



Rosemeire Aparecida Rosa

*Semigrupos de operadores lineares aplicados às
Equações Diferenciais Parciais*

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Rosemeire Aparecida Rosa¹

*Semigrupos de operadores lineares aplicados às
Equações Diferenciais Parciais*

Orientador:

Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
CAMPUS DE SÃO JOSÉ DO RIO PRETO

São José do Rio Preto

25 de Fevereiro de 2011

¹meirematematica@sjrp.unesp.br

Rosemeire Aparecida Rosa

*Semigrupos de operadores lineares aplicados às Equações Diferenciais
Parciais*

Dissertação apresentada para obtenção do título
de Mestre em Matemática, área de Análise
Aplicada, junto ao Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas da Universidade
Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,
Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Germán Jesus Lozada Cruz
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
Professor Adjunto
UEM - Maringá

Prof^a. Dr^a. Andréa Cristina Prokopezzyk Arita
Professora Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 25 de Fevereiro de 2011.

Aos meus amados pais, Pedro e Maria de Lourdes.

Ao meu irmão, Sérgio.

Aos meus queridos amigos.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da minha vida, à Nossa Senhora Aparecida e à Santa Rita por atender minhas preces e necessidades.

À toda minha família. Em especial, aos meus pais, meu irmão e meus avós.

Aos meus pais, pelo apoio, compreensão e incentivo contínuo para realização de mais uma conquista.

Ao meu irmão Sérgio, por toda a ajuda, por todo incentivo desde a graduação, por todas as caronas, e principalmente, por sempre ter acreditado em mim.

Aos meus avós, Sebastião Moretto e Isarda Fazoli Moretto (*in memoriam*), pelo exemplo de vida a ser seguido.

Ao Marcos William, companheiro fiel em todos os momentos, por me amar, me fazer sorrir, me ajudar, me incentivar, por sempre me ouvir, por cuidar de mim, por me fazer sentir capaz em cada dificuldade, e por comemorar comigo cada conquista.

Ao meu orientador, Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz, pelo apoio, amizade e auxílio durante a orientação deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo, e à Prof^a. Dr^a. Andréa Cristina Prokopezky Arita pela disponibilidade e preciosas sugestões.

Aos meus colegas de graduação, em especial aos amigos Regiane, Rodrigo (Digo), Érica (Kica), Letícia, Fred, Andrea (Déia), Silvinha, Rafael, Edinho e Coquim, pelas incontáveis horas de estudo na biblioteca e pela amizade que permanece até hoje.

Aos meus colegas de pós-graduação, Kica, Déia, André, Glauce, Juninho, Éverton, Digo, Danilo, Gustavo, Rodiak, Marília, Ulcilea, Simone, Dani, Mirela, Eliel, Heron, Tiago, Marcos Proença, Aline, Michelli, Diego, Regina, Marisa e Vanessa, pelos momentos e experiências partilhados nestes dois últimos anos.

Aos amigos de Urupês, Mayra, Kelly, Monique, Sol, Aline, Larissa, Makis, Edmar (Edy), Mariana, Gleides, Ademir, por toda a ajuda, compreensão e colaboração.

A todos os funcionários do IBILCE que contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Em especial aos funcionários do DCCE Esther, Getúlio, Marta, Marcos e Olga e do DMAT Luciene, Leo e João, sempre muito atenciosos e competentes.

À FAPESP, pelo auxílio financeiro.

*“Nas questões matemáticas não se
compreende a incerteza nem a dúvida,
assim como tampouco se podem
estabelecer distinções entre verdades
médias e verdades de grau superior.”*

Hilbert

Neste trabalho vamos estudar a existência e unicidade de solução para equações da forma

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (\text{I})$$

onde X é um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear, f é uma função não linear conhecida, $u_0 \in X$ é um dado inicial conhecido e $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ é uma função desconhecida e $t_0 \in I$. Faremos este estudo usando a Teoria dos Semigrupos de Operadores Lineares.

Para melhor entendimento do estudo das equações (I), faremos duas aplicações. A primeira tratando de um modelo (linear) de divisão celular e a segunda, do modelo (não linear) de condução do calor.

Palavras-chave: Semigrupos de Operadores Lineares. Problema de Cauchy Abstrato. Divisão Celular. Equação do Calor.

In this work we will study the existence and uniqueness of the solutions for the following equation

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + Au = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (\text{I})$$

where X is a Banach space, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ is a linear operator, f is a nonlinear function, $u_0 \in X$ is initial data and $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ is unknown function. In this study we will use the theory of semigroup of linear operators.

For a best understanding of the study of equations (I), we will do two applications. The first one, is a (linear) model of cellular division and the second one, is about the (nonlinear) model of conduction of the heat.

Keywords: Semigroups of Linear Operators. The Abstract Cauchy Problem. Cellular Division. Heat Equation.

1	Preliminares	p. 14
1.1	Operadores lineares	p. 14
1.1.1	Operadores fechados	p. 16
1.2	Espaços de Sobolev	p. 21
2	Semigrupos de Operadores Lineares	p. 23
2.1	Cálculo em espaço de Banach	p. 23
2.2	C_0 -semigrupos de operadores lineares	p. 25
2.2.1	O Teorema de Hille - Yosida	p. 44
2.3	Semigrupos analíticos	p. 50
2.3.1	Operadores setoriais. Potências fracionárias	p. 51
3	O Problema Abstrato de Cauchy	p. 54
3.1	Equação homogênea	p. 54
3.2	Equação semilinear	p. 58
4	Aplicações	p. 63
4.1	Modelo de divisão celular	p. 63
4.2	Equação do Calor semilinear	p. 70

INTRODUÇÃO

Sabemos que a matemática vem sendo utilizada como ferramenta muito eficiente no estudo de fenômenos naturais que aparecem em diversos ramos da Ciência. Nos dois últimos séculos, principalmente no último deles, assistimos um progresso espetacular de uma das principais áreas da matemática, que prevê o comportamento de fenômenos reais: a Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Em meados do século XVIII foi um grande estímulo aos físicos e matemáticos da época, procurar modelos para problemas da mecânica e de outras ciências experimentais, que expressam os fenômenos em termos de equações diferenciais do tipo

$$\dot{x}(t) = F(x(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (0.1)$$

Inicialmente, devemos verificar se o sistema (0.1) é bem posto, isto é, devemos verificar a existência e a unicidade de solução e a dependência contínua com relação aos dados iniciais, pois, se alguma dessas condições não for satisfeita, podemos questionar se faz ou não sentido trabalhar com tal modelo.

Nosso objetivo é estudar as equações diferenciais abstratas da forma

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (0.2)$$

onde X é um espaço de Banach, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear, f é uma função não linear conhecida, $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$, é uma função desconhecida e $t_0 \in I$. A ferramenta principal que usaremos para tal estudo, é a **Teoria de Semigrupos de operadores lineares**. Basicamente, neste trabalho aplicaremos a teoria de semigrupos de operadores

aos seguintes problemas de equações diferenciais parciais, um sendo sobre o modelo de divisão celular (mitose) e o outro, sobre o processo de condução do calor, (detalhes em Capítulo 4, Sessões 4.1 e 4.2) modelados pelos seguintes sistemas de equações diferenciais parciais

$$\begin{cases} m_t + (\gamma_1 m)_x = -\beta(x)m - \nu(x)m + \mu(x)n, & 0 < x < 1, t > 0 \\ n_t + (\gamma_2 n)_x = -\nu(x)n - \mu(x)n + \begin{cases} 4\beta(2x)m(t, 2x), & 0 < x \leq \frac{1}{2}, t > 0, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1, t > 0, \end{cases} \\ m(t, 0) = 0, n(t, 0) = 0, & t > 0, \\ m(0, x) = m_0(x), n(0, x) = n_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (0.3)$$

e

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -u_{xx} + f(t, x, u), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0. \end{cases} \quad (0.4)$$

A teoria dos semigrupos de operadores lineares em espaços de Banach, teve início na primeira metade do século XX, tendo seu centro em 1948 com a generalização do Teorema de Hille - Yosida, obtendo seu primeiro ápice com a edição de *Semigroups and Functional Analysis* por E. Hille e R. S. Phillips, em 1957.

Hoje, a situação é caracterizada por muitas aplicações desta teoria, não somente em áreas tradicionais, como equações diferenciais parciais ou processos estocásticos, mas também é uma importante ferramenta para equações integro-diferenciais e equações diferenciais funcionais, na mecânica quântica ou na teoria do controle de dimensão infinita. O método dos semigrupos ainda é aplicado com bastante sucesso em equações concretas de crescimento, como a dinâmica populacional e teoria do transporte, entre outros.

Organizamos este trabalho, de forma a apresentar no Capítulo 1 informações preliminares, abordando conteúdos que serão usados durante todo o trabalho no decorrer dos capítulos. Nele contém uma seção voltada para operadores lineares, introduzindo o conceito de resolvente e espectro de um operador, trabalhando com algumas de suas propriedades, como a Equação do Resolvente (Teorema 1.1.3). Também contém uma seção voltada ao estudo dos Espaços de Sobolev contendo definições básicas para o desenvolvimento do trabalho. As referências usadas foram [1], [2], [3] e [4].

No Capítulo 2 introduzimos os conceitos de semigrupos de operadores lineares e analíticos, e seus geradores infinitesimais. Começamos com uma seção voltada para cálculo em espaços de Banach (Seção 2.1), abordando conceitos como derivabilidade

de uma aplicação, continuidade forte e fraca de uma função e de um operador linear. Seguimos com uma seção voltada para o estudo de semigrupos de operadores lineares (Seção 2.2), tema principal do nosso capítulo, com uma subseção voltada exclusivamente para o Teorema de Hille - Yosida 2.2.5. E por fim, terminamos o capítulo com uma seção voltada para o estudo de operadores setoriais. Usamos como base, as referências [5], [6], [7], [8], [9], [10] e [2].

O Capítulo 3 é voltado para o estudo do problema de valor inicial do tipo (0.2) num espaço de Banach X , realizado em duas seções. Na primeira seção (Seção 3.1), estudamos o problema (0.2) na sua forma homogênea, ou seja, quando $f \equiv 0$, estabelecendo os conceitos de solução clássica e os relacionando com as propriedades de um gerador de um C_0 -semigrupo, ou de um semigrupo analítico. A segunda seção (Seção 3.2) é voltada para o estudo do problema (0.2) na sua forma semilinear, tendo como principal resultado a *Fórmula da Variação das Constantes*. As definições, exemplos e resultados exibidos neste capítulo, seguem [2], [11] e [1].

Para finalizar, no Capítulo 4, trabalhamos com duas aplicações da Teoria dos Semigrupos em problemas de valor inicial envolvendo equações diferenciais parciais. A primeira aplicação, estudada na Seção 4.1, é feita sobre um modelo que descreve um processo de divisão celular, e tem como principal referência o artigo [12]. A segunda aplicação desta teoria, trabalhada na Seção 4.2 se realiza sobre um modelo semilinear que descreve o processo de condução do calor, tendo como referência principal [2].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados necessários para o desenvolvimento de todo nosso trabalho. Na Seção 1.1, faremos um estudo dos operadores lineares, introduziremos o conceito de espectro e resolvente de um operador, seguindo as bibliografias [1] e [2]. Na Seção 1.2, daremos uma introdução aos espaços de Sobolev, com base nas referências [3] e [4].

1.1 Operadores lineares

Nessa sessão vamos recordar alguns fatos importantes sobre operadores lineares, seu conjunto resolvente e seu espectro.

Sejam X e Y espaços de Banach de dimensão infinita sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Denotamos por

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \rightarrow Y : T \text{ é linear e contínua}\}$$

o espaço dos operadores lineares contínuos de X em Y com a norma usual

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \in X \text{ e } x \neq 0 \right\} = \sup \{\|Tx\| : x \in X \text{ e } \|x\| = 1\}.$$

Quando $X = Y$, o espaço $\mathcal{L}(X, X)$ é denotado simplesmente por $\mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X^*$, representando o espaço dual de X .

Definição 1.1.1. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é chamado **operador***

limitado se

$$\exists C > 0; \|Au\|_Y \leq C\|u\|_X, \quad \forall u \in D(A). \quad (1.1)$$

Lema 1.1.1. *Se $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é um operador linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) *A é globalmente Lipschitz contínuo em $D(A)$, isto é,*

$$\exists L > 0; \|Au - Av\|_Y \leq L\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in D(A).$$

(ii) *A é uniformemente contínuo em $D(A)$,*

(iii) *A é contínuo em $D(A)$,*

(iv) *A é contínuo em $u_0 \in D(A)$,*

(v) *A é um operador limitado.*

Demonstração. Ver [1] pág. 10. □

Teorema 1.1.1. *Seja X um espaço de Banach e $L \in \mathcal{L}(X)$ com $\|L\| < 1$. Então $(I - L)^{-1}$ existe, $(I - L)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, $(I - L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n$ e $\|(I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|L\|}$.*

Demonstração. Ver [9], pág. 35. □

Definição 1.1.2. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. O conjunto resolvente de A , $\rho(A)$, é o conjunto de todos os $\lambda \in \mathbb{K}$ tais que $(\lambda I - A)$ é inversível, ou seja, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado em X .*

Além disso, o operador

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(A),$$

é chamado de resolvente de A . Se A é fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $R(\lambda I - A) = X$.

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é o espectro do operador A .

O espectro de A é constituído do espectro pontual, $\sigma_p(A)$, do espectro residual, $\sigma_r(A)$ e do espectro contínuo, $\sigma_c(A)$, que são definidos por

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ não existe}\},$$

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, } \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} \neq X\},$$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existe, } \overline{\text{Im}(\lambda I - A)} = X \text{ e } (\lambda I - A)^{-1} \text{ não é limitada}\}.$$

Teorema 1.1.2. *Um espaço vetorial é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Ver [13], pág. 232.

1.1.1 Operadores fechados

Definição 1.1.3. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$ é dito **operador fechado** se satisfaz umas das seguintes propriedades equivalentes.*

- (i) *O gráfico $G(A) = \{(u, Au) \in X \times Y : u \in D(A)\}$ é um subespaço fechado de $X \times Y$.*
- (ii) *Se, para a seqüência $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ em $D(A)$ os limites $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \in X$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = y \in Y$ existem, então $u \in D(A)$ e $Au = y$.*

Lema 1.1.2. *Se $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*

Demonstração. Ver [1] pág. 13.

Lema 1.1.3. *Seja $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear fechado tal que $(0, \infty) \subseteq \sigma(A)$ e $\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda > 0$. Então, existe uma norma $|\cdot|$ em X tal que para cada $u \in X$ e $\lambda > 0$*

$$\|u\| \leq |u| \leq M\|u\| \quad e \quad |\lambda R(\lambda, A)u| \leq |u|$$

Demonstração. Ver [8] pág. 57. □

Teorema 1.1.3 (Equação do Resolvente). *Se $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador fechado, então para $\lambda, \mu \in \rho(A)$; $\lambda \neq \mu$*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A). \quad (1.2)$$

Demonstração. Para $\lambda \in \rho(A)$, tem-se

$$\begin{aligned} AR(\lambda, A) &= A(\lambda - A)^{-1} \\ &= (A + \lambda - \lambda)(\lambda - A)^{-1} \\ &= \lambda(\lambda - A)^{-1} - (\lambda - A)(\lambda - A)^{-1} \\ &= \lambda(\lambda - A)^{-1} - I \\ &= \lambda R(\lambda, A) - I. \end{aligned} \quad (1.3)$$

De (1.3), segue que para $\mu, \lambda \in \rho(A)$ as seguintes identidades valem.

$$[\lambda R(\lambda, A) - AR(\lambda, A)]R(\mu, A) = R(\mu, A) \quad (1.4)$$

e

$$R(\lambda, A)[\mu R(\mu, A) - AR(\mu, A)] = R(\lambda, A). \quad (1.5)$$

Como $R(\lambda I - A) = X$, temos que para $y \in X$ existe $x \in X$ tal que

$$y = (\lambda I - A)x. \quad (1.6)$$

Ainda, como $\lambda \in \rho(A)$, temos

$$x = R(\lambda, A)y. \quad (1.7)$$

Substituindo (1.6) e (1.7), na seguinte igualdade,

$$(\mu - A)x - (\lambda - A)x = (\mu - \lambda)x,$$

temos

$$\begin{aligned} (\mu - A)R(\lambda, A)y - y &= (\mu - \lambda)R(\lambda, A)y \\ R(\lambda, A)y - R(\mu, A)y &= (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)y. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Agora, trocando λ por μ e μ por λ , na equação acima, obtemos

$$R(\mu, A)y - R(\lambda, A)y = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A). \quad (1.9)$$

Das igualdades (1.8) e (1.9), segue que

$$R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A),$$

e com isto, provamos (1.2). □

Proposição 1.1.1. *Para o operador fechado $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, valem as seguintes propriedades.*

(i) *O conjunto resolvente, $\rho(A)$, é aberto em $\mathbb{C}$, e para $\mu \in \rho(A)$ a identidade*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

vale para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$.

(ii) A aplicação

$$\begin{aligned} R(\cdot, A) : \rho(A) \subset \mathbb{C} &\rightarrow \mathcal{L}(X) \\ \lambda &\mapsto R(\lambda, A) \end{aligned}$$

é localmente analítica, e sua derivada é dada por

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

(iii) Seja $\lambda_n \in \rho(A)$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda_0$. Então $\lambda_0 \in \sigma(A)$ se, e somente se,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty.$$

Demonstração.

(i) Seja $\mu \in \rho(A)$ e tomemos $\varepsilon = \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$, pois $R(\mu, A) \neq 0$. Tomemos $\bar{\mu} \in B(\mu, \varepsilon)$. Assim,

$$\bar{\mu} - A = \mu - A + \mu - \bar{\mu} = [I - (\mu - \bar{\mu})R(\mu, A)](\mu - A). \quad (1.11)$$

Como $|\bar{\mu} - \mu| < \varepsilon = \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$, temos

$$\begin{aligned} \|(\mu - \bar{\mu})R(\mu, A)\| &\leq |\mu - \bar{\mu}| \|R(\mu, A)\| \\ &< \frac{1}{\|R(\mu, A)\|} \|R(\mu, A)\| = 1. \end{aligned}$$

Seja $G := (\mu - \bar{\mu})R(\mu, A)$. Temos $\|G\| < 1$, então pelo Teorema 1.1.1, $(I - G)^{-1} = [I - (\mu - \bar{\mu})R(\mu, A)]^{-1}$ existe e

$$[I - (\mu - \bar{\mu})R(\mu, A)]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} G^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \bar{\mu})^n R(\mu, A)^n.$$

Observemos que de (1.11), segue que

$$(\bar{\mu} - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1} [I - (\mu - \bar{\mu})R(\mu, A)]^{-1} = R(\mu, A)(I - G)^{-1},$$

isto é, $(\bar{\mu} - A)^{-1}$ existe e é contínua, então $\bar{\mu} \in \rho(A)$.

Logo, $B(\mu, \varepsilon) \subset \rho(A)$ e assim $\rho(A)$ é aberto.

Ainda,

$$\begin{aligned} R(\bar{\mu}, A) &= (\bar{\mu} - A)^{-1} \\ &= R(\mu, A) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \bar{\mu})^n R(\mu, A)^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \bar{\mu})^n R(\mu, A)^{n+1}. \end{aligned}$$

(ii) A aplicação

$$\lambda \in \rho(A) \mapsto R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$$

• contínua;

De fato, fixemos $\lambda_0 \in \rho(A)$ tal que $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{R(\lambda_0, A)}$, então

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A) - R(\lambda_0, A)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(\lambda_0 - \lambda)R(\lambda, A)R(\lambda_0, A)\| \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\| \|R(\lambda, A)\| \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\| \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^n \|R(\lambda_0, A)\|^{n+1} \\ &\leq |\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} (|\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0, A)\|)^n \\ &\leq \frac{|\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\|^2}{1 - |\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0, A)\|}. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \|R(\lambda, A) - R(\lambda_0, A)\| = 0$, e portanto, a aplicação

$$\rho(A) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$$

é contínua.

• diferenciável;

De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(\lambda_0 + h, A) - R(\lambda_0, A)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(\lambda_0 + h, A)R(\lambda_0, A)(\lambda_0 - (\lambda_0 + h))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(\lambda_0 + h, A)R(\lambda_0, A)(-h)}{h} \\ &= -R(\lambda_0, A)^2. \end{aligned}$$

Logo, a aplicação $R(\lambda, A)$ é diferenciável.

Passemos agora à demonstração de (1.10). Para isso, usaremos o princípio de indução

finita.

Para $n = 1$ acabamos que ver que a igualdade é verdadeira.

Vamos supor que (1.10) vale para $n = k$, ou seja, que a seguinte igualdade vale $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda, A) = (-1)^k k! R(\lambda, A)^{k+1}.$$

Agora, para $n = k + 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}} R(\lambda, A) &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^k}{d\lambda^k} R(\lambda, A) \right) \\ &= \frac{d}{d\lambda} ((-1)^k k! R(\lambda, A)^{k+1}) \\ &= (-1)^k (-1) k! (\lambda - A)^{-k} (\lambda - A)^{-2} (k + 1) \\ &= (-1)^{k+1} (k + 1)! (\lambda - A)^{-(k+2)} \\ &= (-1)^{k+1} (k + 1)! R(\lambda, A)^{k+2}. \end{aligned}$$

Logo, (1.10) vale $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Localmente analítica. Segue imediatamente do item (i).

(iii) $\Rightarrow$ Para $\mu, \lambda_0 \in \rho(A)$, temos

$$\left\{ \lambda_0 \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|} \right\} \subset \rho(A).$$

Dai

$$\rho(A)^c \subset \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda_0| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|} \right\}^c.$$

Logo,

$$\sigma(A) \subset \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda_0| \geq \frac{1}{\|R(\mu, A)\|} \right\}.$$

Assim,

$$\inf_{\lambda \in \sigma(A)} \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| \geq \frac{1}{\|R(\mu, A)\|} \right\} = \left\{ \lambda_0 \in \mathbb{C} : \text{dist}(\lambda_0, \sigma(A)) \geq \frac{1}{\|R(\mu, A)\|} \right\}.$$

Portanto,

$$\|R(\mu, A)\| \geq \frac{1}{\text{dist}(\lambda_0, \sigma(A))} \rightarrow \infty.$$

$\Leftrightarrow$ Suponhamos que $\lambda_0 \in \rho(A)$. Assim, o conjunto $\Lambda = \{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \rho(A)$ é compacto, $((\lambda_n) \in \rho(A)$ e $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$), e como a aplicação, $\lambda \mapsto (A - \lambda)^{-1} = R(\lambda, A)$ é

contínua, segue que ela é limitada, pois $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ é linear. Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \|R(\lambda, A)\| < M,$$

que é uma contradição, pois por hipótese, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R(\lambda_n, A)\| = \infty$. $\square$

1.2 Espaços de Sobolev

Nessa seção vamos introduzir os espaços de Sobolev considerando algumas das suas mais importantes propriedades. Esses espaços são definidos sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ arbitrário e são subespaços vetoriais de $L^p(\Omega)$.

Definição 1.2.1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido como sendo*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \quad (1.12)$$

onde $D^\alpha u$ é a derivada de u no sentido de distribuições.

Definição 1.2.2. *O funcional $\|\cdot\|_{m,p} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$, definido por*

$$\|u\|_{m,p} = \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty}, & p = \infty \end{cases} \quad (1.13)$$

é uma norma em $L^p(\Omega)$, para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e $W^{m,p}$ é um espaço de Banach.

Definição 1.2.3. *Para algum inteiro positivo m e $1 \leq p \leq \infty$ consideremos três espaços vetoriais no qual $\|\cdot\|_{m,p}$ é uma norma:*

- (a) $H^{m,p}(\Omega) \equiv$ o completamento de $\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{m,p}$,
- (b) $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$, e
- (c) $W_0^{m,p}(\Omega) \equiv$ fecho de C_0^∞ no espaço $W^{m,p}(\Omega)$.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é chamado espaço de Sobolev de ordem m e expoente p . Além disso, $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, e se $1 \leq p < \infty$, $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ pois $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$. Também denotamos o espaço $W_0^{m,p}$ por $H_0^{m,p}(\Omega)$. As seguintes inclusões valem

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

e são contínuas.

Teorema 1.2.1 (Meyers, Serrin). *Se $1 \leq p < \infty$, então*

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega).$$

Demonstração. Ver [3], pág. 67. □

Em todo nosso trabalho vamos considerar Ω como sendo um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $W^{m,2}(\Omega) = H^{m,2}(\Omega)$ e $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e $H_0^m(\Omega)$, respectivamente.

CAPÍTULO 2

SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES

Este capítulo contém um estudo sobre semigrupos de operadores lineares e analíticos, e seus geradores infinitesimais. Esses conceitos são usados na teoria moderna de equações diferenciais para investigar suas propriedades, como existência e unicidade de soluções e dependência contínua com relação aos dados iniciais. A Seção 2.1, apresenta definições e resultados trabalhados em espaços de Banach, seguindo as referências [5] e [6]. A Seção 2.2 é voltada para o estudo das propriedades básicas dos C_0 -semigrupos e constitui uma introdução para a seção 2.3 que é constituída do estudo dos semigrupos analíticos. Essas seções, seguem as bibliografias [7], [8], [9], [10] e [2].

2.1 Cálculo em espaço de Banach

Nessa seção apresentaremos definições e alguns resultados em espaços de Banach que serão utilizados nos capítulos seguintes. No que segue, X e Y , representam espaços de Banach.

Definição 2.1.1. *Seja $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$ uma função. Dizemos que u é fracamente contínua em $t_0 \in I$ se*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\varphi(u(t)) - \varphi(u(t_0))| = 0, \forall \varphi \in X^*. \quad (2.1)$$

Dizemos que u é fortemente contínua em $t_0 \in I$ se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|u(t) - u(t_0)\|_X = 0. \quad (2.2)$$

Definição 2.1.2. *Seja $T : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(Y, X)$. Dizemos que T é fracamente contínua em*

$t_0 \in I$ se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\varphi[T(t)u] - \varphi[T(t_0)u]| = 0, \quad \forall u \in Y \quad e \quad \forall \varphi \in X^*. \quad (2.3)$$

T é fortemente contínua em $t_0 \in I$ se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|T(t)u - T(t_0)u\|_X = 0, \quad \forall u \in Y. \quad (2.4)$$

Exemplo 2.1.1. Seja $X = C(\mathbb{R}) = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; \phi \text{ é contínua}\}$. Definamos

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) \\ t &\mapsto T(t) : X \rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto (T(t)u)(x) = u(x+t). \end{aligned}$$

Assim definido, $T(t)u$ leva u numa “translação”.

Para $\varphi \in (\mathcal{L}(X, \mathbb{R}))^*$ temos

$$\|(\varphi(T(t)u)) - (\varphi(T(t_0)u))\|_{(\mathcal{L}(X))^*} \leq |\varphi| \|T(t) - T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)}, \text{ onde}$$

$$\|T(t) - T(t_0)\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{u \in X, \|u\| \leq 1} \{\|T(t)u - T(t_0)u\|_X\} \text{ e}$$

$$\|T(t)u - T(t_0)u\|_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{\|(T(t)u)(x) - (T(t_0)u)(x)\|\}.$$

Como φ é contínua, temos que quando $t \rightarrow t_0$

$$\|(T(t)u)(x) - (T(t_0)u)(x)\| = \|u(x+t) - u(x+t_0)\| < \varepsilon.$$

Logo, T é fortemente contínua em $t_0 \in \mathbb{R}$.

Definição 2.1.3. Seja $U \subset X$ aberto. A aplicação $f : U \rightarrow Y$ é derivável num ponto $x_0 \in U$ se existe $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0, \quad \text{com } x \in U,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - A(h)\|}{\|h\|} = 0, \quad \text{com } x_0 + h \in U.$$

Caso exista esta aplicação, temos que ela é única e é chamada a derivada de f em x_0 , sendo representada por $Df(x_0)$. Portanto,

$$Df(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Exemplo 2.1.2. Se $X = \mathbb{R}$, $U = (a, b)$ e $F : U \rightarrow Y$ é derivável em $t \in U$, a derivada

$$\begin{aligned} dF(t) : U &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y) \\ r &\mapsto dF(t)(r) = rdF(t)[1], \end{aligned}$$

pode ser identificada com $dF(t)[1] \in Y$ através do isomorfismo canônico $i(A) = A(1)$.

Por exemplo, se $Y = \mathbb{R}^n$, $F(t) = (f_i(t))_{i=1,2,\dots,n}$

$$\begin{aligned} dF(t) : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \frac{d}{dt}(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) = \left(\frac{d}{dt}f_i(t)\right)_{i=1,\dots,n}, \end{aligned}$$

ou seja, é o vetor com componentes $\frac{df_i}{dt}$.

2.2 C_0 -semigrupos de operadores lineares

Consideremos uma família a um parâmetro $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$.

Definição 2.2.1. A família $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares em X se

(i) $T(0) = I$, (I é o operador identidade em X).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$.

Definição 2.2.2. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares é chamado fortemente contínuo ou C_0 -semigrupo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t)x - x\|_X = 0 \quad \text{para cada } x \in X, \quad (2.5)$$

em outras palavras, a aplicação

$$\begin{aligned} T : [0, \infty) &\rightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\mapsto T(t) \end{aligned}$$

é fortemente contínua em $t_0 = 0$.

Exemplo 2.2.1. Consideremos o espaço

$$X = C([0, \infty)) = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é contínua em } [0, \infty) \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty\},$$

munido da norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$, $f \in X$.

O espaço vetorial X munido da norma $\|\cdot\|_\infty$ é de Banach.

Para cada $t \in [0, \infty)$, definamos o operador $T(t)$ por

$$\begin{aligned} T(t) : X &\rightarrow X \\ f &\mapsto T(t)f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \\ (T(t)f)(x) &\mapsto f(x+t). \end{aligned}$$

• O operador $T(t)$ está bem definido.

Se $f \in X$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|x - x_0| < \delta$ então $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Observe que para todo $t \in [0, \infty)$, $x + t, x_0 + t \in [0, \infty)$ e dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|x + t - (x_0 + t)| < \delta$ então $|f(x + t) - f(x_0 + t)| < \varepsilon$. Isto mostra que $|(T(t)f)(x) - (T(t)f)(x_0)| < \varepsilon$.

Por outro lado, como $x + t \rightarrow \infty$, quando $x \rightarrow \infty$, $\forall t \geq 0$, segue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (T(t)f)(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x+t) < \infty.$$

Portanto, $T(t)f \in X$.

• O operador $T(t)$ é linear.

Dados $f, g \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} (T(t)[\alpha f + \beta g])(x) &= (\alpha f + \beta g)(x+t) = \alpha f(x+t) + \beta g(x+t) \\ &= \alpha (T(t)f)(x) + \beta (T(t)g)(x) \\ &= [\alpha (T(t)f) + \beta (T(t)g)](x), \quad \forall x \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Disto segue que

$$T(t)[\alpha f + \beta g] = \alpha T(t)f + \beta T(t)g.$$

• O operador $T(t)$ é limitado.

Para $f \in X$ temos

$$\begin{aligned} \|T(t)f\|_\infty &= \sup_{x \in [0, \infty)} |(T(t)f)(x)| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x+t)| \\ &\leq \sup_{(x+t) \in [0, \infty)} |f(x+t)| = \|f\|_\infty, \end{aligned}$$

logo,

$$\|T(t)f\|_\infty \leq \|f\|_\infty, \forall t \geq 0. \quad (2.6)$$

Portanto, $T(t)$ é linear e limitada para todo $t \geq 0$, i.e., $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, $\forall t \geq 0$.

• A família $\{T(t), t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo.

De fato, dados $f \in X$ e $x \geq 0$ temos:

(i) $[T(0)f](x) = f(x+0) = f(x), \forall x \geq 0$. Disto segue que $T(0)f = f, \forall f \in X$. Logo

$$T(0) = I. \quad (2.7)$$

(ii) Dados $t_1, t_2 \in [0, \infty)$, temos

$$\begin{aligned} [T(t_1 + t_2)f](x) &= f(x + (t_1 + t_2)) = f((x + t_1) + t_2) \\ &= [T(t_2)f](x + t_1) = T(t_1)(T(t_2)f)(x). \end{aligned}$$

Como x é qualquer, segue que

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1)T(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0. \quad (2.8)$$

Logo, $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo.

Agora só nos resta mostrar que $\|T(t)f - f\|_\infty \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow 0^+$. De fato,

$$\begin{aligned} \|T(t)f - f\|_\infty &= \sup_{x \in [0, \infty)} |(T(t)f - f)(x)| \\ &= \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x+t) - f(x)|. \end{aligned}$$

Para $f \in X$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $f(x) \rightarrow \alpha$, quando $x \rightarrow \infty$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $A = A(\varepsilon)$ tal que $\forall x > A$, tem-se

$$|f(x) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Em particular, se $x \geq A$ e $t \geq 0$, então $x+t \geq A$ e conseqüentemente,

$$\begin{aligned} |f(x+t) - f(x)| &\leq |f(x+t) - \alpha| + |\alpha - f(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo,

$$\sup_{x \in [A, \infty)} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.9)$$

A função $f|_{[0, A+1]} : [0, A+1] \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua e, portanto, uniformemente contínua, assim para todo ε existe $\delta = \delta(A(\varepsilon))$, com $0 < \delta < 1$, tal que

$$|f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [0, A] \quad e \quad \forall t \in [0, \delta),$$

logo,

$$\sup_{x \in [0, A]} |f(x+t) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall 0 \leq t < \delta. \quad (2.10)$$

Então, de (2.9) e (2.10), temos

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x+t) - f(x)| &\leq \sup_{x \in [0, A]} |f(x+t) - f(x)| \\ &\quad + \sup_{x \in [A, \infty)} |f(x+t) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon, \forall t \in [0, \delta) \end{aligned}$$

e assim, quando $t \rightarrow 0^+$, temos

$$\|T(t)f - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

Portanto, $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um C_0 -semigrupo de operadores lineares.

Definição 2.2.3. Um semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares é chamado uniformemente contínuo se

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0. \quad (2.11)$$

Exemplo 2.2.2. Se $A \in \mathcal{L}(X)$, a família $\{e^{tA} : t \geq 0\}$, define um semigrupo uniformemente contínuo, onde $e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$.

Temos que:

- A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ é convergente.

De fato, como $A \in \mathcal{L}(X)$ segue que $\frac{\|tA\|^n}{n!} \leq \frac{(|t|||A||)^n}{n!}$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ e como a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|||A||)^n}{n!}$ converge, segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|tA\|^n}{n!}$ converge, isto é, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ converge absolutamente e como $\mathcal{L}(X)$ é de Banach, pelo Teorema 1.1.2 a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ é convergente. Denotemos a soma desta série por

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Logo, e^{tA} está bem definido para todo $t \geq 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^k \frac{\|tA\|^n}{n!} &\leq \sum_{n=0}^k \frac{(|t|\|A\|)^n}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|\|A\|)^n}{n!} \\ &\leq e^{|t|\|A\|}. \end{aligned}$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ na última desigualdade temos

$$\|e^{tA}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^n A^n\|}{n!} \leq e^{|t|\|A\|}, \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

• e^{tA} é linear.

De fato, dados $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} e^{tA}(\alpha x + \beta y) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) (\alpha x + \beta y) \\ &= \alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) x + \beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} \right) y \\ &= \alpha e^{tA} x + \beta e^{tA} y. \end{aligned}$$

De (2.12) segue que e^{tA} é limitado. Logo, $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$, $\forall t \geq 0$.

A família $\{e^{At} : t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares. De fato,

$$(i) \quad e^{0A} = I + 0A + \frac{0^2 A^2}{2!} + \dots = I.$$

(ii) Para $s, t \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} e^{tA} e^{sA} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} A^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k s^{n-k} A^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t+s)^n}{n!} A^n = e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

Portanto, $\{e^{tA} : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares.

• Se $|t| \leq k$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ converge uniformemente.

De fato, por hipótese temos $A \in \mathcal{L}(X)$, $t \geq 0$, e a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|||A||)^n}{n!}$ é uma série convergente de números reais com $\frac{(|t|||A||)^n}{n!} \geq 0$ e $\frac{\|t^n A^n\|}{n!} \leq \frac{(|t|||A||)^n}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $t \geq 0$.

Nessas condições pelo Teste de Weierstrass, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|t^n A^n\|}{n!}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ são uniformemente convergentes.

Logo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$ é absoluta e uniformemente convergente.

• A família $\{e^{At} : t \geq 0\}$ é uniformemente contínua.

De fato, seja

$$\begin{aligned} S_k(t) &= \sum_{n=1}^k \left\| \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} \right\| = \sum_{n=1}^k \frac{\|t^{n-1} A A^{n-1}\|}{(n-1)!} \leq \|A\| \sum_{n=1}^k \frac{(|t|||A||)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &\leq \|A\| \sum_{n=0}^k \frac{(|t|||A||)^n}{n!} \leq \|A\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|||A||)^n}{n!} = \|A\| e^{|t|||A||}, \end{aligned}$$

disso segue que,

$$\begin{aligned} \|e^{tA} - I\| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|t|||A||)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|t|||A||)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &\leq |t|||A|| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(|t|||A||)^{n-1}}{(n-1)!} = |t|||A|| e^{|t|||A||}. \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{t \rightarrow 0} \|e^{tA} - I\| \rightarrow 0$.

Portanto, a família $\{T(t) = e^{tA}, t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares uniformemente contínuos.

Observação 2.2.1. Se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares uniformemente contínuo, então $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo. Por outro lado, nem sempre um C_0 -semigrupo é um semigrupo uniformemente contínuo, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 2.2.3. Retornemos ao Exemplo 2.2.1, ou seja, consideremos

$$X = C([0, \infty)) = \{f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ é contínua em } [0, \infty) \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty\},$$

munido da norma $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x)|$, $f \in X$. Assim definido, $(X, \|\cdot\|_{\infty})$ é de Banach.

Vimos que o operador

$$\begin{aligned} T(t) : X &\rightarrow X \\ f &\mapsto T(t)f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \\ (T(t)f)(x) &\mapsto f(x+t) \end{aligned}$$

é linear e limitado, e que a família $\{T(t), t \geq 0\}$ define um C_0 -semigrupo.

Nesse exemplo, vamos mostrar que esta família não é um semigrupo uniformemente contínuo. De fato, seja

Seja $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f_t(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x}{t}, & 0 \leq x < t \\ -1, & x \geq t. \end{cases}$$

- $f \in X$.

De fato, o único ponto de possível descontinuidade para f é quando $x = t$, mas analisando seus limites laterais, vemos que esses coincidem, e portanto, $f \in C[0, \infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow t^-} f_t(x) &= \lim_{x \rightarrow t} 1 - \frac{2x}{t} = -1, \quad e \\ \lim_{x \rightarrow t^+} f_t(x) &= \lim_{x \rightarrow t} -1 = -1. \end{aligned}$$

Da definição de f vemos que $\lim_{x \rightarrow \infty} f_t(x) < \infty$. Isto prova a afirmação.

- A família $\{T(t) : t \geq 0\}$ não é semigrupo uniformemente contínuo. De fato, da definição do operador $T(t)$, temos

$$\|T(t)f - f\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty)} \|(T(t)f - f)(x)\| = \sup_{x \in [0, \infty)} |f(x+t) - f(x)|,$$

para todo $x \in [0, \infty)$. Tomando, em particular, $x = 0$ temos

$$\|T(t)f - f\|_\infty \geq |f(t) - f(0)| \geq 2.$$

Então, para todo $t > 0$ existe $f_t \in X$ tal que

$$\|T(t)f_t - f_t\|_\infty \geq 2\|f_t\|_\infty \quad (\text{aqui } \|f_t\|_\infty = 1).$$

Portanto, $\forall t > 0 \quad \|T(t) - I\| \geq 2 \Rightarrow \|T(t) - I\| \not\rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Logo, o C_0 -semigrupo por translações em $(X, \|\cdot\|_\infty)$ não é semigrupo uniformemente contínuo.

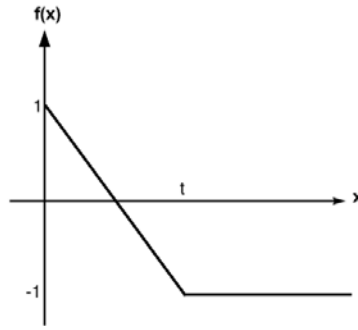


Figura 1: Exemplo 2.2.3

O seguinte resultado fornece uma estimativa para a norma do operador $T(t)$.

Teorema 2.2.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo em X . Então existem constantes $\beta \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\beta t}, \quad \forall t > 0. \quad (2.13)$$

Demonstração. Vamos mostrar que a família $\{T(t) : t \geq 0\}$ não seja limitada, ou seja, existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ e $\|T(t_n)\| \geq n$. Desse modo, temos $\{\|T(t_n)\|, n \geq 0\}$ ilimitada.

Por outro lado, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo, logo para cada $u \in X$, $\{\|T(t_n)u\|\}$ é limitada.

Desse modo, o Teorema da limitação uniforme, nos garante que $\{\|T(t_n)\|, n \in \mathbb{N}\}$ é limitada. Contradição!

Logo,

$$\|T(t)\| \leq M \quad \text{para } t \geq 0$$

e $M \geq 1$, pois $\|T(0)\| = 1$.

Mostremos agora a estimativa para o operador $T(t)$ dada em (2.13). Para isso, consideremos $\beta \geq 0$, $\delta > 0$, e os intervalos $[0, \delta]$ e $[\delta, \infty)$.

Como a exponencial é uma função crescente, segue que no intervalo $[0, \delta]$

$$\|T(t)\| \leq M e^{\beta t}, \quad \forall \beta \geq 0.$$

Agora, para $t > \delta$ considere $\beta = \delta^{-1} \log M$, $\delta > 0$. Note que $\beta \geq 0$, pois $M \geq 1$. Pelo algoritmo de Euclides, existe $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq \eta < \delta$ tal que $t = n\delta + \eta$. Assim,

$$T(t) = T(n\delta + \eta) = T(n\delta)T(\eta) = T(\delta)^n T(\eta),$$

logo,

$$\begin{aligned}\|T(t)\| &= \|T(\delta)^n T(\eta)\| \leq \|T(\delta)\|^n \|T(\eta)\| \\ \|T(t)\| &\leq M^n M.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Como $\beta = \delta^{-1} \log M$ então $\beta\delta = \log M$, logo $n\beta\delta = n \log M = \log M^n$ e assim,

$$\beta t = \beta(n\delta + \eta) \geq n\beta\delta = \log M^n,$$

o que implica

$$e^{\beta t} \geq M^n.$$

Logo, fixando $\delta = 1$, a desigualdade (2.14) fica da seguinte forma

$$\|T(t)\| \leq M e^{\beta t}, \forall t > 0.$$

□

Corolário 2.2.1. *Para cada $u \in X$, a aplicação*

$$\begin{aligned}f : [0, \infty) &\rightarrow X \\ t &\mapsto f(t) = T(t)u\end{aligned}$$

é contínua, onde $T(t)$ é um C_0 -semigrupo. Mais precisamente, para cada $u \in X$

$$T(\cdot)u \in C([0, \infty); X).$$

Demonstração. Sejam $t \geq 0$ e $h \geq 0$ com $t \geq h$. Temos

$$\begin{aligned}\|f(t+h) - f(t)\| &= \|T(t+h)u - T(t)u\| = \|T(t)T(h)u - T(t)u\| \\ &= \|T(t)(T(h)u - u)\| \leq \|T(t)\| \|T(h)u - u\|.\end{aligned}$$

Sendo $T(t)$ limitado e usando o Teorema 2.2.1, obtemos

$$\|f(t+h) - f(t)\| \leq M e^{\beta t} \|T(h)u - u\|.$$

Logo, da definição de semigrupo, segue que

$$\|f(t+h) - f(t)\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0^+$$

e, portanto,

$$\lim_{s \rightarrow t^+} f(s) = f(t).\tag{2.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(t-h)\| &= \|T(t)u - T(t-h)u\| = \|T(t+h-h)u - T(t-h)u\| \\ &= \|T(h)T(t-h)u - T(t-h)u\| = \|T(t-h)\| \|T(h)u - u\| \\ &\leq Me^{\beta t} \|T(h)u - u\|.\end{aligned}$$

Dai,

$$\begin{aligned}\|f(t) - f(t-h)\| &\leq Me^{\beta(t-h)} \|T(h)u - u\| \\ &\leq Me^{\beta t} \|T(h)u - u\|,\end{aligned}$$

donde segue que

$$\|f(t) - f(t+h)\| \rightarrow 0, h \rightarrow 0^+$$

e, conseqüentemente,

$$\lim_{s \rightarrow t^-} f(s) = f(t). \quad (2.16)$$

Logo, de (2.15) e (2.16), f é contínua. $\square$

Definição 2.2.4. Um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ é dito uniformemente limitado, se $\|T(t)\| \leq M$, $M \geq 1$. Além disso, se $M = 1$, dizemos que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de contração, para todo $t \geq 0$.

Definição 2.2.5. Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo em X . O gerador infinitesimal do semigrupo é o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, definido por

$$D(A) = \left\{ u \in X : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t}, \quad u \in D(A).$$

Exemplo 2.2.4. Seja $X = \{f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) < \infty\}$. Considerando em X a norma do supremo, vimos que a família $\{T(t) : t \geq 0\}$ dada no Exemplo 2.2.1 é um C_0 -semigrupo em X . Agora, vamos encontrar seu gerador infinitesimal.

Para todo $s \geq 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)f(s) - f(s)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) - f(s)}{t} = D^+ f(s)$$

onde D^+ é a derivada à direita de f , quando tal limite existe.

Assim, para que $f \in D(A)$, devemos ter $D^+ f \in X$, o que implica em $D^+ f$ ser limitada e uniformemente contínua.

Observamos ainda que

$$f(x+t) - f(x) = D^+f(x)t + r(t), \quad \text{com} \quad \frac{r(t)}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+$$

e, pela continuidade de D^+f , temos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(s) - f(s-t)}{t} = D^+f(s)$$

o que implica que a derivada à esquerda $D^-f(s)$ existe em todo o ponto e

$$D^+f = D^-f,$$

donde segue que f é derivável em todo ponto. Assim,

$$D(A) = \{f \in X; f' \text{ existe em todo o ponto e } f' \in X\} \text{ e}$$

$$Af = f', \quad f \in D(A).$$

Proposição 2.2.1. *Seja A o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Então,*

(a) Para $u \in X$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u ds = T(t)u. \quad (2.17)$$

(b) Para $u \in X$, $\int_0^t T(s)u ds \in D(A)$ e

$$A \left(\int_0^t T(s)u ds \right) = T(t)u - u. \quad (2.18)$$

(c) Se $u \in D(A)$, então $T(t)u \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt} T(t)u = AT(t)u = T(t)Au. \quad (2.19)$$

(d) Para $u \in D(A)$,

$$T(t)u - T(s)u = \int_s^t T(\tau)A u d\tau = \int_s^t AT(\tau)u d\tau. \quad (2.20)$$

Demonstração.

(a) Do Teorema do Valor Médio para integrais, segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u ds = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} T(\tau)u h = \lim_{h \rightarrow 0} T(\tau)u, \quad \tau \in [t, t+h].$$

Assim, $\tau \rightarrow t$ quando $h \rightarrow 0$. Da continuidade da aplicação $t \rightarrow T(t)u$, temos $\lim_{h \rightarrow 0} T(\tau)u = T(t)u$.

(b) Seja $u \in X$ e $h > 0$. Da definição de gerador infinitesimal, temos $A = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h) - I}{h}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} \left(\int_0^t T(s)u ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^t (T(h)T(s)u - T(s)u) ds \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)u ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)u ds. \end{aligned}$$

Do item (a), o lado direito da expressão acima tende a $T(t)u - u$ quando $h \rightarrow 0$, e o lado esquerdo tende ao operador A quando $h \rightarrow 0$. Portanto,

$$A \left(\int_0^t T(s)u ds \right) = T(t)u - u.$$

(c) Seja $u \in D(A)$ e $h > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} T(t)u &= \frac{T(h)T(t)u - T(0)T(t)u}{h} \\ &= \frac{T(t+h)u - T(t)u}{h} \\ &= T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) u \rightarrow T(t)Au, \quad \text{quando } h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Logo, $T(t)u \in D(A)$ e $D^+T(t) = AT(t)u = T(t)Au$.

Agora nos resta provar que, para $t \geq 0$, a derivada à esquerda de $T(t)u$ existe e é igual a $T(t)Au$. De fato, $0 \leq h \leq z$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{T(t)u - T(t-h)u}{h} - T(t)Au \right] &= \lim_{h \rightarrow 0^+} T(t-h) \left[\frac{T(h)u - u}{h} - Au \right] \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0^+} (T(t-h)Au - T(t)Au) \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois ambos os termos do lado direito da igualdade valem zero. De fato, o primeiro termo vale zero pois $u \in D(A)$ e $\|T(t-h)\|_{B(X)}$ é limitado para $0 \leq h \leq t$ e o segundo pela continuidade de $T(t)$.

(d) Integrando a expressão (2.19) de s a t , segue do Teorema Fundamental do Cálculo

$$\begin{aligned}\int_s^t \frac{d}{dt} T(\tau) u d\tau &= \int_s^t AT(\tau) u d\tau = \int_s^t T(\tau) A u d\tau \\ T(t)u - T(s)u &= \int_s^t AT(\tau) u d\tau = \int_s^t T(\tau) A u d\tau.\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado caracteriza completamente os semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares através de seus geradores.

Lema 2.2.1. *Seja $\phi : [a, b] \rightarrow X$ contínua e diferenciável à direita no intervalo $[a, b]$, então ϕ é continuamente diferenciável em $[a, b]$.*

Teorema 2.2.2. *Dado um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, as seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) *O semigrupo é uniformemente contínuo;*
- (ii) *Seu gerador infinitesimal está definido em todo X ;*
- (iii) *Para algum $A \in \mathcal{L}(X)$, $T(t) = e^{tA}$.*

Demonstração.

(iii) $\Rightarrow$ (i) pelo Exemplo 2.2.2.

(i) $\Rightarrow$ (ii) pela definição de gerador.

(ii) $\Rightarrow$ (iii).

De fato, por hipótese, o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ está definido para todo $u \in X$, logo para cada $u \in X$, $\left\{ \left\| \frac{T(t)u - u}{t} \right\|_X \right\}_{0 \leq t \leq 1}$ é limitado. Portanto, do Teorema da limitação uniforme segue que $\left\{ \left\| \frac{T(t) - I}{t} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \right\}_{0 \leq t \leq 1}$ é limitado, e assim,

$$\|T(t) - I\| = \frac{t\|T(t) - I\|}{t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0^+,$$

ou seja, $T(t) \rightarrow I$, $t \rightarrow 0^+$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$ na definição do limite, temos

$$\exists \delta > 0 : 0 \leq t < \delta \Rightarrow \|T(t) - I\| \leq \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|T(t+h) - T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(T(h) - I)T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0^+ \\ \|T(t) - T(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|(T(h) - I)T(t-h)\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

pois $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitada em $[0, \delta]$. Portanto, a aplicação

$$\begin{aligned} [0, \infty) &\rightarrow \mathcal{L}(X) \\ t &\mapsto T(t) \end{aligned}$$

é contínua, e assim, a integral $\int_0^t T(s)ds$ está bem definida com

$$\left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds - I \right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (T(s) - I)ds \right\| &= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds - \frac{1}{\delta} \int_0^\delta I ds \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\delta} \int_0^\delta T(s)ds - I \right\| \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

e, portanto, $\left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, pelo Teorema 1.1.1.

Definamos: $A := (T(s) - I) \left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1}$.

Para cada $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\delta T(s)ds &= h^{-1} \left\{ T(h) \int_0^\delta T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right\} \\ &= h^{-1} \left\{ \int_0^\delta T(s+h)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right\} \\ &= h^{-1} \left\{ \int_h^{\delta+h} T(s)ds - \int_0^\delta T(s)ds \right\} \\ &= h^{-1} \int_h^{\delta+h} T(s)ds - h^{-1} \int_0^\delta T(s)ds. \end{aligned}$$

Logo, quando $h \rightarrow 0^+$ temos as seguintes convergências

$$\begin{aligned} h^{-1}(T(h) - I) \int_0^\delta T(s)ds &\rightarrow T(\delta) - I \quad \text{e} \\ h^{-1}(T(h) - I) &\rightarrow (T(\delta) - I) \left(\int_0^\delta T(s)ds \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainda,

$$h^{-1}(T(t+h) - T(t)) = T(t) \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) = \left(\frac{T(h) - I}{h} \right) T(t).$$

Então,

$$T(t)A = AT(t), \quad h \rightarrow 0^+.$$

Portanto, $t \mapsto T(t)$ tem derivada à direita

$$D^+T(t) = T(t)A = AT(t)$$

que é contínua para todo $t \geq 0$. Daí, pelo Lema 2.2.1, a aplicação $t \mapsto T(t)$ é continuamente diferenciável e da unicidade de solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{T}(t) = AT(t) \\ T(0) = I \end{cases}$$

segue que $T(t) = e^{tA}$, $t \geq 0$. □

Proposição 2.2.2. *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X , então A é fechado e densamente definido.*

Demonstração. Para cada $u \in X$, considere $u_t = \frac{1}{t} \int_0^t T(s)u ds$. Do item (b) da Proposição 2.2.1 temos $u_t \in D(A)$ para $t > 0$ e pelo item (a) da mesma proposição

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^{0+t} T(s)u ds = T(0)u = u.$$

Portanto, $u_t \rightarrow u$, quando $t \rightarrow 0$. Logo, $\overline{D(A)} = X$.

Mostremos agora que A é fechado.

De fato, tomemos $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \rightarrow u$ e $Au_n \rightarrow y$, quando $n \rightarrow \infty$. Da parte (d) da Proposição 2.2.1, temos

$$T(t)u_n - T(0)u_n = \left(\int_0^t T(\tau)Au_n d\tau \right), t \geq 0. \quad (2.21)$$

Observemos que $T(\tau)Au_n \rightarrow T(\tau)Ay$, $n \rightarrow \infty$.

Dessa forma, fazendo $n \rightarrow \infty$ em (2.21) temos

$$T(t)u - u = \int_0^t T(\tau)y d\tau$$

e, pelo item (a) da Proposição 2.2.1

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)u - u}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t T(\tau)y d\tau = T(0)y = y.$$

Logo, $u \in D(A)$ e $A(u) = y$. Portanto, A é fechado.

Teorema 2.2.3. *Sejam $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo num espaço de Banach X ,*

$\beta \in \mathbb{R}$ e $M \geq 1$, tais que $\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}$ para $t \geq 0$. Para o gerador $(A, D(A))$ de $\{T(t) : t \geq 0\}$, as seguintes propriedades valem.

(i) Se $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(\lambda)u := \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s)u ds$ existe $\forall u \in X$, então $\lambda \in \rho(A)$ e $R(\lambda, A) = R(\lambda)$.

(ii) Se $\operatorname{Re} \lambda > \beta$, então $\lambda \in \rho(A)$, e o resolvente é dado pela expressão integral dada em (i).

(iii) $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \beta}$ para todo $\lambda \in \rho(A)$ com $\operatorname{Re} \lambda > \beta$.

A fórmula para $R(\lambda, A)$ em (i) é chamada de representação integral do resolvente. Podemos interpretar essa integral como uma integral imprópria de Riemann, da seguinte forma

$$R(\lambda, A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} T(s)u ds, \quad \text{para todo } u \in X.$$

Demonstração.

(i) Consideremos o caso em que $\lambda = 0$. Então, para $u \in X$ arbitrário e $h > 0$, temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h) - I}{h} R(0)u &= \frac{T(h) - I}{h} \int_0^\infty T(s)u ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s+h)u ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)u ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty T(s)u ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty T(s)u ds \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h T(s)u ds. \end{aligned}$$

Assim, $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h) - I}{h} R(0)u = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{h} \int_0^h T(s)u ds = -I$, ou seja, $R(0) \subseteq D(A)$ e $AR(0) = -I$. Por outro lado, para $u \in D(A)$, temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)u ds = R(0)u,$$

e usando o item (c) da Proposição 2.2.1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A \int_0^t T(s)u ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t T(s)Au ds = R(0)Au.$$

Pela Proposição 2.2.2, A é fechado, então $R(0)Au = AR(0)u = -u$ e portanto, $R(0) = (-A)^{-1}$, como queríamos. Para $\lambda \neq 0$, a prova é similar a que apresentaremos no

seguinte item.

(ii) Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \lambda > \beta$. Definamos: $R(\lambda) : X \rightarrow X$ por

$$R(\lambda)u := \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt.$$

Sejam $u \in X$ e $h > 0$. Mostremos que $R(\lambda)u \in D(A)$. Temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[T(h)R(\lambda)u - R(\lambda)u] &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h)T(t)u dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(h+t)u dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} T(s)u ds - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt \right] \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(t-h)} T(t)u dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t)u dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} e^{\lambda h} T(t)u dt \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty (e^{\lambda h} - 1) e^{-\lambda t} T(t)u dt - \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda(t-h)} T(t)u dt \\ &= \int_0^\infty \frac{(e^{\lambda h} - 1)}{h} e^{-\lambda t} T(t)u dt - e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)u dt. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)R(\lambda)u - R(\lambda)u}{h} &= \int_0^\infty \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) e^{-\lambda t} T(t)u dt - \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t)u dt \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt - u \\ &= \lambda R(\lambda)u - u \\ &= (\lambda R(\lambda) - I)u. \end{aligned}$$

Pois,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{\lambda(0+h)} - e^{\lambda 0}}{h} = (e^{\lambda t})' \Big|_{t=0} = \lambda, \quad e$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\lambda h} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t) u dt &= \lim_{h \rightarrow 0^+} e^{\lambda h} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} T(t) u dt \\
&= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[\int_0^{0+h} e^{-\lambda t} T(t) u dt \right] \\
&= u.
\end{aligned}$$

Portanto, $R(\lambda) \in D(A)$ e $AR(\lambda)u = (\lambda R(\lambda) - I)u \Rightarrow -AR(\lambda)u = u - \lambda R(\lambda)u$. Logo

$$(\lambda - A)R(\lambda)u = u. \quad (2.22)$$

Isto significa que $(\lambda - A)$ é sobrejetora. Também temos que para $u \in D(A)$

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)R(\lambda)u - R(\lambda)u}{h} &= \int_0^\infty \frac{T(h)e^{-\lambda t}T(t)u dt}{h} - \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}T(t)u}{h} dt \\
&= \int_0^\infty \frac{(e^{-\lambda t}T(t+h)u - e^{-\lambda t}T(t)u)}{h} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t) \frac{(T(h)u - u)}{h} dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
AR(\lambda)u &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T(h)R(\lambda)u - R(\lambda)u}{h} \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(T(h)u - u)}{h} dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Au dt \\
&= R(\lambda)Au.
\end{aligned}$$

Então,

$$R(\lambda)(\lambda - A)u = R(\lambda)\lambda u - R(\lambda)Au = R(\lambda)\lambda u - AR(\lambda)u = (\lambda - A)R(\lambda)u = u. \quad (2.23)$$

Portanto, de (2.22) e (2.23), temos que $(\lambda - A)$ é inversível e sua inversa é dada por $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$, ou seja,

$$(\lambda - A)^{-1}u = R(\lambda)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)u dt.$$

Passamos agora à estimativa dada em (iii).

$$\begin{aligned}
 \|R(\lambda, A)\| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda s} T(s) u ds \right\| \leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda s}\| \|T(s)\| u ds \\
 &\leq \int_0^\infty \|e^{-\lambda s}\| M e^{\beta s} ds \leq M \int_0^\infty e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)s} ds \\
 &\leq M \int_0^\infty e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)s} ds.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)s} ds &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)s} ds \\
 &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)b}}{\beta - \operatorname{Re} \lambda} - \frac{1}{\beta - \operatorname{Re} \lambda} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \beta}.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

De (2.24) e (2.25), temos

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \beta}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \beta, \lambda \in \rho(A).$$

□

O seguinte teorema nos dá uma condição suficiente para que a soma de um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração com um operador linear densamente definido gere um C_0 -semigrupo de contração.

Teorema 2.2.4. *Sejam $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$, $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ dois operadores lineares com $D(A) \subseteq D(B)$, e*

$$\|\lambda x - (A + tB)x\| \geq \lambda \|x\| \tag{2.26}$$

para todo $\lambda > 0$, $t \in [0, 1]$ e $x \in D(A)$,

$$\|Bx\| \leq \alpha \|Ax\| + \beta \|x\| \tag{2.27}$$

para cada $x \in D(A)$, onde $\alpha \in [0, 1]$ e $\beta > 0$. Se existe $s \in [0, 1]$ tal que $A + sB$ é fechado, e $(0, +\infty) \subseteq \rho(A + sB)$, então temos $(0, +\infty) \subseteq \rho(A + tB)$ para $t \in [0, 1]$. Nesse caso, para cada $t \in [0, 1]$, $A + tB$ é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contração.

Demonstração. Ver [8], pág.113.

□

Na seguinte seção estudaremos um teorema que caracteriza os operadores que geram C_0 -semigrupos.

2.2.1 O Teorema de Hille - Yosida

Nessa seção enunciaremos e provaremos o teorema de Hille - Yosida para o caso geral. Para isto, precisaremos de algumas definições e resultados preliminares, como segue.

Definição 2.2.6. *Seja $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *A é fechado e densamente definido;*

(ii) *$(0, +\infty) \subseteq \rho(A)$ e para cada $\lambda > 0$*

$$\|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

O operador $A_\lambda : X \rightarrow X$, definido por $A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)$ é chamado de **aproximação de Yosida** de A .

Lema 2.2.2. *Seja $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 2.2.6. Então, para cada $u \in X$*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)u = u \quad (2.28)$$

e

$$A_\lambda u = \lambda^2 R(\lambda, A)u - \lambda u. \quad (2.29)$$

Além disso, para cada $u \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda u = Au. \quad (2.30)$$

Demonstração. Seja $u \in X$ e $\lambda > 0$. Da equação resolvente, segue que

$$\|\lambda R(\lambda, A)u - u\| = \|AR(\lambda, A)u\| = \|R(\lambda, A)Au\| \leq \frac{1}{\lambda}\|Au\|,$$

e conseqüentemente,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)u = u,$$

o que prova (2.28).

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I &= \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda(\lambda I - A)R(\lambda, A) \\ &= \lambda AR(\lambda, A) \\ &= A_\lambda, \end{aligned}$$

assim, para todo $u \in X$,

$$A_\lambda u = \lambda^2 R(\lambda, A)u - \lambda u.$$

Então, para $u \in D(A)$, de (2.28), segue que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} A_\lambda u = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)Au = Au,$$

satisfazendo assim, a igualdade (2.30). $\square$

Lema 2.2.3. *Seja $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ um operador linear que satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.2.6. Então para cada $\lambda > 0$, A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA} : t \geq 0\}$, satisfazendo*

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \quad (2.31)$$

para cada $t \geq 0$. E mais, para cada $u \in X$ e $\lambda, \mu > 0$, temos

$$\|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\| \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\|. \quad (2.32)$$

Demonstração. Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, do Teorema 2.2.2, segue que, A_λ é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$. Agora, para checar (2.31) nos lembremos que de (2.29) e de (ii), temos

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} &= \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A) - t\lambda I}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq \|e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)}\|_{\mathcal{L}(X)} \|e^{-t\lambda I}\|_{\mathcal{L}(X)} \\ &\leq e^{t\lambda^2 \|R(\lambda, A)\|_{\mathcal{L}(X)}} e^{-t\lambda} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Como $A_\lambda, A_\mu, e^{tA_\mu}$ e e^{tA_λ} comutam entre si, segue que

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda}u - e^{tA_\mu}u\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} (e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} u) ds \right\| \\ &\leq \int_0^1 \|tA_\lambda e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} u - tA_\mu e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} u\| ds \\ &\leq \int_0^1 t \|e^{stA_\lambda} e^{(1-s)tA_\mu} (A_\lambda u - A_\mu u)\| ds \leq t\|A_\lambda u - A_\mu u\|, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. $\square$

Lema 2.2.4. *Se o operador linear $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 2.2.6, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações.*

Demonstração. Do limite (2.30) e da desigualdade (2.32), segue que, para cada $t \geq 0$, existe um operador linear $T(t) : D(A) \subseteq X \rightarrow X$ tal que, para cada $u \in D(A)$, o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} u = T(t)u$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$. De (2.31) temos que, para cada $t \geq 0$ e $u \in D(A)$,

$$\|T(t)u\| \leq \|u\|.$$

Como $D(A)$ é denso em X , segue que $T(t)$ pode ser estendido continuamente por todo espaço X .

A família de operadores lineares obtida é um semigrupo, $\{T(t) : t \geq 0\}$ que satisfaz

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1.$$

E para cada $t > 0$, $u, v \in X$,

$$\begin{aligned} \|T(t)u - u\| &\leq \|T(t)u - T(t)v\| + \|T(t)v - e^{tA_\lambda}v\| + \|e^{tA_\lambda}v - v\| + \|v - u\| \\ &\leq \|T(t)v - e^{tA_\lambda}v\| + \|e^{tA_\lambda}v - v\| + 2\|v - u\|. \end{aligned}$$

Seja $T > 0$ e $\varepsilon > 0$. Fixemos $v = u_\varepsilon \in D(A)$, com $\|u - u_\varepsilon\| \leq \varepsilon$, e λ suficientemente grande tal que

$$\|T(t)u - u\| \leq 3\varepsilon + \|e^{tA_\lambda}u_\varepsilon - u_\varepsilon\|. \quad (2.33)$$

Como $\{e^{tA_\lambda} : t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, segue que, para algum $\varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \varepsilon$, $t \in (0, \delta(\varepsilon))$. Logo, para cada $t \in (0, \delta(\varepsilon))$

$$\|e^{tA_\lambda}u_\varepsilon - u_\varepsilon\| \leq \|e^{tA_\lambda} - I\|_{\mathcal{L}(X)}\|u_\varepsilon\| \leq \varepsilon\|u_\varepsilon\|.$$

Como $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ é limitado, essa inequação junto com (2.33) mostra que $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo.

Para concluir a prova, temos que mostrar que o gerador infinitesimal $B : D(B) \subseteq X \rightarrow X$ desse semigrupo coincide com $A : D(A) \subseteq X \rightarrow X$. Para isso, tomemos $u \in D(A)$ e $h > 0$. Temos que o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tA_\lambda} A_\lambda u = T(t)Au$$

converge uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}_+$. Então,

$$\begin{aligned} \|e^{tA_\lambda} A_\lambda u - T(t)Au\| &\leq \|e^{tA_\lambda} A_\lambda u - e^{tA_\lambda} Au\| + \|e^{tA_\lambda} Au - T(t)Au\| \\ &\leq \|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)}\|A_\lambda u - Au\| + \|e^{tA_\lambda} Au - T(t)Au\|. \end{aligned}$$

Essa desigualdade, junto com o limite (2.30) e com as conclusões parciais acima, prova que

$$T(h)u - u = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} (e^{hA_\lambda}u - u) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^h e^{tA_\lambda} A_\lambda u dt = \int_0^h T(t)A u dt$$

Dividindo ambos os lados dessa equação por h e fazendo $h \rightarrow 0^+$, temos que $u \in D(B)$ e $Bu = Au$. Finalmente, mostraremos que $D(A) = D(B)$.

Como B é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo por contrações, do Teorema 2.2.3 e da necessidade, segue que $1 \in \rho(B)$, conseqüentemente $I - B$ é inversível e $(I - B)^{-1}X = D(B)$. Como $(I - B)D(A) = (I - A)D(A)$ e, por (ii), $(I - A)D(A) = X$. Disto segue que $(I - B)D(A) = X$, ou equivalentemente $(I - B)^{-1}X = D(A)$. Então $D(A) = D(B)$. $\square$

Teorema 2.2.5 (Hille - Yosida). *Um operador linear A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}$, se, e somente se*

(i) *A é fechado e $D(A)$ é denso em X .*

(ii) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém (β, ∞) e*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \beta)^n}, \text{ para } \operatorname{Re} \lambda > \beta, n = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ O item (i) segue imediatamente da Proposição 2.2.2. Passamos agora à demonstração do item (ii). Definamos

$$R(\lambda)u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt, \operatorname{Re} \lambda > \beta.$$

Esta integral está bem definida, pois por hipótese $\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}$ e a função dada por $f(t) = e^{-\lambda t} T(t)u$ é contínua para todo $t \geq 0$.

Pelo Teorema 2.2.3 item (i), $R(\lambda) = R(\lambda, A)$.

Passamos à prova de (2.34). Temos

$$\frac{dR(\lambda, A)}{d\lambda} u = \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)u dt = - \int_0^\infty t e^{-\lambda t} T(t)u dt. \quad (2.35)$$

Por indução, temos

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A)u = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)u dt. \quad (2.36)$$

De fato, para

- $n = 1$,

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A)u = - \int_0^\infty t e^{-\lambda t} T(t)u dt,$$

a igualdade é válida por (2.35).

Agora, temos como hipótese de indução, a seguinte igualdade

- $n = k$

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}R(\lambda, A)u = (-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t} T(t)u dt.$$

- $n = k + 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}}{d\lambda^{k+1}}R(\lambda, A)u &= \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{d^k R(\lambda, A)u}{d\lambda^k} \right) \\ &= \frac{d}{d\lambda} \left((-1)^k \int_0^\infty t^k e^{-\lambda t} T(t)u dt \right) \\ &= (-1)^k \int_0^\infty (-1) t^{k+1} e^{-\lambda t} T(t)u dt \\ &= (-1)^{k+1} \int_0^\infty t^{k+1} e^{-\lambda t} T(t)u dt. \end{aligned}$$

Portanto, a identidade (2.36) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, da Proposição 1.1.1 segue que para todo $\lambda \in \rho(A)$, $\lambda \rightarrow R(\lambda, A)$ é analítica e

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A) = -R(\lambda, A)^2. \quad (2.37)$$

Ainda, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{d^n R(\lambda, A)}{d\lambda^n} = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1}. \quad (2.38)$$

Comparando as equações (2.36) e (2.38), temos

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)^{n+1}u &= \frac{d^n R(\lambda, A)u}{d\lambda^n} \frac{1}{(-1)^n n!} \\ &= \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n e^{-\lambda t} T(t)u dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$R(\lambda, A)^n u = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t)u dt, \quad (2.39)$$

onde,

$$\int_0^\infty t^{n-1} e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t} dt = \frac{(n-1)!}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^n}. \quad (2.40)$$

De fato, mostremos por indução, que vale (2.40).

- $n = 1$.

Do Teorema 2.2.3, segue que

$$\int_0^\infty e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t} dt = \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \beta}.$$

- $n = k$.

$$\int_0^\infty t^{k-1} e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t} dt = \frac{(k-1)!}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^k}.$$

- $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^k e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t} dt &= \left. \frac{t^k e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t}}{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)} \right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{k t^{k-1} e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t}}{\beta - \operatorname{Re} \lambda} dt \\ &= \frac{k}{\operatorname{Re} \lambda - \beta} \int_0^\infty t^{k-1} e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t} dt \\ &= \frac{k}{\operatorname{Re} \lambda - \beta} \frac{(k-1)!}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^k} \\ &= \frac{k!}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^{k+1}}, \end{aligned}$$

pois $\frac{t^k e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t}}{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)} \Big|_0^\infty = 0$.

Logo, a identidade (2.40) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Finalmente, estimemos a equação (2.39).

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)^n u\| &\leq \left\| \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t) u \right\| \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \|t^{n-1} e^{-\lambda t} T(t) u\| dt \\ &\leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-\operatorname{Re} \lambda t} M e^{\beta t} \|u\| dt \\ &\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{(\beta - \operatorname{Re} \lambda)t} \|u\| dt \\ &\leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \beta)^n} \|u\|. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Vamos supor que as condições (i) e (ii) valem. Pelo Lema 1.1.3 sabemos que existe uma norma equivalente $|\cdot|$ em X satisfazendo $\|u\| \leq |u| \leq M\|u\|$ e $|\lambda R(\lambda, A)u| \leq |u|$

para cada $u \in X$ e $\lambda > 0$. Então, no espaço $(X, |\cdot|)$, o operador linear A satisfaz as hipóteses do Lema 2.2.4, e portanto gera um C_0 -semigrupo por contrações $\{T(t) : t \geq 0\}$. Finalmente,

$$\|T(t)u\| \leq |T(t)u| \leq |u| \leq M\|u\|$$

para cada $t \geq 0$ e $u \in X$, o que finaliza a demonstração para o caso $\beta = 0$.

Para o caso geral, observemos simplesmente, que se $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo tal que $\|T(t)\| \leq Me^{\beta t}$ e A é seu gerador infinitesimal, então $\{e^{-\beta t}T(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo tal que $\|T(t)\| \leq M$ e $A - \beta I$ é seu gerador infinitesimal. $\square$

2.3 Semigrupos analíticos

Até aqui trabalhamos com semigrupos de operadores lineares, cujo domínio é o eixo real e não negativo. Consideremos agora a possibilidade de estender o domínio do parâmetro para regiões no plano complexo que inclui o eixo real não negativo. É claro que deve ser preservada a estrutura de semigrupos, o domínio em que o parâmetro complexo varia deve ser um semigrupo aditivo de números complexos.

Assim, temos que a classe dos semigrupos analíticos é uma sub-classe própria dos semigrupos fortemente contínuos. Eles ajudam a resolver problemas de Cauchy abstratos com dados iniciais no espaço todo.

Seja X um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|$.

Definição 2.3.1. *Seja $\{T(t) : t \geq 0\}$ um C_0 -semigrupo em X . Se existe um setor no plano complexo*

$$\Delta_\phi = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \phi\}, \quad 0 < \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

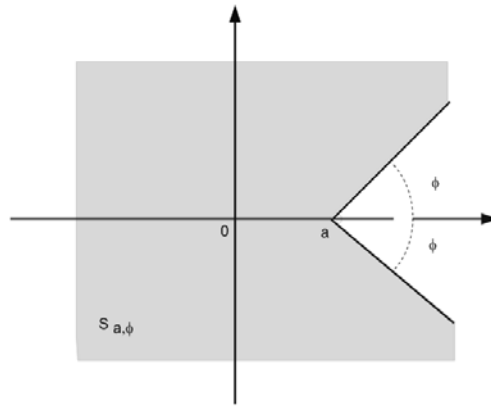
e uma família de operadores $T(z) : X \rightarrow X$, $z \in \Delta_\phi$ que coincide com $T(t)$ para $t \geq 0$, tal que

(i) a aplicação $z \mapsto T(z)$ é analítica em $\Delta_\phi - \{0\}$,

(ii) $\forall u \in X$, $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Delta_\phi} T(z)u = u$,

(iii) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para $z_1, z_2 \in \Delta_\phi$.

*Então $\{T(t) : t \in [0, \infty)\}$ é chamado de **semigrupo analítico**.*

Figura 2: O Setor $S_{a,\phi}$.

2.3.1 Operadores setoriais. Potências fracionárias

Definição 2.3.2. *Seja $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $M \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que um operador $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é setorial se*

- (i) *A é um operador fechado, densamente definido;*
- (ii) *o conjunto resolvente $\rho(A)$ contém o setor*

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\},$$

e a estimativa

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}$$

vale para todo $\lambda \in S_{a,\phi}$.

Teorema 2.3.1. *Se A é um operador setorial, então $-A$ é um gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-tA} : t \geq 0\}$ onde*

$$e^{-tA} = \frac{2}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

onde Γ é um contorno em $\rho(-A)$ com $\arg \lambda \rightarrow \pm \theta$ quando $|\lambda| \rightarrow \infty$ para algum $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Ainda, $\{e^{-tA} : t \geq 0\}$ pode ser continuado analiticamente no setor $\{t \neq 0 : |\arg t| < \varepsilon\}$ contendo o eixo positivo, e se $\operatorname{Re} \sigma(A) > a$ isto é, se $\operatorname{Re} \lambda > a$ sempre que $\lambda \in \sigma(A)$, então para $t > 0$

$$\|e^{-tA}\| \leq C e^{-ta}, \quad \|A e^{-tA}\| \leq \frac{C}{t} e^{-ta}$$

para alguma constante C .

Finalmente, $\frac{d}{dt}e^{-tA} = -Ae^{-tA}$ para $t > 0$.

Demonstração. Ver [2] pág.20. □

Definição 2.3.3. Suponha que $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial e $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt.$$

Exemplo 2.3.1. Se A é um número real positivo, e $X = \mathbb{R}$, então $A^{-\alpha}$ é definido usualmente como a potência $(-\alpha)$.

Teorema 2.3.2. Se A é um operador setorial em X com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$, então para algum $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X , que é injetor e satisfaz $A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ sempre que $\alpha > 0, \beta > 0$. Também, para $0 < \alpha < 1$,

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda.$$

Demonstração. Ver [2], pág.25. □

Definição 2.3.4. Seja A como no Teorema 2.3.2. Definamos: A^α como sendo o inverso de $A^{-\alpha}$, ($\alpha > 0$), $D(A^\alpha) = R(A^{-\alpha})$; $A^0 = I$, onde I é o operador identidade em X .

Teorema 2.3.3. Suponhamos que A é setorial, e $\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta > 0$. Para $\alpha \geq 0$, existe $C_\alpha < \infty$ tal que

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \quad t > 0,$$

e se, $0 < \alpha \leq 1$, $x \in D(A^\alpha)$, temos

$$\|(e^{-At} - I)x\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|A^\alpha x\|.$$

Também, C_α é limitado para α em algum intervalo compacto de $(0, \infty)$.

Demonstração. Ver [2], pág. 26. □

Teorema 2.3.4. Se $0 \leq \alpha \leq 1$, $x \in D(A)$, então $\|A^\alpha x\| \leq C \|Ax\|^\alpha \|x\|^{1-\alpha}$, isto é, $\|A^\alpha x\| \leq \varepsilon \|Ax\| + C' \varepsilon^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \|x\|$, para todo $\varepsilon > 0$. (Aqui C, C' são constantes independentes de α).

Demonstração. Ver [2], pág. 26.

Corolário 2.3.1. Sejam A é um operador setorial com $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$ e B um operador linear tal que $BA^{-\alpha}$ é limitado em X para algum $\alpha \in [0, 1)$. Dessa forma, $A + B$ é setorial.

Definição 2.3.5. *Se A é um operador setorial num espaço de Banach X , definamos, para cada $\alpha \geq 0$*

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha),$$

com a norma do gráfico

$$\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|, \quad x \in X^\alpha,$$

onde X^α é o espaço das potências fracionárias, associado a A_1 , com $A_1 = A + aI$ e $\operatorname{Re} \sigma(A_1) > 0$, $a > 0$.

CAPÍTULO 3

O PROBLEMA ABSTRATO DE CAUCHY

Neste capítulo vamos estudar o problema semilinear de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(t, u), & t > 0, \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares, num espaço de Banach X , $f : U \subset \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ é contínua, U é um subconjunto aberto e $[t_0, u_0) \in U$, são dados conhecidos. Na Seção 3.1, trabalharemos o conceito de solução clássica e unicidade de solução para o problema (3.1) na sua forma homogênea e faremos uma introdução para a seção 3.2, na qual é estudado o conceito de unicidade de solução clássica para o problema (3.1), na sua forma semilinear. Essas seções seguem as bibliografias [2], [11] e [1].

3.1 Equação homogênea

Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dado $u_0 \in X$, o problema de Cauchy abstrato para A com valor inicial u_0 consiste em encontrar $u(t)$ para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = 0, & t \geq 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{PCA})$$

tal que $u(t)$ seja solução clássica de (PCA), para todo $t > 0$.

Definição 3.1.1. Dizemos que uma função $u : [0, \infty) \rightarrow X$ é solução clássica de (PCA) quando

$$u \in C^1([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); D(A)) \text{ e } u \text{ verifica (PCA).}$$

Teorema 3.1.1. Se A é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, então para todo $u_0 \in D(A)$,

$$u(t) = T(t)u_0 \tag{3.2}$$

é a única solução clássica de (PCA).

Demonstração. Segue da Proposição 2.2.1 item (c) e do Corolário 2.2.1 que $u(t) = T(t)u_0$ é solução clássica do problema de valor inicial (PCA).

Dessa forma, só nos resta mostrar a unicidade de tal solução. Para isto, vamos supor que exista uma outra solução do problema de valor inicial (PCA), que denotaremos por $v(t)$.

Definamos:

$$\omega(s) := T(t-s)v(s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

A aplicação assim definida é diferenciável. De fato,

$$\begin{aligned} \dot{\omega}(s) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\omega(s+h) - \omega(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t-s-h)v(s+h) - T(t-s)v(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(t-s-h)v(s+h) - T(t-s)v(s+h)}{h} + \frac{T(t-s)v(s+h) - T(t-s)v(s)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[T(t-s-h) - T(t-s)]v(s+h) + T(t-s)[v(s+h) - v(s)]}{h}, \end{aligned}$$

onde,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[T(t-s-h) - T(t-s)]v(s+h)}{h} = -AT(t-s)v(s),$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} T(t-s)[v(s+h) - v(s)]h &= T(t-s) \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{v(s+h) - v(s)}{h} \right) \\ &= T(t-s)\dot{v}(s) \\ &= T(t-s)Av(s) \\ &= AT(t-s)v(s). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(s) &= \dot{T}(t-s)v(s) + T(t-s)\dot{v}(s) \\ &= -AT(t-s)v(s) + T(t-s)Av(s) \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Portanto, ω é constante. Então

$$v(t) = \omega(t) = T(0)v(t) = \omega(0) = T(t)v(0) = T(t)u_0 = u(t).$$

□

Assim, a Proposição 2.2.1 item (c) e o Corolário 2.2.1 nos garante a existência, e o Teorema 3.1.1 nos dá a unicidade de solução clássica para o problema de valor inicial (PCA).

Consideremos agora, a equação não homogênea

$$\begin{aligned}\dot{u} + Au &= f(t), \quad 0 < t < \tau \\ u(t_0) &= u_0,\end{aligned}$$

onde $f : [0, \tau) \rightarrow X$ é uma função linear, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(t) : t \in [0, \infty)\}$ em X e $\tau \in (0, \infty)$ é fixo.

Definição 3.1.2. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função f é Hölder contínua com expoente θ , $0 < \theta < 1$ em I , se existe uma constante L tal que*

$$\|f(t) - f(s)\| \leq L|t - s|^\theta, \quad \text{para } t, s \in I.$$

Ainda, é localmente Hölder contínua, se para todo $t \in I$ existir uma vizinhança de t , tal que f restrita a essa vizinhança seja Hölder contínua.

Lema 3.1.1. *Seja $f : (0, T) \rightarrow X$ localmente Hölder contínua com $\int_0^\rho \|f(s)\| ds < \infty$ para algum $\rho > 0$. Para $0 \leq t \leq T$, defina*

$$U(t) = \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Então, $U(\cdot)$ é contínua em $[0, T)$, continuamente diferenciável em $(0, T)$, com $U(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$, e $\frac{dU(t)}{dt} + AU(t) = f(t)$ em $0 < t < T$, $U(t) \rightarrow 0$ em X , quando $t \rightarrow 0^+$.

Demonstração. Definamos:

$$U_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds, \quad \rho \leq t < T,$$

para $\rho > 0$ tal que $0 \leq t \leq \rho$, suficientemente pequeno, com $U_\rho(t) = 0$. Assim,

$$\|U(t) - U_\rho(t)\| \leq \int_{t-\rho}^t \|e^{-A(t-s)}\| \|f(s)\| ds.$$

Então $\|U(t) - U_\rho(t)\| \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, uniformemente no intervalo $0 \leq t \leq t_0$ para algum $t_0 < T$. Além disso, U_ρ é contínua, pois para $\rho \leq t \leq t+h \leq T$,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} U_\rho(t+h) - U_\rho(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[(e^{-Ah} - I) \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds + \int_{t-\rho}^{t+h-\rho} e^{-A(t+h-s)} f(s) ds \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $U : [0, T) \rightarrow X$ é contínua e $\|U(t)\| \leq \int_0^t \|e^{-A(t-s)}\| \|f(s)\| ds \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$.

Também, para $0 \leq s < t$, $e^{-A(t-s)} f(s) \in D(A)$, então $\sum_{t-s_j \geq \rho} e^{-(t-s_j)} f(s_j) \Delta s_j \in D(A)$, $\Delta s_j \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} A \sum_{s \leq t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) \Delta s = \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Assim, como A é fechado, $U_\rho(t) \in D(A)$ e

$$\begin{aligned} AU_\rho(t) &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} f(s) ds \\ &= \int_0^{t-\rho} A e^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds + (e^{-A\rho} - e^{-At}) f(t). \end{aligned}$$

Agora, do Teorema 2.3.1, $\|A e^{-A(t-s)}\| = O((t-s)^{-1})$, $\|f(s) - f(t)\| = O(|t-s|^\theta)$ para algum $0 < \theta < 1$ quando $s \rightarrow t^-$, então quando $\rho \rightarrow 0^+$,

$$AU_\rho(t) \rightarrow \int_0^t A e^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds + (I - e^{-At}) f(t).$$

Então, $U(t) \in D(A)$ para $0 < t < T$.

Considerando um aberto no interior do intervalo $[t_0, t_1]$, $0 < t_0 < t_1 < T$, então $AU_\rho(t)$ converge uniformemente em $t_0 \leq t \leq t_1$, pois $\|f(t) - f(s)\| \leq L|t-s|^\theta$ para $t, s \in [t_0, t_1]$

e algum $\theta > 0$, então

$$\begin{aligned} \|AU_\rho(t) - AU(t)\| &= \|(-I + e^{-A\rho})f(t) - \int_{t-\rho}^t Ae^{-A(t-s)}(f(s) - f(t))ds\| \\ &\leq \|(e^{-A\rho} - I)f(t)\| + C \int_{t-\rho}^t (t-s)^{-1+\theta}ds \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

uniformemente em $t_0 \leq t \leq t_1$.

Finalmente, $U_\rho(t)$ é diferenciável quando $t > \rho$ com

$$\frac{dU_\rho(t)}{dt} = -AU_\rho(t) + e^{-A\rho}f(t-\rho), \quad \rho < t < T.$$

O lado direito converge uniformemente para $-AU(t) + f(t)$ em $t_0 \leq t \leq t_1$, ($0 < t_0 < t_1 < T$) quando $\rho \rightarrow 0^+$, então U é continuamente diferenciável no intervalo aberto $(0, T)$, com $\frac{dU}{dt} + AU = f(t)$. $\square$

Teorema 3.1.2. *Suponha que A seja um operador setorial em X , $u_0 \in X$, $f : (t_0, T) \rightarrow X$ localmente Hölder contínua e $\int_0^\rho |f(t)|dt < \infty$ para algum $\rho > 0$. Então existe uma única solução forte $u(\cdot)$ de*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + Ax = f(t), & t_0 < t < T, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

dada por

$$x(t) = e^{-A(t-t_0)}x_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s)ds.$$

3.2 Equação semilinear

Nessa seção vamos considerar o problema abstrato de Cauchy para uma equação semilinear de valor inicial $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X^\alpha$ da forma

$$\begin{cases} \dot{u} + Au = f(t, u), & t > 0 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

onde X é um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|$, $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador setorial, tal que as potências fracionárias de $A_1 = A + aI$ são bem definidas, onde a é tomado de forma que $0 \notin \sigma(A)$ e os espaços das potências fracionárias $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$, com a norma do gráfico $\|x\|_\alpha = \|A_1^\alpha x\|$, $x \in D(A^\alpha)$ estão definidos para $0 \leq \alpha < 1$. Consideraremos $f : [0, \infty) \times X^\alpha \rightarrow X$, $0 \leq \alpha \leq 1$, localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitz em u no aberto $U \subset [0, \infty) \times X^\alpha$.

Definição 3.2.1. *Uma solução clássica do problema (3.4) no intervalo $[t_0, T)$, é uma função $u : [t_0, T) \rightarrow X$ tal que*

$$u \in C([t_0, T), X^\alpha) \cap C^1((t_0, T), X) \cap C((t_0, T), D(A))$$

e satisfaz (3.4) em X .

Teorema 3.2.1 (Fórmula da variação das constantes). *Seja $u \in C([t_0, T), X^\alpha)$, onde $t_0 < T \leq \infty$. Então u é uma solução clássica em $[t_0, T)$ do problema (3.4) com f sendo Hölder contínua em t e localmente Lipschitziana em u se, e somente se, u satisfaz em X a equação integral*

$$u(t) = e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, u(s))ds, \quad t \in [t_0, T). \quad (3.5)$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Mostremos primeiramente que se u é tal solução, então u satisfaz (3.5).

De fato, fixemos $t \in [t_0, T)$ e notemos que $s \mapsto e^{-A(t-s)}u(s)$ é uma função contínua em $[t_0, T]$ e diferenciável em (t_0, T) . Assim, para $s \in (t_0, T)$, temos

$$\frac{d}{ds}(e^{-A(t-s)}u(s)) = e^{-A(t-s)}\frac{du}{ds}(s) + e^{-A(t-s)}Au(s) = e^{-A(t-s)}f(s, u(s)).$$

Como a função $s \mapsto f(s, u(s))$ é contínua em $[t_0, T]$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t T(t-s)f(s, u(s))ds &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{t_0-\varepsilon}^{t-\varepsilon} \frac{d}{ds}(T(t-s)u(s))ds \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [T(\varepsilon)u(t-\varepsilon) - T(t-t_0+\varepsilon)u(t_0-\varepsilon)] \\ &= u(t) - T(t-t_0)u_0, \end{aligned}$$

o que estabelece (3.5).

($\Leftarrow$) Suponhamos que u é solução da equação integral (3.5) e $u \in C([t_0, T); X^\alpha)$. Provaremos primeiramente que u é localmente Hölder contínua de (t_0, T) em X^α .

De fato, se $t_0 < t < t+h < T$, temos

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t (e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}f(s, u(s))ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s, u(s))ds. \end{aligned}$$

Agora, se $0 < \delta < 1 - \alpha$, segue do Teorema 2.3.3, que para algum $z \in X$,

$$\|(e^{-Ah} - I)e^{-A(t-s)}z\|_\alpha \leq C(t-s)^{-(\alpha+\delta)}h^\delta e^{a(t-s)}\|z\|.$$

Assim, para $t \in [t'_0, T'] \subset (t_0, T)$,

$$\|u(t+h) - u(t)\|_\alpha \leq Mh^\delta.$$

Disto segue que $t \mapsto f(t, u(t))$ é localmente Hölder contínua em (t_0, T) , e pelo Teorema 3.1.2, u é solução da equação linear

$$\frac{du}{dt} + Au = f(t, u(t)), \quad \text{em } t_0 < t < T, \quad u(0) = u_0$$

e u também é uma solução de (3.4) em (t_0, T) . □

Teorema 3.2.2. *Se A é um operador setorial, $0 \leq \alpha < 1$, $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$ é um conjunto aberto e $f : U \rightarrow X$ é localmente Hölder contínua em t , localmente Lipschitziana em u ; então para algum $(t_0, u_0) \in U$ existe $T = T(t_0, u_0) > 0$ tal que o problema (3.4) tem uma única solução u em $[t_0, t_0 + T]$ com valor inicial $u(t_0) = u_0$.*

Demonstração. Pelo Teorema anterior, é suficiente provar o resultado correspondente para a equação integral (3.5). Para isso, para $\delta > 0$ e $T > 0$ tal que $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, definamos

$$S = \{y \in C([t_0, t_0 + T], X^\alpha) : \|y(t) - u_0\|_\alpha \leq \delta, t \in [t_0, t_0 + T]\},$$

munido da norma

$$\|y\| = \sup\{\|y(t)\|_\alpha, t \in [t_0, t_0 + T]\}.$$

Não é difícil provar que S assim definido é um espaço métrico completo.

Agora definamos a aplicação

$$\begin{aligned} G : S &\rightarrow S \\ \varphi &\mapsto G(\varphi) : [t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto G(\varphi)(t) = \\ &= e^{-A(t-t_0)}u_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)}f(s, \varphi(s))ds. \end{aligned}$$

O nosso objetivo é usar o teorema do ponto fixo da contração para mostrar que a aplicação G , definida acima, possui um único ponto fixo. Para isso, mostremos que $G : S \rightarrow S$ é contínua, é contração e $G(S) \subset S$.

De fato, escolha $\delta, \tau > 0$ tal que o conjunto compacto V , definido por

$$V = \{(t, u) : t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \|u - u_0\|_\alpha \leq \delta\}$$

esteja contido em U , e $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|_\alpha, \forall (t, x_1), (t, x_2) \in V$. Dessa forma, existe $B > 0$ tal que $\|f(t, u_0)\| \leq B$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \tau]$, $0 < T \leq \tau$. Do Teorema 2.3.3, temos

$$\begin{aligned} \|(e^{-Ah} - I)u_0\|_\alpha &\leq \frac{\delta}{2}, \quad 0 \leq h \leq T, \\ MB \int_0^\tau s^{-\alpha} e^{as} ds &\leq \frac{\delta}{2}, \quad \text{e} \\ \|A^\alpha e^{-At}\| &\leq Mt^{-\alpha} e^{at}, \quad \forall t > 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

- $G(S) \subset S$.

De fato, pelo Teorema 2.3.3, e pelas hipóteses sobre a f , temos

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - u_0\|_\alpha &\leq \|(e^{-At} - I)u_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|e^{-A(t-s)}\|_\alpha \|f(s, y(s))\| ds \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \int_0^T \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| B ds \\ &\leq \frac{\delta}{2} + B \int_0^T M(t-s)^{-\alpha} e^{-a(t-s)} ds \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned} \tag{3.7}$$

- G é uma contração.

De fato, se $y, z \in S$, e $0 < t < T$, temos

$$\begin{aligned} \|G(y)(t) - G(z)(t)\|_\alpha &\leq \int_{t_0}^t \|e^{-A(t-s)}\|_\alpha \|f(s, y(s)) - f(s, z(s))\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| L \|y - z\| ds \\ &\leq ML \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} e^{a(t-s)} \|y - z\| ds \\ &\leq K \|y - z\|, \quad \forall y, z \in S. \end{aligned} \tag{3.8}$$

A última desigualdade segue de (3.7)

- G é contínua.

De fato, dados $(y, z) \in S$, tal que $\|y - z\| < \delta$ temos, de (3.8) que, para todo $\varepsilon > 0$,

em particular, para $\varepsilon = K\delta$,

$$\|G(y) - G(z)\| \leq K\|y - z\| < K\delta = \varepsilon.$$

Logo, G é contínua.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, G possui um único ponto fixo u em S , que é uma solução contínua da equação integral (3.5) e $f(t, u(t))$ é limitada quando $t \rightarrow 0^+$. Pela Fórmula da Variação das Constantes, segue que esta é a única solução de (3.4) em $(0, T)$ com valor inicial $u(t_0) = u_0$. $\square$

CAPÍTULO 4 APLICAÇÕES

Neste capítulo, faremos duas aplicações da teoria dos semigrupos em equações diferenciais parciais. Na Seção 4.1, trabalharemos com um modelo que descreve o processo de divisão celular, com base na referência [12], e na Seção 4.2, trabalharemos com o problema de valor inicial que descreve o processo de condução do calor, seguindo a referência [2].

4.1 Modelo de divisão celular

O seguinte modelo matemático descreve a proliferação das células que se dividem em duas fases distintas: a fase mitótica e a não mitótica. Vamos nos referir a essas duas fases como m -fase e n -fase, respectivamente. Denotaremos por $m(t, x)$ e $n(t, x)$ as densidades da célula na m -fase e n -fase respectivamente, de tamanho x no tempo t . Vamos assumir que duas células filhas tenham tamanhos iguais, (i.e. mitoses iguais). Assumiremos ainda, que as duas fases tenham taxas de crescimento diferentes, que denotaremos por $\gamma_1(x)$ e $\gamma_2(x)$, respectivamente.

Então, as equações diferenciais parciais que modelam a divisão celular, são dadas por

$$\begin{cases} m_t + (\gamma_1 m)_x = -\beta(x)m - \nu(x)m + \mu(x)n, & 0 < x < 1, t > 0 \\ n_t + (\gamma_2 n)_x = -\nu(x)n - \mu(x)n + \begin{cases} 4\beta(2x)m(t, 2x), & 0 < x \leq \frac{1}{2}, t > 0, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1, t > 0, \end{cases} \\ m(t, 0) = 0, n(t, 0) = 0, & t > 0, \\ m(0, x) = m_0(x), n(0, x) = n_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde $\mu(x)$ representa o índice de transferência de células da n -fase para a m -fase, $\nu(x)$ representa o índice de mortalidade das células, e $\beta(x)$ o índice de mitose das células na m -fase.

Nesse modelo é assumido que cada célula pode se dividir em pelo menos I vezes em sua vida, de modo que todas as células são divididas em I -gerações. Todas as células desenvolvem-se com a mesma constante de crescimento e cada uma delas na i -ésima geração, ($1 \leq i \leq I - 1$) se divide em duas células de tamanhos iguais num índice $\beta_i(x)$, quando as mitoses ocorrem. Uma dessas duas células, chamada célula filha retoma um ciclo na geração 1, enquanto a outra célula, chamada de célula mãe, entra na geração $i + 1$.

São impostas sobre os índices envolvidos no modelo, as seguintes condições:

- (i) $\mu, \nu : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$. Além disso, $\mu(x) > 0$ para quase todo $x \in (0, 1)$;
- (ii) $\beta : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ e $\beta(x) > 0$ para $x \in (0, 1)$ e $\beta(x) = 0$ caso contrário;
- (iii) $\gamma_1, \gamma_2 \in C^1[0, 1]$; $\gamma_1(x), \gamma_2(x) > 0$ para quase todo $x \in [0, 1]$. Além disso, $\gamma_1(x) \neq \gamma_2(x)$ para $x \in [0, 1]$ e $\gamma_2(2x) \neq 2\gamma_1(x)$, para $x \in [0, 1]$.

Nosso objetivo é escrever o problema (4.1) como uma equação de evolução abstrata num espaço de Banach X e usar a teoria dos semigrupos para resolvê-lo.

Para isto, consideremos $X = L^1[0, 1] \times L^1[0, 1]$ e definamos os seguintes operadores

$$\begin{aligned}
 A : D(A) \subset L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] &\rightarrow L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] \\
 (u, v) &\mapsto A(u, v) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto (A(u, v))(x) = \\
 &= (-\gamma_1(x)u(x))', (\gamma_2(x)v(x))',
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B : D(B) \subset L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] &\rightarrow L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] \\
 (u, v) &\mapsto \beta(u, v) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto (B(u, v))(x) = \\
 &= (-\beta(x)u(x) - \nu(x)u(x), -\mu(x)v(x) - \nu(x)v(x)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C : D(C) \subset L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] &\rightarrow L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] \\
(u, v) &\mapsto C(u, v) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto (C(u, v))(x) = \\
&= \left(-\mu(x)v(x), \begin{cases} 4\beta(2x)\mu(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \right),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
D(A) &= \{(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] : A(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1]\} \\
&= \{(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] : (-\gamma_1(x)u(x))', (\gamma_2(x)v(x))' \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1], \\
&\quad u(0) = 0, v(0) = 0\} \\
&= W_0^{1,1}(0, 1) \times W_0^{1,1}(0, 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(B) &= \{(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] : B(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1]\} \\
&= \{(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] : (-\beta(x)u(x) - \nu(x)u(x), -\mu(x)v(x) - \nu(x)v(x)) \in \\
&\quad L^1[0, 1] \times L^1[0, 1]\}, \\
&= L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] \quad \text{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(C) &= \{(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] : C(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1]\} \\
&= \{(u, v) \in L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] : (-\mu(x)v(x), \begin{cases} 4\beta(2x)\mu(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}) \in \\
&\quad L^1[0, 1] \times L^1[0, 1]\}, \\
&= L^1[0, 1] \times L^1[0, 1].
\end{aligned}$$

Das definições dos operadores A , B e C , segue que $A \in \mathcal{L}(E, X)$, $B \in \mathcal{L}(X)$ e $C \in \mathcal{L}(X)$. Vamos considerar em X a norma $\|(u, v)\|_X = \|u\|_1 + \|v\|_1$ e definamos

$$E = W_0^{1,1}(0, 1) \times W_0^{1,1}(0, 1) \quad \text{com a norma} \quad \|(u, v)\|_E = \|u\|_{W^{1,1}} + \|v\|_{W^{1,1}}.$$

Consideremos agora, o operador $L = A + B + C$. Temos

$$\begin{aligned} D(L) &= D(A) \cap D(B) \cap D(C) \\ &= W_0^{1,1}(0, 1) \times W_0^{1,1} \cap L^1[0, 1] \times L^1[0, 1] \\ &= W_0^{1,1}(0, 1) \times W_0^{1,1}(0, 1), \end{aligned}$$

ou seja, $D(L) = D(A) = E$, e além disso, $L \in \mathcal{L}(E, X)$.

Com essas definições, temos que o problema (4.1) pode ser reescrito como o seguinte problema de valor inicial abstrato de equação diferencial ordinária no espaço de Banach X

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = LU(t) & t > 0 \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $U(t) = (m(t), n(t))$ e $U_0 = (m_0(x), n_0(x))$.

Agora, pelo Teorema 3.1.1, para provarmos que o problema (4.2) possui uma única solução clássica em X , precisamos provar que L gera um C_0 -semigrupo em X .

Lema 4.1.1. *O operador linear $A + B$ gera um C_0 -semigrupo $\{T_1(t) : t \geq 0\}$, onde $\{T_1(t) = e^{(A+B)t}, t \geq 0\}$ em X .*

Demonstração. Seja $F \in X$ e $U(t) = T_1(t)F$. Escrevemos $F = (f, g)$, $U(t) = (u(t, \cdot), v(t, \cdot))$. Assim posto, (u, v) é solução do seguinte problema

$$\begin{cases} u_t + (\gamma_1(x)u)_x = -a_1(x)u(t, x), & 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \\ v_t + (\gamma_2(x)v)_x = -a_2(x)v(t, x), & 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \\ u(t, 0) = 0, v(t, 0) = 0, & t > 0 \\ u(0, x) = f(x), \quad v(0, x) = g(x) & 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.3)$$

onde $a_1(x) = B(x) + \nu(x)$ e $a_2(x) = \mu(x) + \nu(x)$.

Sejam $S_1(t, x)$ e $S_2(t, x)$ soluções das seguintes equações

$$\begin{cases} (S_1(t, x))_t = \gamma_1(S_1(t, x)), & S_1(0, x) = x \\ (S_2(t, x))_t = \gamma_2(S_2(t, x)), & S_2(0, x) = x. \end{cases} \quad (4.4)$$

Então

$$\frac{(S_1(t, x))_t}{\gamma_1(S_1(t, x))} = 1 \quad e \quad \frac{(S_2(t, x))_t}{\gamma_2(S_2(t, x))} = 1. \quad (4.5)$$

Sejam $G_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $G_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$G_1(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\gamma_1(\xi)}, \quad G_2(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\gamma_2(\xi)}.$$

Temos:

$$G_1'(x) = \frac{1}{\gamma_1(x)} \neq 0 \quad \text{e} \quad G_2'(x) = \frac{1}{\gamma_2(x)} \neq 0,$$

o que prova que G_1 e G_2 aplicam $[0, 1]$ num intervalo (a, b) onde G_1^{-1} e G_2^{-1} estão definidas.

De (4.4), temos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{(S_1(t, x))_t}{\gamma_1(S_1(t, x))} = G_1'(S_1(t))S_1'(t) \\ 1 &= \frac{(S_2(t, x))_t}{\gamma_2(S_2(t, x))} = G_2'(S_2(t))S_2'(t), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(G_1 \circ S_1)'(t) = 1 \quad \text{e} \quad (G_2 \circ S_2)'(t) = 1.$$

Integrando ambos os lados entre 0 e t , obtemos

$$\begin{aligned} G_1(S_1(t, x)) - G_1(S_1(0, x)) &= t \\ G_2(S_2(t, x)) - G_2(S_2(0, x)) &= t. \end{aligned}$$

Como

$$G_1(S_1(0, x)) = G_1(x) \quad \text{e} \quad G_2(S_2(0, x)) = G_2(x), \quad \text{temos}$$

$$\begin{aligned} G_1(S_1(t, x)) &= t + G_1(x) \\ G_2(S_2(t, x)) &= t + G_2(x). \end{aligned}$$

Logo, a solução de (4.4) é dada por

$$\begin{aligned} S_1(t, x) &= G_1^{-1}(t)[t + G_1(x)] \\ S_2(t, x) &= G_2^{-1}(t)[t + G_2(x)] \end{aligned} \tag{4.6}$$

Usando um método das características obtemos:

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{E_1(x)}{\gamma_1(x)} \frac{\gamma_1(S_1(-t, x))}{E_1(S_1(-t, x))} f(S_1(-t, x)), & 0 < S_1(-t, x) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4.7}$$

$$v(t, x) = \begin{cases} \frac{E_2(x)}{\gamma_2(x)} \frac{\gamma_2(S_2(-t, x))}{E_2(S_2(-t, x))} g(S_2(-t, x)), & 0 < S_2(-t, x) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.8)$$

onde

$$E_1(x) = e^{-\int_0^x \frac{a_1(s)}{\gamma_1(s)} ds}, \quad E_2(x) = e^{-\int_0^x \frac{a_2(s)}{\gamma_2(s)} ds}.$$

Afirmção: $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo em X .

De fato,

- (i) $T_1(0) = I$;
- (ii) $T_1(t_1 + t_2) = T_1(t_1)T_1(t_2)$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T_1(t)F - F)(x)\| \rightarrow 0$.

Provemos (i). Temos

$$\begin{aligned} U(t)x &= T_1(t)F(x) \\ &= T_1(t)(f, g)(x) \\ &= \left(\frac{E_1(x)\gamma_1(S_1(-t, x))}{\gamma_1(x)E_1(S_1(-t, x))} f(S_1(-t, x)), \frac{E_2(x)\gamma_2(S_2(-t, x))}{\gamma_2(x)E_2(S_2(-t, x))} g(S_2(-t, x)) \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} U(0)x &= \left(\frac{E_1(x)\gamma_1(S_1(0, x))}{\gamma_1(x)E_1(S_1(0, x))} f(S_1(0, x)), \frac{E_2(x)\gamma_2(S_2(0, x))}{\gamma_2(x)E_2(S_2(0, x))} g(S_2(0, x)) \right) \\ &= (f(x), g(x)). \end{aligned}$$

Logo, $U(0)x = (T_1(0)F)(x) = T_1(0)(f(x), g(x)) = (f(x), g(x))$.

Portanto, $T_1(0) = I$.

- (ii) Usando as identidades (4.6), (4.7) e (4.8), e com muitos cálculos, prova-se este item.

(iii) Temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(T_1(t)F - F)(x)\| &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left\| \left(\frac{E_1(x)\gamma_1(S_1(-t, x))}{\gamma_1(x)E_1(-t, x)} f(S_1(-t, x)), \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{E_2(x)\gamma_2(S_2(-t, x))}{\gamma_2(x)E_2(S_2(-t, x))} g(S_2(-t, x)) \right) - (f, g)(x) \right\| \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{E_1(x)\gamma_1(S_1(-t, x))}{\gamma_1(x)E_1(t, x)} f(S_1(-t, x)) - f(x) \right\| \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{E_2(x)\gamma_2(S_2(-t, x))}{\gamma_2(x)E_2(S_2(-t, x))} g(S_2(-t, x)) - g(x) \right\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\{T_1(t) : t \geq 0\}$ é um C_0 -semigrupo em X . □

Até aqui, temos que $A + B$ é o gerador infinitesimal do C_0 -semigrupo $\{e^{(A+B)t} : t \geq 0\}$ então, pelo Teorema de Hille - Yosida, o operador $(A + B)$ é fechado, densamente definido em X , e $\rho(A + B) \supset (\beta, \infty)$, para algum $\beta > 0$.

Lema 4.1.2. *O operador L gera um C_0 -semigrupo em X .*

Demonstração. Como $D(A + B) \subset D(C)$, onde

$$\begin{aligned}
(A + B) : D(A + B) \subset X &\rightarrow X \\
C : D(C) \subset X &\rightarrow X,
\end{aligned}$$

são operadores lineares, tais que, para cada $x \in D(A + B)$, $\alpha \in [0, 1]$, $\beta > 0$, $t \in [0, 1]$ e $\forall \lambda > 0$, valem as desigualdades

$$(i) \quad \|\lambda x - ((A + B) + tC)(x)\| \geq \lambda \|x\|;$$

$$(ii) \quad \|Cx\| \leq \alpha \|(A + B)x\| + \beta \|x\|.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|\lambda x - ((A + B) + tC)(x)\| &= \left\| (\lambda x_1, \lambda x_2) - \left[-(\gamma_1(x)u(x))' - B(x)u(x) - \nu(x)u(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - t\mu(x)v(x), (-\gamma_2(x)v(x))' - \mu(x)v(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \nu(x)v(x) + t \begin{cases} 4B(2x)\mu(2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \right] \right\| \\
&= \|\lambda x_1 + (\gamma_1(x)u(x))' + B(x)u(x) + \nu(x)u(x) + tu(x)v(x)\| \\
&\quad + \|\lambda x_2 + (\gamma_2(x)v(x))' + \mu(x)v(x) + \nu(x)v(x) \\
&\quad - t \begin{cases} 4B(2x)\mu(2x), & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < x \leq 1 \end{cases}\| \\
&\geq \|\lambda x_1\| + \|\lambda x_2\| = |\lambda|(\|x_1\| + \|x_2\|) = \lambda\|x\|,
\end{aligned}$$

provando assim, o item (i). De modo análogo, prova-se o item (ii).

Além disso, para $s = 0$, o operador $((A + B) + sC)$ é fechado e $(0, +\infty) \subseteq \rho((A + B) + sB)$. Logo, pelo Teorema 2.2.4 temos que $(0, +\infty) \subseteq \rho((A + B) + tC)$ para cada $t \in [0, 1]$ e $((A + B) + tC)$ é o gerador de um C_0 -semigrupo em X . Tomando em particular, $t = 1$, temos que $A + B + C = L$ gera um C_0 -semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$ em X . $\square$

4.2 Equação do Calor semilinear

Considere uma barra condutora, de comprimento π , de dimensão linear preponderante e dimensões seccionais insignificantes, como, por exemplo, um arame bem fino e de comprimento π , isolado termicamente do meio ambiente a não ser por suas extremidades. Se colocarmos a barra, no sentido deste seu comprimento sobre o eixo dos x , e aquecermos uma das extremidades, o fluxo de calor darse-á longitudinalmente, da extremidade mais quente para a mais fria, conforme rege a lei do resfriamento. Deste modo, estamos tratando de um problema de condução térmica unidimensional.

Denotando por $u(x, t)$ a temperatura da barra na posição x e instante t , o modelo matemático que descreve o fluxo do calor nessa barra é dado pelo seguinte problema de valor inicial semilinear

$$\begin{cases} u_t + uu_x = -u_{xx} + f(t, x, u), & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(0, t) = 0, \ u(\pi, t) = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

onde

(i) $f : [0, \infty) \times [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável em x , localmente Hölder contínua em t , localmente Lipschitz em u e uniformemente em x ,

(ii) $|f(t, x, u)| \leq h(x)g(t, |u|)$,

(iii) $h \in L^2(0, \pi)$,

(iv) g é contínua e crescente na segunda variável.

Nosso objetivo é escrever o problema (4.9) como uma equação de evolução abstrata num espaço de Banach X e usar a teoria dos semigrupos para resolvê-lo.

Para isso, tomemos o espaço de Banach $X = L^2(0, \pi)$ munido da norma

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^\pi |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

e sobre este espaço escrevemos o problema (4.9) como uma EDF no espaço de Banach X da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{U} + AU = F(t, U) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} U : [0, \infty) &\rightarrow L^2(0, \pi) \\ t &\mapsto U(t) : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto U(t)x = u(x, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset L^2(0, \pi) &\rightarrow L^2(0, \pi) \\ \varphi &\mapsto A\varphi : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto A\varphi(x) = -\varphi''(x), \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} D(A) &= \{u \in L^2(0, \pi) : Au \in L^2(0, \pi)\} \\ &= \{u \in L^2(0, \pi) : \varphi'' \in L^2(0, \pi), \varphi(\pi) = \varphi(0) = 0\} \\ &= H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 F : [0, +\infty) \times X^{1/2} &\rightarrow L^2(0, \pi) \\
 (t, \varphi) &\mapsto F(t, \varphi) : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto (F(t, \varphi))(x) = -\varphi(x)\varphi'(x) + f(t, x, \varphi(x)).
 \end{aligned}$$

Lema 4.2.1. *O operador A é fechado e densamente definido em X .*

Demonstração. Primeiramente mostremos que para cada $\lambda > 0$, a aplicação $(\lambda I + A)^{-1}$ é fechada. Para isso, provemos que a aplicação $(\lambda I + A) : D(A) \rightarrow X$ é bijetora. De fato,

-*Sobrejetora:* Dado $f \in X$, queremos mostrar que existe $u \in D(A)$ tal que $(\lambda + A)u = f$. Isto é equivalente a resolver o problema de valor de contorno

$$\begin{cases} \lambda u - u_{xx} = f, & \lambda > 0 \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Se $f \in X$ segue que $u \in H_0^1(0, \pi)$. Da regularidade para problemas elípticos, temos $u \in H^2(0, \pi)$ e portanto, $u \in D(A)$.

-*Injetora:* $(\lambda + A)u = 0 \Rightarrow \lambda u - u_{xx} = 0$, então, $u(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{\lambda}x}$. Aplicando as condições de contorno, temos $c_1 = -c_2 = 0$. Portanto, $u = 0$ e a aplicação é injetora.

Concluimos que a aplicação $(\lambda + A) : D(A) \subset X \rightarrow X$ é bijetora e, portanto $(\lambda + A)^{-1}$ existe e é limitada, logo, contínua. Em particular, a aplicação $(\lambda + A)^{-1}$ é fechada.

Da seguinte igualdade segue que o operador A é fechado.

$$\begin{aligned}
 A(\lambda + A)^{-1} &= (A + \lambda - \lambda)(\lambda + A)^{-1} \\
 &= A(\lambda + A)^{-1} + \lambda(\lambda + A)^{-1} - \lambda(\lambda + A)^{-1} \\
 &\quad - \lambda(\lambda + A)^{-1} + (\lambda + A)(\lambda + A)^{-1} \\
 &= I - \lambda(\lambda + A)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Como o domínio de A é dado por

$$D(A) = H^2(0, \pi) \cap H_0^1(0, \pi),$$

temos que $D(A)$ é denso em $L^2(0, \pi) = X$.

Além disso, $D(A^{1/2}) = X^{1/2} = H_0^1(0, \pi)$ também é denso em $L^2(0, \pi)$.

Lema 4.2.2. (i) O operador A é definido positivo, e é auto adjunto.

(ii) A é um operador linear setorial, $\rho(A) \supset (-\infty, 0)$ e para cada $\lambda > 0$,

$$\|(\lambda + A)^{-1}\|_{L^2(0, \pi)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Demonstração.

(i) Sejam $\varphi, \psi \in D(A)$. As seguintes igualdades provam (i).

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \psi \rangle &= - \int_0^\pi \varphi''(x)\psi(x)dx = - \int_0^\pi \varphi(x)\psi''(x)dx = \langle \varphi, A\psi \rangle \\ \langle A\varphi, \varphi \rangle &= - \int_0^\pi \varphi''(x)\varphi(x)dx = \int_0^\pi [\varphi'(x)]^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) Primeiramente, vamos encontrar o espectro de A . No item (i), vimos que o operador A é auto adjunto logo, seu espectro é formado somente por autovalores. Encontremos então, os autovalores do operador A .

$$A\varphi = \lambda\varphi, \tag{4.11}$$

assim, pela definição do operador A

$$-\varphi'' = \lambda\varphi. \tag{4.12}$$

Como φ é solução de (4.11), temos que ela é não nula, então, podemos multiplicar a equação (4.12) por φ e integrá-la no intervalo $[0, \pi]$. Feito isso, chegamos em $\lambda = \frac{1}{\|\varphi\|^2} \int_0^\pi \|\varphi'\|^2 dx$.

Logo $\lambda \geq 0$.

- Se $\lambda = 0$, temos $-\varphi'' = 0$, então $\varphi(x) = cx + d$. Aplicando as condições de contorno, temos que $\varphi(x) = 0, \forall x \in [0, \pi]$, o que não pode ocorrer.

Portanto, $\lambda > 0$. Dessa forma, a solução da equação (4.11), é dada por

$$\varphi(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Impondo as condições de contorno, temos

$$\varphi(0) = a = 0; \varphi(\pi) = b \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0.$$

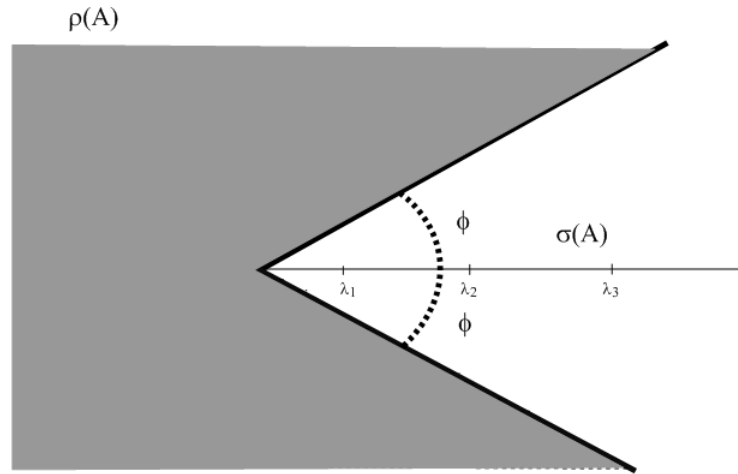


Figura 3: O espectro e o resolvente do operador A .

Como $\varphi \neq 0$, temos que ter $b \neq 0$, então $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$, logo, $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}$.

Logo, $\sigma(A) = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ e conseqüentemente, $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A) \supset (-\infty, 0)$, como mostra na Figura 3.

Passemos agora à estimativa do operador resolvente.

Dada $f \in L^2(0, \pi)$, queremos estimar $(\lambda + A)^{-1}f$ na norma de X . Para isso consideremos u na equação

$$(\lambda + A)^{-1}f = u \quad (4.13)$$

onde f é dada. Assim, $(\lambda + A)u = f$, e integrando ambos os membros de 0 a π , temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \lambda u dx + \int_0^\pi A u dx &= \int_0^\pi f dx \\ \lambda \int_0^\pi u u dx + \int_0^\pi -u_{xx} u dx &= \int_0^\pi f u dx. \end{aligned}$$

Da desigualdade de Cauchy- Schwartz, segue que

$$\begin{aligned} \lambda \|u\|_{L^2[0,\pi]}^2 &\leq \lambda \|u\|_{L^2[0,\pi]}^2 + \|u'\|_{L^2[0,\pi]}^2 = \langle f, u \rangle_{L^2[0,\pi]} \leq \|f\|_{L^2[0,\pi]} \|u\|_{L^2[0,\pi]} \\ \lambda \|u\|_{L^2[0,\pi]}^2 &\leq \|f\|_{L^2[0,\pi]} \|u\|_{L^2[0,\pi]} \\ \lambda \|u\|_{L^2[0,\pi]} &\leq \|f\|_{L^2[0,\pi]} \\ \|u\|_{L^2[0,\pi]} &\leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2[0,\pi]}. \end{aligned}$$

Substituindo u dado em (4.13) na última desigualdade, temos

$$\begin{aligned} \|(\lambda + A)^{-1}f\|_{\mathcal{L}(X, D(A))} &= \sup\{\|(\lambda + A)^{-1}f\|; \|f\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{1}{\lambda}\|f\|; \|f\| \leq 1\right\} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

□

- Se $F(t, U) \equiv 0$, o problema de valor inicial (4.10), fica da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{U}(t) + AU(t) = 0, & t \geq 0 \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (4.14)$$

onde A é setorial. Logo, pelo Teorema 2.3.1 $-A$ é gerador infinitesimal do semigrupo analítico $\{e^{-tA} : t \geq 0\}$ e pelo Teorema 3.1.1,

$$U(t) = e^{-tA}U_0, t \geq 0 \quad (4.15)$$

é a única solução clássica de (4.14), para todo $U_0 \in D(A)$. Com a ajuda das séries de Fourier, vemos que a solução de (4.9), no caso linear, é dada por

$$u(x, t) = e^{-tA}x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx, \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0,$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

- Se $F \not\equiv 0$, mostremos que F satisfaz as hipóteses do Teorema 3.2.2.

Lema 4.2.3. Para $\varphi \in H_0^1(0, \pi)$, $\varphi(x) = \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi$, vale a estimativa

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} |\varphi(x)| \leq \sqrt{\pi} \|\varphi\|_{1/2}. \quad (4.16)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &= \left| \int_0^x \varphi'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^{\pi} |\varphi'(\xi)| d\xi \\ &\leq \|\varphi'\|_{L^2(0, \pi)} \|1\|_{L^2(0, \pi)} \\ &\leq \sqrt{\pi} \|\varphi'\|_{L^2(0, \pi)} \\ &\leq \sqrt{\pi} \|\varphi\|_{1/2}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.2.4. Para $\varphi \in H_0^1(0, \pi)$, vale a seguinte estimativa

$$\|F(t, \varphi)\|_{L^2(0, \pi)} \leq \sqrt{2\pi} \|\varphi\|_{1/2}^2 + \sqrt{2}g(t, \sqrt{\pi}\|\varphi\|_{1/2})\|h\|_{L^2(0, \pi)}. \quad (4.17)$$

Além disso, F leva conjuntos limitados de $[0, \infty) \times X^{1/2}$ em limitados de $L^2(0, \pi)$, é localmente Hölder contínua em t e localmente Lipschitziana em φ .

Demonstração. Para $\varphi \in H_0^1(0, \pi)$, temos

$$g(t, |\varphi|) \leq g(t, \sup_{x \in (0, \pi)} |\varphi(x)|) \leq g(t, \sqrt{\pi}\|\varphi\|_{\frac{1}{2}})$$

e

$$\begin{aligned} \|F(t, \varphi)\|_{L^2(0, \pi)}^2 &= \int_0^\pi |F(t, \varphi)(x)|^2 dx \\ &= \int_0^\pi |-\varphi'(x)\varphi(x) + f(t, x, \varphi(x))|^2 dx \\ &\leq \int_0^\pi [\sup_{x \in (0, \pi)} |\varphi(x)| |\varphi'(x)| + |f(t, x, \varphi(x))|]^2 dx \\ &\leq \int_0^\pi (\sqrt{\pi}\|\varphi\|_{1/2} |\varphi'(x)| + h(x)g(t, |\varphi(x)|))^2 dx \\ &\leq 2\pi \|\varphi\|_{1/2}^2 \int_0^\pi |\varphi'(x)|^2 dx + 2 \int_0^\pi h^2(x)g^2(t, |\varphi(x)|) dx \\ &\leq 2\pi \|\varphi\|_{1/2}^4 + 2g^2(t, \sqrt{\pi}\|\varphi\|_{1/2}) \left(\int_0^\pi h^2(x) dx \right) \\ &\leq 2\pi \|\varphi\|_{1/2}^4 + 2g^2(t, \sqrt{\pi}\|\varphi\|_{1/2}) \|h\|_{L^2(0, \pi)}^2, \end{aligned}$$

o que prova (4.17).

Passamos agora à segunda parte da demonstração.

Tomemos $z = (t_0, u_0) \in [0, \infty) \times X^{\frac{1}{2}}$, tal que $\|z\|_{[0, \infty) \times X^{1/2}} \leq M$, $M > 0$.

Assim,

$$\|z\|_{[0, \infty) \times X^{1/2}} = \|(t_0, u_0)\|_{[0, \infty) \times X^{1/2}} = |t_0| + \|u_0\|_{1/2} < M.$$

Então de (4.17), temos

$$\begin{aligned} \|F(z)\|_{L^2(0, \pi)} &= \|F(t_0, u_0)\| \leq \sqrt{2\pi} \|u_0\|_{1/2}^2 + \sqrt{2}g(t_0, \sqrt{\pi}\|u_0\|_{1/2})\|h\|_{L^2(0, \pi)} \\ &\leq \underbrace{\sqrt{2\pi}(M)^2 + \sqrt{2}g(\cdot, \sqrt{\pi}(M))\|h\|_{L^2(0, \pi)}}_{\widetilde{M}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Logo, $\|F(t_0, u_0)\| \leq \widetilde{M}$.

Mostraremos agora que a função F é Hölder contínua em t e localmente Lipschitziana em φ , em outros termos, vamos mostrar a seguinte desigualdade,

$$\|F(t_1, \varphi_1) - F(t_2, \varphi_2)\| \leq L(|t_1 - t_2|^\theta + M\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}). \quad (4.19)$$

Para isto, consideremos

$$\begin{aligned} \|F(t_1, \varphi_1) - F(t_2, \varphi_2)\|_{L^2(0, \pi)} &= \|- \varphi_1 \varphi_1' + f(t_1, \cdot, \varphi_1(\cdot)) + \varphi_2 \varphi_2' - f(t_2, \cdot, \varphi_2(\cdot))\| \\ &\leq |f(t_1, \cdot, \varphi_1(\cdot)) - f(t_2, \cdot, \varphi_2(\cdot))| + \|\varphi_1 \varphi_1' - \varphi_2 \varphi_2'\|_{L^2(0, \pi)}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Do item (i), temos que para $(t_0, \varphi_0) \in [0, \infty) \times X^{1/2}$ e φ_0 contínua, existe uma vizinhança V do conjunto compacto $\{(t_0, x, \varphi_0(x)) : 0 \leq x \leq \pi\}$ em $[0, \infty) \times [0, \pi] \times \mathbb{R}$ e constantes positivas $L > 0$ e $\theta \in (0, 1)$ tais que, para $(t_1, x, u_1), (t_2, x, u_2) \in V$,

$$|f(t_1, x, u_1) - f(t_2, x, u_2)| \leq L(|t_1 - t_2|^\theta + |u_1 - u_2|). \quad (4.21)$$

Assim, existe uma vizinhança U de (t_0, φ_0) em $[0, \infty) \times X^{1/2}$ tal que, se $(t, \varphi) \in U$, então $(t, x, \varphi(x)) \in V$ em q.t.p. de $[0, \pi]$.

Para, $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in U$, temos

$$\|f(t_1, \cdot, \varphi_1(\cdot)) - f(t_2, \cdot, \varphi_2(\cdot))\|_{L^2(0, \pi)} \leq \sqrt{\pi}L(|t_1 - t_2|^\theta + \sqrt{\pi}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}). \quad (4.22)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|f(t_1, \cdot, \varphi_1(\cdot)) - f(t_2, \cdot, \varphi_2(\cdot))\|_{L^2}^2 &= \int_0^\pi |f(t_1, x, \varphi_1(x)) - f(t_2, x, \varphi_2(x))|^2 dx \\ &= \int_0^\pi (L(|t_1 - t_2|^\theta + |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|))^2 dx \\ &\leq 2L^2 \int_0^\pi |t_1 - t_2|^{2\theta} + |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|^2 dx \\ &\leq L^2 \pi |t_1 - t_2|^{2\theta} + 2L^2 \pi^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}^2 \\ &\leq L^2 \pi (|t_1 - t_2|^{2\theta} + \pi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}^2), \end{aligned}$$

provando assim, (4.22).

Para φ_1, φ_2 em $X^{1/2}$, temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_1 \varphi_1' - \varphi_2 \varphi_2'\|_{L^2(0, \pi)} &= \|\varphi_1 \varphi_1' - \varphi_1 \varphi_2' + \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_2'\|_{L^2(0, \pi)} \\ &\leq \|\varphi_1(\varphi_1' - \varphi_2')\|_{L^2(0, \pi)} + \|(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi_2'\|_{L^2(0, \pi)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

com

$$\|\varphi_1(\varphi'_1 - \varphi'_2)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \pi \|\varphi_1\|_{1/2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2} \quad (4.24)$$

e

$$\|(\varphi_1 - \varphi_2)\varphi'_2\|_{L^2(0,\pi)}^2 \leq \pi \|\varphi_2\|_{1/2}^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}^2. \quad (4.25)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(\varphi'_1 - \varphi'_2)\|_{L^2(0,\pi)}^2 &= \int_0^\pi |\varphi_1(x)(\varphi'_1 - \varphi'_2)(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^\pi |\varphi_1(x)|^2 |(\varphi'_1 - \varphi'_2)(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^\pi \sup_{x \in [0,\pi]} |\varphi_1(x)|^2 |(\varphi'_1 - \varphi'_2)(x)|^2 dx \\ &\leq \pi \|\varphi_1\|_{1/2}^2 \int_0^\pi |\varphi'_1 - \varphi'_2(x)|^2 dx \\ &\leq \pi^2 \|\varphi_1\|_{1/2}^2 \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}^2, \end{aligned}$$

provando assim (4.24). Analogamente, provamos (4.25). Logo, de (4.23), chegamos em

$$\begin{aligned} \|\varphi_1\varphi'_1 - \varphi_2\varphi'_2\|_{L^2(0,\pi)} &\leq \pi \|\varphi_1\|_{1/2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2} + \pi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2} \|\varphi_2\|_{1/2} \\ &\leq \underbrace{\pi(\|\varphi_1\|_{1/2} + \|\varphi_2\|_{1/2})}_{K} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Portanto, das estimativas (4.22), (4.26) e usando (4.20), temos

$$\begin{aligned} \|F(t_1, \varphi_1) - F(t_2, \varphi_2)\|_{L^2(0,\pi)} &\leq \sqrt{\pi} L(|t_1 - t_2|^\theta + \sqrt{\pi} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}) \\ &\quad + K \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2} \\ &\leq \sqrt{\pi} L(|t_1 - t_2|^\theta + M \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{1/2}), \end{aligned}$$

onde $M = \sqrt{\pi} + \frac{K}{\sqrt{\pi}L}$. □

Portanto, dos Lemas 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.4, e pelo Lema (4.2.3), segue que as hipóteses do Teorema 3.2.2 são satisfeitas. Logo, existe $T = T(t_0, U_0)$ para algum $(t_0, U_0) \in U$ tal que o problema (4.10) possui uma única solução em $(0, T)$ com valor inicial $U(0) = U_0$. E a solução é dada por

$$U(t) = e^{-A(t-t_0)} U_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(t-s)} F(s, U(s)) ds.$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CZAJA, R. M. *Differential Equations with Sectorial Operator*. [S.l.]: Wydawnictwo Uniwersytetu Slakigo, 2002.
- [2] HENRY, D. *Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Berlin: Springer-Verlag, 1981. iv+348 p. (Lecture Notes in Mathematics, v. 840). ISBN 3-540-10557-3.
- [3] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. F. *Sobolev spaces*. [S.l.]: Elsevier, 2003.
- [4] BRÉZIS, H. *Análisis funcional, Teoria y aplicaciones*. Madrid: Ed. cast.: Alianza Editorial S.A., 1984.
- [5] NACHBIN, L. *Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial*. Washington, DC 1976. Programa Regional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico- Departamento de Assuntos Científicos- Secretaria Geral da Organização dos Estados Americanos.
- [6] SOARES, L. M. *O Problema de Cauchy para Sistema de Lui-Kubota-Ko*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas - IMECC, 2002.
- [7] MELO, R. A. de. *A Teoria de Semigrupos Aplicada às Equações Diferenciais Parciais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande - Centro de Ciências e de Tecnologia, 2006.
- [8] VRABIE, I. I. *Semigroups and Applications*. Universidade of Rochester, New York, U.S.A.: Saul Lunkin, 2003.
- [9] MCBRIDE, A. C. *Semigroups of linear operators: an introduction*. [S.l.]: Longman Scientific and Technical, 1987.
- [10] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. New York: Springer-Verlag 2nd, 1992. (Applied Mathematical Sciences).
- [11] CRUZ, G. J. L. *Existência de soluções periódicas em alguns problemas não-lineares*. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2001.

- [12] BAI, M.; CUI, S. Well-posedness and asynchronous exponential growth of solutions of a two-phase cell division model. *Electronic Journal of Differential Equations*, v. 2010, n. 47, p. 1–12, 2010.
- [13] MUKHERJEA A E POTHOVEN, K. *Real and Functional Analysis*. New York: Plenum Press, 1978.