

Gabriela Cristiane Mendes Rahal

**Uma Conexão entre Curvas
Planas Clássicas e Reflexivas**



Universidade Estadual Paulista
Campus de São José do Rio Preto
Intituto de Biociências Letras e Ciências Exatas

Uma Conexão entre Curvas Planas Clássicas e Reflexivas

Gabriela Cristiane Mendes Rahal

Orientadora
Profa. Dra. Neuza Kazuko Kakuta



Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática-IBILCE-UNESP como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas - Área de
concentração Matemática.

São José do Rio Preto 1999

Já renovado



Agradecimento

Agradeço aos professores e aos funcionários da Faculdade de Educação, aos amigos, parentes, colegas, e todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

De modo especial, agradeço:

A professora Lina. A ela devo o conhecimento que adquiri e a oportunidade de trabalhar com ela. Foi ela quem me ensinou a lidar com a realidade e a ajudar nos momentos de dificuldade.

Aos meus pais, por me ensinar a lidar com a vida e a lidar com a realidade e a lidar com a realidade.

Aos meus amigos, por me ensinar a lidar com a vida e a lidar com a realidade e a lidar com a realidade.

A Daniela, por me ensinar a lidar com a vida e a lidar com a realidade e a lidar com a realidade.

Ao Guilherme, por me ensinar a lidar com a vida e a lidar com a realidade e a lidar com a realidade.

A FAPESP, por me ensinar a lidar com a vida e a lidar com a realidade e a lidar com a realidade.

Aos meus pais e ao meu marido,

dedico.

Agradecimento

Agradeço aos professores pela formação, aos funcionários, aos amigos, parentes, enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

De modo especial, agradeço:

À professora Dra. Neuza Kazuko Kakuta que me possibilitou a oportunidade de realizar este trabalho e que com toda paciência e dedicação me ajudou nas dificuldades, facilitando a elaboração do mesmo.

Aos meus pais, por revestirem a minha vida de amor, carinho e dedicação, pelas oportunidades e pela ajuda e incentivo em tudo aquilo que desejei realizar.

Ao meu esposo, pela compreensão da ausência, pela confiança, pelo carinho e estímulo dedicados em tudo aquilo que já vivemos.

À Daniela pelo apoio e pelo desejo de que eu sempre consiga atingir meus objetivos.

Ao Guilherme por me ensinar a viver as dificuldades com amor, alegria e esperança.

À FAPESP pelo auxílio financeiro.

Ao Julio pela digitação.

À Deus por tudo.

Introdução

Seja X uma curva projetiva em $\mathbb{P}_K^n$ definida em um corpo algebricamente fechado K , de característica p , $p \geq 0$.

A toda curva não degenerada está associada uma seqüência de ordens $0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$ que descreve as possíveis multiplicidades de intersecção da curva com hiperplanos em $\mathbb{P}^n$ em um ponto geral de X .

Se $x_0, \dots, x_n$ são funções racionais que geram o corpo de funções $K(X)$ e t é uma variável separante sobre K a seqüência de ordens de X é caracterizada como sendo a seqüência minimal de inteiros tal que o Wronskiano $\det(D^{(\epsilon_i)} x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ é não nulo sobre X , onde $D^{(i)}$ denota a derivada de Hasse-Schmidt. Uma curva X é dita clássica se $\epsilon_i = i$, $i = 0, \dots, n$ e não clássica caso contrário. Em característica zero, X é sempre clássica.

Por outro lado, define-se a aplicação racional $\varphi : X \dashrightarrow (\mathbb{P}_K^2)^*$ que associa a cada ponto regular de X o seu plano tangente e a curva dual X^* como sendo o fecho em $(\mathbb{P}_K^2)^*$ de $\varphi(X)$. Um resultado clássico afirma que em característica zero a aplicação $X \dashrightarrow X^*$ é separável. Isto não é verdade em geral para as curvas definidas em característica positiva, e neste caso dizemos que X não é reflexiva.

No Capítulo 1 introduzimos conceitos de separabilidade e inseparabilidade de morfismos entre variedades de mesma dimensão. A idéia de separabilidade geometricamente representa o número de vezes que uma variedade recobre a outra. Em particular, concluímos que, se o morfismo dual é separável, o número de multitangentes é finito. O conceito de inseparabilidade do morfismo dual nos fornece o índice de ramificação em um ponto geral de X .

Nesse mesmo Capítulo, a Teoria sobre Wronskianos é explorada para encontrar uma cota superior de Pontos de Weierstrass.

O Capítulo 2, dedicado essencialmente ao estudo de curvas clássicas e

não clássicas que podem ser caracterizadas por meio do Hessiano associado a uma curva. Apresentamos a equação de uma curva não singular não clássica, conforme Pardini em [He1] e, também uma cota superior para o número de pontos de inflexão para uma curva clássica. E ainda, estabelecemos a classicalidade de uma curva do tipo Artin-Schreier.

No Capítulo 3, caracterizamos as curvas não reflexivas através da inseparabilidade do morfismo dual φ e estabelecemos relações entre as curvas planas não reflexivas e as não clássicas apresentando também a demonstração original do Teorema devido a Pardini [P].

Ainda neste Capítulo, estudamos detalhadamente as curvas planas não singulares X de grau $p + 1$, mostrando que neste caso $X = X^{**}$, e que esta igualdade não se verifica em geral para as curvas de grau $dp + 1$, $d > 1$ e $p \nmid d$. Analisamos também a reflexividade de X^* , bem como a condição de coincidência de X^{**} com a curva X .

No Capítulo 4, estudamos uma classe especial de curvas não reflexivas que são as estranhas, que somente aparecem em característica positiva e que todas as curvas estranhas não singulares são cônicas em característica 2.

Índice

Capítulo 1 - Preliminares

1.1 - Sobre a Separabilidade e Inseparabilidade de de Morfismos entre Variedades	1
1.2 - Dimensão da Fibra	5
1.3 - Wronskianos - Pontos de Weierstrass	7

Capítulo 2 - Curvas Clássicas e Não Clássicas

2.1 - Seqüência de Ordens	19
2.2 - Critério Hessiano	20

Capítulo 3 - Curvas Reflexivas e Não Reflexivas

3.1 - Dualidade	34
3.1.1 - Fórmula de Plücker Generalizada	37
3.1.2 - Variedade Conormal	38
3.2 - Reflexibilidade e Classicalidade	38
3.3 - Curvas de grau $dp + 1$ com infinitos pontos de inflexão	46

Capítulo 4 - Curvas Estranhas e Curvas Extremas

4.1 - Curvas Estranhas e Curvas Extremas	57
4.2 - A Equação de uma Curva Estranha	59

Apêndice	68
----------	----

Referências	73
-------------	----

Capítulo 1

Preliminares

Neste Capítulo apresentaremos resultados essenciais para a compreensão do trabalho.

1.1 Sobre a Separabilidade e Inseparabilidade de Morfismos entre Variedades

Definição 1.1.1 *Seja A um subanel de B . Um elemento $b \in B$ é inteiro sobre A se satisfaz uma equação da forma $b^m + a_1 b^{m-1} + \dots + a_m = 0$, $a_i \in A$.*

Diremos que B é inteiro sobre A se todo elemento de B é inteiro sobre A . Além disso, o conjunto dos elementos de B que são inteiros sobre A é chamado de fecho inteiro de A em B . Diremos que A é integralmente fechado se A é igual ao seu fecho inteiro no seu corpo de frações.

Definição 1.1.2 *Uma variedade afim irredutível V é chamada normal se o anel $K[V]$ é integralmente fechado.*

Definição 1.1.3 *Uma aplicação $\varphi : V \rightarrow W$ é dita finita se $K[V]$ é integralmente fechado sobre $K[W]^*$.*

A proposição seguinte pode ser encontrada em [L](p.p.237).



Proposição 1.1.1 *Sejam $A \subset B \subset C$ anéis. Então:*

(1) *Se B é uma A -álgebra finita e C uma B -álgebra finita então C é uma A -álgebra finita.*

(2) *Se $A \subset B$ é uma A -álgebra finita e $x \in B$ então x é inteiro sobre A .*

(3) *Se x é inteiro sobre A então $B = A[x]$ é uma A -álgebra finita.*

Note que B é uma A -álgebra finita significa que B é finita como A -módulo.

Definição 1.1.4 *Sejam V e W variedades irredutíveis de mesma dimensão. Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação regular dominante, então a extensão $k(V)/f^*k(W)$ é finita e o grau da aplicação f é definido por:*

$$\deg f = [k(V) : f^*k(W)].$$

Teorema 1.1.1 *Se $f : V \rightarrow W$ é uma aplicação finita entre variedades irredutíveis tal que W é normal, então $\#f^{-1}(w) \leq \deg f$ para todo $w \in W$.*

Demonstração:

Os conceitos envolvidos no Teorema são locais, então podemos supor que V e W sejam afins. Denotemos por $A = k[V]$, $B = k[W]$, $k(V) = K$, $k(W) = L$ e $[K : L] = \deg f = n$.

Sendo W normal temos que B é integralmente fechado e pela Proposição 1.1.1 A é uma B -álgebra finita. Assim os coeficientes do polinômio minimal de um elemento $a \in A$ pertencem a B .

Seja $w \in W$ e suponha que $f^{-1}(w) = \{v_1, \dots, v_m\}$. Escolha $a \in A$ tal que $a(v_i)$, $i = 1, \dots, m$ são todos distintos. Seja $F \in B[T]$ o polinômio minimal de a , então $\deg F \leq [K : L] = n$. Avaliando os coeficientes de F em w obtemos o polinômio $\bar{F}[T]$ que tem m raízes distintas $a(v_i)$, $i = 1, \dots, m$ e

$$m \leq \deg \bar{F} = \deg F \leq n. \quad (1.1)$$

Portanto, $\#f^{-1}(w) \leq \deg f$, para todo $w \in W$.

□

Definição 1.1.5 Uma aplicação regular e dominante $f : V \rightarrow W$ é dita não ramificada no ponto $w \in W$ se $\#f^{-1}(w) = \deg f$. Caso $\#f^{-1}(w) < \deg f$ diremos que f é ramificada em w .

Teorema 1.1.2 Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação entre variedades irreduzíveis tal que W é normal. Então $U = \{w \in W \text{ tal que } f \text{ é não ramificada em } w\}$ é aberto em W . Além disso, se f é separável então U é não vazio.

Demonstração:

Podemos supor que V e W são variedades afins e podemos usar as mesmas notações do Teorema 1.1.1.

Seja $D(F)$ o discriminante do polinômio F (a resultante de $F(T)$ e $F'(T)$) onde F é o polinômio minimal de $a \in A$, com $\partial F \leq \partial f = n$.

Afirmção: Se F é não ramificada em w então $D(F)(w) \neq 0$.

Se f é não ramificada em $w \in W$ então $\#f^{-1}(w) = \deg f = n$. Por (1.1) do Teorema 1.1.1 temos que $n = \deg F$ e assim $\bar{F}$ tem n raízes distintas. Logo,

$$D(F) = D(\bar{F})(w) \neq 0. \quad (1.2)$$

Se f é inseparável então $D(F) = 0$ e portanto por (1.2) f é ramificada.

Se f é separável então existe $a \in A$ elemento primitivo da extensão $k(V)/f^*k(W)$.

Assim, o polinômio minimal $F(T)$ de a tem n raízes distintas onde $n = \deg F$ e portanto existem pontos $w \in W$ para os quais $D(F)(w) \neq 0$, que são os pontos não ramificados de f .

□

Seja $X \subset \mathbb{P}_K^2$ uma curva irreduzível definida sobre um corpo K algebricamente fechado com $\text{car } K = p > 0$.

Seja $K(X)$ o corpo das funções racionais sobre X e defina:

$K(X)^{\frac{1}{p}}$, o corpo das raízes p -ésimas dos elementos de $K(X)$ em $\overline{K(X)}$

Tem-se que:

$$(1) \ K(X) \subset K(X)^{\frac{1}{p}} \text{ e } [K(X)^{\frac{1}{p}} : K(X)] = p.$$

$$(2) \ K(X)^{\frac{1}{p}} \text{ determina uma curva } X_p \text{ tal que } K(X_p) = K(X)^{\frac{1}{p}}.$$

Isto segue do fato que o grau de transcendência de $K(X)^{\frac{1}{p}}$ sobre K é 1.

(3) A inclusão $K(X) \longrightarrow K(X)^{\frac{1}{p}}$ induz um morfismo

$$\begin{aligned} F' : X_p &\longrightarrow X \\ (X^p : Y^p : Z^p) &\longmapsto (X : Y : Z) \end{aligned}$$

denominado Morfismo de Frobenius sobre X .

Como K é algebricamente fechado, a aplicação $t \longmapsto t^p$ é um K -isomorfismo e daí temos que $X_p \stackrel{\text{birr}}{\simeq} X$.

(4) $F' : X_p \longrightarrow X$ é puramente inseparável e o índice de ramificação é igual a p .

De fato, F' é induzido pela inclusão $i : K(X) \longrightarrow K(X_p)$.

Seja $Q \in \text{reg}(X)$ e $t \in K(X)$ um parâmetro local de X em Q .

Como $i^*(t) = t^p$, $D^{(i)}(t^p) = 0$, $i = 0, \dots, p-1$ e $D^{(p)}(t^p) = 1$. Segue então que F' é puramente inseparável e índice de ramificação $e_P = p$ para todo P tal que $F'(P) = Q$.

Teorema 1.1.3 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante entre curvas irredutíveis de gênero geométrico $g(X)$ e $g(Y)$. Se f é puramente inseparável então f é uma composição de Morfismos de Frobenius e $g(X) = g(Y)$.*

Demonstração:

Suponha $[K(X) : K(Y)] = p^r$, $r \geq 1$. Considere a composição dos seguintes Morfismos de Frobenius:

$$f' : Y_{p^r} \xrightarrow{F'} Y_{p^{r-1}} \xrightarrow{F'} \dots \xrightarrow{F'} Y_p \xrightarrow{F'} Y$$

onde $K(Y_{p^i}) = (K(Y_{p^{i-1}}))^{\frac{1}{p}}$.

Temos pelas observações (3) e (4) que:

$$[K(Y_{p^r}) : K(Y)] = p^r \text{ e } K(Y) \simeq K(Y_{p^r}). \quad (1.3)$$

Como f é dominante podemos supor

$$K(X) \subset K(Y_{p^r}). \quad (1.4)$$

Sendo $[K(X) : K(Y)] = p^r$ por (1.3) e (1.4) concluímos que $K(X) = K(Y_{p^r})$,

portanto $K(X) \simeq K(Y)$ e $f' = f$.

Logo, $g(X) = g(Y)$ (o gênero geométrico de uma curva depende somente do seu corpo de funções).

□

1.2 Dimensão da Fibra

Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação regular entre variedades projetivas e $w \in W$, a subvariedade $f^{-1}(w)$ de V é chamado de fibra sobre o ponto w .

Teorema 1.2.1 (*Teorema da Dimensão da Fibra*) *Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação regular entre variedades irredutíveis tais que $f(V) = W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$ então:*

(a) $m \leq n$ e $\dim f^{-1}(w) \geq n - m$ para cada $w \in W$.

(b) *Existe um conjunto aberto não vazio U de W tal que $\dim f^{-1}(w) = n - m$ para cada $w \in U$.*

Demonstração:

(a) Claramente, esta é uma propriedade relativa a w , então podemos assumir que W seja um conjunto aberto em $\mathbb{A}^N$ contendo w e que V seja uma variedade afim. Sendo $\dim W = m$, existe uma seqüência de subvariedades:

$$W = W^{(0)} \supset W^{(1)} \supset \dots \supset W^{(m)},$$

onde $W^{(i)} = W^{(i-1)} \cap (F_i = 0)$, $F_i = 0$ um hiperplano genérico tais que $\dim W^{(i)} = \dim W^{(i-1)} - 1$.

Como $W^{(m)}$ é um conjunto finito então $W^{(m)} = W \cap Z$, onde Z é definido por m equações e $w \in Z$. Podemos considerar U um aberto de W tal que $U \cap Z \cap W = \{w\}$ e assumir que $Z \cap W = \{w\}$.

Se o subespaço Z é definido por m equações $g_1 = 0, \dots, g_m = 0$ então o sistema de equações $g'_1 = 0, \dots, g'_m = 0$ define o ponto w , onde $g'_i = g_i$, $i = 1, \dots, m$, em W .

Sobre V , o sistema de equações $f^*(g'_1) = 0, \dots, f^*(g'_m) = 0$ define a subvariedade $f^{-1}(w)$, onde $f^* : K(W) \rightarrow K(V)$ é o morfismo associado à f .

Então $\dim f^{-1}(w) \geq n - m$, isto segue do fato que $\dim V = n$ e $f^{-1}(w)$ é o conjunto de zeros de m funções racionais em $K(V)$.

(b) Sendo a dimensão uma propriedade local, podemos trocar W por um conjunto aberto W' e V por um subconjunto aberto $V' \subset f^{-1}(W')$. Sendo V, W variedades irredutíveis temos que V' é denso em $f^{-1}(W')$ e $f(V')$ é denso em W' e portanto f determina uma aplicação injetiva $f^* : K[W'] \rightarrow K[V']$. Podemos assumir que $K[W'] \subset K[V']$ e então $K(W') \subset K(V')$.

Ponha $K[W'] = K[w_1, \dots, w_M]$ e $K[V'] = K[v_1, \dots, v_N]$. Sendo $\dim W' = m$ e $\dim V' = n$ o grau da extensão $K(V')|K(W')$ é $n - m$. Suponha que $v_1, \dots, v_{n-m}$ sejam algebricamente independentes sobre $K(W')$ e que $v_i, i = n - m + 1, \dots, N$ estejam relacionados pela relação

$$F_i(v_i; v_1, \dots, v_{n-m}, w_1, \dots, w_M) = 0, \quad i = n - m + 1, \dots, N.$$

Denotemos por $\bar{v}_i$ a restrição de v_i em $f^{-1}(w) \cap V'$, com $w \in W'$. Então $K[f^{-1}(w) \cap V'] = k[\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_N]$. Consideremos F_i um polinômio em $v_i, v_1, \dots, v_{n-m}$ tomando $w_1, \dots, w_M$ entre os coeficientes e denotemos por W_i a subvariedade de W' definida pelo menor coeficiente não nulo deste polinômio.

Sejam os conjuntos $W_0 = \cap W_i$ e $U = W' \setminus W_0$ temos claramente que U é aberto e não vazio.

Se $w \in U$ os polinômios $F_i(T_i; T_1, \dots, T_{n-m}, w_1(w), \dots, w_M(w)) = 0$ e $F_i(v_i; \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-m}, w_1(w), \dots, w_M(w)) = 0$, para $i = n - m + 1, \dots, N$ se anulam.

Logo $\bar{v}_i, i = n - m + 1, \dots, N$ são algebricamente dependentes sobre $K(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-m})$ e daí, $\dim f^{-1}(w) \leq n - m$. Portanto segue de (a) que $\dim f^{-1}(w) = n - m$.

□

Teorema 1.2.2 *Seja $f : V \rightarrow W$ uma aplicação dominante entre variedades projetivas tal que W é irredutível. Se $f^{-1}(w)$ é irredutível e $\dim f^{-1}(w)$ é a mesma para todo w em um aberto de W , então V é irredutível.*

Demonstração:

Seja $n = \dim f^{-1}(w)$, para todo $w \in A$, A um aberto de W . Suponhamos que V seja redutível e que $V = \cup V_i$, onde V_i é irredutível. Como f é regular temos que $f(V_i)$ é fechado. Daí $W = \cup f(V_i)$ e W sendo irredutível segue que

$f(V_i) = W$ para algum V_i .

Denotamos por $W' = W \setminus \cup_{f(V_i) \neq W} f(V_i)$ e por $V' = f^{-1}(W')$ temos que $W' = \cup V_j$ onde cada V'_j é um dos abertos V_j tal que $f(V_j) = W$.

Seja $f_j : V'_j \rightarrow W'$ a restrição da f , então f_j é uma aplicação dominante entre variedades irredutíveis. Seja $m_j = \min\{\dim f_j^{-1}(w); w \in W'\}$. Pelo Teorema 1.2.1 esse mínimo é assumido num aberto $U \subset W'$, isto é, $\dim f^{-1}(w) = m_j$ para todo $w \in U$.

Sendo $\cup_j f_j^{-1}(w) = f^{-1}(w)$, $\forall w \in U$ e $f^{-1}(w)$ irredutível temos que $f_{j_0}^{-1}(w) = f^{-1}(w)$ para algum j_0 e então $\dim f_{j_0}^{-1}(w) = n$, para todo $w \in U$. Logo $V_{j_0} = V'$ e conseqüentemente $V_{j_0} = V$

□

1.3 Wronskianos - Pontos de Weierstrass

Definição 1.3.1 *Seja K um corpo. Uma derivação iterativa $\{D^{(i)}, i = 0, 1, \dots\}$ sobre K é uma sequência de operadores aditivos sobre K tal que $D^{(0)}$ é o operador idêntico e*

$$(1) D^{(i)}(zw) = \sum_{j=0}^i D^{(j)}(z)D^{(i-j)}(w) \quad \forall z, w \in K$$

$$(2) D^{(i)}D^{(j)} = \binom{i+j}{i} D^{(i+j)} \quad \text{onde } \binom{i+j}{i} \text{ é o coeficiente binomial}$$

Denotaremos $D^{(1)} = D$ e temos a seguinte relação $i!D^{(i)} = D^i$.

Lema 1.3.1 *Seja p um primo. Sejam $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ e $b = \sum_{i \geq 0} b_i p^i$ as expressões p -ádicas dos inteiros positivos a e b , onde $0 \leq a_i, b_i \leq p-1$, $\forall i \geq 0$. Então $\binom{a}{b}$ não é divisível por p se, e somente se, $a_i \geq b_i \quad \forall i \geq 0$.*

Demonstração:

Sejam $a = \sum_{i \geq 0} a_i p^i$ e $b = \sum_{i \geq 0} b_i p^i$ com $a_i \geq 0$ e $b_i \geq p-1$. Daí

$$\binom{a}{b} = \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \cdots \binom{a_r}{b_r} \cdots$$

Assim $\binom{a}{b} \not\equiv 0 \pmod{p}$ se, e somente se, $\binom{a_i}{b_i} \not\equiv 0 \pmod{p} \forall i$, o que equivale a $a_i \geq b_i, \forall i \geq 0$.

□

Seja K um corpo tal que $\text{car } K = p$. Denotaremos

$$K_m = \{x \in K; D^{(i)}(x) = 0, 1 \leq i < p^m\} \text{ e } K_\infty = \{x \in K; D^{(i)}(x) = 0, i \geq 1\}.$$

Proposição 1.3.1 *Para todo $m \geq 1$, K_m é um corpo. Mais ainda, $D^{(p^m)}$ é uma derivação sobre K_m e $K_{m+1} = \{x \in K_m \text{ tal que } D^{(p^m)}(x) = 0\}$.*

Demonstração:

A demonstração será feita por indução sobre m .

$m = 1$. Para $i < p$ temos que $D^{(i)} = \frac{1}{i!} D^i$. Logo,

$$K_1 = \{x \in K; D^{(i)}(x) = 0, 1 \leq i < p\} = \{x \in K; \frac{D^i}{i!}(x) = 0, 1 \leq i < p\}.$$

Como, $D(x) = 0$ então $D^{(2)}(x) = 0 = D^{(p-1)}(x) = 0$ e daí temos que $K_1 = \{x \in K; D(x) = 0\}$.

Afirmção: K_1 é um corpo.

Seja $x \in K_1$, $x \neq 0$ e $y = \frac{1}{x} \in K$. Temos que $D(x)y + D(y)x = 0$ e então $D(y) = 0$ (pois $D(x) = 0$ e $x \neq 0$). Portanto $y \in K_1$ e dessa forma concluímos que K_1 é um corpo.

Supondo que K_m seja um corpo, mostremos que K_{m+1} é um corpo.

Sendo K_m um corpo temos que $D^{(p^m)}$ é uma derivação sobre K_m e isso segue do fato:

$$D^{(p^m)}(xy) = D^{(p^m)}(x)y + D^{(p^m)}(y)x$$

visto que $D^{(i)}(x) = 0, \forall i = 1, \dots, p^m - 1$ e $\forall x, y \in K_m$.

Seja $L = \{x \in K_m; D^{(p^m)}(x) = 0\}$ e mostremos que $L = K_{m+1}$.

É suficiente mostrarmos que $D^{(i)}(x) = 0, \forall x \in L, p^m < i < p^{m+1}$.

Seja $i = rp^m + s$ com $1 < r \leq p - 1$ e $0 \leq s \leq p^m - 1$. Temos que

$$D^{(s)}(D^{(p^m)})^r = r! D^{(s)} D^{(rp^m)} = r! \binom{rp^m + s}{s} D^{(rp^m + s)} = r! \binom{i}{s} D^{(i)}.$$

Pelo Lema 1.3.1 temos que $\binom{i}{s} \equiv 1 \pmod{p}$ e então

$$D^{(i)}(x) = \frac{1}{r!} \binom{i}{s}^{-1} D^{(s)}(D^{(p^m)})^r(x) = 0.$$

Logo, $L = K_{m+1}$ e dessa forma para todo $x \in K_{m+1}$ e $x \neq 0$ existe $y = \frac{1}{x}$ de modo que $D^{(p^m)}(xy) = 0$.

Como $D^{(p^m)}$ é uma derivação sobre K_m temos que $D^{(p^m)}(x)y + D^{(p^m)}(y)x = 0$ e então $D^{(p^m)}(y) = 0$. Logo $y \in K_{m+1}$. Portanto K_{m+1} é um corpo.

□

Observação: Sejam K um corpo de característica $p > 0$ e t uma variável separante. Defina $D^{(i)}$ sobre $K[[t]]$ por $D^{(i)}(t^j) = \binom{j}{i} t^{j-i}$.

Para todo corpo K tal que $k(t) \subset K \subseteq k[[t]]$ temos pelo Teorema de Normalização de Noether que K é uma extensão finita e algébrica sobre $k(t)$. E ainda que $\{D^{(i)}, i = 0, 1, \dots\}$ é uma derivação iterativa sobre K com $K_m = kK^{p^m}$ e $K_\infty = k$.

Teorema 1.3.1 *Sejam K um corpo com $\text{car } K = p > 0$ e $x_0, \dots, x_n \in K$. Então $x_0, \dots, x_n$ são linearmente independentes sobre K_m se, e somente se, existem $0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n < p^m$ com $\det(D^{(\epsilon_i)}(x_j)) \neq 0$, $\forall i, j = 0, \dots, n$.*

Demonstração:

($\Leftarrow$) Suponhamos que $x_0, \dots, x_n$ são linearmente dependentes sobre K_m , isto é, existem $z_0, \dots, z_n \in K_m$ (não todos nulos) tais que $z_0x_0 + \dots + z_nx_n = 0$. Pela Definição 1.3.1 e pela definição de K_m temos que $\sum_{j=0}^n z_j D^{(i)}(x_j) = 0$, para $0 \leq i < p^m$. Donde se conclui que $\det(D^{(\epsilon_i)}(x_j)) = 0$ o que contradiz a hipótese.

Portanto, $x_0, \dots, x_n$ são linearmente independentes sobre K_m .

($\Rightarrow$) Provaremos a recíproca, por indução sobre n .

$n = 0$, trivial.

Sejam $x_0, \dots, x_n$ linearmente independentes sobre K_m . Suponhamos que os $n + 1$ vetores

$$(x_j, D^{(1)}(x_j), \dots, D^{(p^m-1)}(x_j)), 0 \leq j \leq n \quad (1.5)$$

sejam linearmente dependentes sobre K . Então existem $z_0, \dots, z_n \in K$ tais que

$$\sum_{j=0}^n z_j D^{(i)}(x_j) = 0, 0 \leq i \leq p^m - 1 \quad (1.6)$$

Como $x_0, \dots, x_{n-1}$ são linearmente independentes sobre K_m então por hipótese de indução temos que os n vetores em (1.5) para $0 \leq j \leq n-1$ são linearmente independentes sobre K . Daí $z_n \neq 0$ e sem perda de generalidade, podemos considerar $z_n = 1$. Provaremos inicialmente o seguinte fato:

Afirmção: $z_j \in K_m, j = 0, 1, \dots, n-1$

Pela Proposição 1.3.1 é suficiente mostrar que $D^{(r)}(z_j) = 0, 1 \leq r \leq p^{m-1}$.

Isto será feito por indução sobre r .

Para $r = 1$, aplicando D em (1.6) temos que:

$$D \left(\sum_{j=0}^n z_j D^{(i)}(x_j) \right) = (i+1) \sum_{j=0}^n D^{(i+1)}(x_j) + \sum_{j=0}^{n-1} D(z_j) D^{(i)}(x_j) = 0 \quad (1.7)$$

Segue de (1.6) que $\sum_{j=0}^n D^{(i+1)}(x_j) = 0$ para $i < p^m - 1$ e isto também é válido para $i = p^m - 1$ pois neste caso $i+1 \equiv 0 \pmod{p}$.

Daí de (1.7) $\sum_{j=0}^{n-1} D(z_j) D^{(i)}(x_j) = 0$ para $1 \leq i \leq p^m - 1$. Como estes n vetores (para $0 \leq j \leq n-1$) são linearmente independentes sobre K concluímos que $D(z_j) = 0, 0 \leq j \leq n-1$.

Suponha que $D^{(s)}(z_j) = 0$, para $1 \leq s \leq r \leq p^m - 1$ e $0 \leq j \leq n-1$.

Mostremos que $D^{(r)}(z_j) = 0, 1 \leq r \leq p^{m-1}$.

Aplicando $D^{(r)}$ em (1.6) temos que:

$$D^{(r)} \left(\sum_{j=0}^n z_j D^{(i)}(x_j) \right) = \binom{i+r}{i} \sum_{j=0}^n z_j D^{(i+r)}(x_j) + \sum_{j=0}^{n-1} D(z_j) D^{(i)}(x_j) = 0$$

Como no caso $r = 1$ para provar que $D^{(r)}(z_j) = 0, 1 \leq r \leq p^{m-1}$ é suficiente mostrar que $\binom{i+r}{i} \sum_{j=0}^n z_j D^{(i+r)}(x_j) = 0, 0 \leq i \leq p^m - 1$.

Para $i+r < p^m$ isto segue de (1.6). Agora para $i+r \geq p^m$ temos que:

$$p^m \leq i+r < p^m + p^{m-1} \text{ e } p^m \geq i \geq p^m - r \geq p^m - p^{m-1} \geq (p-1)p^{m-1}$$

Daí os coeficientes de p^{m-1} na expansão p -ádica de i é $p-1$ e de $i+r$ é nulo. Pelo Lema 1.3.1, $\binom{i+r}{i} \equiv 0 \pmod{p}$ e

$$\binom{i+r}{i} \sum_{j=0}^n z_j D^{(i+r)}(x_j) = 0 \quad 0 \leq i \leq p^m - 1.$$

Daí $\sum_{j=0}^{n-1} D^{(r)}(z_j) D^{(i)}(x_j) = 0$ e portanto $D^{(r)}(z_j) = 0$, $0 \leq j \leq n-1$.

Voltando a demonstração da recíproca, temos da afirmação acima que $z_j \in K_m$, $j = 0, 1, \dots, n-1$ e então da equação (1.6) temos que $\sum_{j=0}^{n-1} z_j D^{(i)}(x_j) = 0$, $0 \leq i \leq p^{m-1}$.

Em particular para $i = 0$ temos $z_0 x_0 + \dots + z_{n-1} x_{n-1} = 0$. Como cada $z_j \in K_m$ segue por hipótese de indução que $z_j = 0$, $0 \leq j \leq n-1$. Daí $x_n = 0$ e isto contradiz a hipótese.

□

Seja X uma curva projetiva irredutível não singular de gênero g definida sobre um corpo K algebricamente fechado de característica p . Seja $K(X)$ o corpo de funções racionais de X .

Denotaremos $v_P(f)$ a ordem da função racional f no ponto P em X .

Seja $f : X \rightarrow \mathbb{P}_K^n$ um morfismo, $f = (f_0, \dots, f_n)$ onde $f_i \in K(X)$. Para cada $P \in X$ temos que

$$f(P) = ((t^{e_P} f_0)(P), \dots, (t^{e_P} f_n)(P))$$

onde $e_P := \min\{v_P(f_0), \dots, v_P(f_n)\}$ e t é um parâmetro local de X em P .

Definição 1.3.2 *Seja H um hiperplano de $\mathbb{P}_K^n$ definido pela equação $\sum_{i=0}^n a_i X_i = 0$. O divisor de intersecção de H e X é dado por:*

$$H.X := \operatorname{div} \left(\sum_{i=0}^n a_i f_i \right) + E,$$

onde $E := \sum_{P \in X} e_P P$.

Um inteiro $j \in \mathbb{N}$ é uma ordem em P se existir um hiperplano H tal que $\text{ord}_P(H.X) = j$.

Dado $P \in X$, define-se os espaços lineares:

$$D_i := \{H \text{ hiperplano em } \mathbb{P}_K^n \text{ tal que } \text{ord}_P(H.X) \geq i\}$$

Temos que $(\mathbb{P}_K^n)^* = D_0 \supset D_1 \supset \dots$ e portanto j é uma ordem de P se, e somente se, $D_j \supsetneq D_{j+1}$.

Como a codimensão de D_{j+1} em D_j é no máximo 1 temos exatamente $n + 1$ ordens $0 = j_0 < j_1 = 1 < j_2 < \dots < j_n$.

Se d é o grau de E temos claramente que $j_n \leq d$. D_{j_n} consiste de um único hiperplano chamado hiperplano osculador de X em P .

Teorema 1.3.2 *Sejam $P \in X$ e t um parâmetro local em P . Suponha que $e_P = 0$ e que sejam conhecidas as ordens $j_0, \dots, j_{i-1}$ de P . Então j_i é o menor inteiro tal que os pontos*

$$(D_t^{(j_r)}(f_0) : \dots : D_t^{(j_r)}(f_n)), \quad r = 0, \dots, i$$

são linearmente independentes sobre $K((t))$.

Demonstração:

Por mudança de coordenadas podemos supor que o hiperplano osculador é dado por $x_n = 0$ e que, para todo $i = 0, \dots, n - 1$ os hiperplanos em $D_{j_{i+1}}$ sejam combinações de $x_n = 0, \dots, x_{i+1} = 0$. Nestas condições temos

$$j_{i+1} = \min\{\text{ord}_P(a_{i+1}f_{i+1} + \dots + a_nf_n); a_{i+1}, \dots, a_n \in K\}.$$

Em particular $j_n = \text{ord}_P(f_n)$ e $j_0 = \text{ord}_P(f_0)$. A matriz:

$$\begin{pmatrix} D_t^{(j_0)}(f_0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_t^{(j_1)}(f_0) & D_t^{(j_1)}(f_1) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_t^{(j_r)}(f_0) & D_t^{(j_r)}(f_1) & D_t^{(j_r)}(f_2) & \dots & D_t^{(j_r)}(f_n) \end{pmatrix}$$

é triangular com elementos da diagonal não nulos. Donde concluímos que $(D_t^{(j_r)}(f_0) : \dots : D_t^{(j_r)}(f_n))$, $r = 0, \dots, i$ são linearmente independentes sobre $K((t))$.

□

Corolário 1.3.1 Se $m_0 < m_1 < \dots < m_r$ são inteiros não negativos tais que os pontos:

$$(D_t^{(m_i)}(f_0) : \dots : D_t^{(m_i)}(f_n)), \quad i = 0, \dots, r$$

são linearmente independentes sobre $K((t))$ então $j_i \leq m_i$, $i = 0, \dots, r$.

Demonstração:

Supondo conhecidas as ordens $j_0, \dots, j_{i-1}$ temos que os vetores

$$(D_t^{(s)}(f_0) : \dots : D_t^{(s)}(f_n)), \quad s = 0, \dots, j_{i-1}$$

determinam um espaço de dimensão i . Por hipótese os $i + 1$ vetores listados são linearmente independentes sobre $K((t))$ e então pelo Teorema 1.3.2 segue o requerido.

□

Corolário 1.3.2 O plano osculador em P é determinado pela equação:

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & \dots & X_n \\ D_t^{(j_0)}(f_0) & D_t^{(j_0)}(f_1) & \dots & D_t^{(j_0)}(f_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_t^{(j_{n-1})}(f_0) & D_t^{(j_{n-1})}(f_1) & \dots & D_t^{(j_{n-1})}(f_n) \end{pmatrix} = 0.$$

Demonstração:

Segue do fato de que $n + 1$ vetores em $\mathbb{P}_{K((t))}^n$ são linearmente dependentes sobre $K((t))$.

□

Definição 1.3.3 $P \in X$ é chamado ponto osculador se $j_n > n$.

Suponha agora que t seja uma variável separante de $K(X)$ e defina os Wronskianos generalizados por:

$$\det(D_t^{(\epsilon_i)} f_j), \quad i, j = 0, \dots, n$$

onde $\epsilon_0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$ é a seqüência minimal de inteiros tais que os vetores:

$$(D_t^{(\epsilon_i)}(f_0), \dots, D_t^{(\epsilon_i)}(f_n)) \quad i = 0, \dots, n$$

sejam linearmente independentes sobre $K(X)$.

Proposição 1.3.2 (a) Se $g_i = \sum a_{ij} f_j$, $a_{ij} \in GL_{n+1}(K)$ então:

$$\det(D_t^{(\epsilon_i)}(g_j)) = \det(a_{ij}) \det(D_t^{(\epsilon_i)} f_j)$$

(b) Se $h \in K(X)$ então:

$$\det(D_t^{(\epsilon_i)}(h f_j)) = h^{n+1} \det(D_t^{(\epsilon_i)} f_j)$$

(c) Se x é uma outra variável separante então:

$$\det(D_x^{(\epsilon_i)}(f_j)) = \left(\frac{d_t}{d_x} \right)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} \det(D_t^{(\epsilon_i)} f_j).$$

Demonstração:

(a) Escrevendo a equação $g_i = \sum a_{ij} f_j$, $a_{ij} \in GL_{n+1}(K)$ matricialmente por $(g_i) = (a_{ij})(f_j)$ e tomando as derivadas obtemos:

$$(D_t^{(\epsilon_i)}(g_l)) = (a_{il})(D_t^{(\epsilon_i)} f_l).$$

Logo,

$$\det(D_t^{(\epsilon_i)}(g_l)) = \det(a_{il}) \det(D_t^{(\epsilon_i)} f_l).$$

(b) Usando a Regra de Leibniz para as derivadas de Hasse segue que:

$$(D_t^{(\epsilon_i)}(h f_j)) = \sum_{s=0}^{\epsilon_i} D_t^{(s)}(h) D_t^{(\epsilon_i-s)}(f_j) =$$

$$= hD_t^{(\epsilon_i)}(f_j) + \text{termos em } D_t^{(0)}(f_j), \dots, D_t^{(\epsilon_i-1)}(f_j).$$

Logo,

$$\det(D_t^{(\epsilon_i)}(hf_j)) = \det(hD_t^{(\epsilon_i)}f_j + \dots)$$

o determinante à direita difere do $\det(D_t^{(\epsilon_i)}(hf_j))$ por determinantes formados por linhas $(D_t^{(r)}(f_0), \dots, D_t^{(r)}(f_n))$, $r = 0, \dots, \epsilon_i - 1$ que são linearmente dependentes sobre $K(X)$. Pela minimalidade dos ϵ_i 's, concluímos que:

$$\det(D_t^{(\epsilon_i)}(hf_j)) = \det(hD_t^{(\epsilon_i)}(f_j)) = h^{n+1} \det(D_t^{(\epsilon_i)}f_j)$$

(c) Usando a regra da cadeia temos que:

$$D_x^{(\epsilon_i)}(f_j) = \left(\frac{d_t}{d_x}\right)^{\epsilon_i} (D_t^{(\epsilon_i)}f_j) + \text{termos em } D_t^{(1)}(f_j), \dots, D_t^{(\epsilon_i-1)}(f_j)$$

Dai,

$$\det(D_x^{(\epsilon_i)}(f_j)) = \det\left(\left(\frac{d_t}{d_x}\right)^{\epsilon_i} \det(D_t^{(\epsilon_i)}f_j) + \dots\right)$$

Por um argumento análogo ao utilizado em b) concluímos que:

$$\det(D_x^{(\epsilon_i)}(f_j)) = \det\left(\left(\frac{d_t}{d_x}\right)^{\epsilon_i} (D_t^{(\epsilon_i)}f_j)\right)$$

Logo,

$$\det(D_x^{(\epsilon_i)}(f_j)) = \left(\frac{d_t}{d_x}\right)^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n} \det(D_t^{(\epsilon_i)}f_j).$$

□

Como a sequência $\epsilon_0 < \dots < \epsilon_n$ independe da variável separante e da mudança de coordenadas podemos definir $\epsilon_0 < \dots < \epsilon_n$ como sendo a sequência de ordens do morfismo f .

Mais ainda, devido a minimalidade dos ϵ_i 's, temos que $\epsilon_i \leq j_i$, para cada i .

Definimos o divisor de ramificação de f por:

$$R := \text{div}(\det(D_t^{(\epsilon_i)}(f_j))) + (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n) \text{div}(dt) + (n+1)E$$

onde $E = \sum e_P P$ e $e_P = -\min\{v_P(f_0)(P), \dots, v_P(f_n)(P)\}$.

Note que $\deg(R) = (\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)(2g-2) + (n+1)d$, onde $d = \deg(E)$.

Teorema 1.3.3 *Seja $P \in X$ e seja $j_0 < j_1 < \dots < j_n$ a seqüência de ordens de X em P . Então:*

$$v(R) \geq \sum_{r=0}^n (j_i - \epsilon_i)$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se o $\det \left(\binom{j_i}{\epsilon_r} \right) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Demonstração:

Por mudança de coordenadas podemos supor $e_P = 0$. Seja t um parâmetro local de X em P então $v_P(dt) = 0$ e,

$$v_P(R) = v_P(\det(D_t^{(\epsilon_r)} f_i))$$

Por mudança de coordenadas, podemos supor $f_i = t^{j_i} + \dots$. Assim,

$$\begin{aligned} \det(D_t^{(\epsilon_r)}(f_i)) &= \det \left(\binom{j_i}{\epsilon_r} t^{j_i - \epsilon_r} + \dots \right) = \\ \det \left(\binom{j_i}{\epsilon_r} t^{j_i} + \dots \right) t^{-\epsilon_0 - \dots - \epsilon_n} &= \det \left(\binom{j_i}{\epsilon_r} \right) t^{j_0 + \dots + j_n - \epsilon_0 - \dots - \epsilon_n} + \dots \end{aligned}$$

Logo,

$$v_P(\det(D_t^{(\epsilon_r)}(f_i))) \geq \sum_{i=0}^n (j_i - \epsilon_i)$$

sendo a igualdade válida se, e somente se, $\det \left(\binom{j_i}{\epsilon_r} \right) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

□

Além disso, podemos concluir que $v_P(R) = 0$ se, e somente se, $j_i = \epsilon_i$, $i = 1, \dots, n$.

Definição 1.3.4 *Um ponto $P \in X$ com a seqüência de ordens $\epsilon_0, \dots, \epsilon_n$ é dito ponto ordinário, caso contrário P é dito um ponto de Weierstrass e neste caso o peso deste ponto é dado por $v_P(R)$.*

Assim, o número de pontos de Weierstrass contados com seus pesos é

$$(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)(2g - 2) + (n + 1)d.$$

Proposição 1.3.3 *Seja $P \in X$ com ordens $j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_n$. Se $m_0, m_1, \dots, m_n$ são inteiros tais que $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_n$ e $\det \left(\binom{j_i}{m_i} \right) \not\equiv 0 \pmod{p}$ então $\epsilon_i \leq m_i$ para cada i .*

Demonstração:

Como na prova do Teorema 1.3.3 temos que:

$$\det(D_t^{(m_r)}(f_i)) = \det \left(\binom{j_i}{m_r} \right) t^{\sum (j_i - m_i)} + \dots \neq 0.$$

A proposição segue do fato que $\epsilon_0 < \dots < \epsilon_n$ é a sequência minimal de inteiros tal que $\det(D_t^{(\epsilon_i)}(f_j)) \neq 0$.

□

Corolário 1.3.3 *Seja $P \in X$ com ordens $j_0 < j_1 < j_2 < \dots < j_n$, se p não divide $\left(\prod \frac{(j_i - j_s)}{(i - s)} \right)$ então $\epsilon_i = i$, $i = 0, \dots, n$ e $v_P(R) = \sum (j_i - i)$.*

Demonstração:

Sejam $f_0, \dots, f_n$ escolhidas de modo que $f_i = t^{j_i} + \dots$ em torno de P . Temos que:

$$\epsilon_i = i, i = 0, \dots, n \text{ se } \det(D_t^{(i)}(f_j)) = \det \left(\binom{j_i}{i} \right) t^{\sum (j_i - i)} + \dots$$

Logo, para que se tenha $\det(D_t^{(i)}(f_j)) \neq 0$, deve ocorrer que

$$\det \left(\binom{j_i}{i} \right) \not\equiv 0 \pmod{p}. \quad (1.8)$$

Sendo

$$\det \left(\binom{j_i}{i} \right)_{\substack{i=0, \dots, n \\ r=0, \dots, n}} = \det \left(\left(\frac{j_i^r}{i!} \right) + \dots \right) \stackrel{\text{Vandermonde}}{=} \prod_{i>s} \frac{(j_i - j_s)}{(i - s)},$$

concluimos de (1.8) que p não divide $\left(\prod_{i>s} \frac{(j_i - j_s)}{(i - s)} \right)$. Pela Proposição 1.3.3 segue que $\epsilon_i = i$, $i = 0, \dots, n$ e pelo Teorema 1.3.3 que $v_P(R) = \sum (j_i - i)$.

□

Corolário 1.3.4 *Seja ϵ uma ordem de X e μ um inteiro tal que $\binom{\epsilon}{\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Então μ também é uma ordem de X .*

Demonstração:

Se $\binom{\epsilon}{\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ então $0 \leq \mu \leq \epsilon$. Supondo $\mu > 0$, seja r o maior inteiro tal que $\epsilon_r < \mu$. Como a matriz

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_0 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon_0 \end{pmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \epsilon_r \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_r \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \epsilon \\ \epsilon_r \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \epsilon_0 \\ \mu \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \mu \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \epsilon \\ \mu \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

tem determinante $\binom{\epsilon}{\mu} \not\equiv 0 \pmod{p}$ então os vetores colunas desta matriz são linearmente independentes sobre F_p . Pela Proposição 1.3.3, $\epsilon_{r+1} \leq \mu$ e pela maximalidade de r tal que ϵ_r é uma ordem de X com $\epsilon_r < \mu$, concluímos que $\epsilon_{r+1} = \mu$ e dessa forma μ é uma ordem de X .

□

Capítulo 2

Curvas Clássicas e Não Clássicas

2.1 Seqüência de Ordens

Seja $X \subset \mathbb{P}_K^n$ uma curva algébrica irredutível definida sobre um corpo K algebricamente fechado com $\text{car } K = p \geq 0$ e $k = K(X)$ o corpo de funções. Seja $\{D^{(i)}, i \geq 0\}$ uma derivação iterativa sobre k definida por $D^{(i)}(t^j) = \binom{j}{i} t^{j-i}$.

Se $x_0, \dots, x_n \in k$ são linearmente independentes sobre K , a seqüência minimal de inteiros $0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$ tal que $\det(D^{(\epsilon_i)}(x_j)) \neq 0$ é chamada de seqüência de ordens de X .

A curva X é dita clássica se $\epsilon_i = i$ para $i = 0, \dots, n$ e não clássica caso contrário.

Os invariantes $0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$ representam as possíveis multiplicidades de intersecção da curva com os hiperplanos de $\mathbb{P}_K^n$, num ponto geral de X .

Sendo assim, se X é uma curva plana, ϵ_2 é a multiplicidade de intersecção de X com $T_P X$, $P \in X$ geral. Se $p = 0$ então X é clássica, isto segue do Corolário 1.3.3.

Proposição 2.1.1 *Seja $0 = \epsilon_0 < \epsilon_1 < \dots < \epsilon_n$ ordens de X . Suponha que $\epsilon_i = i$ para $i < n$ e que $p \geq n$. Se $\epsilon_n > n$, então ϵ_n é uma potência de p .*



Demonstração:

Como $\epsilon_n > n$ e $\epsilon_i = i$ para $i = 0, \dots, n-1$ então n não é uma ordem de X . Logo $\epsilon_n \geq p$. Se ϵ_n não é uma potência de p , então podemos encontrar $r < \epsilon_n$ tal que $\binom{\epsilon_n}{r} \not\equiv 0 \pmod{p}$. Assim pelo Corolário 1.3.4, r também é uma ordem de X o que é um absurdo visto que $p \leq r < \epsilon_n$.

□

Corolário 2.1.1 *Seja $X : f(x, y) = 0$ uma curva plana irredutível em $\mathbb{P}_K^2$. X é não-clássica se, e somente se, o polinômio $f(x, y)$ é um múltiplo do polinômio $z_0^{p^m} + z_1^{p^m} x + z_2^{p^m} y$, com $z_0, z_1, z_2 \in K[x, y]$.*

Demonstração:

Seja,

$$\begin{aligned} \phi_1 : X &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (1 : x : y) \end{aligned}$$

Como ϕ_1 é uma imersão temos que $\epsilon_i = i$, $i = 0, 1$. Assim as hipóteses da Proposição 2.1.1 são satisfeitas para todo $p > 0$. Do Teorema 1.3.1 temos que $\epsilon_2 \geq p^m$ se, e somente se, existem $z_0, z_1, z_2 \in k$, não todos nulos, com $z_0^{p^m} + z_1^{p^m} x + z_2^{p^m} y = 0$ sobre k .

Podemos assumir que z_0, z_1, z_2 são polinômios sobre $k[x, y]$.

Logo $\epsilon_2 \geq p^m$ se, e somente se, existem $h, z_0, z_1, z_2 \in K[x, y]$, $h \neq 0$ com $hf = z_0^{p^m} + z_1^{p^m} x + z_2^{p^m} y$.

□

2.2 Critério Hessiano

Nesse parágrafo, caracterizaremos as curvas planas clássicas mediante o Hessiano associado a uma curva.

Sejam $X : F = 0$ uma curva irredutível e $P \in \text{reg}(X)$. Como $T_P X$ é dada por $F_1(P) = 0$ onde $F = F_1 + F_2 + \dots + F_n$, F_i 's homogêneos de grau i , $I(P, F \cap T_P X)$ é o menor índice i tal que $F_i(P) \neq 0$.

Proposição 2.2.1 *Seja $X : F = 0$ uma curva irredutível, $\partial F = n > 1$. Para qualquer i , $1 < i \leq n$ existem polinômios homogêneos $H_{i,1}, \dots, H_{i,n_i}$ tal que $P \in \bigcap_{j=1}^{n_i} H_{i,j}$ se, e somente se, F_1 divide F_i como polinômio em Y .*

Demonstração:

Seja $\{v_0, \dots, v_{N-1}\}$ uma base para o espaço vetorial

$$V_{i-1} = \{G \in K[Y_0, Y_1, Y_2] : \text{homogêneo}, \partial G = i - 1\}.$$

Temos que $\dim_K V_{i-1} = \frac{i(i+1)}{2} = \binom{i+1}{2} := N.$

Seja u_N uma indeterminada e ponha $X = (X_0, X_1, X_2)$ e $Y = (Y_0, Y_1, Y_2)$. $F_1|F_i$ em $K[X][Y]$ se, e somente se, existe $G \in V_{i-1}$ tal que $u_N F_i = F_1 G$, $i = 1, \dots, n$ com $G = \sum_{j=0}^{N-1} u_j v_j$, $u_j \in K$. Isto é equivalente a que o sistema

$$\begin{cases} u_N F_1(X, Y) - F_1(X, Y)G(Y) = 0 \\ \vdots \\ u_N F_n(X, Y) - F_1(X, Y)G(Y) = 0 \end{cases}$$

com $N + 1$ incógnitas e $\binom{i+2}{2}$ equações, tenha solução não trivial.

A existência de solução não trivial do sistema é equivalente ao fato de que a matriz

$$\begin{pmatrix} F_1 & -F_1 v_1 & \dots & -F_1 v_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n & -F_1 v_1 & \dots & -F_1 v_{N-1} \end{pmatrix}$$

tenha posto menor do que $N + 1$ e isto equivale ao anulamento dos menores de ordem menor ou igual a N , o que ocorre se, e somente se, os determinantes dos menores $H_{i,1}, \dots, H_{i,n_i} \in K[X][Y]$, $i = 1, \dots, N$, se anulam em P .

Portanto $P \in \bigcap_{j=1}^{n_i} H_{i,j}$ se, e somente se, $F_1|F_i$ como polinômio em Y .

□

Seja r o menor índice i , $2 \leq i \leq n$ tal que F não divide H_{ij} , $j = 1, \dots, n_i$.

Existência de r : Suponhamos que $F|H_{ij}$, $\forall i, j$. Pela proposição anterior $F_1|F_i$ em $K[X][Y]$, então $F_1|F$ o que é absurdo visto que F é irredutível.

Afirmção: $I(P, F \cap T_P X) = r$ para um número infinito de $P \in \text{reg}(X)$.

Basta mostrarmos que $I(P, F \cap T_P X) > r$ para um número finito de $P \in \text{reg}(X)$.

Seja $T_P X : F_1 = 0$. Pela definição de r , $F_1 | F_i$, $i = 1, \dots, r$, isto é, existem $G_2, \dots, G_r$ tais que $F_2 = F_1 G_2, \dots, F_r = F_1 G_r$ e

$$\begin{aligned} I(P, X \cap T_P X) &= I(P, F \cap F_1) = I(P, (F_1 + F_2 + \dots + F_r + F_{r+1} + \dots + F_n) \cap F_1) = \\ &= I(P, (F_{r+1} + \dots + F_r) \cap F_1) \geq r + 1 > r \end{aligned}$$

Como $F_1 | F_i$, $i = 1, \dots, r$ então pela Proposição 2.2.1 $P \in \cap_{j=1}^{n_{ri}} V(H_{i,j}) \cap X$. Sendo $\cap_{j=1}^{n_{ri}} V(H_{i,j}) \cap X \subsetneq X$ e $\dim X = 1$ temos que $\cap_{j=1}^{n_{ri}} V(H_{i,j}) \cap X$ é finita. Assim existe um número finito de $P \in \text{reg}(X)$ tal que $I(P, F \cap T_P X) > r$.

Definição 2.2.1 Seja $P \in \text{reg}(X)$ tal que $I(P, X \cap T_P X) > r$, P é chamado ponto de inflexão do tipo r de X . Diremos simplesmente que P é um ponto de inflexão de X se P é do tipo 2.

Definição 2.2.2 Seja $X : F = 0$ uma curva irredutível, $\partial F = n$. Definimos curva hessiana de F como:

$$H(F) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} \end{vmatrix}$$

Afirmção: $Z^2 H(F) = -(n-1)^2 (\Delta_{xy} - FG)$, onde $\Delta_{xy} = (F_x)^2 F_{yy} + (F_y)^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy}$, $G = \frac{n}{(n-1)} (F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2)$ e $\Delta_{xy} = (F_x)^2 D_x^{(2)} F + (F_y)^2 D_y^{(2)} F - F_x F_y D_{xy}^{(2)} F$ se $\text{car} K = 2$.

De fato,

Como $nF = XF_x + YF_y + ZF_z$, derivando com relação a X, Y, Z obtemos:

$$nF_x = XF_{xx} + F_x + YF_{yx} + ZF_{zx} \Rightarrow ZF_{zx} = (n-1)F_x - XF_{xx} - YF_{yx} \quad (2.1)$$

$$nF_y = XF_{xy} + YF_{yy} + F_y + ZF_{zy} \Rightarrow ZF_{zy} = (n-1)F_y - XF_{xy} - YF_{yy} \quad (2.2)$$

$$nF_z = XF_{xz} + YF_{yz} + ZF_{zz} + F_z \Rightarrow ZF_{zz} = (n-1)F_z - XF_{xz} - YF_{yz} \quad (2.3)$$

Daí,

$$H(F) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{xz} & F_{yz} & F_{zz} \end{vmatrix} = \frac{1}{Z} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ ZF_{xz} & ZF_{yz} & ZF_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

Substituindo em (2.4), (2.1), (2.2) e (2.3) segue que: $H(F) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{Z} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ (n-1)F_x - XF_{xx} - YF_{xy} & (n-1)F_y - XF_{xy} - YF_{yy} & (n-1)F_z - XF_{xz} - YF_{yz} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{Z} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ (n-1)F_x & (n-1)F_y & (n-1)F_z \end{vmatrix} = \frac{(n-1)}{Z} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(n-1)}{Z^2} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & ZF_{xz} \\ F_{xy} & F_{yy} & ZF_{yz} \\ F_x & F_y & ZF_z \end{vmatrix} \quad (2.5) \end{aligned}$$

Substituindo novamente em (2.5), (2.1), (2.2) e (2.3) obtemos:

$$\begin{aligned} H(F) &= \frac{(n-1)}{Z} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & (n-1)F_x - XF_{xx} - YF_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} & (n-1)F_y - XF_{xy} - YF_{yy} \\ F_x & F_y & nF - XF_x - YF_y \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(n-1)}{Z^2} \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & (n-1)F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & (n-1)F_y \\ F_x & F_y & nF \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Resolvendo o determinante acima temos que:

$$Z^2 H(F) = -(n-1)^2 (\Delta_{xy} - FG), \text{ com } G = \frac{n}{(n-1)} (F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2)$$

Analogamente definindo $\Delta_{xz} = (F_x)^2 F_{zz} + (F_z)^2 F_{xx} - 2F_x F_z F_{xz}$ e $\Delta_{yz} = (F_y)^2 F_{zz} + (F_z)^2 F_{yy} - 2F_y F_z F_{yz}$, obtemos as relações $Y^2 H(F) = -(n-1)^2 (\Delta_{xz} - FG_1)$ e $X^2 H(F) = -(n-1)^2 (\Delta_{yz} - FG_2)$ respectivamente, para determinados polinômios homogêneos G_1 e G_2 .

Lema 2.2.1 *Sejam $X : F = 0$ uma curva irredutível e*

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} &= (F_x)^2 F_{yy} + (F_y)^2 F_{xx} - 2F_x F_y F_{xy}, \\ \Delta_{xz} &= (F_x)^2 F_{zz} + (F_z)^2 F_{xx} - 2F_x F_z F_{xz}, \\ \Delta_{yz} &= (F_y)^2 F_{zz} + (F_z)^2 F_{yy} - 2F_y F_z F_{yz}\end{aligned}$$

então $X^2 \Delta_{xy} \equiv Z^2 \Delta_{yz} \pmod{F}$, $Y^2 \Delta_{yz} \equiv X^2 \Delta_{xz} \pmod{F}$ e $Y^2 \Delta_{xy} \equiv Z^2 \Delta_{xz} \pmod{F}$.

Demonstração:

Da afirmação acima temos que:

$$\begin{aligned}Z^2 H(F) &= -(n-1)^2 (\Delta_{xy} - FG), \\ Y^2 H(F) &= -(n-1)^2 (\Delta_{xz} - FG_1) \text{ e} \\ X^2 H(F) &= -(n-1)^2 (\Delta_{yz} - FG_2).\end{aligned}$$

Assim, $0 = (n-1)^2 [X^2 \Delta_{xy} - X^2 FG + Z^2 \Delta_{yz} + Z^2 FG_2]$, e daí $X^2 \Delta_{xy} = Z^2 \Delta_{yz} + G_3 F$, $G_3 = -X^2 G + Z^2 G_2$. Logo, $X^2 \Delta_{xy} \equiv Z^2 \Delta_{yz} \pmod{F}$. Analogamente concluímos que $Y^2 \Delta_{yz} \equiv X^2 \Delta_{xz} \pmod{F}$ e $Y^2 \Delta_{xy} \equiv Z^2 \Delta_{xz} \pmod{F}$.

□

Lema 2.2.2 *$F_1(X, Y)$ divide $F_2(X, Y)$ como polinômio em Y se, e somente se, $\Delta_{xy} = 0$, $\Delta_{xz} = 0$ e $\Delta_{yz} = 0$.*

Demonstração:

$F_1 | F_2 \Leftrightarrow \exists u_0, u_1, u_2, u_3 \in K$ não todos nulos tais que

$$u_3 F_2(X, Y) = (Y_0 F_x + Y_1 F_y + Y_2 F_z)(u_0 Y_0 + u_1 Y_1 + u_2 Y_2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_0 F_x - u_3 F_{xx} = 0 \\ u_1 F_y - u_3 F_{yy} = 0 \\ u_2 F_z - u_3 F_{zz} = 0 \\ u_1 F_x + u_0 F_y - u_3 2F_{xy} = 0 \\ u_2 F_x + u_0 F_z - u_3 2F_{xz} = 0 \\ u_2 F_y - u_1 F_z - u_3 2F_{yz} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{os menores de ordem menor ou} \\ \text{igual a 3 são todos nulos.} \end{array}$$

Daí,

$$\begin{vmatrix} F_x & 0 & -F_{xx} \\ 0 & F_y & -F_{yy} \\ F_y & F_x & -2F_{xy} \end{vmatrix} = (F_y)^2 F_{xx} + (F_x)^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} F_x & 0 & -F_{xx} \\ 0 & F_z & -F_{zz} \\ F_z & F_x & -2F_{xz} \end{vmatrix} = (F_z)^2 F_{xx} + (F_x)^2 F_{zz} - 2F_x F_z F_{xz} = 0 \text{ e}$$

$$\begin{vmatrix} F_y & 0 & -F_{yy} \\ 0 & F_z & -F_{zz} \\ F_z & F_y & -2F_{yz} \end{vmatrix} = (F_y)^2 F_{zz} + (F_z)^2 F_{yy} - 2F_y F_z F_{yz} = 0.$$

□

Teorema 2.2.1 *Seja $X : F = 0$ uma curva irredutível tal que $\partial F = n$. Se $p > 0$ e p não divide $(n - 1)$ então X é não clássica se, e somente se, F divide $H(F)$.*

Demonstração:

Segue do Lema 2.2.1

□

Observação 1: Uma curva $X : F = 0$ é clássica se F e $\Delta_{xy}(\Delta_{xz}$ ou $\Delta_{yz})$ não têm componentes em comum.

Observação 2: Seja $X : F = 0$ uma curva clássica, $P \in X$ é um ponto de inflexão se, e somente se, $\Delta_{xy}(P) = 0$, $\Delta_{xz}(P) = 0$, $\Delta_{yz}(P) = 0$.

Como X é clássica se, e somente se, $I(P, X \cap T_P X) = 2$ para $P \in X$ geral e isto equivale a dizer que $F_1(X, Y)$ não divide $F_2(X, Y)$ como polinômio em Y . Assim as observações seguem do Lema 2.2.2.

Teorema 2.2.2 *Toda curva clássica não singular de grau maior ou igual a três tem pelo menos um ponto de inflexão.*

Demonstração:

Suponhamos que $X : F = 0$ não tenha nenhum ponto de inflexão. Pela

Observação 2, $\Delta_{xy}(P) \neq 0$ ou $\Delta_{xz}(P) \neq 0$ ou $\Delta_{yz}(P) \neq 0$, para todo $P \in X$.
 Pelo Lema 2.2.1 temos que $X^2\Delta_{xy} \equiv Z^2\Delta_{yz} \pmod{F}$,
 $Y^2\Delta_{yz} \equiv X^2\Delta_{xz} \pmod{F}$ e $Y^2\Delta_{xy} \equiv Z^2\Delta_{zx} \pmod{F}$. Daí,

$$\begin{aligned} I(P, X^2\Delta_{xy} \cap F) &= I(P, Z^2\Delta_{yz} \cap F) \\ I(P, Y^2\Delta_{yz} \cap F) &= I(P, X^2\Delta_{xz} \cap F) \text{ e} \\ I(P, Y^2\Delta_{xy} \cap F) &= I(P, Z^2\Delta_{zx} \cap F). \end{aligned}$$

Assim,

$$I(P, X^2\Delta_{xy} \cap F) = 2I(P, X \cap F) + I(P, \Delta_{xy} \cap F) = 2I(P, Z \cap F) + I(P, \Delta_{yz} \cap F)$$

$$I(P, Y^2\Delta_{xy} \cap F) = 2I(P, Y \cap F) + I(P, \Delta_{xy} \cap F) = 2I(P, Z \cap F) + I(P, \Delta_{zx} \cap F).$$

Logo,

$$\begin{aligned} I(P, \Delta_{xy} \cap F) &\leq 2I(P, Z \cap F) + I(P, \Delta_{yz} \cap F) \text{ e} \\ I(P, \Delta_{xy} \cap F) &\leq 2I(P, Z \cap F) + I(P, \Delta_{zx} \cap F) \end{aligned}$$

Como $\Delta_{zx}(P) \neq 0$ ou $\Delta_{yz}(P) \neq 0$, para todo $P \in V(\Delta_{xy})$ temos que $I(P, \Delta_{xy} \cap F) \leq 2I(P, Z \cap F)$.

Sendo F não singular então F é irredutível. Daí F e Z não têm componente em comum, e então pelo Teorema de Bézout $\sum I(P, Z \cap F) = n$. Segue daí que,

$$\sum I(P, \Delta_{xy} \cap F) \leq 2n \quad (2.6)$$

Como F é clássica então F e Δ_{xy} não têm componente em comum, então pelo Teorema de Bézout

$$\sum I(P, \Delta_{xy} \cap F) = n\partial\Delta_{xy} \quad (2.7)$$

De (2.6) e (2.7) temos que: $n\partial\Delta_{xy} \leq 2n$. Como $\partial\Delta_{xy} = 3n - 4$ segue que $3n - 4 \leq 2$ e portanto $n \leq 2$. (Absurdo!)

□

Teorema 2.2.3 *Toda curva clássica de grau n tem no máximo $3n(n - 2)$ pontos de inflexão.*



Demonstração:

Como o número de pontos de inflexão é finito podemos supor por mudança de coordenadas que os pontos de inflexão são da forma $P = (x : y : z)$, com $x, y, z \neq 0$.

Denotando por $\sum_P$ a soma sobre todos os pontos $P = (x : y : z)$, com $z \neq 0$, e por PI o conjunto dos pontos de inflexão temos que :

$$\#PI \leq \sum_P' I(P, F \cap \Delta_{xy}) = \sum_P I(P, F \cap \Delta_{xy}) - \sum_{z=0} I(P, F \cap \Delta_{xy}) \quad (2.8)$$

Supondo $z = 0$, temos que $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Por simetria podemos supor que $x \neq 0$ e da identidade $X^2 \Delta_{xy} \equiv Z^2 \Delta_{zy} \pmod{F}$ segue que:

$$2I(P, F \cap X) + I(P, F \cap \Delta_{xy}) = 2I(P, F \cap Z) + I(P, F \cap \Delta_{zy})$$

Daí, $I(P, F \cap \Delta_{xy}) \geq 2I(P, F \cap Z)$ e por (2.8) concluímos que

$$\#PI \leq \sum_P I(P, F \cap \Delta_{xy}) - \sum_{z=0} I(P, F \cap Z) \leq n(3n - 4) - 2n = 3n(n - 2).$$

□

Proposição 2.2.2 *Seja $X : F = 0$ uma curva plana irreduzível com $\partial F \geq 2$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (a) X não é clássica.
- (b) $\Delta_{xy} = \Delta_{xz} = \Delta_{yz} = 0$ sobre X .
- (c) $\Delta_{xy} = 0$ ou $\Delta_{xz} = 0$ ou $\Delta_{yz} = 0$ sobre X .

Demonstração:

(a) $\Rightarrow$ (b) Se F é não clássica então $F|_{\Delta_{xy}}, F|_{\Delta_{xz}}, F|_{\Delta_{yz}}$. Logo existem G_1, G_2, G_3 tais que $\Delta_{xy}(P) = F(P)G_1(P) = 0$, $\Delta_{xz}(P) = F(P)G_2(P) = 0$ e $\Delta_{yz}(P) = F(P)G_3(P) = 0$, $\forall P \in X$.

Portanto $\Delta_{xy} = \Delta_{xz} = \Delta_{yz} = 0$ para todo $P \in V(F)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se $\Delta_{xy} = \Delta_{xz} = \Delta_{yz} = 0$ para todo $P \in V(F)$ pela Observação 1 temos que $F|_{\Delta_{xy}}, F|_{\Delta_{xz}}, F|_{\Delta_{yz}}$ e portanto F é não clássica.



(b) $\Rightarrow$ (c) Trivial

(c) $\Rightarrow$ (b) Suponha que $\Delta_{xy} = 0$ em X . Pelo Lema 2.2.1, temos que $X^2\Delta_{xy} \equiv Z^2\Delta_{zy} \pmod{F}$, ou seja, $F|(X^2\Delta_{xy} - Z^2\Delta_{zy})$. Logo existe G tal que $X^2\Delta_{xy} - Z^2\Delta_{zy} = FG$.

Como $F|\Delta_{xy}$, $\partial F \geq 2$ e F é irredutível, concluímos que $F|\Delta_{zy}$. Portanto $\Delta_{zy} = 0$ em X . Usando as demais relações do Lema 2.2.1, obtemos $\Delta_{xz} = 0$ em X .

□

Teorema 2.2.4 *Seja $X : F = 0$ uma curva plana não singular $\partial F = n$ e $p > 2$. $X : F = 0$ é não clássica se, e somente se, $F_{xy} = 0$, $F_{xz} = 0$, $F_{yz} = 0$, $D_x^{(2)}(F) = 0$, $D_y^{(2)}(F) = 0$ e $D_z^{(2)}(F) = 0$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Como X é não clássica segue da Proposição 2.2.2 que Δ_{zy} é múltiplo de F , isto é, existe $G \in K[X, Y, Z]$ tal que $\Delta_{zy} = GF$. Daí

$$(F_y)^2 F_{xx} + F_x(F_x F_{yy} - 2F_{xy} F_y) + GF = 0 \quad (2.9)$$

Seja $P \in V(F)$ e podemos supor $F_y(P) \neq 0$, pois F é não singular.

Afirmção: Se $F_{xx} \neq 0$ então $F_x \neq 0$.

Suponhamos $F_x = 0$, então por (2.9) temos que $F|(F_y)^2 F_{xx}$. Como $F_{xx} \neq 0$ segue que $F|F_y$, o que é um absurdo.

Pela afirmação se $F_{xx} \neq 0$ então $\partial F_{xx} = n - 2$, $\partial F_x = n - 1$. Daí, por (2.9) temos que: $2I(P, F_y \cap F) + I(P, F_{xx} \cap F) \geq I(P, F_x \cap F)$.

Como $F_y(P) \neq 0$ então $I(P, F_{xx} \cap F) \geq I(P, F_x \cap F)$ e pelo Teorema de Bézout segue que $(n - 2)n \geq (n - 1)n$. (Absurdo!)

Assim,

$$F_{xx} = 0 \text{ em } X. \quad (2.10)$$

Sendo $F_{xx} = 2D_x^{(2)}(F)$ temos que $D_x^{(2)}(F) = 0$.

Por um argumento análogo concluímos que

$$D_y^{(2)}(F) = 0 \text{ e } D_z^{(2)}(F) = 0. \quad (2.11)$$

De (2.9) e (2.10) segue que $2F_x F_y F_{xy} = GF$. Daí $F|F_{xy}$ e então $F_{xy} = 0$ em X . Analogamente por (2.11) $F_{xy} = F_{yz} = 0$ em X .

($\Leftarrow$) É imediato pela hipótese e pelas definições de Δ_{xy} , Δ_{xz} e Δ_{yz} .

□

Observação: Segue do Teorema 2.2.4 que: Toda curva não singular em característica zero é clássica.

De fato, seja $X : F = 0$ uma curva não singular e não clássica, então $\partial F > 1$. Pelo Teorema 2.2.4 $F_{xy} = 0$, $F_{xz} = 0$, $F_{yz} = 0$ em X . Logo, $F|F_{xy}$, $F|F_{xz}$, $F|F_{yz}$ e daí $F_{xy} = 0$, $F_{xz} = 0$, $F_{yz} = 0$. Portanto $\partial F = 1$. (Contra hipótese).

Teorema 2.2.5 (Pardini) *Suponha que $\text{car } K = p$. Se $X : F = 0$ é uma curva não singular não clássica de grau n , então p divide $n - 1$ e $F = XP_1(X^p, Y^p, Z^p) + YP_2(X^p, Y^p, Z^p) + ZP_3(X^p, Y^p, Z^p)$, para determinados P_1, P_2, P_3 polinômios homogêneos em $K[X, Y, Z]$.*

Ainda mais, se $p \neq 2$ vale a recíproca

Demonstração:

($\Rightarrow$) Pela relação de Euler e pelo Teorema 2.2.4 temos que:

$$0 = XF_{xx} + YF_{yx} + ZF_{zx} = (n-1)F_x \quad (2.12)$$

$$0 = XF_{xy} + YF_{yy} + ZF_{zy} = (n-1)F_y \quad (2.13)$$

$$0 = XF_{xz} + YF_{yz} + ZF_{zz} = (n-1)F_z \quad (2.14)$$

Como F é não singular podemos supor que $F_x \neq 0$ em X . Logo $(n-1) \equiv 0 \pmod{p}$ e portanto $p|(n-1)$.

Sendo F não clássica e não singular temos que por argumento análogo ao do Teorema 2.2.4 que:

$$D_x^{(2)}(F) = 0, \quad D_y^{(2)}(F) = 0 \text{ e } D_z^{(2)}(F) = 0 \quad \text{em } X. \quad (2.15)$$

$$\text{Daí, } F_{xy} = 0, \quad F_{xz} = 0, \quad F_{yz} = 0, \quad \text{em } X.$$

De (2.15) e (2.12) temos que $F_{xx} = 0$ em X , e portanto $F_{xx} = 0$.

Analogamente usando (2.15), (2.13) e (2.14) concluímos que $F_{yy} = 0$ e $F_{zz} = 0$. Como $\text{car } K = p$ existem P_1, P_2, P_3 polinômios homogêneos tais que $F_x = P_1(X^p, Y^p, Z^p)$, $F_y = P_2(X^p, Y^p, Z^p)$, $F_z = P_3(X^p, Y^p, Z^p)$. Portanto $F = XP_1(X^p, Y^p, Z^p) + YP_2(X^p, Y^p, Z^p) + ZP_3(X^p, Y^p, Z^p)$.

($\Leftarrow$) Se $F = XP_1(X^p, Y^p, Z^p) + YP_2(X^p, Y^p, Z^p) + ZP_3(X^p, Y^p, Z^p)$ temos claramente que todas derivadas de segunda ordem são nulas em X , pois $\text{car } K \neq 2$. □

Corolário 2.2.1 *Suponha que $\text{car } K = 2$. Uma curva $X : F = 0$ não singular é não clássica se, e somente se, F é da forma:*

$$F = XP_1(X^4, Y^4, Z^4) + YP_2(X^4, Y^4, Z^4) + ZP_3(X^4, Y^4, Z^4),$$

com P_i 's polinômios homogêneos em $K[X, Y, Z]$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Como F é não singular e não clássica pelo Corolário 2.2.5 temos que:

$$F = XQ_1(X^2, Y^2, Z^2) + YQ_2(X^2, Y^2, Z^2) + ZQ_3(X^2, Y^2, Z^2). \quad (2.16)$$

onde Q_1, Q_2, Q_3 são polinômios homogêneos.

Do Teorema 2.2.4 obtém-se:

$$0 = D_x^{(2)}(F) = XQ_{1x}(X^2, Y^2, Z^2) = X(Q_{1x}(X, Y, Z))^2.$$

Logo $Q_1(X, Y, Z) = P_1(X^2, Y^2, Z^2)$ e daí $Q_1(X^2, Y^2, Z^2) = P_1(X^4, Y^4, Z^4)$. Analogamente usando $D_y^{(2)}(F) = D_z^{(2)}(F) = 0$ conclui-se que $Q_2(X^2, Y^2, Z^2) = P_2(X^4, Y^4, Z^4)$ e $Q_3(X^2, Y^2, Z^2) = P_3(X^4, Y^4, Z^4)$. Substituindo Q_1, Q_2, Q_3 em (2.16) obtemos

$$F = XP_1(X^4, Y^4, Z^4) + YP_2(X^4, Y^4, Z^4) + ZP_3(X^4, Y^4, Z^4).$$

($\Leftarrow$) Se $F = XP_1(X^4, Y^4, Z^4) + YP_2(X^4, Y^4, Z^4) + ZP_3(X^4, Y^4, Z^4)$ temos claramente que as derivadas de segunda ordem de F são todas nulas. Portanto F é não clássica. □

Exemplo 2.2.1 A curva $y^n = f(x)$.

Seja F_q um corpo finito de q elementos com característica $p > 2$.

Seja $X : f(x) = y^n$, tal que p não divide n ,

$$f(x) = b \prod_{i=1}^r (x - \alpha_i)^{m_i} \in F_q[x],$$

onde f tem pelo menos uma raiz simples em F_q e $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ são raízes distintas de $f(x)$ em algum corpo algebricamente fechado K , contendo F_q .

Teorema 2.2.6 *Seja $X : f(x) = y^n$, $f(x) \in F_q[x]$ como acima e seja K um corpo algebricamente fechado, contendo F_q de característica $p \geq 2$. Então X não é clássica se, e somente se, $n \equiv 1 \pmod{p}$ e existem polinômios $g(x)$ e $h(x)$ em $K[x]$, com $\partial g(x) \geq \partial h(x)$ tais que $f(x) = g(x)^p + xh(x)^p$.*

Demonstração:

Como $p \nmid n$ temos que x é uma variável separante.

A não classicalidade de X é equivalente a $D_x^{(2)}y = 0$. Isto se deve ao fato

que, $\det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & D_x y \\ 0 & 0 & D_x^2 y \end{pmatrix} = D_x^2 y$. Diferenciando duas vezes com respeito a

variável x a equação $f(x) = y^n$ e usando $D_x^{(1)}.D_x^{(1)} = 2D_x^{(2)}$ temos que:

$$\frac{(n-1)(f'(x))^2}{nf(x)} + 2ny^{n-1}D_x^{(2)}y = f''(x)$$

Daí, $D_x^{(2)}y = 0$ se, e somente se, $n \equiv 1 \pmod{p}$ e $f''(x) = 0$. Escrevendo $f(x) = \sum a_i x^i$ então a condição $f''(x) = 0$ é equivalente a condição $a_i = 0$ se $i \not\equiv 0 \pmod{p}$ e $a_i \not\equiv 1 \pmod{p}$. Assim $f(x)$ é da forma $g(x)^p + xh(x)^p$, com $\partial g(x) \geq \partial h(x)$ pois p não divide n . Portanto temos demonstrado o requerido.

□

Exemplo 2.2.2 *Cúbica Cuspidal.*

Estudaremos a classicalidade da cúbica cuspidal a menos da equivalência projetiva.

Proposição 2.2.3 *Seja X uma cúbica cuspidal definida sobre um corpo de característica p .*

(1) Se $p \neq 3$ então X é não clássica se, e somente se, $p = 2$

(2) Se $p = 3$ e X é projetivamente equivalente à $X_1^3 - X_0X_2^2 = 0$ então X é não clássica.

Se $p = 3$ e X é projetivamente equivalente à $X_1^3 - X_0X_2^2 + X_1^2X_2 = 0$ então X é clássica.

Demonstração:

Um modelo não singular de uma cúbica cuspidal é $\mathbb{P}^1$, então X admite uma normalização $\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$. Podemos assumir que $\pi(0)$ é a cúspide e então

$$\pi(t) = (1 + at : t^2 : t^3). \quad (2.17)$$

Se $p \neq 3$ então,

$$X_1^3 - X_0X_2^2 + aX_1^2X_2 = \left(X_1 + \frac{a}{3}X_2\right)^3 - \left(\frac{a^2}{3}X_1 + \frac{a^3}{27}X_2 + X_0\right)X_2^2.$$

Concluimos que X é projetivamente equivalente à $Y_1^3 - Y_0Y_2^2 = 0$. Assim a equação de X é dada por:

$$x^3 - y^2 = 0.$$

Sendo $D_x^{(2)}y = 0$ se, e somente se, $p = 2$. Segue que, X é não clássica se, e somente se, $p = 2$.

Se $p = 3$ então,

$$X_1^3 - X_0X_2^2 + aX_1^2X_2 = X_1^3 - \left(\frac{1}{a^2}X_0\right)(aX_2)^2 + X_1^2(aX_2)$$

por mudança de coordenadas concluimos que X é projetivamente equivalente à:

$$Y_1^3 - Y_0Y_2^2 + Y_1^2Y_2 = 0$$

Por (2.17) temos que $\pi(t) = (1 + at : t^2 : t^3)$ e então:

$$\begin{vmatrix} D_t^{(0)}(1+at) & D_t^{(0)}t^2 & D_t^{(0)}t^3 \\ D_t^{(1)}(1+at) & D_t^{(1)}t^2 & D_t^{(1)}t^3 \\ D_t^{(2)}(1+at) & D_t^{(2)}t^2 & D_t^{(2)}t^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+at & t^2 & t^3 \\ a & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = at^3$$

onde, $D_t^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$ é a derivada de Hasse com respeito ao parâmetro t .
Então, $a = 0$ se, e somente se, X é não clássica. Portanto se $a \neq 0$ então X é clássica e X é projetivamente equivalente à uma curva

$$X_1^3 - X_0X_2^2 + X_1^2X_2 = 0.$$

□

Exemplo 2.2.3 Seja X uma curva dada por $f(x, y) = z_0^p + z_1^p x + z_2^p x^2 + z_3^p y + z_4^p xy + z_5^p y^2$ com $z_0, z_1, \dots, z_5 \in K[x, y]$ e $z_0 = \frac{z_1^2 z_5 + z_2 z_3^2 - z_1 z_3 z_4}{4z_2 z_5 - z_4^2}$.

Então X é não clássica pois temos que $H(f) = 2(4z_2 z_5 - z_4^2)f$.

Capítulo 3

Curvas Reflexivas e Não Reflexivas

3.1 Dualidade

Seja $X : F = 0$ uma curva irredutível. Considere a seguinte aplicação:

$$\varphi : X \longrightarrow (\mathbb{P}_K^2)^*$$

$$P \longmapsto (F_x(P) : F_y(P) : F_z(P))$$

A curva $X^* = \overline{\varphi(X)}$, o fecho de Zariski de $\varphi(X)$ em $(\mathbb{P}_K^2)^*$, é chamado de dual da curva X .

Seja $T : \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ uma mudança de coordenadas dada por

$$T(X, Y, Z) = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Defina $T^* : (\mathbb{P}_K^2)^* \rightarrow (\mathbb{P}_K^2)^*$, tal que $T^*(X, Y, Z) = A^* \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ onde

$$A^* = (A^t)^{-1}.$$

Têm-se que:

(1) Se L é uma subvariedade linear de $\mathbb{P}(V)$ onde V é um K -espaço vetorial

define-se:

$$L' = \{g \in \mathbb{P}(V)^* \text{ tal que } g|_L = 0\}$$

(2) Se $g \in L'$ então $T^*(g) = h$ se, e somente se, $h|_{T(L)} = 0$.

Lema 3.1.1 *O diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \text{reg}(F^T) & \xrightarrow{T} & \text{reg}(F) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ (\mathbb{P}_K^2)^* & \xrightarrow{T^*} & (\mathbb{P}_K^2)^* \end{array}$$

Demonstração:

Suponha que $T(X, Y, Z) = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ onde $A = (a_{ij})$ $i, j = 0, 1, 2$.

Pela regra da cadeia tem-se que: $\begin{pmatrix} (F^T)_x \\ (F^T)_y \\ (F^T)_z \end{pmatrix} = (A^t) \begin{pmatrix} (F_x)^T \\ (F_y)^T \\ (F_z)^T \end{pmatrix}$.

Logo tem-se a relação $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = (A^t)^{-1} \begin{pmatrix} (F^T)_x \\ (F^T)_y \\ (F^T)_z \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} (F^T)_x \\ (F^T)_y \\ (F^T)_z \end{pmatrix}$, da qual segue o lema. □

Lema 3.1.2 *Sejam $T : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(V)$ uma mudança de coordenadas e L uma subvariedade linear de $\mathbb{P}(V)$, tem-se que $T^*(L') = (T(L))'$.*

Demonstração:

$h \in T^*(L') \Leftrightarrow \exists g \in L'$ tal que $h = T^*(g)$, com $g|_L = 0 \Leftrightarrow h = T^*(g)$ com $g \circ T^{-1}|_{T(L)} = 0 \Leftrightarrow h|_{T(L)} = g \circ T^{-1}|_{T(L)} = 0 \Leftrightarrow h \in (T(L))'$. □

Teorema 3.1.1 *Seja $X : F = 0$ uma cônica não singular. Se $\text{car } K \neq 2$ então $\varphi(V(F))$ é o traço de uma cônica não singular $X^* : F^* = 0$. Se $\text{car } K = 2$ então toda reta tangente a $X : F = 0$ passa por um ponto fixo Q e $\varphi(V(F)) = Q'$.*

Demonstração:

Seja $T : \mathbb{P}_K^2 \rightarrow \mathbb{P}_K^2$ uma mudança de coordenadas tal que $F^T = X^2 - YZ$.

Neste caso

$$\varphi : V(F^T) \longrightarrow (\mathbb{P}_K^2)^*$$

$$(X : Y : Z) \longmapsto (2X : -Z : -Y)$$

Mostremos inicialmente que $\varphi(V(F^T)) = V((F^T)^*)$.

Se $(Y_0 : Y_1 : Y_2)$ representa as coordenadas homogêneas de $(\mathbb{P}_K^2)^*$ então as coordenadas dos pontos de $\varphi(V(F^T))$ satisfazem a equação $(F^T)^* = Y_0^2 - 4Y_1Y_2 = 0$.

Logo, $\varphi(V(F^T)) \subset V((F^T)^*)$.

Reciprocamente, dado $(R_0 : R_1 : R_2) \in V((F^T)^*)$.

$$\text{Seja } P \in V(F^T) \text{ tal que } P = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}R_0 : -R_2 : -R_1\right) & \text{se } \text{car } K \neq 2 \\ \left(\sqrt{R_2R_1} : R_2 : R_1\right) & \text{se } \text{car } K = 2 \end{cases}$$

Então, $\varphi(P) = R$ e assim $V((F^T)^*) \subset \varphi(V(F^T))$.

Portanto a afirmação se verifica.

Segue então que

$$\varphi(V(F)) = T^*(\varphi(V(F^T))) = T^*(V(F^T)^*) = V((F^T)^*)^{T^{*-1}} \quad (3.1)$$

Se $\text{car } K = 2$, mostremos que $\varphi(V(F)) = (T(R))'$.

Dado $g \in \varphi(V(F))$, de (3.1) temos que $g \in V((F^T)^*)^{T^{*-1}}$ e daí $((F^T)^*)^{T^{*-1}}(g) = 0$.

Pondo $T^{*-1}(g) = (y_0 : y_1 : y_2)$ temos que $(F^T)^*(y_0 : y_1 : y_2) = 0$ se, e somente se, $y_0 = 0$.

Logo, $T^{*-1}(g) = (0 : y_1 : y_2)$ se, e somente se,

$$g = T^*(0 : Y_1 : Y_2) = T^*(R'). \quad (3.2)$$

Pelo Lema 3.1.2 temos que $T^*(R') = (T(R))'$ e portanto de (3.2) concluímos que $g = (T(R))'$. Assim $\varphi(V(F)) = (T(R))'$.

Se $\text{car } K \neq 2$. Pondo $F^* = ((F^T)^*)^{T^{*-1}}$ tem-se que $X^* : F^* = 0$ é uma cônica não singular e $\varphi(V(F)) = V(F^*)$.

□

Seja $X : F = 0$ uma curva plana irredutível de grau $d \geq 2$. Suponha que as únicas singularidades de X sejam nós e cúspides, então

$$\begin{aligned} d(d-1) &= \hat{d} + 2\eta + 3\kappa \\ 3d(d-1) &= i + 6\eta + 8\kappa \end{aligned}$$

onde:

- η : número de nós
- κ : número de cúspides
- $\hat{d}$: número de retas tangentes a X passando por $P \notin X$
- i : número de retas que passam por pontos de inflexão

Seja $\varphi : X \longrightarrow X^*$ o morfismo dual tal que $X^* : F^* = 0$.

Se φ é separável temos as seguintes correspondências:

$$\begin{array}{ll} \text{(tangentes à } F) & \longleftrightarrow \text{(ponto de } F^*) \\ \text{(tangentes inflexionais à } F) & \longleftrightarrow \text{(cúspides de } F^*) \\ \text{(bitangentes à } F) & \longleftrightarrow \text{(pontos duplos de } F^*) \end{array}$$

3.1.1 Fórmula de Plücker Generalizada

Se $X : F = 0$ é uma curva não singular de grau d e $\deg X^* = d^*$ então:

$$d(d-1) = d^* \cdot \deg \varphi$$

A prova dessa fórmula exige um estudo mais profundo de geometria algébrica. Daremos a seguir argumentos que justifiquem o resultado apresentado.

Seja L uma reta genérica em $(\mathbb{P}_K^2)^*$ então L intersecta X^* em d^* pontos distintos.

Como $\deg \varphi$ é o número de vezes que X recobre X^* então $\deg (f^{-1}(X^* \cdot L)) = \deg \varphi \cdot d^*$.

Por outro lado, à reta genérica L corresponde um ponto $P \notin X$ e X sendo não singular, o número de retas tangentes a X passando por P é $\hat{d} = d(d-1)$. Essas retas tangentes correspondem aos pontos de $X^* \cap L$.

Assim, $d(d-1) = \deg \varphi \cdot d^*$.



3.1.2 Variedade Conormal

Seja X uma curva plana irredutível e não degenerada. Define-se a conormal de X como sendo

$$C(X) = \overline{\{(P, T_P X) \text{ tal que } P \in \text{reg}(X)\}}.$$

Denote por $\pi : C(X) \rightarrow X$ e $\pi' : C(X) \rightarrow X^*$ as projeções sobre X e X^* respectivamente. Tem-se que π é birracional e então a aplicação dual pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \varphi = \pi' \circ \pi^{-1} : X &\rightarrow X^* \\ P &\mapsto T_P X \end{aligned}$$

Afirmção 1: $C(X)$ é irredutível e $\dim C(X) = 1$.

De fato, sendo π birracional temos que $\dim C(X) = 1$. Como cada fibra $\pi^{-1}(P)$ tem a mesma dimensão então Teorema 1.2.2 temos que $C(X)$ é irredutível.

Afirmção 2: O dual X^* é uma curva.

Supondo que $\dim X^* = 0$ então $\dim((\pi')^{-1})(T_P X) = 1, \forall P \in \text{reg}(X)$ e daí $T_P X \supset \pi((\pi')^{-1}(T_P X)) = X$. Portanto $X = T_P X$, o que é contrária a hipótese.

Afirmção 3: Se X é uma curva não singular então a Fórmula de Plücker pode ser reescrita como:

$$\deg X^* \cdot \deg \pi' = 2g - 2 + 2 \deg X,$$

onde g é o gênero da curva.

De fato, temos que $2g - 2 = d(d - 3)$ onde $d = \deg X$.

Pela Fórmula de Plücker temos que $\deg X^* \cdot \deg \varphi = d(d - 1)$. Como $\varphi \circ \pi = \pi'$ e π é birracional então $\deg \varphi = \deg \pi'$. Daí segue o requerido.

3.2 Reflexibilidade e Classicalidade

Definição 3.2.1 Sejam $\varphi : X \rightarrow X^*$ e $\varphi' : X^* \rightarrow X^{**}$ aplicações duais. Dizemos que X é reflexiva se:

(a) $X^{**} = X$



(b) $\varphi' \circ \varphi = id_X$

Neste caso, temos que X é birracionalmente equivalente a X^* .

Escolha um sistema de coordenadas X_0, X_1, X_2 em $\mathbb{P}_K^2$ e Y_0, Y_1, Y_2 em $(\mathbb{P}_K^2)^*$.

Proposição 3.2.1 Se $K(X) = K(x, y)$ então $K(X^*) = K(y', y - xy')$, para algum $y' \in K(X)$.

Demonstração:

Seja $P = (1 : x : y) \in \text{reg}(X)$ e suponha $F_2(P) \neq 0$. Suponha que as coordenadas afins de X sejam dadas por $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$ numa vizinhança de P e $x^* = \frac{y_0}{y_2}$, $y^* = \frac{y_1}{y_2}$ numa vizinhança de $\varphi(P)$. Pela Fórmula de Euler temos que: $F_0(1 : x : y) + xF_1(1 : x : y) + yF_2(1 : x : y) = 0$ e então,

$$\frac{F_0(1 : x : y)}{F_2(1 : x : y)} + x \frac{F_1(1 : x : y)}{F_2(1 : x : y)} + y \frac{F_2(1 : x : y)}{F_2(1 : x : y)} = 0,$$

e $F_1(1 : x : y) + F_2(1 : x : y)y' = 0$. Assim,

$$\frac{F_0(1 : x : y)}{F_2(1 : x : y)} = xy' - y \quad \text{onde} \quad y' = -\frac{F_1(1 : x : y)}{F_2(1 : x : y)}.$$

Logo,

$$\varphi(1 : x : y) = (F_0(1 : x : y) : F_1(1 : x : y) : F_2(1 : x : y)) = (xy' - y' : -y' : 1).$$

□

Sejam $f : X \rightarrow X'$ tal que $f = (f_0 : f_1 : f_2)$ um morfismo dominante, então f induz um K -homomorfismo $f^* : K(X') \rightarrow K(X)$ injetor e então pelo Teorema de Normalização de Noether $K(X)|K(X')$ é uma extensão finita e portanto algébrica.

O K -homomorfismo f^* induz um homomorfismo entre os anéis locais: $O_{X',Q} \rightarrow O_{X,P}$ para todo $P \in \text{reg}(X)$ e $f(P) = Q$.

O índice de ramificação de f em P é dado por:

$$e(P) = -\min\{\text{ord}_P(f_0), \text{ord}_P(f_1), \text{ord}_P(f_2)\}.$$

Sendo φ um morfismo dominante dado por $\varphi(1 : x : y) = (xy' - y : -y' : 1)$ segue que $e(P) = \min\{\text{ord}_P(y), \text{ord}_P(xy' - y)\}$.

Os graus de separabilidade e inseparabilidade de φ serão respectivamente denotados por:

$$s(X) = [K(X) : K(X^*)]_s \quad \text{e} \quad i(X) = [K(X) : K(X^*)]_i.$$

Proposição 3.2.2 *Sejam X uma curva plana irreduzível de grau maior que 1 sobre K e $\varphi : X \rightarrow X^*$ a aplicação dual.*

(a) *Se $p = 0$ então $\epsilon_2 = 2$ e $s(X) = 1$.*

(b) *Se $p > 2$ então φ é inseparável se, e somente se, $\epsilon_2 > 2$. Neste caso, $i(X) = \epsilon_2$.*

(c) *Se $p = 2$ então φ é inseparável e $i(X) = \epsilon_2$*

Demonstração:

Sejam $P = (a_0 : b_0 : 1) \in \text{reg}(X)$ e t um parâmetro local sobre X em P . Uma parametrização de X centrada em P é dada por:

$$x = a_0 + t \quad \text{e} \quad y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \text{ onde } b_i = D_x^{(i)} y(P).$$

Suponha que $P = (0 : 0 : 1)$ e que a reta tangente à X em P seja dada por $x = 0$, isto é, $y'(P) = 0$.

Podemos então escrever $y = cx^{\epsilon_2} + c'x^{\epsilon_2+1} + \dots$, $c \neq 0$ e assim,

$$y' = \epsilon_2 c x^{\epsilon_2-1} + (\epsilon_2 + 1) c' x^{\epsilon_2} + \dots \quad (3.3)$$

$$y - xy' = (1 - \epsilon_2) c x^{\epsilon_2} - \epsilon_2 c' x^{\epsilon_2+1} + \dots \quad (3.4)$$

Se $p = 0$ então $b_2 \neq 0$ em K e daí, $I(P, X \cap T_P X) = 2$. Portanto $\epsilon_2 = 2$. Sendo $K(X^*) = K(y', y - xy')$ então de (3.3) e (3.4) concluímos que $s(X) = 1$.

Suponha que $p \geq 2$

Se $\epsilon_2 > 2$ então pela Proposição 2.1.1, ϵ_2 é uma potência de p . Sendo $\text{ord}_P y' \geq \text{ord}_P (y - xy') = \epsilon_2$ temos que $i(X) = \epsilon_2$.



Se $\epsilon_2 = 2$ e $p > 2$ então $\text{ord}_P y' = 1$ Daí $i(X) = 1$, isto é, φ é separável.

Se $\epsilon_2 = 2$ e $p = 2$ então $\text{ord}_P y' \geq \text{ord}_P (y - xy') = 2$. Assim $i(X) = 2 = \epsilon_2$.

□

Teorema 3.2.1 *Seja X uma curva irredutível em $\mathbb{P}_K^2$, com $\text{car} K > 2$. São equivalentes as afirmações:*

(a) φ é separável.

(b) $\epsilon_2 = 2$.

(c) X é reflexiva.

Demonstração:

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Segue da Proposição 3.2.2.

Mostremos que (a) $\Leftrightarrow$ (c)

(c) $\Rightarrow$ (a)

Se X é reflexiva então $X^{**} = X$ e $\varphi' \circ \varphi = \text{id}_X$. Logo φ é birracional e assim $i(X) = 1$ e $s(X) = 1$. Portanto φ é separável.

(a) $\Rightarrow$ (c)

Sendo $\varphi(x : y : 1) = (-y' : 1 : xy' - y)$ e φ é separável temos que $\epsilon_2 = 2$ e portanto por (3.3) seque que $y''(P) \neq 0, \forall P \in U, U$ aberto em $\text{reg}(X)$.

Se $\varphi(P) = Q$ com $P \in W$, temos que:

$$T_Q X^* = \langle z(P), D_x z(P) \rangle$$

onde $z(P) = (-y'(P) : 1 : x(P)y'(P) - y(P))$ e $D_x z(P) = (-y''(P) : 0 : x(P)y''(P)) = (-1 : 0 : x(P))$.

Mostremos que $(T_Q X^*)' = \varphi^{-1}(\varphi(P))$.

Sejam $(Z(P))' : -y'(P)X_0 + X_1 + (x(P)y'(P) - y(P))X_2 = 0$ e $(D_x Z(P))' : -X_0 + x(P)X_2 = 0$ as retas correspondentes aos pontos $z(P)$ e $(D_x Z(P))'$ respectivamente.

Mostremos que $P \in (Z(P))'$ e $P \in (D_x Z(P))'$. De fato,

$$\begin{aligned} -y'(P)x(P) + y(P) + (x(P)y'(P) - y(P)).1 &= 0 \\ -x(P) + x(P).1 &= 0 \end{aligned}$$

Seja $P' \in \varphi^{-1}(\varphi(P))$ então $\varphi(P) = \varphi(P')$. Logo $T_P X = T_{P'} X$ e portanto $(Z(P))' = (Z(P'))'$ e $(D_x Z(P))' = (D_x Z(P'))'$.

Assim $P' \in (Z(P))'$ e $P' \in (D_x Z(P))'$, donde concluímos que $\varphi^{-1}(\varphi(P)) \subset (T_Q X^*)'$.

Como $\dim(T_Q X^*)' = 0$ e $(T_Q X^*)'$ é irreduzível então $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P\}$ e portanto φ é bijetora.

Por outro lado, por argumento análogo temos que $(T_P X)' = \{Q\}$, $\forall Q \in T_P X$. Sendo $\{P\} = (T_Q X^*)'$ e $\{Q\} = (T_P X)'$ para todo $Q \in X^*$ tal que $\varphi(P) = Q$ temos que $(\varphi' \circ \varphi)(P) = \varphi'(T_P X)' = P$ e daí $X^{**} = X$.

□

Proposição 3.2.3 *Seja $\text{car } K = p$, $p \neq 2$ e seja $\varphi : X \longrightarrow X^*$ a aplicação dual. Então:*

(a) *φ é inseparável então X tem infinitos pontos de inflexão. Neste caso, para todo ponto $P \in \text{reg}(X)$ tem-se que $I(P, T_P X \cap X) \geq p$.*

(b) *φ é separável se, e somente se, X tem um número finito de bitangentes, isto é, há finitas tangentes a X em dois pontos.*

Demonstração:

(a) De (3.3) e (3.4), temos que P é um ponto de ramificação de X se, e somente se, $b_2 = 0$, isto é, $I(P, T_P X \cap X) > 2$.

Logo, P é ponto de ramificação se, e somente se, P é um ponto de inflexão. Como toda aplicação separável tem um número finito de pontos de ramificação então pela afirmação acima concluímos que φ é separável se, e somente se, X tem um número finito de pontos de inflexão.

Agora, pela Proposição 3.2.2 temos que se φ é inseparável então p divide o índice de ramificação de φ e portanto $b_2 = \dots = b_{p-1} = 0$, para todo $P \in \text{reg}(X)$

Logo, $I(P, T_P X \cap X) \geq p$.

(b) Se φ é separável temos pela Fórmula de Plücker que as bitangentes correspondem aos pontos duplos que são em número finito. Assim as bitangentes correspondem às singularidades de X^* e portanto são em número finito.

□

Proposição 3.2.4 *Seja $X : F = 0$ uma curva em $\mathbb{P}_K^2$ tal que $\partial F = n$. Suponha car $K = p \neq 2$ para todo $P \in \text{reg}(X)$, defina o hessiano:*

$$H_P = \sum F_{ij}(P)F_iF_j$$

e a cônica Q_P dada por:

$$Q_P : \sum_{i,j=0}^2 F_{ij}(P)X_iX_j = 0.$$

Então P é um ponto de inflexão se, e somente se, T_PX é uma componente de Q_P . Mais ainda,

(a) Se $p = 0$ ou p não dividir $(n - 1)$ então:

P é um ponto de inflexão se, e somente se, $H_P = 0$ sobre T_PX .

(b) Se p divide $(n - 1)$ então P é um ponto singular em Q_P .

Demonstração:

Seja $b = (b_0 : b_1 : b_2) \in \mathbb{P}_K^2$. Como car $K \neq 2$ pela Fórmula de Taylor temos que:

$$F(P + tb) = F(P) + t \sum_{i=0}^2 F_i(P)b_i + \frac{t^2}{2} \sum_{i,j=0}^2 F_{ij}(P)b_ib_j + t^3g(b, t, P)$$

Se $b \in T_PX$ então

$$F(P + tb) = \frac{t^2}{2} \sum_{i,j=0}^2 F_{ij}(P)b_ib_j + t^3g(b, t, P).$$

Assim, P é um ponto de inflexão se, e somente se, $\sum_{i,j=0}^2 F_{ij}(P)b_ib_j = 0$, $\forall b \in T_PX$ se, e somente se,

$$T_PX \text{ é uma componente de } Q_P. \quad (3.5)$$

Sendo,

$$\frac{\partial Q(P)}{\partial X_i} = \sum_{k=0}^2 F_{ki}(P)x_k = (n - 1)F_i(P) \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.6)$$

temos então pela Fórmula de Euler para Q_P que:

$$\partial Q_P(x) = \sum_{i=0}^2 \frac{\partial Q_P}{\partial X_i}(x) x_i \stackrel{(3.6)}{=} (n-1) \sum_{i=0}^2 F_i(x) x_i \quad (3.7)$$

(a) Como $p \neq 2$ é tal que $p = 0$ ou p não divide $(n-1)$ concluímos de (3.6) que se $P \in \text{reg}(X)$, então P é um ponto regular de Q_P e $T_P(X) = T_P(Q_P)$.

Temos de (3.5) que,

$H_P = 0$ sobre $T_P X \Leftrightarrow H_P(x) = 0, \forall x \in T_P X \Leftrightarrow Q_P(x) = 0, \forall x \in T_P X \Leftrightarrow P$ é um ponto de inflexão.

(b) Por (3.6) $\frac{\partial Q_P}{\partial X_i}(P) = (n-1)F_i(P), i = 0, 1, 2$.

Como $p|(n-1)$ então $\frac{\partial Q_P}{\partial X_i}(P) = 0, i = 0, 1, 2$. Logo P é um ponto singular de Q_P .

□

Teorema 3.2.2 *Seja $X : F = 0$ uma curva não singular em $\mathbb{P}_K^2$, $\text{car} K = p > 2$, com infinitos pontos de inflexão então*

$$F_{ij} = 0 \quad i, j = 0, 1, 2.$$

Demonstração:

Inicialmente mostraremos que $F_{ii} = 0, i = 0, 1, 2$. Suponha que $F_{11} \neq 0$.

Como o morfismo dual φ pode ser escrito como a composição de um morfismo puramente inseparável de grau p^α e de um morfismo separável, então $I(P, F \cap F_i) \geq p^\alpha, \forall P \in F \cap F_i, i = 0, 1, 2$. Assim $F.F_i = \sum r_P P$ com $r_P \geq p^\alpha$.

Seja $D_i = \sum m_P P$ tal que $D_i = p^{-\alpha}(F.F_i)$. Podemos escolher as coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}_K^2$ de modo que os pontos $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$ não estejam em X . Seja $P \in X$ tal que $P = (1 : a : b)$.

Como X é não singular podemos supor $F_2(P) \neq 0$ e tomar as coordenadas afins $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$ e $t = x - a$ como um parâmetro local de X em P .

No anel local $O_{X,P}$ temos que $F_1(1 : x : y) = at^{m_P}$ com $a \in O_{X,P}$. Isto significa que existe um aberto V contendo P e existe $b \in K[V]$ tal que:

$$F_1 = at^{m_P} + bF \quad \text{em } K[V] \quad (3.8)$$

Derivando (3.8) com respeito à variável t temos que:

$$F_{11} = \left(\frac{\partial a}{\partial t} + ba \right) t^{m_P} \quad \text{em } O_{X,P} \quad (3.9)$$

Como $F_{11} \neq 0$ em X , podemos definir o divisor $D_{11} = F.F_{11} = \sum n_P P$ e então por (3.9) temos que $m_P \leq n_P, \forall P \in V$ tal que $F_1(P) = 0$.

Logo $D_{11} \geq D_1$, e isto não é possível pois $\deg D_{11} = n(n-2)$ enquanto que $\deg D_1 = n(n-1)$. Logo $F_{11} = 0$. Analogamente demonstra-se que $F_{00} = F_{22} = 0$.

Mostremos agora que $F_{ij} = 0$, para $i \neq j$.

Pela Proposição 3.2.4 temos que um ponto $P \in X$ é de inflexão se, e somente se, $T_P X$ é uma componente da cônica $Q_P : \sum_{i,j=0}^2 F_{ij}(P) X_i X_j = 0$. Assim, existem $b_0(P), b_1(P), b_2(P) \in K$ tais que:

$$\sum_{i,j=0}^2 F_{ij}(P) X_i X_j = \left(\sum_{i=0}^2 b_i(P) X_i \right) \left(\sum_{j=0}^2 F_j(P) X_j \right) = 0. \quad (3.10)$$

Da igualdade (3.10) segue que $0 = F_{ii}(P) = b_i F_i(P), i = 0, 1, 2$.

Como X é não singular temos que $F_1(P) = 0$ para um número finito de P 's e então $b_i = 0$ sobre X para $i = 0, 1, 2$.

Temos ainda de (3.10) que $2F_{ij} = b_i F_j + b_j F_i, i, j = 0, 1, 2$. Sendo $b_i = b_j = 0$ sobre X e $p > 2$ concluímos que $F_{ij} = 0$ sobre X e portanto $F_{ij} = 0$.

□

Corolário 3.2.1 *Seja $\text{car } K = p, p \geq 3$. Se X é uma curva não singular com infinitos pontos de inflexão então p divide $(n-1)$.*

Demonstração:

Pela Fórmula de Euler temos que:

$$\sum_{j=0}^2 F_{ij}(P) x_j = (n-1) F_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Do Teorema 3.2.2 segue que $F_{ij} = 0$, $i, j = 0, 1, 2$ e como X é não singular então p divide $(n - 1)$. □

Corolário 3.2.2 *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 3.2.2 tem-se que se $X : F = 0$ admite infinitos pontos de inflexão então:*

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0 a(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_1 b(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_2 c(x_0^p, x_1^p, x_2^p)$$

onde a , b e c são polinômios homogêneos em $K[x_0, x_1, x_2]$.

Demonstração:

Segue imediatamente do Teorema 3.2.2 □

Corolário 3.2.3 *O espaço das curvas de grau $rp + 1$ com infinitos pontos de inflexão é parametrizado por $\mathbb{P}^N$, onde $N = \frac{3(r+2)(r+1)}{2} - 1$.*

Demonstração:

Considere $V = \{a \in K[X_0, X_1, X_2] \text{ polinômios homogêneos de grau } r\}$ então $\dim V = \frac{(r+1)(r+2)}{2}$.

Pelo Corolário 3.2.2 temos que

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0 a(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_1 b(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_2 c(x_0^p, x_1^p, x_2^p).$$

Como $\partial F = rp + 1$ temos que $a, b, c \in V$, e portanto essas curvas correspondem aos pontos de $\mathbb{P}^N$, onde $N = \frac{3(r+2)(r+1)}{2} - 1$. □

3.3 Curvas de grau $dp + 1$ com infinitos pontos de inflexão

Inicialmente investigaremos as curvas de grau $p + 1$.

Proposição 3.3.1 *Seja X uma curva plana não singular de grau $p + 1$ definida sobre um corpo K , car $K = p \geq 3$.*

(a) *Se X tem infinitos pontos de inflexão então X^* é uma curva não singular de grau $p + 1$.*

(b) *Se X tem finitos pontos de inflexão então X^* tem grau $p(p + 1)$.*

Demonstração:

Como X é não singular e $\deg X = p + 1$ então pela Fórmula de Plücker generalizada temos que:

$$p(p + 1) = \deg X^* \cdot \deg \varphi. \quad (3.11)$$

(a) Se X tem infinitos pontos de inflexão então pela Proposição 3.2.3 temos que φ é inseparável e $I(P, T_P X \cap X) \geq p$. Sendo $\deg X = p + 1$ segue que X não tem tangente múltipla donde se conclui que $T_P X$ intersecta X em um ponto $P' \neq P$ com $I(P', T_P X \cap X) = 1$.

Podemos então decompor φ em dois morfismos $\varphi_1 : X \rightarrow X^*$ e $\varphi_2 : X \rightarrow X^*$ tais que φ_2 é puramente inseparável e φ_1 é birracional.

Assim $\deg \varphi = \deg \varphi_1 \cdot \deg \varphi_2 = p$ e daí por (3.11) temos que $\deg X^* = p + 1$.

Pelo Lema 1.1.3, $g(X^*) = g(X) = \frac{p(p+1)}{2}$ e então X^* é não singular.

(b) Se X tem finitos pontos de inflexão pela Proposição 3.2.3 φ é separável e localmente injetiva. Logo, φ birracional e assim por (3.11) $\deg X^* = p(p + 1)$.

□

Observação: Seja X uma curva não singular de grau $p + 1$ com infinitos pontos de inflexão. Temos que $T_P X \cap X = \{P\}$ se P é um ponto de Weierstrass e $T_P X \cap X = \{P, P'\}$ caso contrário.

Seja $h : X \rightarrow X$ o morfismo definido por:

$$\begin{aligned} h(P) &= P && \text{se } P \text{ é um ponto de Weierstrass} \\ h(P) &= P' && \text{caso contrário} \end{aligned}$$

Proposição 3.3.2 *Seja X uma curva não singular de grau $p + 1$ com infinitos pontos de inflexão definida sobre um corpo K , car $K = p \geq 3$. Seja*

$\varphi : X \longrightarrow X^*$ e $\varphi' : X^* \longrightarrow X^{**}$ os morfismos duais. Então X^* tem infinitos pontos de inflexão e $X = X^{**}$, além disso $\varphi' \circ \varphi = h$ onde h é o morfismo definido acima.

Demonstração:

Seja $X : f = 0$ a equação afim de X e seja (x, y) as coordenadas afins de X .

Temos que $T_P X : f_1(P)(x - a) + f_2(P)(y - b) = 0$ onde $P = (a, b) \in X$.

Supondo $f_2(P) \neq 0$ temos que:

$$y - b = -\frac{f_1(P)}{f_2(P)}(x - a).$$

Considerando $h = (h_1, h_2)$ temos que:

$$y - b = h_1(P)(x - a) \quad \text{se} \quad (x - a, y - b) \in T_P X.$$

Pelo Corolário 3.2.3 f é da forma:

$$f = xa(x^p, y^p, 1) + yb(x^p, y^p, 1) + c(x^p, y^p, 1)$$

e então $(D_x^{p-i} \circ D_y^i f)(P) = 0$ para $i = 1, \dots, p-1$.

Pela Fórmula de Taylor temos que:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(P) + f_1(P)(x-a) + f_2(P)(y-b) + D_x^p f(P)(x-a)^p + D_y^p f(P)(y-b)^p + \\ & + D_x^{p+1} f(P)(x-a)^{p+1} + D_y^{p+1} f(P)(y-b)^{p+1} + D_x^p f(P) \cdot D_y f(P)(x-a)^p (y-b) + \\ & + D_x f(P) \cdot D_y^p f(P)(y-b)^p (x-a) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Derivando $f(x, y) = 0$ implicitamente com respeito a x temos que:

$$D_x f(P) = x D_y f(P), \quad D_x^p f(P) = h_1(P) D_y^p f(P) \text{ e } D_x^{p+1} f(P) = -x^2 D_y^{p+1} f(P) + D_y^p f(P). \text{ Podendo ainda supor que } D_y^{p+1} f(P) = 1$$

Substituindo essas expressões em (3.12) obtemos:

$$f(x, y) = -D_y^p f(P)(x-a)^p [x - h_1(P)] + [-2x^2 D_y^p f(P) \cdot D_y f(P) + D_y^p f(P)](x-a)^{p+1}.$$

Como φ é inseparável e $e_P \varphi = p$ para quase todo $P \in X$ então da igualdade acima temos que $e_P h = 1$. Disto segue que h é separável.

Pela Fórmula de Hurwitz,

$$2g - 2 = \deg h(2g - 2) + \deg R$$

onde R é o divisor de ramificação do morfismo h .

Daí conclui-se que $\deg h = 1$ e $R = 0$. Portanto h é injetora. Sendo X irredutível, podemos concluir que h é um isomorfismo.

Sendo h um isomorfismo, então por dualidade, se L é a reta em $(\mathbb{P}_K^2)^*$ correspondente a P temos que, $T_P X$ corresponde a um único $Q \in L$ tal que $(T_Q X^*)' = P$ se P é um ponto de Weierstrass e, se P não é um ponto de Weierstrass, $X \cap T_P X = \{P, P'\}$ com $T_P X \neq T_{P'} X$, e essas tangentes correspondem a $Q, Q' \in L$ tais que $(T_Q X^*)' = P$ e $(T_{Q'} X^*)' = P'$. Logo, $X = X^{**}$.

Pela Proposição 3.3.1 temos que X^* tem infinitos pontos de inflexão e portanto φ' é inseparável. Provemos agora que $\varphi' \circ \varphi = h$.

Se $L \in X^*$ então da igualdade, $X = X^{**}$ temos que $\varphi'(L) = P$ para algum $P \in X$ tal que $T_P X = L$ ou $\varphi(L) = P'$ se $L \cap T_P X = \{P'\}$.

Como dois morfismos que coincidem num aberto denso são iguais, temos que $\varphi' \circ \varphi = id_X$ ou $\varphi' \circ \varphi = h$. Sendo φ' e φ inseparáveis então $\varphi' \circ \varphi \neq id_X$ e portanto $\varphi' \circ \varphi = h$

□

Proposição 3.3.3 *Seja X uma curva plana não singular de grau $p + 1$ com infinitos pontos de inflexão definida sobre um corpo K , car $K = p$, $p \neq 2$. Então existem exatamente $p^3 + 1$ pontos distintos de X tais que $I(P, X \cap T_P X) = p + 1$*

Demonstração:

Escolha as coordenadas de X tal que em um aberto denso U de X contendo P , temos a parametrização de X dada por:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= a_0 + a_{0,1}t + \dots \\ z &= a_2 t^{p+1} + a_{2,1} t^{p+2} + \dots \quad a_0, a_2 \neq 0 \end{aligned}$$

Pela Proposição 3.2.3 temos que a sequência de ordem de X em P é $j_0(P) = 0$, $j_1(P) = 1$, $j_2(P) = p$ ou $p + 1$.

Pela Proposição 3.2.3, $j_2(P) = p + 1$ para um número finito de pontos que são os pontos de Weierstrass.

Temos que o número de pontos de Weierstrass contados com suas multiplicidades é dado por:

$$(1+p) \left(2 \left(\frac{p(p-1)}{2} \right) - 2 \right) + (p+1)(2+1) = p^3 + 1.$$

A proposição estará demonstrada se provarmos que todo ponto de Weierstrass tem multiplicidade 1. A multiplicidade de P um ponto de Weierstrass é dada pelo menor não identicamente nulo da seguinte matriz $3 \times (p+1)$:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{0,1} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & a_2 & \dots \end{bmatrix}$$

Como o menor não identicamente nulo

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{0,1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

é de ordem 3, temos que a multiplicidade de cada ponto de Weierstrass é 1.

□

Lema 3.3.1 *Seja X uma curva não singular de grau $p+1$ com infinitos pontos de inflexão definida sobre um corpo K , com $K = p \geq 3$. Então o subgrupo $G \subseteq PGL(2, K)$ induz um subgrupo de automorfismo de X com ordem menor ou igual a $(p^3 + 1)^4$.*

Demonstração:

Sendo X irredutível e $\deg X = p+1$ então $\#X \cap L \leq p+1$ para toda reta L . Como $p \neq 2$ temos que $p^3 + 1 > 3(p+1)$ e então existem pelo menos 4 pontos de Weierstrass de X tais que 3 deles não estão sobre a mesma reta. Como toda projetividade em G induz uma permutação entre os pontos de Weierstrass então pela Proposição 3.3.3 o número dessas permutações é $(p^3 + 1)^4$.

□



Proposição 3.3.4 *Seja $X : F = 0$ uma curva plana não singular de grau $p+1$ com infinitos pontos de inflexão. Então X é projetivamente equivalente a uma curva plana de equação:*

$$X_0X_1^p + X_1X_2^p + X_2X_0^p = 0$$

Demonstração:

Pelo Corolário 3.2.3, se X tem infinitos pontos de inflexão, então o espaço que parametriza essas curvas é $\mathbb{P}_K^s$, podemos assim considerar $X \in \mathbb{P}_K^s$.

Seja $A \in PGL(2, k)$ então A pode ser representado por $A = (A_0, \dots, A_8)$ e seja $X = (Y_0, \dots, Y_8)^t$ defina:

$$\begin{aligned} h_X : PGL(2, k) &\longrightarrow \mathbb{P}_K^s \\ h_X(A) &\longmapsto AX. \end{aligned}$$

Seja $Y \in \mathbb{P}_K^s$ tal que $Y = AX$ então, $h_X^{-1}(Y) = \{B \in PGL(2, k); h_X(B) = Y\}$ e $B \in h_X^{-1}Y \Leftrightarrow h_X(B) = Y \Leftrightarrow BX = Y = AX \Leftrightarrow A^{-1}BX = X$.

Logo $h_X^{-1}(Y) = \{B \in PGL(2, K); A^{-1}BX = X\}$.

Assim a fibra $h_X^{-1}(Y)$ induz um automorfismo $\sigma : X \longrightarrow X$.

Pelo Lema 3.3.1 o grupo $\{\sigma : X \longrightarrow X \text{ tal que } \sigma \text{ é automorfismo}\}$ tem ordem finita e portanto a fibra $\{h_X^{-1}(Y), Y \in \mathbb{P}_K^s\}$ é finita. Logo a dimensão da fibra $h_X^{-1}(Y)$ é zero para $Y \in \mathbb{P}_K^s$, geral.

Pelo Teorema da Dimensão da Fibra (Teorema 1.2.1) temos que:

$$\dim h_X^{-1}(Y) = \dim PGL(2, K) - \dim Im(h_X) \Rightarrow \dim Im(h_X) = 8.$$

Logo $Im(h_X)$ inclui um aberto denso em $\mathbb{P}_K^s$. Como dois abertos não vazios são não disjuntos em $\mathbb{P}_K^s$ então existe um automorfismo $\sigma : \mathbb{P}_K^s \longrightarrow \mathbb{P}_K^s$ que transforma toda curva não reflexiva em uma da forma:

$$X_0X_1^p + X_1X_2^p + X_2X_0^p = 0$$

□

Estudaremos agora as curvas de grau $dp+1$, $d > 1$ e $p \nmid d$.

Proposição 3.3.5 *Seja X uma curva não singular de grau $dp + 1$ com infinitos pontos de inflexão. Então:*

(a) *Cada reta tangente num ponto geral é tangente à somente um número finito de pontos da curva.*

(b) *X tem finitas retas tangentes tais que a multiplicidade de intersecção no ponto de tangência é maior do que p .*

Demonstração:

(a) Como X tem infinitos pontos de inflexão temos que X é da forma:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0 a(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_1 b(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_2 c(x_0^p, x_1^p, x_2^p),$$

com a , b e c polinômios homogêneos de grau d .

Assim $\varphi : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (a(x_0, x_1, x_2), b(x_0, x_1, x_2), c(x_0, x_1, x_2))$. Daí segue que $\dim X^* = 1$.

Sejam $C(X)$ a conormal de X , $\pi : C(X) \rightarrow X$ e $\pi' : C(X) \rightarrow X^*$ as projeções. Da Afirmação 1 da Seção 3.1.2 temos que $\dim C(X) = 1$.

Como $\pi^{-1}(T_P X) = \{P' \in X \text{ tal que } T_P X = T_{P'} X\}$ então pelo Teorema da Dimensão da Fibra (Teorema 1.2.1) temos que:

$$\dim(\pi')^{-1}(T_P X) = \dim C(X) - \dim X^*.$$

Logo, $\dim(\pi')^{-1}(T_P X) = 0$. Portanto o número de multitangentes é finito.

(b) Como X tem infinitos pontos de inflexão temos que $p = \deg_i \varphi = I(P, X \cap T_P X)$, para todo P num aberto de X .

Assim, $\{T_P X \text{ tal que } P \in \text{reg}(X) \text{ e } I(P, X \cap T_P X = p)\}$ é um aberto. Logo X tem finitas retas tangentes tais que $I(P, X \cap T_P X) > p$.

□

Corolário 3.3.1 *Seja X uma curva plana genérica não singular de grau $dp + 1$ com infinitos pontos de inflexão. Então $\deg X^* = d(dp + 1)$.*

Demonstração:

Pela Proposição 3.3.5 X tem no máximo um número finito de tangentes múltiplas e então a aplicação $\varphi : X \rightarrow X^*$ é injetiva num aberto de X e

ainda pela mesma Proposição $\deg_i \varphi = p$.

Portanto φ pode ser escrito como a composição de um morfismo puramente inseparável de grau p e um morfismo birracional.

Daí, pela Fórmula de Plücker segue que:

$$dp(dp + 1) = \deg X^* \cdot \deg \varphi.$$

Logo $\deg X^* = d(dp + 1)$.

□

Lema 3.3.2 *Seja $x \in \mathbb{P}_K^2$ tal que existem $P_1, \dots, P_n \in X$ pontos distintos, com $x \in \cap_{i=1}^n T_{P_i} X$ onde $n = \deg X^*$, então $x \notin X^{**}$.*

Demonstração:

Por hipótese $x \in \cap_{i=1}^n T_{P_i} X$. Como $T_{P_i} X$ corresponde ao ponto $x_i \in X^*$, $i = 1, \dots, n$ e pela dualidade, o ponto x corresponde a uma reta L em $(\mathbb{P}_K^2)^*$ tal que $x_i \in L$, $i = 1, \dots, n$.

Assim as retas tangentes $T_{x_i} X^*$ que correspondem aos pontos de X^{**} , passam por x . Logo $x \notin X^{**}$.

□

Lema 3.3.3 *Seja X uma curva genérica satisfazendo as seguintes condições: X é não singular, $\deg X = dp + 1$, $d > 1$, X tem infinitos pontos de inflexão e $(0 : 0 : 1) \in X$. Então $X \neq X^{**}$.*

Demonstração:

Pelo Corolário 3.3.1 temos que a curva X é definida pela equação:

$$x_0 a(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_1 b(x_0^p, x_1^p, x_2^p) + x_2 c(x_0^p, x_1^p, x_2^p) = 0,$$

onde a , b e c são polinômios homogêneos de grau d . Como k é algebricamente fechado, a equação acima pode ser reescrita como:

$$x_0 \alpha^p(x) + x_1 \beta^p(x) + x_2 \gamma^p(x) = 0,$$

onde α , β e γ são polinômios cujos coeficientes são as p -ésimas raízes dos coeficientes de a , b e c respectivamente.

Para uma curva X satisfazendo as hipóteses do Lema, podemos supor válidas as seguintes condições:

- (a) γ define uma curva não singular;
- (b) α, β, γ não se anulam ao mesmo tempo;
- (c) $\frac{\partial \gamma}{\partial x_2}, \gamma$ e $\gamma' = x_0 \alpha^p + x_1 \beta^p$ não se anulam simultaneamente.

Se $P \in X$ tal que $(0 : 0 : 1) \in T_P X$ então $P \in (\gamma \cap \gamma')$. Pelo Teorema de Bézout, o número de pontos $P \in (\gamma \cap \gamma')$ contados com multiplicidades é $d(dp + 1)$.

Pelo Corolário 3.3.1 temos que $\deg X^* = d(dp + 1)$ e pelo Lema 3.3.2, para que tenhamos $X \neq X^{**}$, basta provarmos que $I(P, \gamma \cap \gamma') = 1, \forall P \in (\gamma \cap \gamma')$, pois disso concluímos que existem $\deg X^*$ pontos de X tais que $(0 : 0 : 1) \in T_P X$. Da condição (b) temos que todos $P \in (\gamma \cap \gamma')$ são pontos regulares de γ' e da condição (c), $T_P \gamma \neq T_P \gamma', \forall P \in (\gamma \cap \gamma')$.

Logo, $I(P, \gamma \cap \gamma') = 1, \forall P \in (\gamma \cap \gamma')$.

□

Proposição 3.3.6 *Se X é uma curva plana genérica não singular de grau $dp + 1, d > 1$, com infinitos pontos de inflexão então $X \neq X^{**}$.*

Demonstração:

O espaço das curvas de grau $dp + 1$ com infinitos pontos de inflexão é parametrizado por $\mathbb{P}^N$ onde $N = \frac{3(d+2)(d+1)}{2} - 1$. O subespaço W das curvas do tipo acima que passam por $(0 : 0 : 1)$ tem dimensão $N - 1$, e é irredutível. Pelo Lema 3.3.3 existe um aberto U de W tal que $X \neq X^{**}, \forall X \in U$.

Seja o morfismo dominante

$$\begin{array}{ccc} \Psi : W \times PG(2, K) & \rightarrow & U \\ (X, g) & \mapsto & gX \end{array}$$

Então $U' = \Psi(U)$ é um aberto de $\mathbb{P}^N$ tal que $X \neq X^{**}, \forall X \in U$.

□

Proposição 3.3.7 *Se X não é reflexiva e $X^{**} = X$ então X^* não é reflexiva.*

Demonstração:

Suponhamos que X^* é reflexiva. Compondo os morfismos

$$\varphi' : X^* \rightarrow X^{**} = X \quad \text{e} \quad \varphi : X^{**} = X \rightarrow X^{***} = X^*,$$

obtemos $\varphi' \circ \varphi = id_X$.

Portanto φ é separável e então X é reflexiva, o que contradiz a hipótese.

□

Se a curva X não é reflexiva e $X^{**} \neq X$ então X^* pode ser reflexiva ou não, como veremos abaixo.

Proposição 3.3.8 *Seja X uma curva definida sobre um corpo K de característica $p > 0$ dada pela equação:*

$$X_0 X_1^{dp} + X_1 X_2^{dp} + X_2 X_0^{dp} = 0, d > 1, d \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Tem-se que:

(a) *Se $d \not\equiv 1 \pmod{p}$ então X^* é reflexiva e $X^{**} \neq X$. Mais ainda, X e X^{**} têm o mesmo gênero;*

(b) *Se $d \equiv 1 \pmod{p}$ então X^* não é reflexiva e $X^{**} \neq X$.*

Demonstração:

Claramente X é não singular e não reflexiva, pois $I(P, X \cap T_P X) = p$ para quase todo $P \in X$.

Sejam

$$\begin{array}{ccc} \Psi : X & \rightarrow & \overline{X} (\overline{X} = X) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (x_0^p : x_1^p : x_2^p) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \overline{h} : \overline{X} & \rightarrow & X^* \\ (y_0 : y_1 : y_2) & \mapsto & (y_1^d : y_2^d : y_0^d) \end{array}.$$

Consideremos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & X^* & \xrightarrow{\varphi'} & X^{**} \\ & \searrow \Psi & \uparrow \overline{h} & \nearrow \rho & \\ & & \overline{X} & & \end{array}$$

Desde que p não divide d , $\overline{h}$ é separável e assim φ' é separável se, e somente se, ρ é separável.



Seja $y = (y_0 : y_1 : y_2) \in X$ então $T_y X$ corresponde ao ponto $z = (y_1^{dp} : y_2^{dp} : y_0^{dp})$. A reta $T_{h(y)} X^*$ corresponde ao ponto $(d\bar{h}^{-1})^t(z)$, onde

$$(d\bar{h}^{-1})^t(z) = \begin{pmatrix} 0 & y_2^{d-1}y_0^{d-1} & 0 \\ 0 & 0 & y_0^{d-1}y_1^{d-1} \\ y_1^{d-1}y_2^{d-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{dp} \\ y_2^{dp} \\ y_0^{dp} \end{pmatrix}.$$

Sendo o diagrama comutativo, temos que:

$$\rho(y) = (y_2^{dp+d-1}y_0^{d-1} : y_0^{dp+d-1}y_1^{d-1} : y_1^{dp+d-1}y_2^{d-1}).$$

Se $p \nmid (d-1)$ então ρ é separável e assim φ' é separável. E então X^* é reflexiva e pelo Lema 1.1.3 segue que $g(X) = g(X^{**})$.

Se $p \mid (d-1)$ então ρ é inseparável e portanto X^* não é reflexiva.

Pondo $(w_0 : w_1 : w_2) = (y_2^{dp+d-1}y_0^{d-1} : y_0^{dp+d-1}y_1^{d-1} : y_1^{dp+d-1}y_2^{d-1})$ temos que $K(X^{**}) = K(w_0 : w_1 : w_2)$.

Como $\text{Div}(w_i) > D$, $\forall i$ onde $D = (d-1)(1 : 0 : 0) + (d-1)(0 : 1 : 0) + (d-1)(0 : 0 : 1)$, então D é a parte fixa do sistema linear de X^{**} e portanto o grau do sistema linear correspondendo ao morfismo ρ é dado por: $(dp+1)(dp+2d-2) - 3(d-1)$, donde obtemos a igualdade $(dp+1)(dp+2d-2) - 3(d-1) = \deg \varphi \cdot \deg X^{**}$.

Assim, $\deg X \nmid \deg X^{**}$ e portanto $X^{**} \neq X$.

□

Capítulo 4

Curvas Estranhas e Curvas Extremas

4.1 Curvas Estranhas e Extremas

Suponha que X seja dada em coordenadas afins pela equação:

$$X : f(x, y) = 0$$

onde x é uma variável separante.

Temos que φ é dado pelas coordenadas afins por $(-\beta : -\alpha : 1)$ onde $\alpha = D_x y = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$ e $\beta = y - \alpha x$.

Assim, $K(C(X)) = K(X) = k(x, y) = k(\alpha, \beta, x)$ e $K(\alpha, \beta) = k(X^*)$.

Definição 4.1.1 *Uma curva estranha é uma curva projetiva irredutível não linear com a propriedade de que todas as retas tangentes passam por um ponto fixo, chamado de centro.*

Lema 4.1.1 (a) *Se X é estranha com centro S então $X^{**} = \{S\} \neq X$ e $\deg \pi' \leq \deg X$.*

(b) *X é uma curva estranha se, e somente se, α e β são linearmente dependentes sobre k .*

(c) *Se α ou β são constantes, então X é uma curva estranha.*



(d) α e β são constantes se, e somente se, X é uma reta.

Demonstração:

(a) Claramente $X^{**} = \{S\}$ e X é não reflexiva. Conseqüentemente as curvas estranhas só podem existir em característica positiva.

Sendo $\deg \pi' = \pi'_i \cdot \pi'_s$ e $I(P, X \cap T_P X) = \pi'_i$ para quase todo $P \in X$ segue do Teorema de Bézout que:

$$\deg \pi' \leq \deg X \quad (4.1)$$

(b) Sendo $\varphi(x, y) = (-\beta, -\alpha, 1)$ temos que $T_P X : -\alpha x + y - \beta z = 0$.

X é estranha se, e somente se, existe $(a : b : c)$ tal que $(a : b : c) \in T_P X$, $\forall P \in \text{reg}(X)$, isto equivale a dizer que $-\alpha a + b - \beta c = 0$, com a, b, c não todos nulos.

Assim X é estranha se, e somente se, $1, \alpha$ e β são linearmente dependentes sobre K . Donde também podemos concluir que se X é estranha então X^* é uma reta.

(c) Se $\alpha(P) = \alpha$, para todo $P \in X$ então 1 e α são linearmente dependentes sobre K e portanto X é estranha. O mesmo ocorre se β é constante.

(d) α e β são constantes se, e somente se, $X : y = \alpha x + \beta$.

□

Definição 4.1.2 Uma curva projetiva irredutível é dita *extremal* se $\deg \pi' = \deg X$.

Lema 4.1.2 As curvas estranhas não singulares são as cônicas em característica 2.

Demonstração:

Como X é não singular temos pela Fórmula de Plücker que:

$$\deg X^* \cdot \deg \pi' = 2g - 2 + 2 \deg X. \quad (4.2)$$

Sendo X estranha então do Lema 4.1.1 segue que $\deg X^* = 1$. Assim de (4.2) temos que

$$\deg X \geq 2g - 2 + 2 \deg X$$

Portanto,

$$\deg X \leq 2 - 2g.$$

Daí, $g = 0$ e $\deg X = 2$. Assim de (4.2) segue que $\deg \pi' = 2$ e então $\text{car } K = 2$.

□

Teorema 4.1.1 *Seja X uma curva estranha com centro S . Então:*

$$\deg X = \deg \pi' + m_S(X),$$

onde $m_S(X)$ representa a multiplicidade de X em S .

Demonstração:

Seja H' um ponto geral de X^* , o correspondente hiperplano H é um hiperplano geral passando por S . Como $S \in T_P X$, $\forall P \in \text{reg}(X)$ então:

$$\pi((\pi')^{-1}(H')) = H \cap X - \{S\}. \quad (4.3)$$

De (4.3) e do fato de que cada ponto de $H \cap X - \{S\}$ é um ponto simples de X segue que $\sum I(P, X \cap H) = \pi'_i \pi'_s + m_S(X)$. Assim, pelo Teorema de Bézout $\deg X = \deg \pi' + m_S(X)$.

□

4.2 A Equação de uma Curva Estranha

Seja X uma curva plana estranha com centro em $S = (a_0 : a_1 : a_2)$ definida sobre K pela equação $F(X_0 : X_1 : X_2) = 0$. A condição de $S \in T_P X$, para $P \in \text{reg}(X)$ é equivalente à:

$$a_0 F_{X_0}(X_0 : X_1 : X_2) + a_1 F_{X_1}(X_0 : X_1 : X_2) + a_2 F_{X_2}(X_0 : X_1 : X_2) = 0.$$

Teorema 4.2.1 *Seja X uma curva como a descrita acima. Então $\pi'_i \geq p^e$ para algum inteiro positivo i se, e somente se, as seguintes identidades polinomiais são verificadas:*

$$\sum_{n_0+n_1+n_2=n} a_0^{n_0} a_1^{n_1} a_2^{n_2} D_{X_0}^{n_0} D_{X_1}^{n_1} D_{X_2}^{n_2} F(X_0 : X_1 : X_2) = 0 \quad n = 1, \dots, p^e - 1.$$

Demonstração:

Pelo Lema 4.1.1 a condição $\pi'_i \geq p^e$ é equivalente à:

$$I(P, X \cap T_P X) \geq p^e, \quad P \in X \text{ geral.} \quad (4.4)$$

A reta tangente $T_P X$ é parametrizada por:

$$x_j(t) = x_j + ta_j, \quad j = 0, 1, 2 \quad \text{onde } P = (x_0 : x_1 : x_2).$$

A Expansão de Taylor de $F(x_0(t) : x_1(t) : x_2(t)) = 0$ para $t = 0$ é dada por:

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{n_0 + n_1 + n_2 = n} D_{X_0}^{n_0} D_{X_1}^{n_1} D_{X_2}^{n_2} F(x_0 : x_1 : x_2) a_0^{n_0} a_1^{n_1} a_2^{n_2} t^n.$$

Assim de (4.4) segue que:

$$\sum_{n_0 + n_1 + n_2 = n} a_0^{n_0} a_1^{n_1} a_2^{n_2} D_{X_0}^{n_0} D_{X_1}^{n_1} D_{X_2}^{n_2} F(x_0 : x_1 : x_2) = 0, \quad n = 1, \dots, p^e - 1.$$

Desde que $P \in X$ é geral e X irredutível segue a igualdade requerida.

□

Corolário 4.2.1 *Seja X uma curva plana estranha e q uma potência de p . Então $\pi'_i \geq q$ se, e somente se, X é projetivamente equivalente à uma curva com equação da forma:*

$$a_m(X_0, X_1)X_2^{sq} + a_{m+q}(X_0, X_1)X_2^{(s-1)q} + \dots + a_{m+sq}(X_0, X_1) = 0,$$

onde a_j é homogêneo de grau j e m e s são inteiros positivos.

Demonstração:

Por mudanças de coordenadas projetivas, podemos supor $S = (0 : 0 : 1)$ seja

o centro de X . Se $X : F = 0$, então pelo Teorema 4.2.1 a condição de $\pi'_i \geq q$ é equivalente à:

$$D_{X_2}^n F(X_0 : X_1 : X_2) = 0. \quad n = 1, \dots, q-1$$

Se $D_{X_2}^{sp} F \neq 0$ e $D_{X_2}^{np} F = 0$ para $n = 1, \dots, (s-1)q$ temos que $\deg F = m + sq$ para algum $m > 0$, e a afirmação do Corolário segue claramente.

□

A equação da curva $f(x, y) = 0$ e a relação $y = \alpha x + \beta$ determina o polinômio:

$$\Psi(T) = f(T, \alpha T + \beta) \in K(\alpha, \beta)$$

Como $\Psi(x) = 0$, então $\Psi(T)$ é um múltiplo do polinômio minimal de x sobre $k(X^*)$. Sendo $f_x(x, y) + y'f_y(x, y) = 0$ temos que x é uma raiz do polinômio $\phi(T) = f_x(T, \alpha T + \beta) + \alpha f_y(T, \alpha T + \beta)$ e $\phi(T) = \Psi'(T)$.

Lema 4.2.1 *Seja $g(x, y) = x^n h_n(y) + x^{n-1} h_{n-1}(y) + \dots + h_0(y)$ um polinômio em $k[x, y]$. Se α e β são indeterminadas então a seguinte identidade se verifica:*

$$g(x, \alpha x + \beta) = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^i D_y^{i-j} h_j(\beta) \alpha^{i-j} \right) x^i. \quad (4.5)$$

Demonstração:

Pela Expansão de Taylor temos que $h_j(\alpha x + \beta) = \sum_{m \geq 0} D^m h_j(\beta) (\alpha x)^m$. E então,

$$g(x, \alpha x + \beta) = \sum_{i \geq 0} \left(\sum_{j=0}^i D_y^{i-j} h_j(\beta) \alpha^{i-j} \right) x^i.$$

□

Proposição 4.2.1 $\Psi(T)$ é identicamente nulo se, e somente se, X é uma reta.

Demonstração:

Seja $X : f(x, y) = 0$ tal que $f(x, y) = x^n h_n(y) + x^{n-1} h_{n-1}(y) + \dots + h_0(y)$. Desde que X é irredutível devemos ter $h_0(y) \neq 0$.

Afirmção: $\beta \in k$ e $\alpha \in k$.

Como $\Psi(T) = 0$ segue que $h_0(\beta) = 0$, com $h_0(y) \neq 0$. Como k é algebricamente fechado temos que $\beta \in k$.

Suponha que $\alpha \notin k$ e sejam $g_i(x) = D_y^i h_0(\beta)x^i + \dots + D_y h_{i-1}(\beta)x + h_i(\beta)$, $i = 1, \dots, n$.

Como $\beta \in K$ então $g_i(x) \in K[x]$ e $g_i(\alpha) = 0$. Se $g_i \neq 0$ para algum i então α é algébrico sobre K e portanto $\alpha \in k$, o que contraria a hipótese.

Logo, $g_i = 0$, $\forall i$ e em particular $h_i(\beta) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Dai, $y - \beta$ divide $h_i(y) = 0$, $i = 1, \dots, n$ e isto implica em X ser redutível.

Donde concluímos que $\alpha \in K$ e a afirmação fica provada.

Segue da afirmação e do Lema 4.1.1 que X é uma reta.

Reciprocamente, se X é uma reta segue do Lema 4.2.1 que β e α são constantes e $f(x, y) = xh_1(y) + h_0(y)$ com $\partial h_1 = 0$ e $\partial h_0 = 1$. Então

$$\alpha = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{h_1(y)}{D_y h_0(y)} \text{ e } h_0(\alpha x + \beta) = h_0(\beta) + D_y h_0(\beta)\alpha x.$$

Sendo $0 = f(x, \alpha x + \beta) = -\alpha x D_y h_0(y) + h_0(\alpha x + \beta)$, podemos concluir que $h_0(\beta) = 0$.

$$\text{Logo, } \Psi(T) = f(T, \alpha T + \beta) = h_0(\beta) + (D_y h_0(\beta)\alpha + h_1(\beta))T = 0.$$

□

Lema 4.2.2 *Seja $g(x, y) = \sum_{m \geq 0} g_m(x, y)$, onde $g_m(x, y)$, $m = 1, \dots, r$ é um polinômio de grau m em $k[x, y]$. Se $\beta \in K$ e $\alpha \in K$ são transcendentessobre K , então:*

$$g(x, \alpha x + \beta) = \sum_{m=0}^r \left(\sum_{i=0}^m D_y^{m-i} g_{r-i}(1, \alpha) \beta^{m-i} \right) x^{r-m}.$$

Demonstração:

Seja $g_m(x, y) = \sum_{i=0}^m a_i x^{m-i} y^i$. O coeficiente de x^{m-i} em $g_m(x, \alpha x + \beta)$ é:

$$\alpha_i \beta_i + \binom{i+1}{i} a_{i+1} \alpha \beta^i + \binom{i+2}{i} a_{i+2} \alpha^2 \beta^i + \dots + \binom{m}{i} a_m \alpha^{m-i} \beta^i = D_y^i g_m(1, \alpha) \beta^i$$

Substituindo esses coeficientes em g , obtemos o resultado.

□

Escrevendo $f(x, y) = f_1(x^p, y^p) + g_r(x, y) + g_{r-1}(x, y) + \dots + g_0(x, y)$, onde $g_i(x, y)$, $i = 0, \dots, r$ são polinômios de grau i , temos pelo Lema 4.2.2 que:

$$\Psi(T) = f(T^p, \alpha^p T^p + \beta^p) + \sum_{m=0}^r \left(\sum_{i=0}^m D_y^{m-i} g_{r-i}(1, \alpha) \beta^{m-i} \right) T^{r-m},$$

e então:

$$\phi(T) = \Psi'(T) = \sum_{m=0}^{r-1} \left((r-m) \sum_{i=0}^m D_y^{m-i} g_{r-i}(1, \alpha) \beta^{m-i} \right) T^{r-m-1}. \quad (4.6)$$

Lema 4.2.3 *Seja $f(x, y) = f_1(x^p, y^p) + g(x, y) \in k[x, y]$ com $g(x, y) \neq 0$ tal que nenhum monômio de $g(x, y)$ está em $k[x^p, y^p] \setminus \{0\}$. Sejam T uma indeterminada, α transcendente sobre K e $\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$, com $a, b, c, d \in K$ e $c \neq 0$. Se $\phi(T) = f_x(T, \alpha T + \beta) + \alpha f_y(T, \alpha T + \beta) = 0$ em $K(\alpha)[T]$ então p divide ∂g e x divide g .*

Demonstração:

Escreva $g(x, y) = g_r(x, y) + g_{r-1}(x, y) + \dots + g_1(x, y)$ onde cada g_i é um polinômio homogêneo de grau i e $g_r(x, y) \neq 0$.

A nulidade de $\phi(T)$ em $K(\alpha)[T]$ implica por (4.6) que:

$$(r-j) \sum_{i=0}^j D_y^{j-i} g_{r-i}(1, \alpha) \beta^{j-i} = 0. \quad j = 0, \dots, r-1 \quad (4.7)$$

Se $j = 0$ temos que $rg_r(1, \alpha) = 0$. Desde que $g_r(x, y) \neq 0$ e α é transcendente sobre K segue que $g_r(1, \alpha) \neq 0$ e portanto $p|r$.

Se $p \nmid j$ para algum j , então o coeficiente de y^{r-j} em $g_{r-j}(x, y)$ é zero, pois nenhum dos seus monômios pertence ao anel $k[x^p, y^p] \setminus \{0\}$. Então por (4.7) $p \mid r$.

Para concluirmos a prova, temos que mostrar que o coeficiente de y^{r-j} em $g_{r-j}(x, y)$ é zero para $j = 1, \dots, r-1$. Isto será feito por indução sobre j , quando $p \nmid j$.

Suponha que o coeficiente de y^{r-i} em $g_{r-i}(x, y)$ é zero para $i = 0, \dots, j-1$. De (4.7) segue que:

$$\sum_{i=0}^j D_y^{j-i} g_{r-i}(1, \alpha) \beta^{j-i} = 0. \quad (4.8)$$

Da hipótese de indução temos que $D_y^{j-i}g_{r-i}(1, \alpha)$, $i = 0, \dots, j-1$ é um polinômio em α de grau no máximo

$$r - j - 1. \quad (4.9)$$

Substituindo $\beta = \frac{(a\alpha + b)}{(c\alpha + d)}$, $c \neq 0$ em (4.8) e eliminando os denominadores obtemos um polinômio em α cujo coeficiente dominante é c^j vezes o coeficiente de y^{r-j} em $g_{r-j}(x, y)$. Daí, o coeficiente de y^{r-j} em $g_{r-j}(x, y)$ é zero por (4.9). Logo $p \mid r$ e $x \mid g$.

□

Teorema 4.2.2 *Seja $X : f(x, y) = 0$ uma curva plana irredutível. Se $\phi(T) = 0$ em $K(\alpha, \beta)[T]$ então X é uma curva estranha.*

Demonstração:

Se α ou β são constantes em K então pelo Lema 4.1.1 X é uma curva estranha. Suponhamos então que α e β são transcendentessobre K .

Ponha $f(x, y) = f_1(x^p, y^p) + g_r(x, y) + \dots + g_1(x, y)$ onde g_i é zero ou homogêneo de grau i , tal que nenhum de seus monômios pertence ao anel $k[x^p, y^p] \setminus \{0\}$ e $g_r(x, y) \neq 0$.

Se $\phi(T) = 0$ então do Lema 4.2.3 temos que $p \mid r$, e ainda por (4.7) temos para $j = 1$ que $D_y g_r(1, \alpha)\beta + g_{r-1}(1, \alpha) = 0$.

Afirmção: $D_y g_r(1, \alpha) \neq 0$.

De fato, suponha $D_y g_r(1, \alpha) = 0$ e escreva $g_r(x, y) = a_1 x^{r-1} y + \dots + a_{r-1} x y^{r-1}$. Temos que $0 = D_y g_r(1, \alpha) = a_1 + 2a_2 \alpha + \dots + (r+1)a_{r-1} \alpha^{r-2}$.

Daí, $a_i = 0$ quando $p \nmid i$ ou α é algébrico sobre k . As duas alternativas não ocorrem, pois nenhum dos monômios de g_r pertence ao anel $k[x^p, y^p] \setminus \{0\}$ e α é transcendente sobre K .

Da afirmação podemos escrever $\beta = -\frac{g_{r-1}(1, \alpha)}{D_y g_r(1, \alpha)}$ e portanto $\beta \in K(\alpha)$.

Para provarmos que $K(\alpha) = K(\beta)$ escrevamos:

$$f(x, y) = f_1(x^p, y^p) + x^s h_s(y) + x^{s+1} h_{s+1}(y) + \dots$$

onde $s \geq 0$, $h_s(y) \neq 0$ e cada $h_i(y)$ é tal que nenhum dos monômios de $x^i h_i(y)$ pertence ao anel $k[x^p, y^p] \setminus \{0\}$.

Afirmção: $p|s$ e $\alpha \in K(\beta)$.

Se $s = 0$ então o coeficiente constante de $\phi(T)$ é $D_y h_0(\beta)\alpha + h_1(\beta)$. A nulidade deste coeficiente implica que $\alpha \in K(\beta)$ ou $D_y h_0(\beta) = 0$. A segunda igualdade não deve ocorrer pois β é transcendente sobre K .

Se $s \geq 1$ então o coeficiente de T^{s-1} em $\phi(T)$ é $sh_s(\beta)$. Como $h_s(y) \neq 0$ e β é transcendente sobre K , temos que $p|s$.

E ainda, o coeficiente de T^s em $\phi(T)$ é $D_y h_s(\beta)\alpha + h_{s+1}(\beta)$. Pelo mesmo argumento acima concluímos que $\alpha \in K(\beta)$.

Logo a afirmação fica provada, e daí, $K(\alpha) = K(\beta)$. Portanto existem $a, b, c, d \in K$ tais que $\beta = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$, com $ad - bc \neq 0$.

Se $c \neq 0$ então do Lema 4.2.3 temos que $x|g$.

Sendo $g = g_r(x, y) + \dots + g_1(x, y) = x^s h_s(y) + x^{s+1} h_{s+1}(y)$ com $s \geq 1$ e $p|s$ podemos escrever:

$$f(x, y) = f_1(x^p, y^p) + x^s h(x, y)$$

onde, $x \nmid h(x, y)$ e nenhum dos monômios de $h(x, y)$ pertencem ao anel $k[x^p, y^p] \setminus \{0\}$.

Como $\phi(T) = T^s(h_x(T, \alpha T + \beta) + \alpha h_y(T, \alpha T + \beta)) = 0$ então pelo Lema 4.2.3 temos que $x|h(x, y)$ o que é uma contradição.

Logo, $c = 0$ e α e β são linearmente dependentes sobre k . Portanto X é estranha.

□

Corolário 4.2.2 *Se X é uma curva extremal então X é estranha.*

Demonstração:

Como X é extremal então $\deg \pi' = \deg X$ onde $\pi' : C(X) \rightarrow X$. Sendo $K(C(X)) = k(\alpha, \beta, x)$ e $K(X^*) = k(\alpha, \beta)$ temos que o grau do polinômio minimal $P(T)$ de x sobre $K(X^*)$ é igual a $\deg X$. Como $\phi(T)$ é um múltiplo de $P(T)$ e $\partial \phi \leq \deg X - 1$ segue que $\phi(T) = 0$. Assim pelo Teorema 4.2.2, X é estranha.

□

Corolário 4.2.3 *Seja X uma curva plana tal que $\pi'_i = \deg X = d$ então X é projetivamente equivalente à uma curva da forma:*

$$X_2^d = X_1^{d-1} X_0 + b_2 X_1^{d-2} X_0^2 + \dots + b_{d-1} X_1 X_0^{d-1},$$

com $b_j \in K$, $j = 2, \dots, d-2$.

Demonstração:

Se $\pi'_i = \deg X = d$ então X é uma curva extremal e portanto estranha. Pelo Corolário 4.2.3 temos que X é projetivamente equivalente à curva:

$$cX_2^d + a_d(X_0, X_1) = 0$$

com $c \in K^*$ e $a_d(X_0, X_1)$ polinômio homogêneo de grau d .

Por mudança de coordenadas, podemos reescrever a equação da forma requerida.

□

Corolário 4.2.4 *Seja X uma curva não singular definida sobre um corpo de característica $p > 0$ tal que X^* é não singular. Se X é reflexiva então X é uma cônica.*

Demonstração:

Se X é reflexiva então φ é birracional e assim $\deg X = \deg X^*$. Pela Fórmula de Plücker temos que $\deg X^* \cdot \deg \varphi = \deg X (\deg X - 1)$. Como $\deg \varphi = 1$ e $\deg X = \deg X^*$ segue que $\deg X = 2$. Portanto X é uma cônica.

□

Corolário 4.2.5 *Seja X uma curva plana não singular não reflexiva:*

(a) *Suponha $\deg X \geq 4$. Então, X^* é não singular se, e somente se, X é projetivamente equivalente à curva $X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + X_2^{q+1}$, onde $q = \pi'_i$.*

(b) *Suponha $\deg X \leq 3$. Então $\text{car} K = 2$ e X^* é não singular.*

Demonstração:

(a) Suponha que $\deg X \geq 4$. Se X é não reflexiva então a aplicação dual φ é puramente inseparável, e portanto pelo Lema 1.1.3 temos que $g(X) = g(X^*)$. Assim se X^* é não singular, concluímos que $\deg X = \deg X^*$.

Pela Fórmula de Plücker $\pi'_i = \deg \varphi = \deg X - 1$ e daí, $\deg X = \pi'_i + 1$. Logo, pelo Teorema 2.2.5 (Pardini) X tem a equação na forma requerida.

Reciprocamente se X é uma curva projetivamente equivalente à:

$$X_0^{q+1} + X_1^{q+1} + X_2^{q+1}, \quad q = \pi'_i.$$

Então a aplicação $\varphi : X \rightarrow X^*$ é definida por, $(X_0 : X_1 : X_2) \mapsto (X_0^q : X_1^q : X_2^q)$. Denotando por $(Y_0 : Y_1 : Y_2)$ as coordenadas de $(\mathbb{P}_K^2)^*$, a equação de X^* é dada por $Y_0^{q+1} + Y_1^{q+1} + Y_2^{q+1} = 0$. E portanto X^* é não singular.

(b) Se $\deg X \leq 3$ então $I(P, X \cap T_P X) = 2$ para $P \in X$ geral.

Logo $\deg \varphi = \deg_i \varphi = 2$ e $\text{car } K = 2$.

Se $\deg X = 3$ então pela Fórmula de Plücker $\deg X^* = 3$.

Assim $g(X) = g(X^*) = 1$ e portanto X^* é não singular.

Se $\deg X = 2$ então X^* é uma reta.

□

Apêndice

No que segue, K denota um corpo algebricamente fechado.

$$\text{A.1 } \mathbb{P}_K^n = \frac{K^{n+1} \setminus \{0\}}{\sim}.$$

Sejam $P, Q \in K^{n+1} \setminus \{0\}$. $P \sim Q$ se, e somente se, existe $\lambda \in K^*$ tal que $P = \lambda Q$.

Se $P = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ denotaremos a classe de equivalência de P como sendo $(x_0 : \dots : x_n)$.

Seja I um ideal em $K[X_1, \dots, X_n]$, respectivamente I um ideal homogêneo em $K[X_0, \dots, X_n]$.

$$V = V(I) = \{P \in K^n / f(P) = 0, \forall f \in I\}$$

é chamado *conjunto algébrico afim*.

$$V = V(I) = \{P \in \mathbb{P}_K^n / F(P) = 0, \forall F \in I\}$$

é chamado *conjunto algébrico projetivo*.

Seja $T : \mathbb{P}_K^n \rightarrow \mathbb{P}_K^n$ uma mudança de coordenadas. Define-se

$$V^T = \{P \in \mathbb{P}_K^n \text{ tal que } (F \circ T)(P) = 0, \forall F \in I\}.$$

Neste caso diremos que V^T é projetivamente equivalente a V .

A.2 Uma variedade V é um conjunto algébrico (afim ou projetivo) irredutível, isto é, não existem subconjuntos algébricos V_1 e V_2 não vazios de V tais que $V = V_1 \cup V_2$.

Na Topologia de Zariski, um aberto é definido como sendo o complementar de um conjunto algébrico projetivo em $\mathbb{P}_K^n$. Tem-se nesta topologia que todo aberto não vazio é denso.

A.3 Seja $V \subset K^n$ uma variedade afim. O anel de coordenadas de V é definido por:

$$K[V] = \frac{K[X_1, \dots, X_n]}{\mathcal{I}(V)},$$

onde $\mathcal{I}(V) = \{f \in K[X_1, \dots, X_n] / f(P) = 0, \forall P \in V\}$.

Se $V \subset \mathbb{P}_K^n$ é uma variedade projetiva define-se $K(V)$

$$K(V) = \frac{\{\frac{G}{H} \text{ tal que } G, H \text{ são polinômios homogêneos de mesmo grau}\}}{\sim}$$

onde $\frac{G}{H} \sim \frac{G_1}{H_1}$ se, e somente se, existe U aberto de V tal que $HG_1 = GH_1$, em U .

Dizemos que duas variedades projetivas V e V' são birracionalmente isomorfas se existem, abertos afins U e U' de V e V' respectivamente tais que $K(U) \simeq K(U')$.

Um morfismo entre variedades $f : V \rightarrow V'$ é uma aplicação regular em um aberto de V .

Sejam V e W variedades afins em K^n . Então

(a) Uma aplicação polinomial $f : V \rightarrow W$ induz um K -homomorfismo $f^* : K[W] \rightarrow K[V]$ definido por $g \in K[W]$, $f^*(g) = g \circ f$.

(b) $\phi : K[W] \rightarrow K[V]$ é um K -homomorfismo então existe uma única $f : V \rightarrow W$ aplicação polinomial tal que $\phi = f^*$.

Sejam V e W variedades afins. Uma *aplicação racional* $f : V \rightarrow W$ é dominante se $\overline{f(\text{Dom } f)} = W$.

A.4 Seja $L|K$ uma extensão finita de corpos. Os graus de separabilidade e inseparabilidade de $L|K$ são denotados por $[L : K]_s$ e $[L : K]_i$.

Diremos que L é uma extensão puramente inseparável se $[L : K]_s = 1$.

Tem-se que $[L : K]_s \cdot [L : K]_i = [L : K]$ e $[L : K]_i$ é uma potência da $\text{car} K$.

A.5 Seja V uma variedade projetiva. A dimensão de V é definida como sendo o grau de transcendência de $K(V)$ sobre K e denotada por $\dim V = \deg \text{Trans} (K(V)|_K)$.

Teorema de Normalização de Noether:

Sejam K um corpo infinito e $A = K[X_1, \dots, X_n]$. Existem $y_1, \dots, y_m \in A$, com $m \leq n$ tais que

(a) $y_1, \dots, y_m$ são transcendentess sobre K .

(b) A extensão $K(x_1, \dots, x_n)|_{K(y_1, \dots, y_m)}$ é algébrica.

$\{y_1, \dots, y_m\}$ é uma base de transcendência de $K(x_1, \dots, x_n)|_K$.

O inteiro m é chamado de grau de transcendência de $K(x_1, \dots, x_n)$ sobre K .

A.6 Uma curva projetiva X é uma variedade projetiva tal que $\deg \text{Trans} (K(X)|_K) = 1$.

Seja $P \in X$, o anel:

$$O_P(X) = \{f \in K(X) \text{ tal que } f \text{ é regular em } P\}$$

é um anel local com ideal maximal M_P e $(O_P(X), M_P)$ é um domínio de valorização discreta. Se $M_P = t \cdot O_P(X)$, então t é chamado parâmetro local de X em P .

Define-se $\text{ord}_P : K(X) \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ como sendo a ordem de anulamento de $f \in K[X]$ em P . A $\text{ord}_P f$ é também denotada por $v_P f$

A.7 Seja X uma curva projetiva plana e irredutível.

$$\text{Div} (X) = \left\{ \sum_{P \in X} n_P P \text{ tal que } n_P \neq 0 \text{ para um número finito de } P \in X \right\}$$

é um grupo abeliano cujos elementos são chamados *divisores* de X .

Sejam $D = \sum_{P \in X} n_P P$ e $D' = \sum_{P \in X} m_P P \in \text{Div}(X)$.

Define-se

$$\deg D = \sum n_P \quad \text{e} \quad D \geq D' \text{ se } n_P \geq m_P \quad \forall P.$$

Dizemos que D é equivalente a D' se existe $f \in K(X)^*$ tal que $D = D' + \text{div}(f)$. Escrevemos neste caso $D \equiv D'$.

$L(D) = \{f \in K(X)^* \text{ tal que } \text{ord}_P f \geq n_P, \forall P \in X\} \cup \{0\}$ é um K -espaço vetorial cuja dimensão é denotada por $l(D)$.

Teorema de Riemann:

Seja X uma curva plana, $\deg X = d$. Existe $g \in \mathbb{N}$ tal que

$$g \geq \deg D + 1 - l(D), \quad \forall D \in \text{Div}(X)$$

O menor dos inteiros g que satisfaz o Teorema acima é chamado de *gênero* de X e denotado por $g(X)$. Se X é não singular o gênero de X é dado por:

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

A.8 Seja $P \in X$, então existe aberto afim U contendo P tal que a equação de X em coordenadas afins é dada por $f = 0$. Assim $f = f_0 + \dots + f_d$, onde $\deg f = d$ e f_i é um polinômio homogêneo de grau i .

A multiplicidade de X em P é o menor inteiro m tal que $f_m(P) \neq 0$. Denotada por $m_P f = m$.

Dizemos que P é um ponto regular de X se $m_P f = 1$, caso contrário P é um ponto singular.

$$\text{Reg}(X) = \{P \in X \text{ tal que } P \text{ é regular em } X\}.$$

Sejam $X : F = 0$ uma curva plana e $P = (a : b : c) \in \text{reg}(X)$. Define-se e denota-se o plano tangente a X em P por

$$T_P X = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}_K^2 / \frac{\partial F(P)}{\partial X_0}(x-a) + \frac{\partial F(P)}{\partial X_1}(y-b) + \frac{\partial F(P)}{\partial X_2}(z-c) = 0\}$$

Sejam $X : F = 0$ e $Y : G = 0$ curvas projetivas planas. A multiplicidade de intersecção de X e Y em P será denotada por $I(P, X \cap Y)$.

Teorema de Bézout:

Sejam $X : F = 0$ e $Y : G = 0$ curvas projetivas planas. Se X e Y não têm componentes em comum então,

$$\sum I(P, X \cap Y) = \partial F \cdot \partial G.$$

Define-se sistema linear de curvas de grau d por

$$V_d = \{F : \text{homogêneo em } K[X, Y, Z] \text{ com } \partial F = d\} \cup \{0\}.$$

Tem-se que

$$\dim \mathbb{P}(V_d) = \frac{(d+1)(d+2)}{2} - 1.$$

Fórmula de Hurwitz:

Seja $\varphi : X \longrightarrow Y$ um morfismo separável entre curvas de grau n então:

$$2g(X) - 2 = n(2g(Y) - 2) + \deg(R)$$

onde R é o divisor de ramificação.



Referências

- [B-He] Bayer, V.; Hefez, A. - *Strange Curves* - Communication in Algebra, 19(11),3041-3059 (1991).
- [F] Fulton, W. - *Algebraic Curves* - Benjamin Cummings (1969).
- [G] Garcia, A.; - *The Curves $y^n = f(x)$ Over Finite Fields* - Sonderdruck aus - Arch. Math. Vol 54,36-44 (1990).
- [G-V] Garcia, A.; Volock, J. F. - *Wronskians and Linear Independence in Fields of Prime Characteristic* - Manuscripta Math 59, 457-469 (1987).
- [Ha] Hartshorne, R. - *Algebraic Geometry* - Springer-Verlag (1997).
- [He1] Hefez, A. - *Introdução à Geometria Projetiva* - Monografia de Matemática 46 - IMPA.
- [He2] Hefez, A. - *Non Reflexive Curves* - Comp. Math. 69, 3-35 (1989).
- [Ho] Homma, M. - *Funny Plane Curves in Characteristic $p > 0$* - Communication in Algebra 15(7), 1469-1501 (1987).
- [L] Lang, S. - *Algebra* - Addison-Wesley (1993).
- [M] Milles, R. - *Undergraduate Algebraic Geometry* - London Mathematical Society Student.
- [P] Pardini, R. - *Some Remarks on Plane Curves Over Fields of Finite Characteristic* - Compositio Mathematica 60:3-17 (1986)
- [S] Shafarevich, I. R. - *Basic Algebraic Geometry* Springer-Verlag (1997).



BOA QUA
Data 03/03/1990
Procedência Coleção
24.10.90 v.1170

- [S-V] Stöhr, K. O.; Volock, J. F. - *Weierstrass Points and Curves Over Finite Fields* - Proc. London Math Soc. (3) 52, 1-19 (1986).
- [V] Vaisencher, I. - *Introdução às Curvas Algébricas Planas* - Coleção Matemática Universitária (1996).
- [W] Walker, R. J. - *Algebraic Curves* - Princeton University Press (1950).
- [Wa] Wallace, A. H. - *Tangency and Duality Over Arbitrary Fields* - Proc. London Math Soc. (9)6 (1956).



