o fluxo confinado no estado misto é quantizado e determina o número de quanta de fluxo que atravessa uma determinada área de seção reta do material supercondutor.

2.7 Vórtices

Vimos que supercondutores do tipo II possuem um estado denominado misto, onde para $H > H_{c1}(T)$ existe uma penetração de fluxo magnético em forma de vórtices. Os vórtices possuem uma estrutura filamentar de forma cilíndrica e em seu centro existe uma região normal de raio da ordem do comprimento de coerência $\xi(T)$. O campo magnético h(r) é perpendicular à densidade de corrente, é máximo no centro do vórtice, decaindo até praticamente se anular a uma distância maior que $\lambda(T)$. As supercorrentes se anulam no núcleo central do vórtice e tendem a crescer ao redor do vórtice blindando a região normal. Os vórtices possuem dimensão da ordem do comprimento de penetração de London $\lambda(T)$. A estrutura de um vórtice está representada na Figura 2.8.



Figura 2.8: Estrutura de um vórtice. (Fonte: próprio autor, adaptado de [13]).

2.7.1 Supercondutores Macroscópicos

No estado misto, o fluxo magnético penetra no supercondutor formando uma rede quadrada ou triangular de vórtices [6]. Esses vórtices assumem a forma de tubos, cada qual carregando um quantum de fluxo ϕ_0 . Abrikosov, em 1957, propôs que a rede de vórtices possui formato hexagonal, que é a configuração mais estável no interior de supercondutores de dimensões macroscópicas. Em 1967, Essmann e Träuble [16], confirmaram experimentalmente a teoria de Abrikosov mostrando pela primeira vez este arranjo por meio de decoração magnética (ver painel (a) da Figura 2.9). No painel (b) da mesma figura, podemos visualizar essa configuração através de um experimento mais recente onde foi usada a técnica STM ("*scanning tunneling microscopy*").



Figura 2.9: Ilustração de uma rede de vórtices através de dois métodos diferentes. (a) *"bitter decoration"* em MgB_2 . (b) STM em $NbSe_2$. (Fonte: [17], [18]).



Figura 2.10: Intensidade do parâmetro de ordem para $L = 36\xi(0)$ e $L = 40\xi(0)$ para vários valores de campo aplicado H à temperatura fixa $T = 0.3125T_c$. (Fonte: [19])



Figura 2.11: Valores críticos de *L* em função de *T*. (Fonte: [19])

2.7.2 Supercondutores Mesoscópicos

Em geral, uma amostra supercondutora é considerada mesoscópica quando pelo menos uma de suas dimensões é da ordem do comprimento de penetração de London λ , ou do comprimento de coerência ξ . Em escala mesoscópica, a dinâmica de vórtices é dominada pelos efeitos de borda. Foi mostrado, em 2012, por Zadorosny *et al.* [19] como os vórtices se comportam em supercondutores do tipo II no limiar entre as dimensões macroscópica e mesoscópica. A Figura 2.10 ilustra a passagem do regime mesoscópico para o regime macroscópico de duas amostras de dimensões $L = 36\xi(0)$ e $L = 40\xi(0)$, para vários valores de campo aplicado H (em unidades de $H_{c2}(0)$) e de temperatura $T = 0.3215T_c$. Para a amostra de menor tamanho, podemos observar que os efeitos de borda influenciam na configuração da rede de vórtices mais pronunciadamente. Neste caso, os vórtices tendem a se arranjar em uma rede quadrada acompanhando a geometria da amostra. Esse efeito é notado a partir de $H = 0.620H_{c2}(0)$ e é visivelmente observado para $H = 0.694H_{c2}(0)$. Já para uma amostra de tamanho $L = 40\xi(0)$, não é mais observado o mesmo efeito que em $L = 36\xi(0)$ e os vórtices se arranjam em uma rede de Abrikosov para qualquer valor de campo H. Isto nos indica que existe um limiar entre a escala mesoscópica.

Este limiar também ocorre para outros valores de temperatura, embora para diferentes valores de *L*. A Figura 2.11 ilustra a dependência de *L* com a temperatura.

CAPÍTULO 3

O MÉTODO DE VARIÁVEIS DE LIGAÇÃO

3.1 Introdução

Nas últimas décadas, com a gradual e acelerada evolução da tecnologia, os computadores têm cada vez mais apresentado um espantoso poder de processamento, com o qual tem disponibilizado um leque de aplicações para o estudo de diversos fenômenos físicos através de modelagem e simulação computacional. Particularmente, a supercondutividade tem usado desse artifício para fazer a previsão de situações reais, tomando como ponto de partida uma situação ideal que é posteriormente moldada por ajustes que se aproximam mais da realidade, obtendo dessa maneira resultados plausíveis.

Neste Capítulo será exposto um algorítimo de solução numérica das equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo (TDGL) [20, 21], usando o método de diferenças finitas em conjunto com o método de variáveis de ligação.

3.2 Método Numérico

3.2.1 Equações TDGL

O nosso ponto de partida será as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo descritas na seção (2.4) deste trabalho. Essas equações foram escritas na seguinte forma:

$$\frac{\hbar^2}{2m^*D} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{e^*}{\hbar}\varphi\right)\psi = -\frac{1}{2m^*}\Pi^2\psi + \alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi; \qquad (3.1)$$

$$\frac{4\pi\sigma}{c}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\varphi\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_s - \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{h} , \qquad (3.2)$$

onde a densidade de corrente supercondutora é dada por:

$$\mathbf{J}_{s} = \frac{e^{*}}{m^{*}} \mathbb{R}\mathrm{e}\left[\bar{\psi} \mathbf{\Pi} \psi\right]$$
(3.3)

Aqui, $\mathbb{R}e$ denota a parte real de um número complexo, e cada termo das equações TDGL (3.1), (3.2) e (3.3) são especificadas como segue:

- $\Pi = \left(-i\hbar \nabla \frac{e^*}{c}\mathbf{A}\right)$: derivada covariante ;
- *D*: coeficiente de difusão ;
- σ : condutividade elétrica ;
- φ : potencial escalar ;
- ψ : parâmetro de ordem ;
- A: potencial vetor, onde $\mathbf{h} = \mathbf{\nabla} \times \mathbf{A}$;
- h: campo magnético local ;
- $e^* = 2e$, sendo e a carga do elétron ;
- $m^* = 2m$, sendo m a massa do elétron ;
- (α, β) : constantes fenomenológicas ;

$$\alpha = \alpha(T) = \begin{cases} \alpha_0 \left(\frac{T}{T_c} - 1\right) & T < T_c ;\\ 0 & T > T_c , \end{cases}$$
(3.4)

onde T_c é a temperatura crítica; $\alpha_0 > 0$; $\beta > 0$ e não possuem dependência com a temperatura. Na ausência de campo magnético aplicado e de corrente de transporte aplicada, podemos escrever:

$$\alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi = 0 , \qquad (3.5)$$

cujas soluções são dadas por $\psi=0$ e $|\psi|^2=-\frac{\alpha}{\beta}.$

Considerando a solução não trivial, vemos que α necessariamente deve ser uma constante negativa para que $|\psi|^2$ seja positivo. Dessa forma, podemos caracterizar o estado de Meissner por $|\psi|^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}$.

3.2.2 Unidades Adimensionais

Computacionalmente é mais conveniente trabalhar com as equações TDGL em unidades reduzidas de tal modo a diminuir o número de constantes no novo sistema de unidades. As seguintes regras de escala serão utilizadas:

$$\begin{split} \psi &= \psi_0 \tilde{\psi} ;\\ T &= T_c \tilde{T} ;\\ \mathbf{\nabla} &= \frac{1}{\xi_0} \tilde{\mathbf{\nabla}} ;\\ \mathbf{A} &= H_{c2} \xi \tilde{\mathbf{A}} ;\\ \varphi &= \frac{H_{c2} D}{c} \tilde{\varphi} ;\\ t &= \frac{\xi^2}{D} \tilde{t} ;\\ \mathbf{h} &= H_{c2} \tilde{\mathbf{h}} , \end{split}$$
(3.6)

onde $\psi_0^2 = \frac{|\alpha|}{\beta}$ é o parâmetro de ordem no estado de Meissner, $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m*|\alpha|}$ e $H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2}$ é o campo crítico superior (o valor de campo magnético necessário para destruir a rede de vórtices de Abrikosov), e $\Phi_0 = \frac{hc}{2e}$ é o fluxo quântico.

Para a primeira equação TDGL (3.1) multiplicamos ambos os lados por ψ_0 . Considerando cada termo separadamente, algumas manipulações algébricas nos conduzem aos seguintes resultados:

• Termo do Condensado

$$-\psi_0(\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2) = \psi_0^2 |\alpha|\tilde{\psi}(1 - |\tilde{\psi}|^2) ; \qquad (3.7)$$

• Campo Crítico

$$\frac{e^*\xi}{\hbar c} = \frac{1}{H_{c2}\xi} ; \qquad (3.8)$$

• Termo de Energia Cinética

$$\frac{\psi_0}{2m^*} \left(-i\hbar \boldsymbol{\nabla} - \frac{e^*}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = \psi_0^2 |\alpha| \left(-i\tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \tilde{\mathbf{A}} \right)^2 \tilde{\psi} ; \qquad (3.9)$$

• Derivada Temporal

$$\psi_0 \frac{\hbar^2}{2m^* D} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_0^2 |\alpha| \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} ; \qquad (3.10)$$

• Potencial

$$\psi_0 \frac{\hbar^2}{2m^* D} \left(i \frac{e^*}{\hbar} \varphi \right) = \psi_0^2 |\alpha| i \tilde{\varphi} \tilde{\phi} .$$
(3.11)

Através dessas considerações e abandonando os til's, podemos reescrever (3.1) da seguinte maneira:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right)\psi = -\Pi^2\psi + \psi\left(1 - |\psi|^2\right) , \qquad (3.12)$$

onde a derivada covariante agora é dada por $\Pi = (-i \nabla - A)$.

O comprimento de penetração de London é definido como:

$$\lambda^2 = \frac{m^* c^2}{4\pi (e^*)^2 \psi_0^2} \,. \tag{3.13}$$

Definindo a seguinte constante*:

$$\beta = \frac{4\pi\sigma D\kappa^2}{c^2} \,. \tag{3.14}$$

onde $\kappa = \frac{\lambda}{\xi}$ é o parâmetro de Ginzburg-Landau.

Usando as definições (3.13) e (3.14), a segunda equação TDGL (3.2) e a densidade de corrente (3.3) podem ser reescritas em unidades reduzidas por meio dos seguintes resultados:

• Termo do Campo

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{h} = \frac{H_{c2}\xi}{\lambda^2} \kappa^2 \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times \tilde{\mathbf{h}} ; \qquad (3.15)$$

^{*}Não confundir esta constante β com aquela que aparece na equação TDGL original (3.1).

• Termo da corrente

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{s} = \frac{H_{c2}\xi}{\lambda^{2}} \mathbb{R}e\left[(\bar{\tilde{\psi}} - i\tilde{\boldsymbol{\nabla}} - \tilde{\mathbf{A}})\tilde{\psi} \right] \\
= \frac{H_{c2}\xi}{\lambda^{2}} \tilde{\mathbf{J}}_{s};$$
(3.16)

• Termo do Potencial

$$\frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{H_{c2}\xi}{\lambda^2}\beta\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\varphi}; \qquad (3.17)$$

• Termo do Potencial Vetor

$$\frac{4\pi}{c}\sigma\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \frac{H_{c2}\xi}{\lambda^2}\beta\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\tilde{t}} .$$
(3.18)

Assim as equações (3.2) e (3.3) podem ser reescritas abandonando os til's como se segue:

$$\beta \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \varphi \right) = \mathbf{J}_s - \kappa^2 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{h} ; \qquad (3.19)$$

$$\mathbf{J}_s = \mathbb{R}e\left[\bar{\psi}(-i\boldsymbol{\nabla} - \mathbf{A})\psi\right] . \tag{3.20}$$

3.2.3 Campos Auxiliares

Nesse ponto do trabalho é conveniente introduzirmos o vetor campo auxiliar $U = (\mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y)^{\dagger}$ para resolvermos as equações (3.12) e (3.20) numericamente. Temos que:

$$\mathcal{U}_x(x,y,t) = \exp\left(-i\int_{x_0}^x A_x(x',y,t)dx'\right);$$
(3.21)

$$\mathcal{U}_y(x,y,t) = \exp\left(-i\int_{y_0}^y A_y(x,y',t)dy'\right);$$
(3.22)

onde escolhemos (x_0, y_0) como um ponto de referência arbitrário. As equações TDGL escritas em termos destes campos tornam-se invariantes de calibre mediante as transformações $\psi = \psi' e^{i\chi}$, $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$. Daí a importância de usarmos os campos auxiliares.

[†]Por conveniência, os campos auxiliares e todas as demais variáveis neste Capítulo serão descritas em termos de (x, y, t). A extensão para o caso tridimensional pode ser feita sem maiores dificuldades.

Considerando a propriedade de que os campos auxiliares são funções uni-modulares, ou seja, $U\overline{U} = 1$, (onde \overline{U} é o seu complexo conjugado) e, com a seguinte identidade:

$$\frac{\partial \mathcal{U}_x}{\partial x} = -iA_x \mathcal{U}_x , \qquad (3.23)$$

podemos mostrar que:

$$-i\bar{\mathcal{U}}_x \frac{\partial(\mathcal{U}_x f)}{\partial x} = \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x\right)f , \qquad (3.24)$$

onde a identidade (3.24) é válida para qualquer função complexa f. A partir destas considerações, podemos escrever (3.12) como:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\varphi\right)\psi = \bar{\mathcal{U}}_x \frac{\partial^2(\mathcal{U}_x\psi)}{\partial x^2} + \bar{\mathcal{U}}_y \frac{\partial^2(\mathcal{U}_y\psi)}{\partial y^2} + \psi(1 - |\psi|^2) .$$
(3.25)

Também podemos expressar as componentes da densidade de corrente (3.20) em termos dos campos auxiliares. Para isso usamos a identidade (3.24), de onde obtemos que:

$$J_{sx} = \mathbb{R}e\left[\bar{\psi}\left(-i\bar{\mathcal{U}}_x\frac{\partial(\mathcal{U}_x\psi)}{\partial x}\right)\right] , \qquad (3.26)$$

que também pode ser escrita como:

$$J_{sx} = \mathbb{I}m\left[\bar{\mathcal{U}}_x \bar{\psi} \frac{\partial(\mathcal{U}_x \psi)}{\partial x}\right] .$$
(3.27)

De maneira análoga, encontramos:

$$J_{sy} = \mathbb{I}m\left[\bar{\mathcal{U}}_y \bar{\psi} \frac{\partial(\mathcal{U}_y \psi)}{\partial y}\right] .$$
(3.28)

Iremos considerar geometrias retangulares conforme ilustrado na Figura 3.1. Também assumiremos que não há corrente de transporte aplicada, apenas campo aplicado. Portanto, usaremos o calibre de Coulomb $\varphi = 0$.

Resumidamente, temos o seguinte problema a ser resolvido:

1. Primeira equação TDGL em unidades reduzidas e com o calibre de Coulomb:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \bar{\mathcal{U}}_x \frac{\partial^2 (\mathcal{U}_x \psi)}{\partial x^2} + \bar{\mathcal{U}}_y \frac{\partial^2 (\mathcal{U}_y \psi)}{\partial y^2} + \psi (1 - |\psi|^2) , \qquad (3.29)$$



Figura 3.1: Supercondutor de geometria retangular imerso em um campo magnético externo aplicado H.(Fonte: próprio autor).

2. Segunda equação TDGL em unidades reduzidas e com o calibre de Coulomb:

$$\beta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s - \kappa^2 \mathbf{\nabla} \times \mathbf{h} ; \qquad (3.30)$$

- 3. As condições de contorno para ψ na Figura 3.1:
 - (a) $\frac{\partial(\mathcal{U}_x\psi)}{\partial x} = 0$, para os lados leste e oeste do retângulo,
 - (b) $\frac{\partial(\mathcal{U}_y\psi)}{\partial y} = 0$, para os lados norte e sul do retângulo.
- 4. As condições de contorno para h na Figura 3.1:
 - (a) $h_z = H$, aplicado nos lados do retângulo.

As condições de contorno garantem que a componente perpendicular da densidade de corrente é nula em todos os lados do retângulo.

3.2.4 Discretização das Equações TDGL

Uma das formas de resolver as equações TDGL é representá-las como um problema discreto que se aproxime da solução exata analítica, já que elas, em geral, não podem ser resolvidas analiticamente. Nesse contexto, discretizaremos as equações de Ginzburg-Landau através de um método bem conhecido chamado de método das diferenças finitas. Retomamos a Figura 3.1 e substituímos as variáveis (x, y) por suas discretas equivalentes (x_i, y_j) . Considerando os lados (a, b) do retângulo, dividimos estes em intervalos de tamanhos $(\Delta x, \Delta y)$, respectivamente. Definimos N_x e N_y como o número de células unitárias da malha nas direções de x e y, respectivamente, onde $N_x = a/\Delta x$ e $N_y = b/\Delta y$. Os pontos de vértice da malha de discretização serão dados por $x_i = (i-1)\Delta x$ e $y_i = (i-1)\Delta y$, para todo { $i = 1, ..., N_x+1, j = 1, ..., N_y+1$ } (lembrando que o método pode também ser empregado para outras geometrias [22]). Uma ilustração da malha pode ser visualizada na Figura 3.2.

O domínio supercondutor Ω_{SC} na Figura 3.2 é limitado pelas linhas tracejadas $\partial \Omega_{SC}$. Podemos escrever então:

$$\Omega_{SC} = \left\{ \mathbf{r} = (x, y) : x_1 + \frac{\Delta x}{2} < x < x_{N_x} + \frac{\Delta x}{2}, y_1 + \frac{\Delta y}{2} < y < y_{N_y} + \frac{\Delta y}{2} \right\}.$$
 (3.31)

Os pontos que estão fora da linha tracejada serão considerados pontos falsos. Antes de começarmos a discretização é interessante definirmos as chamadas *variáveis de ligação* para garantirmos que não ocorra perda da condição de simetria relacionada à invariância de calibre, e obtermos resultados insatisfatórios (não físicos). Tomando dois pontos adjacentes da malha, (x_i, y_j) e (x_{i+1}, y_j) , e considerando o produto dos campos auxiliares \mathcal{U}_x desses pontos, podemos escrever para a direção horizontal:

$$U_{x,i,j} = \mathcal{U}_x(x_{i+1}, y_j)\mathcal{U}_x(x_i, y_j)$$

= exp(-i\Delta_x A_{x,i,j}), (3.32)

onde $A_{x,i,j} \equiv A_x \left(x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_j \right)$ e a regra do ponto médio foi utilizada para a integração. Faremos o mesmo passo acima para a direção vertical:

$$U_{y,i,j} = \mathcal{U}_y(x_i, y_{j+1})\overline{\mathcal{U}}_y(x_i, y_j)$$

= exp(-i\Delta_y A_{y,i,j}), (3.33)

onde $A_{y,i,j} \equiv A_y\left(x_i, \frac{\Delta x}{2}, y_j\right)$ e a regra do ponto médio foi utilizada para a integração.

Seguem outras definições importantes:

- 1. $\psi_{i,j}\equiv\psi(x_i,y_j)$,
- 2. $J_{sx,i,j}\equiv J_{sx}(x_i+rac{\Delta x}{2},y_j)$,
- 3. $J_{sy,i,j} \equiv J_{sy}(x_i, y_j + \frac{\Delta y}{2})$,
- 4. $h_{z,i,j} \equiv h_z(x_i + \frac{\Delta x}{2} y_j + \frac{\Delta y}{2})$.



Figura 3.2: Malha de Discretização. (Fonte: próprio autor).

Podemos escrever as variáveis de ligação da seguinte forma:

$$U_{x,i,j} = \exp(-i\phi_{x,i,j})$$
, (3.34)

$$U_{y,i,j} = \exp(-i\phi_{y,i,j})$$
, (3.35)

onde $\phi_{x,i,j} = \Delta x A_{x,i,j}$ e $\phi_{y,i,j} = \Delta y A_{y,i,j}$.

Fazendo uma síntese de todas as variáveis calculadas na malha, temos que o parâmetro de ordem é calculado nos pontos de vértice da célula unitária; o campo magnético local é calculado no centro da célula unitária e as componentes do potencial vetor e da densidade de corrente são calculadas nos pontos médios da célula unitária.

Utilizaremos algumas aproximações para as derivadas utilizando uma expansão de Taylor [23]:

$$f'(x) = \frac{f\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) - \left(x - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} , \qquad (3.36)$$

$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} , \qquad (3.37)$$

$$f'(y) = \frac{f\left(y + \frac{\Delta y}{2}\right) - \left(y - \frac{\Delta y}{2}\right)}{\Delta y}, \qquad (3.38)$$

$$f''(y) = \frac{f(y + \Delta y) - 2f(y) + f(y - \Delta y)}{\Delta y^2} .$$
(3.39)

• Primeira Equação TDGL:

A primeira equação TDGL (3.29) pode ser dividida em partes para ser discretizada:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{\bar{\mathcal{U}}_x \frac{\partial^2 (\mathcal{U}_x \psi)}{\partial x^2}}_{\partial x^2} + \underbrace{\bar{\mathcal{U}}_y \frac{\partial^2 (\mathcal{U}_y \psi)}{\partial y^2}}_{\partial y^2} + \psi (1 - |\psi|^2) ,$$

onde para o primeiro termo destacado com "chave", usamos a aproximação (3.37) e (3.32) para a variável de ligação:

$$\left. \bar{\mathcal{U}}_x \frac{\partial^2 (\mathcal{U}_x \psi)}{\partial x^2} \right|_{x_i, y_j} = \frac{U_{x, i, j} \psi_{i+1, j} - 2\psi_{i, j} + \bar{U}_{x, i-1, j} \psi_{i-1, j}}{\Delta x^2} , \qquad (3.40)$$

e para o segundo termo destacado com "chave", usamos a aproximação (3.39) e (3.33) para a variável de ligação:

$$\left. \bar{\mathcal{U}}_{y} \frac{\partial^{2} (\mathcal{U}_{y} \psi)}{\partial y^{2}} \right|_{x_{i}, y_{j}} = \frac{U_{y, i, j} \psi_{i, j+1} - 2\psi_{i, j} + \bar{U}_{y, i, j-1} \psi_{i, j-1}}{\Delta x^{2}} , \qquad (3.41)$$

A forma discreta da equação (3.29) é então:

$$\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial t} = \frac{U_{x,i,j}\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{x,i-1,j}\psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{y,i,j}\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{y,i,j-1}\psi_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \psi_{i,j}\left(1 - |\psi_{i,j}|^2\right) .$$
(3.42)

A evolução temporal do parâmetro de ordem é determinada através do método de Euler explícito. Ao integrarmos a equação (3.42), obtemos:

$$\psi(t + \Delta t) = \psi_{i,j}(t) + r_x \left[U_{x,i,j}(t)\psi_{i+1,j}(t) - 2\psi_{i,j}(t) + \bar{U}_{x,i-1,j}(t)\psi_{i-1,j}(t) \right] + r_y \left[U_{y,i,j}(t)\psi_{i,j+1}(t) - 2\psi_{i,j}(t) + \bar{U}_{y,i,j-1}(t)\psi_{i,j-1}(t) \right] + \Delta t \psi_{i,j}(t) \left(1 - |\psi_{i,j}(t)|^2 \right) , \qquad (3.43)$$

onde $r_x = \Delta t / \Delta x^2$ e $r_y = \Delta t / \Delta y^2$; para o intervalo $\{i = 2, ..., N_x : j = 2, ..., N_y\}$.

• Densidade de Corrente:

A densidade de corrente (3.27) pode ser dividida em partes para ser discretizada:

$$J_{sx} = \mathbb{I}m\left[\underbrace{\bar{\mathcal{U}}_x\bar{\psi}}_{\mathcal{A}x} \underbrace{\frac{\partial(\mathcal{U}_x\psi)}{\partial x}}_{\mathcal{A}x}\right] ,$$

onde para o primeiro termo das "chaves", aproximamos-o pelo seu valor médio entre os pontos adjacentes da malha:

$$\bar{\mathcal{U}}_x\bar{\psi}\big|_{\left(x_i+\frac{\Delta x}{2},y_j\right)} = \frac{\bar{\mathcal{U}}_x\left(x_i+\Delta x,y_j\right)\bar{\psi}(x_i+\Delta x,y_j)+\bar{\mathcal{U}}_x(x_i,y_j)\bar{\psi}(x_i,y_j)}{2} \ . \tag{3.44}$$

e para o segundo termo das "chaves", utilizamos a aproximação para a primeira derivada (3.36):

$$\frac{\partial(\mathcal{U}_x\psi)}{\partial x}\Big|_{\left(x_i+\frac{\Delta x}{2},y_j\right)} = \frac{\left[\mathcal{U}_x(x_i+\Delta x,y_j)\psi(x_i+\Delta x,y_j)-\mathcal{U}_x(x_i,y_j)\psi(x_i,y_j)\right]}{\Delta x} .$$
 (3.45)

Inserindo a identidade $U_x(x_i, y_j) \overline{U}_x(x_i, y_j) = 1$ entre os termos encontrados em (3.44) e (3.45), encontramos:

$$\left. \bar{\mathcal{U}}_{x}\bar{\psi}\frac{\partial(\mathcal{U}_{x}\psi)}{\partial x} \right|_{\left(x_{i}+\frac{\Delta x}{2},y_{j}\right)} = \frac{\left[\bar{U}_{x,i,j}\bar{\psi}_{i+1,j}+\bar{\psi}_{i,j}\right]+\left[U_{x,i,j}\psi_{i+1,j}-\psi_{i,j}\right]}{2\Delta x} \,. \tag{3.46}$$

Finalmente podemos substituir esse resultado em (3.27), onde obtemos:

$$J_{sx,i,j} = \frac{Q_{x,i,j}}{\Delta x} , \qquad (3.47)$$

onde

$$Q_{x,i,j} = \mathbb{I}m\left[\bar{\psi}_{i,j}U_{x,i,j}\psi_{i+1,j}\right] .$$
(3.48)

Seguindo os passos descritos para a densidade de corrente, podemos determinar a componente J_{sy} :

$$J_{sy,i,j} = \frac{Q_{y,i,j}}{\Delta y} , \qquad (3.49)$$

tomando

$$Q_{y,i,j} = \mathbb{I}m\left[\bar{\psi}_{i,j}U_{y,i,j}\psi_{i,j+1}\right] .$$
(3.50)

• Segunda Equação TDGL:

Para discretizar a segunda equação TDGL, recorremos à equação (3.30) e utilizamos $h = h_z k$:

$$\beta \frac{\partial A_x}{\partial t} = J_{sx} - \kappa^2 \frac{\partial h_z}{\partial y} , \qquad (3.51)$$

$$\beta \frac{\partial A_y}{\partial t} = J_{sy} - \kappa^2 \frac{\partial h_z}{\partial x} .$$
(3.52)

Usamos novamente a aproximação para a primeira derivada (3.36) e escrevemos:

$$\left. \frac{\partial h_z}{\partial y} \right|_{x_i + \frac{\Delta x}{2}, y_j} = \frac{h_{z,i,j} - h_{z,i,j-1}}{\Delta y} , \qquad (3.53)$$

$$\left. \frac{\partial h_z}{\partial x} \right|_{x_i, y_j + \frac{\Delta y}{2}} = \frac{h_{z, i, j} - h_{z, i-1, j}}{\Delta x} .$$
(3.54)

As equações (3.51) e (3.52) podem ser então aproximadas para:

$$\beta \frac{\partial A_{x,i,j}}{\partial t} = J_{sx,i,j} - \frac{\kappa^2}{\Delta y} (h_{z,i,j} - h_{z,i,j-1}) , \qquad (3.55)$$

$$\beta \frac{\partial A_{y,i,j}}{\partial t} = J_{sy,i,j} - \frac{\kappa^2}{\Delta x} (h_{z,i,j} - h_{z,i-1,j}) .$$
(3.56)

Finalmente, integramos as últimas expressões com relação a t e obtemos:

1. Para a variável $\phi_{x,i,j}$:

$$\phi_{x,i,j}(t+\Delta t) = \phi_{x,i,j}(t) + s_x Q_{x,i,j}(t) - t_{xy}[h_{z,i,j}(t) - h_{z,i,j-1}(t)] , \qquad (3.57)$$

2. Para a variável $\phi_{y,i,j}$:

$$\phi_{y,i,j}(t + \Delta t) = \phi_{y,i,j}(t) + s_y Q_{y,i,j}(t) + t_{yx}[h_{z,i,j}(t) - h_{z,i-1,j}(t)], \qquad (3.58)$$

onde para (3.57): $\{i = 1, 2, ..., N_x, j = 2, 3, ...N_y\}$, $s_x = \Delta t/\beta$, $t_{xy} = \kappa^2 \Delta t \Delta x/\beta \Delta y$ e para (3.58): $\{i = 2, 3, ..., N_x, j = 1, 2, ..., N_y\}$, $s_y = \Delta t/\beta$, $t_{yx} = \kappa^2 \Delta t \Delta y/\beta \Delta x$.

• Campo Local:

Uma vez que o sistema é invariante ao longo da direção z, é suficiente considerarmos apenas a componete $h_z = \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y$ do campo magnético local. utilizaremos a aproximação para a primeira derivada (3.36). A partir dessas considerações obtemos:

$$h_{z,i,j} = \frac{\phi_{y,i+1,j} - \phi_{y,i,j} - \phi_{x,i,j+1} + \phi_{x,i,j}}{\Delta x \Delta y} , \qquad (3.59)$$

para todo { $i = 2, 3, ..., N_x - 1, j = 2, 3, ..., N_y - 1$ }.

• Condições de Contorno:

Considerando que o campo é contínuo em toda interface $\partial \Omega_{SC}$ seguimos com:

$$h_{z,1,j} = H$$
, (3.60)

$$h_{z,N_x,j} = H aga{3.61}$$

$$h_{z,i,1} = H$$
, (3.62)

$$h_{z,i,N_y} = H$$
, (3.63)

onde $\{i = 1, 2, ..., N_x, j = 2, 3, ..., N_y - 1\}.$

A partir da definição de variáveis de ligação (3.32) e (3.33), e a aproximação para a primeira derivada (3.36) podemos escrever as condições de contorno discretizadas:

$$\psi_{1,j} = U_{x,1,j}\psi_{2,j} : para \ o \ lado \ oeste \ , \tag{3.64}$$

$$\psi_{N_{x+1},j} = \bar{U}_{x,N_x,j}\psi_{N_x,j} : para \ o \ lado \ leste \ , \tag{3.65}$$

onde o intervalo é para todo: $\{j = 2, 3, ..., N_y\}$.

$$\psi_{1,j} = U_{y,1,j}\psi_{i,2} : para \ o \ lado \ sul$$
, (3.66)

$$\psi_{i,N_{y+1}} = \bar{U}_{y,i,N_y}\psi_{i,N_y} : para \ o \ lado \ norte \ , \tag{3.67}$$

onde o intervalo é para todo: $\{i = 2, 3, ..., N_x\}$.

3.3 Determinação dos Passos de Tempo Δt

Por simplicidade consideremos a equação de Laplace:

$$\nabla^2 f = 0. \tag{3.68}$$

Usando as aproximações (3.37) e (3.39) para a segunda derivada, encontramos:

$$\frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0,$$
(3.69)

de onde obtemos que:

$$f_{i,j} = \frac{\delta^2}{4} \left(\frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right),$$
(3.70)

onde:

$$\delta^2 = \frac{2}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}}.$$
(3.71)

O método mais simples de resolver a equação (3.70) consiste em atribuir valores iniciais $f_{i,j}^{(n)}$ para $f_{i,j}$ e, então, determinamos $f_{i,j}^{(n+1)}$. Este é conhecido como método de Jacobi. Temos que:

$$f_{i,j}^{(n+1)} = \frac{\delta^2}{4} \left(\frac{f_{i+1,j}^{(n)} + f_{i-1,j}^{(n)}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1}^{(n)} + f_{i,j-1}^{(n)}}{\Delta y^2} \right).$$
(3.72)

Este procedimento é realizado repetidamente até que a sequência convirja para a solução, dentro de uma margem de erro pré-estabelecida.

Agora, considere a equação de difusão de calor:

$$u\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla^2 f. \tag{3.73}$$

Usando as aproximações (3.37) e (3.39), obtemos:

$$u\frac{\partial f_{i,j}}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{\Delta y^2},$$
(3.74)

Usando a aproximação de primeira ordem em Δt :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(t) \, dt = \Delta t g(t_n), \tag{3.75}$$

encontramos:

$$f_{i,j}^{(n+1)} = f_{i,j}^{(n)} \frac{\Delta t}{u \Delta x^2} (f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}) + \frac{\Delta t}{u \Delta y^2} (f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}),$$
(3.76)

para $f_{i,j}^{(n)} = f_{i,j}(t_n)$.

Temos (3.72) idêntica a (3.76), se e somente se:

$$1 - \frac{2\Delta t}{u} \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}\right) = 0.$$
(3.77)

De onde obtemos:

$$\Delta t = \frac{u\delta^2}{4}.\tag{3.78}$$

3.4 Outros Sistemas de Unidades

Como uma observação final, chamamos a atenção para o fato de que existem outros sistemas de unidades que podemos encontrar na literatura. Por exemplo, se usarmos $\xi(0)$ como unidade para distâncias, $H_{c2}(0)$ para campos e $(\alpha_0 / \beta)^{1/2}$ para o parâmetro de ordem, todos os

termos nas equações (3.12), (3.19) e, (3.20) permanecem inalterados, exceto o termo de energia condensada que se tornaria $\psi(1 - \tau - |\psi|^2)$, onde $\tau = T/T_c$. O sistema de unidades usado nas Seções anteriores é apropriado para os casos em que a temperatura está fixa. No entanto, se desejarmos estudar os efeitos da temperatura nas propriedades eletrônicas e estruturais da rede de vórtices, é necessário deixar *T* explícita nas equações TDGL.

3.5 Dependência das Constantes Fenomenológicas com a Temperatura

De acordo com Tinkham [12, 24], a fim de cumprir o requisito de que o campo crítico termodinâmico tenha a seguinte dependência empírica com a temperatura $H_c(T) = H_c(0)(1 - \tau^2)$, e $\lambda(T) = \lambda(0)/\sqrt{1 - \tau^4}$, é necessário que as constantes fenomenológicas sejam dadas por:

$$\alpha(T) = -\alpha_0 \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \tag{3.79}$$

$$\beta(T) = \frac{\beta_0}{(1+\tau^2)^2}.$$
(3.80)

para $\tau \equiv T/T_c$, a temperatura T em unidades da temperatura crítica T_c .

Note que quando $\tau \approx 1$ (T próximo de T_c), $\alpha(T) = \alpha_0(1-\tau)(1+\tau)/(1+\tau^2) \approx \alpha_0(1-\tau)$ e $\beta(T) \approx \beta_0/4 = \text{constante.}$ Assim, próximo à temperatura crítica, obtemos o resultado (3.4).

Escrevendo $\psi = \psi_0 \tilde{\psi}$, onde $\psi_0 = (\alpha_0 / \beta_0)^{1/2}$, uma álgebra simples nos leva ao seguinte resultado:

$$-\psi_0(\alpha\psi + \beta\psi|\psi|^2) = \psi_0^2\alpha_0 \frac{1}{(1+\tau^2)^2}\tilde{\psi}(1-\tau^4 - |\tilde{\psi}|^2).$$
(3.81)

Os demais termos das equações (3.12), (3.19) e, (3.20) permanecem inalterados. Este será o modelo que usaremos para o estudo de filmes supercondutores do tipo-I no Capítulo 4.

3.6 Resumo

Considerando que conhecemos as quantidades de todos os pontos em um instante de tempo t, podemos então determinar para um novo instante de tempo $t + \Delta t$ todas as quantidades subsequentes. Se sabemos das equações (3.43), (3.57) e (3.58), os valores de { $\psi_{i,j}, \phi_{x,i,j}, \phi_{y,i,j}, h_{z,i,j}$ }, podemos calcular essas quantidades nos pontos interiores da malha e aplicamos

posteriormente as condições de contorno, de tal forma que, antes de irmos para o próximo passo de tempo atualizamos todas as quantidades relevantes para o cálculo em um tempo posterior. Tendo as quantidades novamente calculadas para o novo nível de tempo, fazemos o mesmo para os próximos níveis até atingirmos o estado estacionário do cálculo.

Um detalhe importante do método é que ele não converge para qualquer passo de tempo Δt e precisamos aplicar o critério de convergência usando a seguinte regra:

$$\Delta t \leqslant \min\left\{\frac{\delta^2}{4}, \frac{\delta^2 \beta}{4\kappa^2}\right\} , \qquad (3.82)$$

$$\delta^2 = \frac{2}{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \,. \tag{3.83}$$

Os pontos de todas as variáveis discretas calculadas na malha podem ser visualizados na Figura 3.2.

No próximo capítulo, apresentaremos os resultados obtidos através deste método descrito de solução numérica das equações TDGL, para o estudo do limiar entre os regimes do tipo I e tipo II de supercondutores do primeiro grupo.

CAPÍTULO 4

LIMIAR ENTRE OS REGIMES DO TIPO I E TIPO II DE SUPERCONDUTORES DO PRIMEIRO GRUPO

4.1 Introdução

Propriedades magnéticas distintas para supercondutores dos tipos I e II com volume considerável estão diretamente relacionadas com o sinal da densidade de energia superficial, o qual é positivo para supercondutores do tipo I e negativo para supercondutores do tipo II. A transição entre esses dois tipos é dado pelo parâmetro de Ginzburg-Landau κ , sendo do tipo II quando $\kappa > 1/\sqrt{2}$ e do tipo I quando $\kappa < 1/\sqrt{2}$ [6]. Para o primeiro caso, a penetração de vórtices é energeticamente favorável, enquanto que no caso II a penetração de um fluxóide magnético leva o supercondutor para o estado normal.

Tinkham [25] mostrou pela primeira vez usando um argumento baseado na quantização de fluxo, que supercondutores de filmes finos, mesmo os do tipo I $\kappa < 1/\sqrt{2}$, poderiam se comportar como tipo II se o filme fosse suficientemente fino, possuindo uma transição de fase de segunda ordem para o estado normal.

Foi mostrado por Pearl [26], diferentemente de supercondutores de volume interno, que vórtices em supercondutores do tipo I de filmes muitos finos possuem uma repulsão de longo alcance, possibilitando a formação de uma rede de vórtices. Em uma análise similar ao trabalho de Abrikosov [6], Maki [27] provou matematicamente a hipótese de Tinkham de que a estrutura do fluxóide é de fato uma solução das equações de Ginzburg-Landau para um

filme fino de um supercondutor do primeiro grupo, desde que este filme seja mais fino que uma espessura crítica da qual ele é derivado.

Trabalhos posteriores de Lasher [28] e de Callaway [29] estenderam a análise feita por Maki, considerando outros tipos de estruturas de vórtices, como a possibilidade de formação de vórtices gigantes. Lasher demonstrou que embora filmes muito finos exibam estrutura triangular, filmes de espessura intermediária possuem uma estrutura mais complexa que permite diferentes padrões, incluindo vórtices com mais de um fluxo quântico. Ele previu a existência de duas espessuras críticas, uma correspondente a uma rede de fase triangular e uma segunda mais espessa delimitando os estados misto e intermediário do filme.

Vários trabalhos numéricos foram feitos sobre essas configurações de vórtices gigantes em filmes finos supercondutores. Por exemplo, Schweigert *et al.* [30] estudou diagramas de fase de vórtices em discos finos de vários raios e espessuras, encontrando a transição entre configurações de multi-vórtices e vórtices gigantes. De maneira similar, Shi *et al.* [31] encontrou a mesma transição estudando anéis mesoscópicos de raios variáveis. Berdiyorov *et al.* [32] analisou estruturas de vórtices em filmes finos com um conjunto de *"antidot"*. Pela variação efetiva do parâmetro de Ginzburg-Landau e a periodicidade da rede de *"antidot"*, eles forneceram um diagrama de fase estruturado para esse sistema. Palonen *et al.* [33] realizou simulações para baixos κ de supercondutores do tipo I, encontrando que aquelas configurações de vórtices gigantes são estáveis em filmes de espessura intermediária, mas para filmes suficientemente finos, apenas estados de vórtice único são estáveis. Eles também especulam que a formação de vórtices gigantes é possível devido a uma faixa de atração curta e uma repulsão de longo alcance entre eles. Córdob*a et al.* [34] analisou a estabilidade dos vórtices gigantes variando a temperatura e a espessura do filme, constatando que a formação destas amostras são penalizadas pelo aumento de temperatura.

Dantas *et al.*, [35] usando um conjunto restrito de equações de Ginzburg-Landau calculou um potencial de interação vórtice-vórtice para uma série de filmes finos de diferentes espessuras e valores de κ . Eles encontraram que a interação vórtice-vórtice é não monotônica, ou seja, seu comportamento depende da espessura do filme e do κ . Eles construíram então um diagrama de fase delimitando as regiões onde o filme mostrava uma única rede de fluxóide, configuração de vórtice gigante e comportamento do tipo I. Com este diagrama de fase eles foram capazes de encontrar um valor de κ crítico que possibilita a formação de uma rede de vórtices em filmes. O valor que eles encontraram é diferente do $\kappa_{ef} = 2\kappa^2/d$, (sendo κ_{ef} o kappa efetivo), geralmente assumido para filmes finos.

Neste trabalho, resolvendo numericamente as equações de Ginzburg-Landau 3D, foi estudada a dependência da temperatura na faixa da fronteira entre o regime do tipo I e do tipo II para filmes finos de supercondutores mesoscópicos. Para isto, amostras mesoscópicas do tipo I foram simuladas, e foi obtida uma expressão que relaciona o parâmetro de Ginzburg-Landau do material e sua espessura crítica, acima da qual a nucleação de vórtices se torna possível, para diferentes temperaturas. Foi então estudado como as dimensões desse filme (que são perpendiculares ao campo aplicado) influenciam as expressões para espessuras críticas encontradas anteriormente.

Foi analisado também, as estruturas do padrão de vórtice e sua evolução respectiva dentro de dois regimes diferentes, o procedimento a *zero field cooled* (ZFC) e aquele sobre *field cooled* (FC). Antes de prosseguirmos, como uma introdução final a este capítulo foi utilizada a seguinte terminologia. Por *regime do tipo I*, queremos dizer um supercondutor em um estado livre de vórtice para todos os valores de campo magnético aplicado, até que a supercondutor tividade seja destruída. Por outro lado, denominamos *regime do tipo II* um supercondutor que nucleia um ou mais vórtices antes da destruição da supercondutividade, mesmo que a interação vórtice-vórtice não seja monotonicamente repulsiva.

4.2 Formalismo Teórico

O sistema que foi estudado constituía-se de um filme supercondutor mesoscópico de dimensões (l_x, l_y, l_z) dentro de uma caixa maior de tamanho (L_x, L_y, L_z) . Este material estava imerso em um campo magnético H aplicado uniformemente que apontava na direção do eixo *z*. A geometria do sistema é ilustrada na Figura 4.1. Foi considerado um domínio Ω de dimensões suficientemente grandes, de maneira que o campo magnético local igualasse ao campo externo aplicado H sobre a interface $\partial \Omega$.

O ponto de partida foram as equações de Ginzburg-Landau 3D dependentes do tempo (TDGL) que descrevem o estado supercondutor. Elas foram adaptadas para supercondutores



Figura 4.1: Visão esquemática do sistema estudado.

do tipo I [24] da seguinte forma,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -(-i\boldsymbol{\nabla} - \mathbf{A})^2 \psi + \frac{1}{(1+\tau^2)^2} \psi (1-\tau^4 - |\psi|^2) , \text{ em } \Omega_{sc}, \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \begin{cases} \mathbf{J}_s - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} , & \text{em } \Omega_{sc}, \\ -\kappa^2 \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} , & \text{em } \Omega \setminus \Omega_{sc}, \end{cases}$$
(4.2)

onde $\mathbf{J}_s = \operatorname{Re} \left[\overline{\psi}(-i\boldsymbol{\nabla} - \mathbf{A})\psi \right]$ é a densidade de corrente supercondutora. Aqui, o parâmetro de ordem está em unidades de $\psi_{\infty}(0) = \sqrt{-\alpha(0)/\beta(0)}$ (parâmetro de ordem no estado de Meissner), onde $\alpha(\tau)$ e $\beta(\tau)$ são duas constantes fenomenológicas; $\tau \equiv T/T_c$ é a temperatura T em unidades da temperatura crítica T_c ; comprimentos em unidades do comprimento de coerência $\xi(0)$; o tempo está em unidades do tempo característico de Ginzburg-Landau $t_0 = \pi\hbar/8K_BT_c$; o vetor potencial \mathbf{A} em unidades de $\xi(0)H_{c2}(0)$, onde $H_{c2}(\tau)$ é o campo crítico superior do *bulk*. Para ajustar a constante fenomenológica para o campo crítico termodinâmico dos supercondutores do tipo I, $H_c(\tau) = H_c(0)(1 - \tau^2)$, o parâmetro de Ginzburg-Landau se torna dependente da temperatura; temos $\kappa(\tau) = \xi(\tau)/\lambda(\tau) = \kappa(0)/(1 + \tau^2)$, onde $\lambda(\tau) = \lambda(0)/\sqrt{1 - \tau^4}$ e $\xi(\tau) = \xi(0)\sqrt{(1 + \tau^2)/(1 - \tau^2)}$. As equações TDGL são usadas apenas como um método de relaxamento para alcançar o estado estacionário. Elas foram resolvidas numericamente utilizando o método das variáveis de ligação em uma malha com não menos do que cinco pontos por $\lambda(\tau)$ e dez pontos por $\xi(\tau)$ (veja, por exemplo, Referências. [21] e [36]).

4.3 Parâmetros Críticos

Estudamos filmes finos de supercondutores mesoscópicos com uma secção transversal com dimensões $12\xi(0) \times 12\xi(0)$ e espessura variável. Nas simulações numéricas, foi utilizada uma caixa suficientemente grande de dimensões, $19\xi(0) \times 19\xi(0) \times 11\xi(0)$, para garantirmos que o campo aplicado fosse constante nas faces da caixa e que existissem os efeitos de desmagnetização na borda do supercondutor. Em todos os casos estudados, a amostra supercondutora foi inicialmente definida no estado de Meissner, e o campo magnético aplicado aumentado adiabaticamente em passos de $\Delta H = 10^{-3}H_{c2}(0)$ até a destruição completa do estado supercondutor (*zero field cooled*, ZFC). Para cada valor de espessura do filme l_z , foi variado o parâmetro de Ginzburg-Landau $\kappa(0)$ até ser obtido o limiar entre os comportamentos de tipo I e II para esse valor específico de $d \equiv l_z/\xi(0)$.



Figura 4.2: Pontos numéricos obtidos e curvas ajustadas para o valor de κ crítico considerando três valores de temperaturas diferentes para um supercondutor com secção transversal $12\xi(0) \times 12\xi(0)$. Também incluímos a curva κ_c obtida da expressão do parâmetro de Ginzburg-Landa efetivo de filmes finos para o caso $\tau = 0$.

Na Figura 4.2 são mostradas as expressões para o valor de $\kappa(0)$ crítico, acima do qual, vórtices são vistos pela primeira vez para três temperaturas distintas $\tau = 0.00$, $\tau = 0.75$ e $\tau = 0.85$. Abaixo desta curva, o supercondutor é tipo I e acima desta ele se torna do tipo II. Feito os ajustes nessas curvas com uma função genérica $\kappa_c = Ad^{\delta}$, foram encontrados valores dos parâmetros críticos A e δ . O respectivo formato de cada curva é dado então por (a) $\kappa_c = 0.183d^{0.464}$, para $\tau = 0.00$, (b) $\kappa_c = 0.317d^{0.438}$, para $\tau = 0.75$, e (c) $\kappa_c = 0.351d^{0.416}$, para $\tau = 0.85$. Nesta mesma figura mostramos a curva $\kappa_c = 0.5946\sqrt{d}$ para $\tau = 0$, a qual



Figura 4.3: Pontos numéricos obtidos e curvas ajustadas para o valor de κ crítico para o supercondutor com duas secções transversais diferentes. A temperatura foi fixada em $T = 0.85T_c$. Os dois pontos indicados em vermelho são analisados no texto.

pode ser obtida a partir da expressão do parâmetro de Ginzburg-Landau de filmes finos $\kappa_{ef}(\tau) = 2\lambda^2(\tau)/l_z\xi(\tau)$, tomando $\kappa_{ef}(0) = 1/\sqrt{2}$. Como podemos observar, a curva crítica que delimita os regimes tipo I e tipo II é superestimada.

Em oposição aos estudos anteriores sobre esses parâmetros críticos, a temperatura foi deixada totalmente explícita nas equações de Ginzburg-Landau, especificamente para o material do tipo I. A partir destes ajustes, foi determinado então o efeito da temperatura no limiar entre os regimes do tipo I e do tipo II.

Como foi visto na Figura 4.2, para um determinado valor de espessura *d*, o valor do κ crítico aumenta com a temperatura. Isso pode ser explicado pelo fato de que a transição do comportamento de tipo I para o estado misto acontece em uma fase *intertype*, [34, 37, 38], a qual, diferentemente dos tipos I e II convencionais, tem uma interação vórtice-vórtice não monotônica. Essa transição entre o tipo I e a supercondutividade *intertype* acontece para valores maiores de $\kappa(0)$ conforme a temperatura se aproxima de T_{cr} [37] o que explica a nossa dependência de κ_c com a temperatura. Para investigar a influência das dimensões do supercondutor nos valores críticos, o mesmo procedimento foi realizado para uma amostra de secção transversal com dimensões de $20\xi(0) \times 20\xi(0)$ para diversas espessuras. A temperatura foi definida igual a $0.85T_c$. A curva resultante apresentada na Figura 4.3 foi construída da mesma forma que as anteriores, e foi modelada para ser $\kappa_c = 0.321d^{0.487}$. Como mostrado na Figura 4.3, o κ_c crítico para o supercondutor de dimensões $20\xi(0) \times 20\xi(0)$



Figura 4.4: (a) Curva de Magnetização para uma amostra com dimensões $l_x = l_y = 12\xi(0)$ (azul) e $l_x = l_y = 20\xi(0)$ (vermelho). Os pontos vermelhos indicam os valores do campo magnético aplicado para o qual ambas amostras apresentam igual magnetização. (b) A intensidade das correntes na borda do supercondutor para uma amostra de dimensões $l_x = l_y = 12\xi(0)$ (azul) e $l_x = l_y = 20\xi(0)$ (vermelho).

respectiva curva para o supercondutor de tamanho $12\xi(0) \times 12\xi(0)$. Esse comportamento pode ser explicado com base em um efeito concorrente entre as interações vórtice-vórtice e a repulsão do vórtice com a borda da amostra, diretamente dirigido para o centro do supercondutor. O argumento é o seguinte, para um valor fixo de $\kappa(0)$ o sistema maior apresenta uma espessura crítica maior que o sistema menor. Nestes casos, a interação vórtice-vórtice, embora já possa ser repulsiva, não consegue superar a exclusão do vórtice da barreira, o que faz que um grande número de fluxóides nucleiem em conjunto no centro, um tipo clássico de comportamento do tipo I [28].

Quando a espessura da amostra for inferior a d_c , a repulsão vórtice-vórtice devido ao campo magnético disperso é capaz de suprimir a expulsão da borda, nucleando um pequeno número de fluxóides, um comportamento do tipo II. Se agora fizermos a mesma análise para uma amostra menor, nós vemos que, dada a maior proximidade, os vórtices sentem uma repulsão maior da borda, sendo necessário uma espessura menor do que o caso anterior para a repulsão vórtice-vórtice superar o efeito de borda. Para corroborar com esta análise, foi estudada a distribuição de correntes para ambos os valores da dimensão da amostra para um $\kappa(0)$ fixo e dois valores de espessura, como mostrado nos pontos vermelhos na Figura 4.3. A fim de comparar as duas amostras em pé de igualdade, foi analisada a sua distribuição de corrente para valores de campo magnético aplicado, como mostrado nos pontos vermelhos na Figura 4.4, painel (a), para o qual o fluxo penetrado é o mesmo para ambas as amostras. No painel (b) está mostrada a intensidade da corrente na borda do supercondutor em ambas dimensões da amostra, com $\kappa(0) = 0.32$ e d = 0.9, de tal forma que a amostra menor apresenta um comportamento de tipo I, enquanto que a amostra maior, um comportamento de tipo II. Como podemos ver na figura, as correntes são mais fortes para a amostra menor, dando embasamento à nossa análise anterior. Embora isto não afirme que a curva de $\kappa_c(d)$ será monotonicamente mais baixa para dimensões maiores, em alguns pontos, a curva pode subir, aproximando-se das previsões analíticas para filmes finos infinitos. [27, 28]

4.4 Configuração de Vórtices

Foram encontradas as configurações de vórtice para ambos os procedimentos ZFC e FC. No que se segue, serão apresentados os resultados para ambos. Para isso, a temperatura foi



Figura 4.5: Magnitude do parâmetro de ordem para quatro valores diferentes de campo magnético aplicado para o caso de um filme fino supercondutor de dimensões $12\xi(0) \times 12\xi(0) \times 0.5\xi(0)$, $\kappa(0) = 0.40$ e $T = 0.85T_c$.

fixada e duas dimensões diferentes para o filme foram consideradas.

4.4.1 Zero Field Cooled

Para o caso de $\kappa(0) = 0.40$ e para diferentes valores de espessura do filme, seguimos a evolução das configurações de vórtice conforme o campo magnético aplicado era aumentado de H = 0 no estado de Meissner até o estado normal (ZFC). Para um sistema de dimensões $12\xi(0) \times 12\xi(0) \times 0.4\xi(0)$ e $\tau = 0.85$, um único vórtice nucleava e alcançava o equilíbrio no centro da amostra (ver painel (a) da Figura 4.5 para a magnitude de ψ). Quando o segundo vórtice entrava no supercondutor, ele colapsava com o que já estava lá formando um vórtice gigante de vorticidade L = 2, ainda no centro da amostra (painel (b)). O mesmo processo acontecia novamente quando o terceiro vórtice nucleava, formando um vórtice gigante existente era desfeito, dando lugar a uma configuração com quatro vórtices simples, posicionados nos vértices de um quadrado ao redor do centro da amostra (painel (d)). À medida que o campo magnético se tornava maior, a supercondutividade era completamente destruída e o campo magnético se tornava uniforme por todo o espaço.

Para valores maiores de espessura d, o sistema deixava o estado de Meissner diretamente


Figura 4.6: Gráfico de contorno na direção da componente *z* do campo magnético local, para quatro valores do campo magnético externo aplicado para o sistema descrito na figura 4.5.

para um estado de vórtice gigante com uma vorticidade tripla, e posteriormente evoluía da mesma maneira como descrito acima. Foi feito também da mesma forma para outros valores de $\kappa(0)$, sendo obtidas configurações similares. Todas elas tinham uma característica em comum, nomeadamente, a vorticidade máxima do estado de vórtice gigante era L = 3. Além disso, a primeira configuraçõo logo após o estado de Meissner consistia em um único vórtice ou em um vórtice gigante.

Os perfis do campo magnético local correspondentes a Figura 4.5 estão presentes na Figura 4.6. Essa figura mostra os gráficos de contorno de h_z no plano xy. Esses resultados exibem um novo cenário em relação ao estado de vórtice gigante em filmes supercondutores do tipo I. É bem sabido que no centro de um vórtice o campo tem um máximo local, mesmo para um vórtice gigante (ver, por exemplo, Referência. [39]). Como pode ser visto no painel (a), o campo de um único vórtice segue essa propriedade geral. No entanto, para o estado de vórtice gigante L = 2 (painel(b)), h_z tem um mínimo local no centro. O fluxo é espalhado



Figura 4.7: Logaritmo natural da magnitude do parâmetro de ordem para quatro valores diferentes do campo magnético aplicado para o caso de um filme fino supercondutor de dimensões $20\xi(0) \times 20\xi(0) \times 0.7\xi(0)$, $\kappa(0) = 0.32$ e $T = 0.85T_c$. (a)L = 12 vórtices simples; (b)L = 10 (oito vórtices simples e um vórtice gigante); (c)L = 8 vórtices simples; (d) L = 6 (quatro vórtices simples e um vórtice gigante); (e) L = 4 vórtices simples; (f) L = 2 (um vórtice gigante)

ao redor do núcleo vórtice gigante em forma de anel. Isto é ainda mais evidente para o vórtice gigante em L = 3 (painel (c)). Para o estado de vórtice simples em L = 4 (painel (d)) a distribuição do campo magnético mostra um padrão comum, exibindo quatro máximos locais.

Conforme *H* aumenta, o campo torna-se uniforme por todo o espaço.

Para espessuras maiores até $d_c \sim 1.4$ foi encontrado somente o estado L = 4 de vórtices individuais similares para o painel (d) da Figura 4.6. Acima deste valor de d, o sistema vai para o regime do tipo I (ver Figura 4.2). Estudando a dependência do campo de penetração H_p com a temperatura, foi encontrado de acordo com os resultados experimentais [40], que o campo no qual um vórtice é nucleado pela primeira vez aumenta com a diminuição da temperatura.

4.4.2 Field Cooled

Foi investigado também o estado de vórtice para filmes de dimensões maiores. Além disso, as configurações de vórtices para ambos procedimentos, ZFC e FC. Foi aprendido com este estudo que a abordagem de FC produz muito mais configurações do que a abordagem de ZFC. Sistemas que exibem o comportamento do tipo I no método ZFC apresentam formação de vórtices para espessuras ainda menores que na abordagem FC, ou seja, quando partimos do estado normal e diminuímos o campo até chegarmos no estado de Meissner. No que segue, está mostrado somente estados produzidos pela abordagem FC. Na Figura 4.7 foi mostrado quatro estados para um filme de dimensões $20\xi(0) \times 20\xi(0) \times 0.7\xi(0)$ e temperatura $\tau = 0.85$. Para grandes valores de campo, a vorticidade é grande. Assim, é necessário tomar a magnitude de ψ na escala logarítmica para visualizar seus núcleos. Como foi visto, a vorticidade diminui com o decréscimo do campo aplicado e a configuração de vórtice apresenta em alguns deles vórtices gigantes (painéis (b),(d) e (f)). E notável esse comportamento, mesmo com um baixo campo magnético aplicado, quando as correntes de blindagem são pequenas os vórtices não se espalham sobre a amostra, o que sugere uma interação vórtice-vórtice não monotônica [35], isto é, com repulsão de curto alcance e atração de longo alcance. A influência de vários parâmetros torna difícil uma descrição completa das interações dos vórtices, mas os resultados indicam que nem sempre são repulsivos, como em um supercondutor convencional do tipo II.

4.5 Informações sobre as Simulações

As simulações numéricas foram realizadas em dois computadores da UNESP, campus Bauru, os quais possuem placas gráficas GPU da marca NVidia, modelo GeForce GTX 690, com dois devices cada uma. O código do programa foi escrito em linguagem de computação Fortran-90 (FORmula TRANSlation System), onde foi utilizado paralelização automática dos loops usando a biblioteca OpenAcc. Cada simulação levava um tempo típico de 24 horas. Os dados das simulações foram ilustrados graficamente por meio do software MATLAB (MATrix LABoratory). Uma outra informação importante é que, embora desejável, com os recursos computacionais que possuíamos, era inviável realizar as simulações para dimensões maiores das que rodamos. Isso se devia a dois fatores. O primeiro, porque o tempo de simulação era excessivamente custoso. O segundo, porque o tamanho das matrizes tridimensionais atingiam um tamanho tão grande, que a memória da placa não era suficiente para o armazenamento de todas as variáveis. Mesmo assim, sem os recursos computacionais que tínhamos a disposição seria inviável a realização das simulações em CPU's, mesmo nas mais recentes durante o período em que elas foram rodadas.

CAPÍTULO 5 CONCLUSÕES

Em resumo, resolvendo numericamente o problema 3D dependente do tempo nas equações de Ginzburg-Landau para o caso de filmes finos de supercondutores mesoscópicos, foi obtido uma relação entre a espessura *d* do filme e o κ_c abaixo do qual o sistema não apresenta a formação de vórtices, comportando-se como supercondutor do tipo I. Foi estudado também que o κ_c para uma dada espessura aumenta com a temperatura.

Além disso, verificou-se o efeito da dimensão da amostra na curva de κ_c , indicando que quando havia um aumento nas dimensões na direção perpendicular ao campo aplicado, a amostra ainda mantinha o comportamento mesoscópico. Essa característica leva a um decréscimo na curva analisada, o que está relacionado com a distribuição de corrente através da amostra.

Finalmente, as configurações de vórtice foram estudadas para vários parâmetros, sob dois procedimentos diferentes. No procedimento ZFC, foi acompanhado a evolução dos padrões de vórtice com o aumento do campo magnético aplicado. Já no procedimento FC foi estudado a evolução dos padrões de vórtices com a diminuição do campo magnético aplicado. Em ambos foi encontrado uma nova configuração de vórtices gigantes que apresentou um mínimo local do campo magnético no centro do vórtice.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. K. Onnes. Further experiments with liquid helium. C. On the change of electric resistance of pure metals at very low temperatures etc. IV. The resistance of pure mercury at helium temperatures. In Heike Kamerlingh Onnes, Kostas Gavroglu, and Yorgos Goudaroulis, editors, *Through Measurement to Knowledge: The Selected Papers of Heike Kamerlingh Onnes* 1853–1926, Boston Studies in the Philosophy of Science, pages 261–263. Springer Netherlands, Dordrecht, 1991.
- [2] J. File and R. G. Mills. Observation of Persistent Current in a Superconducting Solenoid. *Physical Review Letters*, 10(3):93–96, February 1963.
- [3] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer effekt bei eintritt der supraleit-fähigkeit. *Naturwissenschaften*, 21:787–788, 1933.
- [4] F. London and H. London. The electromagnetic equations of the supraconductor. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 149:71–88, 1935.
- [5] V. L. Ginzburg and L. Landau. On the theory of superconductivity. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 20:35, 1950.
- [6] A. A. Abrikosov. On the magnetic properties of superconductors of the second group. *Soviet Physics JETP*, 5(6):1174, 1957.
- [7] L. P. Gorkov. Microscopic derivation of the ginzburg-landau equations in the theory of superconductivity. *Sov. Phys. JETP*, 36:1364, 1959.

- [8] J. Bardeen, J. Cooper, and J. R. Schrieffer. Microscopic theory of superconductivity. *Physical Review*, 106:162–164, 1957.
- [9] J. G. Bednorz and K. A. Müller. Possible high tc superconductivity in the ba-la-cu-o system. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 64:189–193, 1986.
- [10] The Open University. Superconductivity. OpenLearn, 2016.
- [11] H. Rogalla and P. H. Kes. 100 Years of Superconductivity. CRC Press, 2012.
- [12] M. Tinkham. Introduction to superconductivity. McGraw Hill, New York, 1996. OCLC: 681186654.
- [13] J. B. Ketterson and S. N. Song. *Superconductivity*. Cambridge University Press, 1999.
- [14] University of Cambridge. Type I vs type II https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/ superconductivity/type.php. Acessado em: 04/12/2019.
- [15] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Quantum Mechanics*. Pergammon Press, 1974.
- [16] U. Essmann and H. Träuble. The direct observation of individual flux lines in type II superconductors. *Physics Letters*, 24A:526, 1967.
- [17] L. Y. Vinnikov, J. Karpinski, S. M. Kazakov, J. Jun, J. Anderegg, S. L. Bud'ko, and P. C. Canfield. Vortex structure in mgb2 single crystals observed by the bitter decoration technique. *Physical Review B*, 67(9):092512, 2003.
- [18] H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles-Jr., and J. V. Waszczak. Scanningtunneling-microscope observation of the abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid. *Phys. Rev. Lett.*, 62:214, 1989.
- [19] R. Zadorosny, E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho, and W. A. Ortiz. Crossover between macroscopic and mesoscopic regimes of vortex interactions in type-ii superconductors. *Phys. Rev. B*, 85:214511, Jun 2012.
- [20] G. C. Buscaglia, C. Bolech, and A. López. On the Numerical Solution of the Time-Dependent Ginzburg-Landau Equations in Multiply Connected Domains. In Jorge Ber-

ger and Jacob Rubinstein, editors, *Connectivity and Superconductivity*, Lecture Notes in Physics, pages 200–214. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.

- [21] W. D. Gropp, H. G. Kaper, G. K. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo, and V. M. Vinoku. Numerical simulation of vortex dynamics in type-II superconductors. *Journal of Computational Physics*, 123(2):254–266, 1996.
- [22] E. Sardella, P. N. Lisboa-Filho, and A. L. Malvezzi. Vortices in a mesoscopic superconducting circular sector. *Physical Review B*, 77(10):104508, March 2008.
- [23] J. W. Thomas. Numerical Partial Differential Equations. Springer, 1995.
- [24] V. I. Ginzburg. Some remarks concerning the macroscopic theory of superconductivity. *Soviet Physics JETP*, 3(4):621, 1956.
- [25] M. Tinkham. Effect of fluxoid quantization on transitions of superconducting films. *Physical Review*, 129(6):2413, 1963.
- [26] J. Pearl. Current distribution in superconducting films carrying quantized fluxoids. *Applied Physics Letters*, 5(4):65–66, 1964.
- [27] K. Maki. Fluxoid structure in superconducting films. Annals of Physics, 34:363–376, 1965.
- [28] G. Lasher. Mixed state of type I superconducting films in a perpendicular magnetic field. *Physical Review*, 154(2):345, 1967.
- [29] D. J. E. Callaway. Magnetic flux patterns in the superconducting intermediate state. *Annals of Physics*, 213(1):166–181, 1992.
- [30] V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and P. S. Deo. Vortex phase diagram for mesoscopic superconducting disks. *Physical Review Letters*, 81(13):2783, 1998.
- [31] L. M. Shi, L. F. Zhang, H. Meng, H. W. Zhao, G. Q. Zha, and S. P. Zhou. Vortices of mesoscopic rings in an external magnetic field: Phenomenological ginzburg-landau theory. *Physical Review B*, 79(18):184518, 2009.
- [32] G. R. Berdiyorov, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Novel commensurability effects in superconducting films with antidot arrays. *Physical Review Letters*, 96(20):207001, 2006.

- [33] H. Palonen, J. Jäykkä, and P. Paturi. Giant vortex states in type I superconductors simulated by ginzburg–landau equations. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 25(38):385702, 2013.
- [34] W. Y. C. Córdoba, R. M. da Silva, A. Vagov, A. A. Shanenko, and J. A. Aguiar. Between types I and II: Intertype flux exotic states in thin superconductors. *Physical Review B*, 94(5):054511, 2016.
- [35] D. S. Dantas. Emergent vortex behavior in superconductors and superfluids with single and multicomponent quantum condensates. PhD dissertation, Universidade Federal do Ceará, Physics Department, Fortaleza, Brazil, 2017.
- [36] J. B. Ortega, E. Sardella, and J. A. Aguiar. Superconducting properties of a parallelepiped mesoscopic superconductor: A comparative study between the 2d and 3d ginzburg– landau models. *Physics Letters A*, 379(7):732–737, 2015.
- [37] S. Wolf, A. Vagov, A. A. Shanenko, V. M. Axt, and J. A. Aguiar. Vortex matter stabilized by many-body interactions. *Physical Review B*, 96(14):144515, 2017.
- [38] A. Vagov, A. A. Shanenko, M. V. Milošević, V. M. Axt, V. M. Vinokur, J. A. Aguiar, and F. M. Peeters. Superconductivity between standard types: Multiband versus singleband materials. *Physical Review B*, 93(17):174503, 2016.
- [39] B. J. Baelus and F. M. Peeters. Dependence of the vortex configuration on the geometry of mesoscopic flat samples. *Phys. Rev. B*, 65:104515, Feb 2002.
- [40] J. Ge, J. Gutierrez, J. Cuppens, and V. V. Moshchalkov. Observation of single flux quantum vortices in the intermediate state of a type-I superconducting film. *Phys. Rev. B.*, 88(17):174503, 2013.

Artigo Publicado Durante o Mestrado

• Cadorim, Leonardo Rodrigues ; Calsolari, Thiago De Oliveira ; Zadorosny, Rafael ; Sardella, Edson . Crossover from type I to type II regime of mesoscopic superconductors of the first group. Journal of Physics-Condensed Matter, v. 32, p. 095304, 2019.