UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO EM ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

NARRATIVAS NO ENSINO DE FUNÇÕES POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

MÁRCIO UREL RODRIGUES

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO
2007

Universidade Estadual Paulista - Rio Claro/SP
IGCE – Instituto de Geociência e Ciências Exatas
Pós-Graduação em Educação Matemática

NARRATIVAS NO ENSINO DE FUNÇÕES POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

Autor: Prof. Márcio Urel Rodrigues
Orientadora: Dra.Rosana Guiaretta Sguerra Miskulin

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Rio Claro (SP)
2007

NARRATIVAS NO ENSINO DE FUNÇÕES
POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS

BANCA EXAMINADORA

_____

Prof. Drª. Rosana Guiarreta Sguerra Miskulin (Orientadora)
Universidade Estadual Paulista – Unesp – Rio Claro

_____

Profª. Drª Miriam Godoy Penteado
Universidade Estadual Paulista – UNESP/Rio Claro

_____

Profª. Drª Maria Teresa Menezes Freitas
Universidade Federal de Uberlândia

_____

Mestrando: Profº Márcio Urel Rodrigues

Resultado: _____

Rio Claro, 28 de fevereiro 2007.

Acredito que o progresso de um povo e de uma nação passa, necessariamente, pela sala de aula e pelo trabalho dos professores. Desta maneira, penso que o sucesso da Educação deriva de muito esforço, preparação, e de um constante desenvolvimento profissional por parte de nós, professores. Assim, devemos sempre querer o melhor para nossos alunos e fazê-los aprendizes ativos e participativos na construção de seus conhecimentos. **Para mim, ser professor não é uma questão de opção, mas de entrega, pois minha vontade é transformar o queria no querer.** Com esse posicionamento, meu trabalho se dirige aos professores que pensam em fazer da sua próxima aula a melhor de todas as aulas, podendo transformar suas palavras em atos sublimes de esperança e de fé.

Márcio Urel Rodrigues

D E D I C A T Ó R I A

Dedico este trabalho a JOSÉ DA LUZ RODRIGUES e a RUTE UREL RODRIGUES, dois seres humanos incomparáveis e inigualáveis, pois, divinamente inspirados por Deus, tiveram sapiência no ato de me educar para a vida. Meus Pais foram verdadeiros protagonistas, cujos esforços jamais foram medidos, proporcionando-me amparo e carinho. A razão para que eu prossiga caminhando e crescendo são vocês.

AGRADECIMENTOS

O sentimento de gratidão é uma das virtudes mais bonitas que existem, pois é por meio dos agradecimentos que apresentamos publicamente os coadjuvantes de uma trajetória marcada por momentos felizes e difíceis. Finalizar esta dissertação de mestrado só foi possível por causa de meus esforços e renúncias e também pela colaboração compartilhada por aqueles que contribuíram comigo nesta trajetória, sempre promovendo um apoio amigo, dispostos a ajudar. Enfatizarei, neste momento, as pessoas que fizeram e que fazem parte da minha vida.

Obrigado, Senhor Deus. Devo tudo o que sou a ti. Tu tens me dado tudo, me deu a vida e me conduziu até aqui. Obrigado, Senhor, por conduzir todas as coisas na minha vida.

Obrigado, José e Rute "Pais". Sou uma extensão de vossas vidas e a impressão de vosso sentimento. Sou um produto de vós mesmos. Um retrato que ainda não amarelou me mostra que nossa família é o tesouro mais precioso que tenho.

Obrigado, Profª. Drª Rosana Guiaretta Sguerra Miskulin, "Orientadora". Você é uma luz magnânima do caminho do saber, e é também, guardiã da Educação Áurea.

Obrigado, Profª. Drª Maria Tereza Menezes Freitas e Profª. Drª Miriam Penteado Godoy "Examinadoras da qualificação". Sou grato pela leitura cuidadosa da dissertação, pelas críticas e observações e, também, pelas sugestões.

Obrigado, professores da Unesp – Rio Claro/SP. Vocês são os "gurus" de uma cristologia divina que me lapidou com suas sábias lições.

Obrigado, amigos da Unesp – Rio Claro/SP. Vocês são catecúmenos preeminentes da escola da vida. Amigos, somos a esperança que a manha dourada dos sonhos despertou para as grandes realizações.

Obrigado, amigos e professores de Barra do Bugres/MT. Na sinceridade de vossos olhares e no afeto livre de vosso coração habita a esperança do mundo, por isso: não fecheis os olhos, nunca tranqueis o coração, jamais silencies a vós.

Obrigado, Universidade Estadual Paulista – Rio Claro/SP. Sou orgulhoso em poder ter a oportunidade de me tornar Mestre em Educação Matemática nesta instituição de ensino tão séria, responsável e reconhecida.

Obrigado, Elisa e Ana, "funcionárias do Departamento de Matemática da Unesp". Vocês sempre estiveram dispostas a me ajudar tão bondosamente.

Obrigado, Colégio Adventista de Barra do Bugres/MT. Sou grato pelas oportunidades e contribuições que a mim oferecestes. Agradeço a Diretora do Colégio, professora Sônia Regina Castilho Lírio, à professora da classe da oitava série Solange Ramos e, também, aos alunos que, gentilmente, concordaram em participar deste trabalho de pesquisa.

Obrigado, Família Urel e Rodrigues. Sempre que precisava de algo, encontrava o que eu necessitava com vocês. Em especial a: Adelina Lemes, José Divino Rodrigues Lemes, Izaias Rodrigues da Silva e Eva Urel.

Obrigado, Andréia Urel "minha irmã" e também a João Brandão "meu cunhado", que me alegrou neste período proporcionando a presença do **Victor Hugo** em nosso meio. Apresento, na foto a seguir este personagem tão importante.

Obrigado, "Família Monteiro". Nos momentos em que eu estava longe da minha família sanguínea, vocês apareceram para me preencher com carinho e amizade. Congratulo com vocês essa conquista, porque passei momentos agradáveis na presença de vocês na cidade de Rio Claro/SP.

RESUMO

A presente pesquisa apresenta as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas por meio da perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas no ensino do conceito de Função. Assim sendo, tecemos algumas considerações a respeito das narrativas no contexto da sala de aula com o intuito de destaca-lás como um meio de viabilizar a comunicação de idéias matemáticas em sala de aula. Com essas perspectivas, buscamos responder a seguinte questão de investigação: "**Quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de funções**?" Desta maneira, objetivamos **investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no processo de ensinar e aprender Funções**. Metodologicamente, qualificamos nossa pesquisa como qualitativa interpretativa que utiliza as narrativas como objeto de estudo, a qual propõe que as narrativas são histórias de aprendizagens dos alunos por meio dos seus processos vividos e de suas experiências. A coleta de dados foi realizada junto aos alunos da 8ª série do Ensino Fundamental do Colégio Adventista de Barra do Bugres/MT. Para isso, utilizamos gravações em áudio, entrevistas, diários de bordo do pesquisador, narrativas escritas, questionários e observações diretas como procedimentos metodológicos para a coleta de dados da pesquisa. Destacamos, também, a perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas de acordo com Ponte (2003) e Abrantes et al. (1999), com as tarefas de natureza exploratório-investigativas envolvendo o tema Funções. Na análise realizada, evidenciamos indícios de uma cultura diferenciada, a qual valoriza aspectos argumentativos e comunicativos em sala de aula. Esses aspectos se apresentam como potencialidades didático-pedagógicas das narrativas para o processo de ensinar e aprender Funções.

Palavras Chaves: Narrativas, Conceito de Função, Investigações Matemáticas.

ABSTRACT

This research presents the didactic and pedagogical possibilities of narratives by means of the methodological perspective of Mathematical Investigation context in the teaching of the function concept. Thus being, we weave some considerações regarding the narratives in the context of the classroom with the intention of detaches-lass as a way to also make possible the communication of mathematical ideas in classroom. With these perspectives, we search to answer to the following problem of inquiry: **what are the didactic-pedagogical possibilities of narratives in the functions teaching context?** In that way, we aim to investigate and to headlight the didactic-pedagogical possibilities of narratives in the process of teaching and learning functions. Methodologically, we characterize our research as qualitative interpretative that uses the narratives as object of analysis to disclose its didactic-pedagogical potentialities in the education of functions. The data collection was taken with students of a last-middle-school class of School Adventist of Barra do Bugres/MT, for that, we used audio recordings, interviews, researcher's on a "board diary", written narratives, questionnaires and direct observations as devices to collect data research. We detach, also, the methodological perspective of the Mathematical Inquiries in accordance with Ponte (2003) and Abrantes et al. (1999), with the exploratório-investigativas tasks of nature involving the subject Functions. In the carried through analysis, we evidence indications of differentiated culture, which values argumentations and communications aspects in classroom. These aspects if present potentialities of the narratives will be the process you teach and you learn functions.

Key Words: Narratives, Concept of Functions, Mathematical Investigation.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO DA PESQUISA 17

CAPÍTULO I - ENSINO DE FUNÇÕES EM MATEMÁTICA 25

1.1. Desenvolvimento Histórico do Conceito Função 25
1.2. Tema Funções no Contexto das Pesquisas 29
1.3. O Ensino de Funções nos Documentos Educacionais Oficiais 34
1.4. Idéias Básicas do Conceito de Função no seu Ensino 38
1.5. Proposta para o Ensino do Conceito de Função 43

CAPÍTULO II - AS NARRATIVAS NO CONTEXTO DA SALA DE AULA 48

2.1. As Narrativas no Contexto da Literatura 48
2.2. Narrativas como uma Abordagem Didático-Pedagógica 54
2.3. Narrativa como forma de Comunicação 56
2.3.1. Narrativa como forma de Comunicação na Sala de Aula 58
2.3.1.1. Narrativas Orais nas Aulas de Matemática 62
2.3.1.2. Narrativas Escritas em Aulas de Matemática 65
2.4. Considerações Didático-Pedagógicas das Narrativas 69

CAPÍTULO III - METODOLOGIA DA PESQUISA E METODOLOGIA JUNTO AOS SUJEITOS PESQUISADOS 71

3.1. Opção Metodológica de Pesquisa 72
3.2. Contextualizando os Participantes da Pesquisa 74

3.3. Locus da Pesquisa _____ 76

3.4. Procedimentos de Coleta de Dados nos Episódios de Ensino _____ 78

3.5. Natureza das Tarefas Exploratório-Investigativas utilizadas nos Episódios de Ensino _____ 81

3.6. Metodologia Junto aos Sujeitos Pesquisados nos Episódios de Ensino _____ 84

3.7. Dinâmica dos Episódios de Ensino Realizados _____ 89

3.8. Descrição e Análise dos Dados _____ 96

3.9. Considerações e Reflexões Metodológicas _____ 97

CAPÍTULO IV - DESCRIÇÃO DAS TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS _____ 99

4.1. Reencontro do Pesquisador com os Alunos _____ 99

4.2. Primeira Tarefa Exploratório-Investigativa: Uma Fábula Matemática _____ 101

4.2.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: Uma Fábula Matemática __ 103

4.3. Segunda Tarefa Exploratório-Investigativa: Trajeto de Casa a Escola _____ 114

4.3.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: Trajeto de Casa a Escola __ 120

4.4.Terceira Tarefa Exploratório-Investigativa: A Rivalidade entre Brasil e Argentina _____ 130

4.4.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: A Rivalidade entre Brasil e Argentina _____ 134

4.5. Quarta Tarefa Exploratório-Investigativa: A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções _____ 142

4.5.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-investigativa A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções _____ 144

4.6. Quinta Tarefa Exploratório-Investigativa: As Funções vão até a Lanchonete _____ 154

4.6.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-investigativa: As Funções vão até a Lanchonete _____ 155

4.7. Sexta Tarefa Exploratório-Investigativa: Função Área - Respeite o Seu Número _____ 165

4.7.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-investigativa: Função Área – Respeite o seu Número _____167

4.8. Sétima Tarefa Exploratório-Investigativa: Área de um Quadrilátero em Função de X _____ 177

4.8.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: Área de um Quadrilátero em Função de X _____ 179

4.9. Oitava Tarefa Exploratório-Investigativa: Criptografando Mensagens e as Funções _____ 190

4.9.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: Criptografando Mensagens e as Funções 194

CAPÍTULO V - TORNANDO AS NARRATIVAS VIVAS – UMA ANÁLISE INTERPRETATIVA DAS NARRATIVAS 204

5.1. Perspectiva Conceitual 205

5.1.1. Relação dos Alunos com os Conceitos Matemáticos 205

5.1.2. Relação dos Alunos com os Processos Reflexivos/Meta-Reflexivos 219

5.1.3. Relação dos Alunos com as Investigações Matemáticas e as Tarefas exploratório-Investigativas 229

5.1.4. Relação dos Alunos com as Narrativas 238

5.2. Perspectiva Metodológica 250

5.2.1. Mediação do Professor 250

5.2.2. Dimensão Colaborativa 257

5.2.3. Dimensão Interativa 260

5.2.4. Relação Professor/Alunos 267

CAPÍTULO VI CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES FINAIS 272

6.1. Considerações Reflexivas dos Episódios de Ensino Realizados 273

6.2. Considerações sobre a Perspectiva Conceitual 276

6.3. Considerações sobre a Perspectiva Metodológica 278

6.4. Quais são as Possibilidades Didático-Pedagógicas das Narrativas? 280

6.5. As Narrativas e a Cultura da Argumentação 281

6.6. Reflexões sobre as Investigações Matemáticas 283

6.7. Dificuldades enfrentadas pelo Pesquisador 284

6.8. Dificuldades enfrentadas pelos Alunos 285

6.9. Reflexões Finais sobre as Narrativas 286

6.10. Recomendações aos Profissionais da Educação 288

6.11. Reflexões Finais da Pesquisa 290
6.12. Possibilidades e Sugestões para Próximas Pesquisas 290
6.13. Desenvolvimento Profissional e Desejo de Prosseguir 291

CAPÍTULO VII – BIBLIOGRAFIAS 293

ANEXOS 305

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Tabelas

Tabela 1: Níveis de Compreensão do Conceito de Função (TINOCO, 1996. p, 7). _____ 42
Tabela 2: Aspectos do relacionamento entre o pesquisador e a professora da classe _____ 76
Tabela 3: Disposição das tarefas exploratório-investigativas realizadas nos episódios de ensino _____ 84
Tabela 4: Dinâmica dos episódios de ensino realizados _____ 92
Tabela 5: Reprodução do registro da tabela apresentada pelo aluno Alexandre no quadro negro _____ 146
Tabela 6: Reprodução registro da tabela apresentada pelo professor no quadro negro_____ 151
Tabela 7: Tabela apresentada pelo grupo Star Girls _____ 157
Tabela 8: Reprodução da tabela apresentada pelo aluno Alexandre no quadro negro _____ 158
Tabela 9: Tabela apresentada pelo aluno Heber no Quadro Negro_____ 163
Tabela 10: Tabela feita pelo aluno Heber no Quadro Negro _____165
Tabela 11: Reprodução da tabela montada pelo Professor no Quadro Negro _____175
Tabela 12: Representação da tabela com os valores da Área do quadrilátero _____184
Tabela 13: Reprodução da tabela feita pela aluna Raíssa _____ 195
Tabela 14: Representação dos registros feitos pelo aluno Neto no quadro negro _____ 198

Fotos

Foto 1: Professora da Turma - Solange Teixeira Ramos _____74
Foto 2: Frente/lateral do Colégio Adventista de Barra do Bugres _____77
Foto 3: Aluno Igor (Líder do grupo VI – Los Hermanos) _____137

Figuras

Figura 1: Reprodução da representação gráfica da história reformulada (Grupo 2 – Os Orientais)_____102
Figura 2: Reprodução da representação gráfica da história reformulada (Grupo 7 – Star Girls) _____ 103

Figura 3: Reprodução da representação das grandezas na lousa do aluno Neto 106
Figura 4: Reprodução da representação na lousa de uma história do aluno Neto 108
Figura 5: Reprodução da representação na lousa da história formulada pelo Grupo (Os Orientais) 110
Figura 6: Reprodução da representação gráfica da história reformulada (Grupo 7 – Star Girls) 112
Figura 7: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Alexandre 117
Figura 8: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Alisson 118
Figura 9: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Allan 118
Figura 10: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Rômulo 118
Figura 11: Reprodução da representação do trajeto realizado pela aluna Tâmara 119
Figura 12: Reprodução da representação do trajeto realizado pela aluna Suellen 120
Figura 13: Representação gráfica da primeira e segunda situação Grupo Esquadrão da Morte 121
Figura 14: Reprodução do gráfico explicado pelo aluno Alexandre no quadro negro 123
Figura 15: Reprodução do gráfico da função velocidade-tempo feito pelo aluno Alexandre Yukio 124
Figura 16: Reprodução do gráfico da função velocidade-tempo feito pelo aluno Alexandre Yukio 125
Figura 17: Reprodução do gráfico velocidade-tempo feito pelo aluno Alexandre Yukio 127
Figura 18: Reprodução representação do trajeto realizado pela aluna Tâmara 129
Figura 19: Registro do tabuleiro no quadro negro feito pelo professor 145
Figura 20: Cálculos realizados pelo grupo Star Girls sobre essa tarefa exploratório-investigativa 153
Figura 21: Reprodução do desenho feito pela aluna Letícia no quadro negro 159
Figura 22: Cálculos feitos pelo aluno Alexandre contido em sua narrativa escrita 160
Figura 23: Cálculos feitos pelo grupo Star Gilrs registrados em suas narrativas escritas 161
Figura 24: Cálculo da Área do número da aluna Mayara Aued apresentado nas narrativas escritas 169
Figura 25: Cálculo da área do número da aluna Letícia Santi apresentado nas narrativas escritas 169
Figura 26: Reprodução do primeiro desenho feito pelo Professor no quadro negro 170
Figura 27: Reprodução do segundo desenho feito pelo professor no quadro negro 171
Figura 28: Reprodução do desenho e dos cálculos feitos pelo aluno Alexandre no quadro negro 172
Figura 29: Cálculos Contidos nas Narrativas escritas entregue pelo aluno Alexandre 174
Figura 30: Representação gráfica e conclusões registradas pelo aluno Igor do grupo Los Hermanos 177
Figura 31: Representação do desenho feito pelo professor no quadro negro 180
Figura 32: Representação das anotações feitas pelo aluno Edson no quadro negro 181
Figura 33: Representação do desenho feito pelo professor no quadro negro 182
Figura 34: Representação dos pontos contidos na tabela num plano cartesiano no quadro negro 185
Figura 35: Cálculos e Desenhos feitos pelo grupo “Só No Rim” contidos nas narrativas escritas 189
Figura 36: Reprodução da representação gráfica da aluna Raíssa no quadro negro. 195

Figura 37: Gráficos feitos pelo aluno Danilo Maciel em suas narrativas escritas _____ 200
Figura 38: Representação da mensagem enviada pelo grupo “Só no Rin” ao professor_____ 201
Figura 39: Representação gráfica e conclusões registradas pelo aluno Igor do grupo Los Hermanos _____ 215
Figura 40: Narrativas escritas do grupo Star Girls referente ao conceito de função_____217
Figura 41: Narrativa escrita reflexiva feita pelo Grupo Star Girls _____225
Figura 42: Narrativa Escrita do desenvolvimento da quarta tarefa exploratório-investigativa _____226
Figura 43: Narrativa escrita do grupo Star Girls _____ 248
Figura 44: Mensagem codificada para o professor decodificar _____ 269

INTRODUÇÃO DA PESQUISA

Na presente pesquisa, pretendo[1] traçar, em um primeiro momento, minha trajetória como pesquisador, com o intuito de contextualizar o objeto investigado, bem como, mostrar os caminhos percorridos que me levaram à formulação da questão investigativa da pesquisa.

Começarei narrando de forma reflexiva o caminho que percorri, passando por experiências escolares na licenciatura e também no período de Mestrado em Educação Matemática, na cidade de Rio Claro /SP. Essa narrativa revelará o início do meu envolvimento com a sala de aula, como professor de Matemática, durante quatro anos na cidade de Barra do Bugres – MT, e apresentará os motivos que me levaram a realizar uma pesquisa voltada para sala de aula de Matemática.

Os quatro anos da Graduação[2] se passaram, apresentei uma monografia[3] com êxito, e a partir dela, novos horizontes se abriram e apontaram para um curso de Mestrado em Educação Matemática[4]. Decidi realizar o exame de seleção e a conseqüência desta façanha foi a minha admissão no referido curso.

Como professor de Matemática, possuo uma maior experiência no Ensino Fundamental[5] e é por isso que escolhi direcionar essa pesquisa para esse nível de ensino. Após lecionar Matemática no Ensino Fundamental e Médio, nos anos de 2000 a 2004, percebi que a mesma era ensinada de forma "rotineira", nos quais os conteúdos trabalhados eram aqueles presentes no livro didático, adotado e o método de ensino se restringia às aulas expositivas e a exercícios de fixação ou de aprendizagem.

Em minhas aulas no Ensino Fundamental e Médio, via os meus alunos como receptores de conhecimentos matemáticos, sempre conduzidos por mim, através da transmissão oral ou escrita, e, na melhor das hipóteses, pela descoberta guiada para que eles pudessem adquirir esses conhecimentos. Valorizava a memorização e a técnica de resolução de tipos pré-estabelecidos de exercícios. Nesse sentido, a Associação de Professores de Matemática APM (1988) em seu documento afirmam que "a exposição tradicional em que o professor se limita a **dar os conceitos**, seguida eventualmente da proposta de exercícios

---

[1] Na presente pesquisa, quando o pesquisador se refere à sua trajetória pessoal, o emprego do verbo será na primeira pessoa do singular, nos outros momentos, a pesquisa adotará a terceira pessoa do plural.
[2] Fiz a minha graduação em Licenciatura em Matemática, pela Universidade Estadual de Mato Grosso – UNEMAT, Campus Dep. Estadual Renê Barbour, Barra do Bugres/MT.
[3] Minha monografia foi intitulada: "Uma Proposta para o Ensino de Equações".
[4] Curso oferecido pelo IGCE – Instituto de Geociência e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus "Júlio de Mesquita Filho" - Rio Claro / SP.
[5] Colégio Adventista de Barra do Bugres, Escola Municipal Guiomar Campos Miranda e Escola Estadual 15 de Outubro, ambas localizadas no município de Barra do Bugres – MT.

repetitivos, constitui uma modalidade extremamente pobre do trabalho com toda a classe" (p. 48).

Sendo assim, me angustiava ao ver o nível baixo de aprendizagem de alguns dos meus alunos, e, a partir daí, comecei a me preocupar com a minha atuação enquanto professor de Matemática e com as minhas responsabilidades nesta situação. Passei a me preocupar com o nível de desenvolvimento dos meus alunos e também com a necessidade de levar em conta o que os alunos diziam sobre as suas aprendizagens. Desta maneira,

> [...] as propostas metodológicas devem contemplar os aspectos cognitivos afetivos e sociais da aprendizagem e, dar ênfase a situações concretas, aos aspectos intuitivos da Matemática e ao raciocínio indutivo, privilegiando atividades de exploração, conjecturação e provas matemáticas, bem como as aplicações da Matemática e a resolução de problemas. Devem, por outro lado, estimular a comunicação oral e escrita, a discussão e reflexão, a troca e confronto de idéias, experiências e processos de trabalho (APM, 1988, p. 22).

Classifico minha postura anterior como tradicional, no sentido de não buscar ensinar Matemática de maneiras diferenciadas e dinâmicas. Entendo que, nas escolas, nas quais professores de Matemática trabalham com o ensino tradicional, o processo de ensino e aprendizagem torna-se mera transmissão da matéria, ou seja, o professor 'transmite' e os alunos 'recebem'.

Diante destes fatos, percebi que o ensino da Matemática deveria ser algo mais, do que a reprodução e memorização dos exercícios contidos nos livros didáticos pelos alunos. Para mim, o livro didático deve ser usado pelos professores de Matemática como recurso auxiliar, dentre outros. Por essa razão, entendo ser fundamental a procura de perspectivas metodológicas diferenciadas para contribuir com o desenvolvimento da capacidade de pensar dos alunos e também para dinamizar o ambiente das aulas de Matemática.

Neste contexto, a interação do aluno com o objeto de conhecimento para que se estabeleçam hipóteses ou conjecturas para que estas sejam, posteriormente, confirmadas ou reformuladas são importantes. Assim sendo,

> O aluno precisa ser ajudado para tornar-se autônomo-intelectualmente. Precisa também, ser capaz de descobrir uma maneira pessoal de relacionar-se com o mundo da Matemática, desenvolvendo a capacidade de compreender e elaborar suas próprias experiências do dia-a-dia (BIAGGI 2000, p. 19).

Entendo que um passo a ser dado em busca da abordagem citada é estabelecer uma ruptura por parte do professor para com o modelo tradicional de ensino. Com estas idéias, optei pelas Investigações Matemáticas, como uma perspectiva metodológica, por acreditar,

que através desta, desenvolveria um ensino de Matemática em contextos mais dinâmicos e interativos.

Na dinâmica metodológica das Investigações Matemáticas, os alunos possuem vozes e espaços para discussão e reflexão de suas aprendizagens, tornando-os ativos no processo de ensinar e aprender Matemática. A meu ver, um professor, para dar valor à Matemática, seja importante adaptar uma postura investigativa e estar sempre pensando em fazer algo diferente e buscando sempre o novo.

Utilizar as Investigações Matemáticas como perspectiva metodológica exigiu de mim uma mudança de atitude, pois meu novo papel se diferencia da minha prática docente anterior. Um fator favorável para essa mudança relaciona-se com a minha insatisfação com o estado atual do ensino da Matemática, pois, em minha prática, reconheço a falta de entusiasmo dos alunos pelas propostas de trabalho que a maneira tradicional proporciona.

Meu desejo, enquanto professor é deixar de ser apenas um fornecedor da informação para passar a ser também um organizador de atividades, um dinamizador do trabalho, um companheiro de descoberta e um mediador de discussões, ocorridas através da utilização das narrativas em sala de aula.

Nessa mesma linha de pensamento, D'Ambrosio (2005)[6], afirma ser

> [...] necessário vivenciar e trabalhar um novo processo de ensino, de organização de conteúdos, no qual o professor deve estar em constante busca de novos conhecimentos para propiciar aos seus alunos oportunidades de desenvolver a criatividade em ambientes de aprendizagem. A difícil aceitação do novo se dá pela mesmice resistente e que os professores precisam se preparar para uma nova educação.

Para esse pesquisador, a estrutura tradicional ou o ensino exclusivamente de conteúdos é entendido como transferência do saber, memorização mecânica do conteúdo. Ele ainda declara não ter dúvidas de que "a estrutura tradicional do ensino e pesquisa que prevalece em nosso país é inadequada para os fins que sonhamos" (D'AMBRÓSIO 1986, p.19).

Nesta perspectiva, Ponte (2000), afirma que às aulas de exposição e prática têm predominado no ensino da Matemática. Para esse autor,

> [...] a exposição é protagonizada pelo professor, centrando-se na explicação e exemplificação das idéias e conceitos. A prática, a cargo dos alunos, consiste na realização repetitiva de exercícios visando a sua compreensão e assimilação. Este tipo de aula tem uma eficácia educativa muito reduzida, sobretudo quando se destina

[6] Notas de aulas da disciplina Tendências da Educação Matemática, ministrada pelo Professor Dr. Ubiratan D' Ambrósio na Universidade Estadual Paulista – "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Rio Claro, SP.

> a um público escolar com interesses e motivações muito diferenciados. (PONTE 2000, p. 2)

Para esse autor, este formato de aula tem uma eficácia educativa muito reduzida, sobretudo, quando se destina a um público escolar com interesses e motivações diferenciadas. Para Ponte (2000), apesar de serem raras, as aulas de exploração e discussão, nas quais os conceitos são explorados pelos alunos e os seus significados se estabelecem pela discussão coletiva, proporcionam um envolvimento muito mais significativo por parte dos alunos, embora seja claramente mais complexo para o professor preparar e conduzir.

Sempre procurei buscar metodologias alternativas para o ensino tradicional, mas, na verdade, minhas aulas eram quase, na sua totalidade, realizadas através dessa abordagem. Pesquisando, encontrei a Resolução de Problemas, e, em seguida, as Investigações Matemáticas. Fiquei animado e empolgado ao descobrir metodologias diferentes das do estilo tradicional. A partir daí, apareceu-me à possibilidade e a oportunidade de estudar a respeito das narrativas envolvidas em uma perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas.

Ingressei no Mestrado no início de 2005, e, com o passar do tempo, uma questão não parava de me incomodar, pois escrevi um projeto e o discuti com a minha orientadora, mas ainda assim, não conseguia ter claro, em minha mente, o foco da pesquisa acadêmica que eu estaria por desenvolver. Assim, através das orientações, essas inquietações em conjunto com as leituras, só me fizeram crescer e, em um movimento de delimitação e re-delimitação, destaco como foco da minha pesquisa **as narrativas como possibilidades didático-pedagógicas no contexto do ensino de funções.**

Escolhi desenvolver essa pesquisa envolvendo o tema "Funções", pois percebo que existe uma necessidade de tornar o ensino desse campo da Matemática voltado para o desenvolvimento prévio das idéias básicas de **variável, dependência, correspondência, regularidade e generalização**. Queria desenvolver um trabalho significativo para possibilitar a compreensão dos alunos e as diferentes formas de representar o conceito de função, além de destacar tarefas que possibilitam aspectos relacionados à aplicabilidade do conceito de função e para vivência do aluno.

A respeito disso, Pozo (1998) considera que organizar o currículo para a solução de problemas significa "procurar e planejar situações suficientemente abertas para induzir nos alunos uma busca e apropriação de estratégias adequadas não somente para darem respostas a perguntas escolares como também às da realidade cotidiana" (p. 14).

Diante disso, esta pesquisa possui como objetivo **investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas em processos de ensinar e aprender**

funções. Além deste, minha intenção ao desenvolver este trabalho foi a de poder contribuir com o processo de ensino e aprendizagem do tema "Funções", ainda no Ensino Fundamental, como também: salientar as potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas como uma forma de conceber o ensino de Matemática, auxiliar os professores em suas práticas de sala de aula, apresentando experiências envolvendo perspectivas metodológicas diferenciadas e destacar algumas dimensões da dinâmica do trabalho em grupo que possam interferir nas socializações das narrativas dos alunos.

Através da minha experiência profissional, no decorrer da elaboração desta dissertação, acredito ser fundamental o apoio de um grupo com o qual o professor possa discutir e refletir sobre o trabalho desenvolvido. Ressalto que senti esse apoio em todos os momentos deste trabalho, por parte do grupo de Formação de Professores da Unesp – Rio Claro, bem como do grupo[7] de orientação, coordenado pela minha orientadora, Professora Drª Rosana Guiaretta Sguerra Miskulin. Os grupos de estudo propiciam momentos especiais, que têm como finalidade discutir sobre as pesquisas que estão sendo desenvolvidas pelos componentes do grupo, bem como a discussão de textos sobre a formação de professores e a prática docente.

Nesta perspectiva, Fiorentini (2005) afirma que em um grupo de estudos aparecem contribuições teórico-metodológicas para as pesquisas em desenvolvimento, além de contribuir para a formação de novos pesquisadores. Para esse pesquisador, isso decorre através de um mútuo apoio, em que este se caracteriza pelas apresentações e discussões em diferentes momentos das pesquisas em andamento, contribuindo, assim, não apenas para a formação docente, mas também para a formação do pesquisador.

Miskulin et al. (2005), resgata o conceito de colaboração a partir de alguns teóricos, tais como: Hargreaves (1998) que considera que,

> [...] a colaboração transformou-se num meta-paradigma da mudança educativa e organizacional da idade pós-moderna" (p. 277), sobretudo, de um lado, pelo seu "princípio articulador e integrador da ação, do planejamento, da cultura, do desenvolvimento, da organização e da investigação" e, de outro, "como resposta produtiva a um mundo no qual os problemas são imprevisíveis, as soluções são pouco claras e as exigências e expectativas se intensificam (ibid. p. 279).

Gomes (2001), também ressalta a importância da cultura colaborativa entre docentes. Para esse autor, fundamentado em outros estudiosos como Hargreaves, Fullan e Campbell, a colaboração transporta o desenvolvimento profissional dos docentes mais além do

[7] Esse grupo de estudo é mais conhecido como grupo de orientação, dirigido pela professora Dra. Rosana Guiaretta Sguerra Miskulin orientadora e os seus Orientandos.

individualismo para um cenário em que os docentes podem aprender uns com os outros ao compartilhar suas experiências.

Desde o meu primeiro contato com as tarefas de natureza exploratório-investigativas[8], considero que estas assumem um papel importante na aprendizagem dos alunos, na medida em que lhes permitem construir o seu próprio conhecimento e os tornam cada vez mais livres para descobrir coisas, independentemente do professor. Desta maneira, procurei neste trabalho de pesquisa investigar as narrativas dos alunos envolvidos em tarefas desta natureza, objetivando sua importância na realização de um ensino de Matemática mais significativo.

Em minhas interlocuções com a orientadora Profª Drª. Rosana Guiaretta Sguerra Miskulin, discutimos a idéia de investigarmos as narrativas dos alunos e apresentarmos as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de Funções. Quando encontrei essa perspectiva metodológica de ensino de Matemática, senti o desejo de desenvolver minha pesquisa neste contexto. Neste estado de profunda inquietação e constante busca pelo conhecimento matemático – didático – pedagógico para a minha própria prática em sala de aula, é que nasceu a motivação para a realização desta pesquisa.

Desenvolvi essa pesquisa em sala de aula e para a sala de aula, com o intuito de dar "vozes" aos alunos, pois eu gostaria de experimentar esta ação diferenciada, mesmo porque estava interessado em utilizar as narrativas dos alunos no processo de ensino e aprendizagem de funções. Desta maneira, deixaria os alunos expressarem, oralmente ou por escrito, as suas opiniões, estratégias, suas formas de pensar a respeito do conceito de função em um ambiente participativo e colaborativo, possibilitando-os participar de maneira crítica e ativa no ambiente de estudo.

O processo de ensino e aprendizagem de Funções e suas dificuldades têm sido motivos de preocupações entre muitos pesquisadores[9]. Essas pesquisas mostram diversos aspectos referentes ao processo histórico evolutivo e ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de função. Zuffi (1999) declara que é comum encontrar alunos que não compreendem o conceito de função e não o atribui qualquer significado, além de tê-lo como um obstáculo de difícil transposição para a assimilação de outros conteúdos.

Do ponto de vista deste processo, penso ser importante despertar, nos professores que lecionam no final do Ensino Fundamental e Ensino Médio, a consciência de que, ao longo do trabalho com os tópicos usualmente incluídos nos programas, é possível desenvolver as idéias essenciais à construção do conceito de função.

---

[8] Entendo por tarefas exploratório-investigativas como sendo a natureza das tarefas e a definirei no Capítulo III.

[9] Apresentarei, no Capítulo I, alguns pesquisadores que destacam em suas pesquisas e trabalhos o processo de ensino e aprendizagem do conceito de função.

Apresento uma proposta para o ensino do conceito de Função que privilegia primeiramente o trabalho com as idéias básicas deste conceito. Desta maneira, acredito que a diversificação das idéias matemáticas que envolvem o conceito de função poderá possibilitar aprendizagens significativas, além de poder viabilizar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos no Ensino Fundamental.

Nesta pesquisa, procurei investigar o processo de ensino e aprendizagem, no qual utilizo as Investigações Matemáticas como contexto, e neste contexto, foco a minha atenção nas narrativas dos alunos. Com essas perspectivas, a questão investigativa, a qual direciono esta pesquisa, é investigar **"quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de funções?"**

Com base nestes questionamentos já anteriormente destacados, apresentamos, a seguir, a estrutura desta dissertação com a descrição dos capítulos e os seus respectivos objetivos.

No capítulo I, abordamos o **Ensino de Função na Matemática**, objetivando fazer um estudo bibliográfico na literatura referente ao ensino desse conceito, considerando alguns aspectos como: o seu desenvolvimento histórico, pesquisas envolvendo este conceito, o que dizem os documentos curriculares (PCNs e outros) sobre esse conceito e as idéias fundamentais do conceito de Função. Objetivamos, neste capítulo, compreender como o conceito de função aparece na literatura atual, para entender quais são as dimensões que interferem nesse conceito ao longo da literatura.

No capítulo II, destacamos as **Narrativas no Contexto da Sala de Aula**. Meu intuito neste capítulo foi buscar subsídios teórico-metodológicos que viabilizassem a nossa questão de investigação, além de apresentar também as diferentes concepções de narrativas adotada por autores e pesquisadores, a saber: algumas definições para narrativas no contexto geral e também as suas formas de representação; a concepção de narrativa adotada por mim, nesta pesquisa, as narrativas como alternativa didático-metodológica de ensino, as narrativas como forma de comunicação em Matemática e as narrativas orais e escritas em Matemática. Com o intuito de trazer uma teorização com base na literatura sobre as potencialidades das narrativas para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, destacaremos as narrativas como um meio de viabilizar a comunicação de idéias matemáticas e também da comunicação em sala de aula.

No capítulo III, apresentamos a **Metodologia da Pesquisa e Metodologia junto aos Sujeitos Pesquisados.** Nessa apresentação, evidenciamos a pesquisa de natureza qualitativa-interpretativa. Utilizamos como procedimentos metodológicos às gravações em áudio, entrevistas semi-estruturadas, diários de bordo do pesquisador, narrativas escritas dos alunos,

questionários dos alunos e da professora da turma, observações diretas, narrativas orais dos alunos e conversas informais. Apresentamos também, neste capítulo metodológico, as Investigações Matemáticas como uma perspectiva metodológica de ensino de Matemática, na qual ressaltamos a importância que as tarefas de natureza exploratório-investigativa possuem para o processo de ensinar e aprender Matemática.

No Capítulo IV, apresentamos as **Descrições das Tarefas Exploratório-Investigativas**. Registramos, ainda, as narrativas realizadas pelos alunos na dinâmica metodológica da Investigação Matemática em sala de aula, destacando os momentos de apresentação, desenvolvimento, discussão e reflexão. Especificamos ainda em que consiste cada uma das tarefas, evidenciando os seus objetivos.

No capítulo V, intitulado **Tornando as Narrativas Vivas: Analisando a Descrição das Narrativas dos Sujeitos Pesquisados,** evidenciamos a análise, na qual relacionamos a nossa interpretação com as vozes de outros pesquisadores encontrados na literatura, dando credibilidade, assim, à nossa interpretação construída. Buscamos também analisar os dados com base nas relações existentes entre os sujeitos e os aspectos didático-pedagógicos existentes durante os episódios de ensino.

No capítulo VI, fazemos nossas **Considerações e Reflexões Finais** destacando os aspectos convergentes da análise dos dados e as possíveis conclusões. Nesse momento, retornamos para a questão investigativa inicial e o objetivo proposto, com o intuito de apresentar as nossas considerações desta pesquisa.

No capítulo VII, registramos as **Bibliografias** que foram utilizadas no desenvolvimento desta pesquisa. Apresentamos tanto as obras citadas no texto dessa dissertação, quanto às obras lidas e consultadas no percurso de elaboração desta dissertação.

Apresentamos ainda os **Anexos** que servem de suporte para o texto desta dissertação, comprovando procedimentos e aspectos referentes à maneira como aconteceu o trabalho prático desta dissertação.

CAPÍTULO I

ENSINO DE FUNÇÕES EM MATEMÁTICA

O conceito de Função é um dos conceitos mais importantes na Matemática, e o seu processo de ensino e aprendizagem também possui grande relevância, pois tem sido motivo de muitas pesquisas no âmbito da Educação Matemática. Buscando contribuir com o panorama de pesquisa, destacamos as potencialidades didático-pedagógicas das narrativas dos alunos em um contexto do ensino do conceito de Função.

O intuito deste capítulo é entender como o conceito de função se apresenta na literatura, levando em conta alguns aspectos como: o seu desenvolvimento histórico; a sua relevância no contexto das pesquisas; o ensino de funções nos documentos educacionais; algumas idéias matemáticas fundamentais envolvendo o conceito de função; e logo em seguida, apresentar uma proposta para o ensino do conceito de função ainda no Ensino Fundamental.

Apresentamos, no decorrer deste capítulo, aspectos relacionados à proposta, fundamentando-a em pesquisas e em documentos educacionais. Ressaltamos estes aspectos, objetivando compreender como o conceito de função aparece na literatura atual, para entender as dimensões que interferem nesse conceito ao longo da literatura e para subsidiar a proposta de investigações matemáticas no ensino deste tema.

As Investigações Matemáticas é uma forma de conceber o ensino de Matemática, e, nesta pesquisa, ela é todo o contexto, no qual as narrativas são destacadas, com o intuito de compreender as suas potencialidades para o processo de ensino e aprendizagem das idéias matemáticas do conceito de Função.

Para isso, fizemos um estudo na literatura, envolvendo o conceito de função para não ficar no senso comum dos livros didáticos, pois, para subsidiar uma proposta com as Investigações Matemáticas com o conceito de Função, é importante conhecer sobre o tema e também sobre as idéias matemáticas que compõem este tema.

1.1. Desenvolvimento Histórico do Conceito Função

O desenvolvimento histórico do conceito da Função tem sido relembrado por pesquisadores e também por muitos historiadores da Matemática. No entanto, ainda existem

muitas inquietações sobre a origem desse conceito. Como em todos os fatos relacionados à História, existe sempre uma evolução gradativa. Com o conceito de Função não foi diferente, pois este conceito foi se aperfeiçoando ao longo dos séculos, e a noção atual que conhecemos é resultado de um longo desenvolvimento do pensamento matemático.

A esse respeito, Eves (1997) declara que o conceito de Função passou por evoluções acentuadas. Já, para Youschkevich (1976), o conceito de Função se desenvolveu ao longo de três fases.

> 1) A antiguidade, na qual o estudo de casos de dependência entre duas quantidades ainda não havia isolado as noções de variáveis e de função; 2) A Idade Media, onde as noções eram expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas em que ainda prevaleciam em cada caso concreto, as descrições verbais ou por um gráfico; 3) O Período Moderno, a partir do século XVII, principalmente (YOUSCHKEVICH 1976, apud ZUFFI, 1999, p. 64).

Zuffi (2001) declara que um instinto de funcionalidade já se fazia presente nos tempos mais remotos. Para essa pesquisadora, quando os babilônicos e gregos associavam os dedos às quantidades, e quando viram que estes já não eram mais suficientes, buscaram outros elementos para contar e enumerar, vivenciando uma interdependência de variáveis que fluíam para a formação de sistemas de numeração cada vez mais adequado e prático.

Sendo assim, historicamente, as Funções se relacionam à necessidade de resolver problemas advindos da relação do homem com o seu meio, como por exemplo, “os babilônios (2000 a.C.) em seus cálculos com tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas que eram destinadas a um fim prático” (ZUFFI 2001, p. 11). Já, os gregos utilizavam tabelas para fazer a conexão entre a Matemática e a Astronomia, mostrando assim idéia de dependência funcional.

Na **Antigüidade**, foram estudados problemas envolvendo a noção de **dependência**. Nesse período, nenhuma idéia foi generalizada da maneira formal, isso porque não havia nenhuma idéia abstrata de que uma **variável** se relacionava com os problemas, pois todos os problemas eram específicos e as expressões ou as fórmulas analíticas não eram possíveis, devido à ausência da simbologia algébrica. Nesse sentido, Boyer (1986) afirma que, “as relações de dependência entre duas grandezas já tinham sido percebidas e registradas na Antigüidade” (p. 25).

Na **Idade Média**, as noções gerais do conceito de Função eram basicamente registradas em formulários mecânicos e geométricos. Segundo Zuffi (2001), nesse período prevaleciam às descrições gráficas ou verbais e, até então, nenhuma fórmula foi utilizada.

Neste período as idéias descobertas direcionaram-se em torno das idéias de quantidades, de **variável independente e dependente**, pois "os matemáticos deste período estudaram fenômenos naturais como calor, luz, cor, densidade, distância, e velocidade (grandezas que possuem intensidade variável)" (ZUFFI, 2001, p. 11). Apesar de as Funções estarem presentes nesse período, eles ainda não utilizavam o termo Função.

No **Período Moderno** (começou no final do século XVI), o conceito de Função se tornou equivalente às **expressões analíticas**. Neste período, começaram a prevalecer às expressões analíticas de uma função, sendo que o método analítico de introdução à função revolucionou a Matemática devido à sua extraordinária eficácia e, assim, assegurou a esta noção um lugar de destaque em todas as ciências exatas. Os matemáticos dessa época passaram a fazer Matemática através de um simbolismo algébrico muito grande até então.

Neste período, o uso das fórmulas para introduzir funções começou por meio de Descartes (1596-1650) ao procurar introduzir uma função analiticamente em sua Geometria. Era intenção de Descartes reduzir a solução de todos os problemas e equações algébricas a algum procedimento padrão para construir suas raízes reais. Segundo Zuffi (2001) Descartes contribuiu para a evolução do conceito de Função, pois ele "estabeleceu uma relação de dependência entre quantidades variáveis, utilizando uma equação em x e y, possibilitando o cálculo de valores de uma variável a partir dos valores da outra" (p. 11).

Bernoulli foi outro matemático que teve grande influência para o desenvolvimento do conceito de Função. Segundo Eves (1997), Johann Bernoulli, por volta de 1718, considerou uma Função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes, porque uma função ainda não estava definida nem representada por este estudioso.

Um retoque final para essa definição viria a ser dado por Leonhard Euler (1707-1783), em 1748 devido a influência de Bernoulli, pois Euler foi um antigo aluno de Bernoulli. Euler substituiu o termo quantidade por expressão analítica e introduziu a notação f(x). Para Euler, uma Função era considerada como uma equação ou fórmula envolvendo variáveis e constantes. Euler considerava uma Função como uma equação ou uma fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes, em que "uma função de uma quantidade é uma expressão analítica composta de alguma maneira desta quantidade e de números ou quantidades constantes" (YOUSCHEKEVICH 1976 apud ZUFFI 1999, p. 36).

Desta maneira, os estudos de Euler foram essenciais para o desenvolvimento do conceito de Função, pois trouxe grandes contribuições para a linguagem simbólica e para as notações matemáticas. De acordo com Eves (1997), "as idéias de função propostas por Euler

corresponde ao conceito de função que a maioria dos alunos dos cursos de matemática tem." (p. 661).

De acordo com Rego (2000), no século XIX, Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859) apresentou uma definição de **Função como correspondência entre variáveis**, independentes de uma expressão analítica. Segundo Dirichlet,

> [...] y é uma função de uma variável x, definida no intervalo a < x > b, se para cada valor da variável x, nesse intervalo, corresponde a um único valor definido da variável y, sendo irrelevante o modo como esta correspondência é estabelecida (RÊGO 2000, p. 54).

Zuffi (2001) declara que a proposta de Dirichlet para as funções definidas relacionadas aos conjuntos numéricos é interessante e bastante próxima das que encontramos nos livros didáticos atualmente. Segundo essa definição, se uma variável "y" está relacionada a uma variável "x", existe, portanto, uma regra, ou seja, existe uma lei que determina um único valor que "y" é determinado. Então, segundo essa definição, dizemos que "y" é uma função da variável independente "x".

Já no século XX, o conceito de função foi ampliado com a teoria dos conjuntos, a qual abrangeu relações entre dois conjuntos de elementos.

Atualmente, o conceito de Função tem sido apresentado aos alunos através da idéia elementar de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos. A esse respeito, Chaves & Carvalho (2004) declaram que, tradicionalmente, o conceito de Função é introduzido como conjunto de pares ordenados e como caso particular das relações, passando a representações analíticas e gráficas. De imediato, são apresentadas aos estudantes definições e generalizações que trazem dentro de si um grau elevado de abstração, resultado de uma profunda interação entre análise e síntese, e que os alunos, de modo geral, não têm condições de realizarem.

Kaiber (2006) também evidencia que a introdução do conceito de Função para os estudantes tem se baseado na idéia elementar de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos. Para essa pesquisadora, a tradicional organização linear do currículo de Matemática, juntamente com a abordagem do ensino de funções baseada na teoria dos conjuntos, "transformou o estudo das Funções no Ensino Médio e nos primeiros semestres dos cursos universitários da área científica e tecnológica, em algo extremamente abstrato e formal" (p. 6). Desta maneira, o conceito de Função tem sido apresentado aos alunos, através de,

> [...] definições e generalizações que trazem dentro de si um grau elevado de abstração, resultado de uma profunda interação entre análise e síntese e que, todavia, **os estudantes de modo geral não têm condições de realizar**. Por fim são apresentados problemas de aplicações (KAIBER 2006, p. 6, grifo nosso).

Sendo assim, percebemos que a maneira tradicional como o conceito de Função tem sido desenvolvido por muitos professores do Ensino Fundamental e Médio, não tem alcançado o objetivo final que, a nosso ver, é a "compreensão do conceito". Sobre o trabalho e a linguagem dos professores, Zuffi (1999) declara, em sua tese de Doutorado, que o conceito de Função é visto por muitos professores que lecionam Matemática nas escolas como uma regra geral, lei ou fórmula.

Considerando esse quadro atual do ensino de Função, pretendemos utilizar, na presente pesquisa, as características metodológicas das Investigações Matemáticas. Abordamos, também, aspectos teóricos e práticos dos processos que envolvem a construção do conceito de função no Ensino Fundamental, apresentando tarefas de natureza exploratório-investigativas com o intuito de utilizar as narrativas dos alunos para desenvolvimento das suas próprias idéias matemáticas referentes ao conceito de função.

> O conceito de função, em Matemática, localiza-se num patamar que vai além da compreensão dos fenômenos a que se aplica, pois pode generalizá-los e resolver vários problemas fora do mundo tangível, num mundo de abstrações muito próprias da Matemática (ZUFFI & PACCA 2002, p. 3).

Percebemos que o conceito de Função se evoluiu em três diferentes momentos na História, e que, em cada um esse conceito era visto de uma forma. Primeiramente, foi visto como dependência entre variáveis, depois como expressão analítica e, logo após, como relação entre conjuntos. Desta maneira, concluímos que o conceito de Função que conhecemos resultou da muita investigação ao longo dos períodos, e que tais investigações foram levadas a sério por vários matemáticos de relevância. Sendo assim, entendemos que, historicamente, o desenvolvimento do conceito de função foi concebido de maneira dinâmica.

1.2. Tema Funções no Contexto das Pesquisas

O processo de ensino e aprendizagem do tema Funções e suas dificuldades concernentes tem sido motivo de preocupações entre estudiosos e pesquisadores em Educação Matemática do Brasil e também de outros países. Inúmeros educadores têm voltado seus olhares para este conceito devido a sua aplicabilidade e utilização em outras disciplinas, tais

como a Física, a Química, a Biologia, a Ecologia e também pelo fato do conceito de Função ser um pré-requisito para o Cálculo Diferencial e Integral nos cursos da área de exatas. Sendo assim, apresentamos esta pesquisa, envolvendo discussões sobre os processos de ensino e aprendizagem desse tema importante para o ensino de Matemática, que, de acordo com Caraça (1998), é um dos grandes pilares da Matemática.

A nossa motivação para fazer esta pesquisa, envolvendo o conceito de Função consolidou-se após a leitura do trabalho desenvolvido pelo Projeto Fundão do Instituto de Matemática/ UFRJ intitulado "Construindo o conceito de função no 1º grau". Através deste projeto, percebemos o quanto é importante trabalhar algumas das idéias do conceito de Função ainda no Ensino Fundamental para proporcionar aos alunos uma compreensão intuitiva deste conceito.

Fizemos uma busca na literatura com o propósito de ressaltar a importância e a relevância que o tema "Funções" tem tido em contextos de pesquisas. Descrevemos, a seguir, alguns aspectos que as pesquisas têm propiciado e como estas vêm contribuindo para o processo de ensino e aprendizagem deste tema.

Mendes (1994), em sua dissertação, destacou que uma boa parte dos alunos investigados, que se encontravam na transição do Ensino Médio para o Ensino Superior, possuía obstáculos semelhantes aos vivenciados pelos matemáticos no passado para compreender o conceito de Função.

Simões (1995), em sua dissertação, apresentou uma seqüência didática para o ensino e aprendizagem da função do 2º grau, dedicadas a alunos da 8ª série do Ensino Fundamental. A pesquisadora procura desenvolver um trabalho diferente do modelo tradicional, em que tal seqüência de ensino incentivava a reflexão e a descoberta. Segundo essa autora, a abordagem feita sobre o eixo de simetria de figuras planas contribuiu para a participação dos alunos e também para a construção do conceito de Função do 2º grau pelos alunos, sendo este um dos pontos fundamentais do processo ensino aprendizagem proposto pela pesquisadora.

Schwarz (1995), em sua dissertação, verificou qual a concepção de Função do aluno ao concluir o Ensino Médio. Para isso, o pesquisador apresentou um histórico sobre o desenvolvimento do conceito de Função e uma análise epistemológica, evidenciando os obstáculos que se apresentaram no desenvolvimento dessa concepção. Esse pesquisador apresentou, também, os conceitos de definição operacional e de definição estrutural, evidenciando que o aluno no final do Ensino Médio, tem uma concepção ainda operacional de função, e, às vezes, até mesmo elementar.

Tinoco et al. (1996) coordenou, conjuntamente com alguns professores da UFRJ[10] – Equipe do Projeto Fundão, um trabalho intitulado "Construindo o Conceito de Função no 1º Grau". Este grupo de professores tinha por meta elaborar atividades para facilitar a construção do conceito de Função pelos alunos de 5ª a 8ª série. Essa proposta de trabalho leva em consideração a concepção de função como instrumento matemático necessário à análise de fenômenos de variação.

Oliveira (1997) elaborou uma seqüência didática para o ensino-aprendizagem do conceito de Função, tomando por hipótese que é necessário colocar o aluno em uma situação-didática, na qual ele compreenda as noções de correspondência, dependência e variação. Para isso, essa autora considera importante a utilização do jogo de quadros e mudanças de registros de representação para a compreensão do que é uma Função. Construir situações - problemas para fazer avançar as concepções dos alunos sobre o conceito de Função é o seu objetivo. Ela conclui que a seqüência proposta provocou um avanço nas concepções dos alunos sobre os conceitos de Função, na medida em que começaram a relacioná-lo com seus aspectos de variação, correspondência e dependência entre as variáveis.

Machado (1998) estudou como se dá à aquisição do conceito de Função por parte dos alunos de Matemática e qual é o perfil das imagens que os alunos produzem desse conceito. Esse pesquisador apresentou um painel da Educação Matemática no Brasil como fundamentação teórica e, através da aplicação de testes com os alunos, procurou identificar quais eram as imagens do conceito de Função que estes possuíam. Da análise dessas imagens, resultou o perfil conceitual de Função matemática, a partir do qual cria estratégias de ensino que favoreçam a aprendizagem do conceito de Função em Matemática.

Zuffi (1999), em sua tese de Doutorado, procurou investigar as formas de expressão dos professores do Ensino Médio ao tratarem o tema "Funções". Essa autora concluiu que a linguagem matemática que os professores utilizam está muito mais determinada pelas suas práticas pedagógicas e por toda uma cultura matemática escolar estabelecida, do que pelos aspectos lógico-formais, com os quais eles tiveram contato em seus cursos superiores ou pelos significados ligados à vida diária. Para esta pesquisadora, o apego aos livros didáticos e à situação cultural vivenciada nas escolas são fatores que ainda influenciam nos modos de utilização da linguagem matemática, pelos professores investigados.

Santos (2002), em sua dissertação, objetivou estudar a aquisição de saberes relacionados aos coeficientes da equação **Y = a.x + b** pela articulação dos registros gráfico e

[10] UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro.

algébrico da função afim, com o auxílio de um software construído especialmente para esta finalidade. Esse pesquisador elaborou uma seqüência didática baseada em alguns princípios da Informática na Educação e na teoria das múltiplas representações, que considera importante para as representações gráficas o procedimento de interpretação global. A seqüência foi trabalhada com cinco duplas de alunos da 2ª série do Ensino Médio de uma escola particular em São Paulo. Este estudo revelou que houve uma evolução com relação à construção de significados dos coeficientes da representação algébrica da função afim, associados a sua representação gráfica, isto é, a reta correspondente. De acordo com esse pesquisador, o ambiente computacional possibilitou uma nova forma de trabalhar com os alunos, de avaliar seus desempenhos, e de desenvolver o processo de ensino-aprendizagem da Função afim, mais especificamente, da conversão do registro gráfico para o algébrico.

Pelho (2003), em sua dissertação, investigou se os alunos do Ensino Médio conseguem compreender o conceito de Função, rompendo com suas interpretações mecânicas através da aplicação de uma seqüência didática, envolvendo atividades nas quais são abordados aspectos funcionais entre as variáveis, utilizando um ambiente computacional como uma das ferramentas de ensino. Segundo este pesquisador, para a maioria dos alunos, a aquisição do conceito de função é de difícil apreensão. A dinâmica do software propiciou aos alunos uma melhor compreensão das variáveis da função, bem como o relacionamento entre elas. O uso do software Cabri-Géomètre propiciou aos alunos realizarem articulação entre diferentes registros de representação da Função.

Lopes (2003), em sua dissertação, faz uma proposta de avaliação de uma seqüência didática visando à introdução ao conceito de Função, em particular, da Função Afim. Segundo o pesquisador, sua pesquisa relevou a importância da utilização de múltiplas representações no processo de conceitualização de Função, favorecendo a coordenação entre as variáveis visuais pertinentes, no registro gráfico, e os correspondentes valores categoriais no registro algébrico.

Carneiro et al. (2003) realizaram um estudo em um curso de licenciatura em Matemática da UFRS, intitulado “Funções: significados circulantes na formação de professores”. O intuito destes pesquisadores foi identificar e descrever diferentes significados produzidos por estudantes para a noção de função. Uma das conclusões de tal estudo foi que a noção de Função é considerada pelos discentes como uma correspondência, associação, relação, e não como uma transformação.

Braga (2003), em sua dissertação, analisou o processo inicial de disciplinarização de função na Matemática do Ensino Secundário Brasileiro. Tal análise está diretamente

vinculada à criação, em 1929, de uma nova disciplina escolar denominada Matemática, resultante da unificação de três outras disciplinas: a Aritmética, a Álgebra e a Geometria. Essa fusão foi feita a partir de uma referência internacional, cujo epicentro encontrava-se nas idéias do renomado matemático alemão Felix Klein, que propunha, ao lado da introdução do Cálculo Infinitesimal, uma renovação no Ensino Secundário. Tal transformação estrutural da matemática escolar brasileira foi referendada, em 1931, por uma reforma educacional conhecida como a Reforma Francisco Campos.

Benedetti (2003), em sua dissertação, investigou as potencialidades de um software gráfico na coordenação das representações múltiplas de funções, por dois pares de estudantes da primeira série do Ensino Médio, os quais iniciavam o estudo desse assunto em suas aulas regulares. A relevância da investigação relaciona-se, sobretudo, à emergência de softwares gráficos gratuitos, bem como ao tema das representações múltiplas de funções, tanto em termos de currículo quanto ao cotidiano dos alunos. Os estudantes participantes coordenaram as representações de Funções, especialmente a gráfica, a algébrica e as tabelas de maneira que suas ações foram condicionadas pelo design do software, incluindo sua capacidade de representar muitas funções e seus comandos zoom e barras de rolagem. Outras conclusões decorrentes se referem à atuação dos alunos em processos de experimentação, os quais se caracterizaram pela construção de conjecturas, confirmações e refutações, simultaneamente à interligação entre as representações, a qual se deu, em diversas ocasiões, mediante o uso entrelaçado das mídias citadas. O pesquisador destacou a forma como os grupos atribuíram significados que, anteriormente, relacionavam-se apenas às Funções Afins e Quadráticas, a funções tais como $y=1/x$ ou $y = x^3$. Desta maneira, a manipulação de gráficos de várias funções prototípicas foi, afinal, considerada positiva pelo autor.

Costa (2004), em sua dissertação, apresentou um estudo de caráter diagnóstico cujo intuito foi investigar os conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de Função. A análise dos dados norteou-se pela teoria de Tall e Vinner (1981) sobre conceitos imagem e definição constituídos na formação do pensamento científico do estudante. Nesse trabalho, a pesquisadora percebeu que alguns sujeitos investigados, mesmo sendo estimulados a vivenciar situações de conflito envolvendo seus conceitos imagens, permaneceram com dificuldades nos procedimentos utilizados para resolver as questões propostas.

Moura & Moretti (2003) investigaram a aprendizagem do conceito de Função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais com estudantes de 8ª série de uma escola pública. Estes pesquisadores destacaram o papel dos conhecimentos prévios e das interações sociais na aprendizagem do conceito de Função, no qual compararam momentos de trabalho

individual com situações de interação. Desta comparação, eles constataram que as interações possibilitaram um movimento de compreensão do conceito, no sentido da abstração e de generalização que não ocorreu na situação de trabalho individual.

As pesquisas e os trabalhos, acima mencionados, mostram que, atualmente, muitos pesquisadores estão dando atenção para diversos aspectos do processo de como ensinar este tema.

Em nossa pesquisa, também procuramos investigar tal processo de ensino e aprendizagem, pois abordamos o tema Funções através da perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas, com o intuito de propiciar um maior envolvimento dos alunos e, conseqüentemente, para ajudá-los na compreensão das idéias fundamentais do conceito de Função.

1. 3. O Ensino de Funções nos Documentos Educacionais Oficiais

O ensino do conceito de Função começa a ser tratado de modo explícito na fase final do Ensino Fundamental, geralmente na oitava série. Nesse sentido, Tinoco et al (1996), argumenta afirmando que o ensino do conceito de Função até o meio deste século ocorria somente no 3º grau. Com o passar das décadas e também através do movimento da Matemática Moderna, passou-se a ensinar Funções para os estudantes a partir dos 10 anos.

> No Brasil durante o Movimento da Matemática Moderna muito do formalismo Bourbakiano impregnou o ensino do conceito de função e a conseqüência disto, foi a ignorância as razões que determinavam o surgimento do conceito de função, como a necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependência e generalizar (TINOCO et al. 1996, p. 1).

Para esse grupo de professores, o ensino das “Funções” passou a ser ensinado a partir do 8º ano de escolaridade, devido à impossibilidade dos alunos de menos de 14 anos, atingirem o nível de formalidade, no qual o assunto era tratado, pela falta de uma maturidade matemática. No entanto, entendemos que os alunos deparam desde muito cedo com as idéias do conceito de Função, mesmo que de maneira intuitiva.

Nesta perspectiva, D’Ambrósio (1993) enfatiza que é preciso abordar o ensino da Matemática de modo contextualizado com outras áreas. Desta maneira, as Funções são elementos essenciais para o estudo de problemas de diversas áreas científicas, como Biologia, Economia, Química e Física. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999) complementam essas idéias declarando que

> [...] além das conexões internas à própria Matemática, o conceito de função desempenha também um papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento (PCNEM, 1999, p. 42).

Pelo fato do conceito de Função estar presente em inúmeras situações do dia a dia, é preciso que os alunos estejam preparados para analisar e entender o que está se passando, pois este conceito está explícito no mundo atual. Sendo assim, estimular a criatividade, iniciativa, investigação, análise, argumentação dos alunos poderá contribuir para que eles sejam capazes de resolver problemas, de interpretar informações e de utilizar diferentes formas de representação.

Nesta perspectiva, os PCNs (2002) afirmam que o estudo do conceito de Função é apresentado como relevante por permitir aos alunos adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Segundo esse documento, "a ênfase do estudo das diferentes Funções deve estar no conceito de Função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas Funções." (BRASIL, 2002, p. 121).

A vivência dos professores com experiências diferenciadas no processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função é uma possibilidade para o desenvolvimento de um ensino significativo e com compreensão deste conceito. Neste trabalho, apresentamos alguns aspectos que podem contribuir com essa "possibilidade", nas quais as narrativas dos alunos servem como uma forma para viabilizar a comunicação das idéias matemáticas do conceito de Função, envolvidas em um contexto de Investigações Matemáticas.

Segundo Abrantes et al. (1999), as tendências mais recentes apontam para a necessidade de se iniciar o ensino desse tema de modo intuitivo e informal, adiando-se o tratamento formal desse conceito para o Ensino Médio. A formação matemática adquirida pelos alunos na Educação Básica deve permitir-lhes fazer uma leitura adequada e interpretar criticamente esse tipo de informação. Para esse autor

> O estudo das funções pode revelar-se particularmente rico em oportunidades para se estabelecerem conexões entre diversos domínios da matemática. Com efeito, tabelas de valores, gráficos e expressões analíticas, que o estudo das funções leva a relacionar naturalmente, têm a ver com padrões numéricos, representações geométricas e métodos algébricos (ABRANTES et. al. 1999, p. 98).

De acordo com este documento, é importante que os alunos tenham experiências de aprendizagem, em que as Funções e os gráficos surjam no Ensino Fundamental, como modelos de situações reais diversas. Desta maneira, pensamos ter relevância apresentar aos alunos situações, problemas, tarefas de natureza abertas e tarefas de aplicação contextualizadas, considerando a relação com outras áreas e também os conhecimentos advindos do cotidiano dos alunos.

Segundo o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001)[11], a competência matemática desenvolve-se através de uma experiência matemática rica e diversificada e da reflexão sobre essa experiência de acordo com a maturidade dos alunos.

> [...] ao longo da educação básica, todos os alunos devem ter oportunidade de viver diversos tipos de experiências de aprendizagens, sendo importante conhecer aspectos transversais destes, assim como a utilização de recursos adequados e, ainda, o contato co aspectos da história, do desenvolvimento e utilização da matemática. Assim, todos os alunos devem ter oportunidades de se envolver em diversos tipos de experiências de aprendizagens (p. 61).

O processo de ensino e aprendizagem no quarto ciclo deve ter ênfase no estudo dos conteúdos algébricos, e estes devem ser abordados de forma diferente da forma mecânica, pois a mecanização dos conteúdos é criticada pelos PCNs (1998). De acordo com esse documento, tal forma de conceber o ensino de Matemática distancia-os ainda mais das situações do cotidiano.

Segundo os PCNs (1998), o pensamento algébrico dos alunos, no quarto ciclo, deve ser desenvolvido por meio da exploração de situações de aprendizagens, a qual leva os alunos à "observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis." (p. 80)

De acordo com esse documento, é interessante propor situações em que os alunos possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, identificando suas estruturas e construindo a linguagem algébrica para descrevê-los simbolicamente. Para os PCNs (1998) "esse trabalho favorece ao aluno a construção da idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades." (p. 117)

Segundo os PCNs (1998), a noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no Ensino Fundamental e, por isso, muitos estudantes que concluem esse grau de ensino e também o Ensino Médio pensando que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, em que a letra sempre significa uma incógnita.

[11] O currículo Nacional do Ensino Básico se relaciona ao currículo escolar de Portugal.

> A introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações-problema concretas permite que o aluno veja uma outra função para as letras ao identificá-las como números de um conjunto numérico, úteis para representar generalizações. Além disso, situações-problema sobre variações de grandezas fornecem excelentes contextos para desenvolver a noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Os alunos podem, por exemplo, estabelecer como varia o perímetro (ou a área) de um quadrado, em função da medida de seu lado; determinar a expressão algébrica que representa a variação, assim como esboçar o gráfico cartesiano que representa essa variação (PCNs 1998, p. 118).

A **variação entre grandezas** é uma das propostas principais dos PCNs para o ensino do conceito de Função no quarto ciclo. No entanto, existem também outras propostas que podem ser inseridas no ensino deste conceito. Esse fato, nos mostra que não devemos nos ater apenas a uma forma para ensinarmos aos nossos alunos o conceito de Função. Em suma, os PCNs declaram que é preciso desenvolver um ensino deste tema relacionando-o com situações problemas do cotidiano dos alunos, para que estes adquiram certas competências matemáticas.

A respeito das competências matemáticas que os alunos devem adquirir e desenvolver, Abrantes (1999), destaca que,

> [...] **formular e comunicar generalizações**, assim como reconhecer e representar relações entre variáveis, são processos essenciais do pensamento matemático e da sua utilização para interpretar situações e resolver problemas de diversas disciplinas e da vida corrente. A compreensão de fórmulas, a construção de tabelas de valores a partir de uma dada relação ou a leitura de gráficos são aspectos integrantes desse processo. (p. 97, grifo nosso).

Nesta perspectiva, o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001), apresenta as competências matemáticas que os alunos devem adquirir no domínio da álgebra e das Funções no Ensino Fundamental que contempla os seguintes aspectos:

> A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos; a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações de variáveis, assim como para passar de uma das formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos; a aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e formulas e para procurar soluções para equações simples; a sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas (p. 59).

Segundo Abrantes et al. (1999), para que o ensino do conceito de Função se torne significativo, “o trabalho a desenvolver com os alunos requer que estes tenham oportunidade de explorar relações**,** explicitar as suas idéias, por escrito e oralmente, discuti-las e refletir sobre elas” (p. 99).

Sendo assim, entendo que um dos aspectos essenciais para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função é a variação das situações de aprendizagens, tanto do ponto de vista dos contextos, como dos significados que as expressões matemáticas assumem. Desta maneira, as narrativas dos alunos possuem um papel fundamental para a aprendizagem de um conceito em Matemática, pois os alunos, ao explicitarem suas idéias, pensamentos e raciocínios, estarão refletindo sobre as mesmas e argumentando-as para justificar seus posicionamentos.

Nesta perspectiva, o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001), declara que em uma atividade de investigação,

> [...] os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, **argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões**. Qualquer tema da matemática pode proporcionar ocasiões para a realização de atividades de natureza investigativa (p. 65, grifo nosso).

Durante a elaboração e a montagem das tarefas exploratório-investigativas e durante o desenvolvimento das mesmas, estivemos preocupados, o tempo todo, em ver essas estratégias sendo exploradas e construídas pelos alunos, além de estar atento para as narrativas como uma forma de viabilizar a comunicação em sala de aula.

Nesse sentido, o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001), apresenta a importância da comunicação dos alunos em sala de aula ao declarar que,

> [...] a comunicação inclui a leitura, a interpretação e a escrita de pequenos textos em matemática sobre a matemática ou em que haja informação matemática. Na comunicação oral, são importantes as experiências de argumentação e de discussão em grande e pequeno grupo, assim como a compreensão de pequenas exposições do professor. O rigor da linguagem, assim como o formalismo, deve corresponder a uma necessidade sentida e não a uma imposição arbitrária (p. 69).

Com base nestes documentos, mencionados anteriormente, entendemos que o ensino do conceito de Função pode ser realizado utilizando diferentes perspectivas metodológicas e de maneira não linear, visto que a dinâmica metodológica da Investigação Matemática também poderá contribuir para a comunicação dos alunos em sala de aula.

1.4. Idéias Básicas do Conceito de Função no seu Ensino

As idéias básicas do conceito de Função são apresentadas por Tinoco et al (1996) e em Caraça (1998). Para estes autores, **variável, dependência, regularidade e generalização** são

idéias de grande importância para a assimilação do conceito de Função. Nossa intenção, neste momento, é destacar tais idéias. Desta maneira, acreditamos ser necessário, antes de detalhar cada uma delas, mostrar a forma como elas podem ser ensinadas em sala de aula.

Procuramos, no trabalho prático desta pesquisa, aproveitar as noções que eles já possuíam, para acrescentar e introduzir o conceito de Função, levando em consideração as narrativas dos alunos em um contexto do ensino de Funções, realizado através de tarefas exploratório-investigativas. Na elaboração destas, procuramos destacar as idéias do conceito de Função mencionadas por Tinoco et al. (1996) e também as diferentes formas de representação das Funções.

Durante a elaboração das tarefas, acreditávamos que a aquisição do conceito de Função necessitava tanto do desenvolvimento prévio das idéias básicas mencionadas anteriormente como também de um trabalho significativo que possibilitasse aos alunos a transição entre as diferentes maneiras de representação do conceito de Função.

Sobre a noção de **Variável,** Caraça (1998), afirma que a noção de variável é uma das mais difíceis para os alunos compreenderem. Segundo esse autor, variável é um número qualquer de determinado conjunto, mas não, especificamente, um dos números desse conjunto. Com base neste conceito, nós, enquanto professores, precisamos nos ligar em explorar as diferenças existentes na utilização das letras nas mais diversas situações, em que às vezes levamos os nossos alunos a encarar uma letra somente como sendo uma incógnita. Isso pode acarretar nos alunos o hábito de igualar a zero qualquer expressão que lhe for apresentada, com o intuito de determinar um valor para a variável.

Sierpinska (1992 apud Tinoco et al 1996) acrescenta, salientando a necessidade de uma consciência sobre a diferença entre considerar letras em equações, em que estas são consideradas por incógnitas e valores dados e em Funções, são tratadas de quantidades variáveis e constantes. Uma Função descreve as mudanças sofridas por uma grandeza, provocadas pela variação de outra. Quando conhecemos uma Função, temos algum tipo de descrição da maneira como uma grandeza varia, dependendo da variação de outra.

Conforme esse mesmo autor, a noção de **dependência** funcional surgiu da idéia de relacionar dois conjuntos com alguma regra. A sua origem é incerta, mas, desde os tempos remotos, tabelas de correspondências eram obtidas através da observação de fenômenos físicos, e estas observações foram importantes na evolução do que, hoje, conhecemos por Função. Nesta perspectiva, pensar no conceito de Função é pensar em duas grandezas que variam, sendo que a variação de uma depende da variação da outra é dada entre grandezas variáveis, e esta deve ser salientada sempre que possível. É bom lembrar que, em uma relação

funcional, uma das grandezas (a Função), é perfeita e unicamente determinada pela variação da outra (variável independente). Kieran (1992) é outro pesquisador que declara ser fundamental enfatizar a noção de dependência como uma das idéias fortes do conceito de Função.

A noção de **regularidade** aparece proveniente aos muitos fenômenos que fluem com certos padrões. Detectada essas regularidades, é possível fazer previsões sobre as etapas que não podem ser observadas. O estudo da natureza se baseia na observação de fenômenos e nas leis que procuravam explicá-los. A idéia de regularidade é importante para o entendimento do conceito de Função, pois o estudo das Funções está relacionado à necessidade de resolver situações e problemas advindos da relação do homem com o seu meio.

As regularidades que os diversos fenômenos e situações possuem podem ser regidas por leis específicas (expressão analítica), o que deve levar à generalização. Caraça (1998) declara que "regularidade é um comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas" (p. 119).

Para esse autor, "a existência de regularidades é extremamente importante porque permite a repetição e previsão, desde que se criem as condições iniciais convenientes; ora, repetir e prever são fundamentais para o homem na sua tarefa de dominar a natureza" (CARAÇA 1998, p. 119).

O conceito de Função pode ser ensinado decorrente da construção de modelos matemáticos que descrevam situações problemáticas do quotidiano, dos contextos de trabalho e também de natureza matemática, porque é importante inferir leis a partir da análise de regularidades numéricas e geométricas. Sobre isso, Tinoco et al. (1996) declara que o reconhecimento de regularidades em situações reais, em seqüências numéricas, ou padrões geométricos é uma habilidade essencial à construção do conceito de Função. Para estes pesquisadores, "a origem do conceito de função está intimamente ligada à necessidade do homem de registrar regularidades observadas em fenômenos e generalizar leis ou padrões" (TINOCO et. al 1996, p. 32).

Trindade e Moretti (2000) complementam essas discussões, afirmando que a identificação de regularidades, em situações como seqüências numéricas ou padrões geométricos, é uma habilidade essencial à construção do conceito de Função. As tabelas permitem reconhecer as seqüências funcionais, bem como representá-las, escrita e graficamente, possibilitando melhor interpretação da dependência entre variáveis, seja na forma gráfica ou algébrica.

Desta maneira, entendemos ser relevante apresentar e promover atividades de investigação ligadas à descoberta de regularidades numéricas ou geométricas e à procura de leis de formação. Segundo Tinoco et al. (1996), também é preciso explorar com os alunos situações em que não existe regularidade, para evitar que o aluno acredite que todos os fenômenos obedecem a uma lei geral.

A noção de **generalização** surge pelo fato de existirem fenômenos que ocorrem com regularidades e, por esse motivo, podem ser generalizados. Segundo Tinoco et al. (1996), a capacidade de generalizá-los é importante e envolve, em geral, alguma abstração. Muitas vezes, os alunos generalizam situações que apresentam regularidade, verificando apenas se certa lei se aplica a um caso particular. É preciso que os alunos desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos na linguagem corrente que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os.

Para esses autores, um aluno só adquire e aprende o conceito de Função quando este aluno passar por quatro níveis de compreensão. Esses níveis são apresentados, por este autor, com base na proposta de Bergeron e Herscovics (1982) para o ensino desse conceito.

Apresentamos, a seguir, na tabela I os níveis de compreensão do conceito de Função e as características de cada nível.

NÍVEIS DE COMPREENSÃO		
Primeiro Nível – Compreensão Intuitiva		
Características: Utilização do conhecimento informal da vida. Pensamento com base na percepção visual. Ações espontâneas	**Para as Funções**: Reconhecimento de dependências (não quantificada). Estabelecimento de leis de formação simples e visuais. Construção e interpretação de tabelas e gráficos de colunas e setor.	**Anos Escolares:** Desde o Primário Ensino Fundamental 1º Ciclo
Segundo Nível – Matematização Inicial		
Características: Organização e quantificação das primeiras noções intuitivas. O conceito é confundido com o procedimento que leva à sua construção.	**Para as Funções** Quantificação das leis. Reconhecimento de variáveis dependentes e independentes. Interpretação de gráficos cartesianos. Construção de gráficos cartesianos simples. Reconhecimento do domínio (analisado no contexto).	**Anos Escolares:** De 5ª à 8ª séries Ensino Fundamental 3º e 4º Ciclos
Terceiro Nível – Abstração		
Características: O conceito se destaca do procedimento e alcança uma experiência própria. Generalização	**Para as Funções** Escrita de expressões analíticas. Distinção entre equações e funções. Construção e interpretação de gráficos convencionais e não convencionais. Caracterização das relações funcionais.	**Anos Escolares** De 5ª à 8ª séries Ensino Fundamental 3º e 4º Ciclos

Quarto Nível – Formalização		
Características: Uso da linguagem simbólica. Descontextualização. Justificação lógica das operações	**Para as Funções** Notação: $f: A \longrightarrow B$ $y = f(x)$ Domínio imagem. Classificação das funções. Operações com funções.	**Anos Escolares** Ensino Médio

TABELA 1: Níveis de Compreensão do Conceito de Função. (TINOCO, 1996. p, 7, grifo nosso).

Essa tabela mostra os níveis de compreensões que os alunos podem adquirir em cada uma das faixas escolares estabelecidas durante os experimentos realizados por Tinoco et al. (1996). Porém, estas aproximações devem ser encaradas de forma flexível, de acordo com a experiência matemática dos alunos de cada nível. Com base em Tinoco et al. (1996), podemos concluir que, até a oitava série, o conceito de Função deve ser explorado nas suas diferentes dimensões, deixando a sua formalização no que diz respeito à parte formal e de notações para o Ensino Médio.

Cada um dos níveis apresenta características gerais próprias que vão desde a utilização do conhecimento informal do cotidiano até a utilização da linguagem simbólica que caracteriza a formalização. No entanto, passa-se, antes da formalização pela organização das primeiras noções intuitivas, pela generalização que possibilita que o conceito se destaque do procedimento efetuado para alcançá-lo.

Temos constatado que o ensino do conceito de Função tem sido apresentado tardiamente nos currículos de Matemática. Dessa maneira, os alunos têm tido acesso a esse conceito somente no Ensino Médio. Este instrumento, rico em possibilidades de abordagens e colocações, pode ser explorado ainda no Ensino Fundamental, com o objetivo de familiarizar o aluno com a interpretação de gráficos e com as idéias matemáticas do conceito de Função.

Nossa pretensão é abordar este conceito na oitava série do Ensino Fundamental, pois, Leal (1990) afirma que, “a falta de uma preparação dos alunos para a construção do conceito, ao longo dos sete anos de escolaridade é uma das principais responsáveis pelas dificuldades de aprendizagem deste tópico” (LEAL 1990 apud TINOCO et al 1996, p. 1).

Com isso, apresentamos tarefas de natureza exploratórias e investigativas, considerando sempre o universo mais próximo do aluno. Desta maneira, nossa intenção não foi fazer com que os alunos conseguissem aprender a definição formal do conceito de Função, mas que os mesmos alunos trabalhassem com essas diferentes idéias para formular e compreender o seu próprio conceito.

Assim, apresentamos tarefas exploratório-investigativas, objetivando proporcionar aos alunos a passagem por estes níveis como uma das formas de compreender a concepção de Função e suas formas de representação, além de nos basear no princípio de que, para aprender, eficazmente, os alunos precisam participar dos acontecimentos. Sendo assim, os alunos, em vez de serem expectadores, serão atores no processo educativo, pois a experimentação, a exploração e as investigações podem fornecer oportunidades para a descoberta e a formulação de leis e propriedades, pois desta maneira, os conceitos teriam que ser elaborados pelos próprios alunos.

1.5. Proposta para o Ensino do Conceito de Função

Destacamos, neste capítulo, parte do desenvolvimento histórico e conceitual do tema Funções. Entendemos que a compreensão do conceito de Função e seu processo construtivo do saber também podem se desenvolver em sala de aula com os alunos. Desta maneira, cabe ao professor, a partir dos conhecimentos já adquiridos por seus alunos, provocar questionamentos que os levem, de forma gradativa, à elaboração de novos conceitos.

Apresentamos, neste momento, uma proposta semelhante à maneira como desenvolveu os episódios de ensino envolvendo o conceito de Função, além de apresentar aos professores, que ensinam o conceito de Função, uma mensagem sobre alguns aspectos, que para nós, são relevantes para o trabalho com o tema Funções em sala de aula. Assim, com o intuito de incrementar as discussões sobre esses processos, apresentaremos uma proposta que trata dessa temática. Para isso, se tornou importante destacar aspectos históricos relacionados a esse conceito, os documentos educacionais e as idéias matemáticas desse conceito.

Com base no levantamento bibliográfico realizado, percebemos o quanto o tema Funções e o seu processo de ensino e aprendizagem estão em evidência no cenário de pesquisa. Apesar das muitas pesquisas existentes a respeito deste tema, notamos que ainda faltam pesquisas, que abordam contextos e realidades diferenciadas. Desta maneira, pensamos que o tema Funções não está esgotado e, por esse motivo, buscamos, nesta pesquisa, destacar as potencialidades das narrativas para a compreensão das idéias relacionadas ao conceito de Função pelos alunos em um ambiente de Investigações Matemáticas.

Acreditamos ser preciso ensinar o conceito de Função primeiramente de maneira intuitiva e, ainda no Ensino Fundamental. Temos percebido que existem livros didáticos que estão presentes na sala de aula do Ensino Médio que privilegiam o ensino de Função primeiramente através de conjuntos. Entendemos e até concordamos, porém o ensino das

noções de Função como relações entre conjuntos, a nosso ver, deve aparecer depois dos alunos terem presenciado e compreendido, intuitivamente, outras formas e conceitos relacionados ao conceito de Função pela teoria dos conjuntos.

Nossa preocupação referente aos livros didáticos diz respeito à abordagem relacionada ao conceito de Função somente através da relação entre dois conjuntos, pois pensamos ser importante apresentar o conceito de Função primeiramente de forma intuitiva para depois apresentar esse conceito através da teoria dos conjuntos.

Nesta perspectiva, Sierpinska (1992) declara que,

> [...] a apresentação da definição mais formal de função, como um conjunto de pares ordenados, não faz o menor sentido para o aluno de 1º ou 2º grau. A noção de relação também não tem nenhum valor em si, nem contribui para que o aluno desses níveis perceba o significado de função (SIERPINSKA 1992 apud TINOCO et al. 1996, p. 49).

Ávila (1985) ainda complementa essa idéia afirmando que existe uma preocupação excessiva com as apresentações formais do conceito de Função. Para esse autor, isso é uma falha grave no ensino deste tema, pois atrapalha o desenvolvimento do aluno, já que obscurece o que há de mais importante na Matemática, que, de acordo com ele, são as idéias. Temos percebido, em nossa experiência como professor de Matemática que o conceito de Função é apresentado como um caso particular de relação. Para Ávila (1985), essa é a prática mais comum entre os professores de Matemática, e, em especial, do Ensino Médio, pois se apóiam no que os livros didáticos trazem.

O conceito de Função é conhecido em todos os níveis educacionais, mas infelizmente a idéia que se apresenta na definição atual do conceito de Função é dissociada da realidade. Não se vê, dessa forma, um significado concreto para a formalização. Por outro lado, no dia-a-dia, fazemos uso de diversos conceitos matemáticos em várias situações e nem nos damos conta disso, ou seja, este conceito possui muitas aplicações, pois podemos ver, por exemplo, a idéia de Função presente em atividades do cotidiano, mesmo sem a aplicação formal de sua definição.

Entendemos que a significação de um conceito é de suma importância para o aprendizado dos alunos, mas essa prática de enfatizar os conceitos em aulas de matemática não está sendo desenvolvida pelos professores de maneira significativa. O conceito de Função que se ensina, atualmente, nas aulas de Matemática se desenvolveu, ao longo dos séculos, e sua origem formal se deu, de acordo com Zuffi (2001), do interesse em resolver problemas de

forma prática, ou seja, problemas reais e, a partir daí, surgiu à forma intuitiva, representando uma Função.

Ressaltamos que tal conceito é fruto de uma união de fatores históricos e sociais que, na forma de situações problemas, apareciam aos homens não unicamente de maneira acabada e formalizada. No entanto, essa é a prática mais comum entre os professores de Matemática, em especial do Ensino Médio, que, apoiados em livros didáticos e em sua própria formação, transmitem um saber desconectado do contexto do aluno enquanto indivíduo dotado de saberes, com níveis de cognição e imaginação.

Dada à importância que tais assuntos representam para o entendimento do tema Funções, acreditamos ser importante que os professores considerem os conhecimentos prévios que os seus alunos possuem, pois estes são favoráveis para prosseguir com o ensino desse conceito. Inovar em processos educacionais significa, dentre outras coisas, o enfrentamento de riscos desconhecidos. Somos conscientes de que isso requer muita dedicação e empenho por parte do professor. Assim, a esperança em procurar mudar o cenário no qual estamos inseridos poderá proporcionar-nos, no final de um trabalho realizado, desta forma, muitos aplausos dos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Esse é o espírito que temos que carregar em nosso fazer Matemática na escola.

Um dos nossos intuitos é poder contribuir para uma aquisição significativa do conceito de Função por parte dos alunos da oitava série do Ensino Fundamental através de tarefas exploratório-investigativas em um ambiente de investigação matemática em sala de aula. A contribuição desta pesquisa a respeito deste tema se dá pelo fato de analisarmos uma dinâmica metodológica diferenciada para o ensino do conceito de Função, seguindo a perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas, juntamente com as narrativas dos alunos. Para isso, entendemos ser importante que se parta do intuitivo para o formal, estabelecendo as devidas conexões entre o conhecimento escolar e o contexto atual do aluno.

O ensino do conceito de Função através das tarefas exploratório-investigativas poderá apresentar indícios de compreensão deste conceito pelos alunos, pois, inicialmente, são propostas situações abertas que possibilitam explorações e investigações, favorecendo a compreensão das idéias fundamentais para a construção do conceito de Função. As idéias de variação entre grandezas, relação de dependência entre variáveis, regularidade de diversos fenômenos e situações devem ser regidas por leis específicas, o que deve levar à generalização. Dessa maneira, acreditamos ser fundamental desenvolver um ensino deste conceito, de maneira significativa, é preciso considerar estas idéias que são fundamentais para a compreensão do conceito de Função, através da relação entre conjuntos.

A idéia de utilizar as narrativas como uma forma de viabilizar a comunicação em sala de aula em uma dinâmica metodológica da Investigação Matemática no ensino do conceito de Função é a tônica deste trabalho. Sendo assim, as narrativas elaboradas pelos alunos é o objeto de estudo e as Investigações Matemáticas é o contexto, no qual ocorreram tais narrativas através das tarefas exploratório-investigativas.

Desta maneira, pensamos que estamos diferenciando, pois em qualquer "fazer diferenciado" é preciso muita pesquisa, além de coragem para ultrapassar os obstáculos previsíveis que se configuram no dia-a-dia dos professores que ensinam este tema. Desde o começo desta pesquisa, fundamentamos o estudo nas recomendações feitas pelos autores pesquisados e nas experiências vivenciadas na sala de aula. Desta maneira, entendemos que as narrativas, no contexto das Investigações Matemáticas, é um caminho diferenciado que poderá conduzir os alunos a uma aprendizagem significativa do conceito de Função.

Diante disso, utilizar perspectivas metodológicas diferenciadas requer do professor um envolvimento maior em suas práticas, pois este terá que preparar e organizar a dinâmica que ele utilizará para ensinar o conceito de Função aos seus alunos. Por serem agentes ativos em sala de aula os alunos precisarão ter em mente alguns aspectos relevantes como:

Do ponto de vista conceitual, o professor necessita entender as idéias matemáticas que estão relacionadas ao conceito de Função e explorá-las, possibilitando aos alunos uma abrangência de idéias, para que eles formulem, mesmo que intuitivamente, seu próprio conceito de função ainda no Ensino Fundamental.

Do ponto de vista de representação, é importante que o professor discuta as diferentes maneiras de representar uma Função (analiticamente, graficamente, e verbalmente), além de desenvolver atividades que possibilitem os registros de conversão de uma representação em outra.

Do ponto de vista histórico, o professor precisa considerar como o conceito de Função foi desenvolvido ao ensinar este conceito em sala de aula, ressaltando, os problemas antigos, na qual as idéias como de dependências, correspondência, e regularidade.

Do ponto de vista de trabalho, é importante despertar nos professores que lecionam no final do Ensino Fundamental e Ensino Médio a consciência de que, ao longo do trabalho com os tópicos usualmente incluídos nos programas, é possível desenvolver as idéias essenciais à construção do conceito de Função.

Nossa proposta para o ensino do conceito de Função é a de trabalhar primeiramente com as idéias básicas do conceito de Função mencionadas anteriormente. Depois de um trabalho sólido no sentido da compreensão destas idéias, o professor poderá ressaltar os

aspectos formais do conjunto de Função através da teoria dos conjuntos. Desta maneira, acreditamos que a diversificação das idéias matemáticas que envolvem o conceito de Função pode possibilitar aprendizagens significativas, além de poder viabilizar o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos no Ensino Fundamental.

Acreditamos que o ensino do conceito de Função realizado através da dinâmica metodológica das Investigações Matemáticas, pode proporcionar discussões, questionamentos e reflexões sobre como realizar tal ensino de forma desafiadora, autêntica e abrangente. Desta maneira, as Investigações Matemáticas se apresentam como um ambiente alternativo para se desenvolver o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função juntamente com o resgate das idéias matemáticas que compõem o conceito de Função.

Essa perspectiva metodológica pode ser útil em na sala de aula, na discussão e na organização das idéias e principalmente nos momentos de reflexão. Sendo assim, as narrativas se apresentam neste contexto com algumas potencialidades, que na verdade é o foco deste estudo e que destacaremos no próximo capítulo, na análise dos dados e nas considerações finais desta pesquisa.

CAPÍTULO II

AS NARRATIVAS NO CONTEXTO DA SALA DE AULA

As narrativas estão presentes em todos os momentos da vida, pois o ato de narrar é a maneira mais comum do homem comunicar-se com seu semelhante, seja ele: amigo, parente, desconhecido, próximo ou distante, no tempo ou no espaço. Entramos em contato com outras pessoas em diversos ambientes para contar fatos e histórias. Entre os vários povos da terra, um traço comum é o gosto pelo ato de narrar, pois o homem gosta de inventar, modificar, contar e ouvir histórias. Histórias são narrativas, isto é, relato de eventos, sucessão de ações que se encadeiam.

Nesta perspectiva, Prado & Soligo (2005) declaram que a narrativa é um tipo de discurso que possibilita o desejo de revelar-se em uma suposta seqüência de acontecimentos e uma valorização implícita dos acontecimentos relatados. Embora uma narrativa seja sempre uma seqüência de acontecimentos, esta não precisa ser necessariamente cronológica e linear.

Sendo assim, a sala de aula se apresenta como um ambiente, no qual a narrativa pode se fazer presente, pois se entende que esse ambiente é um local adequado para os alunos contarem, ouvirem e discutirem sobre sua aprendizagem. Assim, contar o acontecido, registrar fatos realizados, descrever ações e processos, apresentar pensamentos, expressar e comunicar idéias, relatar diálogos, interações e aprendizagens são possíveis características das narrativas em sala de aula.

Nesta pesquisa, a narrativa se constitui no **objeto de estudo**, pois, para investigar quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de Funções, utilizamos as próprias narrativas dos sujeitos pesquisados.

O intuito deste capítulo consiste em refletir sobre a narrativa, buscando, na literatura, conceitos descritos por autores a respeito da narrativa. Exploramos a **narrativa como objeto de estudo,** procurando ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas delas com os sujeitos pesquisados na exploração e na compreensão do conceito de Função. Sendo assim, iniciamos este capítulo abordando definições que diversos autores trazem para a narrativa no contexto educacional, e também sua forma de representação, além de apresentar a concepção da narrativa adotada por nós nessa pesquisa.

2.1. As Narrativas no Contexto da Literatura

O presente trabalho busca investigar a narrativa em processo de ensinar e aprender Funções, objetivando ressaltar suas possibilidades didático-pedagógicas na realização de tarefas de natureza exploratório-investigativas, envolvendo o conceito de Função com alunos de uma turma da oitava série do ensino Fundamental. Desta maneira, apresentamos alguns autores que abordam as narrativas em diferentes situações, resgatando essa abordagem na literatura nacional e internacional.

Clandinin e Connelly (2000) possuem grande influência do renomado educador John Dewey, pois este ressalta o papel da experiência para a Educação. Esses autores destacam que, na experiência, deve existir "colaboração entre pesquisador e participantes, sobre um tempo, um lugar ou uma série de locais, e interações sociais com o seu meio" (CLANDININ e CONNELLY 2000, p. 20).

Focalizamos, nesta pesquisa, uma experiência ocorrida, na qual procura-se investigar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas, valendo-se da idéia de experiência de Larrosa. Esse pesquisador, propõe-nos pensar a educação valendo-se da experiência. Ele entende experiência como algo forte que toma conta de nós, pois "a experiência não é o que acontece, mas o que nos acontece, ou o que no toca" (LARROSA 2001, p.27).

Para Larrosa (2002), um dos componentes fundamentais da experiência é a sua potencialidade formativa, pois "experiência é aquilo que nos passa, ou que nos toca, ou que nos acontece e, ao passar-nos forma e nos transforma. Somente o sujeito da experiência está, portanto, aberto a sua própria transformação" (p. 6). Desta maneira, "um determinado acontecimento pode ser comum, mas a experiência é singular" (LARROSA 2004, p. 159).

Segundo Connely e Clandinin (1995), as narrativas ou histórias de aulas servem como um modo especial dos professores produzirem e relatarem conhecimentos ligados à ação ou à prática. Desta maneira, acredito que a narrativa dos professores de Matemática, sobre experiências vividas e sentidas poderão fazê-los refletir sobre suas práticas, além de produzirem outros conhecimentos sobre a prática profissional do professor.

Freitas (2006), em sua tese de Doutorado, destaca o estudo feito por Clandinin e Connelly (2000) e declara que deve existir uma relação entre os investigadores e os sujeitos da investigação, pois, segundo os autores destacados por Freitas (2006), deve existir um espírito de amizade entre os participantes. Essa amizade poderá favorecer na negociação para a tomada de decisões de questões voltadas à pesquisa. Para a referida pesquisadora, em uma pesquisa narrativa, exige-se que a relação dialógica se desenvolva, criando uma cumplicidade

de dupla descoberta. Essa pesquisadora se apóia nas idéias de Clandinin e Connelly, bem como de Larrosa, ao abordar a experiência formativa.

Em sua tese, Freitas (2006) concebe as narrativas em uma dupla vertente, como objeto de estudo e como método de pesquisa. Na presente pesquisa, consideramos as **narrativas como objeto de investigação**, pois pelas experiências vividas pelos alunos desta pesquisa, descritas pelas narrativas evidenciam-se fatos concretos da vivência dos alunos e suas relações com a Matemática.

Uma outra perspectiva é apresentada por Oliveira (1998), ao declarar que a narrativa permite representar e interpretar adequadamente à ação, pois, "sendo a ação, em geral complexa e imprevisível e, estando sujeitas às inúmeras influências, as narrativas captam-na mais plenamente pela multiplicidade de significados que encerram" (p. 80).

Nesta perspectiva, Couto (1998) entende que a narrativa é um meio importante na "reconstrução do significado contido nas ações" (p. 125). Além disso, para esse pesquisador, "uma narrativa é a apresentação simbólica de uma seqüência de acontecimentos ligados entre si por determinado assunto e relacionados pelo tempo" (COUTO 1998, p. 122).

Segundo Prado & Soligo (2005), "ao narrar, visitamos o passado, na tentativa de buscar o presente, onde as histórias se manifestam, trazendo à tona fios, feixes que ficaram 'esquecidos' no tempo" (p. 53). Desta maneira, buscamos não somente trazer informações sobre nossa experiência envolvendo as narrativas dos alunos e as investigações matemáticas, mas também estimular os professores a experienciarem as narrativas como uma maneira de viabilizar a comunicação em sala de aula.

Neste sentido, Benjamin (1994) ressalta a natureza prática da comunicação através da narrativa, pois,

> A narrativa é uma forma artesanal de comunicação. Ela não está interessada em transmitir o 'puro em si' da coisa narrada como uma informação ou um relatório. Ela mergulha a coisa na vida do narrador para em seguida retirá-la dele. Assim se imprime na narrativa a marca do narrador, como a mão do oleiro na argila do vaso (BENJAMIN 1994 apud VAZ et al. 2001, p. 6).

Mendes (2004) destaca alguns fatores que relevam a importância das narrativas no processo educativo. De acordo com essa autora, as narrativas são histórias que descrevem seqüências de ações ou experiências com um número de personagens, reais e imaginárias ou até mesmo virtuais. Atualmente, a idéia de narrativa não é compreendida somente no âmbito da criação literária, pois a narrativa é um valioso instrumento de construção de identidades,

sentidos ou significados individuais ou mesmo das suas circunstâncias e experiências. As narrativas tratam-se também de

> [...] uma manifestação cultural, fundamental na medida em que valoriza saberes de uma comunidade, mostra como o conhecimento e o sentimento, são utilizados, partilhados e social ou colaborativamente negociados numa comunidade (MENDES 2004, p. 53).

Para Bruner (1997), a narrativa é um modo de pensamento, pois a narrativa se apresenta como princípio organizador da experiência humana no mundo social, do seu conhecimento sobre ele e das trocas que ele mantém. Para esse autor, a narrativa é uma ferramenta importante para a construção do significado em nossa cultura, pois a narrativa é um tipo de pensamento que sempre expressa um saber que trata de detalhes, do particular, do subjetivo. Elas são interpretadas como casos gerais. Geralmente, essas histórias lembram o ouvinte ou o leitor, de outras histórias semelhantes a ela, o que dá um caráter quase que universal às narrativas.

Vaz et al. (2001) declaram que Shulman (1986) entende a narrativa como uma forma de representar algum tipo de saber, e que uma das formas que o saber se apresenta no discurso dos professores ou dos alunos é através das narrativas. Desta maneira, a narrativa é uma das formas mais comuns para uma pessoa expressar um tipo de saber. Segundo Vaz et al. (2001) através das narrativas, o professor pode expressar seus saberes. Assim,

> É fato, que um professor que está ensinando usa narrativas em abundância. Neste caso narrar uma história não é apenas uma forma de relato, mas sim uma forma de retórica. Quando um professor narra, ele busca narrar da forma mais persuasiva possível, ele tem em mente a sua audiência e busca estabelecer, mesmo que intuitivamente, uma narrativa que alcance o maior domínio dos códigos narrativos daquela situação particular. Os professores percebem que os alunos aprendem com maior facilidade através das narrativas com veemência (VAZ et al 2001, p. 3).

Segundo Galvão (2005), nossa experiência diária e a nossa experiência de acontecimentos humanos são organizadas, principalmente, sob a forma de narrativa, pois criamos histórias, desculpas, mitos, razões para fazer ou não fazer ações, no nosso dia-a-dia. Sendo assim, as narrativas podem ser vistas como,

> [...] uma versão da realidade cuja aceitabilidade é governada mais por convenção e necessidade, do que por verificação empírica e requisitos lógicos, embora continuemos a chamar de histórias verdadeiras e falsas. E, tal como a nossa experiência do mundo natural tende a imitar as categorias da ciência familiar, a nossa experiência das relações humanas tende a tomar a forma das narrativas que usamos para contar. (BRUNER 1991, apud GALVÃO 2005, p. 329).

Connelly e Clandinin (1990) concebem a narrativa como sendo um processo investigativo, no qual existe diferença entre história e narrativa. O fenômeno é a história e o método que investiga a história é a narrativa. Para esses autores, a narrativa é o estudo dos modos como o homem experiencia o mundo. Sendo assim, investigadores, pesquisadores, professores e alunos são contadores de histórias e personagens de suas próprias histórias e das dos outros, pois, quando investigam histórias, constroem narrativas.

Scheffer (2001), também afirma que a narrativa proporciona,

> [...] **a expressão do entendimento, dos significados e das construções** relacionadas a um tema em estudo ou experienciado pelos estudantes. Constituem-se numa oportunidade de organizarem-se de forma ordenada de tempo, envolvendo a produção, registro e socialização. E representam uma forma de busca de descrição de uma maneira de conhecer e de pensar, particularmente as questões com que se está trabalhando (p. 40, grifo nosso).

Essa autora apresenta a narrativa como sendo uma forma de representar e expressar o entendimento dos alunos envolvidos no estudo de um determinado tema ou conceito. Dessa maneira, os alunos terão oportunidades de produzir, registrar e socializar seus entendimentos dos conceitos trabalhados em sala de aula. Essa autora destaca que

> [...] não podemos esquecer que, ao recorrer à narrativa como forma de relatar a situação vivenciada e atribuir-lhe significados, é necessário levar em consideração a interação com o outro, a palavra, a fala que envolve o gesto, a capacidade de ouvir e de descrever as experiências vivenciadas e analisadas (SCHEFFER, 2005, p.5).

Dessa maneira, entende-se que as atividades matemáticas aliadas à narrativa são momentos propícios à expressão oral e escrita, que manifestam entendimentos e a criatividade dos alunos, quando estes interagem em grupos ou com o professor.

Scheffer (2001) continua explicitando afirmando que o expressar do pensamento através da narrativa torna possível perceber a integração entre a representação dos conceitos novos e antigos. Nesta perspectiva, Scheffer (2001) declara que “a narrativa apresenta-se como veículo de aprendizagem e representação matemática, colocando os estudantes no centro da ação, discussão, reflexão e, conseqüentemente da aprendizagem na interação” (p. 41).

Essa autora faz referência a Nemirovsky (1996), pois segundo este último autor, um aluno constrói sua narrativa matemática por meio da descrição de eventos, da descrição de um gráfico, de uma tabela ou de um problema. Para elaboração dessa narrativa é preciso que ele tenha razoável fluência das idéias e símbolos matemáticos. Esse pesquisador sugere uma prática experimental e, esta é um terreno vasto, em que se dá

> [...] a exploração de múltiplos contextos a partir dos quais os estudantes têm perspicácia, expectativas e caminhos para a discussão e construção de narrativas matemáticas, porque há, na Matemática, vários aspectos curriculares a encorajar essa construção como: os relacionados à atividade algébrica, à linguagem de funções e aos gráficos (NEMIROVSKY 1996, apud SCHEFFER 2001, p. 45).

Segundo Scheffer (2001), entende-se que existe relação entre a Matemática e a narrativa quando acontecem atividades matemáticas aliadas a uma narração, na qual a conversa, o diálogo e a interação entre os alunos em torno de um tema (tarefa) são representados por eles na forma de narrativa. Para a pesquisadora, quando o aluno produz uma narrativa relativa a determinado tema matemático, a compreensão dele está se reconstruindo, "pois narrar é manifestar-se no discurso, reconstruindo-o e apropriando-se dele" (p. 47).

Desta maneira, criar narrativa em sala de aula encaminha ao mesmo tempo interação entre o processo de comunicação e aprendizagem, pois a narrativa auxilia na comunicação dos conhecimentos, e, no mesmo movimento, sempre se produz modificação, constituindo assim a aprendizagem.

Conforme Cunha (1997), estamos envolvidos em um sistema social, em que agimos sem reflexão, ou seja, fazemos as coisas porque todos fazem ou porque nos disseram que assim é que se age, ou porque a mídia estimula e os padrões sociais aplaudem. Muitas vezes, abrimos mãos da nossa liberdade, de ver e agir sobre o mundo, da nossa capacidade de entender e significar por nós mesmos e acabamos agindo sobre o ponto de vista do outro. O trabalho com a perspectiva da narrativa, neste sistema social, possui como propósito fazer a pessoa tornar-se visível para ela mesma.

Sendo assim, a autora referida acima, afirma que a narrativa não é uma mera descrição da realidade, mas sim uma produtora de conhecimento que, no mesmo tempo em que se fazem veículos, constrói o condutor e, isso é descoberto ao longo do processo. Desta maneira, penso que o aluno ao narrar sobre seu processo vivenciado, ele tem oportunidade de refletir sobre o que de fato aprendeu, e esse momento de reflexão pode ser significativo para o seu desenvolvimento cognitivo.

Apresentamos, ao descrever e analisar as narrativas realizadas pelos alunos na realização das tarefas exploratório-investigativas, envolvendo o conceito de Função, uma seqüência não puramente cronológica da maneira pelas quais as tarefas foram desenvolvidas, mas também a forma como envolvemos com os alunos e com o ambiente investigativo. Quando se relata fatos vividos, percebe-se que reconstrói sua trajetória dando-lhe novos significados. Dessa maneira, uma narrativa não é a verdade literal dos fatos, mas compreendemos como uma representação que fazemos desses fatos. Assim, apresentamos algumas abordagens das narrativas no contexto educacional.

2.2. Narrativas como uma Abordagem Didático-Pedagógica

A narrativa pode ser utilizada como uma abordagem didático-pedagógica de ensino, a qual possibilita ao professor obter indícios da aprendizagem dos seus alunos, referente aos conceitos trabalhados. Cunha (1997) declara que

> [...] para esse fim, especialmente na perspectiva das propostas de produção do conhecimento, que têm o educando como um ser socialmente situado tem sido recomendado e experimentado a produção e a investigação das narrativas dos sujeitos, como ponto de partida ou de chegada da análise do objeto de conhecimento (p. 191).

Em busca desta proposta de produção de conhecimento, acreditamos que, quando um aluno narra sua ação e fatos vivenciados na realização de uma tarefa em sala de aula, ele possui a oportunidade de reconstruir seu trajeto percorrido durante a realização da tarefa. Nesta perspectiva, Cunha (1997) declara que é importante o professor estimular seus alunos a utilizar sua narrativa em sala de aula, pois,

> [...] organizar narrativas destas referências é fazê-lo viver um processo profundamente pedagógico, onde sua condição existencial é o ponto de partida para a construção de seu desempenho na vida e na profissão. **Através da narrativa ele vai descobrindo os significados que tem atribuído aos fatos que viveram**, e, assim, vai reconstruindo a compreensão que tem de si mesmo (CUNHA, 1997, p. 188, grifo nosso).

Desta maneira, entende-se que, quando um aluno utiliza a narrativa depois da realização de uma tarefa em sala de aula, além de refletir sobre o tema ou conceito estudado, este revive os fatos acontecidos durante a aula. Dessa forma, esse aluno tem a oportunidade de confirmar a sua aprendizagem ou de atribuir significados antes não estabelecidos. Nesta linha de pensamento, (Cunha, 1997 apud Kenski 1994) declara que “o narrado é praticamente uma reconceitualização do passado a partir do momento presente” (p. 48).

Com base nessa autora, entendemos que, quando contamos algo que nos aconteceu, estamos reestruturando nossas estruturas mentais, pois vivenciamos novamente a história, mas de uma outra maneira. Durante o ato de recontar ou repetir o vivenciado, estamos falando sobre a mesma coisa, mas com um novo tempo e com novas articulações incorporadas à estrutura do nosso pensamento.

Utilizar narrativa na aula de Matemática pressupõe uma postura de interação e amizade entre professor e alunos, na qual a confiança mútua e a aceitação da intervenção entre os envolvidos são constantes. Nesta perspectiva, a narrativa pode expressar momentos

de interação, nos quais a voz de um aluno é valorizada e respeitada ao externalizar seu entendimento e compreensão sobre os assuntos tratados.

De acordo com (Gudmundsdottit 1998, apud Morais & Galiazzi 2003), a narrativa é um valioso instrumento transformador, porque as narrativas nos permitem "compreender o mundo de novas maneiras e, nos ajudam a comunicar novas idéias aos demais" (p. 18).

Sendo assim, pensamos que os alunos devem ser estimulados para produzir sua própria narrativa, não apenas ouvindo informações, porque narrar é o modo de pensar, de aprender e de comunicar conhecimentos aprendidos ou reconstruídos. Nesta perspectiva, o professor precisa proporcionar aos alunos atividades que possibilitem reflexão e expressão de seu pensamento sobre o tema estudado, pois, ouvir essa reflexão e expressão proporciona ao professor indícios de compreensão da aprendizagem dos alunos.

De acordo com Morais e Galiazzi (2003), o professor pode desempenhar um papel importante como mediador. Seu auxílio na construção da narrativa, a crítica que faz dela, a confrontação que promove entre a narrativa de diferentes sujeitos, todos são modos de mediação da aprendizagem e apropriação discursiva a se realizar pela produção da narrativa.

Dar voz para o aluno apresentar sua compreensão e entendimento a respeito da sua atividade realizada em um contexto matemático é uma abordagem potencial, pois, favorece a reflexão e o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Essa abordagem precisa da liderança constante do professor, organizando as discussões e, até mesmo, fazendo perguntas para o aluno progredir no seu conhecimento matemático. Nesta perspectiva, Morais e Galiazzi (2003) declara que,

> [...] **trabalhar com narrativas em sala de aula é encaminhar aprendizagens de um modo significativo e contextualizado**. O exercício de narrar, além de possibilitar a comunicação de conhecimentos já anteriormente apropriados, também é processo de reconstrução de aprendizagens anteriores. É, assim, modo de constituição no discurso e, ao mesmo tempo, possibilidade de participação em sua reconstrução (p. 20, grifo nosso).

Através da narrativa, pode-se compreender o processo relatado de uma outra forma e isso pode ter uma Função transformadora muito significativa tanto para o professor ao ensinar como para o aluno ao aprender.

Boavida (2005) complementa essa idéia declarando que a competência da argumentação e da justificação de posicionamento pode ser desenvolvida em aulas de Matemática, o que privilegia a voz do aluno. Essa autora destaca a importância que possui a cultura da argumentação na sala de aula de Matemática. A expressão "cultura de argumentação" é utilizada pela autora para destacar que o envolvimento dos alunos em

atividades de argumentação matemática requer a negociação de normas de ação e interação que favoreça a constituição e desenvolvimento de uma comunidade de discurso matemático. Este discurso envolve uma apresentação feita pelo aluno. Nessa apresentação, o aluno argumenta em defesa da sua idéia, analisa criticamente a contribuição do colega, e avalia se é ou não apropriado usar um determinado raciocínio na resolução de um problema, a formulação de conjecturas e a avaliação da plausibilidade e/ou validade destas conjecturas.

Para Boavida (2005) a, existe uma necessidade de criar, nas aulas de Matemática, condições favoráveis para o envolvimento do aluno em experiência de aprendizagem cujo foco seja a explicação e a fundamentação do seu raciocínio, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a formulação, e a prova de conjecturas. Focar esses aspectos na aula de Matemática poderá contribuir para a tomada de consciência do aluno de que é ele o responsável por sua aprendizagem.

Com base no que já foi abordado, compreendemos que utilizar a narrativa em aulas de Matemática, proporciona uma oportunidade para os alunos se desenvolverem cognitivamente e socialmente, pois os alunos precisam posicionar-se nas situações de ensino, e este posicionamento pode ser realizado por meio das narrativas. Assim, utilizar a narrativa como um recurso didático-pedagógico, pode ser um bom exercício de construção do conhecimento que o aluno poderá realizar. Para tanto, devemos considerar também as potencialidades das narrativas como forma de comunicação na sala de aula.

2.3. Narrativa como forma de Comunicação

Compreender a narrativa como uma forma de comunicação, leva-nos a buscar o conceito de dialogia de Bakhtin. Vygotsky também destaca aspectos da dialogia em seus trabalhos, pois ele ressalta a mediação pelo outro, pela palavra, como chave no processo de internalização. Nesse sentido, Vygotsky afirma que o processo de internalização implica uma série de transformações, na qual,

> [...] uma operação, que inicialmente representa uma atividade ‘externa’, isto é, social, é reconstruída e começa a ocorrer internamente. Nesse sentido, a fala externa, comunicativa, ou seja, a fala para o outro, constitui a matriz de significações da fala para si. Nesse sentido, ainda, a natureza da fala egocêntrica, bem como da fala interna, é dialógica: o que a criança internaliza é o movimento dialógico é a dialogia (SMOLKA, 1995, p. 40).

Segundo Bakhtin (1992), a dialogia é o confronto das entoações e dos sistemas de valores que posicionam as mais variadas visões de mundo dentro de um campo de visão, pois,

> [...] na vida agimos assim, julgando-nos do ponto de vista dos outros, tentando compreender, levar em conta o que é transcendente à nossa própria consciência: assim levamos em conta o valor conferido ao nosso aspecto em função da impressão que ele pode causar em outrem (BAKHTIN 1992, p. 35-36).

Bakhtin argumenta que cada um de nós ocupa um lugar e um tempo específicos no mundo, e que cada um de nós é responsável por nossas atividades. Estas ocorrem nas fronteiras entre o eu e o outro, e, portanto, a comunicação entre as pessoas tem uma importância fundamental.

Essa comunicação acontece por meio das palavras, quer seja por meio das falas ou das escritas. Bakhtin (1992) afirma que "as palavras são tecidas a partir de uma multidão de fios ideológicos e servem de trama a todas as relações sociais em todos os domínios" (p. 41). Esse autor declara também que a verdadeira substância da língua é constituída "pelo fenômeno social da interação verbal, realizada por meio da enunciação ou das enunciações. A interação verbal constitui assim a realidade fundamental da língua" (p. 123).

Para Bakhtin (1992), o ato da fala, ou o seu produto, a enunciação, é de natureza social e, para compreendê-la, é necessário entender que ela acontece sempre numa interação, pois a enunciação é o produto da interação de dois indivíduos socialmente organizados. Esse mesmo autor, afirma que "a palavra é uma espécie de ponte lançada entre mim e os outros. Se ela se apóia sobre mim, numa extremidade, na outra se apóia sobre o meu interlocutor. A palavra é o território comum do locutor e do interlocutor" (BAKHTIN 1992, p. 113).

Desta maneira, a palavra se orienta em função do interlocutor, pois ela procede de alguém e se dirige para alguém. Desta maneira, ela é o produto da interação do locutor e do interlocutor, além de servir como forma de expressão a um em relação ao outro, em relação à coletividade. Neste contexto, Bakhtin (1997) afirma que "quando contemplo um homem situado fora de mim e à minha frente, nossos horizontes concretos, tais como são efetivamente vividos por nós dois, não coincidem" (p. 43).

Assim, um dos observadores percebe obviamente, no outro, a partir do seu excedente de visão, coisas que só ele pode perceber – pelo lugar que é o único a ocupar (e pelo sentido único) – e que são inacessíveis ao outro (outra cultura). Ainda de acordo com esse autor

> O excedente de minha visão, com relação ao outro, instaura uma esfera particular da minha atividade, isto é, um conjunto de atos internos ou externos que só eu posso pré-formar a respeito desse outro e que o completam justamente onde ele não pode completar-se (BAKHTIN 1997, p. 44).

Segundo Bakhtin (1997), todas as visões são determinadas pelo posicionamento do sujeito no espaço e no tempo. Um indivíduo sempre vê o que está fora do campo de visão de um outro. Isto significa dizer que no campo de visão de um sujeito há sempre algo que não é possível ser alcançado por sua visão, devido à sua localização no espaço. Este espaço não preenchido pela visão do sujeito é o excedente de visão que só pode ser preenchido pela posição de um outro sujeito no espaço. Portanto, aquilo que é inacessível ao olhar de uma pessoa é preenchido pelo olhar de outra pessoa. Ao campo espacial, adicionamos a perspectiva temporal, pois cada sujeito histórico habita uma determinada experiência temporal que também irá marcar profundamente o modo como percebe o presente, o passado e o futuro.

Com essas perspectivas, acreditamos que devemos proporcionar aos nossos alunos oportunidades para eles utilizarem as suas palavras em um sentido comunicativo, realizada por meio das diferentes formas. Neste trabalho, nos focamos nas potencialidades das narrativas como uma maneira de viabilizar a comunicação em sala de aula. Assim, procuramos abordar, no item a seguir, a narrativa como uma forma de comunicação.

2.3.1. Narrativa como forma de Comunicação na Sala de Aula

A comunicação é essencial na vida do ser humano. No contexto educativo, a comunicação também possui especial destaque, pois o processo de ensinar e aprender envolve agentes comunicativos. A escolha de trabalhar com a narrativa do aluno, se dá porque considero importante a comunicação em sala de aula, na qual o diálogo, a discussão, a reflexão, oral ou escrita, são fatores relevantes para aulas de Matemática.

O tema comunicação tem adquirido um lugar cada vez mais importante no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, pois, a partir dos anos 80, os movimentos de reforma do ensino de Matemática vêm acentuando a importância da interação e negociação de significados nas situações educativas.

Segundo Martinho e Ponte (2005), a comunicação em sala de aula tem grande importância no processo de ensino e aprendizagem de matemática e ela tem sido amplamente reconhecida e recomendada por educadores matemáticos, pois constitui um processo social em que os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente.

Com o intuito de promover a comunicação em sala de aula, os Parâmetros Curriculares Nacionais apresenta como objetivo geral da Matemática para o Ensino Fundamental, o desenvolvimento, no educando, de capacidades de.

> Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas (BRASIL, 1998, p. 51).

Neste contexto, a comunicação é o meio através do qual se ensina e se aprende, e, ao mesmo tempo se determina, a finalidade do ensino, visto que pressupõe que o aluno desenvolva, no decorrer de sua vida escolar, competências comunicativas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (2002) devemos levar nossos alunos a

> [...] expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em matemática; Promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às capacidades matemáticas, desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação. (PCNEM, 2002, p.42).

De acordo com Smole e Diniz (2001), promover a comunicação em aulas de Matemática é dar oportunidade ao aluno de organizar, explorar e esclarecer seus pensamentos, pois, para as autoras, o nível ou grau de compreensão de um conceito está intimamente relacionado à comunicação bem-sucedida deste conceito. Desta maneira, pensamos que quanto mais o aluno tem oportunidade de refletir sobre um determinado assunto, falando, escrevendo ou representando, ele compreenderá melhor a sua atividade realizada.

Menezes (1999) afirma que "a comunicação entre os alunos constitui um aspecto que o professor deve incrementar porque permite o desenvolvimento de capacidades, de atitudes e de conhecimentos" (p. 7). Nesta perspectiva, pensamos que as aulas de Matemática devem possuir espaços, nos quais os alunos possam raciocinar e comunicar suas idéias. Para esse autor, é necessário que o professor peça ao aluno para explicitar seu pensamento, pois procedendo assim, o professor estimula a discussão e a partilha de idéias.

Segundo Martinho & Ponte (2005), compete ao professor,

> [...] assegurar uma atmosfera de respeito mútuo e confiança, de modo a que os alunos se sintam confortáveis para argumentar e discutir as idéias uns dos outros. O professor tem ainda o papel dominante na estruturação do discurso produzido na aula nomeadamente através das suas perguntas (p. 3).

Para esses autores, o aluno deve aprender a se comunicar matematicamente e o professor, além de estimular o espírito de questionamento do aluno, leva-o a pensar e comunicar suas idéias, pois a predominância do silêncio no sentido de ausência de comunicação é ainda comum em Matemática.

Sendo assim, valorizar uma dinâmica comunicativa na sala de aula significa estimular o interesse dos alunos para enriquecer as interações estabelecidas. Nesse sentido, Ponte e Santos (1998) declaram ser preciso ter em conta, a descentralização da autoridade, pois o professor deve pedir para o aluno justificar seus posicionamentos sempre que considerar oportuno, procurando que este assuma também o poder de decidir se está certo ou errado.

O professor possui um papel fundamental no ato de motivar e moderar os trabalhos da turma, coordenando-os de forma que os alunos desenvolvam suas próprias estratégias de resolução. Sendo assim, o professor que estiver disposto a trabalhar nesta perspectiva, necessita se atentar para a cultura da turma, com o intuito de negociar um meio, em que os alunos participam ativamente do processo.

Esta perspectiva pode mudar a cultura pacifista da turma, pois o professor passa a ser um participante na conversa focando seus olhares no entendimento que os alunos estão demonstrando através da narrativa realizada por eles no decorrer de suas atividades matemáticas. Neste contexto, o professor é o responsável para encontrar uma situação que seja matematicamente rica, além de trabalhar para negociar a cultura da turma engajando-os na conversa matemática.

O professor, enquanto facilitador de processo comunicativo na sala de aula possui um papel fundamental. O caráter chave desse papel já está na seleção de tarefas estimulantes, no encorajamento dos alunos a tomar posições e defendê-las com convicção no recurso das tarefas e materiais que os ajudem a promover uma narrativa centrada nas idéias matemáticas e não somente em cálculos e procedimentos. Outro papel do professor é assegurar uma atmosfera de respeito mútuo e confiança, de modo que o aluno se sinta confortável para argumentar e discutir as idéias dos outros.

Segundo Moraes & Galiazzi (2003), o professor desempenha o papel de mediador no encaminhamento da produção de narrativas, pois a crítica que ele faz dela e também "as confrontações que promovem entre narrativas de diferentes sujeitos, todos são modos de mediação das aprendizagens e apropriações discursivas a se realizarem pela produção das narrativas" (p. 13).

A intervenção dos alunos nas aulas é importante, mesmo que essa se limite ao "não sei". No entanto, o confronto das diferentes resoluções dos alunos desperta nestes um envolvimento favorável e, por meio disso, a aprendizagem. Desta maneira, incentivar a intervenção do aluno em sala de aula deve ser um papel adotado pelo professor, pois incentivar o aluno fazendo perguntas, mesmo para aquele aluno que possui dificuldade, para se envolver no processo de comunicação em sala de aula. A comunicação entre os alunos vai

evoluindo com o passar do tempo, pois a possibilidade de os alunos discutirem entre si, tentando esclarecer idéias menos claras, permite uma maior riqueza na discussão geral.

De acordo com Smole e Diniz (2001), existe uma relação entre a narrativa e comunicação porque a comunicação é a principal função da narrativa. A narrativa aparece como um instrumento para medir o crescimento, desenvolvimento do aluno referente ao seu entendimento, permitindo que um aluno aprenda sobre a construção matemática dos outros alunos. Assim sendo, todos os participantes têm oportunidades para refletirem na sua própria compreensão matemática.

Destacamos a narrativa como uma forma de comunicação, pois saber argumentar, justificar, dialogar e comunicar, através da fala ou da escrita, são competências que vêm adquirindo cada vez mais importância na formação de alunos ativos e críticos na sociedade. Nesse sentido, Freitas (2006) declara que "essas diferentes formas de comunicação se complementam, sendo hoje imprescindível a utilização articulada das mesmas" (p. 17).

Moraes & Galiazzi (2003) complementam essa idéia, declarando que na produção da narrativa é importante combinar a fala e a escrita, pois essa combinação possibilita uma apropriação cada vez mais ampla dos elementos discursivos que as sustentam, pois, ainda que a "fala possa originar uma primeira versão de uma narrativa, essa evolui e se qualifica pela escrita." (p. 12)

Nesta perspectiva, "a exposição oral, apoiada a exposição escrita, assegura a coesão dos processos cognitivos" (MORAES & GALIAZZI 2003 apud VALENCIA, 2001, p.66). Para esses autores, a narrativa em sala de aula pode representar um instrumento não apenas para explicitar conhecimentos que o aluno já elaborou anteriormente, mas também como modo de apropriação aprofundada dos conceitos estudados. Sendo assim

> [...] produções individuais de narrativas, a partir dos conhecimentos iniciais de cada um, na confrontação com outras narrativas, poderão ajudar a reconstruir conhecimentos e a apropriar-se de modo mais amplo de discursos a que os sujeitos já foram anteriormente assujeitados (MORAES & GALIAZZI 2003, p. 10).

As narrativas orais e as narrativas escritas de cada um dos alunos em sala de aula constituem um processo particular de interpretação e manifestação da voz própria de cada um. Fazer interpretação da fala e das narrativas dos colegas é trazer a própria voz para o contexto do diálogo e das narrativas. Nesta perspectiva, "as narrativas são um valioso instrumento transformador; permitem-nos compreender o mundo de novas maneiras e nos ajudam a

comunicar novas idéias aos demais" (GUDMUNDSDOTTIT 1998 apud MORAES & GALIAZZI 2003, p. 11).

Nesta perspectiva, a narrativa pode ser entendida como modo de envolvimento discursivo e de encaminhamento de aprendizagem escolar, o qual assume um papel destacado como elemento de comunicação do que o aluno já sabe e também de apropriação de novos conhecimentos. Moraes & Galiazzi (2003) ressaltam a importância do diálogo no processo de construção da narrativa, pois quanto maior for o confronto de idéias dos alunos, maior será a aprendizagem envolvida. Desta maneira, ao produzir uma narrativa relativa a determinado tema, a compreensão sobre esse tema está sendo reconstruída, pois "narrar é manifestar-se no discurso, reconstruindo-o e apropriando-se dele" (MORAES & GALIAZZI 2003, p. 14).

Criar narrativa encaminha, ao mesmo tempo, dois processos inter-relacionados que segundo Moraes & Galiazzi (2003) é a comunicação e aprendizagem. "A narrativa auxilia a comunicar conhecimentos e, no mesmo movimento, sempre se produzem modificações, constituindo nisso as aprendizagens. Narrar pode assim representar um modo prazeroso de aprender" (MORAES & GALIAZZI 2003, p. 14).

Esses autores assumem a narrativa como modo de fala e escrita que deve ser valorizada na sala de aula. Para esses pesquisadores, a narrativa constitui não apenas como modo de expressar o que já se sabe, em um sentido comunicativo, mas também de reconstrução em um exercício de aprender e de se tornar participante da constituição dos temas trabalhados.

Desta maneira, a narrativa permite a construção de histórias e, com isso, de ações, mais consistentes e coerentes com o modo de pensar a respeito das idéias matemáticas discutidas. Assim, trabalhar com a narrativa do aluno é importante porque há comunicação entre os alunos em sala de aula e também porque as narrativas têm adquirido um lugar cada vez mais importante no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

2.3.1.1. Narrativas Orais nas Aulas de Matemática

A narrativa oral caracteriza-se como uma das formas de narrativas adotadas neste trabalho, porque é o recurso de comunicação mais acessível que temos, além de ser um recurso ágil e direto de comunicação, permite-nos fazer revisões quase que instantaneamente. A oralidade é o recurso de comunicação mais acessível que a escola possui, o qual todos os alunos podem utilizar. No entanto, os alunos vêem enfrentando grandes dificuldades para apresentar oralmente seus processos de resolução dos problemas. A fala possui relevância

como forma de narrativa porque constitui a forma de comunicação mais simplificada que os alunos possuem e também porque, estes ao falar, se comunicam de outras maneiras, através de gestos e sinais.

Nesta perspectiva, Smole e Diniz (2001) destacam que é preciso dar oportunidade para o aluno falar na aula de Matemática para torná-lo capaz de conectar sua linguagem, seu conhecimento, suas experiências pessoais com a linguagem da classe e da área do conhecimento que se trabalha. Assim sendo, é preciso promover comunicação, pedindo para o aluno esclarecer, argumentar e justificar seus processos e respostas, além de reagir frente às idéias dos outros, considerando pontos de vistas alternativos. Para essas autoras, a comunicação oral favorece a percepção das diferenças, na qual o exercício de escutar um ao outro proporciona uma aprendizagem coletiva, além de possibilitar aos alunos mais confiança ao exporem idéias publicamente.

A capacidade para dizer o que deseja e entender o que ouve ou lê deve ser um dos resultados de um bom ensino de Matemática. Segundo D'Ambrosio (1996), é preciso substituir o processo de ensino que prioriza a exposição, pois isso não estimula o aluno à participação. É preciso que eles deixem de ver a Matemática como um produto acabado, cuja transmissão de conteúdos é vista como um conjunto estático de conhecimentos e técnicas. A atividade de dar oportunidade para o aluno modificar e ressignificar seu conhecimento prévio pode ser realizada quando um professor pede para o aluno dizer o que fez e por que fez, ou solicitar que o aluno verbalize sobre o procedimento adotado, argumentando e justificando etapas de seu trabalho.

Nesse âmbito, procura-se organizar um ambiente propício para o aluno aprender, no qual se busca ouvir o que o aluno diz sobre idéias e hipóteses a respeito das situações exploratórias e investigativas apresentadas. Auxiliar o aluno a compreender situações e refletir sobre seu próprio método de solução e a explicar os passos de sua solução pode ser uma perspectiva diferenciada e eficiente, pois o aluno tem oportunidade para se manifestar através da sua fala no processo.

Ao aluno, explicar seu entendimento proporciona ao professor indícios para compreender o nível dos pensamentos matemáticos que ele possui. Esta interação engaja o aluno e ajuda o professor a perceber e a fazer conexão entre os conceitos matemáticos e o desenvolvimento de processo como o de argumentação e justificação de posicionamentos referentes aos conceitos matemáticos discutidos.

Nesta perspectiva, segundo Candido (2001), “o diálogo na classe capacita os alunos a falarem de modo significativo, a conhecerem outras experiências, a testarem novas idéias, a conhecerem o que realmente sabem e o que mais precisam aprender” (p. 17).

De acordo com Moraes & Galiazzi (2003), a utilização da narrativa oral (fala) na sala de aula pode assumir diferentes sentidos de envolvimento dos alunos, pois,

> [...] falas descritivas e expositivas representam um modo inicial de envolvimento dos sujeitos no discurso. Por si só já expressam argumentos, ainda que geralmente de modo implícito. Na sala de aula um dos desafios pode ser de construir competências argumentativas mais elaboradas. É interessante que os alunos assumam idéias e pontos de vista sobre determinados temas e saibam construir argumentos, no sentido de sua defesa e sustentação (MORAES & GALIAZZI 2003, p. 6).

É através da narrativa oral que o aluno fundamenta e defende sua própria idéia, construindo argumento para justificar seu posicionamento, pois saber defendê-lo com competência é uma das capacidades a desenvolver no contexto de sala de aula. Nesta perspectiva, Moraes & Galiazzi (2003) declaram que a competência argumentativa está associada ao entendimento da fala como confrontação de vozes, na qual se exige negociação para atingir acordos referentes ao entendimento do conceito discutido.

Estes acordos implicam também em saber ouvir e respeitar a argumentação do outro, considerando que talvez esse outro tenha argumentos mais consistentes do que os seus próprios. Desta maneira, “a simples exposição de pontos de vista já constitui um modo de assumir-se na linguagem, possibilitando explicitar as próprias idéias. Por isso, a fala é essencial em contextos educativos” (MORAES & GALIAZZI 2003, p. 4).

A fala é essencial em contextos educativos, pois é importante fazer com que o aluno fundamente seu argumento e explicite-o. Para esses autores “falar em sala de aula é construir oportunidades novas de aprender, não apenas de quem fala, mas também de quem ouve e participa dos diálogos, mesmo que não se manifeste diretamente” (MORAIS & GALIAZZI, 2003, p.13). Essa capacidade desenvolve-se quando há oportunidades para explicar e discutir os resultados obtidos e para testar as conjecturas. Com isso, o aluno é encorajado a se comunicar matematicamente com seus colegas e com o professor em sala de aula.

Ouvir o aluno proporciona ao professor uma reflexão de seu modo de atuação, fazendo com que desenvolva um trabalho melhor. Dar voz aos alunos proporciona aos professores momentos de reflexão sobre o seu ensino e ao aluno momento de reflexão e explicitação de seu pensamento através da narrativa. Nesta perspectiva, Powell & López (1995) afirma que se aprende refletindo sobre a experiência.

Com base nos teóricos mencionados até aqui, pensamos que ouvir as narrativas orais dos alunos ao apresentarem as suas argumentações referentes a uma tarefa exploratório-investigativa em um contexto matemático é uma abordagem potencial. No entanto, precisa-se da liderança constante do professor, para que o aluno progrida no seu conhecimento e em sua argumentação matemática.

2.3.1.2. Narrativas Escritas em Aulas de Matemática

A narrativa escrita é concebida nesta pesquisa como uma maneira de narrar por escrito os acontecimentos e experiências vivenciadas pelos participantes nos episódios de ensino desta pesquisa. Uma das razões por que escolhemos trabalhar e pesquisar sobre a narrativa escrita nas aulas de Matemática se deu porque, segundo o Professor Ubiratan D' Ambrósio[12], escrever em Matemática é uma das tendências fortes para a Educação Matemática nas próximas décadas. No entanto, de acordo com Parateli et al. (2004), apesar de a escrita ocupar cada vez menos espaço no contexto escolar, esta faz parte do centro do processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Paratelli et al. (2004), a escrita favorece a reflexão, contribui para o desenvolvimento cognitivo e também a expressão do próprio pensamento. Escrever não é apenas uma tarefa escolar, pois deve transcender os espaços escolares, proporcionando liberdade de criação, de expressão, de pensamento e de transformação. A escrita pode ser vista como registro de pensamento, o qual se constitui momentos importantes de organização das idéias dos alunos, oferecendo-lhes oportunidades de aprendizagem também na área de Matemática. Esses autores ainda ressaltam que a escrita pode levar o aluno a sentir-se responsável por sua aprendizagem.

Segundo Powell (2001), a escrita providencia um retorno direcionado à afirmação, interpretação, questão, descoberta e engano do aluno. De acordo com autor

> Qualquer que seja a **atividade escrita**, desde que ela obrigue os alunos a **sondar suas idéias e compreensão** sobre alguma matemática em que estejam envolvidos, pode **capturar evidência importante de seu pensamento matemático**. Diferente da natureza efêmera da fala, a escrita é um meio estável, que permite a ambos, aluno e professor, examinar, reagir e responder ao pensamento matemático do aluno (POWELL 2001, p. 78, grifo nosso).

[12] O professor Ubiratan fez essa consideração em uma das suas aulas da disciplina de Tendências da Educação Matemática ministrada por ele na Universidade Estadual Paulista – UNESP – Campus de Rio Claro /SP no primeiro semestre do ano de 2005. Foi a partir da nossa participação nessa disciplina é que conseguimos delimitar o foco de nossa pesquisa.

Com base nessa afirmação, utilizar o recurso da narrativa escrita em aulas de Matemática proporciona ao aluno uma nova reflexão, nova descoberta, novos conhecimentos e uma nova escrita. Tanto a escrita como a retomada da escrita leva professor e aluno a uma reflexão, além de evidenciar as idéias e compreensões principais da tarefa. Para esse autor, escrever significa produzir o nosso próprio texto, no qual se dá relevância às emoções, idéias, sentimentos. Segundo ele, deve-se fazer da escrita não uma obrigação escolar, mas um ato de expressão pessoal, pois a escrita está relacionada com a ação de refletir sobre o processo vivido (experiência) como uma possibilidade de influenciar significativamente a cognição e a metacognição.

Segundo Powell (2001), refletir por escrito poderá levar os alunos a pensarem criticamente sobre suas idéias a respeito das experiências matemáticas. Desta maneira, a narrativa escrita pode ser vista como registro de pensamento, pois constitui momento importante de metacognição e organização de idéias para os alunos.

Para Powell & López (1995), a escrita é um instrumento com o qual se reflete sobre a experiência e na Matemática, é um importante instrumento para o pensamento. A partir desta concepção instrumental da escrita e da Matemática, podemos observar conexões existentes. Assim, as atividades escritas proporcionam a expressão de pontos de vista e a evolução na compreensão de conceitos matemáticos.

De acordo com Candido (2001), a escrita possui duas características importantes. Primeiro, ela auxilia no resgate da memória, uma vez que a narrativa oral pode ficar perdida sem o registro em formas de texto, e também pela possibilidade de comunicar à distância no espaço e no tempo. Uma vez que se podem trocar informações e descobertas com pessoas que, muitas vezes, nem se conhece através dos meios de comunicação. Para Candido (2001), quando o aluno escreve sobre uma determinada atividade ou descoberta, ele pode retornar a essa anotação quando e quantas vezes ele achar necessário.

Nesta perspectiva, esse autor declara que, “escrever permite que, além do próprio aluno, seus pais, colegas de outras classes e até mesmo outras pessoas possam ter acesso ao que foi pensado e vivido” (CANDIDO 2001, p. 23). Esse pesquisador, ainda, declara que

> [...] escrever em matemática ajuda a aprendizagem dos alunos de muitas maneiras, encorajando reflexão, clareando as idéias e agindo como um catalisador para as discussões em grupo. Também ajuda o aluno a aprender o que está sendo estudado (CANDIDO 2001, p. 24).

A escrita possui um grande valor nas aulas de Matemática. Smole (2001) ainda destaca dois aspectos referentes ao valor da escrita. Primeiramente, o aluno tem a oportunidade de repensar sobre o que fez, registrando sua reflexão, percepção e descoberta sobre o tema trabalhado e, segundo, o aluno poderá rever e aprofundar os conceitos envolvidos nas ações realizadas. Além desses dois aspectos, essa autora declara que a escrita pode ajudar os alunos nas aulas de Matemática, pois

> [...] escrever pode ajudar os alunos a aprimorarem percepções, conhecimentos e reflexões pessoais. Além disso, ao produzir textos em matemática, tal como ocorre em outras áreas do conhecimento, o aluno tem oportunidades de usar habilidades de ler, ouvir, observar, questionar, interpretar e avaliar seus próprios caminhos, as ações que realizou no que poderia ser melhor. É como se pudesse **refletir sobre o seu próprio pensamento** e ter nesse momento, uma consciência maior sobre aquilo que realizou e aprendeu (SMOLE, 2001, p. 31. grifo nosso).

Com base nessa autora, escrever em aulas de Matemática ajuda a aprendizagem do aluno de muitas formas, como: encorajando-o na reflexão, clareando idéias e agindo como um catalisador para discussões em grupo.

Para Moraes & Galiazzi (2003), a escrita possibilita ao aluno tanto a comunicação de conhecimentos anteriormente discutidos e compreendidos, como de apropriação e aprendizagem de um novo saber, pois se pode escrever tanto para comunicar algo como para aprender no próprio processo da escrita. Desta maneira, "para aprender de modo mais efetivo, escrever é preciso, pois a escrita encaminha aprendizagens mais sistematizadas, qualificadas e autônomas" (MORAES & GALIAZZI 2003, p. 6).

O ato de escrever possibilita ao mesmo tempo a comunicação e a aprendizagem. Ao aluno comunicar está afirmando 'algo', mesmo que ainda de modo incompleto e inacabado e sua aprendizagem se dá no próprio processo da escrita, processo pelo qual ele reconstrói o conceito anteriormente apropriado. Moraes & Galiazzi (2003) ainda afirmam que "Escrever é também modo de argumentar, e por meio da escrita, os sujeitos podem desenvolver sua competência argumentativa" (p. 7).

Estes pesquisadores declaram que, para aprender de modo significativo, é preciso escrever, pois "o escrever encaminha aprendizagens, qualificadas pela mediação do professor" (p. 15). Além disso, a escrita encaminha aprendizagem mais sistematizada, qualificada e autônoma. Para esses autores, escrever possibilita a comunicação e aprendizagem ao mesmo tempo. Compreendemos que a argumentação se faz presente, além de comunicar e aprender, porque, por meio da escrita, o aluno também poderá desenvolver suas competências argumentativas.

Trabalhar com a narrativa escrita proporciona ao aluno um convívio com as estruturas da língua escrita. Sendo assim, a iniciação à produção escrita deve prever um período em que a ênfase seria dada à fluência na escrita, levando-se o aluno a monitorar seu desempenho no ato de escrever em Matemática.

Acreditamos que a narrativa escrita é um caminho a ser conquistado gradativamente, no entanto, é fundamental o trabalho em grupo para auxiliar o aluno na produção dessa narrativa escrita. Utilizar a narrativa escrita nos grupos, em sala de aula significa fornecer oportunidades para o aluno contar suas histórias de aprendizagem, para descrever as atividades planejadas e registrar como a aula se desenvolveu e também com o intuito de refletir sobre as atividades realizadas.

Sobre o ato de escrever e apresentar a escrita, Parateli et al. (2004) declara que "escrever não é fácil, torná-lo público é ainda mais difícil. É se expor, é aceitar a discordância, mas é somente arriscando, expondo o que pensamos que podemos nos rever e crescer com a fala do outro" (p. 28). Desta maneira, produzir textos nas aulas de Matemática cumpre um papel importante na aprendizagem dos alunos, além de favorecer a avaliação dessa aprendizagem em processo.

De acordo com Smole e Diniz (2001), a escrita é o enquadramento da realidade, pois, quando se escreve, não se pode ir para tantos lados como na fala. Sendo assim, a escrita prevê um planejar e esse planejar não é necessariamente escrito, mas auxiliador da escrita. Sendo assim, a narrativa oral antecede a narrativa escrita e nesse sentido a escrita pode ser usada como mais um recurso de representação de idéias dos alunos.

Smole (2001) destaca que a escrita de textos em aulas de Matemática não deve servir apenas para o aluno mostrar se sabe ou não escrever, mas que a escrita deve ter sempre um destinatário, ou seja, alguém que vai ler os escritos dos alunos. Smole (2001) declara que escrever textos em aulas de Matemática pode ser realizado em diversos momentos durante as aulas.

Escrever textos ao iniciar um novo tema tem por objetivo investigar o que o aluno já sabe ou o que ele conhece sobre um determinado tema, a partir dos seus conhecimentos prévios. Escrever textos, depois da realização de uma atividade, tem por objetivo encorajar o aluno a escrever sobre o que fez, aprendeu ou percebeu durante a realização de uma dada atividade. Nesse momento, o aluno explicita dúvidas e outras impressões, permitindo ao professor perceber em quais aspectos da atividade ele apresenta mais incompreensões e em que ponto avançou, se o que era essencial foi compreendido e que intervenções precisam fazer. Escrever textos no final de um assunto tem por objetivo sistematizar a noção, assemelhando-se a uma síntese, ou até mesmo, um parecer sobre o tema desenvolvido, no qual aparece a idéia central do que foi estudado e compreendido. Nesses textos, o aluno precisa apresentar informações precisas e incluindo a idéia central do tema.

As narrativas escritas, produzidas pelos alunos durante os episódios de ensino, aconteceram durante os três momentos relatados anteriormente. Enfatizamos a produção das narrativas escritas depois da realização de uma atividade, pois queremos observar como acontece às narrativas escritas dos alunos, sobre o que fizeram, entendendo assim qual foram suas aprendizagens.

Concluindo este tópico do capítulo, compreendo que escrever em Matemática é uma tarefa para professores dispostos a olhar com atenção para a aprendizagem dos seus alunos. As narrativas escritas apresentam algumas potencialidades para as aulas de Matemática, pois escrever é produzir e não reproduzir velhas certezas.

2.4. Considerações Didático-Pedagógicas das Narrativas

Consideramos que uma das finalidades importantes do ensino da Matemática, atualmente, é desenvolver a capacidade de comunicação do aluno, porque essa perspectiva constitui um suporte fundamental da aprendizagem matemática. A comunicação é um processo social em que os sujeitos interagem, trocando informações, influenciando-se reciprocamente na construção de significados.

Segundo Schon (1995), uma característica essencial do professor que faz parte do seu processo de desenvolvimento, é ouvir o aluno. Para esse pesquisador, apesar de todos os desafios que o rodeiam, o trabalho do professor, deve ser aprender a ouvir mais seus alunos para entender melhor o processo utilizado por eles na resolução de problemas, para entender melhor as suas dificuldades com relação aos métodos utilizados em sala de aula. Apesar de todas as angústias geradas pelas dificuldades no seu trabalho, a mensagem essencial para o professor é a de que ele deve estar atento ao processo contínuo de aprender a ouvir o aluno, para poder obter indícios da aprendizagem dos alunos, referentes ao conteúdo trabalhado.

Sendo assim, pensamos que o aluno em sala de aula precisa sentir-se livre para se expressar, desempenhando assim um papel ativo no processo de sua aprendizagem referente à Matemática. Assim, faz-se necessário proporcionar aos alunos tempo suficiente para assimilar e contribuir com idéias. Nesta perspectiva, é importante que se crie um sentimento de compartilhamento de idéias, para que o aluno preste atenção um ao outro e para que se ajudem mutuamente. Isso poderá criar um ambiente de aprendizagem estimulante e cheio de excitação para avançar na exploração e investigação. Desta maneira, a comunicação adequada faz com que o professor crie motivação no aluno com a nova possibilidade de informação, o que gera inúmeras fontes de informação e pesquisa, fazendo com que o aluno desenvolva uma aprendizagem colaborativa e de troca de experiências e resultados.

Nesta pesquisa, a narrativa é concebida como um objeto de estudo, pois as histórias narradas pelos alunos, em sala de aula, tornaram-se alvo de minhas análises. O envolvimento

dos alunos através das narrativas não se constitui apenas no modo de expressar o que eles já sabem, em um sentido comunicativo, mas sim, expressar um sentido de reconstrução em um exercício de aprender e de se tornar participante ativo das suas próprias aprendizagens.

Desta maneira, entendemos que a narrativa, como uma forma de viabilizar a comunicação e a compreensão das idéias matemáticas e, também, a comunicação entre os alunos envolvidos em tarefas de natureza exploratório-investigativa, referente ao conceito de Função, propicia, conforme Bakhtin (1997), um excedente de visão, pois o diálogo com o outro traz uma nova visão para as narrativas dos alunos. Em outras palavras, quando se tem à "visão do outro" sobre a própria experiência, essa experiência é reelaborada, tomando uma nova forma.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA DA PESQUISA E METODOLOGIA JUNTO AOS SUJEITOS PESQUISADOS

Neste capítulo, apresentamos a Metodologia da Pesquisa e a Metodologia junto aos Sujeitos Pesquisados durante os episódios de ensino[13], realizados para a coleta de dados. Esta pesquisa foi direcionada através da seguinte questão investigativa: **"Quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de Funções?"**

Com base nesta questão investigativa, procuramos investigar o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função abordando tarefas de natureza exploratório-investigativas em uma dinâmica metodológica das investigações matemáticas, na qual o foco está nas narrativas dos alunos como o objeto de estudo. Sendo assim, o objetivo desta pesquisa é: **"Investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas em processos de ensinar e aprender Funções".**

Através da questão investigada, procuramos destacar, nesta dissertação, alguns aspectos metodológicos, como: contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função no Ensino Fundamental, salientar as potencialidades das Investigações Matemáticas como perspectiva metodológica para o ensino da Matemática, auxiliar os professores em suas práticas de sala de aula apresentando experiências envolvendo as narrativas como uma forma de viabilizar a comunicação de idéias matemáticas, destacar as narrativas como um objeto de estudo, e destacar algumas dimensões da dinâmica do trabalho em grupo que podem interferir nas socializações das narrativas dos alunos.

Inicialmente, apresentamos as opções metodológicas e os procedimentos metodológicos utilizados na presente pesquisa e, posteriormente, destacamos as Investigações Matemáticas como uma perspectiva metodológica diferenciada, na qual se ressaltam a importância das tarefas de natureza exploratório-investigativa para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

---

[13] Utiliza-se o termo **"episódios de ensino"** no sentido caracterizado por Moura (1992). "Chamamos assim aqueles momentos em que fica evidente uma situação de conflito que pode levar à aprendizagem do novo conceito" (p. 77). O nosso olhar sobre os episódios de ensino direcionou-se para a qualidade de pensamento presente no processo de apropriação conceitual, procurando identificar as ações que a oportunizam.

3.1. Opção Metodológica de Pesquisa

Tendo como referência a questão investigativa formulada e o objetivo deste estudo, optamos por usar uma abordagem de pesquisa qualitativa de natureza interpretativa, que utiliza as narrativas como objeto de análise para revelar as potencialidades didático-pedagógicas do ensino de Funções. Nesta perspectiva, Bogdan e Biklen (1994), apresentam como sendo as características de uma pesquisa qualitativa:

> a) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; b) os dados recolhidos são na sua essência descritivos; c) os processos merecem um interesse maior do que os resultados ou produtos; d) os dados são, sobretudo, analisados de forma indutiva; e) o ponto de vista dos participantes assume especial importância (BOGDAN e BIKLEN 1994, p. 61).

Para esses autores, o fato de se pretender coletar dados no ambiente natural em que às ações ocorrem, descrever as situações vividas pelos participantes e interpretar os significados que estes lhes atribuem, justifica a realização de uma abordagem qualitativa. Essas características mostram-se adequadas a esta pesquisa, pois a fonte direta dos dados foi uma turma de oitava série e os dados coletados, juntamente com sua interpretação, constituiu o instrumento chave de análise. Finalmente, procuramos inter-relacionar os dados coletados com a literatura, fornecendo citações necessárias para permitir ilustrar e substanciar a apresentação dos resultados.

Uma pesquisa qualitativa possibilita um conhecimento mais profundo da totalidade do contexto, no qual o pesquisador se apropria de compreensões de um conjunto de atitudes e reações dos sujeitos no meio em que estão inseridos. De acordo com Ludke & André (1986), “a investigação qualitativa é rica em dados descritivos, é aberta e flexível e foca a realidade de forma complexa e contextualizada” (p. 18). Desta maneira, tem-se a preocupação de ir além das descrições da realidade do ambiente escolar.

Nesse sentido, Goldenberg (1999) declara não existir regra precisa para a realização de uma pesquisa dessa natureza, nem passos a serem seguidos, e o bom resultado da pesquisa também depende da sensibilidade e intuição do pesquisador. Desta maneira, através da abordagem qualitativa, procuramos encaminhar a pesquisa no sentido do diálogo, da construção e reconstrução dos significados elucidados nas experiências profissionais expressas pelos participantes da pesquisa.

A investigação foi realizada em uma turma, na qual fomos o professor nos três anos anteriores ao início da realização desta pesquisa. Este fato nos levou a pensar que se tratava

também de uma investigação sobre a nossa prática profissional e que a componente reflexiva teria um papel decisivo em todas as fases do trabalho. Nesta perspectiva, Ponte (2002) declara que "a investigação sobre a prática visa resolver problemas profissionais e aumentar o conhecimento relativo a estes problemas, tendo por referência principal, não a comunidade acadêmica, mas a comunidade profissional" (p. 12).

Assumimos a perspectiva interpretativa referente às potencialidades das narrativas no contexto educacional para o professor, ao ensinar, e para o aluno ao aprender, pois "uma perspectiva interpretativa, procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes" (PONTE 1994, p. 7).

Nesta perspectiva, Jaworski (1994) afirma que ocorrem normalmente duas posições em uma investigação do tipo qualitativo-interpretativo.

> Uma é a que leva o investigador a olhar para o que se passa na sala de aula na procura de acontecimentos que mostrem, de alguma forma a teoria descrita. É partir de um sistema teórico e aplicá-lo num conjunto de dados — a chamada investigação dedutiva. A outra leva o investigador a observar, a descrever os acontecimentos da sala de aula e a analisá-los desejando retirar algo que facilite a reflexão que possa conduzir à geração de uma teoria que explique os dados obtidos — a chamada abordagem indutiva (JAWORSKI 1994 apud SARAIVA 2001, p. 72).

Sob o ponto de vista prático, não é muito clara a distinção entre as duas. No trabalho de campo, as perguntas que se fazem, aquilo que se observa, o lugar onde se realiza o trabalho é Função daquilo que o investigador procura. O investigador, à partida, não é uma tábua rasa e possui conhecimentos e opiniões sobre o problema que quer tratar. Sendo assim, em uma pesquisa qualitativa, o pesquisador baseia-se em um paradigma em que a realidade é socialmente construída e volta-se, principalmente, à questão dos significados que as pessoas atribuem aos eventos e objetos em suas ações e interações dentro de um contexto social.

Com essas perspectivas, esta pesquisa está sendo desenvolvida voltada para a prática escolar, pois nossa experiência anterior, enquanto docente, motivou-nos a realizar uma pesquisa voltada para a sala de aula. Os dados foram coletados diretamente da sala de aula, na qual houve interferência do pesquisador, pois naquele ambiente atuamos como professor que direcionou os episódios de ensino. Essa conclusão foi tomada, somente depois de apresentarmos e discutirmos o nosso projeto de pesquisa no Grupo[14] de Formação de

[14] Fiz parte deste grupo, durante todo o período que passamos na cidade de Rio Claro/SP.

Professores[15] na Unesp – Rio Claro /SP. Com esse respaldo, desenvolvemos todos os episódios de ensino, em que fomos o professor responsável pela sua condução.

A experiência vivenciada nessa pesquisa tem me mostrado o quanto esse método de pesquisa nos auxilia na reflexão sobre a prática do professor. A prática que investigamos não é uma prática qualquer, mas sim uma prática, da qual fizemos parte em anos anteriores à realização desta pesquisa, como também da que faremos parte em anos posteriores.

3.2. Contextualizando os Participantes da Pesquisa

Escolhemos uma classe de oitava série, por acreditar na importância em trabalhar de maneira diferenciada o conceito de Função ainda no Ensino Fundamental, ressaltando as principais idéias matemáticas desse conceito.

Essa classe era composta por 27 alunos, sendo 17 meninos e 10 meninas. Apresentamos no Anexo I, as fotos dos oito grupos formados pelos alunos, juntamente com suas características. A escolha dessa classe ocorreu porque já conhecíamos o contexto sócio-cultural desses alunos.

O contato com os alunos dessa turma começou na quinta série e este fator também pode ter influenciado para a colaboração dos alunos nos episódios de ensino. Esse contato, nos episódios de ensino, começou no início do terceiro bimestre do ano letivo de 2005. Desta maneira, estabeleceu-se uma nova relação de proximidade entre pesquisador e alunos, pois, para os alunos, o pesquisador não estava ali com essa função. Para os alunos, a presença do professor passou a ser encarada pelos alunos como se tratasse de mais um de seus professores.

A professora da turma (Solange Teixeira Ramos) é outra personagem fundamental, pois, desde o início dos episódios de ensino, sempre colaborou com o trabalho.

Foto 1: Professora da Turma - Solange Teixeira Ramos

[15] Esse grupo se reúne quinzenalmente, sendo composto por docentes do programa, mestrandos, doutorandos, alunos especiais e professores das redes municipal e estadual. O grupo de Formação de Professores pode ser visitado online por meio do site: www.rc.unesp.br/igce/pgem/gfp

Realizamos com a professora da turma uma entrevista e um questionário, com o intuito de conhecer mais a respeito da pessoa e da professora Solange e, também, de perceber suas concepções a respeito da Matemática, da profissão e da relação com o pesquisador.

Em relação à Matemática, a professora declarou que sempre gostou dessa ciência enquanto aluna no Ensino Fundamental e Médio. No entanto, nunca pensava que seria uma professora de Matemática. Segundo Solange, *"o mundo dá muitas voltas e em uma dessas voltas, resolvi prestar o vestibular para o curso de Licenciatura Plena em Matemática na UNEMAT*[16]*, e minha vida tomou um novo rumo a partir do meu ingresso na universidade."*

Durante sua Graduação, teve muitos sucessos, apesar das enormes dificuldades enfrentadas no decorrer do curso. De acordo com a professora, essas dificuldades são provenientes do fato de o Ensino Superior ser caracterizado de uma maneira tecnicista por parte de alguns professores. Ela concluiu sua licenciatura no ano de 2004 e, no ano de 2005, trabalhou em três escolas, sendo que no período matutino lecionou no Colégio Adventista.

Solange é uma professora que se preocupa com sua qualificação profissional e sua formação continuada, pois concluiu, em 2005, uma especialização voltada à área da Educação. Enquanto professora, se preocupa bastante com a aprendizagem dos seus alunos e declara que *"muitos dos nossos jovens não querem se dar o trabalho de pensar, mas mesmo assim procuro fazer o possível para propiciar a eles um contexto de aprendizagem."*

A professora demonstra interesse pela Resolução de Problemas, pois a Resolução de Problemas é uma abordagem diferenciada para se ensinar Matemática, e que considera em suas aulas, os conteúdos a lecionar, a turma e a evolução dos alunos em termos de aquisição de conhecimentos e competências.

Antes de começar os episódios de ensino, apresentamos a professora as nossas intenções. A primeira impressão que obtivemos da professora foi que haveria grandes problemas, pois aqueles alunos não estavam acostumados a aprender da maneira pela qual estaríamos desenvolvendo a experiência. Nesse encontro, a professora perguntou, *"você vai investigar o quê?"* Nesse momento, refletimos um pouco, mas logo afirmamos que estaríamos apresentando aos alunos tarefas de natureza exploratório-investigativas, envolvendo o conceito de Função e que, através dessas, procuraríamos investigar as narrativas dos alunos. Nesse momento, a professora concordou plenamente em colaborar e contribuir com a pesquisa.

[16] UNEMAT – Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus de Barra do Bugres – MT.

Na tabela a seguir, apresentamos aspectos que contribuíram para aceitação da professora no trabalho de colaboração nos episódios de ensino.

Primeiro Aspecto	A professora e o pesquisador ingressaram e concluíram a Licenciatura em Matemática ao mesmo tempo. Isso demonstra certa aproximação durante o período de Graduação, período em que trabalhos colaborativos são constantes.
Segundo Aspecto	A professora e o pesquisador já tinham uma experiência anterior de trabalho em equipe, pois durante a Graduação, diversos trabalhos foram desenvolvidos entre os dois e todos os trabalhos foram considerados como experiências positivas.
Terceiro Aspecto	Por terem sido formados recentemente, ambos partilhavam de uma visão e de um desejo de desenvolverem um ensino de Matemática de maneira diferenciada e significativa.
Quarto Aspecto	Quando o pesquisador saiu para pleitear uma vaga no mestrado em 2004, convidou a professora, sua amiga, para assumir a sua cadeira no colégio Adventista.

Tabela 2: Aspectos do relacionamento entre o pesquisador e a professora da classe

O trabalho colaborativo entre professora da tumra e professor/pesquisador pode ser analisado, relacionando-o com o processo de tomada de decisões, pois, nos episódios de ensino, houve alguns aspectos que consideramos relevante como, cooperação no trabalho entre a professora e o pesquisador, a professora e o pesquisador tomaram em conjunto todas as decisões a respeito do processo de ensino e aprendizagem, incluindo as discussões de todas as tarefas propostas nos episódios de ensino, discussão sobre o modo como as tarefas exploratório-investigativas seriam apresentadas e trabalhadas em sala e discussão das características mais importantes do ambiente existente nos episódios de ensino.

A professora da turma esteve presente em todos os quarenta episódios de ensino realizados para a coleta de dados. Os alunos encararam a presença da professora Solange como uma outra professora que os ajudavam e que contribuía para o desenvolvimento das suas tarefas.

As tarefas exploratório-investigativas foram discutidas pelo pesquisador e a professora, em momentos anteriores à sua apresentação e também nos reuníamos com a professora da turma sempre depois dos episódios de ensino, com o intuito de procurar verificar, analisar e discutir sobre o desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas. Essas reflexões aconteciam em três momentos distintos: primeiro antes da ação com a preparação dos episódios de ensino e das tarefas exploratório-investigativas, na ação com a reflexão em conjunto, enquanto os alunos trabalhavam em seus respectivos grupos e, depois da ação, nos encontros que aconteciam, geralmente, nos domingos.

3.3. Locus da Pesquisa

Para escolher a Escola onde desenvolveríamos os episódios de ensino, consideramos a aceitabilidade do Colégio Adventista de Barra do Bugres/MT. Este colégio está situado na Rua Getúlio Vargas, Bairro São Raimundo, Barra do Bugres/MT.

Foto 2: Frente/lateral do Colégio Adventista de Barra do Bugres

O estado de conservação dos seus materiais é propicio para o bom andamento das atividades escolares. Esse colégio possui ainda alguns recursos extras que podem ser utilizados em sala de aula como, televisão, vídeo, quadros negros grandes e uma máquina xerocopiadora que auxilia o trabalho de todos os professores que trabalham nesse colégio. A sala de aula da oitava série é bastante confortável, ampla, arejada e luminosa. A estrutura dessa sala comporta todos os alunos da turma, pois suas dimensões são de nove por sete metros.

A decisão de conduzir esta pesquisa no Colégio Adventista dependeu do bom relacionamento que tínhamos com aquele estabelecimento de ensino, e também com a professora da turma. Ao apresentar as principais características do trabalho à diretora do colégio, ela concordou com a realização do projeto na escola, e ainda mostrou um grande interesse em proporcionar condições favoráveis durante todos os episódios de ensino. Tanto os alunos como os seus pais se mostraram bem receptivos ao trabalho. Os pais estavam cientes da realização dos episódios de ensino, pois deram autorização para que seus filhos fossem entrevistados e colaborassem em todas as tarefas realizadas. Apresentamos no Anexo II, o requerimento do ambiente escolar e no Anexo III a autorização dos pais para a utilização dos nomes e das imagens dos alunos (sujeitos da pesquisa).

3.4. Procedimentos de Coleta de Dados nos Episódios de Ensino

Para coletar os dados desta pesquisa, utilizamos várias técnicas próprias da investigação qualitativa, pois os dados a serem coletados possuíam várias origens, dentre elas, as gravações em áudio, entrevistas, diários de bordo do pesquisador, narrativas escritas, questionários, observações diretas e as conversas informais, as quais foram destacadas para a obtenção de dados, com a expectativa de que os mesmos pudessem proporcionar-me a possibilidade de cruzamento de informações.

As **gravações em áudio** foram utilizadas porque a relação de proximidade que possuíamos com os participantes fez com que estas fossem bem aceitas. Esse instrumento foi usado em muitas ocasiões, ou seja, desde o primeiro episódio de ensino. Um aluno notou a presença dos gravadores e logo perguntou: *"Professor, porque é preciso gravar as aulas?"* (Neto - 02/08/2005). Nesse momento, explicamos que as gravações eram uma das formas de coletar os dados para a pesquisa. Inicialmente, eles ficaram acanhados, mas com o passar do tempo, todos os alunos se tranqüilizaram e não se incomodaram mais com a presença dos gravadores.

Gravamos os momentos de introdução, algumas partes das discussões nos grupos durante o desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas, e, principalmente, os momentos de discussão e reflexão final. Durante os episódios de ensino, haviam dois gravadores de áudio, com a intenção de obter informações mais detalhadas sobre as narrativas dos alunos ao trabalharem em seus grupos. Esse tipo de registro foi utilizado, principalmente, nos momentos em que aconteceram as interações, com toda a classe, uma vez que nos outros momentos os gravadores estavam nos grupos.

As **entrevistas** constituem-se um elemento muito importante na coleta de dados, pois, as questões de investigação formuladas requeriam a obtenção de dados que estavam guardados com os alunos. A familiaridade existente entre o pesquisador e os participantes contribuiu para que a entrevista se transformasse em um diálogo.

Utilizamos as entrevistas semi-estruturadas, nas quais a condução da entrevista seguia um guia de perguntas. Segundo TRIVIÑOS (1987), a entrevista é um dos principais meios que o investigador tem para realizar a coleta de dados.

Com a professora da turma, a entrevista incidiu em áreas como, percurso acadêmico e profissional, conhecimento profissional, caracterização da turma e atividades de investigação. Apresentamos, no Anexo IV, o guia da entrevista realizada com a professora da turma no início dos episódios de ensino e, no Anexo V, a entrevista final com a professora da turma

tema com o tema “avaliação do trabalho realizado”. Após a transcrição dessas entrevistas, fizemos nossas considerações, que foram apresentadas à professora da turma. Ela concordou com todas as considerações a seu respeito e declarou que podia citá-la sem constrangimentos.

Com os alunos, as entrevistas foram feitas durante o horário normal dos episódios de ensino, sempre com objetivos referentes ao trabalho desenvolvido por eles em seus grupos. Nessas entrevistas, procuramos saber mais detalhadamente o que eles pensavam a respeito da Matemática e das suas aprendizagens, além de eles comentarem a respeito dos aspectos relativos à experiência que estavam vivenciando nos episódios de ensino.

Utilizamos os **diários de bordo** como um dos instrumentos utilizados para registrar os conhecimentos e as atitudes que os alunos manifestavam durante os episódios de ensino. Escrevemos, nos diários de bordo, os episódios de ensino de modo descritivo, visando obter elementos para analisar as narrativas dos alunos. Sendo assim, o diário de bordo constituiu um dos principais instrumentos de coleta de informações deste estudo.

A respeito dos diários de bordo, Bogdan e Biklen (1994) destacam que neste instrumento o pesquisador reúne as notas que tira das suas observações no campo. Estas notas são “o relato escrito daquilo que o investigador ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha e, refletindo sobre os dados de um estudo qualitativo” (p. 150).

Durante a elaboração dos diários de bordo, o distanciamento foi a nossa maior dificuldade, pois, a partir do momento em que começamos a colocar no papel aquilo que estávamos vendo e experienciando, entramos em contato com nossas próprias idéias e passamos a vê-las com mais distanciamento. Algumas vezes parecia que estávamos sendo bonzinhos demais com os alunos e, outras vezes, parecia que estávamos sendo críticos demais, pois só percebíamos falhas e incoerências no desenrolar dos episódios de ensino.

Tivemos muita dificuldade, também no momento de passar para o texto da dissertação a descrição e a análise das tarefas exploratório-investigativas. Sentimos na própria pele a complexidade do ato de escrever e também, por esse fator, procuraremos pensar em boas propostas de trabalhos, envolvendo as escritas dos alunos, pois o ato de escrever requer o estabelecimento contínuo de conexões e a manipulação de informações.

Para a elaboração de um diário, ressaltamos a importância da disciplina, pois isso auxilia muito ao escrever cada um dos episódios de ensino os acontecimentos mais relevantes. Todas as informações foram escritas, a princípio, com o próprio punho, para posterior digitação no computador. Nessa transcrição, atentamos, também, para os erros ortográficos e de concordância da escrita para dar um grau maior de sentido para a escrita. No computador, criamos uma pasta com o nome diário de bordo para identificar os momentos vividos durante

os episódios de ensino. Encaramos a escrita dos episódios de ensino em um diário, como alguém que se remete a pensar em um documento pessoal íntimo e espontâneo.

Utilizamos as **narrativas escritas** dos alunos para garantir um registro mais elaborado dos desenvolvimentos destes em cada uma das tarefas exploratório-investigativas realizadas. Desta maneira, guardamos essas narrativas escritas, pois elas constituem um conjunto de dados importante e que nos auxiliará na descrição e na análise dos dados.

As narrativas escritas são compostas por um texto escrito dos fatos acontecidos no decorrer das atividades. Estas narrativas foram realizadas pelos grupos de alunos com o objetivo de comunicar por escrito o que cada tarefa tinha contribuído para as suas aprendizagens e também para registrar o desenvolvimento do grupo durante a realização da tarefa. Para fazer as narrativas, os alunos estavam livres para acrescentar e teorizar sobre os episódios de ensino podendo inferir não apenas as conclusões que tiraram da realização de uma tarefa exploratório-investigativa, mas todos os procedimentos utilizados para chegar às conclusões apresentadas.

De acordo com Santos et al. (2002), utilizar as narrativas escritas fortalece o reconhecimento da importância da reflexão sobre o trabalho desenvolvido em uma investigação, pois as narrativas escritas como "produto final escrito é uma situação favorável para que o aluno desenvolva um processo de metacognição" (p. 94).

Desta maneira, os alunos refletem de forma consciente sobre o que fez e porque o fez. Para esses autores, "refletir por escrito sobre as investigações que os alunos fazem é essencial para que possam tomar consciência dos processos seguidos" (SANTOS et al. 2002, p. 95).

Nos episódios de ensino, as narrativas escritas desempenharam um duplo papel. Por um lado, ajudaram os alunos a estruturar e organizar idéias e aprendizagens que realizaram, por outro, puderam constituir um meio do professor recolher informações sobre o nível de aprendizagem referente aos objetivos definidos na tarefa realizada. Na montagem dessas narrativas, os alunos estavam livres para escrever suas opiniões sobre a tarefa exploratório-investigativa desenvolvida e, também, para registrar os fatos acontecidos durante as interações nos grupos. Os alunos poderiam escrever, quais foram os objetivos da tarefa, se estes foram alcançados ou não e quais foram os conteúdos abordados na tarefa, os materiais utilizados, além da conclusão dessa tarefa exploratório-investigativa.

Utilizamos os **questionários** para procurar saber como os alunos estavam percebendo aquela forma de ensino de Matemática. O objetivo dos questionários era de obter uma visão geral do trabalho do ponto de vista dos alunos. O primeiro questionário foi apresentado aos alunos no primeiro encontro e o segundo, no final dos dois meses de trabalho. O questionário

final com a professora da turma ocorreu quando os dados referentes à observação dos episódios de ensino tinham tido uma primeira análise, extraindo informações mais específicas sobre o trabalho realizado. Apresentamos, no Anexo VI, o modelo dos questionários que foram apresentados aos alunos no início e no final dos episódios de ensino.

Utilizamos as **observações diretas** com o intuito de perceber as relações entre os componentes dos grupos, entre os alunos e a professora da turma, como também a participação e a interação dos alunos nos grupos durante os episódios de ensino. A observação se apresenta como um dos principais métodos de investigação, por permitir contato direto do pesquisador com o objeto de estudo. Segundo CHIZZOTTI (1998, p. 90), "a observação direta pode visar uma descrição 'fina' dos componentes de uma situação."

Durante os episódios, nossas intervenções foram consideráveis, pois procuramos assumir uma postura discreta e não-direta. Procuramos formular questões e dar algumas sugestões, mas sem apontar para uma direção obrigatória. Durante o trabalho dos alunos em grupo, adotamos um papel interativo, pois dirigia aos grupos para nos inteirar dos seus trabalhos e para discutir como eles estavam realizando as questões propostas.

3.5. Natureza das Tarefas Exploratório-Investigativas utilizadas nos Episódios de Ensino

Como queríamos investigar as narrativas dos alunos no trabalho com tarefas de natureza exploratório-investigativa, procuramos compreender a natureza dessas tarefas e, ainda, perceber como os alunos se relacionavam com tarefas desta natureza.

Tarefas com natureza diferenciada vêm sendo ressaltadas por muitos educadores matemáticos. As tarefas exploratórias e as investigativas estão contidas neste contexto, pois "a exploração favorece a formulação de conjecturas, etapa fundamental da experiência Matemática que os jovens devem realizar" (APM, 1988, p. 43).

Segundo esse documento, a formulação de conjecturas requer diversas capacidades intelectuais importantes para o desenvolvimento dos alunos, tais como o espírito de observação, a sistematização de resultados, a imaginação e o poder de abstração. Essas capacidades poderão proporcionar aos alunos verdadeiras experiências matemáticas.

Tarefas exploratório-investigativas em aulas de Matemática tratam de tarefas que envolvem problemas do tipo 'aberto', das quais os alunos lançam mão de conjecturas e buscam a validação das mesmas. De acordo com Ponte et al. (1997), tarefas matemáticas são aquelas em que os alunos se envolvem como problemas, investigações, produções escritas,

etc. e elas proporcionam o ponto de partida para a atividade matemática. Para esses autores, as tarefas educacionais que exigem um elevado grau de experimentação, exploração, reflexão e comunicação (com outros alunos e com o professor) constituem uma ferramenta educacional que serve fortemente para aumentar a aprendizagem e o desenvolvimento para além dos limites da disciplina.

Estamos utilizando, nesta pesquisa, a expressão "**tarefas exploratório-investigativas**", pois compreendemos ser complexo saber inicialmente qual o grau de dificuldade que uma tarefa aberta terá para certos grupos de alunos. Estas tarefas foram apresentadas aos alunos como situações iniciais para a exploração e investigação dos alunos. Neste sentido, Ponte (2003) classifica as tarefas abertas pelo grau dificuldade em exploratória ou investigativa, pois as investigações têm um grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta e as tarefas de exploração são fáceis e com estrutura aberta.

Segundo Oliveira et al. (1999), utilizar tarefas investigativas nas aulas de Matemática promove uma nova posição para o professor com reflexões e questionamentos sobre a própria prática. No entanto, sobre tarefas exploratório-investigativas Escher, Miskulin e Silva (2006) concebem as atividades exploratório-investigativas como sendo

> [...] atividades ou problemas nos quais os alunos envolvem-se em processo de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e reelaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema (p. 3).

Segundo Silva, Miskulin e Escher (2006), a mediação do professor "será de fundamental importância na constituição da característica exploratório-investigativa de uma atividade ou um problema de Matemática" (p. 3), pois a natureza de uma tarefa não compreende em si mesma como característica de exploração e investigação. Assim,

> O professor ao mediar o processo educativo por meio de atividades exploratório-investigativas cria situações desafiantes, através dos recortes dessas atividades em vários problemas intermediários que possibilitam aos alunos deslocarem-se muitas vezes da atividade ou problema principal, olhando-o e percebendo-o, sob uma outra perspectiva, possibilitando-lhes a busca de novos caminhos, e a reavaliação constante de suas estratégias e objetivos, enfim, envolvendo-os, cada vez mais, no processo de construção do conhecimento matemático (SILVA, MISKULIN e ESCHER 2006, p. 3).

Nesta pesquisa, as tarefas exploratório-investigativas permitem aos alunos fazer várias tentativas na busca por conjecturas e fazendo-os instigar e provocar o levantamento de algumas hipóteses a respeito de um determinado caminho, em busca da comprovação ou

afirmação da solução encontrada neste caminho. Com isso, estas tarefas poderiam levar os alunos a perceberem certas relações e propriedades sobre o conceito de Função.

Concebemos as tarefas exploratório-investigativas como o ponto de partida para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função. Estas tarefas exploratório-investigativas têm como finalidade propiciar a criação de um ambiente de aprendizagem na sala de aula, no qual as produções das narrativas dos alunos, das discussões em grupos e das reflexões com a turma toda sobre o trabalho realizado, podem transformar o contexto de aprendizagem dos alunos.

Para isso acontecer à escolha, a elaboração, a montagem e a adaptação das tarefas possui fundamental importância. A elaboração das tarefas exploratório-investigativas, elaboradas para realizar nos episódios de ensino, se deu com base nas leituras realizadas na literatura sobre esse assunto e, também, procuramos entender o papel dessas tarefas, e como elas deveriam ser apresentadas.

As tarefas exploratório-investigativas apresentadas abordam o conceito de Função. Escolhemos este conceito por motivos próprios e porque havia de nossa parte, uma imensa vontade de trabalhar esse conceito ainda no Ensino Fundamental. Considero também que esse assunto é pedagogicamente rico à medida que uma tarefa proposta aos alunos poderia ser explorada e representada por diferentes maneiras, como esquemas, gráficos, desenhos, descrição por escrito das etapas, linguagem algébrica, entre outras possibilidades a serem criadas pelos alunos.

As tarefas exploratório-investigativas, realizadas pelos alunos, foram selecionadas e escolhidas por nós, mas discutidas e planejadas em conjunto com a professora da turma em nossos encontros antes das apresentações das tarefas. Foi realizado um total de quarenta episódios de ensino, e estes aconteceram durante os meses de agosto e setembro de 2005. Considero importante manter a seqüência cronológica dos episódios de ensino.

Na tabela a seguir, apresentamos a seqüência cronológica de como foram desenvolvidas as tarefas exploratório-investigativas.

Tarefas Exploratório-Investigativas	**Duração da Tarefa**
Tarefa Exploratório-investigativa I Uma fábula Matemática – A Tartaruga e a Lebre	05 episódios
Tarefa Exploratório-investigativa II Trajeto de Casa a Escola	05 episódios
Tarefa Exploratório-investigativa III A Rivalidade entre Brasil e Argentina	05 episódios
Tarefa Exploratório-investigativa IV Tarefas Lenda de Xadrez	03 episódios
Tarefa Exploratório-investigativa V	03 episódios

Funções vão a Lanchonete	
Tarefa Exploratório-investigativa VI Respeite o seu Número	03 episódios
Tarefa Exploratório-investigativa VII Função Área	03 episódios
Tarefa Exploratório-investigativa VIII Criptografando Mensagens	03 episódios
Tarefa exploratório-investigativa IX Cada grupo possuía uma Tarefa diferente Realização da Olimpíada da Matemática	10 episódios

TABELA 3: Disposição das tarefas exploratório-investigativas realizadas nos episódios de ensino

Essas tarefas objetivaram fazer com que os alunos pudessem vivenciar os vários processos que caracterizam a atividade exploratório-investigativa em Matemática. Sua riqueza residiu na variedade de estratégias e processos de argumentação, validação e comunicação de idéias que emergem durante o trabalho. Neste ambiente, pretendia-se que os alunos desenvolvessem seus pensamentos, estratégias e raciocínios matemáticos por meio das suas narrativas orais e escritas.

Descrevemos e analisamos nos próximos capítulos, as oito tarefas exploratório-investigativas, pois consideramos que cada uma das tarefas propostas possuía características específicas. Não descrevemos e nem analisamos a tarefa exploratório-investigativa IX, pois cada grupo recebeu uma tarefa diferente e, por esse motivo, a dinâmica metodológica foi alterada, e os momentos de discussão aconteceram de maneira geral, não privilegiando uma ou outra tarefa exploratório-investigativa.

3.6. Metodologia Junto aos Sujeitos Pesquisados nos Episódios de Ensino

A metodologia utilizada nos episódios de ensino com os alunos da oitava série, foram as Investigações Matemáticas, como perspectiva metodológica. Ao revisar a literatura Ponte (2003) e Abrantes et al. (1999) a respeito das Investigações Matemáticas, percebemos o quanto elas divergiam da nossa prática enquanto professor de Matemática.

Quando encontramos na literatura as Investigações Matemáticas em sala de aula, sentimos o desejo de experimentar essa perspectiva metodológica nas aulas. Quando detectamos a complexidade desta, apareceram diversas dúvidas e medos, mas estávamos dispostos a enfrentar tais sensações.

De acordo com Ponte (2003), aulas investigativas são aquelas em que os alunos são mobilizados a realizar atividades investigativas em sala de aula. Em uma aula investigativa, os alunos são convidados a se envolver em processos de explorações e justificações das suas

explorações. Para esse autor, as aulas investigativas diferem das aulas tradicionais pela dinâmica de uma aula investigativa e diferentes papéis dos professores e alunos.

Segundo Ponte (2003), “diversos estudos em educação têm mostrado que investigar constitui uma poderosa forma para se construir conhecimento” (p. 10). Essa perspectiva metodológica tem recebido destaque em muitos trabalhos em Educação Matemática.

O referencial teórico das investigações matemáticas em sala de aula se encontra em processo de construção. Ponte (2003) publicou, no Brasil, um primeiro livro envolvendo as Investigações Matemáticas, no qual se discute o papel que as investigações matemáticas podem assumir no ensino e na aprendizagem da Matemática. Para esse autor, as Investigações Matemáticas, em sala de aula, possibilitam ao aluno agir como se fosse um matemático, pois existe uma situação aberta, na qual cabe aos alunos ou a quem investiga o papel de definir as questões, podendo os pontos de chegada não ser os mesmos. Assim, a exploração de todos os caminhos interessantes é um dos objetivos da investigação.

A perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas contribui como atividade de ensino-aprendizagem, pois

> [...] Ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE 2003, p. 23).

Neste Sentido, Santos et al. (2002) declara que para aprender Matemática, deve-se fazer Matemática, pois é importante que os alunos tenham oportunidades para fazê-la. Desta maneira, tarefas de natureza investigativa e exploratória podem possuir relevância, pois os alunos viverão experiências com características semelhantes a dos matemáticos profissionais. Esses autores, ainda afirmam que

> [...] as investigações matemáticas devem ocupar um lugar importante ao nível da experiência matemática dos alunos uma vez que elas proporcionam a vivência de processos característicos da Matemática – formular questões e conjecturas, testar conjecturas e procurar argumentos que demonstrem as conjecturas que resistiram a sucessivos testes – e têm importantes potencialidades educacionais, por exemplo, estimulam o tipo de participação dos alunos que favorece uma aprendizagem significativa, proporcionam pontos de entrada diferentes facilitando o envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões (SANTOS et. al 2002, p. 84).

Os professores de diferentes níveis de ensino têm começado a reconhecer o valor das investigações matemáticas enquanto perspectiva metodológica de ensino e aprendizagem. Isto

pela motivação, curiosidade e interesse que estimulam nos alunos, ao levá-los a questionar, formular conjecturas, testá-las, redefinir estratégias de abordagem, procurando regularidades nos objetos de estudo matemáticos. Para Ponte (2003), ao promover momentos de discussão, as Investigações Matemáticas, criam-se também condições para o desenvolvimento da capacidade de argumentação, além de envolver diferentes processos como, representar, visualizar, classificar, conjecturar, induzir, analisar, sintetizar, abstrair ou provar.

Para a aprendizagem dos alunos Ponte e Matos (1992), salientam as potencialidades das investigações matemáticas, pois estas contribuem para o desenvolvimento das capacidades e contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem. Assim,

> As atividades de investigação podem ser importantes atividades educativas. São bastante úteis no desenvolvimento e consolidação de conceitos específicos e de idéias matemáticas. Relacionam-se com processos de raciocínio importantes. Podem permitir uma visão mais ampla da Matemática, muito mais próxima da verdadeira prática do matemático (PONTE e MATOS 1992, p. 253).

Segundo Goldenberg (1999), uma das vantagens das Investigações Matemáticas, em sala de aula, é porque estas "motivam os alunos, e ainda, desenvolvem capacidades que contribuem para um conhecimento mais amplo de conceitos e facilitam a aprendizagem" (p. 37).

Nesta perspectiva, Cunha (1998) afirma que as investigações motivam os alunos, e os ajudam a desenvolver capacidades de ordem superior como raciocínio e perspicácia, além de contribuir significativamente para que os alunos entendam a Matemática como uma ciência em evolução e construção. Para Segurado (1997) as atividades de investigação desenvolvem nos alunos um espírito investigativo, de uma maior autonomia no trabalho e a valorização e reconhecimento das interações nos grupos, além de potenciar o desenvolvimento da capacidade de reflexão dos alunos sobre a sua própria experiência matemática.

Com base nestes teóricos, compreendemos que desenvolver o ensino de Matemática nessa perspectiva metodológica ainda é um grande desafio, assim como deve ser para os alunos a realização de atividades investigativas, pois estas entram em conflito com as tradições pedagógicas, que se encontram, hoje, nas escolas em geral. Consideramos desafio, pois essa perspectiva metodológica subentende romper uma tradição, à qual são submetidos professores e alunos. De acordo com Ponte (2003), um dos aspectos dessa tradição é que o professor sabe ou deveria saber as respostas das tarefas ou problemas propostos e qual o melhor caminho para chegar a elas.

Nessa mesma linha teórica, no Brasil, tem-se começado a realizar pesquisas e estudos relacionando as investigações matemáticas em diversos contextos e níveis. Realizou-se, na UNICAMP, em julho de 2006, o primeiro Seminário de Histórias e Investigação Matemáticas de/em Aulas de Matemática, organizado pelo Grupo de Sábado (GdS)[17], cuja principal intenção era promover este encontro para compartilhar com outros grupos experiências e produções de histórias e investigações em aulas de Matemática.

Nesse seminário, Escher, Miskulin e Silva (2006) publicaram um artigo relacionando as tarefas exploratório-investigativas com softwares computacionais. Para esses pesquisadores, a utilização de atividades investigativas, propicia um ambiente, no qual os alunos podem trabalhar os conceitos matemáticos por meio das atividades solicitadas, buscando maneiras de solução destas, testando hipóteses e conjecturas e verificando-as com o auxílio do software.

Para a coleta de dados desta pesquisa, desenvolvemos os episódios de ensino através da perspectiva metodológica das investigações matemáticas. Esta perspectiva merece especial atenção, pois os papéis e as Funções do professores são diferentes das outras maneiras de conceber o ensino da Matemática. Sendo assim, é necessário considerar alguns fatores como, as condições de trabalho e a dinâmica das escolas na qual o professor está inserido.

Segundo Abrantes et al. (1999), existem alguns desafios que as atividades de investigação colocam aos professores. Para esse pesquisador, a relação dos professores com as atividades de investigação, a integração no currículo, a construção, adaptação e seleção de tarefas de investigação, a condução das aulas e a avaliação dos alunos são os principais desafios encontrados pelos professores. Desta maneira, utilizar essa perspectiva metodológica no ensino de Matemática, apesar de ser uma perspectiva curricular diferenciada, coloca sérios desafios ao professor, pois requer do professor muito preparo. Para esses autores, ensinar Matemática, nessa perspectiva metodológica, é trabalhar com o imprevisível dos alunos.

Ponte (2003) afirma que a realização de uma atividade investigativa acontece em três momentos distintos, em que em cada momento, o professor possui diferentes papéis.

Na **introdução,** o papel do professor é importante para dar o arranque da atividade, na qual o professor procura envolver os alunos no trabalho, propondo-lhes a realização da tarefa, e também porque, em muitos casos, os alunos não estão familiarizados com a natureza destas

[17] O Grupo de Sábado (GdS) da FE/Unicamp surgiu em 1999 e congrega professores de matemática de escolas públicas e particulares da região de Campinas interessados em refletir, ler, investigar e escrever sobre a prática docente de matemática nas escolas, tendo como colaboradores acadêmicos da universidade (professores, mestrandos e doutorandos da FE/Unicamp) interessados em investigar o processo de formação contínua e de desenvolvimento profissional dos participantes. O GdS publicou, além de vários artigos, três livros envolvendo experiências e histórias de aulas de Matemática.

tarefas. Para Ponte et al. (1998), é necessário que a atitude investigativa seja manifestada consistentemente pelo professor, neste momento, para que essa atitude influencie e desperte nos alunos a curiosidade e o querer explorar e investigar as questões propostas.

No **desenvolvimento,** o professor possui o papel de orientador, pois deve ficar atento ao desenvolvimento dos alunos para apoiá-los no sentido de ajudá-los a ultrapassar certos bloqueios ou a tornar mais rica suas investigações. De acordo com Ponte et al. (1998), o apoio prestado pelo professor, neste tipo de atividades, deve ser mais questionador do que explicador, pois é vulgar surgirem questões não rotineiras que suscitam, nos alunos, certa insegurança e que, por vezes, os leva a desistir facilmente. A criação deste ambiente de aprendizagem exige que o professor seja capaz de orientar o aluno sem, contudo, lhe dar respostas.

A esse respeito, Ponte et al. (1998) afirmam que as sugestões do professor devem ser eficazes, mas não devem deixar o aluno com a impressão que não foi ele que respondeu à questão. As melhores são as sugestões que questionam os alunos e não as que lhes respondem diretamente às questões. Para esses autores, existe um perigo nessas sugestões, pois algumas podem retirar a parte mais relevante de uma investigação matemática, que, na visão desse autor, é a de descobrir uma estratégia adequada, não devendo restar ao aluno apenas a atividade secundária de fazer alguns cálculos.

Nos **momentos de discussão final**, o professor possui a função de moderador, procurando trazer à atenção da turma os aspectos mais destacados do trabalho desenvolvido, além de estimular os alunos a questionarem as asserções dos outros grupos e, até mesmo, das suas argumentações. Estes momentos são importantes em atividades de investigação com toda a turma, pois os alunos apresentam os caminhos e os resultados das suas explorações e investigações. Nesses momentos, o professor tem oportunidade de clarificar idéias de modo a esclarecer eventuais dúvidas. Neste sentido, Cockcroft (1982) declara que, sem a realização dos momentos de discussão e reflexão sobre a atividade desenvolvida, o sentido da investigação pode-se perder.

Os **momentos de discussão e reflexão** são importantes para o confronto das idéias e estratégias adotadas pelos alunos, pois as hipóteses e as justificativas que os diferentes alunos ou grupos de alunos constroem, precisam ser validadas e esses momentos são propícios para isso. A esse respeito, Santos et al (2002) ressaltam a importância da realização dos momentos de discussão e reflexão, pois realizar explorações e investigações e não refletir sobre elas é perder uma das suas grandes potencialidades. O confronto de resultados e processos constituirá um enriquecimento da própria atividade e ajudará os alunos a compreenderem

melhor o significado de uma investigação matemática, além de possibilitar o desenvolvimento de uma cultura voltada para a argumentação em sala de aula.

Oliveira (1998) também destaca a importância dos momentos de discussão, pois, nestes, o professor promove e coordena a interação entre os vários grupos. Fonseca (2000) complementa essas idéias declarando que os momentos de discussão e apresentação das explorações feitas em grupo permitem a apresentação e a explicação de idéias matemáticas, a formulação de novas conjecturas, a justificação de conjecturas e a discussão de aspectos pouco discutidos nos grupos.

Nos episódios de ensino desta pesquisa, a classe estava dividida em pequenos grupos, nos quais, todas as tarefas exploratório-investigativas foram desenvolvidas. Durante os momentos de discussão, foi pedido para os alunos explicarem seus raciocínios e suas descobertas através das narrativas escritas e também das apresentações orais, pois os momentos de reflexão dos alunos a respeito dos seus trabalhos possuem relevância.

3.7. Dinâmica dos Episódios de Ensino Realizados

A dinâmica dos episódios de ensino foi fundamentada em Ponte (2003). Acreditamos que a dinâmica da perspectiva metodológica adotada possuia um caráter inovador. Ela se caracteriza pela preocupação que o professor possui em “criar situações de aprendizagem estimulantes, desafiando os alunos a pensar, apoiando-os no seu trabalho e, favorecendo a divergência e diversificação dos percursos de aprendizagem” (p, 166).

Para esse autor, essa dinâmica procura envolver os alunos em uma atividade próxima da atividade do matemático. Outros aspectos referentes à dinâmica das aulas investigativas são destacados por Tudella (1999). Para esse pesquisador, a preparação de episódios de ensino investigativos constitui uma fase importante, pois, é, neste momento que o professor seleciona, adapta ou elabora uma tarefa. Para que a tarefa proposta realmente desencadeie explorações e investigações por parte dos alunos é preciso escolher situações potencialmente ricas e formular questões suficientemente abertas e interessantes, de forma a estimularem o pensamento matemático dos alunos.

Nos episódios de ensino realizados junto aos alunos, todas as tarefas propostas foram organizadas, preparadas e discutidas entre o pesquisador e a professora da turma. Fiz isso, porque foi necessário investir bastante na preparação dessas aulas, pois a variedade de processos, nos quais os alunos podem se envolver, bem como o seu grau de complexidade, e

até de imprevisibilidade, exigem do professor uma preparação que vai além da tarefa que ele propõe aos alunos.

Durante a introdução, a dinâmica utilizada tem algumas exigências que podem influenciar decisivamente no sucesso do trabalho, pois a apresentação da tarefa proposta aos alunos pode ser feita de diversos modos. De acordo com Tudella (1999), o modo misto é o modo propício de dinâmica nessa fase. Este modo é constituído pela distribuição das questões por escrito, complementado por uma apresentação oral para toda a turma. O papel da apresentação oral é para clarificar a tarefa explicitando o tipo de trabalho que se quer desenvolver com as investigações e também para criar um ambiente favorável ao desenvolvimento do trabalho dos alunos. De acordo com ele, a apresentação oral pode ser constituída pela leitura em grande grupo.

Durante o desenvolvimento, pretende-se desenvolver, nos alunos, atitudes investigativas. Tudella (1999) declara que deve, por isso, haver cuidado para que a aula se centre realmente na atividade dos alunos, nas suas idéias e nas suas explorações, pois

> [...] num ambiente de uma aula com investigações, deve privilegiar-se o desenvolvimento de atitudes questionadoras, a observação e análise de situações, a formulação de conjecturas, a procura de explicações e de argumentações, onde a criatividade e o desenvolvimento de idéias próprias têm um papel muito importante (TUDELLA, 1999, p. 90).

Diversas etapas fundamentais compreendem o desenvolvimento de uma tarefa exploratório-investigativa. Primeiramente, os alunos tentam compreender a situação proposta, organizando os dados e formulando suas questões. Em seguida, eles fazem conjecturas, procuram testá-las, e, em alguns casos, demonstrá-las. No caso dos alunos mostrarem dificuldades em organizar os dados e em formular questões, o professor deve apoiá-los se estas dificuldades forem determinantes para o prosseguimento da investigação.

Sendo assim, o professor, para levar os alunos a descobrirem o que têm a fazer, deve colocar-lhes questões mais ou menos indiretas, consoante o seu grau de familiaridade com este tipo de tarefas. Pode, por exemplo, colocar questões relativas a tarefas que eles já fizeram, dizer para analisarem atentamente um conjunto de dados já obtidos, sugerir que organizem esses mesmos dados de outra maneira.

Nesse ambiente de aprendizagem, convém relatar ainda as interações existentes entre professor - aluno e aluno – aluno, pois essas interações assumem extrema importância. Segundo Tudella (1999), durante a atividade dos alunos, o estímulo ao confronto de opiniões é essencial para apurar significados e determinar caminhos a seguir, pois os alunos

apresentam, com freqüência, divergências de opiniões e solicitam o auxílio do professor para decidir quem está com a razão.

Este momento constitui uma boa oportunidade para o professor incentivar os alunos a explicitar e argumentar a favor de suas argumentações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e, por isso, deve estar preparado para reagir, dando perspectiva ao desenvolvimento, nos alunos, de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. Ao longo de toda esta fase, o professor deve ter uma atitude questionadora perante as solicitações de que é alvo.

A esse respeito, Tudella (1999) declara que o professor pode dar informações pertinentes, como forma de comentários mais informativos e problematizadores. Além disso, o professor pode aproveitar os erros cometidos pelos alunos para instigá-los a encontrar um caminho correto. Algumas vezes, o aluno também pode seguir por caminhos que o professor nunca tinha pensado e que levam ao aparecimento de resultados inesperados. Assim, o professor precisa estar atento a essas descobertas e, disponível para perceber e dar continuidade a esses caminhos.

Segundo Tudella (1999), os momentos de discussão e reflexão em aulas, na perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas são relevantes, pois

> [...] nesta fase os alunos serão confrontados com hipóteses, estratégias e justificações diferentes das que tinham clarificarem idéias, se sistematizarem algumas conclusões e se validarem resultados. Por outro lado, este momento permite que os alunos estabeleçam conexões entre este tipo de trabalho e outros conhecimentos pessoais sobre a aprendizagem da disciplina. Muitas vezes, durante a fase de discussão pensada. É também esta altura a adequada para se, são descobertas novas relações e formuladas novas conjecturas (TUDELLA 1999, p. 91).

Nesta perspectiva, “realizar uma atividade de investigação e não refletir sobre ela é perder uma das suas grandes potencialidades” (p. 90). Esse autor complementa citando Bishop e Goffree (1986), pois, de acordo com esses, “a aprendizagem não resulta simplesmente da atividade, mas sim da reflexão sobre a atividade” (BISHOP & GOFFREE 1986 apud TUDELLA 1999, p. 90).

Apresentamos, na tabela a seguir, a dinâmica metodológica utilizada nos episódios desenvolvidos com os alunos dessa turma.

Primeiro Momento **Apresentação da Tarefa**	Neste momento, apresentávamos a tarefa exploratório-investigativa aos alunos. Tínhamos o cuidado de esclarecer e orientar os alunos na realização das explorações e investigações. Distribuíamos as folhas contendo a situação proposta, acompanhada por algumas indicações relacionadas ao desenvolvimento das explorações e investigações.
	Neste momento, os alunos foram divididos em pequenos grupos e

Segundo Momento **Desenvolvimento das Tarefas**	estavam livres para explorarem e investigarem a tarefa apresentada anteriormente. Os alunos tinham o suporte dos professores que os estimulavam a prosseguirem nas suas elaborações de conjecturas e justificações.
Terceiro Momento **Elaboração das Narrativas Escritas**	No final do desenvolvimento das tarefas, os alunos possuíam um tempo para redigirem suas narrativas escritas sobre os seus desenvolvimentos na tarefa explorada.
Quarto Momento **Socialização e Reflexão das Tarefas**	Este momento era dedicado exclusivamente para a apresentação das tarefas por alguns dos grupos com intuito de retomar as idéias principais levantadas durante o desenvolvimento da tarefa. Além de propiciar a socialização entre o grupo que apresentava e os outros grupos que estavam para promover discussões, negociações, validações e refutações de resultados. Os momentos de discussão foram realizados após o termino de cada tarefa e estes momentos tiveram como objetivo a discussão de diversas situações com base nas tarefas exploratório-investigativas realizadas.

Tabela 4: Dinâmica dos episódios de ensino realizados

As tarefas exploratório-investigativas foram realizadas conforme esta dinâmica metodológica. No entanto, ressaltamos a importância que teve a preparação dos episódios de ensino, para obtermos indícios de prevenção sobre o que poderia acontecer nos episódios de ensino.

A preparação de episódios de ensino desta natureza, geralmente, envolve duas etapas que consideramos serem distintas. Primeiramente, foi feita a seleção das propostas, e para isso, selecionamos as propostas de trabalho que iríamos levar para a sala de acordo com as faixas etárias dos alunos, com desenvolvimento em termos de conhecimentos matemáticos e com o contexto em que as tarefas exploratório-investigativas apareciam nos episódios de ensino. A segunda etapa, diz respeito à planificação do episódio de ensino.

Para Ponte et al. (1998), a dinâmica das aulas com as Investigações Matemáticas é diferente dos demais formatos de aula, pois

> Numa aula dedicada à realização de investigações, o trabalho em pequeno grupo e em grande grupo (turma) emerge como algo natural e complementar. O trabalho em pequeno grupo incentiva uma comunicação entre alunos e promove uma melhor explicitação das conjecturas e testes a realizar. O trabalho em grande grupo impõe uma formalização maior de raciocínio e incita alunos a uma postura mais madura na discussão com o professor e os colegas (PONTE et al. 1998, p. 12).

A classe foi dividida em oito grupos, e cada grupo possuía um líder. O líder era o aluno responsável por entregar as narrativas escritas e, também, por conduzir a realização da tarefa exploratório-investigativa no grupo com os demais alunos, no entanto, todos os componentes possuíam a responsabilidade de auxiliarem na elaboração das narrativas escritas também. Os líderes foram escolhidos pela professora da turma e pelo pesquisador.

Escolhemos oito alunos que tinham características que, a nosso ver, conduziriam positivamente o trabalho dos grupos. Decidimos trabalhar em grupo porque queríamos experimentar estratégias diferenciadas de trabalho em sala de aula e, também, porque o trabalho em grupo é considerado o modo mais adequado para trabalhar com investigações matemáticas.

No primeiro contato que tivemos com os alunos, formamos os pequenos grupos para o desenvolvimento dos episódios. Queríamos, com o trabalho em grupo, criar um ambiente propício à troca de idéias, apresentação de argumentos e confronto de opiniões, aspectos importantes quando se pretende que eles se envolvam em atividade investigativa.

Os 27 alunos foram divididos em oito grupos, sendo três grupos de quatro alunos e cinco grupos de três alunos. Optamos por constituir os grupos de três ou quatro alunos, e esta opção assenta-se no pressuposto de que o trabalho colaborativo, além de ser formativo aos alunos (no sentido de aprenderem a trabalhar com o outro), favorece, também, a discussão e a construção conjunta do conhecimento matemático.

Segundo Tudella (1999), é muito habitual, neste tipo de atividade, organizar os alunos em pequenos grupos. A organização mais adequada dos alunos nessas aulas é o trabalho em grupo, pois este pode proporcionar ou criar um ambiente propício à troca de idéias, confronto de opiniões e argumentos, em que o receio de "arriscar" conjecturas é menor. Conceber a realização de atividades de investigação em grande grupo envolvendo toda a classe, faz com que o professor solicite a contribuição e a participação de todos os alunos, criando assim um ambiente de trabalho diferente dos demais. Nessa organização, o papel do professor é ativo, pois este precisa coordenar as diferentes interações que acontecem no desenrolar da própria investigação, mas esta opção poderá ser útil para introduzir os alunos neste tipo de trabalho.

Nesta abordagem, era nosso intuito ouvir os alunos, para orientá-los em suas dúvidas, colocando novas questões para ajudar no desenvolviemnto dos seus raciocínios e das suas compreensões sobre as idéias discutidas. Procuramos não responder diretamente às questões dos alunos, pois consideramos que o papel do professor é o de orientar os alunos na condução das suas descobertas e permitir que eles cheguem às conclusões por eles próprios.

Nesse sentido, Santos et al (2002) afirma que

> [...] o trabalho em pequenos grupos é a opção-base adotada para a exploração de tarefas de investigação com os alunos uma vez que se trata de situações em que é importante explorar diferentes caminhos sendo particularmente relevante à discussão de pontos de vista diferentes e a cooperação (p. 98).

Centralizamos o trabalho nos grupos por entender que estes aparecem como uma

condição essencial para o desenvolvimento mental do aluno e também para que ele se sinta ativo no processo de ensino e aprendizagem. Com a dinâmica do trabalho em grupo, os alunos se sentem mais livres para arriscar as suas opiniões e avançar com as suas descobertas, apresentando seus pensamentos, além dos alunos encontrarem espaços para explicar e verificar se o seu raciocínio está certo ou errado.

No intuito de propiciar a comunicação entre os elementos dos grupos, solicitamos aos grupos uma única narrativa escrita. Apresentamos, no Anexo IX, um guia geral para as narrativas escritas. As narrativas escritas serviriam para os alunos apresentarem, por escrito, o registro das conjecturas formuladas, o desenvolvimento das questões e suas conclusões.

Nos **momentos de discussão final**, proporcionávamos discussões coletivas, nas quais cada grupo foi convidado a expor suas estratégias, argumentar em defesa de suas conjecturas, comparando resultados para consolidar seus entendimentos referentes ao conceito de Função. Antes desses momentos, solicitávamos aos grupos que fizessem os registros detalhados de todo o processo de exploração realizado em cada tarefa exploratório-investigativa, incluindo as tentativas frustradas, os erros, as várias conjecturas levantadas, os testes para validar, ou não, as conjecturas.

O sistema de avaliação utilizado nos episódios de ensino teve como base dois aspectos: primeiramente, as narrativas escritas, realizadas pelos alunos, referente às discussões, e, também, a participação dos grupos nos episódios de ensino. Desta maneira, os alunos realizaram todas as tarefas em grupo, mas nem todas as narrativas escritas foram feitas coletivamente, pois algumas foram escritas unicamente pelos líderes dos grupos. Ao longo dos episódios de ensino, avaliamos as narrativas escritas segundo uma metodologia de comparação e ordenação, em que privilegiamos as interações diretas com os alunos. Optamos também por utilizar as narrativas individuais como forma de apresentar o trabalho realizado em algumas tarefas, pois pretendíamos que alguns alunos, principalmente aqueles mais tímidos, também tivessem a oportunidade de apresentar suas opiniões.

A narrativa oral foi outra forma de comunicação experimentada nos episódios de ensino, nos quais os alunos participavam desta em forma de apresentação, relatando como sucedeu o desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas em seus grupos. Nessas apresentações, os alunos contavam histórias do que havia acontecido e, no final das apresentações de cada grupo, comentávamos os trabalhos e refletíamos com toda a turma os tópicos mais relevantes.

Para Brocardo (2001), além das atividades investigativas serem realizadas através da dinâmica de trabalho em pequeno grupo, estas devem ser complementadas com explorações

das questões conduzidas no grupo-turma. De acordo com essa autora, a exploração de uma tarefa no grupo-turma facilita para que os alunos expliquem as suas idéias relativamente ao processo de investigar, permitindo clarificar a maneira como realizou uma conjectura e as provas das conjecturas através de sucessivos testes. Nesta perspectiva, Cockcroft (1982) declara que a discussão, no final da atividade, é uma atividade privilegiada do trabalho com toda a classe. Para esse autor, o termo discussão,

> [...] significa mais do que algumas perguntas e respostas que surgem no decorrer de uma exposição pelo professor. **A aptidão para 'dizer o que se entende e entender o que se diz'** deveria ser um dos resultados de um bom ensino da Matemática. Esta aptidão desenvolve-se como resultado das oportunidades para falar acerca da Matemática, para explicar e discutir os resultados obtidos e para testar hipóteses. Além disso, os diferentes tópicos que existem na Matemática devem ser apresentados e desenvolvidos de maneira que sejam vistos como inter-relacionados. Os alunos necessitam ajuda explícita para estabelecer estas relações, e isso só pode ser feito por meio de discussões relativamente prolongadas; mesmo os alunos com alto sucesso em Matemática não o fazem por si sós. (COCKCROFT 1982, apud APM 1988, p. 48, grifo nosso).

Desta maneira, entendemos que os momentos de discussões com toda a classe é uma boa oportunidade para sintetizar, criticar e resumir estratégias, idéias ou conjecturas que sejam o produto do trabalho coletivo dos alunos.

Segundo Varandas (2000), a proposta de uma sessão pública de apresentação dos trabalhos surge como resposta ao sentimento que gera, no trabalho dos alunos, a realização de atividades investigativas. Sendo assim, as narrativas orais foram realizadas nos momentos de desenvolvimentos da tarefa, mas também em uma sessão pública de apresentação do trabalho desenvolvido pelo grupo para toda a turma.

Nesta pesquisa, o propósito desta apresentação dos grupos para toda a turma foi o de deixar os alunos sentirem que o trabalho realizado por eles era valorizado tanto pelo professor pesquisador como também para criar uma nova oportunidade deles voltarem a pensar nas tarefas exploratório-investigativas realizadas. Durante as apresentações dos grupos, a maior preocupação foi de promover interações entre os diferentes grupos. Nessas apresentações, os alunos tinham a liberdade para falar e para expor os seus trabalhos da maneira que achassem melhor. No final dos episódios, todos os grupos apresentaram, pelo menos uma vez, os teus trabalhos à turma. Apresentamos, no Anexo VII e Anexo VIII, os agradecimentos para a professora da turma, para os alunos e uma ficha avaliativa apresentada aos alunos no final dos episódios de ensino.

Proporcionar aos alunos momentos como os destacados anteriormente, é, a nosso ver, importante, pois os alunos possuem oportunidades para pensar sobre o seu pensar, e até

refletir sobre a atividade realizada. Sendo assim, "os alunos, ao compararem diversas abordagens e ao refletirem sobre a natureza da tarefa, compreendem melhor o significado de uma investigação matemática" (TUDELLA 1999, p. 90). Nestes momentos de reflexão, as narrativas possuem relevância, pois, será por meio delas que os alunos poderão registrar e comunicar seus posicionamentos, além das suas considerações sobre o trabalho realizado.

3.8. Descrição e Análise dos Dados

No presente item, apresentamos as intenções de como será realizado o capítulo de descrição e análise dos dados[18]. A descrição e a análise dos dados serão apresentadas com base em todos os instrumentos de coleta de dados mencionados anteriormente. Na análise das tarefas exploratório-investigativas, ressaltaremos a maneira como aconteceram às narrativas dos alunos durante a apresentação, desenvolvimento, discussão e reflexão das tarefas.

Apresentamos, nossa análise interpretativa, na qual evidenciaremos as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas e seus aspectos metodológicos, provenientes do contexto investigado à luz das teorias escolhidas.

Na descrição dos dados, especificaremos, em que consiste cada uma das tarefas exploratório-investigativas, seus objetivos, sua dinâmica metodológica, e os momentos de desenvolvimento e discussão de cada uma das oito tarefas exploratório-investigativas realizadas nos episódios de ensino.

Fundamentaremos a análise dos dados, considerando o objetivo desta pesquisa que procurou **investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no processo de ensinar e aprender Funções**. As categorias de análise que direcionará nossa interpretação dos dados, objetivando delinear respostas à questão investigada **"quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de Funções?"** As categorias que surgiram, na presente pesquisa a partir da descrição e da análise interpretativa das narrativas dos alunos podem ser classificadas em duas perspectivas: "perspectiva conceitual" e "perspectiva metodológica".

A **perspectiva conceitual** é caracterizada pela: "relação dos alunos com os conceitos matemáticos" – relaciona-se com a compreensão dos alunos sobre o conceito de Função e sobre outros conceitos matemáticos que emergiram nesse contexto de pesquisa. "relação dos alunos com os processos reflexivos/meta-reflexivos" – relaciona-se à reflexão do aluno sobre

[18] Os dados serão descritos e analisados nos próximos capítulos IV e V desta pesquisa.

os seus próprios processos de aprendizagem (meta-reflexão); "relação dos alunos com as Investigações Matemáticas e as tarefas exploratório-investigativas" – relaciona-se às potencialidades e limites das tarefas exploratório-investigativas no contexto das Investigações Matemáticas na constituição dos conhecimentos matemáticos dos alunos; "relação dos alunos com as narrativas" – relaciona-se aos aspectos das narrativas orais e escritas nos diferentes momentos da realização das tarefas exploratório-investigativas.

A **perspectiva metodológica** é caracterizada pela: "mediação do professor" – relaciona-se às experiências docentes do professor/pesquisador ao conduzir o processo investigativo no decorrer da pesquisa. Além disso, considera-se que a mediação do professor/pesquisador pode possibilitar um contexto propício à exploração e constituição do conceito de Função; "dimensão colaborativa" – relaciona-se às interações entre o pesquisador e a professora da classe escolhida e a maneira como ambos vivenciaram a experiência com as narrativas, no contexto das Investigações Matemáticas, na presente pesquisa; "dimensão interativa" – relaciona-se às interlocuções e compartilhamento de idéias, conceitos matemáticos e experiências vividas pelos alunos em grupos na composição das narrativas; "relação professor/alunos" – relaciona-se às interlocuções do professor/pesquisador e os alunos no desenvolvimento desta pesquisa.

3.9. Considerações e Reflexões Metodológicas

Ao participar da disciplina de "Metodologia da Pesquisa Qualitativa"[19], ouvimos falar muito em Ética da Pesquisa. Desta maneira, inquietávamos no que fazer para garantir a ética desta pesquisa. Somente depois de muito pensar a respeito dessa questão, passamos a entender que ético seria se houvesse a comunicação do que realmente viria a acontecer no decorrer da pesquisa. Para isso, apresentamos as narrativas dos alunos durante a realização das tarefas exploratório-investigativas, realizadas nos episódios de ensino de uma maneira real, as discussões de fato ocorridas e as reflexões com as quais verdadeiramente nos envolvemos.

Durante a produção desta dissertação, nos convencemos de que mais coerente e natural seria organizar as informações e análises e apresentá-las em forma de experiência no sentido destacado por Larrosa (2001; 2002). De acordo com Larrosa (2001), a experiência é algo forte que toma conta de nós. Para esse autor, "a experiência não é o que acontece, mas o que nos acontece, ou o que no toca" (LARROSA, 2001, p.27). Desta maneira, este estudo

[19] Essa disciplina foi realizada no primeiro semestre de 2005, oferecida pela Professora Dra. Maria Viggiane Aparecida Bicudo no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp – Campus "Julio Mesquita Filho" em Rio Claro/SP.

aventura-se para investigar as narrativas como possibilidades didático-pedagógicas, valendo-se dessa idéia de experiência.

Ser pesquisador como professor em sala de aula é ter a determinação e coragem (opção) de construir um olhar crítico sobre a própria prática, registrando-a e discutindo-a (reflexão) com outros professores no sentido de superação e de tomadas de decisões. Sendo assim, é preciso que o professor valorize criticamente seu trabalho e o conhecimento produzido ao longo deste tempo de trabalho, pois "o processo de compreensão e melhoria de seu ensino deve começar pela reflexão sobre a sua própria experiência" (ZEICHNER 1993: 17).

Nosso real desejo é poder transmitir aos leitores a possibilidade de construírem imagens, de sentirem emoções e de aprenderem, ao ler esta pesquisa envolvendo esta experiência com as potencialidades das narrativas em um contexto de Investigações Matemáticas.

Ressaltamos, ainda, que o trabalho realizado em sala de aula não foi simplesmente um registro em forma de história de aula, no qual os episódios de ensino resultariam em uma dissertação de mestrado. Acreditamos que as histórias dos episódios de ensino e a reflexão coletiva desencadeada pela análise crítica das narrativas dos alunos apresentam-se possibilidades didático-pedagógicas para o trabalho dos professores e também contribuindo significativamente para a Educação Matemática.

CAPÍTULO IV

DESCRIÇÃO DAS TAREFAS EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVAS

Apresentamos, neste capítulo, a descrição das oito tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas nos episódios de ensino durante a coleta de dados. Ressaltamos as narrativas realizadas pelos alunos na dinâmica metodológica das Investigações Matemáticas em sala de aula, destacando os momentos de apresentação, desenvolvimento, discussão e reflexão. Especificamos ainda, em que consiste cada uma das tarefas, evidenciando os seus objetivos e as interlocuções entre os participantes dos episódios de ensino.

4.1. Reencontro do Pesquisador com os Alunos

Era uma manhã fria de terça-feira em que me preparei para o meu primeiro episódio de ensino com os sujeitos desta pesquisa. Cheguei ao Colégio Adventista às oito horas da manhã, no entanto, o episódio de ensino, o qual seria "reapresentado", começaria apenas às oito horas e quarenta minutos. Fui até a sala dos professores e permaneci ali por alguns minutos com grande ansiedade e expectativa, pois estávamos prestes a reencontrar aqueles alunos. Meu sentimento maior, nestes momentos que antecediam o reencontro, era o de motivação para fazer um trabalho de qualidade com aqueles alunos, durante os dois meses que pretendia passar ali com eles.

Assim que o sinal tocou, a professora Solange veio ao meu encontro e, após uma breve conversa com ela, ia, finalmente, entrar na sala e reencontrar aqueles alunos. Quando entrei na sala de aula, acompanhado pela professora da turma, um grande alvoroço (promovido por alguns alunos) tomou conta daquele recinto. Entendi essa manifestação pelo fato deles terem sido meus alunos na quinta, sexta e sétima séries do Ensino Fundamental.

A professora Solange Ramos chamou a atenção geral da turma e me "reapresentou" dizendo que, a partir daquele momento, eu seria novamente o professor deles. Neste momento, fiquei um tanto emocionado, ao mesmo tempo, preocupado, a princípio, pois, questionava o que falar no primeiro momento? Como despertar nos alunos o desejo de contribuir com minha pesquisa de Mestrado? Apesar destas inquietações, estava e me mostrava animadíssimo para os alunos.

Comecei meu discurso agradecendo a professora da turma pela liberdade e pela presteza que ela estava tendo comigo e, a partir daí, voltei o meu olhar e a minha fala aos alunos. Nesses instantes, relembrei alguns bons momentos que passamos juntos durante os três anos em que nos relacionamos enquanto professor e alunos. Inclui os momentos vividos em sala de aula e, também, as atividades realizadas em horários fora de aula como, jogos de futebol, festinhas de aniversários, churrascos, confraternizações e viagens realizadas no período em que convivemos juntos entre os anos de 2002 a 2004.

Neste primeiro episódio de ensino realizado com os alunos, conversei sobre como seria desenvolvido o trabalho ao longo dos dois meses e coloquei em pauta a algumas questões voltadas ao tempo em que havia passado fora da escola. Relatei meu processo de ingresso no Mestrado, o tempo em que vivi em Rio Claro/SP, fazendo as disciplinas do Mestrado e alguns fatos marcantes acontecidos comigo na cidade de Rio Claro, além de deixar uma mensagem de ânimo para eles naquele momento.

Apresentei também aos alunos os caminhos que precisam ser percorridos até chegar a um Mestrado e, nesse momento, um aluno se empolgou, afirmando: *"Se Deus quiser irei fazer um Mestrado e quem sabe também um Doutorado, mas não em Matemática"* (Neto - 02/08/2005). Destaquei, também, alguns aspectos pertinentes à minha pesquisa, tais como: título, objetivos, problemas, relevância, justificativas e apresentamos ainda a importância de aprender a trabalhar em grupo. Desta maneira, entendíamos que não existia razão para omitirmos informações referentes às nossas intenções.

Neste momento, o que me alegrou foi a total aceitabilidade dos alunos, referente às suas participações em nossa pesquisa. Expliquei aos alunos que minha pretensão era criar um ambiente de trabalho motivador, que contribuísse para o desenvolvimento das capacidades cognitivas e comunicativas deles em Matemática.

Antes de acabar este primeiro episódio, entreguei um questionário[20] aos alunos objetivando coletar algumas informações importantes para minha pesquisa. O sinal bateu, e, assim foi-se o meu reencontro com aqueles alunos. Percebi, também, neste primeiro episódio de ensino, que existia um bom relacionamento entre a professora da turma e os alunos. Segundo a professora da turma, o comportamento desta classe, era, em todos os sentidos, muito bom, pois a professora sempre notava um bom relacionamento entre os alunos.

Descrevemos a seguir as oito tarefas exploratório-investigativas realizadas.

[20] Este questionário encontra-se no Anexo VI.

4.2. Primeira Tarefa Exploratório-Investigativa: Uma Fábula Matemática

Esta tarefa exploratório-investigativa apresentada aos alunos objetivou propiciar um cenário educativo, no qual os alunos pudessem **compreender a dependência entre duas grandezas**[21], pois esta é **uma das idéias fundamentais à noção Função.** Apresentamos, a seguir, as maneiras como os alunos receberam essa tarefa exploratório-investigativa pelo professor-pesquisador.

Uma Fábula Matemática – A Tartaruga e a Lebre

Muito silenciosa, a tartaruga escuta o macaco dizer: A lebre é o animal mais veloz da mata Lá em baixo, o tatu responde: Mas a tartaruga é o animal mais resistente. Ele anda muito mais. A onça pintada que estava sentada à sombra ouviu a conversa e disse: Vamos ver quem é melhor Aquele que chegar primeiro ao lago é o campeão da mata. Será a lebre ou a tartaruga? Todos os bichos ficaram animados. Até a serpente, que estava enrolada no galho, levantou-se a cabeça. A lebre saiu na frente correndo. A tartaruga andava bem devagar. Sem pressa, arrastava o casco e parecia que não ia chegar. No meio do caminho, a lebre ficou cansada. Já estava tão longe da tartaruga deitou-se à sombra de uma árvore e dormiu um sono profundo. E foi assim que a tartaruga, com o seu passo miúdo e lento passou à frente da lebre. Chegou-se primeiro ao lago e foi beber água. (La Fontaine).

Explorando a Fábula

Com certeza, você já ouviu essa história na sua vida, pois essa Fábula de La Fontaine é umas das histórias mais conhecidas que existem. Mas alguma vez pensastes aproveitar a Matemática para explorar? Essa é a sua tarefa a partir de agora. • Comece a sua exploração colocando informalmente as idéias que você entendeu dessa fábula. • Baseados na temática da fábula tentem inventar a sua própria história usando toda a tua criatividade e a tua imaginação. • Considerando o tempo e a distância como as grandezas envolvidas nessa fábula, como tu achas que poderia ser representada essa situação num gráfico. • Pesquise sobre esses dois animais citados nessa fábula. • Depois de elaborarem suas histórias, consegues representar estas histórias também graficamente. Para cada situação, não esqueça de apresentar juntamente com o texto da sua nova história a sua representação gráfica.

Começamos o episódio de ensino distribuindo uma folha contendo essa fábula e as questões de explorações, lendo-as em voz alta. Fizemos isso a fim de explicitar alguns termos contidos no enunciado que possivelmente, os alunos desconhecessem. Declaramos que eles teriam que registrar por escrito todas as explorações e resoluções, pois gostaríamos que eles elaborassem narrativas escritas a respeito dos seus entendimentos sobre as situações exploradas no final de cada tarefa exploratório-investigativa. Apresentamos no Anexo X, um modelo de uma narrativa escrita que auxiliou os alunos nas organizações de suas idéias.

Declaramos que eles poderiam, nesta situação, representar o trajeto da situação inicial de muitas maneiras. No entanto, depois da apresentação, percebemos que alguns alunos se sentiam bloqueados. Então, resolvemos auxiliá-los, problematizando e discutindo alguns dos possíveis trajetos da lebre e da tartaruga. Nesse momento fizemos uma representação gráfica de uma possível história, mas declaramos que o trajeto representado era apenas um dos muitos que existiam e, que, a partir daí, seriam os alunos os responsáveis pelo desenvolvimento de seus próprios trajetos.

[21] Essas grandezas são consideradas nesta tarefa como tempo e distância.

A dinâmica metodológica desenvolvida foi constituída por expor os alunos, pela primeira vez, à realização de uma tarefa exploratório-investigativa, para explorar matematicamente a fábula da tartaruga e da lebre, elaborando uma nova história em forma de redação Matemática, para representar graficamente a fábula da tartaruga e da lebre. Além de extrair dessas histórias relações de dependências entre as grandezas relacionadas nessa situação, para refletir sobre as lições morais proporcionadas por está fábula, pois está possui uma rica abordagem reflexiva.

Uma das evidencias importantes durante a realização desta tarefa exploratório-investigativa aconteceu através da solicitação aos alunos para que elaborassem suas próprias histórias, baseadas em suas crenças, relacionadas à fábula da tartaruga e da lebre. Além de desenvolverem suas criatividades, neste processo de elaboração de suas próprias histórias, os alunos teriam a oportunidade de utilizar a Matemática para visualizar a representação gráfica das suas histórias.

Apresentamos a seguir, a história de dois dos oito grupos, juntamente com suas respectivas representações. Segue-se, no Anexo XI, a história dos outros seis grupos, juntamente com suas representações.

Uma Fábula Matemática - A Tartaruga e a Lebre

Um dia de muita bagunça na selva estava tendo uma olimpíada maluca. Que animais fortes competiam com os mais fracos, animais rápidos com os lentos e animais valentes com os mais moles. Mas o que todos queriam ver era as corridas, principalmente o da lebre a mais veloz dos animais contra a mais lenta a tartaruga. A distância era de aproximadamente 5 km e a prova era muito difícil e longa. Todos apostaram na lebre. O coelho deu a largada e a lebre saiu na frente, mas a estrada era de areia e precisava de muita resistência. Depois de 4 km a lebre parou para descansar, pois estava com o pé doendo, ficou parada por alguns minutos, nisso a resistente tartaruga a passou, quando a lebre foi perceber que estava disputando uma corrida, a tartaruga estava a alguns passos da linha de chegada. Então a lebre se apressou de tal forma que conseguiu chegar empatada com a tartaruga, ou seja, as duas chegaram juntinhas para não ter briga. **Grupo Os Orientais**

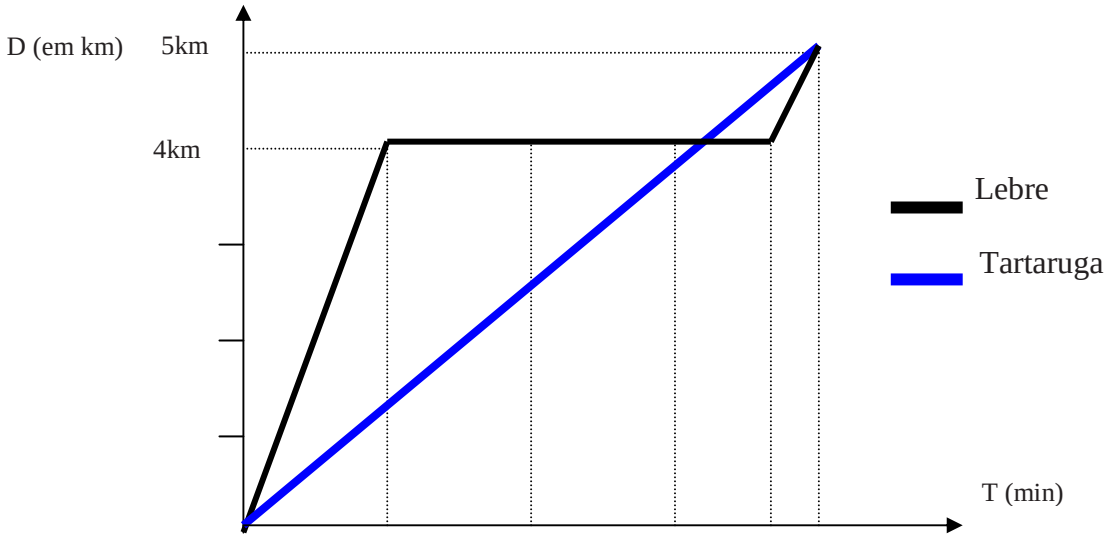


Figura 1: Reprodução da representação gráfica da história reformulada (Grupo 2 – Os Orientais)

O gavião e o Pica – Pau

Numa fazenda havia duas aves, o gavião e o pica-pau. Eles tinham raiva um do outro, porque a dona deles cuidava mais do pica-pau do que do gavião. Certo dia o gavião fez uma proposta, ele disse ao pica-pau. "Vamos apostar uma corrida?", mas com uma condição, quem perder terá que ir embora da fazenda.Quando amanheceu o gavião foi chamar o pica-pau para começar a disputa. Era mais ou menos 07:00 horas da manhã. O gavião falou logo que era de 15 km o percurso e disse se o pica–pau quisesse podia desistir. A corrida começou e o gavião saiu na frente e o pica – pau partiu voando de arvore em árvore. No meio do caminho o gavião foi atingido na asa e parou em um galho para se recuperar. O pica-pau o alcançou e não parou para ajudar e assim continuou. O gavião viu que estava perdendo e foi voando rapidamente, só que não teve jeito o pica – pau chegou primeiro. Assim o pica pau teve que ir embora da fazenda, e o pica-pau ficou feliz com a sua dona. Então o gavião e o pica-pau aprenderam uma grande lição. **Grupo Star Girls**

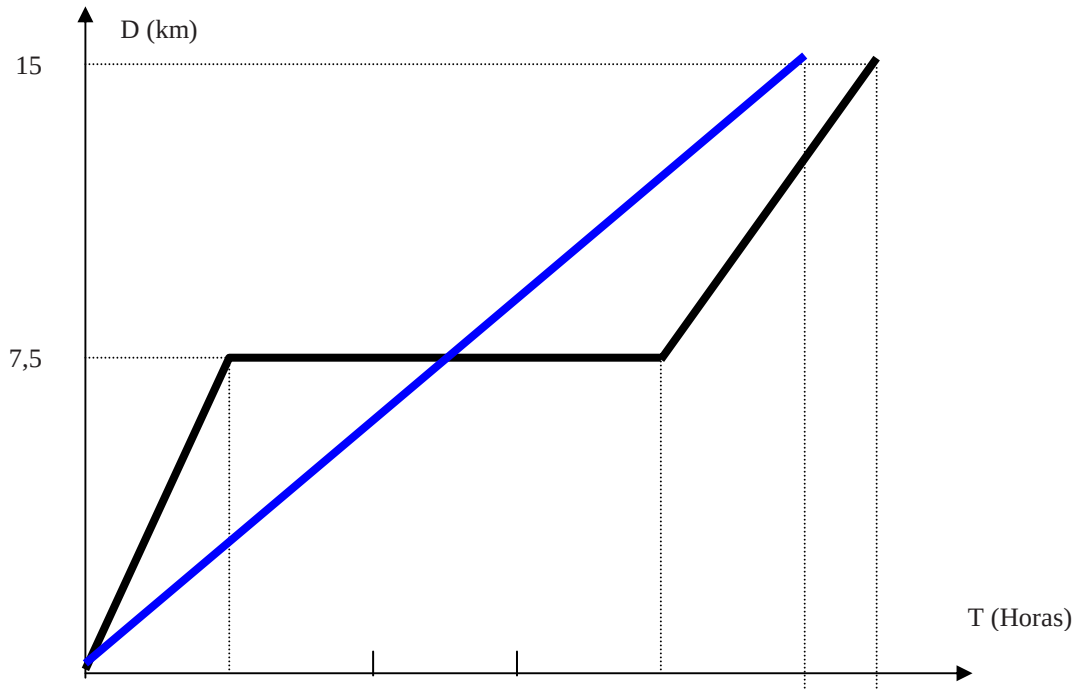


Figura 2: Reprodução da representação gráfica da história reformulada (Grupo 7 – Star Girls)

Estas representações gráficas estavam registradas nas narrativas escritas desses grupos. Através das histórias e das respectivas representações, percebemos que elas ilustravam a dependência que a variável distância possuía em relação a variável tempo.

4.2.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa Uma Fábula Matemática

Durante o desenvolvimento desta tarefa exploratório-investigativa, o nosso trabalho enquanto professor consistiu em percorrer todos os grupos de trabalho, discutindo, problematizando, refletindo e auxiliando os grupos em algumas dúvidas que surgissem no decorrer do trabalho. Entendemos que esse papel foi importante, pois reconhecemos a importância de levar os alunos a refletir sobre as estratégias que tinham desenvolvido, acompanhando-as do "por quê?", "do quando?" e "do como?"

Procuramos apoiar o trabalho dos alunos nos grupos, com a intenção de ser mais um explorador da situação, promovendo discussões a respeito da tarefa. Ressaltamos que sempre dávamos espaço para os alunos criarem suas próprias situações, investigando livremente essas situações com o intuito de desenvolver suas autonomias.

Durante os momentos de discussão e apresentação dos grupos para a classe aconteceu uma grande voluntariedade dos grupos, pois todos os oito grupos queriam apresentar suas histórias para a classe toda. Nesse momento, o professor[22] resolveu adotar um critério[23] de escolha, de modo que somente dois[24] grupos apresentassem em cada tarefa exploratório-investigativa.

O grupo "Os Orientais"[25] foi o primeiro a se dirigir à frente da sala e, assim, a aluna Bianca[26] começou a ler a história formulada pelo seu grupo (Quadro 2). Nesse momento, o professor interrompeu sua leitura para perguntá-la: *"vocês conseguem, em vez de ler a história, contá-la sem olhar na narrativa escrita?"*[27] Assim, Bianca respondeu*: "não sei não, professor, posso tentar!"*. Além disso, o professor perguntou: *"pois bem, então tente, porque assim será bem mais interessante."*

Nesse momento, Bianca concordou com a sugestão do professor e começou a contar à história que foi formulada pelo seu grupo. Em alguns momentos, Neto a auxiliava em pequenos detalhes que havia passado despercebida. No final da apresentação da história deste grupo, os alunos apresentaram sua interpretação gráfica da história.

Antes de começar a interpretação, Neto olhou para a sala e disse: *"professor, e se a representação não estiver correta?"* O professor, então, disse: *"se não estiver correta, seus colegas, dos outros grupos te ajudam, ok?"* Nesse momento, Bianca disse*: "então, pode começar professor?"* Nesse momento, o professor chamou a atenção geral de todos os grupos ao dizer: *"pessoal, a apresentação é do grupo deles e queremos que todos vocês participem, dando idéias e investigando os processos utilizados pelo grupo."*

Neto foi o escolhido pelo grupo para fazer a representação no quadro negro. Ele, primeiramente, pegou o giz para registrar duas linhas no quadro, uma horizontal e outra vertical. Até então, ele não disse nada, apenas colocou a letra (t) no eixo horizontal (a qual

---

[22] Neste capítulo, em todos os momentos que estivermos fazendo o uso do termo "professor" se refere à pessoa do pesquisador, pois, é este quem narra ás histórias acontecidas nos episódios de ensino.
[23] Tivemos que adotar esse critério, porque o tempo não permitia a apresentação dos oito grupos.
[24] Os grupos foram escolhidos de maneira aleatória, sendo os escolhidos para apresentar as suas histórias com suas representações os grupos "Os Orientais" e "Star Girls".
[25] Esse grupo é constituído pelos alunos Neto (Líder do grupo e na maioria das vezes porta-voz do grupo), Bianca e Danilo Hiroshi.
[26] Os nomes utilizados para denominar os sujeitos da pesquisa são verídicos, pois, obtive a permissão dos pais, por escrito em forma de documento, para a utilização nos nomes e das imagens dos alunos nesta pesquisa.
[27] Durante as interações, denoto entre aspas e em itálico os diálogos entre professor e alunos.

representa a grandeza tempo) e a letra (d) no eixo vertical (a qual representa a grandeza distância). Nesse momento, Igor interrompeu a interpretação do Neto, dizendo: *"oh, Neto, não é pra você resolver a história, é pra você explicar pra gente, rapaz"*. Neto retrucou, respondendo: *"eu acho que você está com ciúmes porque o seu grupo não foi escolhido, mas, tudo bem, explicarei melhor. Tudo o que eu fiz, foi colocar as duas grandezas nos dois eixos."*

Nesse momento, o professor problematizou a situação, perguntando: *"Neto, porque as grandezas foram representadas assim?"* Bianca interveio, dizendo: *"ah, professor, é porque o tempo é a variável independente."* Igor novamente problematizou a situação ao perguntar: *"Como assim, Bianca?"* Neto antecipou-se, dizendo: *"é que aqui temos duas grandezas, uma é dependente e a outra é independente. Nesse caso a grandeza tempo é a independente."* Igor, não satisfeito com a explicação do Neto, novamente perguntou: *"mas, por quê?"* Neto logo respondeu: *"porque o tempo não depende da distância, pois o tempo sempre vai passando e a distância nem sempre, é por isso que o tempo não depende."*

Atento a essas discussões, o professor disse: *"muito bem, então quer dizer que toda grandeza que estiver representada no eixo horizontal será a grandeza independente?"* Bianca concordou com a pergunta do professor ao dizer: *"Exatamente"*. Neto, então, perguntou: *"mas será que eu poderia representar a grandeza tempo no eixo vertical?"* Igor comentou a pergunta do Neto dizendo: *"depende"*. O professor disse: *"como assim, depende?"* Neto concordou com o Igor e disse: *"poder eu posso, mas eu preciso dizer que a grandeza independente está no eixo vertical, se eu falar tudo bem."*

Durante estas interlocuções, o professor lançou a questão: *"Será que sua consideração está correta, Neto?"* Bianca interveio, dizendo: *"professor, eu acho que não pode não"*. Assim, o professor falou: *"e, agora, o que faremos? Temos duas posições divergentes, quem será que está com a razão?"* Igor, logo se posicionou, dizendo: *"eu também acho que não pode não, porque, sei lá."*

Um clima de tensão inundou a explicação do aluno Neto, porque eles estavam discutindo idéias referentes à questão de dependência entre duas grandezas e, na verdade, a representação gráfica da história tinha ficado em segundo plano. Por essa razão, o professor achou melhor interferir e se posicionar, esclarecendo algumas dúvidas. O professor se dirigiu à frente da sala e, apontando para a representação que o aluno Neto havia tinha feito no quadro negro, afirmou.

Na figura abaixo, apresentamos a representação feita pelo aluno Neto.

Figura 3: Reprodução da representação das grandezas na lousa do aluno Neto

O professor disse: *"Pessoal, em Matemática, nos deparamos com muitas situações semelhantes a está. Para sanar algumas destas divergências, existem, na Matemática, algumas convenções. Essas convenções são importantes porque definem alguns critérios de dualidades que existem como é exatamente esse caso."* Neto argumentou, dizendo: *"mas eu posso, se eu quiser fazer o contrário, né, professor?"* O professor respondeu, dizendo: *"Penso que se você quiser representar a grandeza dependente no eixo horizontal você pode, mas precisa justificar"*. Igor, disse*: "acho melhor seguirmos as convenções, para facilitar a nossa vida, por exemplo, se, na Matemática, uma coisa está em função de uma outra coisa, a primeira coisa será representada no eixo vertical porque ela será a grandeza dependente."*

Depois desta discussão, o aluno Neto disse: *"mas, professor, eu continuo achando que eu posso representar a distância no eixo horizontal e o tempo no eixo vertical."* O professor disse: *"muito bem, então, Neto, é você quem está afirmando isso, mas temos que ter em mente uma coisa, que quando afirmamos algo que alguém não acredita totalmente é preciso provar para essa pessoa acreditar. Então, vamos lá, você precisa provar o seu ponto de vista."* Neto continuou o diálogo, dizendo*: "mas como é que eu consigo provar essa situação, professor?"* O professor problematizou, dizendo: *"meu jovem, a situação é sua e é você quem precisa apresentar argumentos, mas pense comigo: na situação original, você representa a grandeza tempo no eixo horizontal e a grandeza distância no eixo vertical e aí faz a representação, não é mesmo? E então, o que tens que fazer agora?"* Neto, disse: *"eu posso inverter as formas de representação, em que represento a grandeza "**t**" no eixo vertical e a grandeza "**d**" no eixo horizontal."* O professor perguntou: *"mas como ficaria essa representação Neto?"*.

Nesse momento, Bianca entrou em cena, dizendo: *"boa pergunta professor, é hora de começarmos a investigar isso"*. Assim, Neto fez algumas considerações relacionadas a

algumas leis físicas[28] ao falar: *"acabamos de estudar, em Física, a fórmula da velocidade média e nessa fórmula tem essas duas grandezas, distância e tempo"*. O professor, então, disse: *"pois bem, qual é a relação dessas duas grandezas nessa fórmula?"*. Bianca explica dizendo: *"na fórmula da velocidade média é só pegar a distância e dividir pelo tempo"*. O professor problematizou, dizendo: *"mas o que essa fórmula pode te ajudar a fazer?"* Neto, então, respondeu: *"eu posso atribuir valores para ver como é que fica o gráfico, como por exemplo, eu vou fazer uma representação de uma possível história, mas com alguns valores para o tempo e para a distância. Mas irei considerar a história original, na qual a tartaruga chega à frente da lebre."*

O professor continuou a perguntar: *"mas, quais são os valores?"* Neto, então, respondeu a pergunta, apresentando e registrando os valores das duas grandezas (tempo e distância) no quadro negro e ainda disse*: "para o tempo, de uma em uma hora e, para a distância de mil em mil metros"*. Nesse momento, Neto pegou o giz e começou a fazer a representação no quadro negro sem dizer nada. A turma toda estava atenta para ver onde ele iria chegar.

Um clima de expectativa se fez presente na sala. Neto foi, então, registrando e fazendo cálculos e ninguém falava mais nada. Nesse momento, a postura do professor foi deixá-lo fazer os cálculos para depois ver quais seriam suas argumentações, pois, de acordo com o professor, esse seria o procedimento mais adequado para essa situação.

Depois de uns dois minutos, Neto se virou para a turma e começou a apresentar e justificar o seu gráfico, dizendo: *"eu acho que está correto, e se estiver certo, consegui provar a minha questão, né, professor?"* O professor, então declarou: *"vamos ver, tudo indica que sim"*.

Na figura abaixo, apresentamos a representação feita pelo aluno Neto no quadro negro.

[28] Nesse momento, o aluno Neto faz referência à professora Solange que se encontra no fundo da sala. Tal referência aconteceu, porque essa professora ministra a disciplina de Física para esses alunos.

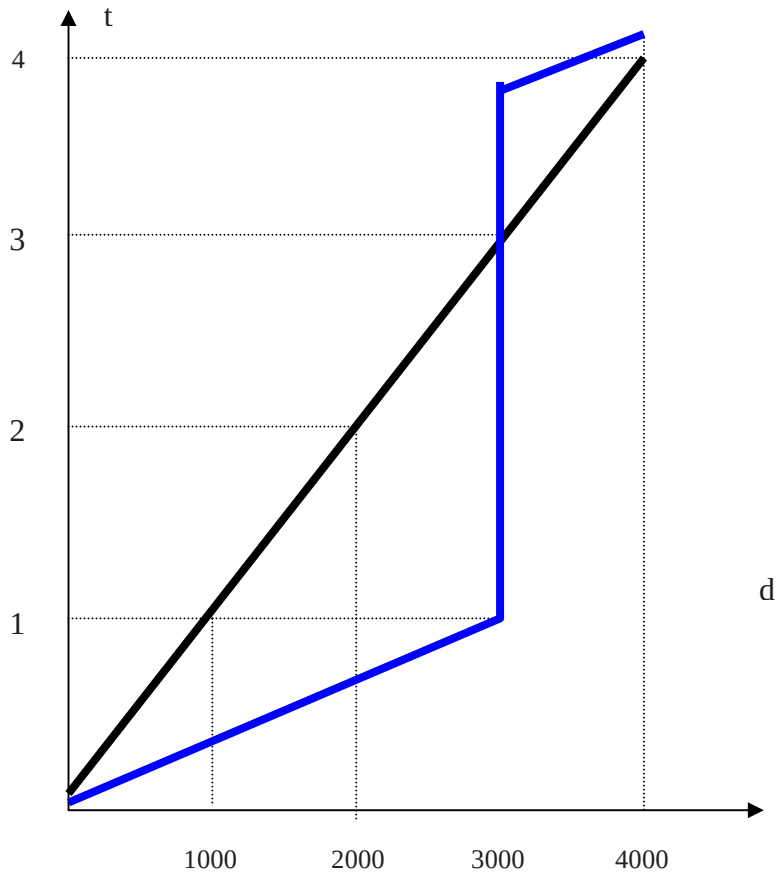


Figura 4: Reprodução da representação na lousa de uma história do aluno Neto

Neto começou argumentando a respeito da sua representação, dizendo: *"tudo o que eu fiz foi inverter o gráfico que fizemos no nosso grupo, em vez de representar o tempo no eixo horizontal representei no eixo vertical e aí fui registrando os valores com base na fórmula na velocidade que aprendi lá em Física"*. O professor, então falou: *"Neto, apresenta em detalhes essa situação, explicando para turma os trajetos da tartaruga e da lebre"*. Neto disse: *"ah, sim, a tartaruga possui uma velocidade constante e, é por isso, que é uma reta, e a lebre possui velocidade variável"*. Igor, um outro aluno que possui uma boa amizade[29] com o aluno Neto, disse: *"explica melhor isso aí, Neto"*. Neto olhou para sua representação no quadro negro e, logo disse: *"a tartaruga vai sempre numa velocidade de um quilômetro por hora, já a lebre, faz três quilômetros em uma hora, mas depois fica parada, sem velocidade durante quase três horas, dormindo, aí ela acorda e corre novamente os mil metros em poucos minutos, mas mesmo assim perde pra tartaruga"*. O professor apresentou então o seu parecer dizendo: *"muito bem, Neto, eu estou satisfeito com a sua resposta, teremos que ver se todos os alunos estão"*.

[29] Amizade esta que é notável e que é proveniente dos oito anos que estudam juntos, das festinhas na casa do Neto e dos encontros para jogar futebol.

Nesse momento, muitos alunos se posicionaram concordando com a representação feita pelo aluno Neto. Danilo Maciel foi outro aluno que se manifestou ao dizer: *"Eu concordo, né, professor?"* A respeito dessa pergunta do Danilo Maciel, no primeiro episódio de ensino, conversamos com os alunos sobre as suas posturas e seus papéis em uma aula com natureza investigativa. Neste contexto, nem sempre os alunos têm que aceitar como verdade absoluta o que o professor diz, mas que eles deveriam sempre se posicionar concordando ou não em algumas idéias.

Queremos destacar que, com o passar dos episódios, esse aluno, que possui uma característica super extrovertida, em todos os lugares e momentos que me via, sempre perguntava em tom de brincadeira: *"concorda, ou não concorda?"* Consideramos esse fato como apenas uma brincadeira sadia, e, sendo assim, sempre mantivemos um bom relacionamento com esse aluno.

Após a pergunta do Danilo Maciel, o professor retomou a palavra perguntando: *"Neto, o que você e seu grupo concluíram disso tudo o que fizestes?"* Neto declarou*: "eu acho que existe muita coisa legal, mas que, muitas vezes, temos que decorar fórmulas e aí, essas coisas legais ficam chatas. Nessa situação, por exemplo, eu achei que poderia inverter os lugares de representação dos dois eixos e vi que isso é possível, mas tenho que sempre afirmar quem está em função de quem."*

Ao ouvir essa declaração, empolgada e emocionada do aluno Neto, percebemos o quanto é importante ensinar Matemática considerando as vozes dos alunos, pois eles afirmam em suas narrativas os seus sentimentos e entendimentos a respeito daquilo que acreditam. Nos momentos de discussão, os conhecimentos prévios que o aluno Neto e a aluna Bianca possuíam sobre a fórmula da velocidade, os ajudaram a fazer à representação desta situação.

Antes da efetiva representação gráfica da história pelo grupo, aconteceram muitas interações entre os alunos e entre o professor e os alunos. Logo após as considerações feitas pelo aluno Neto, o professor retomou a discussão inicial ao dizer: *"mas agora, meus jovens, desenvolvam a representação gráfica das histórias formuladas pelo grupo."*

Com isso, Bianca logo reapresentou alguns dados da sua história ao dizer: *"muito bem, na nossa história, temos alguns dados que são importantes, tais como: distância do percurso que é igual a 5 km, a lebre saiu na frente e parou depois de 4 km, e a tartaruga passou a lebre nos 4 km, mas as duas chegaram juntas, pois a lebre se recuperou."* Nesse momento, o aluno Danilo Hiroshi registrou no gráfico os valores da distância.

Nessa situação, um fato interessante foi que o grupo "Os Orientais" não estipulou valores numéricos para a grandeza tempo, mas isso foi percebido pelo aluno Danilo Maciel ao

dizer: *"cadê os valores do tempo?"* Nesse momento, Neto olhou para Bianca e disse: *"acho que esquecemos dos valores do tempo."* Bianca, então disse: *"que nada Neto, na fábula inicial não tínhamos valores nem pra distância e nem pro tempo e entendemos, acho que não precisa."* Logo após, Danilo Hiroshi pegou o giz e fez uma linha no quadro negro e disse: *"esta representa a lebre, e depois faz uma linha que representa a tartaruga, mas as linhas se tocam em um mesmo ponto, porque a tartaruga e a lebre chegam em um mesmo instante."*

Apresentamos, a seguir, a representação gráfica da história feita pelo aluno Danilo Hiroshi do grupo "Os Orientais" no quadro negro.

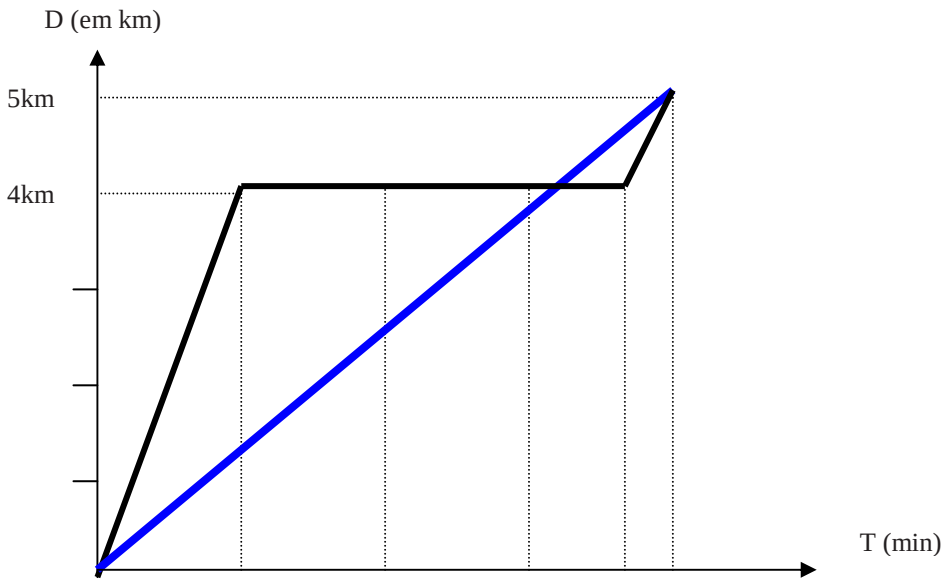


Figura 5: Reprodução da representação na lousa da história formulada pelo Grupo (Os Orientais)

Ao concluir essa representação, o aluno Danilo Hiroshi disse: *"está correto, professor?"* O professor respondeu, dizendo: *"meu jovem, você precisa convencer a turma, não a mim, por mim, tudo bem."* Com isso, Neto, o líder do grupo, brincou com a turma ao perguntar: *"e aí galera, alguma dúvida?"* Nesse momento, Letícia disse: *"Nenhuma dúvida, Neto, também concordo com vocês, acho que está correto"*. O professor ainda problematizou a situação perguntando: *"Grupo, não entendi uma coisa, porque a linha que representa a tartaruga é uma reta? E expliquem também para mim, observando no gráfico, o trajeto da lebre"*. Neto respondeu, dizendo: *"a velocidade da tartaruga é sempre a mesma e a lebre sai em alta velocidade, mas para no quilômetro 4 e aí fica parado um tempão, assim que percebe que a tartaruga passou e que é uma disputa ela acelera ainda mais e aí chegam empatadas."* O professor disse: *"só uma última curiosidade, porque que elas chegaram empatadas, porque que vocês escolheram assim?"* Bianca respondeu, dizendo: *"achamos melhor que a corrida terminasse empatada, para não ter briga entre elas e para não ficar uma triste e outra*

alegre." Assim, o professor encerrou a interação declarando: *"Ok, vocês merecem uma salva de palmas."*

Depois de finalizada essa interação, os alunos do grupo "Os Orientais" se dirigem aos seus lugares e, em seguida, o professor convidou um outro grupo[30] para fazer também a sua apresentação oral. As meninas do grupo "Star Girls" se levantaram e foram para frente da classe. Antes das meninas começarem sua apresentação, o professor disse: *"Pessoal, vamos ficar atentos, para entendermos essa história também."*

As quatro meninas estavam na frente se organizando para fazer a apresentação decidindo, por fim, que a aluna Priscila seria quem iria apresentar a história. Com isso, Priscila disse: *"bom, a nossa história, é parecida com a da tartaruga e da lebre, mas não é bem a mesma."* Raíssa, acrescentou dizendo: *"inventamos uma história também envolvendo animais, mas na nossa história era um gavião e um pica-pau."* O professor, perguntou: *"porque vocês resolveram trocar de animais?"* Priscila, respondeu: *"ah, professor, todo mundo estava fazendo sobre a tartaruga e a lebre e aí achamos melhor fazer de duas aves, para ficar mais interessante."*

Depois desta declaração da aluna Priscila, Neto, que acabara de se apresentar, fez uma forte consideração sobre a história que estava sendo apresentada, ao dizer: *"Priscila, não adianta nada ficar interessante a história, com um monte de coisas e fazer errado a representação, eu quero só ver a representação de vocês"*. Nesse momento, o professor declarou: *"Neto, as coisas não são bem assim, estamos em um processo de crescimento e nesse processo existem acertos, mas também existem erros, até errando aprendemos sabia?"* Neto se justificou, dizendo: *"é verdade, professor, mas é que parece que a Priscila quer se aparecer."*

Nesse momento, Priscila retomou novamente a história, dizendo: *"a nossa história fala de uma corrida entre o pica-pau e o gavião."* Continuando, a aluna Priscila contou a história com todos os seus detalhes e, todos os alunos acompanharam atentamente, sem dizer nada. Quando terminou de apresentar a história, ela chamou a aluna Raíssa para fazer a representação da corrida entre o gavião e a lebre. Raíssa começou, dizendo: *"com base no que a Priscila apresentou, temos as seguintes informações: o pica-pau venceu a corrida. Eram sete horas da manhã quando começou a corrida, a distância era de quinze quilômetros, o gavião saiu na frente, e mais algumas informações que me esqueci agora, mas nós vamos fazer a representação aqui professor e depois que ela estiver pronta nós explicamos, tá!"*

---

[30] Grupo (Star Girls) Esse grupo é formado por quatro meninas, sendo a aluna Raíssa a líder do grupo, e as alunas Priscila, Mayara, e Patrícia, as outras componentes desse grupo.

Com base nesses dados, a aluna Raíssa começou a fazer a representação da história, sempre com a ajuda das outras componentes do seu grupo. Depois de uns três minutos de muita discussão entre as componentes do grupo na frente do quadro negro, elas apresentaram a representação.

Apresentamos, a seguir, a representação feita pelo grupo Star Girls no quadro negro.

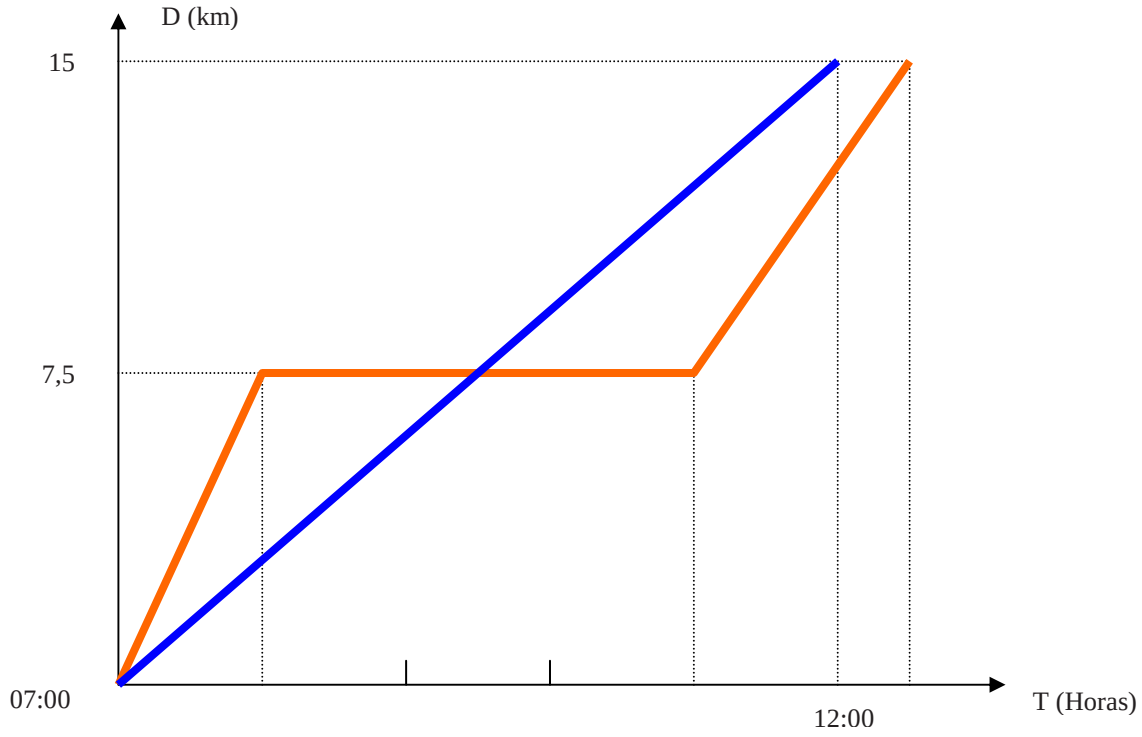


Figura 6: Reprodução da representação gráfica da história reformulada (Grupo 7 – Star Girls)

Ao concluir a representação, Raíssa disse: *"nesse gráfico o pica - pau é representado de azul e o gavião é representado de laranja."*[31] Juliana perguntou: *"quem mesmo ganhou a corrida? E o que eu faço para saber quem ganhou?"* Patrícia (uma outra componente do grupo), respondeu*: "quem ganhou a corrida foi o pica-pau, e para saber é só olhar no gráfico, quem chegou primeiro nos quinze quilômetros, foi o pica-pau, ele chegou meio-dia e o gavião chegou meio dia e meio."*

Nesse momento, o professor interagiu com o grupo, perguntando: *"muito bem grupo, me explica um negócio, qual é a velocidade média, dessas duas aves nessa situação?"* Raíssa, a líder do grupo, disse: *"vamos ver, o pica pau tem velocidade constante"*. O professor disse: *"o que vocês entendem por velocidade constante?"* Raíssa pensou um pouco e respondeu, dizendo: *"é uma velocidade que não se altera, ué, é sempre a mesma."* O professor, disse: *"e*

[31] A aluna Raíssa fez a representação com cores de giz diferenciadas (azul e laranja), pois, segundo ela, seria melhor para os outros alunos entenderem os trajetos das duas aves.

qual é essa velocidade?" Raíssa respondeu, dizendo: *"não sei não, tem que ver"*. Nesse momento, Priscila complementou dizendo: *"ah, Raissa, é só dividir a distância*[32] *pelo tempo."*

Nesse momento, a aluna Priscila foi ao quadro negro e fez algumas anotações. Apresentaremos, a seguir, essas anotações:

$V = \frac{d}{t}$, d = 15 km; t = 5 horas; $V = \frac{15}{5} = 3$ km/h

Ao ver esses cálculos, no quadro negro, o professor disse*: "vocês acham que essa velocidade é compatível com a velocidade real de um pica - pau?"* Lucas disse: *"eu acho que não professor, porque um pica–pau corre bem mais do que três quilômetros por hora."* Assim, o professor falou: *"e vocês meninas, o que acham?"* Nesse momento, Raíssa respondeu, dizendo*: "eu penso que, aqui, se a velocidade está correta ou não, não vai fazer diferença, pra mim só terá diferença se eu representar errado."* Neto interagiu na discussão, dizendo: *"é, nesse ponto eu concordo com ela."*

O professor problematizou, perguntando: *"e a velocidade do gavião?" e na representação de vocês, quais são as velocidades do gavião?"* Priscila respondeu, dizendo: *"o gavião, apesar de ser muito rápido, perdeu a corrida porque ficou três horas, parado, sem velocidade. Na primeira hora, ele faz sete quilômetros e meio. Nas outras três horas, a velocidade dele é zero, porque ficou parado e, no restante da distância, ele fez em uma hora e meio, mais ou menos uns cinco quilômetros por hora."*

Depois dessa afirmação de Priscila, Igor perguntou: *"porque cinco quilômetros por hora?"* Priscila respondeu*: "porque, olha só:"* Ela foi ao quadro negro e registrou, $\frac{7{,}5}{1{,}5} = 5$. Igor, falou: *"porque que aí a velocidade do gavião é menor que antes?"* Nesse momento, Raíssa respondeu a pergunta de Igor, dizendo: *"porque o gavião tinha machucado e aí diminuiu a sua velocidade."* O professor, vendo estas discussões, falou: *"pegando e pensando no que o Igor disse, sobre a variação da velocidade, o que vocês concluem sobre a inclinação dessas retas? Observem as inclinações e as velocidades e tentem concluir alguma coisa!"*

Nesse momento, o aluno Alexandre Yukio, levantou a mão e pediu para responder, dizendo: *"eu sei, professor, eu acho que, na primeira velocidade, a reta tem uma inclinação e, na segunda velocidade, a reta tem uma outra inclinação, e, se compararmos essas inclinações vê que a inclinação da primeira é maior do que a segunda, enquanto a velocidade da primeira é também maior do que a segunda velocidade, então, eu acho que quando*

[32] A distância é igual ao espaço percorrido.

estamos trabalhando num gráfico que envolve as grandezas distancia e tempo, quanto maior for à velocidade maior será a inclinação da reta ou visse e versa."

Nesse momento, o professor olhou para a turma e perguntou: *"vocês concordam com o que ele disse?"* Raíssa, que ainda estava na frente da sala com o seu grupo, disse: *"quem vai duvidar do Alexandre, professor?"*. Essa declaração da aluna Raíssa evidencia o respeito e admiração que todos possuem pela a inteligência do aluno Alexandre Yukio, para os alunos ele é "fora de série". Concordamos como posicionamento dos alunos, pois esse aluno possui um grau de inteligência diferenciado. O professor disse*: "bom, se todos concordam quem sou eu para discordar. Excelente Alexandre. O que você disse está correto."*

Nesse momento, o professor pediu para que a turma desse uma salva de palmas para o grupo "Star Girls", e, logo após, elas se dirigiram para os seus lugares. As discussões entre os alunos proporcionaram, a nosso ver, momentos de interação e constante aprendizagem, pois os alunos começaram a argumentar sobre as situações propostas.

4.3. Segunda Tarefa Exploratório-Investigativa: Trajeto de Casa a Escola

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou propiciar um ambiente investigativo, no qual os alunos pudessem realizar questões relacionadas à leitura e a interpretação de gráficos, envolvendo as noções de variável e dependência, além de familiarizar com suas representações gráficas.

Apresentamos, a seguir, a maneira como o aluno presenciou esta tarefa exploratório-investigativa.

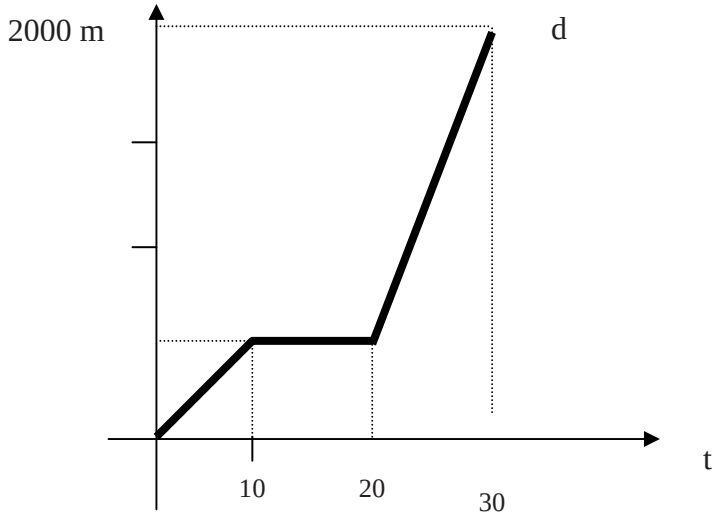
TAREFA EXPLORATÓRIO-INVESTIGATIVA – Trajeto de Casa de Escola

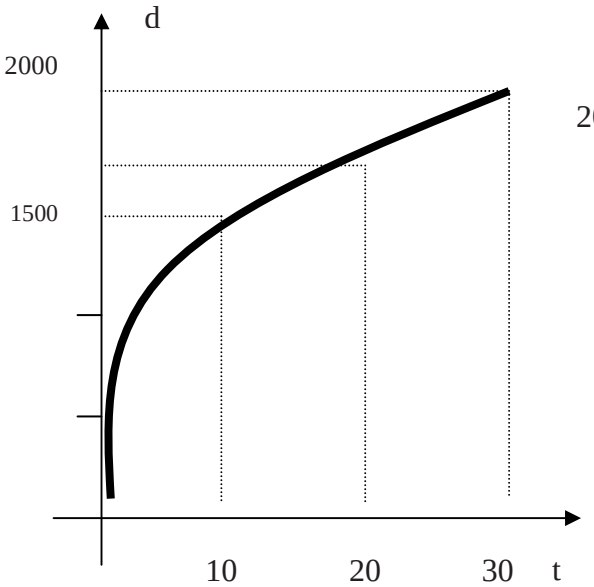
Tamara faz o trajeto da sua casa à escola a pé. Ela faz sempre o mesmo trajeto percorrendo cerca de 2000m. Saí às 06:30 para chegar às 7:00, horário em que começam as aulas.
No que segue, vamos falar em gráficos de tempo-distância e tempo-velocidade, e o sentido é o seguinte:

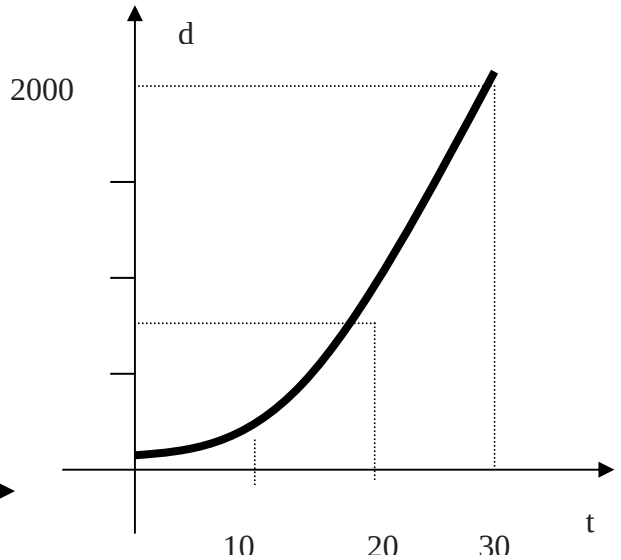
Gráfico Tempo-Distância	**Gráfico Tempo-Velocidade**
Registra a distância que Tamara encontra-se de casa, função do tempo.	Registra a velocidade com que Tamara faz o trajeto, em função do tempo.

Observação: A variável tempo, pode ser representada no eixo X.
Com base nessas informações, apresentaremos algumas situações para investigação nos grupos.
Primeira Situação
Normalmente Tamara faz o trajeto caminhando, então:
(a) Como você acha que pode ser esboçado o gráfico tempo-distância que representa o trajeto de Tâmara.
(b) Como você acha que pode ser esboçado o gráfico tempo-velocidade com que Tamara faz o trajeto.
Segunda Situação
Num certo dia, combinou encontrar uma amiga na escola às 06:45.
(a) Esboce o gráfico tempo-distância que representa o trajeto deTamara.
(b) Esboce o gráfico do tempo-velocidade com que Tamara faz o trajeto.
Terceira Situação
Numa certa aula de Matemática, a Professora Solange pediu aos alunos que representassem na forma de gráfico tempo-distância trajetos de casa à escola em dias que aconteceram imprevistos ao longo da caminhada. Tamara

apresentou os gráficos abaixo, observando que o trajeto sempre tinha sido o mesmo e que a diferença estava na forma de fazer o trajeto.
(a) Como você interpretaria esses trajetos de Tamara.
(b) Com base nas suas interpretações, como ficaria o gráfico tempo-velocidade em cada uma das situações.
(c) consegues estimar a velocidade média com que Tamara estava caminhando em cada uma das situações, em todos os intervalos.







Quarta Situação

Juliana, colega de Tamara, que mora a aproximadamente 1000 m da escola, apresentou como gráfico tempo-distância do seu trajeto, num certo dia:

(a) Consegues descrever como foi o trajeto de Juliana neste dia.
(b) Como você viu a velocidade de Juliana teve muita variação ou não? O que justifica essa variação ou não?
(c) Consegues encontrarque intervalo de tempo Juliana se deslocou mais rapidamente?
(d) Em que instantes a velocidade de Juliana foi zero?
(e) Faz sentido falar que em certos intervalos a velocidade de Juliana foi negativa? O que acha que significa velocidade negativa?

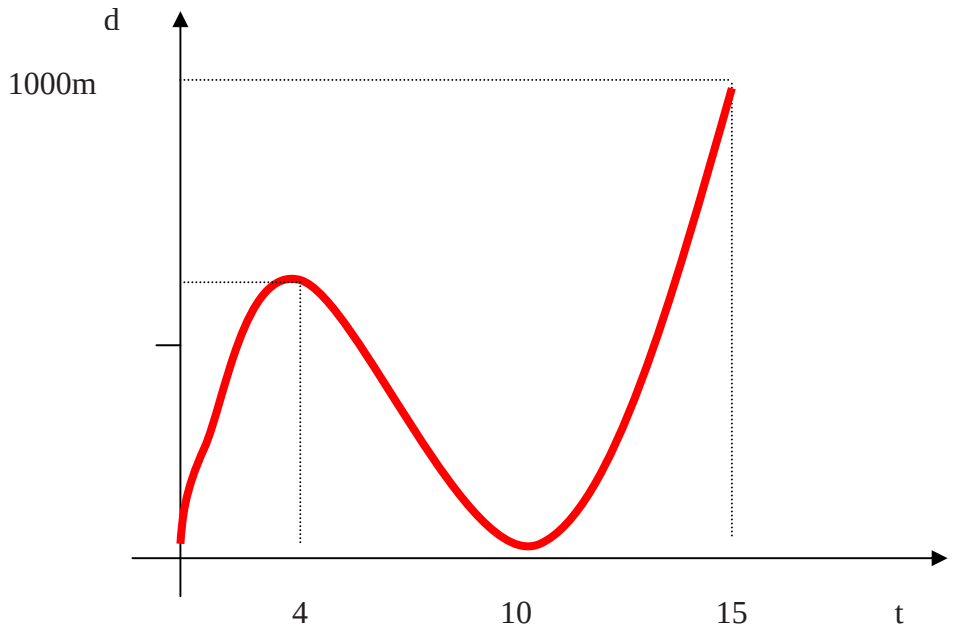


Gráfico distância/tempo referente à quarta situação

Observe o gráfico tempo-velocidade do trajeto de Juliana a seguir. E com base nele discuta as seguintes questões:

(a) Observe no intervalo de tempo [0,4], se a velocidade é crescente ou decrescente, justificando a sua postura.
(b) Sabes qual é a velocidade de Juliana no instante 4?
(c) Discuta e interprete o que aconteceu com a velocidade no intervalo de tempo [4,10].
(d) sabes qual a velocidade de Juliana no instante 10?
(e) O que será que aconteceu com a velocidade de Juliana no intervalo de [10,15]?

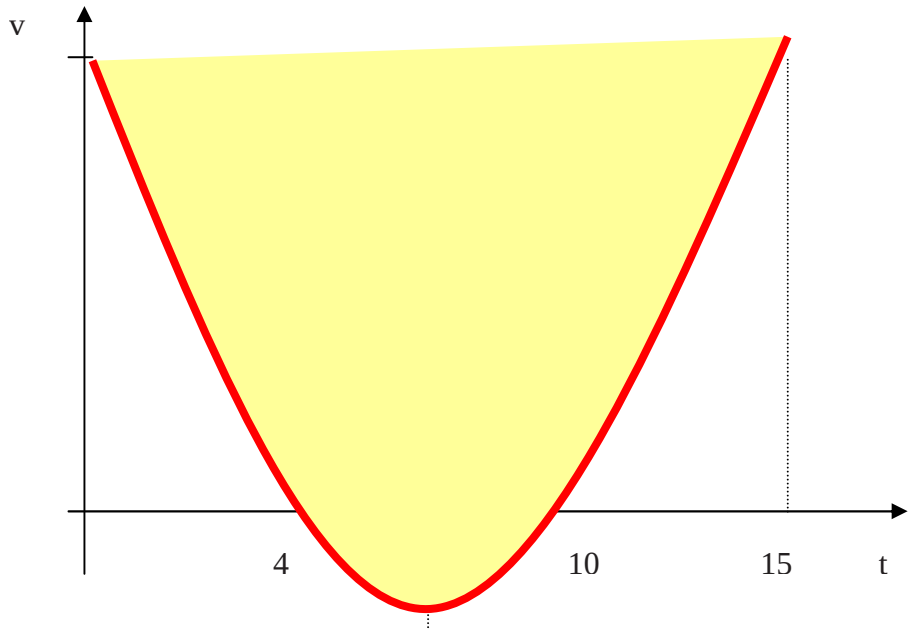


Gráfico velocidade/tempo referente à quarta situação da tarefa

Atividade Proposta Final

Cada componente do grupo deverá descrever graficamente o trajeto que efetuou para ir da sua casa até a escola. Para isso é preciso saber: Qual a distância da sua casa até a escola e o tempo gasto para efetuar o trajeto. Com base nestes teus dados, simule os gráficos tempo-distância e tempo-velocidade. Não esqueça de registrar detalhadamente tudo o que aconteceu durante o trajeto. Escreva se aconteceu algum imprevisto ou alguma outra questão. Então vamos lá e mãos a obra.

A dinâmica metodológica desta tarefa exploratório-investigativa consistiu em explorar uma situação real, na qual os alunos estavam inseridos em uma situação diferenciada contida em seu cotidiano, nas quais o conceito de função se faz presente. Além de, explorar matematicamente os trajetos da situação inicial, possibilitando aos alunos a elaboração e representação gráfica dos seus próprios trajetos em forma de relatos dos seus percursos. Também se propunha a trabalhar noções envolvendo grandezas físicas, interpretação de gráficos, fazendo correspondência entre os valores das grandezas, em que cada valor de uma grandeza (a do eixo horizontal) se relaciona com um valor da outra grandeza (a do eixo vertical).

Uma das dimensões importantes em nossa descrição desta tarefa exploratório-investigativa relacionou-se com a solicitação do professor aos alunos da classe, indicando que as representações gráficas de seus trajetos deveriam se aproximar o mais possível do seu percurso real.

Apresentamos, a seguir, alguns trajetos narrados pelos grupos, juntamente com as respectivas representações.

> Saio de casa as 06:40 e sigo até a escola de bicicleta em velocidade constante e chego na escola as 06:50. Da minha casa até a escola é aproximadamente 1000 metros. Alexandre (Líder do Grupo 1 - Só no Rim)

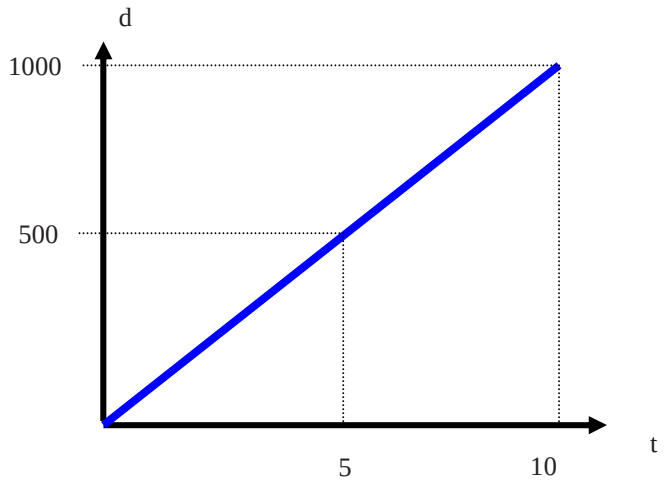


Figura 7: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Alexandre

> Saio de casa às 06:50, e sigo até a escola a pé em velocidade constante e chego na escola às 07:00. Da minha casa até a escola tem cerca de 350 metros. Alisson (componente do Grupo 1 - Só no Rim).

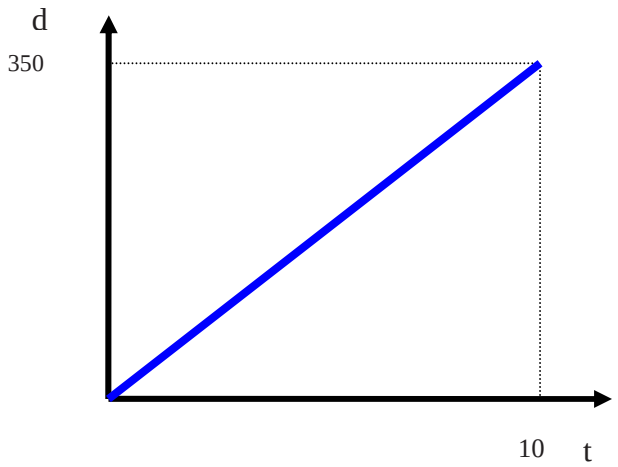


Figura 8: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Alisson

Saio de casa às 06:30 e sigo até a escola de bicicleta em velocidade constante e chego na escola às 06:50. Da minha casa até a escola tem cerca de 2000 metros. Allan (Componente do Grupo 1 – Só no Rin)

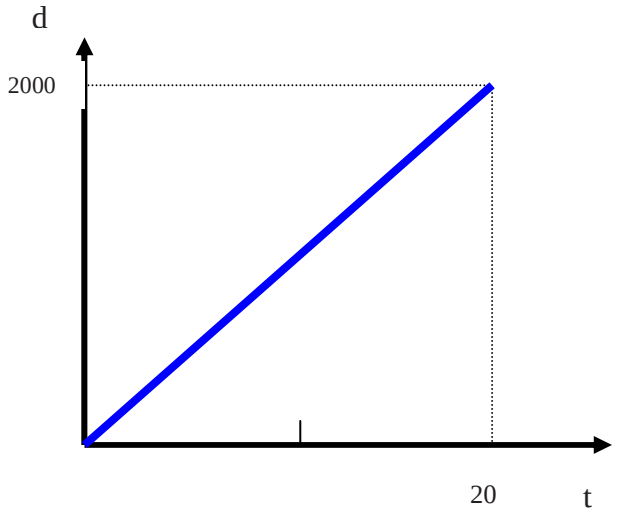


Figura 9: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Allan

Da minha casa até a escola tem 200 metros e gasto 2 minutos para chegar na escola. Venho andando e sempre numa mesma velocidade. (Rômulo Grupo 8 – Esquadrão da Morte).

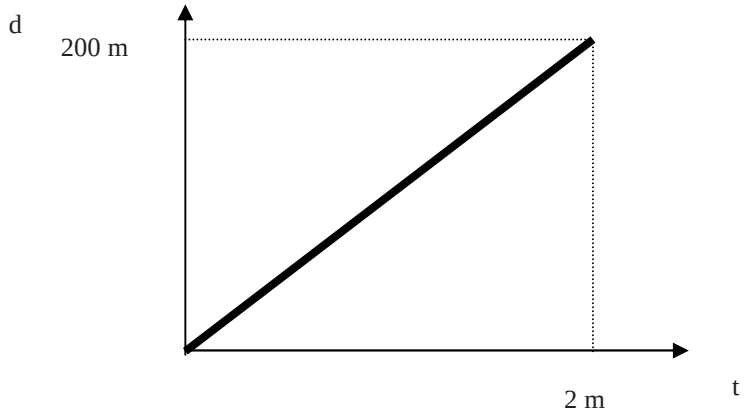


Figura 10: Reprodução da representação do trajeto realizado pelo aluno Rômulo

Essas representações gráficas representam os trajetos realizados por alguns alunos, as quais foram apresentadas juntamente com suas narrativas escritas. Na representação gráfica, percebemos que muitos alunos destacaram que em seus percursos reais, suas velocidades eram constantes e, por isso, o gráfico representava uma reta. Essa discussão foi um dos pontos importantes que o aluno Alexandre destacou logo no início da tarefa. Notamos que, mesmo depois de descobrirem tal fato, alguns alunos preferiram registrar seus percursos reais levando em consideração que, em seus trajetos, nem sempre suas velocidades eram iguais, porque alguns obstáculos, como, subidas e distância faziam parte do trajeto.

Apresentamos, a seguir, dois desses relatos, juntamente com suas respectivas representações.

> Da minha casa até a escola tem cerca de 3 km e gasto mais ou menos uns 15 minutos para chegar aqui na escola. Eu sempre venho de bicicleta, mas não sempre com velocidade constante, porque tem uma subida. Tâmara (Líder do Grupo 8 – Esquadrão da Morte)

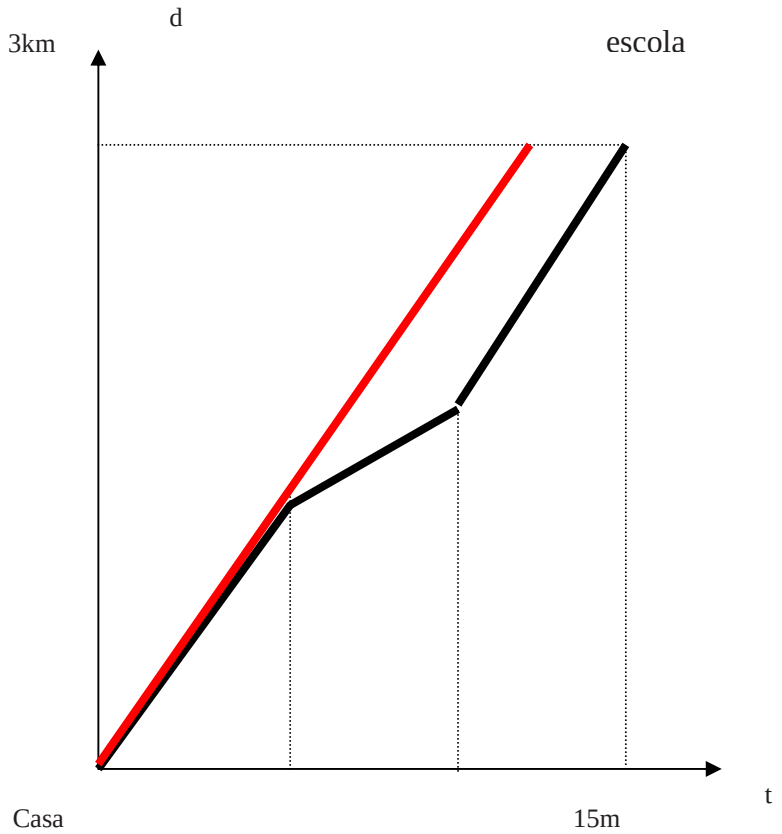


Figura 11: Reprodução da representação do trajeto realizado pela aluna Tâmara

> Gasto 10 minutos para andar 2km que é à distância da minha casa até a escola. Eu venho de bicicleta e desço da bicicleta na subida. (Suellen Grupo 8 – Esquadrão da Morte).

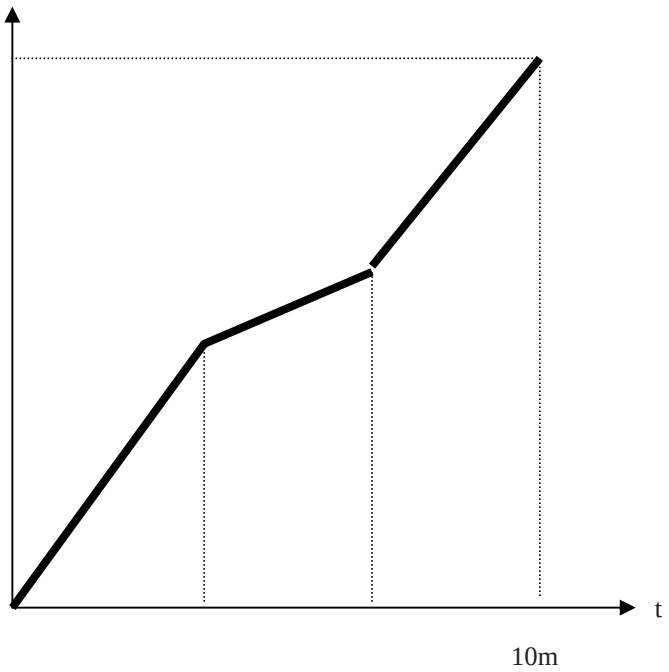


Figura 12: Reprodução da representação do trajeto realizado pela aluna Suellen

4.3.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: Trajeto de Casa a Escola

O episódio de ensino destinado à realização desta tarefa exploratório-investigativa, começou com a distribuição das quatro folhas que continham a situação, na qual os alunos deveriam explorar e investigar. Logo após a entrega das folhas, o professor fez uma leitura acompanhada com uma explicação a respeito de como poderia ser desenvolvida esta tarefa exploratório-investigativa.

Durante a apresentação inicial, o professor leu apenas as situações I, II e III, pois estas seriam as situações que deveriam ser exploradas nos episódios de ensino de cinqüenta minutos cada. Foi feito dessa maneira para considerar os aspectos relevantes que continham nessas três primeiras situações e, também, pelo fato do tempo, pois não conseguiríamos explicitar nem discutir todas as questões pertinentes a essa situação, apenas nestes episódios. A situação IV e a atividade final proposta feita, pelos alunos, foram realizadas em mais dois episódios e, a apresentação e a reflexão final em um outro episódio de ensino.

Na dinâmica de apresentação, foram escolhidos outros dois grupos que não haviam apresentado na tarefa anterior. Os grupos escolhidos nesta foram os grupos “Só no Rim” e “Esquadrão da Morte”. Os alunos prontamente aceitaram, mas somente os líderes Alexandre e Tamara, desses dois grupos respectivamente, foram até a frente para apresentar a tarefa. Organizamos a dinâmica da seguinte maneira: Indicamos que a aluna Tâmara seria

responsável em apresentar as situações I, II, assim como a tarefa final proposta e ficando o aluno Alexandre Yukio responsável em apresentar as situações III e IV.

Durante os momentos de apresentação das situações, uma grande interação ocorreu. A aluna Tamara começou sua apresentação afirmando que *"gostou dessa tarefa porque eu nunca pensei em representar graficamente o trajeto que eu faço todo dia da minha casa até a escola e que, realmente, a Matemática está presente em tudo que está a nossa volta. Gostei dessa situação, também, porque o professor escolheu o meu nome para colocar na situação que exploramos, mas porque você escolheu o meu nome em professor?"* O professor respondeu, dizendo: *"escolhi o seu nome, porque eu acho um nome bonito e, porque eu queria a sua participação nessa tarefa."*

Nesse momento, Tâmara leu a primeira situação e a segunda situação apresentada. Logo após a leitura, ela solicitou a régua ao professor para poder fazer as suas representações. O professor buscou a régua e, logo em seguida, ela disse: *"vou primeiramente representar no eixo horizontal o tempo e a distância no eixo vertical."* Nesse momento, ela fez suas representações com o auxílio da régua.

Apresentamos, a seguir, os gráficos contidos nas narrativas escritas do grupo liderado pela aluna Tâmara e a explicitação dada no quadro negro.

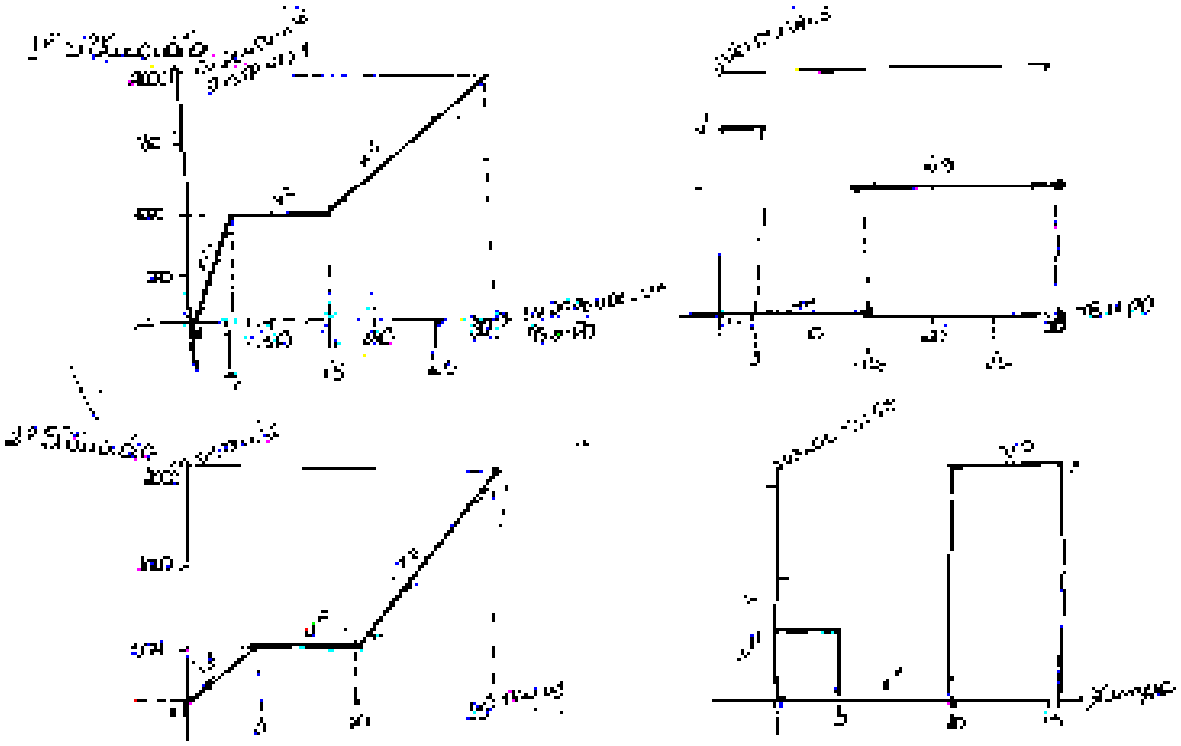


Figura 13: Representação gráfica da primeira e segunda situação feita pelo Grupo Esquadrão da Morte

Depois de representado o primeiro gráfico da primeira situação, o professor perguntou: *"Tamara, explica-nos com as suas palavras esses gráficos?"* Tamara disse: *"no primeiro gráfico, eu andei 1000 metros em cinco minutos, depois, eu fiquei parado uns 10 minutos esperando uma amiga minha e, depois, eu andei os outros 1000 metros em 15 minutos."* Logo em seguida, o professor, perguntou: *"porque que você colocou* v_1 , v_2 , v_3 *, nesse gráfico? O que isso significa?"* Ela respondeu, dizendo: *"*v_1 , v_2 , v_3 *significa as velocidades em cada momento do meu trajeto e também para me auxiliar no gráfico tempo velocidade, é por isso que eu ia colocando essas letras."*

A respeito da segunda situação, Tamara disse: *"essa situação é semelhante à primeira, pois, o que se altera é a grandeza tempo, na primeira eu tenho 30 minutos para chegar até a escola e a aqui eu tenho somente 15 minutos, é a mesma coisa."* Nesse momento, Igor retrucou, dizendo: *"não é a mesma coisa não Tamara, porque se altera o tempo altera a velocidade também viu!*" Tamara respondeu a observação do Igor, dizendo: *"é verdade, mas são bem parecidas, é que aqui eu tenho que ir mais rápido, com uma maior velocidade."* Igor concordou com ela, afirmando: *"é mesmo, agora sim."*

Nesse momento, Tamara disse: *"professor, eu apresento a minha tarefa final, ou não?"* O professor disse: *"Vamos deixar o Alexandre apresentar as situações III e IV e depois você volta para apresentar a sua tarefa final, ok?"* Tâmara concordou com o professor e voltou ao seu lugar. Enquanto isso, Alexandre se posicionou na frente da sala e iniciou sua apresentação, pedindo para o aluno Alison (componente do grupo liderado pelo Alexandre) ler a situação III.

Sendo assim, Alison leu a terceira situação e após a leitura, Alexandre disse: *"essa situação foi um pouco complicada, mas o nosso grupo conseguiu concluir algumas coisas e, dentre elas, é que quando o gráfico é uma reta, a velocidade será constante. Mas, quando o gráfico é uma curva a velocidade também é variável, mas aqui vamos responder cada questão da situação III, por enquanto."* Nesse momento, o professor disse: "queria que todos vocês acompanhassem a explanação da Alexandre em suas folhas na situação III". Em seguida, Alexandre disse: *"vamos primeiro interpretar os trajetos de tâmara conforme consta nos gráficos da situação III."* Nesse momento, Alexandre começou a explicar gráfico por gráfico.

Apresentamos, a seguir, o primeiro gráfico apresentado e explicado pelo aluno Alexandre Yukio.

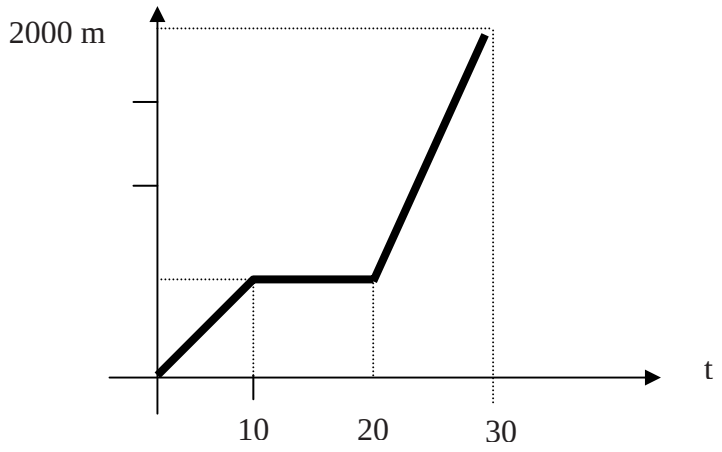


Figura 14: Reprodução do gráfico explicado pelo aluno Alexandre no quadro negro

Alexandre começou sua explicação, dizendo: *"Nesse gráfico podemos ver que existem três velocidades, que são diferentes uma da outra porque de zero até dez minutos, ela andou 500 metros, dos dez aos vinte minutos ela não andou nada e dos vinte aos trinta minutos, ela andou 1500 metros."* Após esta explicação, o professor problematizou, dizendo: *"mas como você interpreta esse trajeto de Tâmara?"* Neste momento, Alexandre pegou um giz e fez alguns registros no quadro.

Apresentamos, a seguir, registros semelhantes aos registros feitos por Alexandre no quadro negro.

v_1 : 0 – 10 = velocidade constante de 500 metros
v_2: 10 – 20 = velocidade nula durante esses dez minutos
v_3: 20 – 30 = velocidade constante de 1500 metros.

Alexandre continuou sua explicação, estimando a velocidade média em cada um dos intervalos de tempo colocados no gráfico. Ele registrou, novamente, no gráfico, as velocidades constantes.

v_1 : 500/600 = 0,83 m/s;
v_2: 0/10 = 0 m/s;
v_3: 1500/600 = 2,5 m/s

Após registrar esses valores no quadro negro, Alexandre disse: *"é importante em todos os casos descobrir quais são as velocidades, porque assim fica fácil fazer o gráfico da velocidade em função do tempo."* Nesse momento, o professor disse: *"como é que fica o gráfico da função velocidade-tempo?"* Alexandre, respondeu: *"esse primeiro gráfico é fácil porque só tem velocidades constantes, e, quando tem velocidade constante o gráfico é*

representado apenas por retas." Nesse momento, Alexandre virou-se para o quadro negro e fez o gráfico da função velocidade-tempo.

Apresentamos, a seguir, o gráfico semelhante ao feito por ele no quadro negro.

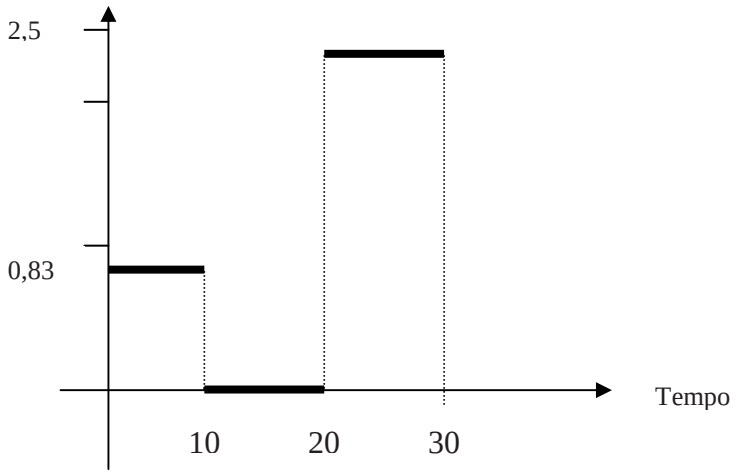


Figura 15: Reprodução do gráfico da função velocidade-tempo feito pelo aluno Alexandre Yukio

Nesse momento, o professor problematizou, ao dizer: *"por que do tempo 10 a 20, a velocidade está em cima do eixo horizontal?"* Alexandre disse: *"é porque, nesses momentos, a velocidade é zero."* Alison concordou, dizendo: *"está correto Alexandre, porque a velocidade é nula e está em cima do eixo horizontal porque o tempo passa e a velocidade continua a mesma."* Com isso, o professor disse: *"muito bem, vamos ver como que vocês fizeram a análise do próximo gráfico."*

Nesse momento, Alexandre disse: *"o segundo gráfico é um pouco mais complicado, porque não são retas e isso deu muita dificuldade de explorarmos no início do nosso trabalho em grupo, mas também conseguimos fazer, porque era só usar a fórmula da velocidade média para termos uma idéia de como iria ficar o gráfico da velocidade."* Alexandre continuou sua apresentação, dizendo: *"neste gráfico, as velocidades variam o tempo todo, pois em cada instante a posição é diferente uma da outra, por exemplo, Tamara nos dez primeiros minutos andou cerca de 1400 metros. Dos dez minutos aos vinte minutos ela andou uns 400 metros. Dos vinte aos trinta minutos ela andou uns 200 metros, isso mostra que ela começou em alta velocidade o seu trajeto, aos poucos, ia diminuindo a velocidade porque tinha bastante tempo, ainda, mas ela nunca ficou parada nesse gráfico porque a velocidade sempre estava variando."*

A partir dessa explicação, o professor disse: *"o que vocês concluem sobre a velocidade dela representada nesse gráfico?"* Alexandre respondeu, dizendo: *"Ela caminha com*

velocidade decrescente durante todo intervalo de tempo. Com isso, a variação da velocidade é maior no início do intervalo, mas diminui com o passar do tempo." O professor disse: *"muito bem, mas podem continuar as suas apresentações."*

Neste momento, Alexandre continuou sua explicação estimando a velocidade média em cada um dos intervalos de tempo colocados no gráfico. Ele fez mais alguns registros no quadro negro.

[0 - 1]: v_1 : 500/60 = 8,33 m/s;
[1 - 4]: $v_{2:}$ 500/180 = 2,77 m/s;
[4 -10]: $v_{3:}$ 400/360 = 1,1 m/s
[10 – 20] $v_{4:}$ 400/600 = 0,66 m/s
[20 – 30] $v_{5:}$ 200/600 = 0,33 m/s

A seguir, Alexandre virou e disse: *"com essas cinco velocidades, fica fácil representar o gráfico velocidade-tempo."* Nesse momento, o professor disse: *"Como é que fica o gráfico velocidade-tempo?"* Alexandre respondeu: *"esse primeiro gráfico não será uma reta porque as velocidades variam o tempo todo, será uma curva."* Alexandre fez, no quadro negro, o seu gráfico.

Apresentamos, a seguir, o gráfico feito por ele no quadro negro.

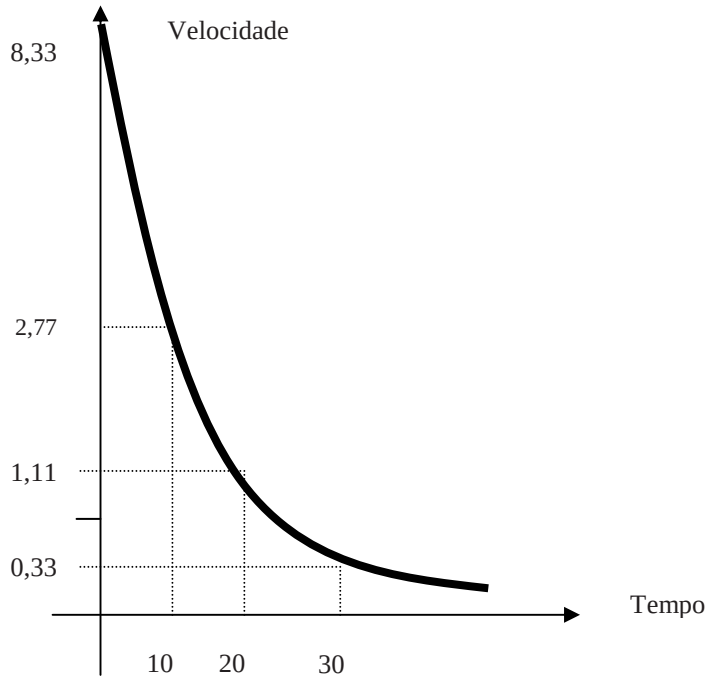


Figura 16: Reprodução do gráfico da função velocidade-tempo feito pelo aluno Alexandre Yukio

Depois de representado esse gráfico, o professor disse: *"quais são as tuas conclusões a respeito desse gráfico?"* Alexandre pensou um pouco, mas declarou: *"esse gráfico aqui é diferente do primeiro porque é uma curva e um gráfico só possui curva quando as velocidades se alteram o tempo todo."* Com isso, o professor disse: *"muito bem, então agora vamos para o terceiro gráfico dessa situação"?* Alexandre afirmou: *"ok"*.

Nesse momento, Alexandre disse: *"o terceiro gráfico da terceira situação é bem semelhante ao do segundo. O que altera é que no segundo gráfico as velocidades iam decrescendo com o passar do tempo e nesse a velocidade vai aumentando com o passar do tempo."*

Ele continuou sua explicação, declarando: *"Nesse gráfico, as velocidades de Tamara variam também o tempo todo. Nos dez primeiros minutos, ela andou cerca de 200 metros. Dos dez aos vinte minutos, ela andou uns 700 metros e, dos vinte aos trinta minutos, ela andou uns 1100 metros. Isso mostra que ela começou em baixa velocidade o seu trajeto e aos poucos foi aumentando a velocidade porque o tempo estava acabando e ainda tinha bastante distância."* Logo após, o professor disse: *"o que vocês concluem sobre a velocidade dela representada nesse gráfico?"* Alexandre respondeu: *"Ela caminha com velocidade crescente durante todo intervalo de tempo. Com isso, a variação da velocidade é menor no início do intervalo, mas aumenta com o passar do tempo."* O professor disse: *"concordo com vocês, mas podem continuar."*

Neste momento, Alexandre virou para o quadro negro e começou a estimar a velocidade média em cada um dos intervalos de tempo colocados no gráfico, fazendo alguns registros no quadro negro.

[0 -10]: v_1 : 200/600 = 0,33 m/s;
[10- 20]: v_2: 700/600 = 1,16 m/s;
[20 – 30] v_3: 1100/600= 1,83 m/s

Alexandre, então, virou-se para a turma e disse: *"com essas velocidades, eu consigo fazer o gráfico velocidade-tempo."* Nesse momento, Alexandre voltou-se novamente para o quadro negro fazendo o seu gráfico.

Apresentamos, a seguir, o gráfico feito por ele no quadro negro neste momento.

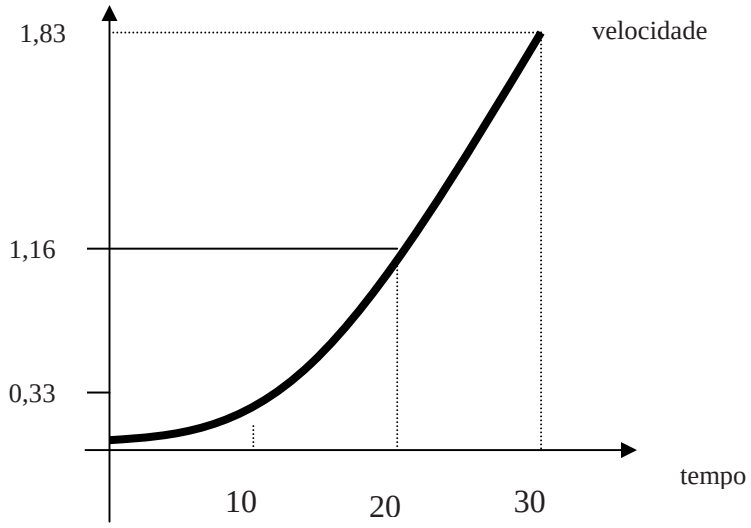


Figura 17: Reprodução do gráfico velocidade-tempo feito pelo Alexandre do Grupo Só no Rim

Depois de representado esse gráfico, o aluno Alexandre disse: *"agora vou mostrar como fizemos a quarta situação."* Nesse momento, o professor disse: *"podemos usar a seguinte dinâmica nessa quarta situação: eu faço as questões e você, com o auxílio do seu grupo e da classe, responde, mas sempre justificando suas respostas, ok?"* Nesse momento, Alexandre concordou afirmando: *"ok"* Assim, o professor começou a leitura da quarta situação.

O professor começou, perguntando: *"vocês conseguem descrever como foi o trajeto de Juliana neste dia?"* Alexandre pensou um pouco e disse: *"Juliana pega sua mochila, sai de sua casa e parti para a escola. Depois de uns quatro minutos de sua partida. À 600 metros de sua casa, ela se lembra de que esqueceu um trabalho, então, ela volta para casa. Chegando lá, ela pega seu trabalho, e sai apressada de bicicleta até a escola."*

Nesse momento, o professor perguntou: *"muito bem, mas como você viu a velocidade de Juliana teve muita variação, ou não? O que justifica essa variação?"* Alexandre disse: *"Sim, a velocidade de Juliana variou o tempo todo. Isso é justificado porque o gráfico é representado por curvas."* O professor perguntou: *"consegues encontrar em que intervalo de tempo Juliana se deslocou mais rapidamente"?* Alexandre respondeu: *"Juliana deslocou-se mais rapidamente no intervalo de tempo de 10 aos 15 minutos."*

Nesse momento, o professor voltou a problematizar: *"em que instantes a velocidade de Juliana foi zero?"* Alexandre respondeu: *"a velocidade de Juliana foi zero nos instantes de tempo 4 e 10 de sua partida, porque foram nestes instantes de tempo que ela mudou o sentido de seu trajeto, ou seja, voltou para sua casa."* O professor continuou problematizando

ao perguntar: *"faz sentido falar que em certos intervalos a velocidade de Juliana foi negativa? O que acha que significa velocidade negativa*?" Alexandre disse: *"Sim, a velocidade de Juliana foi negativa no intervalo (4,10). Para mim, velocidade negativa é uma velocidade contrária, ou andar em sentido contrário, nessa situação ela voltou para sua casa e, por isso, a velocidade dela nesses momentos foi negativa."*

Nesse momento, o professor disse: *"observe o gráfico da função velocidade-tempo do trajeto de Juliana na quarta situação, e, com base nele, discuta as questões da quarta situação"*. O professor continuou seu discurso, perguntando: *"Observe no intervalo de tempo (0,4), se a velocidade é crescente ou decrescente, justificando a sua postura."* Alexandre logo disse: *"nesse intervalo de tempo, a velocidade de Juliana foi decrescente, porque a sua velocidade estava diminuindo cada vez mais."*

Nesse momento, o professor perguntou: *"vocês sabem qual é a velocidade de Juliana no instante 4 e instante 10?"* Alexandre respondeu: *"nesses dois instantes, a velocidade é zero, a velocidade é nula, porque ela está parada, e porque ela se encontra no ponto zero da linha vertical e, quando o valor da linha vertical é zero, a velocidade é nula."*

Após esses diálogos, o professor disse: *"discuta e interprete o que aconteceu com a velocidade no intervalo de tempo (4,10)."* Alexandre pensou um pouco e falou: *"nesse intervalo de tempo o gráfico está para baixo do eixo vertical e, com isso, a sua velocidade foi negativa porque ela voltou, no seu trajeto."*

Nesse momento, o professor perguntou: *"o que será que aconteceu com a velocidade de Juliana no intervalo de (10,15)?"* Alexandre disse: *"nesses intervalos a velocidade de Juliana tornou-se positiva e crescente, ou seja, só aumentou até chegar na escola."* Logo após essas interlocuções, o professor disse: *"muito bem, Alexandre, para mim tudo o que você fez tem sentido e, por isso, eu concordo contigo. Vamos dar uma salva de palmas para o Alexandre."*

Nesse mesmo instante, todos bateram palmas, e, logo após, o professor convidou novamente a aluna Tâmara para apresentar sua atividade final proposta. Tâmara se dirigiu até a frente da sala e começou dizendo: *"Vou representar o meu trajeto da minha casa até aqui na escola."* Apresentamos, a seguir, o trajeto feito pela aluna Tâmara em sua narrativa escrita.

> *Da minha casa até a escola tem cerca de 3 km e gasto mais ou menos uns 15 minutos para chegar aqui na escola. Eu sempre venho de bicicleta, mas não sempre com velocidade constante, porque tem uma subida. (Tâmara Líder do Grupo 8 – Esquadrão da Morte)*

Tamara disse: *"vou representar o meu trajeto aqui no quadro e depois eu explico o que eu fiz"*. Nesse momento, a aluna Tâmara virou-se para o quadro negro e fez o gráfico que representava o seu trajeto. Depois de concluído o gráfico ela disse: *"como eu disse que da minha casa até aqui na escola tem subida, eu desço da bicicleta e começo a empurrar a bicicleta. A minha velocidade diminui, e isso foi o que eu tentei fazer. Se eu não tivesse descido da bicicleta ou não houvesse subida a minha representação poderia ser essa linha vermelha. Mas como tem uma subida, a velocidade diminui"*.

Na figura abaixo, apresentamos o gráfico feito pela aluna Tâmara.

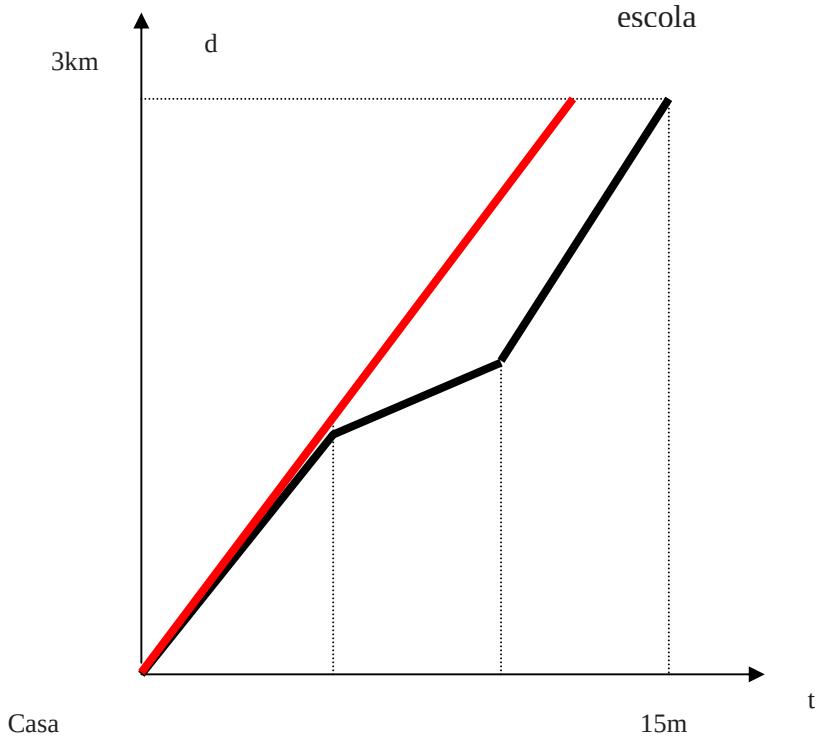


Figura 18: Reprodução representação do trajeto realizado pela aluna Tâmara

Ao concluir a representação gráfica, a aluna Tamara voltou ao seu lugar e o professor concluiu esses momentos de discussão dizendo: *"nessa tarefa exploratório-investigativa, aprendemos idéias importantes para o entendimento e significação do conceito de função, idéias essas relacionadas à dependência entre duas grandezas, e a variação entre as grandezas."* Nesse momento, o aluno Neto declarou: *"professor, cada dia que passa eu começo a me interessar mais pela Matemática, porque estou começando a perceber que ela está presente em todas as coisas e lugares e esse conceito de função também se faz presente, até mesmo, no percurso de minha casa até a escola. É incrível esse negócio de poder representar, graficamente, qualquer movimento que fazemos."*

4.4.Terceira Tarefa Exploratório-Investigativa: A Rivalidade entre Brasil e Argentina

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou propiciar um cenário de investigação em torno de uma partida de futebol. Pretendíamos ajudar os alunos a desenvolver capacidades de interpretação de gráficos a partir da exploração do conceito de Função em uma situação real, bem como capacidades de fundamentação de suas opiniões, reflexão e interpretação gráfica sobre a situação com que estavam sendo confrontados.

Uma das características desta tarefa é explorar as relações existentes entre uma partida de futebol e a Matemática. Tratando de futebol, entendemos que as opiniões são em sua maioria, divergentes. Pedimos para os alunos respeitarem as diferentes opiniões dos seus colegas e que colaborassem no trabalho de seus grupos, partilhando responsabilidades, saberes, enfrentando com confiança novas situações e reconhecendo a presença da Matemática em situações da vida real.

Elaboramos esta tarefa visando criar um ambiente favorável para a aprendizagem sobre interpretação de gráficos. Escolhemos esta tarefa, porque o futebol é uma área de conhecimento familiar aos alunos e as situações relacionadas ao futebol oferecem possibilidades ricas para exploração gráfica.

Apresentamos, a seguir, a maneira como essa tarefa exploratório-investigativa foi vista pelos alunos.

Terceira Tarefa Exploratório-Investigativa
Eliminatórias Sul -Americana da Copa 2006
A Rivalidade entre Brasil e Argentina

BRASIL E ARGENTINA foram sempre protagonistas de jogos emocionantes, decisões dramáticas e até batalhas campais. Por isso, sua velha rivalidade - na bola e, as vezes, na briga - se transformou no clássico do continente. A rica historia da Seleção Brasileira foi e continua sendo escrita, sobretudo com vitórias maravilhosas, campanhas inesquecíveis e conquistas brilhantes. Ao lado de tantos momentos de grandeza, porem, ela registra um capitulo amargo: os confrontos com a Argentina, que ao longo de varias fases do nosso futebol pode exibir superioridade, talvez para o espanto dos mais ufanistas.

Antes da realização de cada Copa do Mundo que acontece de quatro em quatro anos, acontece o que conhecemos como eliminatórias para a copa.

O Brasil e a Argentina disputam as eliminatórias sulamericanas, onde se classificam quatro seleções e uma quinta disputa a repescagem com a equipe campeã da Oceania. Normalmente Argentina e Brasil sempre travam duelos memoráveis e a cada jogo que passa a rivalidade entre os dois países só aumentam.

Nessa eliminatória o Brasil já venceu a Argentina. O jogo aconteceu no Estádio do Mineirão em Belo Horizonte no dia 02/06/2004 e o jogo terminou 3 a 1. O próximo encontro entre as duas seleções está marcado para o dia 08/06/2005 partida essa que será realizada em Buenos Aires na Argentina.

Iremos pegar como referência a partida realizada em Belo Horizonte entre as duas seleções para investigarmos alguns conceitos matemáticos existentes nessa situação. Abaixo aparece uma foto do jogo realizado no Mineirão em Belo Horizonte – MG.

Cafu disputa jogada com o argentino Crespo

ESCALAÇÃO DAS EQUIPES

SELEÇÃO DO BRASIL

Dida- Cafu – Juan - Roque Júnior - Roberto Carlos – Edmilson - Juninho Pernambucano - (Júlio Baptista) - Zé Roberto - Kaká (Alex) - Luís Fabiano - (Edu) – Ronaldo. Técnico: Carlos Alberto Parreira

SELEÇÃO DA ARGENTINA

Caballero – Samuel – Quiroga – Heinze – Zanetti – Mascherano - Sorín - Luis González - (Aimar) - Delgado - (Rosales) - Crespo – (Saviola) - Killly Gonzáles Técnico: Marcelo Bielsa

GOLS DA PARTIDA

BRASIL - Ronaldo, aos 16 min do primeiro tempo
Ronaldo, aos 22 e 50 min do segundo tempo.
ARGENTINA - Sorín, aos 34 min do segundo tempo.

Nesse jogo que o Brasil venceu a Argentina por três a um o craque da partida foi Ronaldo o fenômeno, fazendo os três gols da vitória. A figura abaixo mostra o gráfico que representa a distância da bola ao ponto médio da linha de fundo da equipe brasileira, durante uma jogada.

A partir desta situação propomos–te algumas tarefas para investigação.

TAREFA I

Imaginas que tu és um comentador desportivo, não é da Rede Globo, mas é aqui da nossa escola. Com os dados fornecidos pelo gráfico e com a constituição das equipes tenta fazer um relato desta jogada.

TAREFA II

Faz um esquema da jogada na planta do campo, tendo em atenção às medidas reais do campo.

DIMENSÕES DO CAMPO DO MINEIRÃO

Comprimento: 110 metros
Largura: 75 metros
Gol: 7,32 metros
Altura da Baliza: 2,44
Largura da área: 40,5 metros
Comprimento da área: 16,5 metros
Marca do Pênalti a Linha do Gol: 11 metros
Raio que liga a marca do Pênalti ao semi-círculo da área: 9,2 metros
Diâmetro da Circunferência central: 36 metros

Com essas dimensões desenhe a planta do gramado do estádio do Mineirão.

Potencial da Tarefa

Identificar as conexões matemáticas que são possíveis estabelecer com a geometria, como, por exemplo:
Aplicação do conceito de escala.
A identificação do arco da circunferência como um lugar geométrico.
Aplicação do Teorema de Pitágoras no espaço para o cálculo das dimensões da baliza.
Discussão e analises de partes da jogada.

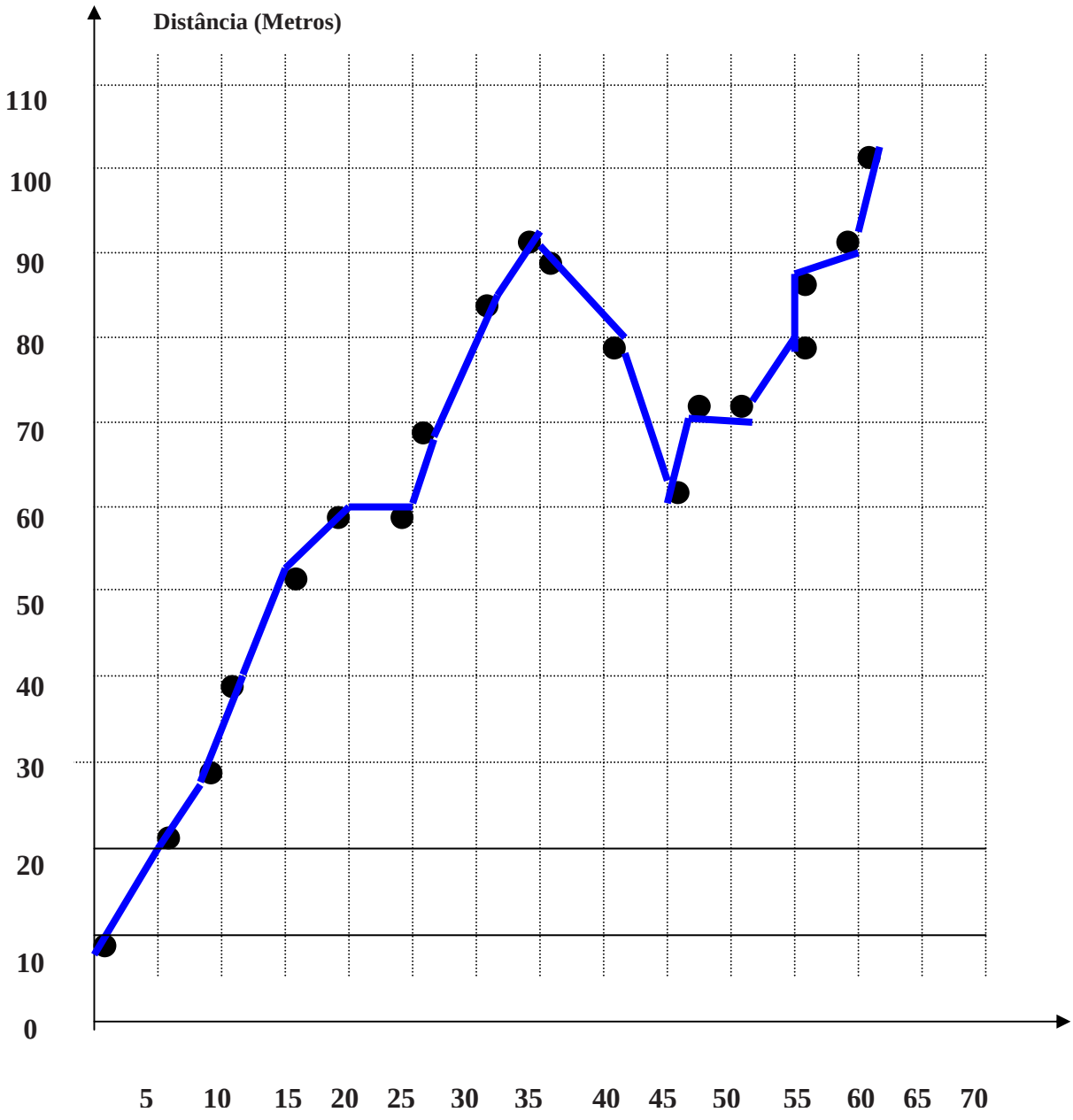


Gráfico da Jogada da Tarefa Exploratório-Investigativa "A Rivalidade entre Brasil e Argentina"

Narrativas Escritas

Monte um texto colocando os teus pontos de vista sobre a rivalidade existente entre Brasil e Argentina. Coloque aqui tudo o que você quiser colocar, se sentes frio na barriga quando o Brasil enfrenta a Argentina. Imaginas que o Maradona ou o Tevês venha aqui na escola, redija um texto – carta - (de 30 a 60 linhas), para enviar para um desses jogadores argentinos. Use toda a tua criatividade para isso, escreva o que você quiser sem imoralidade.

A dinâmica metodológica desta tarefa foi explorar um lance de uma partida de futebol, apresentando aos alunos situações diferenciadas, nas quais o conceito de Função se fazia

presente. Explorar matematicamente jogadas e lances de uma partida de futebol, em que os alunos elaborariam e representariam seus próprios significados para uma determinada jogada.

Ao descrever esta tarefa exploratório-investigativa, uma das dimensões importantes foi à solicitação do professor para a narração de uma jogada, na qual a interpretação gráfica deveria se aproximar o máximo possível do contexto do jogo e da rivalidade existente entre o Brasil e a Argentina. As narrações de jogadas registradas pelos alunos nas narrativas escritas, entregues pelos grupos demonstrou que os alunos utilizaram suas criatividades para formularem o registro em forma de narrativas.

Como maneira de envolvê-los ainda mais no contexto da rivalidade entre Brasil e Argentina, o professor pediu para os alunos elaborarem uma carta para algum jogador argentino, demonstrando assim suas afinidades e sentimento por eles. Da análise dessas cartas, alguns pontos nos chamaram atenção, como: sentimento de rivalidade, não só no futebol, mas também em outras áreas.

Apresentamos, a seguir, a análise das cartas de três alunos do grupo "Os Orientais" que escreveram para o jogador Maradona.

> **Bianca:** *Bianca não gosta de Maradona, mas admira o seu talento no futebol, não gosta da prepotência de Maradona e nem de algumas atitudes dele fora de campo. Ela finaliza a sua carta ironizando o Maradona,* ***escrevendo o hino nacional brasileiro e dizendo para ele se deleitar sobre letra desse hino.*** *Acredito que se o Maradona lesse essa carta, com certeza, ele não ficaria nada satisfeito.*
> **Danilo:** *Danilo começa afirmando que o Maradona tem muito talento para jogar futebol e diz que ele é um vencedor. Danilo diz que a vida é que nem um jogo de futebol, pois tem altos e baixos.* ***Ele diz que a união faz a força e ressalta a importância dos amigos em tudo, inclusive num jogo de futebol****. Danilo pelo jeito é fã incondicional de Maradona apesar de ser um argentino e afirma que Maradona já atingiu muitos dos seus objetivos, porque é uma pessoa decidida.*
> **Neto:** *Neto começa a sua carta afirmando que não gosta muito do Maradona, porque segundo Neto ele é um covarde. Neto diz que ele é um covarde pelo fato de ter sido o Maradona o responsável de dar aquela água santa a um jogador brasileiro. Neto diz que Pelé é melhor que ele e diz que os dois nem se comparam. Neto afirma ainda que Maradona é um mala, para não dizer malandro. Neto diz que até o baixinho Romário é melhor que ele e salienta o envolvimento do Maradona no mundo das drogas.* ***Finaliza a sua carta dizendo que Maradona precisa ser um pouco mais humilde****, pois essa característica, segundo Neto, ele não tem.*

Nestas cartas, muitas coisas foram ditas, e percebemos que os alunos colocaram no papel seus sentimentos por este jogador argentino. Os alunos também fizeram cartaz para os jogadores argentinos, Sorin, e, principalmente, para Carlitos Tevês (jogador de um clube brasileiro), pois os alunos que escreveram torcem para este clube. Sendo assim, a princípio, um dos nossos intuitos estava sendo alcançado, pois todos os alunos fizeram suas cartas e,

dessa maneira, conseguimos aguçar seus interesses e ficaram motivados para a realização desta tarefa.

4.4.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: A Rivalidade entre Brasil e Argentina

A fase de introdução da tarefa foi coordenada pelo professor. Durante o desenvolvimento, os alunos mantiveram o domínio da situação, embora uns se preocupassem mais do que outros na interpretação dos conceitos matemáticos.

O desenvolvimento desta tarefa aconteceu em diferentes fases. Nos dois primeiros episódios de ensino dedicados, a turma se preocupou em desenvolver os relatos da jogada e transcrever uma carta a um jogador argentino. Em outros dois episódios, os grupos se envolveram em construir o desenho do campo e discutir idéias referentes ao conceito de escala. O último episódio de ensino foi destinado para momentos de reflexão e discussão, nos quais professor e alunos discutiram sobre o trabalho desenvolvido e, também, sobre essa maneira de conceber o ensino de Matemática. Nesse último episódio de ensino, as "vozes" de muitos alunos foram manifestadas, suas concepções sobre as tarefas desenvolvidas foram colocadas de uma maneira geral.

Esta tarefa exploratório-investigativa foi proposta aos alunos de uma forma bem simples. O professor entregou o enunciado e pediu para que lessem atentamente o que lhes era pedido, pois eles precisariam explorar e investigar as situações propostas e também, entregar uma narrativa escrita pelo grupo contendo suas descobertas e suas interpretações. Os alunos estavam cientes de suas condutas, mas o professor sempre procurou estabelecer um diálogo com os grupos e também individualmente.

Notamos, inicialmente, um grande envolvimento e adaptação dos alunos na tarefa, pois eles estavam ansiosos para explorar o lance da partida de futebol. Após a leitura inicial dessa tarefa exploratório-investigativa, o aluno Danilo Maciel perguntou: *"o que é que o futebol tem a ver com a Matemática?"* Nesse momento, o professor respondeu: *"serão vocês que terão que investigar descobrir e entender essas relações."*

Durante o desenvolvimento da tarefa, em alguns grupos, principalmente o das meninas, o professor ajudou no início da situação, pois foi preciso construir o desenho em escala do campo de futebol. O auxílio do professor às meninas aconteceu, pois elas não se envolviam com futebol como os meninos e, por isso, não sabiam desenvolver o desenho de um campo. No entanto, entre os meninos, percebemos uma maior facilidade em perceber

como fazer a interpretação da situação apresentada. Entendemos este fato por causa de aspectos voltados à cultura dos meninos em relação ao futebol.

No início das explorações, o trabalho chegou a divergir, pois alguns alunos insistiam em lembrar-se do jogo em questão, no qual o Brasil venceu a Argentina por três a zero no Mineirão em Belo Horizonte. Os alunos comentavam e até discutiram esse jogo, além de discutir outros aspectos referentes à qualidade dos jogadores de ambas as equipes. Após esta fase inicial, a exploração desta tarefa foi encarada pelos alunos de dois modos diferentes. Para as meninas, a proposta fazia parte de uma aula de Matemática, e, por essa razão, tiveram, desde o início, cuidado com a interpretação gráfica da jogada e com a escala a utilizar no desenho do esquema da jogada. Para os meninos, a tarefa começou a ser explorada sem eles se preocuparem muito com o caráter matemático da mesma, pois o seu interesse estava mais centrado na discussão futebolística.

Ao notarmos essa postura diferenciada para a mesma situação, convocamos os líderes dos grupos e afirmamos que os grupos deveriam analisar a situação do ponto de vista matemático, o qual eles teriam que interpretar, cuidadosamente, a representação da jogada contida no gráfico. Logo após esses momentos, os grupos optaram por começar fazendo o relato da jogada em um gráfico, tal como foi pedido na primeira questão.

A primeira questão a ser discutida pelos grupos centrou-se na forma como muitos dos alunos interpretaram o gráfico da jogada. Em um momento, durante o desenvolvimento dessa tarefa, o professor lembrou os alunos que eles estavam interpretando uma jogada de uma partida de futebol, na qual o gráfico representava a distância da bola em relação linha de fundo e não à distância a um ponto fixo. Deste modo, o professor resolveu questioná-los acerca da diferença entre as duas interpretações e, nessa altura, a participação dos alunos começou a ser notada.

Depois de alguns minutos, alguns alunos já haviam feito as suas primeiras narrações e comentários sobre a jogada representada graficamente. Estas narrações foram feitas através de resultados de muitas discussões entre os alunos em seus grupos. Durante essas discussões, a intervenção do professor era mínima, pois a postura do professor foi aceitar tudo o que eles fizessem, para depois explorar suas afirmações com o intuito de verificar se eles estavam-se desenvolvendo com respeito às interpretações realizadas.

As discussões dos alunos eram de grande valia, pois eram através dessas discussões que eles expressavam seus modos de pensar. Os alunos se envolveram no desenvolvimento desta tarefa, pois, quando encontravam uma jogada adequada, chamavam o professor rapidamente para ver se ele concordava com suas jogadas narradas. O entusiasmo com que os

alunos receberam esta tarefa exploratório-investigativa diz respeito ao fato de eles se sentirem confrontados com uma situação futebolística.

Permitimos as discussões das questões pelos alunos entre si, procurando, assim, justificações para determinadas conjecturas formuladas a propósito da jogada. Percebemos nos momentos das justificações das narrações das jogadas, também, foi um bom momento de troca de idéias entre os alunos e de procura de argumentos para defender suas opiniões. Apresentamos, a seguir, algumas das discussões e diálogos entre os participantes deste estudo.

Durante o desenvolvimento das questões, apareceram perguntas de toda a natureza, principalmente, feita pelos meninos. Em um desses momentos, o aluno Igor disse: *"professor essa jogada representada nesse gráfico resultou em gol?"* O professor problematizou: *"o que você acha?"* Igor respondeu: *"eu acho que foi."* Então, o professor disse: *"se você está afirmando que foi, quem sou eu para discordar?"* Igor retrucou, dizendo: *"mas professor, se foi gol, quem fez o gol?"*

Nesse momento, o professor ironizou ao dizer: *"meu jovem, pense um pouco, o Dida que não foi né?"* Com isso, Igor, em tom de brincadeira, disse: *"nunca se sabe professor, porque se o Dida fosse um Rogério Ceni, poderia ter sido ele, não é mesmo? (risos)."* O professor instigou-o, dizendo: *"mas a situação está em suas mãos e, você precisa transcrever uma jogada, uma coisa eu tenho certeza, se teve gol, foi um dos onze jogadores que estavam jogando que fez o gol, certo?"* Igor disse: *"lógico, né meu jovem."*

Nesse momento, o aluno Igor perguntou: *"professor, é preciso considerar a partida que o Brasil ganhou da Argentina?"* O professor, respondeu: *"bom, a princípio, seria interessante que você considerasse, porque naquela partida o Brasil saiu vencedor, não acha?"* Igor disse: *"é, mas se eu considerar justamente aquela partida, o gol saiu obrigatoriamente de pênalti porque os três gols do Brasil foram feitos pelo Ronaldinho barrigudinho e de pênalti ... (risos)"* O professor disse: *"muito bem, então se o gol foi de pênalti, será que esse gráfico está bem representado?"*

Nesse momento, Luiz Victor disse: *"eu acho que não, porque, para um jogador bater um pênalti, demora mais de um minuto porque até o juiz marcar o pênalti e autorizar a cobrança. Nossa, só no pênalti, já foi o tempo todo da jogada."* Depois dessa justificativa, o professor falou: *"muito bem, Luiz Victor, eu não tinha pensado nessa possibilidade, ainda, mas, com base na representação gráfica e no jogo lá no Mineirão, aconteceu ou não o gol?"* Igor interagiu novamente, dizendo: *"se considerar tudo isso, não foi gol não, mas se eu não quiser considerar aquele jogo e, elaborar uma jogada que representa esse gráfico está certo*

também, não está professor?" O professor disse: *"você é quem sabe Igor, discuta com o seu grupo e veja o que é melhor."*

Percebemos que as interações e interlocuções no desenvolvimento da tarefa exploratório-investigativa, principalmente, entre o professor e o aluno Igor foi notórias. Desta maneira, resolvemos investigar o que Igor estava achando desta tarefa e os porquês do seu envolvimento. Essas informações são provenientes de conversas informais entre esse aluno e o professor-pesquisador.

Apresentamos, a seguir, algumas características referentes ao aluno e também à relação de amizade existente entre ele e o pesquisador.

Foto 3: Aluno Igor (Líder do grupo VI – Los Hermanos)

Igor é um garoto esperto que gosta muito de praticar esportes, conversar com os seus amigos, além de gostar de ler livros de piadas e ver televisão. Para ele, *a Matemática está presente nas vidas das pessoas e tem o papel de desenvolver seus conhecimentos e a inteligência.* Ele é um garoto que gosta de desafios e, por isso, acha a Matemática a melhor de todas as disciplinas. Para ele, *aprender Matemática apenas de uma maneira, estressa, pois, é preciso ter alguns desafios, charadas, piadas e jogos nas aulas de Matemática.* Ele se considera um dos melhores alunos da classe e, sobre essa afirmação, constatamos, na prática dos episódios de ensino um alto índice de participação e envolvimento.

Segundo Igor, o trabalho em grupo é importante, segundo ele, *"para se aprender a conviver com pessoas de diferentes opiniões."* De acordo com a professora da classe, ele é atento, organizado e sempre responsável com as suas tarefas e afazeres. Percebemos que ele

possui certa facilidade em comunicar suas idéias, quer seja falando ou escrevendo e não se inibe em participar das discussões apresentando suas idéias.

Segundo a professora, ele é aquele aluno que tem um grande potencial e gosta de demonstrar tal potencial. Ele possui uma amigável relação com os colegas de classe, fato este demonstrado no gosto em querer ajudar os outros alunos no trabalho em sala de aula. Para ele, a Matemática é uma ciência útil para todos, pois ela está presente no dia-a-dia. Além disso, para ele, a Matemática é a matéria que faz você pensar e, segundo ele, o fato de ter que pensar é o motivo pelo desgosto e dificuldades de muitos alunos. De acordo com ele, os alunos não gostam de parar para pensar e se concentrar em um problema para solucioná-lo.

Sobre a professora da classe, Igor disse que gosta dela pela sua humildade e paciência com que lida com a classe toda. Ele ainda ressaltou que *"para um aluno aprender, não basta o professor ser bom, é preciso o aluno querer aprender, pois se ele quiser aprender algo, com certeza, o professor auxiliará e ensinará aquele aluno."* Ele ressaltou ainda que durante os seus anos de escolaridade nunca teve problemas com nenhum professor.

Para Igor, uma boa aula de Matemática é aquela em que o professor apenas coloca as questões e auxiliam os alunos em seus modos de pensar. Ele gosta das tarefas que forçam a cabeça para pensar, valorizando, assim, problemas e investigações. *"Prefiro os problemas porque num problema eu preciso parar e pensar e num exercício é só olhar o exemplo e fazer a mesma coisa, só que com números diferentes"*. Salientamos, ainda, que ele declarou que nunca antes tinha aprendido da maneira como estava aprendendo nestes episódios de ensino. Segundo ele, *"essas aulas e essas tarefas tratam de um tipo de trabalho totalmente novo e interessante"*.

Sobre os aspectos relacionados à tarefa exploratório-investigativa "A Rivalidade entre Brasil e Argentina", ele se envolveu com muita satisfação e ansiedade, pois o futebol é o seu esporte favorito e porque se tratava do Brasil, bem como, também, porque à tarefa mostrava um pouco da rivalidade existente no maior clássico que existe no mundo da bola. Igor viu essa tarefa de forma bem interessante porque *"além de falarmos de Matemática estávamos falando de futebol e, disso, todo o brasileiro que se diz ser brasileiro entende ... (risos)"*.

Quando Igor recebeu essa tarefa exploratório-investigativa, sabia que ela estava relacionando a Matemática a uma partida de futebol e, segundo ele, *"o mais importante era que o gráfico estava registrando uma jogada de um jogo do Brasil e de uma partida que o Brasil se saiu vencedor"*. Para ele, essa tarefa exploratório-investigativa, a princípio, traria grandes surpresas, mas que seria legal trabalhar assim *"porque além de estar aprendendo mais sobre Funções e sobre Matemática estávamos nos divertindo."* Igor afirma ainda que *"é*

impossível não gostar de Matemática com tarefas, envolvendo futebol ou, até mesmo, outras coisas que gostamos de fazer".

Na realização desta tarefa exploratório-investigativa, o grupo liderado por Igor, resolveu dividir a tarefa em duas partes. Igor foi o responsável em desenvolver o desenho do campo que tinha por objetivo fazer um esquema da jogada na planta do campo e os outros componentes do grupo em fazer as narrações das jogadas. Ele utilizou como primeiro procedimento descobrir qual seria a escala que iria utilizar.

Segundo ele, a sua preocupação estava em encontrar a escala do campo para poder fazer o esquema da jogada com precisão. Depois de realizar alguns cálculos, ele concluiu que cada centímetro, no esquema do campo, correspondia a dez metros na realidade. A colocação dos jogadores no campo foi ainda precedida pela troca de impressões relativas à verdadeira posição dos jogadores. Para a realização do desenho do campo, Igor utilizou régua e compasso[33]. Igor teve uma postura participativa durante os momentos de discussão, pois, deu contribuições relativas à questão da marcação das distâncias no campo e também do posicionamento dos jogadores.

Durante o desenvolvimento dessa tarefa, interagíamos e discutíamos com o grupo liderado pelo aluno Igor. Acreditamos que essa interação foi boa para a dinâmica do trabalho. Apresentaremos, a seguir, uma das nossas interlocuções com esse grupo.

O professor perguntou: *"e aí, como está a jogada de vocês?"* Luiz Vitor, disse: *"está indo a todo vapor"*. Nesse momento, o professor resolveu se achegar a esse grupo para discutir com eles, alguns aspectos relativos à jogada que eles estavam fazendo e às conjecturas que eles estavam levantando. O professor perguntou: *"e aí, foi gol ou não? O que acham?"* Igor disse: *"temos que ver."* Ricardo falou: *"para mim, foi."* Luiz Vitor também disse*: "sei lá, depende."*

Nesse momento, o professor disse: *"temos aqui posturas diferentes, vocês têm que ter em mente que nessa situação você é o dono da situação, pois tudo que você fizer de diferente você precisa argumentar e registrar para defender o seu posicionamento, certo?"* Em seguida, Igor perguntou: *"ah tá, então eu não preciso considerar a partida que o Brasil ganhou da Argentina?"* O professor respondeu: *"você é o dono da situação, se você acha que deve, faça. No entanto, não se esqueça de teorizar e registrar sobre a jogada, isso é o que importa"*. Insatisfeito com essa situação, Luiz Vitor argumentou: *"mas, professor, eu preciso*

[33] Ressaltamos aqui, que pedimos para eles trazerem régua e compasso desde o primeiro episódio. A utilização desses instrumentos não era habitual nas aulas dessa turma, mas que nesses episódios estes instrumentos teriam algum papel na realização da tarefa. O próprio aluno Igor reconheceu que isso influenciou o trabalho deles no grupo.

considerar o gráfico da jogada registrada aqui, não precisa?" O professor falou: *"esse sim, você precisa considerar duas coisas que estão aí no gráfico*".

Nesse momento, Luiz Vitor pensativo perguntou: *"que coisas?"* O professor disse: *"eu não sei, pare, observe e tire as tuas próprias conclusões."* Nesse momento, Igor pergunta: *"são as duas grandezas, não são?"* Luiz Vitor disse: *"ah é, temos que considerar a distância e o tempo gasto na jogada, não é mesmo?"* Igor disse: *"ah, é verdade"*. O professor afirmou: *"muito bem, meus jovens, estou gostando do trabalho de vocês, continuem persistentes em seus trabalhos e, lembrando sempre de justificar tudo que fizerem."*

Quando Igor foi confrontado com o Luiz Vitor sobre a questão se foi ou não gol, pelo fato de Luiz Vitor acreditar que tinha sido gol, Igor procurou explicar a razão de ter achado que a jogada não tinha resultado em gol. *"Um time é difícil de ficar mais de um minuto com a bola, principalmente, num jogo entre Brasil e Argentina."* Depois da argumentação do Igor, Luiz Vitor se referiu, ainda, ao fato desta jogada não ter sido única, pois, para ele, existem muitas possibilidades de jogadas, que cada um poderia ter uma. Igor também discutiu a possibilidade de conhecer ou não o que se passava com a bola entre os diferentes instantes assinalados no gráfico. Segundo Igor, *"é impossível com este gráfico saber se o passe da bola era mais rápido ou mais lento, se a bola ia pelo ar ou pelo chão, ou se a bola ficava mais atrás ou mais à frente."*

Ao longo da exploração da tarefa na aula, o trabalho do grupo "Los Hermanos" manifestou-se em dar auxilio ao Igor com o restante do grupo. No entanto, todos os componentes trabalharam positivamente durante o processo de interpretação do gráfico e da identificação da escala para fazer a planta do campo, juntamente com as marcações das posições dos jogadores no campo. Desta maneira, eles começaram formulando conjecturas dos acontecimentos ocorridos durante a jogada, na qual os confrontos das opiniões e idéias entre os alunos Igor e Luiz Victor foram constantes.

Nos momentos de reflexão desta tarefa, Igor considerou importante o trabalho com o seu grupo, pois o grupo ajudou muito em todas as investigações. Para ele, os momentos de discussão foram de grande importância, *"pois serviram para ouvir mais opiniões e para surgirem mais idéias dos alunos."*

Analisando o desempenho do aluno Igor nesta tarefa exploratório-investigativa, salientamos alguns dos aspectos que pretendemos destacar neste trabalho. Primeiramente, a maneira como ele se envolveu e comunicou suas idéias através das narrativas orais e escritas. Igor começou procurando organizar todos os dados que julgava importantes para, posteriormente, poder formular conjecturas relativas à sua própria jogada. Assim, procurou

saber primeiro à escala da planta do campo, para depois se preocupar com as possíveis posições da bola nos vários momentos da jogada.

Na narrativa escrita, entregue pelo grupo, consta uma narrativa adequada à jogada representada graficamente. Todas as conjecturas formuladas implicitamente no relato e no esquema eram plausíveis. No entanto, alguns alunos do grupo não esboçaram qualquer tentativa de argumentação.

Igor demonstrou persistência no trabalho em seu grupo, pois, por vezes, ele quis avançar nas questões que a tarefa propunha e os outros alunos componentes do seu grupo continuavam a fazer diversos tipos de jogadas. Igor justificava suas conjecturas, mas não de maneira natural, pois não procurava explicar espontaneamente os porquês das suas descobertas, ele não sentia necessidade de fazer isso. Suas justificações surgiam quando solicitávamos e nos episódios de ensino destinado às discussões.

Percebemos uma possível influência que o trabalho em grupo teve para as narrativas dos alunos em sala de aula, realizados pelo aluno Igor. Podemos concluir que ele influenciou os colegas, pois sua postura de liderança e independência contribuiu para este tipo de comportamento. Para Igor, o trabalho em grupo ajudou em partes, pois, de acordo com ele, tornava-se difícil parar para pensar em uma questão e ter que interromper o trabalho para explicar aos seus colegas outras questões. Entendemos que esta atitude impediu a geração de algumas discussões no grupo. No entanto, ele mostrou disposição em colaborar e em ajudar os colegas sempre que fosse preciso.

Esta tarefa exploratório-investigativa nos pareceu mais propícia às verdadeiras interações entre os alunos do que as restantes, justamente pelo fato de terem que entregar até o final da aula, uma narrativa escrita da investigação do grupo. Isso ajudou no desenvolvimento dos alunos. Nossa influência no trabalho do aluno Igor foi notória nos momentos de discussão, pois aproveitávamos para colocar a ele novos desafios.

Alguns alunos queriam que nós confirmássemos seus posicionamentos. No entanto, minha postura foi discutir as situações propostas e problematizar ainda mais as questões. Desta maneira, preferimos não apresentar aos alunos as respostas e preferimos deixar as questões em aberto para que os alunos explicassem seus posicionamentos. Eu caminhava pela sala de aula e em algumas situações, pedia para os alunos interpretarem melhor a situação verificando se no tempo decorrido teria sido possível acontecer às narrativas registradas por eles. Assim, os alunos concluíram que um segundo era um intervalo de tempo pequeno para ser marcada uma falta. Com essas conclusões, os alunos reestruturavam suas narrativas.

Na elaboração do esquema da jogada, foi necessária nossa intervenção junto a alguns alunos que se preocupavam pouco com as distâncias indicadas pelo gráfico, sublinhando então ser preciso desenhar um esquema com certo rigor e por essa razão, além de utilizarem instrumentos de desenho, eles teriam que considerar as dimensões do campo.

As estratégias utilizadas para as marcações das distâncias do campo foram variadas: alguns alunos determinaram quantos metros correspondia 1 cm no campo; outros preferiram dividir o meio campo ao meio e, tornaram a dividir uma das partes obtidas ao meio e assim, sucessivamente, ficando com o campo dividido por linhas em que cada linha correspondia a um determinado número de metros.

Alguns alunos interpretaram o gráfico de maneira incorreta, consideravam a distância da bola à linha de fundo e não ao ponto médio da mesma. Este fato acabou por levá-los a dividir o campo em linhas paralelas à linha de fundo e até a comentar que o ideal era desenhar no campo uma malha quadriculada tal como acontece nos mapas. Nesses momentos, percebi que alguns alunos possuíam grandes dificuldades sobre a idéia de escala. Sendo assim, intervimos relembrando aos alunos algumas idéias do conceito de escala, pois este conceito era um dos pré-requisitos para o desenvolvimento desta tarefa.

4.5. Quarta Tarefa Exploratório-Investigativa: A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou desencadear um ambiente de investigação em torno do jogo de xadrez, buscando, na história, fatos do seu descobrimento e conceitos matemáticos extraídos da lenda desse jogo. Pretendíamos que os alunos compreendessem como **generalizar leis de diferentes tipos de Funções**, em que eles aprenderam a tomar uma Função como uma expressão analítica, pois, como sabemos, essa é mais uma forma de representação de uma Função.

Essa tarefa exploratório-investigativa foi apresentada à turma no final do episódio de ensino no dia 23 de agosto de 2005. Resolvemos relembrar e discutir algumas idéias referentes ao conceito de Função como dependência e correspondência entre duas grandezas no início do episódio de ensino desse dia. Iniciei esse episódio apresentando aos alunos, algumas frases envolvendo o termo Função e alguns exemplos, nos quais o conceito de Função se fazia presente no cotidiano. No Anexo XII, apresentamos algumas das frases relacionadas ao termo Funções registradas pelos grupos em suas narrativas escritas. Os dois episódios seguintes aconteceram no dia 24 de agosto de 2005 e foram dedicados para as discussões e para o entendimento das idéias referentes a esta tarefa exploratório-investigativa.

Nestes episódios, os momentos foram destinados à discussão e à interpretação dos caminhos percorridos pelos grupos. A montagem das narrativas escritas dessa tarefa foi feita depois dos momentos de discussão e reflexão. No Anexo XIII, apresentamos os exemplos que discutimos com os alunos no início do episódio de ensino. Esses exemplos constituíram-se em algumas idéias que envolvem o conceito de Função, como dependência e correspondência entre duas grandezas.

Uma das dimensões importantes se relacionou com a solicitação do professor/pesquisador para os alunos escreverem frases envolvendo o termo Função e das situações exploradas envolvendo o conceito de Função. Apresentamos, a seguir, algumas frases registradas nas narrativas escritas de um grupo.

*"Eu vivo em **função** da alimentação"*
*"As pessoas vivem em **função** dos rios"*
*"A escola vive em **função** dos alunos"*
*"A igreja é sustentada em **função** dos dízimos que os fies dão"*
*"As arvores sobrevivem em **função** da terra"*
*"A televisão só pode ser assistida em **função** da energia"*
*"Os alunos estudam em **função** dos livros"*
*"Os professores dão aulas em **função** da atenção dos alunos"*
*"Nós escrevemos em **função** do lápis"*
*"Os doentes vivem em **função** dos médicos"*

O tempo restante deste episódio de ensino foi destinado à apresentação para a turma da noção de Função no cotidiano. O intuito dessa apresentação foi propiciar aos alunos entendimentos que tanto o termo Função como uma Função matemática está presente em nosso cotidiano. Apresentamos para os alunos, algumas frases envolvendo o termo função e algumas situações problemas, nas quais esse conceito estava presente, além de entregar as folhas referentes à tarefa exploratório-investigativa: "a lenda do jogo de xadrez e as Funções".

Apresentamos, a seguir, a forma como foi explicitado à classe o texto referente a esta tarefa exploratório-investigativa.

Lenda de xadrez e as Funções

Esta é uma das lendas sobre o surgimento do xadrez, mostrando um lado mais místico para o surgimento desse antigo e interessante jogo que fascina milhões de pessoas pelo mundo.

"Conta-se que o rajá indiano Balhait, entediado com jogos em que a sorte acabava prevalecendo sobre a perícia e a habilidade do jogador, pediu a um sábio de sua corte, chamado Sissa, que inventasse um jogo que valorizasse qualidades nobres, como a prudência, a diligência, a lucidez e a sabedoria, opondo-se às características de aleatoriedade e fatalidade observadas no nard (antigo jogo indiano com dados)".

Passado algum tempo, Sissa se apresentou ao rajá com sua invenção. Tratava-se de um tabuleiro quadriculado, sobre o qual se movimentavam peças de diferentes formatos, correspondendo cada formato a um elemento do exército indiano: Carros (Bispos), Cavalos, Elefantes (Torres) e Soldados (Peões), além de um Rei e um vizir (Rainha). Sissa explicou que escolheu a guerra como tema porque é a guerra onde mais pesa a importância da decisão, da persistência, da ponderação, da sabedoria e da coragem.

O rajá ficou encantado com o jogo e concedeu a Sissa o direito a pedir o que quisesse como recompensa. Sissa tentou recusar a recompensa, pois a satisfação de ter criado o jogo, por si só, já lhe era gratificante. Mas o rajá insistiu tanto que Sissa concordou em fazer um pedido:

- Desejo, como recompensa, um tabuleiro de Xadrez cheio de grãos de trigo, sendo que a primeira casa deve ter um grão, a segunda deve ter dois, a terceira deve ter quatro, a quarta deve ter oito, e assim sucessivamente, dobrando o número de grãos na casa seguinte, até encher todas as casas do tabuleiro com o número de grãos correspondentes.

O rajá se recusou a satisfazer um pedido tão modesto, e tentou persuadir Sissa a escolher uma recompensa mais valiosa. No entanto, Sissa disse que para ele bastava que lhe fosse conferida aquela recompensa, e nada mais.

Diante disso, o rajá ordenou que lhe dessem um saco de trigo, julgando que nele haveria pagamento de sobra, mas Sissa se recusou a aceitá-lo. Disse que não queria nem um grão a mais nem a menos do que lhe cabia receber.

Foi só então que o rajá ordenou aos seus matemáticos que calculassem a quantia exata que deveria ser paga, e descobriu, para sua consternação, que todo o trigo da Índia não era suficiente, aliás, todo o trigo cultivado no mundo, durante dezenas de anos, não seria suficiente! A quantia corresponde à soma da série:

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1.024 + 2.048 + 4.096 + ... + = ?????

Para alívio do rajá, Sissa disse que já sabia que sua recompensa não poderia ser paga, pois aquela quantidade daria para cobrir toda a superfície da Índia com uma camada de quase uma polegada de espessura.

Esta é apenas uma das lendas, mas que prova que os criadores desse jogo foram pessoas altamente inteligentes ou muito astutas e com grande habilidade em matemática e uma boa capacidade lógica. A lenda nos apresenta uma aplicação de funções exponenciais.

O problema consiste em determinar qual é o montante de grãos de trigo que o rei devia pagar seguindo a regra determinada por Sissá.

Tarefas Propostas

Consegues determinar uma função exponencial que da a quantidade de grãos em cada casa em função do número da casa? Suponha que G seja a quantidade de grãos e C o número da casa.

Consegues determinar uma função exponencial que da a somatória das casas em função do número da casa? Suponha que S seja a quantidade total ou a somatória e C seja o número da casa.

Consegues determinar a quantia exata de grãos que o rei teria que pagar para Sissa.

Com base nessa tarefa elabore um relatório mostrando tudo que aprendestes nessa tarefa, como: O que é para ti uma função exponencial? Essa forma de resolver e solucionar problemas ajudou o grupo a refletir sobre o que aprendestes? Enfim, depois dessa tarefa, o que você aprendeu? Exemplifique

A dinâmica metodológica dessa tarefa exploratório-investigativa foi constituída para explorar matematicamente a lenda do jogo de xadrez, fazendo relações com situações, nas quais o conceito de Função se fazia presente. Além de procurar identificar os significados do termo Função na Matemática e no dia-a-dia, deixar os alunos levantar as conjecturas e suposições e levá-los a testes e provas das mesmas.

4.5.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-investigativa A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções

O desenvolvimento desta tarefa exploratório-investigativa se realizou em duas fases. Em um primeiro momento, (final do episódio de ensino do dia 23 de agosto de 2005), apresentamos as questões para os alunos, e, em um segundo momento, (dois episódios de ensino do dia 24 de agosto de 2005) coordenamos as discussões na frente da sala, sempre fazendo o uso do quadro negro.

Nestes episódios, apesar de coordenarmos as discussões e registrar no quadro os processos de resolução, estávamos dispostos a considerar as narrativas dos alunos através das suas "vozes", ou seja, questionávamos os alunos o tempo todo, pois entendíamos que eles precisariam ser responsáveis por se posicionarem perante as questões propostas. Sempre procurávamos estabelecer um diálogo com toda a turma, pois as características desta tarefa exploratório-investigativa propiciaram a nossa coordenação. Esses diálogos foram propícios para o desenvolvimento dos alunos. Apresentamos, a seguir, algumas das interlocuções com os alunos.

O professor começou os momentos de discussão, problematizando: *"o que queremos aprender com essa situação?"* Nesse momento, todos observaram e ninguém disse nada. Através desta reação da turma, o professor disse: *"temos uma lenda em nossa mão, e muita Matemática a ser explorada nessa lenda. Por onde podemos começar as nossas explorações?"* O silêncio continuava reinando na sala e, com isso, o professor disse: *"o que queremos descobrir com essa lenda?"*

Nesse momento, o aluno Neto disse: *"queremos determinar o montante de grãos que o rei deveria pagar para o seu servo e as leis que determinam esse montante."* O professor perguntou: *"muito bem, Neto, mas por onde começaremos?"* Neto disse: *"podemos desenhar um tabuleiro do jogo de xadrez para melhor entendermos a regra."* Com essa sugestão do aluno Neto, o professor registrou no quadro negro um tabuleiro de xadrez contendo 64 casas, como a representada a seguir.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
17	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
25	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**
33	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
49	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
57	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**

Figura 19: Registro do tabuleiro no quadro negro feito pelo professor

Concluída essa tabela, o professor disse: *"Um tabuleiro de xadrez possui 64 casas e o problema consistia em encontrar ou determinar a quantia exata de grãos que o rei teria que pagar para Sissá, mas qual é a regra proposta por Sissá?"* Letícia disse: *"a regra consiste*

em na casa posterior possuir o dobro de grãos da casa anterior." Nesse momento, Raíssa disse: *"mas quem está em função de quem aqui"?* O professor problematizou, dizendo: *"boa pergunta, o que vocês acham?"* Edson disse: *"eu acho que é a função que dá a quantidade de grãos em cada casa em função do número da casa, não é isso, professor?"* O professor perguntou novamente: *"estou com você, mas como representar essas duas grandezas?"*

Nesse momento, novamente o silêncio pairava na sala, mas Bianca disse: *"supondo que G seja a quantidade de grãos e C o número da casa."* O professor demonstrou ter gostado da resposta da aluna Bianca ao dizer: *"muito bem, Bianca, de onde você tirou essa idéia?"* Ela respondeu, dizendo: *"não sei, só pensei em G porque é a primeira letra grãos e C porque é a primeira letra de casa."*

Nesse momento, Letícia questionou, dizendo: *"como determinar uma lei que relaciona estas duas grandezas?"* O professor problematizou ainda mais ao dizer: *"quais são as duas grandezas?"* Letícia respondeu: *"quantidade de grãos e número da casa."* O professor concordou, no entanto, continuou problematizando: *"muito bem, mas qual depende uma da outra?"*

Neste momento, Igor disse: *"é a quantidade de grãos que depende do número da casa."* O professor novamente perguntou: *"e o que isso significa?"* Igor disse: *"Que para saber qual é o número de grãos que se deve colocar numa determinada casa eu preciso saber qual é a casa."* O professor perguntou: *"como assim?"* Igor respondeu: *"a grandeza G está em função de C, ou seja, G depende de C."* O professor disse: *"muito bem, eu concordo com a sua posição, mas será que todos concordam?"*

Novamente, nesse momento, o silêncio predominou e como ninguém se manifestou o professor perguntou novamente: *"qual é a lei que representa essa situação?"* Alexandre disse: *"é só montar uma tabela para melhor observar os valores."* O professor disse: *"como assim Alexandre? Podes vir aqui explicar melhor isso?"* Nesse momento, Alexandre saiu do seu lugar e foi até o quadro negro, no qual o professor estava. Ao chegar na frente da sala ele pegou o giz e fez uma tabela.

Apresentamos, a seguir, a tabela registrada pelo aluno Alexandre no quadro-negro.

Número da casa (C)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de grão (G)	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Tabela 5: Reprodução do registro da tabela apresentada pelo aluno Alexandre no quadro negro

Quando Alexandre concluiu essa representação, o professor disse: *"e agora, para onde vamos?"* Nesse momento, o aluno Neto perguntou: *"professor, precisamos fazer alguns*

testes, não precisamos?" O professor respondeu problematizando: *"será que não é preciso fazer suposições ou conjecturas antes?"* Danilo Maciel disse: *"Concordo com o professor, estou com ele e não largo."*

Depois dessa declaração do aluno Danilo Maciel, houve um interessante momento de descontração. Logo após, o professor perguntou: *"quem vai fazer a primeira conjectura?"* Letícia logo afirmou: *"será que não é G = 2 vezes C menos um?"* O professor disse: *"muito bem, mas precisamos fazer alguns testes, mas será que é essa a lei?"* Antes do professor fazer qualquer tipo de teste, Letícia disse: *"professor, não é não, pois, na segunda casa, a lei já falha."* O professor disse: *"muito bem Letícia, temos que estar cientes que para ser uma lei não pode falhar, ou seja, tem que valer para todos os casos, mas agora preciso de mais conjecturas."*

Nesse momento, muitos alunos faziam rabiscos em seus grupos e, enquanto isso, o professor disse: *"Pessoal não precisa ficar com vergonha, façam tentativas, quem sabe vocês conseguem, tentem, vamos lá."* Logo após, o professor registrou no quadro negro uma conjectura formulada por ele:

Conjectura de Márcio: $G = C^2 - 1$

Ao registrar essa conjectura no quadro negro, o professor disse: *"alguém consegue dizer se estou certo ou errado?"* Edson disse: *"eu acho que o professor está errado."* Nesse momento, o professor disse*: "Edson, me prove que a minha conjectura não está certa."* Edson mais do que depressa foi até o quadro negro e fez o seguinte registro.

Se $C = 1$, *então* $G = 1^2 - 1 = 0$

Depois de feito esse cálculo, Edson disse: *"tá vendo, professor, como a sua conjectura estava errada."* Neste momento, o professor disse: *"a conjectura que eu fiz, só foi para efeito de ilustração, mas, agora, precisamos tentar outras conjecturas, quem tem alguma quentinha aí?"* Logo aparecem duas conjecturas a serem provadas, foram às conjecturas do Igor e do Luiz Victor.

Para Igor, a função era dada por:

$$G = 2^C$$

Para Luiz Victor, a função era dada por:

$$G = 2^{C-1}$$

Duas conjecturas estavam para serem discutidas pelos alunos e pelo professor, pois eles precisavam testar para verificar qual era a verdadeira ou se não era nenhuma dessas conjecturas, qual a verdadeira. Nesse momento, o professor pediu para os dois alunos irem ao quadro-negro para fazerem testes e provarem se as suas conjecturas estavam certas. Igor foi o primeiro a ir até a frente da sala. No entanto, antes mesmo de ele fazer qualquer tipo de cálculo, disse: *"desisto, a minha também esta errada, mas acho e tenho certeza que a do Bill (Luiz Victor) está correta."* O professor perguntou: *"será?"* Luiz Victor, confiante em sua conjectura, logo disse: *"professor, pode fazer todos os testes que quiser, será essa a fórmula."* O professor perguntou à turma: *"alguém não entendeu a conjectura do Luiz Victor?"*

Nesse momento, todos ficaram em silêncio, alguns apenas afirmavam, *"é essa mesmo, concordo com o Luiz."* Igor brincando disse: *"professor, olha só, o Luiz é do nosso grupo, ponto para o nosso grupo."* O professor disse: *"muito bem, Luiz, mas o que te fez pensar que seria essa a fórmula correta? De onde você tirou essa formula?"*

Neste momento, Letícia disse: *"Professor, acho que ele pensou na regularidade que existe aí, aí não tem uma regularidade?"* Logo, o professor disse: *"Luiz, responde para ela"*. Luiz Victor falou: *"acho que existe, porque a base eu tinha certeza que era dois porque estava sempre dobrando."* O professor problematizou, perguntando: *"e por que o menos um no expoente?"* Luiz Victor pensou um pouco, mas disse: *"bom, porque se não tivesse ele, não daria certo."* Com base na resposta de Luiz, o professor perguntou: *"Como assim, não daria certo?"* Luiz Victor respondeu: *"não daria certo porque, na primeira casa, se não tivesse o menos um, daria 2, na segunda casa, daria 4, na terceira casa, daria 8, aí é só continuar e, por isso, se eu tirasse um do expoente na primeira casa ficaria 2 elevado a um menos um, que dava 2 elevado a zero que é igual ao um da nossa tabela."*

O professor, satisfeito com as argumentações de Luiz Victor, disse: *"parabéns, Luiz Victor, pela resposta, eu concordo contigo, se alguém discorda a hora é agora."* Ninguém discordou, porque a fórmula apresentada por Luiz estava correta. No entanto, nesse momento, Alisson fez uma consideração ao dizer: *"por que dois elevado a zero é igual a um?"* O professor pensou um pouco e, em seguida, disse: *"alguém quer explicar para o Alisson a sua dúvida?"* Ninguém se pronunciou, e então, o professor buscou auxiliar a sanar as dúvidas do aluno Alisson. Para isto, o professor fez alguns registros no quadro negro.

Apresentamos, a seguir, os registros feitos pelo professor.

$2^6 = 64$
$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = 2$
$2^0 = ?$

O professor disse: *"pessoal, pensem comigo, o que está acontecendo com os expoentes?"* Alisson disse*: "estão diminuindo"* O professor perguntou: *"o que está acontecendo com as potências?"* Alisson disse: *"também está diminuindo"* O professor, então, disse: *"diminuindo como?"* Nesse momento, Letícia disse: *"está dividindo sempre por 2."* Com isso, o professor falou: *"se está sempre dividindo por 2, quanto é dois elevado a 0?"* Letícia pensou um pouco e disse: *"usando essa linha de raciocínio é igual a 1."* Nesse momento, o aluno Alisson disse: *"eu concordo com a Letícia, professor."*

Depois de induzir esses alunos a convenção de que o número dois elevado a zero é igual a um, o professor pediu a atenção da turma para relembrar algumas propriedades de potenciação com eles. Em seguida, perguntou: *"todo número elevado a zero é igual a um, mas por que todo número elevado ao expoente zero é igual a 1?"* O professor apresentou aos alunos a seguinte justificativa: *"para atribuirmos um significado a x^0, isso dever ser feito de modo a continuar valendo a lei fundamental: suponha que você tenha X^6 dividido por X^6, qual é o valor? Tudo o que sabemos que todo número dividido por ele mesmo é sempre igual a quantos?"* Raissa disse: *"igual a um."* O professor disse: *"muito bem, Raissa, mas pela propriedade da divisão da potenciação temos."*

Nesse momento, o professor dirigiu-se até o quadro negro e fez o seguinte registro:

$\frac{X^6}{X^6} = 1$, com base nesse exemplo, podemos entender a seguinte propriedade: $\frac{X^M}{X^N} = X^{M-N}$

Nesse momento, o aluno Heber disse: *"está correto por causa da propriedade"* O professor disse: *"a Raissa disse que todo número dividido por ele mesmo é igual a um e aqui X foi dividido por ele mesmo, mas ficando elevado a zero não é mesmo, o que vocês concluem?"* Heber pediu a palavra e, falou: *"que todo número elevado a zero é igual a um pela propriedade da divisão da potenciação."*

Depois dessa pequena revisão sobre algumas idéias da potenciação, o professor começou a discussão da segunda situação. Esta situação possuía como finalidade, a determinação da lei que representava a somatória das casas em função do número da casa, em que S representava a quantidade total ou a somatória e C representava o número da casa.

Ao concluir a leitura que continha essa situação, o aluno Igor perguntou: *"professor, o que é uma função exponencial?"* Nesse momento, o professor ficou preocupado, pois, nesse episódio, ele queria levar seus alunos a intuírem e descobrirem por eles mesmos, o que seria uma função exponencial. A postura do professor foi bem tranqüila, pois preferiu dialogar um pouco com o aluno Igor e problematizar a pergunta dele, antes de responder a pergunta feita pelo mesmo. O professor disse: *"Igor, o que você entende por função?"*

Nesse momento, Igor disse*: "bom, para mim, função é uma relação de dependência existente entre duas grandezas (uma dependendo da outra) ou uma função é uma correspondência entre essas duas grandezas, pois uma corresponde à outra."* Logo, o professor disse: *"correto Igor, mas o que a palavra exponencial lembra você?"* Igor respondeu, dizendo: *"a palavra exponencial lembra expoente*" O professor falou: *"Igor, se você juntar as duas definições que você me deu (de função e de exponencial) o que você conclui"?* Igor disse: *"ainda não sei professor"* O professor instigou-o ao afirmar: *"anda, Igor, você sabe, pare e reflita sobre as duas definições e você descobrirá o que é uma função exponencial.*"

Nesse momento, disse: *"professor, uma função exponencial é um tipo de função que tem como expoente uma das variáveis.*" O professor perguntou: *"você acha que é isso?"* Famylson respondeu: *"sim, eu acredito que seja isso, que nem na lei que encontramos ali atrás."* (referindo-se a primeira situação).

Nesse momento, o professor dirigiu sua atenção ao aluno Igor, perguntando: *"e aí, Igor, chegou a alguma conclusão?"* Igor disse: *"Não sei se estou certo, mas, para mim, uma função é exponencial quando o X é o expoente."* Nesse momento, o professor afirmou: *"o Famylson afirmou que uma das variáveis está no expoente, qual é essa variável"?* Alexandre respondeu: *"é a variável independente."* O professor perguntou: *"na nossa situação agora qual será a variável que estará no expoente?"* Bianca entrou em cena, dizendo: *"a variável que estará será o número da casa que é representada pela letra C."* O professor concordou com Bianca, dizendo: *"muito bem Bianca, mas eu não sei ainda qual é essa lei o que fazer para descobrir?"*

Nesse momento, o aluno Neto disse: *"monta uma tabela novamente, professor, para ajudar a visualizar."* Nesse momento, o professor se dirigiu até o quadro-negro e registrou a seguinte tabela, com a ajuda dos alunos na realização dos cálculos.

Número da casa (C)	Quantidade de Grãos em cada casa	Somatória dos Grãos na casa (S)
1	**1**	**1**
2	**2**	**3**
3	**4**	**7**
4	**8**	**15**
5	**16**	**31**
6	**32**	**63**
7	**64**	**127**
8	**128**	**255**
9	**256**	**511**
10	**512**	**1023**

Tabela 6: Reprodução registro da tabela apresentada pelo professor no quadro negro

Depois de registrado, uma tabela semelhante a essa, o professor perguntou: *"vocês conseguem encontrar alguma lei a princípio? Se não, eu preciso de conjecturas, alguém tem alguma aí? Qual é a lei que relaciona a somatória dos grãos em função do número da casa?"* Depois de alguns segundos, duas conjecturas apareceram, uma de Igor e outra de Luiz Victor. Igor disse: *"professor, a lei que relaciona essa situação é dada por:* $S = 2^C - 1$*."*

Nesse momento, o professor perguntou para todos os alunos: *"será que é essa a lei?"* Muitos afirmaram que sim. Depois de alguns testes feitos pelos alunos Igor Luiz Victor, todos concluíram que essa era mesmo a lei. Durante a explicação deles sobre sua origem, o professor perguntou: *"meninos, porque menos um?"* Igor respondeu: *"essa lei foi muito fácil descobrir porque, por exemplo:* 2^{10} *é igual a1024 e na tabela estava o 1023. Foi olhando para essa valor que descobri a lei."* O professor disse: *"muito bem, meninos, tudo o que precisamos ter é uma pitada de criatividade para não ficar parados, sempre que nos depararmos com alguma situação, precisamos começar a ver as possibilidades de resolução, olhar para a situação de uma maneira critica e criativa, mas a terceira situação consiste em determinar o número exato de grãos. Pessoal, qual foi o número de grãos que o rei tinha que pagar para Sissá?"*

Nesse momento, Alexandre respondeu: *"para descobrir é só colocar 64 no lugar de C e aí encontrar o número."* O professor concordou com Alexandre, no entanto, perguntou: *"correto, Alexandre, mas como fazer isso?"* Nesse momento, Alexandre foi até o quadro-negro e fez o seguinte registro:

$$Se\ S = 2^C - 1\ então\ S = 2^{64} - 1$$

Ao ver esse registro, o professor disse: *"muito bem, Alexandre, mas qual é o valor, é um número grande ou pequeno?"* Alexandre respondeu: *"é um número enorme"*. Nesse momento, o professor disse: *"muito bem, pessoal, podemos representar esse número de diferentes maneiras como:* 2^{64} *é igual a: 2.2.2.2.2.2.2.2..... 64 vezes, mas quanto é* 2^{10}*?"* Fernando logo respondeu: *"é 1024."* Com base nisso, o professor registrou no quadro negro:

Se $2^{10} = 1024$,
então:$2^{64}=2^{10}.2^{10}.2^{10}.2^{10}.2^{10}.2^{10}.2^{4}=1024.1024.1024.1024.1024.1024.16$*, que é igual a* 1024^{6}

Nesse momento, o aluno Igor disse: *"professor, eu posso reduzir ainda mais esse número, não posso?"* O professor respondeu: *"como você faria isso, venha no quadro e escreva o que está pensando?"* Nesse momento, Igor foi até o quadro-negro e registrou:

Se 1024.1024 = 1048576 então: 1048576.1048576.1048576
é o mesmo que $1048576^{3}.16$

O professor, vendo o registro feito por Igor, disse*: "correto Igor, mas qual é o número?"* Nesse momento, Igor fez alguns cálculos com sua calculadora científica e, depois de feitos os cálculos, disse:

$2^{64}=1844674407^{19}$ *ou*
18446744070000000000000000000 - 1 = 18446744070000000000000000999

O professor brincou, dizendo: *"pequeno, esse número não é?"* Danilo respondeu: *"é professor, quem mandou esse Rei não saber Matemática, né, acabou se ferrando."*

Com base nessas interlocuções e, em todas as demais realizadas em sala de aula durante os episódios de ensino envolvendo essa tarefa, percebemos que muitos grupos se esforçaram em descobrir o valor exato da dívida do rei, pois desenvolveram muitos cálculos com o auxilio das suas calculadoras científicas.

Apresentamos, a seguir, as narrativas do Grupo Star Girls sobre esses cálculos.

Figura 20: Cálculos realizados pelo grupo Star Girls sobre essa tarefa exploratório-investigativa

Descrevemos, aqui, a maneira como foi desenvolvida e discutida essa tarefa. Depois desses momentos, acertei também que as narrativas escritas deveriam conter o trabalho desenvolvido nestes episódios de ensino, coordenado pelo professor/pesquisador, as dez frases envolvendo o termo Função e as três situações problemas, nas quais o conceito de Função se fazia presente.

4.6. Quinta Tarefa Exploratório-Investigativa: As Funções vão até a Lanchonete

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou criar um cenário exploratório em torno de uma situação, na qual os alunos pudessem desenvolver suas narrativas e argumentações, além de desenvolver a linguagem e os pensamentos algébricos, instigando-os a fazer descobertas, conjecturas e argumentações, justificando e comunicando matematicamente.

Essa tarefa foi apresentada à turma no início do episódio de ensino no dia 25 de agosto de 2005, quando fizemos algumas considerações a respeito do trabalho do professor em uma na perspectiva investigativa e, também, fizemos alguns apontamentos sobre a importância da criticidade no mundo em que vivemos. Nesse dia, faltou um professor na escola e a direção nos pediu para ficar outra aula na oitava série. Aceitamos o convite e aproveitei para apresentar a turma à tarefa "As Funções vão até a Lanchonete". Apresentamos, a seguir, a forma como foi explicitado à classe o texto referente a esta tarefa exploratório-investigativa.

AS FUNÇÕES VÃO A LANCHONETE

Situação Inicial

Sábado à noite quatro alunos da turma da oitava série, Alberto, Bruno, Carlos e Danilo, foram comer umas pizzas e tomar alguns sucos e refrigerantes na lanchonete Caju Lanches. Chegando lá, o garçon Leon já havia separado uma mesa para os quatro amigos se sentarem:

Desenho das mesas

A conversa ia animada quando chegaram Elias e Felipe. Leon apressou-se e ajeitou mais uma mesa ao lado da primeira, ficando assim a disposição:

Novo desenho das mesas

Era dia de reunião da turma para descansar e passar bons momentos brincando e conversando e logo chegaram Gláucio e Humberto. Nosso amigo Leon correu para colocar uma nova mesa ao lado das duas anteriores e avisou ao Negão (seu pai, dono da lanchonete) para preparar mais duas pizzas.

Nova disposição das mesas

A turma estava esperando mais companheiros e logo chegaram Ilton e João e mais uma mesa foi colocada. Faça um desenho representando a nova quantidade de mesas e seus ocupantes, sempre respeitando a mesma disposição das pessoas à sua volta.

Desenhe a representação das mesas quando chegaram Lindomar e Márcio.

Complete a tabela abaixo representando a quantidade de pessoas em relação ao número de mesas.

Número de Pessoas	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
Número de mesas					

Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 20 pessoas? E para acomodar 30 pessoas?

Se Forem colocadas 10 mesas, quantas pessoas podem ser acomodadas, usando – se a mesma disposição?

Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?

Consegues detectar uma regra que permite o cálculo rápido do número de pessoas se soubermos a quantidade de mesas disponíveis. Faça testes, formule conjecturas e encontre a fórmula.

Descrevas no relatório todo o processo realizado pelo grupo na realização dessa atividade.

Pelo que tu sabes sobre função, que tipo de função essa situação representa? O que você sentiu de dificuldades ao realizar esta experiência? O que aprendeu? O que já sabia? O que auxiliou na execução desta atividade? Essa forma de resolver problemas fez você refletir sobre o que e como aprendeu? Escrever matemática facilita sua comunicação? Diminui suas dificuldades com essa tarefa?

No momento de apresentação e arranque da tarefa, alguns alunos tomaram como objetivo central, a determinação da lei que determinava a Função. Durante os momentos de apresentação da tarefa, o professor disse: *"hoje, vamos trabalhar com seqüência de números de mesas e pessoas. Que tal descobrir relações entre a forma como as mesas são distribuídas, a quantidade de pessoas num certo número de mesas e o número de mesas com determinadas pessoas. Desafio a todos a encontrarem através de suas investigações, relações entre o número de mesas e o número de pessoas."*

A dinâmica metodológica dessa tarefa exploratório-investigativa foi criada para explorar relações entre grandezas variáveis, envolvendo uma tarefa com natureza mais aberta e que fugisse do tradicional. A totalidade das discussões a respeito dessa situação deveria ficar em torno dos grupos e os alunos teriam a liberdade de levantar as conjecturas e suposições e, levá-las a testes e provas das mesmas.

4.6.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-investigativa: As Funções vão até a Lanchonete

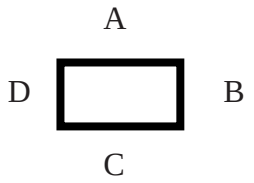
O desenvolvimento desta tarefa exploratório-investigativa na sala de aula aconteceu em duas fases. Nos dois episódios de ensino do dia 25 de agosto de 2005, apresentamos a tarefa à turma e, em um episódio de ensino do dia 26 de agosto de 2005, coordenamos as discussões e reflexões dos grupos.

Em todos os grupos, os alunos tiveram alguma dificuldade em iniciar essa tarefa, pois era uma das primeiras vezes que eles estavam trabalhando o conceito de Função como uma lei ou expressão matemática. Preparei esta tarefa com um enunciado dirigido, tentando orientar os alunos na exploração da tarefa. Os alunos, em geral, gostaram e se envolveram na atividade, talvez pela natureza geométrica e construtiva das seqüências das distribuições das mesas. A título de ilustração, apresentaremos a seguir, uma interpretação realizada pelo grupo "Star Girls", sobre quantas mesas eram necessárias para receber 100 pessoas.

Descrevemos o desenvolvimento do grupo “Star Girls” coordenado pela aluna Raíssa e transcrevemos a história conforme consta na narrativa escrita desse grupo.

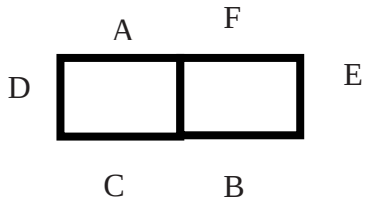
Situação Inicial

Sábado à noite quatro alunos da turma da oitava série, Alberto, Bruno, Carlos e Danilo foram comer umas pizzas e tomar alguns sucos e refrigerantes na lanchonete Caju Lanches. Chegando lá, o garçon Leon já havia separado uma mesa para os quatro amigos se sentarem.



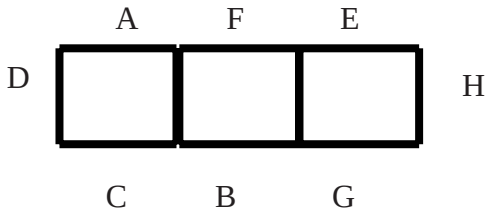
A = Alberto; B = Bruno; C = Carlos; D = Danilo

A conversa ia animada quando chegaram Elias e Felipe. Leon apressou-se e ajeitou mais uma mesa ao lado da primeira, ficando, assim, a disposição.



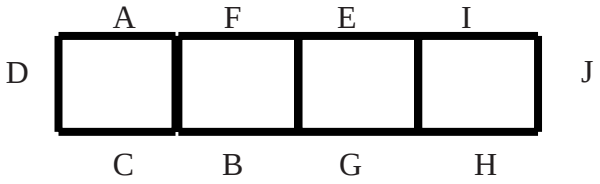
E = Elias; F = Felipe.

Era dia de reunião da turma para descansar e passar bons momentos brincando e conversando, e, logo, chegaram Gláucio e Humberto. Nosso amigo Leon correu para colocar uma nova mesa ao lado das duas anteriores e avisou o Negão (seu pai, dono da lanchonete) para preparar mais duas pizzas. Nova disposição das mesas:



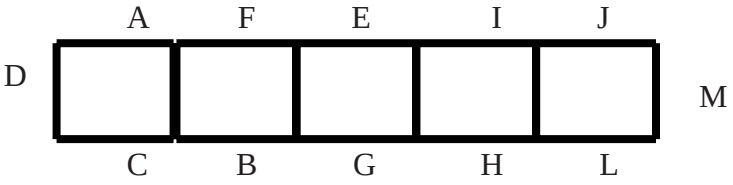
G = Gláucio; H = Humberto

A turma estava esperando mais companheiros e logo chegaram Ilton e João e mais uma mesa foi colocada. Faça um desenho representando a nova quantidade de mesas e seus ocupantes, sempre respeitando a mesma disposição das pessoas à sua volta. Nova disposição das mesas:



I = Ilton; J = João

Desenhe a representação das mesas quando chegaram Lindomar e Márcio. Nova disposição das mesas



L = Lindomar; M = Márcio.

Logo após, esse grupo elaborou uma tabela para registrar os valores das duas grandezas. Apresentaremos, a seguir, a tabela do grupo “Star Girls”:

P	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
M	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**

Tabela 7: Tabela apresentada pelo grupo Star Girls

As outras questões desta tarefa constavam em explorar:

Quantas mesas seriam necessárias para acomodar 20 pessoas? E para acomodar 30 pessoas?

Se Forem colocadas 10 mesas, quantas pessoas podem ser acomodadas, usando – se a mesma disposição?

Quantas mesas serão necessárias para receber 100 pessoas?

Consegues detectar uma regra que permite o cálculo rápido do número de pessoas se soubermos a quantidade de mesas disponíveis. Faça testes, formule conjecturas e encontre a fórmula.

O grupo “Star Girls” resolveu todas as questões de maneira satisfatória, na verdade, o desenvolvimento dessas alunas, foi além das nossas expectativas, pois nós queríamos apenas que os alunos compreendessem o conceito matemático de Função através de uma lei.

Essa tarefa exploratório-investigativa foi discutida nos grupos, e nenhum grupo manifestou grande dificuldade em expressar por escrito seus desenvolvimentos. Solicitamos aos grupos que escrevesse em cada questão como haviam resolvido. Nesse ponto, percebemos muita dificuldade, muitos até falaram como pensaram, mas não conseguiram colocar no papel seus pensamentos e raciocínios. Por exemplo, nas questões: quantas mesas seriam necessárias para acomodar 20 pessoas? E para acomodar 30 pessoas?

Os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em desenvolver os cálculos para encontrar o número de mesas. O interessante foi que todos os grupos utilizaram o recurso da disposição das mesas e o da tabela para tirarem algumas conclusões. A aluna Letícia declarou que existia uma regularidade nessa situação, porque sempre apareciam de dois em dois amigos e, com isso, essa idéia ficou tão forte para Letícia que a levou a dizer que a lei seria duas vezes algum número mais alguma coisa. Percebemos, também, que alguns alunos continuaram a tabela segundo a existência de uma regularidade para descobrir o valor exato,

já outros perceberam a maneira como as mesas já estavam dispostas. A cada duas pessoas que chegassem, aumentar-se-ia uma mesa e vice-versa.

Apresentamos, a seguir, algumas interlocuções entre o professor/pesquisador e os alunos durante o desenvolvimento dessa tarefa.

Em um momento, durante o desenvolvimento da tarefa, o professor perguntou: *"o que vocês fizeram para descobrir quantas mesas serão necessárias para acomodar 20 pessoas?"* Neto disse: *"primeiro eu fiz a multiplicação 9 x 2 que deu 18 mais 2 pessoas nas duas extremidades deu 20."* O professor perguntou: *"muito bem, mas como você pensou?"* Neto respondeu: *"como eu já sabia que o número de pessoas era 20, eu apenas procurei um número que vezes dois mais dois dava esse 20."* O professor continuou problematizando, dizendo: *"por que vezes dois Neto? E por que esse mais dois?"* Neto pensou um pouco e, depois disse: *"porque sempre chega de dois em dois amigos e mais dois porque dois foi o número que faltava para dar o número 20."*

Nesse momento, o professor perguntou: *"e quando for 30 pessoas, quantas mesas precisaram?"* Rapidamente, Igor disse: *"é fácil, professor, é só descobrir um número que vezes dois somado com dois dá o número 30."* Nesse momento, Neto disse: *"mas que número é esse?"* Danilo Hiroshi respondeu: *"Esse número é o 14"*. O professor disse: *"será?"* Neto argumentou, dizendo: *"lógico que é, professor, se duvidar, faz um desenho aí para o senhor ver."* O professor disse: *"Neto, venha fazer esse desenho para ver se eu concordo ou discordo de você."* Nesse momento, o aluno Neto não quis fazer o desenho no quadro para toda a turma. No entanto, o seu colega Alexandre foi antes até o quadro negro e montou uma tabela.

Apresentamos, a seguir, a tabela feita pelo aluno Alexandre no quadro negro.

M	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
P	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**22**	**24**	**26**	**28**	**30**

Tabela 8: Reprodução da tabela apresentada pelo aluno Alexandre no quadro negro

Concluída essa tabela no quadro negro, o professor disse: *"uai, Neto, deu 15 mesas segundo a tabela do Alexandre. Para 30 pessoas se acomodarem precisamos de 15 mesas e não 14 como estávamos pensando, não é mesmo? Será que a tabela montada pelo Alexandre está correta?"* Danilo Hiroshi (Irmão de Alexandre) disse: *"sim, está correta, mas tem alguma coisa errada aí professor que eu não sei o que é."* Com isso, o professor disse: *"o que está errado aqui? Alguém sabe?"* Neto disse: *"professor, o que está acontecendo é que não estamos considerando as extremidades, lembra do mais dois, que falei aquela hora, é*

aqui que ele entra, não é?" O professor disse: *"é você que está dizendo, precisamos conferir e, então, explica isso para a turma toda."*

Nesse momento, Neto disse: *"esse mais dois é proveniente de existir duas cadeiras que sempre ficam nas extremidades, não acham?"* Letícia argumentou, afirmando: *"professor, eu concordo com o Neto."* O professor, então, disse: *"então, venha aqui na frente e expõe suas idéias à classe e aí vamos ver se concordamos ou não."*Nesse momento, Letícia foi até o quadro negro e fez um desenho.

Apresentamos, a seguir, o desenho feito por Letícia no quadro-negro.

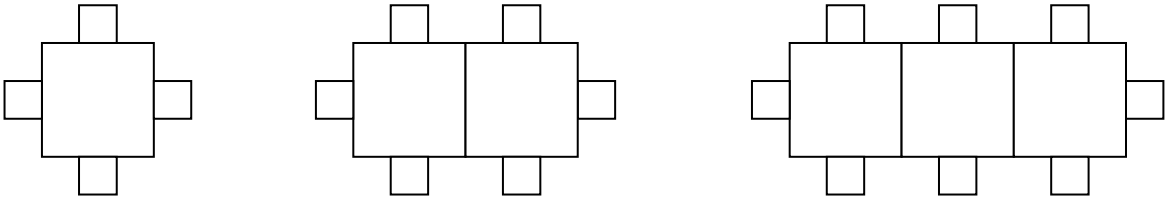


Figura 21: Reprodução do desenho feito pela aluna Letícia no quadro negro

Depois de feito esse desenho, Letícia disse: *"professor, observa que na primeira distribuição existem quatro pessoas em vez de duas, é aí que está a charada da vez."* O professor perguntou, dizendo: *"Como assim, o que precisamos considerar aí?"* Ela disse: *"precisamos considerar as extremidades professor"* Neto concordou com ela, ao dizer: "*lógico, professor, ali também possui cadeiras, não possui?"* O professor falou: *"possui, concordo com tudo o que foi feito, mas qual é a lei que representa essa situação problema que estamos discutindo?"*

Nesse momento, os alunos discutiram em seus grupos em busca da lei, não demorou muito e, Igor disse: *"professor, a lei é* ***P = 2.M+2****"* O professor, então, perguntou: *"quem é P? E quem é M? E quem está em função de quem?"* Igor respondeu: *"P é o número de pessoas e M é o número de mesas. O número de pessoas está em função da quantidade de mesas, para eu saber quantas pessoas cabem, eu preciso saber quantas mesas tem."* Nesse momento, o professor perguntou: *"e se eu quero colocar a quantidade de mesas em função do número de pessoas, como fica essa lei?"* Um enorme silêncio tomou conta da sala de aula. No entanto, o professor voltou a perguntar: "*pensem comigo, se eu tenho 100 pessoas, que conta você faz para descobrir o número de mesas que precisam para acomodar todas essas pessoas?"* Alexandre logo disse: *"é só fazer o processo inverso."* O professor problematizou, dizendo: *"como assim o processo inverso, você poderia explicar o que está pensando e o que entende por processo inverso*?" Alexandre foi até o quadro-negro e fez alguns cálculos.

Apresentamos, a seguir, os cálculos feitos pelo aluno Alexandre no quadro-negro:

A lei é: P = 2. M + 2 então no lugar de P eu coloco o número 100.
100 = 2. M + 2
(100 – 2)/2 = M
M = 98/2
M = 49 mesas.

Concluído esses registros do aluno Alexandre, no quadro-negro, o professor disse: *"muito bem, Alexandre, mas como fica a função inversa da lei P = 2.M+2?"* Alexandre, ainda, na frente da sala disse: *"é do mesmo jeito que fiz os cálculos."* Nesse momento, Alexandre colocou no quadro novamente a seguinte lei: **P = 2.M+2** e disse: *"como queremos a inversa, precisamos apenas deixar o M sozinho, ou seja. Precisamos isolar a grandeza M"*. Depois de falado isso, ele voltou para o quadro e, fez os seguintes cálculos:

P = 2.M+2
P - 2 = 2.M
(P – 2) / 2 = M

Ao concluir, Alexandre voltou ao seu lugar e, o professor, então, disse: *"muito bem, Alexandre, está correto tudo o que fizestes."*

Apresentamos, a seguir, os cálculos efetuados pelo grupo do aluno Alexandre, contidos nas narrativas escritas.

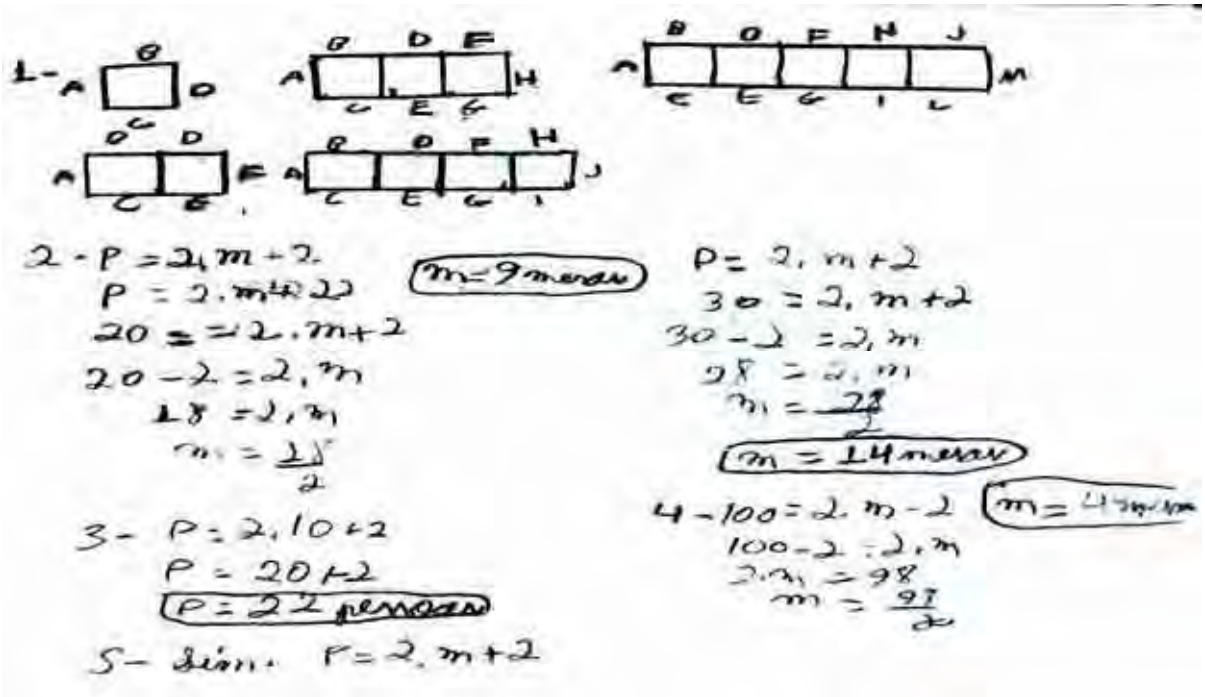


Figura 22: Cálculos feitos pelo aluno Alexandre contido em sua narrativa escrita

Apresentamos, também, o cálculo contido nas narrativas escritas entregue pelo grupo "Star Girls" liderado pela aluna Raíssa.

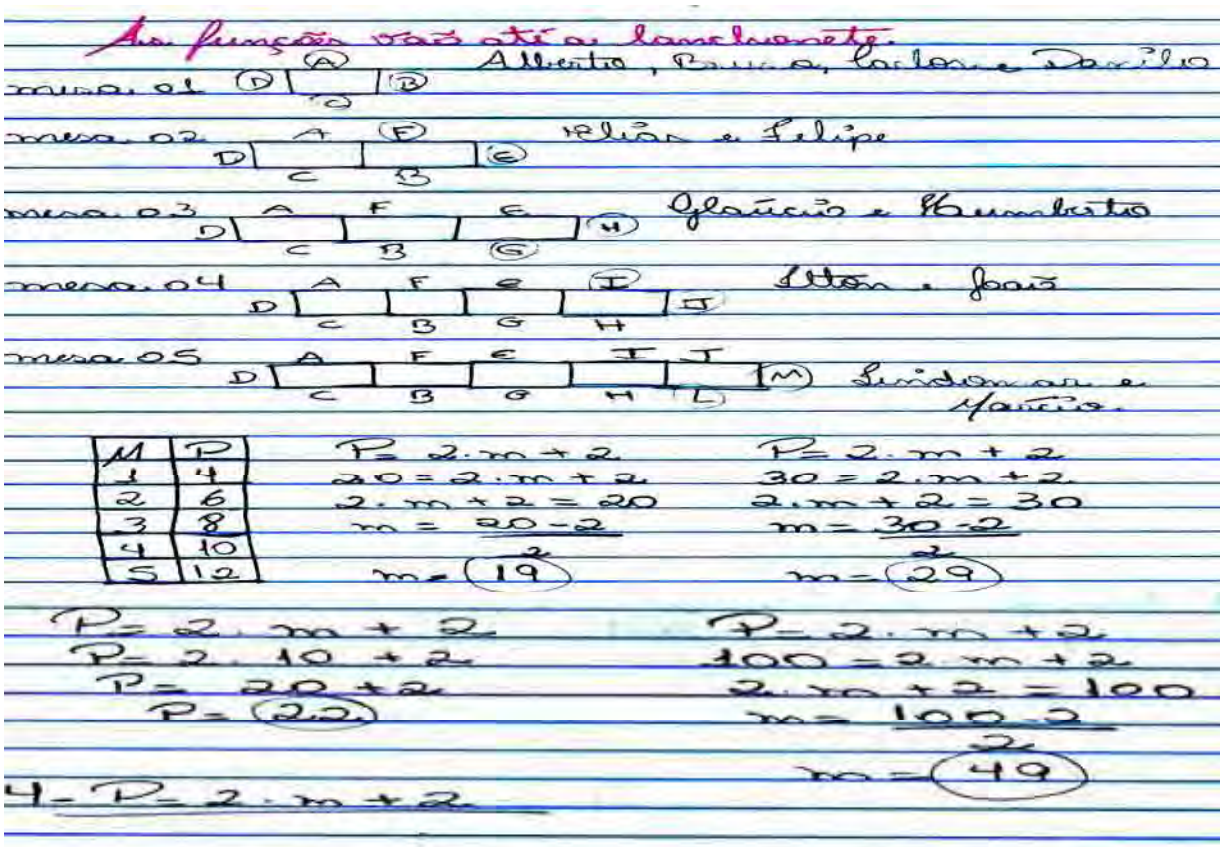


Figura 23: Cálculos feitos pelo grupo Star Gilrs registrados em suas narrativas escritas

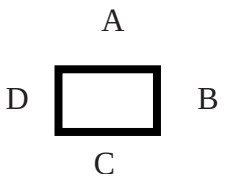
Depois de investigada todas as questões, a aluna Letícia fez alguns questionamentos, como: *"professor, nessa situação, sempre chega de duas em duas pessoas, mas e se chegassem de três em três como ficaria? E se chegasse de quatro em quatro como ficaria?"* Nesse momento, Heber, empolgado na pergunta de Letícia, também perguntou: *"por que as mesas sempre se juntavam? E se elas não se juntassem como ficaria?"*

O professor ficou surpreso com as questões, mas logo disse: *"que bom que surgiram novas questões, tudo que eu tenho para dizer para vocês é que vocês são detetives, e, por isso, precisam ver como que ficam essas situações que apresentaram, mas, então, meus amigos, mãos a obra."* Com essa declaração, o aluno Heber disse em tom de brincadeira: *"o Marcião, você poderia nos ajudar né meu jovem."* O professor respondeu: *"claro, meu jovem. As questões estão aí, tudo o que precisamos fazer é começar a pensar sobre essas nossas novas situações e começar a ver aonde chegamos, o que acha?"* Heber disse: *"tudo beleza, então, na outra aula nós terminamos, né, porque hoje a aula já acabou."* Com isso, o professor falou: *"então, na próxima aula refletiremos um pouco mais sobre essas novas situações, ok?"* Os alunos concordaram e ainda estavam incumbidos em pensar nos caminhos de casa para nosso próximo encontro.

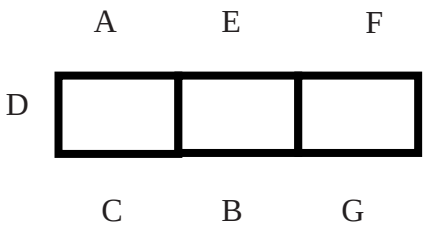
No primeiro momento dos episódios de ensino do dia seguinte, o professor começou discutindo sobre as questões levantadas pela Letícia e pelo Heber. O professor começou, dizendo: *"imagine que estão os quatro alunos sentados na lanchonete e, em vez de chegar de dois em dois, chegaram de três em três, como ficaria essa situação?"* Nesse momento, Alexandre, disse: *"professor, pensei sobre essas questões em casa e não consegui encontrar uma fórmula porque não existe a mesma regularidade que existe quando chega de dois em dois."* Então, o professor perguntou: *"então, será que temos que ver se existe ou não regularidade?"* Letícia disse: *"eu acho que não existe regularidade nesse caso."* Igor entrou na discussão ao perguntar: *"professor, se não existir regularidade, é possível determinar uma lei que determina essa função?"* O professor disse: *"Igor, uma coisa temos que entender, se existe função, existe uma lei que corresponde a essa função, concorda? Se você concorda, temos que fazer algumas explorações para verificar se existe ou não."*

Nesse momento, Igor problematizou ao dizer: *"concordo, mas e se não existir regularidade?"* O professor respondeu: *"vamos, primeiramente, fazer essas nossas investigações para depois concluirmos alguma coisa, mas o que temos que fazer, primeiramente, nas nossas investigações?"* Nesse momento, Heber interveio, dizendo: *"é só começar a representar as mesas e depois montar uma tabela e depois verificar se existe ou não regularidade."* O professor disse: *"Heber, você é o dono dessa situação, venha fazer na prática o que você disse na teoria, aqui no quadro-negro, para todos visualizarem."* Nesse momento, o aluno Heber foi até a frente e fez a representação da primeira mesa.

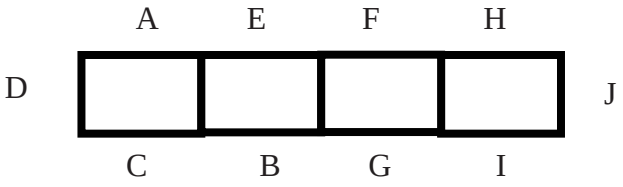
Apresentamos, a seguir, a representação feita pelo aluno Heber no quadro-negro.



Feita essa representação, Heber disse: *"a situação é: se chegar de três em três pessoas, como que ficará a nova distribuição das pessoas nas mesas?"* Nesse momento, Heber virou para o quadro, e fez o seguinte registro.

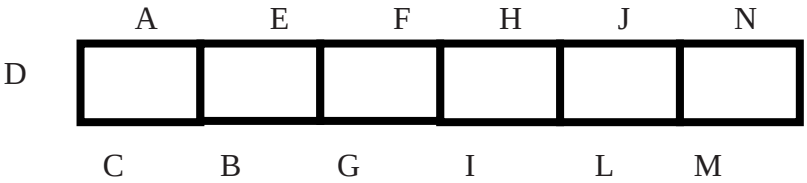


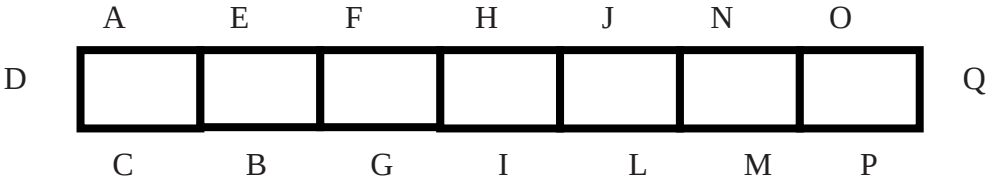
Feita essa representação, Heber fala: *"se chegar mais três amigos, vai ficar!"* Nesse momento, ele virou novamente para o quadro negro e fez o seguinte registro:



Feito essa representação, o professor disse: *"muito bem, mas como ficariam as duas próximas representações?"* Nesse momento, Heber disse: *"professor, vou chamar a Letícia para me ajudar."* Com isso, Letícia aceitou o convite e se posicionou na frente da sala, virou para o quadro negro, e fez as duas próximas representações.

Apresentamos, a seguir, a distribuição das mesas feitas pela aluna Letícia no quadro-negro.





Concluída as representações feitas pela aluna Letícia, o aluno Heber disse: *"agora, é só montar uma tabela para melhor visualizar essa situação."* Nesse momento, Heber apresentou para a turma toda a seguinte tabela:

M	**P**
1	**4**
3	**7**
4	**10**
6	**13**
7	**16**

Tabela 9: Tabela apresentada pelo aluno Heber no Quadro Negro

Concluída essa tabela, Letícia disse: *"professor, eu não consigo ver nenhuma lei para esses valores, e agora?"* Nesse momento, o professor disse: *"tudo o que precisamos é fazer conjecturas e será que alguém tem alguma conjectura guardada no fundo do baú para nos dizer?"* Depois disso, Alexandre disse: *"já testei umas duas conjecturas, mas nenhuma delas*

deu certo professor." O professor perguntou: *"quais foram elas?"* Alexandre respondeu: *"a primeira foi:* ***P = 1,5. M +2,5*** *e a segunda foi* ***P = 3.M – 2****"*

O professor registrou no quadro-negro essas duas conjecturas feitas pelo aluno Alexandre e, fez alguns cálculos para comprovar à não validade dessas leis fornecidas pelo aluno Alexandre. Apresentamos, a seguir, os cálculos feitos no quadro negro pelo professor.

Primeira lei P = 1,5. M +2,5
Se M = 1 então P = 4
Se M = 3 então P = 7,
Se M = 4, P não é igual a 10.
Segunda lei P = 3.M – 2;
Se M = 3 então P = 7,
Se M = 4 então P =10.
Se M = 1, P não é igual a 4.

Depois de ter feito esses cálculos, o professor perguntou: *"será que nessa situação não existe nenhuma regularidade?"* Alexandre respondeu: *"só no número de pessoas que existe regularidade, porque sempre chega de três em três pessoas, mas, no número de mesas, não existe regularidade, porque uma hora acrescenta uma mesa, na outra hora, acrescenta duas mesas e segue sempre assim, observe que da primeira para segunda aumentou duas mesas, da segunda para a terceira aumentou somente uma mesa, da terceira para a quarta aumentou duas mesas, da quarta para a quinta mesa aumentou somente uma mesa, e segue sempre assim."*

Nesse momento, o professor voltou a perguntar: *"se segue sempre assim, isso não evidencia uma regularidade?"* Igor respondeu: *"eu não sei não, mas acho que pode ser uma regularidade, mas eu não consigo encontrar uma lei para essa situação."* O professor disse: *"muito bem, pessoal, tudo o que foi feito aqui, foi de grande importância porque chegamos a algumas conclusões, quais são as conclusões a que chegamos?"* Letícia disse: *"que nem toda regularidade é possível determinar uma lei."* Igor falou: *"pelo que investigamos, existe regularidade em ambas as grandezas, mas não conseguimos encontrar a lei, eu acho que é porque apesar de ter regularidade, essa regularidade não é proporcional."* O professor disse*: "muito bem, Igor, você tocou numa palavra de grande importância no estudo do conceito de função que a idéia de proporcionalidade, mas, muito bem, e, se pensássemos na situação que o Heber levantou ontem, será que encontraremos uma lei? Heber, por favor apresente a sua situação e o que conseguiu fazer."*

Nesse momento, Heber, que já se encontrava à frente da sala, disse: *"ontem, eu perguntei: e se as mesas não se juntassem como ficaria?"* O professor disse: *"Heber, só uma coisa, vai chegar de quantas em quantas pessoas?"* Heber respondeu: *"Vamos supor que*

chegue de quatro em quatro pessoas". Professor falou: *"ok, agora a sua situação está completa."* Nesse momento, Heber fez alguns desenhos de mesas no quadro negro.

Apresentamos, a seguir, o desenho feito pelo aluno Heber no quadro-negro:

Depois de concluído esses registros, o professor disse: *"Heber, como fica a tabela dessa situação?"* Nesse momento, Heber fez uma tabela no quadro negro. Apresentamos, a seguir, a tabela feita pelo aluno Heber no quadro negro.

M	P
1	4
2	8
3	12
4	16
5	20

Tabela 10: Tabela feita pelo aluno Heber no Quadro Negro

Nesse momento, o aluno Igor disse: *"professor, aí existe uma regularidade e essa aí é fácil demais para encontrar a lei, porque as mesas estão aumentando sempre de uma em uma e as pessoas sempre de quatro em quatro."* O professor, então, disse: *"mas, alguém já detectou a fórmula ou a lei?"* Neto respondeu: *"sim, professor, nessa situação não precisa nem testar e nem provar porque a lei é P = 4.M"* O professor problematizou, dizendo*: "será, mesmo Neto? Alguém não concorda com o Neto?"* Nesse momento, Neto disse: *"prova aí, professor, quero ver se não é essa a fórmula."*

Nesse momento, muitos alunos concordam com o Neto. O professor, então, disse: *"como ninguém se manifestou contrariamente, eu também vou concordar com você, meu jovem"*. Depois destes diálogos, o professor passou aos momentos de reflexão e analise sobre o desenvolvimento dos alunos nessa tarefa exploratório-investigativa.

4.7. Sexta Tarefa Exploratório-Investigativa: Função Área - Respeite o Seu Número

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou apresentar aos alunos um ambiente propício para suas aprendizagens, ambiente este, no qual eles trabalhassem com leis que regem a área dos seus números de chamada em um quadrilátero. Neste ambiente, os alunos

tiveram a oportunidade de desenvolver suas narrativas escritas nos seus grupos e as narrativas orais para a turma toda em suas apresentações e argumentações.

Essa tarefa exploratório-investigativa foi preparada com a finalidade de levar os alunos a três níveis diferentes: ao nível dos conhecimentos, em que se pretendeu que os alunos conseguissem trabalhar com essa situação, representando uma Função através de leis matemáticas. Ao nível das atitudes e valores, em que se pretendeu que os alunos conseguissem fundamentar suas opiniões, refletindo sobre a situação e, respeitando as diferentes opiniões dos colegas, colaborando nos trabalhos de grupo, partilhando responsabilidades e saberes, enfrentando com confiança novas situações e reconhecendo a presença da Matemática no dia-a-dia. Ao nível das capacidades, com o objetivo de os alunos interpretarem corretamente as situações propostas e que organizassem narrativas referentes ao trabalho desenvolvido.

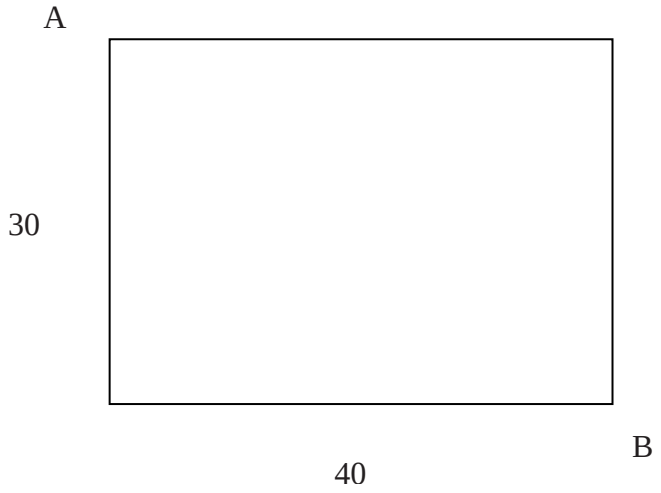
Essa tarefa exploratório-investigativa foi apresentada à turma no início do episódio de ensino do dia 06 de setembro de 2005, e, no dia 07 de setembro de 2006, tivemos dois episódios de ensino, e estes foram destinados ao desenvolvimento da tarefa nos grupos, discussão entre professor e alunos sobre o trabalho desenvolvido.

No primeiro episódio, fizemos à leitura comentada da tarefa exploratório-investigativa "Respeite o seu Número", com o intuito de esclarecer os objetivos propostos por essa tarefa. Nesse momento de apresentação da tarefa e arranque da atividade, alguns alunos tomaram como objetivo central descobrir quem possuía o número de maior área.

Apresentamos, a seguir, a maneira como essa tarefa exploratório-investigativa, foi introduzida à turma.

Tarefa Exploratório-Investigativa Função Área – Respeite o Seu Número

Cada aluno deve pegar uma folha de papel quadriculado. Nessa folha contorne um retângulo de 40 x 35 (A unidade de comprimento é o lado do quadradinho do quadrilátero).



No seu retângulo, marque quatro pontos: dois a partir do ponto A e dois a partir do ponto B. Esses pontos que devem ser marcados é o número que cada um tem na chamada. Exemplo: Se o seu número na chamada é o 15, você deve andar 15 unidades nos dois sentidos dos pontos A e B.

A seguir marque os quatro pontos para formar o seu quadrilátero. Com isso, calcule a área do seu quadrilátero, pinte a região interna do seu quadrilátero e escreva visivelmente a área do seu quadrilátero.

Registre os procedimentos que fizeram para calcular as áreas, e utiliza o mesmo processo, mas em vez de colocar o seu número da chamada, escreva ali o x. Com a ajuda do seu grupo, desenvolva os cálculos para encontrar a expressão matemática que relaciona a área do quadrilátero em função de x.

A seguir nessa função, cada aluno substitui seu próprio número no lugar de x, efetuando os cálculos para verificar quem é o aluno da sala que possui a maior área nessa tarefa.

Desafio: Qual é o valor exato de x que faz ter essa função a maior área? Consegues esboçar o gráfico dessa função numa malha quadriculada, para enxergar geometricamente essa situação. Quais são as tuas conclusões sobre essa tarefa.

Nestes primeiros episódios, os momentos foram destinados à apresentação e ao desenvolvimento das questões nos grupos e, logo após, foram realizados os momentos de discussão e reflexão, nos quais as narrativas dos alunos apareceriam através das suas falas. Nesta tarefa exploratório-investigativa, por motivo de tempo, privilegiamos as narrativas orais às escritas, pois resolvemos discutir com os alunos os objetivos, as aprendizagens e as conclusões.

A dinâmica metodológica foi destinada a explorar relações entre grandezas variáveis com o intuito de mobilizar o pensamento algébrico dos alunos, tomando como tarefa uma situação, na qual todos os alunos teriam que fazer os seus cálculos e explorações além de conjecturas leis que regem Funções. Nos episódios, os alunos teriam a liberdade de levantar os seus cálculos e procedimentos sempre provando os mesmos.

4.7.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-investigativa: Função Área – Respeite o seu Número

Esta tarefa exploratório-investigativa trata o conceito de Função como uma lei, uma expressão matemática, além de buscar apresentar as diversas representações que possui esse conceito da Matemática. Essa tarefa possuía uma linguagem corrente, em que os alunos teriam que induzir leis e através destas montar tabelas e representar graficamente. Apresentaremos, a seguir, algumas interlocuções acontecidas entre o professor e os alunos e, alguns fatos importantes que percebemos durante a realização dessa tarefa exploratório-investigativa.

No episódio de ensino do dia 06 de setembro de 2005, o professor começou o episódio, afirmando: *"essa tarefa exploratório-investigativa trata novamente de induzir leis de funções e as diferentes maneiras de representá-las e, que eles precisavam respeitar os seus*

números de chamada." O professor continuou seu discurso, perguntando: *"quero saber qual será o número da chamada cuja área desse nosso retângulo será maior? Alguém sabe?"* Nesse momento, todos observavam atentamente sem ninguém dizer nada.

Através dessa reação, o professor continuou, dizendo: *"todos possuem um número da chamada, não possuem? Então, olha só, até na lista de uma chamada, podemos perceber a idéia de função."* Nesse momento, Juliana perguntou: *"como assim, até na lista tem a idéia de função?"* O professor disse: *"com o que vocês entendem por função, que idéia ilustra essa situação?"* Igor respondeu, dizendo: *"professor, todos nós temos um único número na chamada e cada número na lista de chamada pode ter somente uma única pessoa, não é mesmo?"* O professor disse: *"isso quer dizer alguma coisa, não quer? Qual das idéias estudadas, até então, cuja situação está parecendo?"* Igor pensou um pouco e disse: *"idéia de correspondência porque cada número na chamada corresponde a uma única pessoa, e cada pessoa possui um único número na chamada."* O professor disse: *"que bom que vocês relembraram da idéia de correspondência, na verdade, essa idéia é de suma importância para a compreensão desse conceito*." O professor continuou, dizendo: *"muito bem, Igor, que bom que a idéia de correspondência está bem madura na sua mente, mas como vocês fariam para encontrar a área do quadrilátero formado pelo seu número da lista de chamada?"*

Nesse momento, Edson disse: *"para eu descobrir a área do meu quadrilátero, eu preciso saber quanto é a área do quadrilátero maior e, depois, para encontrar a área do meu quadrilátero, basta pegar a área do quadrilátero maior menos à área dos quatro triângulos que fazem parte do quadrilátero maior e a área que sobrar será a área do quadrilátero menor, que é o meu quadrilátero."* O professor falou: *"beleza, Edson, então, agora, todos vocês possuem o restante da aula para trabalharem em prol das suas explorações, encontrando a área do quadrilátero do seu número e depois de encontranda a área do seu quadrilátero, podemos comparar para ver que número possui a maior área?"* O restante dessa aula foi destinado ao trabalho nos grupos e ao desenvolvimento das explorações das questões e, induções da lei que eles teriam que determinar.

Nos dois episódios do outro dia, 08 de setembro de 2005, o aluno Neto começou, perguntando: *"professor, já encontramos a nossa área, mas cadê as funções nessa tarefa?"* O professor problematizou, falando: *"Neto, pense comigo, nesse primeiro momento você conhece o seu número não conhece? Então, se você quer induzir uma lei de uma função, o que você precisa fazer?"* Bianca disse: *"Neto, eu acho que é só você colocar uma letra no lugar do seu número e fazer os mesmos cálculos, a diferença é que nos cálculos você encontrou um resultado e aqui você vai encontra uma lei."* Nesse momento, Neto disse: *"está*

correto o que a Bianca disse, professor?" O professor disse: *"Pode ser um caminho, não acha, porque não tenta fazer o que ela está propondo."* Neto questionou, dizendo: *"mas se é para colocar uma letra, posso colocar qualquer uma ou somente o x?"* O aluno Igor interveio, respondendo: *"Neto, a situação é sua, coloque a letra que achar melhor."*

Nesse momento, todos os alunos se preocuparam em descobrir, primeiramente, a área do seu quadrilátero, isso demorou cerca de vinte minutos. No entanto, todos fizeram e encontraram a área dos seus quadriláteros.

Apresentamos, a seguir, duas narrativas escritas dos cálculos apresentados pelos alunos Mayara Aued e Letícia.

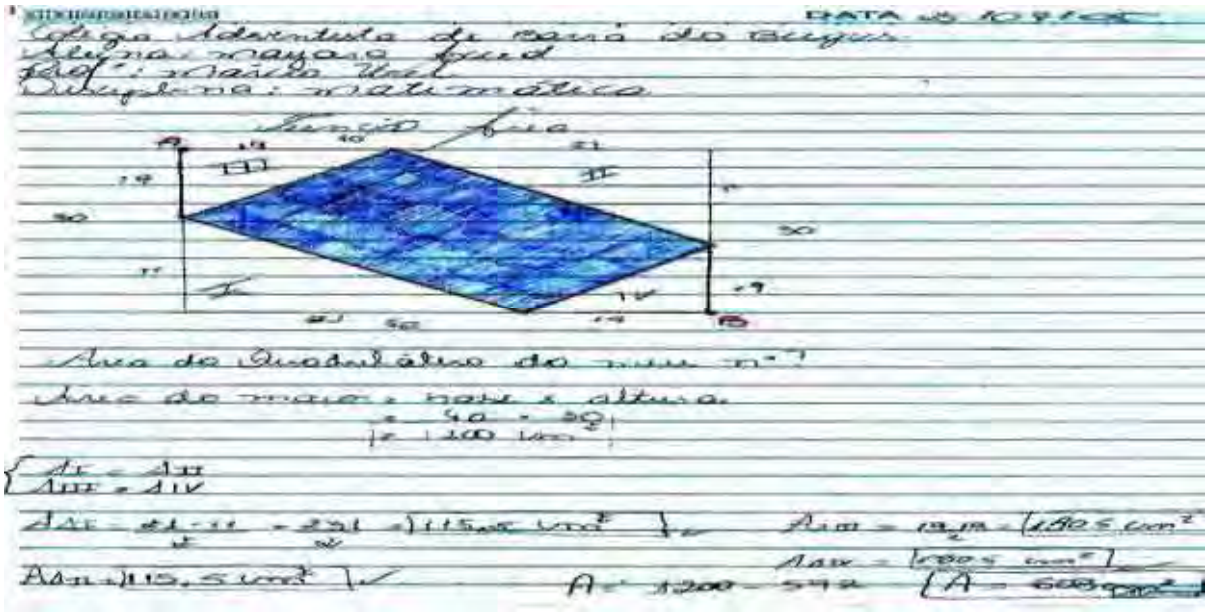


Figura 24: Cálculo da Área do número da aluna Mayara Aued apresentado nas narrativas escritas

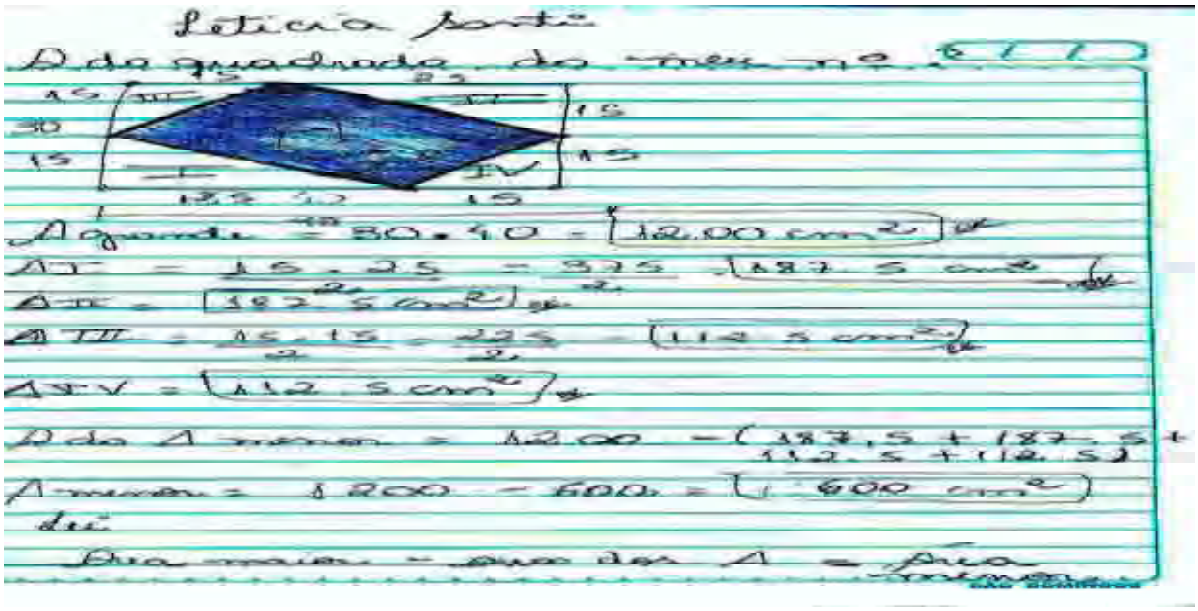


Figura 25: Cálculo da área do número da aluna Letícia Santi apresentado nas narrativas escritas

Passado esse tempo, o professor novamente chamou a atenção da turma para ver quem tinha encontrado a maior área. Nesse momento, antes mesmo de começar a análise para ver que número da chamada teria a maior área, o aluno Alexandre questionou dizendo: "*professor, para eu encontrar a lei basta colocar o valor de x no lugar onde coloquei o meu número não é? Se é isso, eu consegui encontrar uma lei que determina a área do quadrilátero interior em função do número da chamada.*" Nesse momento, o professor disse: "*muito bem, verifique aí se fizeste corretamente para apresentar para a turma.*"

Passados alguns minutos, três alunos (Igor, o Neto e o Alexandre) disseram que tinham encontrado a lei para a área do seu quadrilátero. Nesse momento, o professor sorteou, aleatoriamente, um número para fazer os cálculos. O número sorteado foi 20. Assim, o professor declarou que iria apresentar os cálculos, tomando como exemplo o número 20 como sendo o número dele, só para verificar se eles seguiram por caminhos corretos.

No momento que o professor disse que seu número era o número vinte, o aluno que tinha o número vinte na chamada, disse: "*muito bem, professor, faça o meu número mesmo para eu conferir*". Para não fazer os mesmos cálculos que aquele aluno fez, o professor tomou como os números 50 e 40 como os valores do comprimento e largura do retângulo. A partir daí o professor fez um desenho no quadro-negro.

Apresentamos, a seguir, o desenho feito pelo professor no quadro-negro.

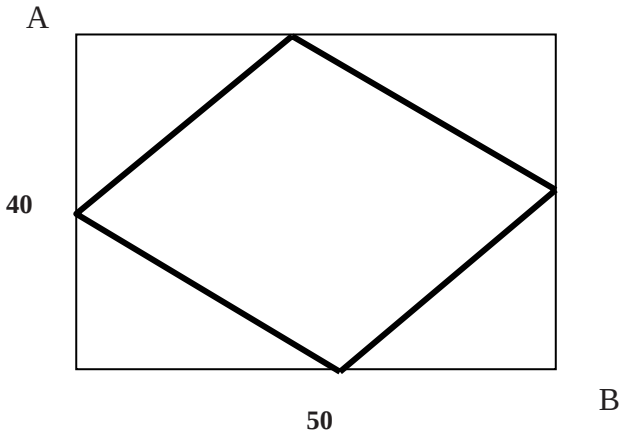


Figura 26: Reprodução do primeiro desenho feito pelo Professor no quadro-negro

Feito o desenho, o professor disse*: "como se calcula a área do meu retângulo interior e exterior?"* O aluno Edson logo disse: "*do exterior é 2000 cm^2 e do interior precisamos fazer alguns cálculos.*" O professor problematizou, dizendo: "*por que é 2000 cm^2? De onde você tirou esses 2000 cm^2?*" Edson respondeu: "*porque 40 vezes 50 é igual a 2000 e porque a área de um retângulo é só pegar o comprimento e multiplicar pela largura.*" O professor disse: "*e agora o que é preciso fazer para encontrar a área do quadrilátero que está no*

interior?" Edson falou: *"é só encontrar a área dos quatro triângulos que estão aí nesse retângulo e depois pega o 2000 e tire o valor dessa área."* Nesse momento, o professor numerou os quatro triângulos no retângulo maior para visualização de todos da sala.

Apresentamos, a seguir, o desenho feito pelo professor no quadro-negro.

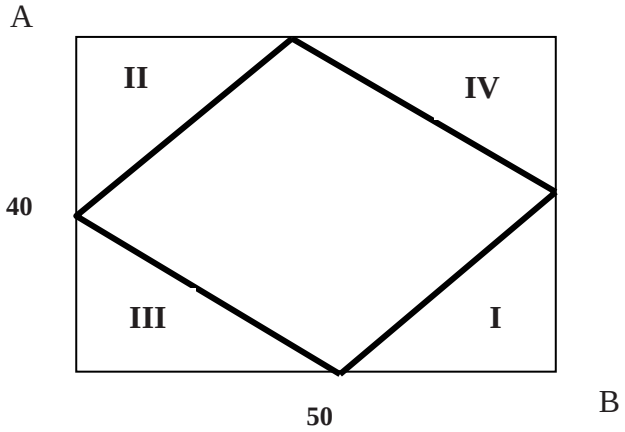


Figura 27: Reprodução do segundo desenho feito pelo professor no quadro-negro

Depois dessa representação, o professor disse: *"estou indo pela idéia do Edson, estou concordando com ele, qualquer coisa a culpa é do Edson, ok?"* Nesse momento, Danilo disse: *"professor, tome cuidado porque as idéias do Edson são meio arriscados, hein!!! (risos)."* O professor perguntou: *"tomarei os devidos cuidados, mas são vocês os detetives, esqueceu? Mas, como calcular a área dos quatro triângulos? Como se calcula a área de um triângulo? Alguém nota alguma coisa semelhante aqui?"*

Nesse momento, Alexandre disse: *"a área de um triângulo é a base vezes altura dividido por dois e, aqui, as áreas dos triângulos I e II são iguais e as áreas dos triângulos III e IV também são iguais."* O professor perguntou: *"porque é essa formula que calcula a área de um triângulo?"* Alexandre respondeu: *"porque para a área de um retângulo, a fórmula é base vezes altura e em um retângulo cabem dois triângulos e por isso, a fórmula é base vezes altura, dividido por dois."*

Nesse momento, o professor convidou o aluno Edson para fazer os cálculos no quadro-negro. Ele, prontamente, atendeu e fez os cálculos para encontrar a área do quadrilátero que está no interior do retângulo inicial.

Apresentamos, a seguir, os cálculos feitos pelo aluno Edson no quadro negro.

Área do triangulo I = (base. Altura) / 2
Área do triangulo I = (20.20)/2
Área do triangulo I = 400/2
Área do triangulo I = 200 cm^2
Como a área do triangulo I é igual a do triangulo II, então:

A área do triangulo II vale 200 cm^2.
Área do triangulo III = (20.30)/2
Área do triangulo III = 600/2
Área do triangulo III = 300 cm^2
Como a área do triangulo III é igual a do triangulo IV, então:
A área do triangulo IV vale 300 cm^2.
Áreas dos triângulos = área do triangulo I + área do triangulo II + área do triangulo III + área do triangulo IV
Áreas dos triângulos = 200 + 200 + 300 + 300
Áreas dos triângulos = 1000 cm^2
*Edson: "tirando 1000 de 2000 temos a área do quadrilátero interior que é **1000 cm^2**.*

Depois de apresentado esses cálculos, o professor perguntou: *"então, a área desse nosso quadrilátero é igual a 1000 cm^2 , mas quem será que tem o número que possui a maior área com as dimensões da nossa situação inicial? E quem quer vir aqui na frente apresentar a lei que encontrastes?"* Nesse momento, alguns alunos falaram: *"chama o Alexandre Yukio professor, o dele está correto."* O professor convidou o aluno Alexandre Yukio para apresentar para toda a classe a sua lei. Nesse momento, o professor disse: *"se vocês não concordarem com alguma passada feita pelo Alexandre, podem falar, porque agora os momentos desse episódio serão dedicados à apresentação do Alexandre."* Alexandre começou desenhando um retângulo no quadro negro.

Apresentamos, a seguir, as características do desenho e dos cálculos feitos pelo aluno Alexandre no quadro negro.

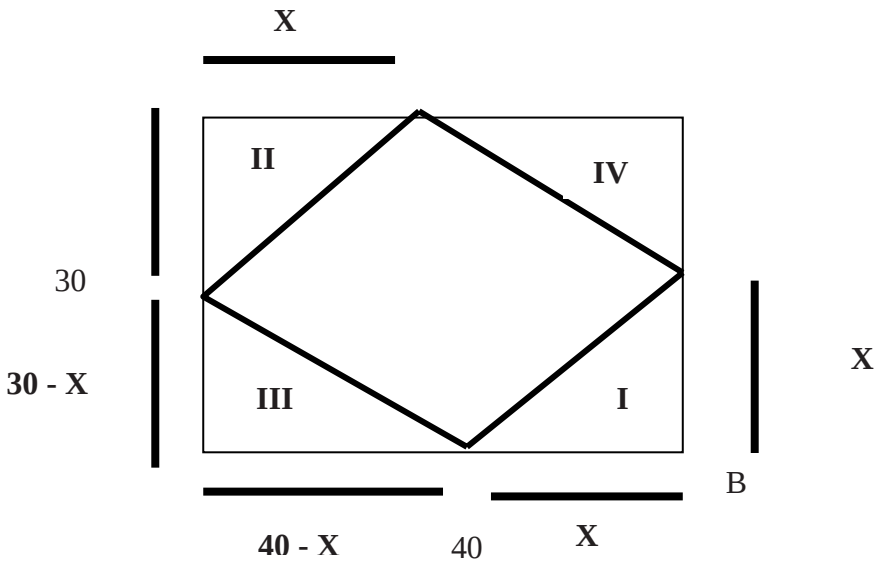


Figura 28: Reprodução do desenho e dos cálculos feitos pelo aluno Alexandre no quadro negro

Primeiramente ele fez o cálculo da área do retângulo maior.

$A_{(do\ retângulo\ maior)} = 40.30 = 1200\ cm^2$
$A_{(do\ triangulo\ I)} = (base\ .\ altura)/\ 2$

$A_{(do\ triangulo\ I)} = X.X/2 = X^2/2$
$A_{(do\ triangulo\ II)} = X^2/2$ *porque o triangulo I é igual o triangulo II.*
$A_{(do\ triangulo\ III)} = [(40 – X) . (30 - X)] / 2$
$A_{(do\ triangulo\ III)} = [1200 - 40.X – 30.X + X^2] / 2$
$A_{(do\ triangulo\ III)} = [1200 – 70X + X^2] / 2$
Como a área do triangulo III é igual a área do triangulo IV então a área do triangulo IV também será igual a: $[1200 – 70X + X^2] / 2$

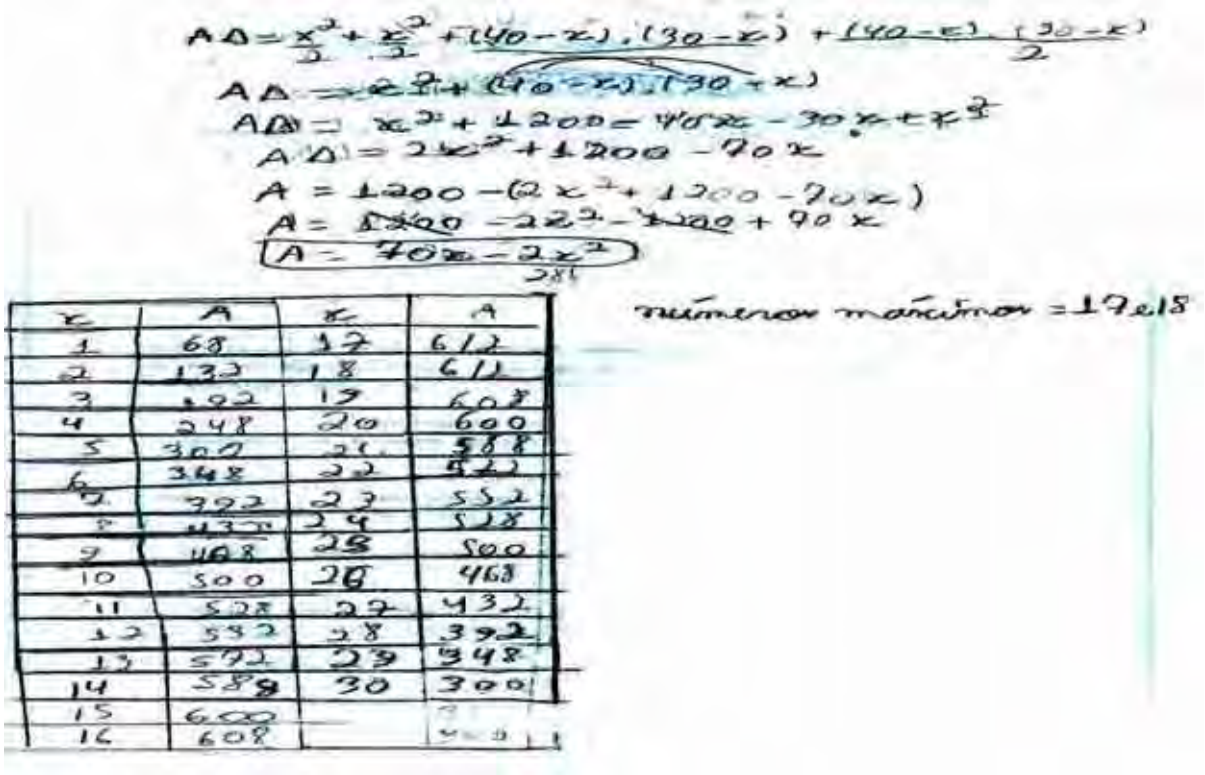
Alexandre disse: *"tudo o que temos que fazer, agora, é somar a área desses quatro triângulos e, depois, tirarmos dos 1200 essa área encontrada aqui."* Nesse momento, Alexandre fez os seguintes cálculos no quadro negro:

Área dos triângulos = $X^2/2 + X^2/2 +[1200 – 70X + X^2] / 2+ [1200 – 70X + X^2] / 2$
Área dos triângulos =$X^2 + 1200 – 70X + X^2$
Área dos triângulos = $2. X^2 – 70.X + 1200$
Alexandre: agora é só fazer 1200 menos tudo isso:
Área do meu quadrilátero = $1200 – (2. X^2 – 70.X + 1200)$
Área do meu quadrilátero = $1200 - 2. X^2 + 70. X – 1200$
Área do meu quadrilátero = $\mathbf{- 2. X^2 + 70. X}$

Concluído os cálculos, Alexandre disse: *"a lei que dá a área de um número qualquer em função desse número é dada por* $- 2. X^2 + 70. X$*."* Nesse momento, o professor disse: *"eu concordo com tudo o que o Alexandre acabou de fazer, alguém não concorda?"* Nesse momento, todos concordaram.

Acreditamos que os alunos concordaram, porque foi o Alexandre que tinha feito os cálculos. Afirmo isso, por perceber que o Alexandre Yukio é um aluno diferenciado e muitos dos colegas vêem o Alexandre como o aluno mais inteligente da turma e, por esse fator, acreditamos que todos concordaram. Acreditamos também que a grande maioria conseguiu entender exatamente o que foi apresentado. Constatamos esses cálculos também no registro realizado pelo Alexandre nas narrativas escritas entregues pelo seu grupo.

Apresentamos, a seguir, os cálculos contidos nas narrativas escritas entregue pelo grupo "Só no Rim" liderado pelo aluno Alexandre Yukio.



x	A	x	A
1	68	17	612
2	132	18	611
3	192	19	608
4	248	20	600
5	300	21	588
6	348	22	572
7	392	23	552
8	432	24	528
9	468	25	500
10	500	26	468
11	528	27	432
12	552	28	392
13	572	29	348
14	588	30	300
15	600		
16	608		

Figura 29: Cálculos contidos nas narrativas escritas entregue pelo aluno Alexandre

Depois que essa lei estava registrada no quadro-negro, o professor pediu para os alunos testarem os seus números nessa lei, para verificarem se os cálculos feitos anteriormente estavam corretos. Nesse momento, todos os alunos testaram os seus números na lei e, concluíram que essa era mesmo a lei. Lucas, depois de testar o seu número na lei, disse: *"professor, essa lei abrevia bastante os cálculos, o meu valor deu o mesmo número, deu certinho."* O professor disse: *"beleza, então, meu jovem."* Depois de uns cinco minutos, o professor pediu para cada aluno passar o valor da área que o seu número tinha dado para montar uma tabela. Logo após, Danilo disse: *"para que montar uma tabela professor?"* O professor respondeu: *"para investigarmos qual é o número que tem a maior área nessa nossa situação."*

Nesse momento, o professor solicitou aos alunos, um por um, os valores das áreas dos seus quadriláteros e com esses valores. O professor montou uma tabela no quadro-negro.

Apresentamos, a seguir, a tabela montada pelo professor no quadro-negro.

Número da chamada	**Área do quadrilátero**
1	**68**
2	**132**
3	**192**
4	**248**
5	**300**

6	**348**
7	**392**
8	**432**
9	**468**
10	**500**
11	**528**
12	**552**
13	**572**
14	**588**
15	**600**
16	**608**
17	**612**
18	**612**
19	**608**
20	**600**
21	**588**
22	**572**
23	**552**
24	**528**
25	**500**
26	**468**
27	**432**

Tabela 11: Reprodução da tabela montada pelo Professor no Quadro Negro

Depois de registrados esses valores na tabela, o professor começou alguns momentos de discussão com os alunos. O professor iniciou, dizendo: *"qual é o número que possuem a maior área?"* Neto declarou: *"tem dois números que possui a mesma área que são o número 17 e o número 18."* O professor perguntou: *"Será que são esses os valores que dão a maior área*?" Neto disse: *"sim, são esses os valores."*

Nesse momento, o professor perguntou: *"como é que vocês identificam o comportamento dessa função, ou seja, o que acontece com a área do quadrilátero?"* Aparecem alguns murmúrios, no entanto, depois de alguns segundos, Alexandre disse: *"o que eu notei é que, no início, conforme vai aumentando o valor do número, a área também vai aumentando, mas na hora que chega no número 17, dá uma parada e, a partir do 18, a área começa a diminuir, isso foi o que notei."*

Nesse momento, o professor disse: *"como assim, do 17 ao 18 dá uma parada?"* Alexandre disse: *"só se tiver um número entre o 17 e 18 que dá a maior área, quem sabe esteja aí o motivo da parada."* O professor problematizou: *"muito bem, mas que número seria esse?"* Alexandre disse: *"eu não sei é preciso ver."*

Nesse momento, Letícia interveio, perguntando: *"mas, vale ser número decimal professor?"* O professor falou: *"no caso da nossa situação, vale somente os números naturais, porque os números da chamada são somente positivos e inteiros."* Letícia interpelou: *"então, porque é que estamos querendo trabalhar com esses números decimais?"*

O professor disse: *"é porque agora estamos querendo saber qual é o número em qualquer um dos conjuntos que dá a maior área, e você sabe qual é esse número?"* Bianca também disse: *"professor, vamos descobrir logo, logo. O que é meio difícil, é que existem infinitos números entre o 17 e o 18 e isso é o que temos que descobrir."* O professor disse: *"para descobrir, é preciso fazer alguns testes com números contidos nesse intervalo e verificar se a área aumentou ou diminuiu."* Todos concordaram e, depois de algumas tentativas, apareceu uma das tentativas de Alexandre.

Nesse momento, Alexandre disse: *"se o número for 17,5, a área será igual a 612,5"*. O professor pergunta: *"mas será que é esse mesmo o número que dá a maior área?"* Depois de alguns segundos, Igor disse: *"eu concordo com o Alexandre, porque eu fiz testes com os números 17,4 e 17,6, que são números que estão próximos do número 17,5 e eles dão uma área menor que 612,5."*

Nesse momento, o professor conferiu esses valores no quadro-negro. Feitos os cálculos, o professor descobriu que quando o número for 17,4, a área será igual a 612,48 e quando o número for igual a 17,6 a área será igual a 612,48 que é a mesma área. Concluído esses cálculos, o professor perguntou: *"então, qual é a conclusão sobre o número que tem a maior área?"* Alexandre respondeu: *"o número que tem a maior área é o número 17,5."*

Depois de concluir sobre o número que possui a maior área, o professor problematizou, perguntando: *"com base na lei apresentada anteriormente, é possível representar graficamente tal função? Como será que fica o gráfico dessa função? Qual é o grau dessa função?"* Apresentadas essas questões, Igor disse: *"de tudo o que eu fiz, acredito que é possível representar, graficamente, essa função, mas o gráfico não é uma reta porque ele aumenta e depois começa a cair e numa reta, ela só aumenta ou só diminui"* O professor disse: *"e qual é o grau da função?"* Neto disse: *"como assim, grau de uma função professor?"*

Nesse momento, o professor disse: *"alguém sabe qual é o grau dessa função?"* Alisson disse: *"só se for do segundo grau"* Neto perguntou: *"porque do segundo grau, Alisson?"* Alisson respondeu: "*acho que é porque tem expoente dois na função*". O professor disse: *"muito bem, Alisson, você está correto, pois para descobrirmos o grau de uma função basta verificar o expoente."* Neto disse: *"mas, tem que ser o maior expoente, né professor?"* O professor disse: *"exatamente, Neto, mas agora vocês precisam terminar de representar graficamente essa situação e relatarem as conclusões que tiveram com base no que aprenderam e no que visualizaram, no gráfico, representado por cada grupo."*

Apresentamos, a seguir, uma representação gráfica dessa situação contida nas narrativas escritas do grupo “Los Hermanos” liderado pelo aluno Igor.

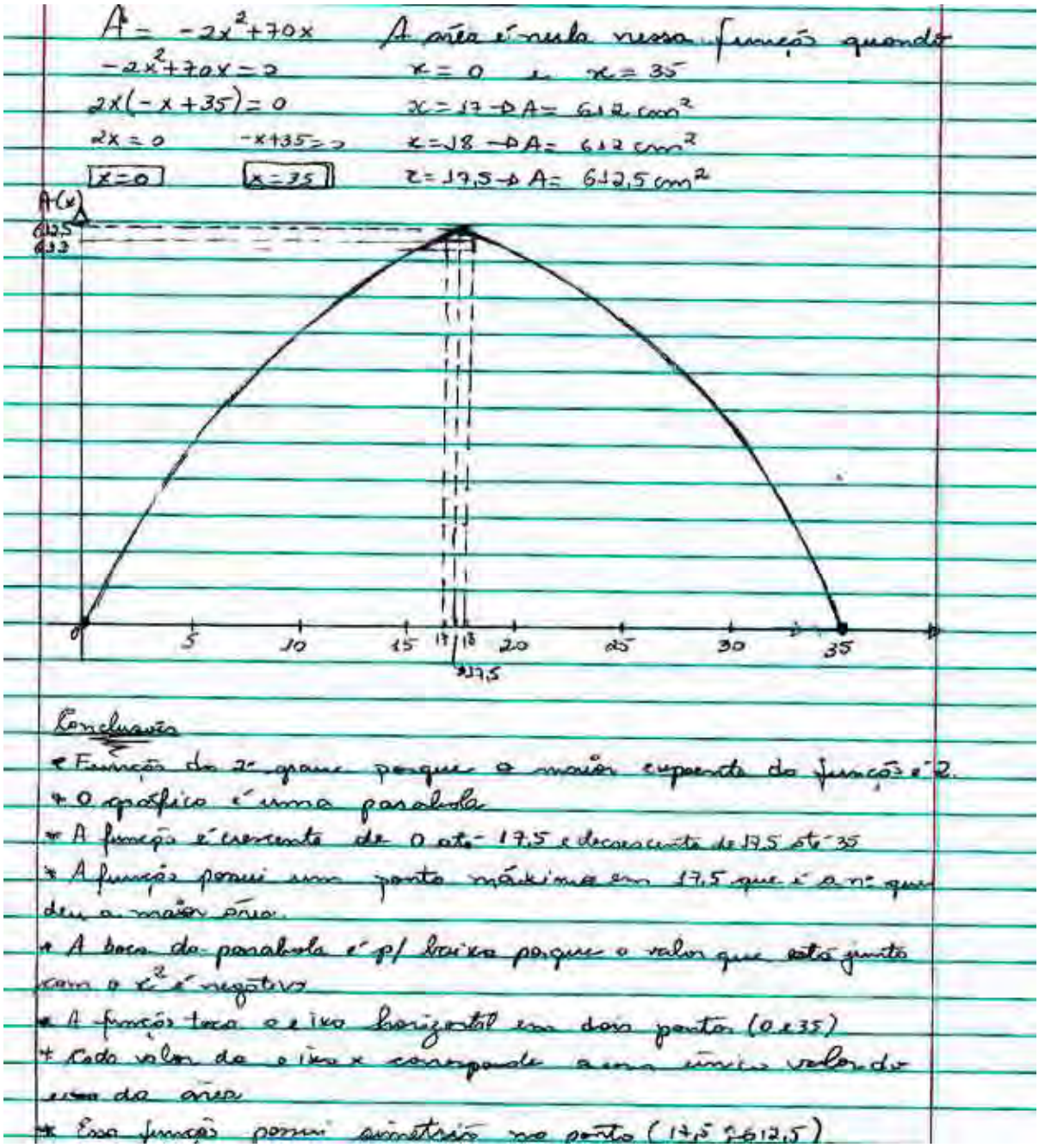


Figura 30: Representação gráfica e conclusões registradas pelo aluno Igor do grupo Los Hermanos

Depois destes diálogos, o professor passou para os momentos de reflexão e análise sobre o desenvolvimento dos alunos nessa tarefa exploratório-investigativa e, sobre o que eles estavam achando de aprender Matemática nessa perspectiva.

4.8. Sétima Tarefa Exploratório-Investigativa: Área de um Quadrilátero em Função de X

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou apresentar aos alunos um ambiente propício para suas aprendizagens, no qual se estuda o comportamento de uma Função, chamada como Função Área (A), no contexto de um problema real envolvendo áreas e perímetros de polígonos. Essa tarefa exploratório-investigativa faz a relação entre a Álgebra das Funções e a Geometria das áreas e perímetros. Com essa intenção, proporcionamos oportunidades aos alunos de se posicionarem através das suas narrativas em seus grupos, como também, para a turma toda. Desta maneira, os alunos puderam exprimir e fundamentar suas opiniões, refletindo e formulando idéias sobre a situação com que estão sendo confrontados.

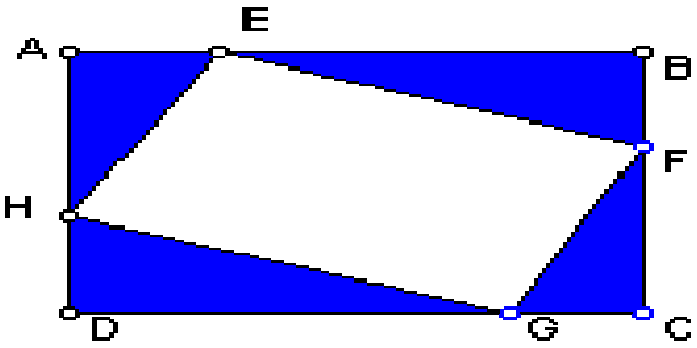
Preparamos essa tarefa exploratório-investigativa com a finalidade de levar os alunos a entender as relações existentes entre a álgebra e a geometria, pois gostaríamos que eles conseguissem entender os comportamentos de Funções, além de trabalhar com diferentes maneiras de representar uma Função. Sendo assim, nossa pretensão foi desenvolver o caráter indutivo desses alunos, levando-os a generalizarem e entenderem os porquês das leis e das fórmulas usadas em Matemática.

Apresentamos essa tarefa à turma em dois episódios de ensino, no dia 08 de setembro de 2005, e concluímos, com os momentos de discussão e reflexão, em um episódio de ensino, no dia 13 de setembro de 2005. Em um primeiro momento, fizemos à leitura comentada dessa tarefa, com o intuito de esclarecer os objetivos propostos para essa tarefa. Nos momentos de apresentação, alguns alunos gostaram e tomaram como objetivo central, entender como acontece o comportamento das Funções.

Apresentamos, a seguir, as características dessa tarefa exploratório-investigativa recebida pelos alunos.

Tarefa Exploratório-Investigativa Área de um Quadrilátero em Função de X

Na figura seguinte está representado um retângulo com 6 cm de comprimento e 4 cm de altura. Sobre os lados marcam-se os pontos E, F, G e H, tais que **AE = BF = CG = DH = X.**



Sendo A, a função que a cada **x** faz corresponder à área do quadrilátero EFGH, consegues escrever uma expressão que traduz a área do quadrilátero em função de **x?**

No contexto do nosso problema quais são os valores que a variável **x** pode tomar ou adotar.

Com base na lei encontrada anteriormente, consegues montar uma tabela de valores para as duas grandezas em questão e representar graficamente os valores da tabela que apresenta a função A.

Com base no gráfico representado anteriormente, faça uma investigação sobre a monotonia da função no seu domínio. O que você entende por monotonia e por domínio e no contexto do nosso problema qual é o seu Domínio?

Para você quais são os extremos da função? Justifique o seu posicionamento.

Como você faria para determinar os valores de x, tais que: (a) $A(x) = 16$; (b) $A(x) \geq 22$

Consegues encontrar o perímetro do quadrilátero que tem a área mínima e a área máxima?

Consegues encontrar alguma lei que determina o perímetro do quadrilátero EHGF em função de X?

Com base nessas questões e nas questões discutidas no grupo, elaborem um relatório, descrevendo todos os passos que realizaste ao longo da resolução desta tarefa.

Todas as discussões a respeito da situação abordada ficaram em torno dos grupos. Nestes episódios, os alunos tiveram a liberdade de levantar os seus cálculos e procedimentos, sempre provando os mesmos. Adotamos a postura de pedir para os alunos explicarem seus cálculos, argumentando sobre o trabalho desenvolvido.

4.8.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: Área de um Quadrilátero em Função de X

Começamos o episódio de ensino do dia 08 de setembro de 2005, afirmando que essa tarefa trataria de estudar comportamentos de Funções, a partir de formulações de leis de formação, além de trabalhar com diversas formas de representação, buscando a compreensão do processo de conversão de um registro de representação para o outro.

Esta tarefa exploratório-investigativa buscou apresentar as diversas representações que possuem esse conceito na Matemática, pois possuía uma linguagem corrente, na qual os alunos teriam que induzir leis e, através destas, montar tabelas para representar graficamente as Funções.

Ao apresentá-la aos alunos, eles conseguiram entender, já durante a leitura, que essa tarefa era bem semelhante à realizada anteriormente e, por isso, os alunos estavam livres

durante o primeiro momento dos dois episódios de ensino do dia 08 de setembro. No segundo momento, quando percebemos que a maioria dos grupos havia concluído quase todas as questões dessa tarefa, achamos melhor discutir no grande grupo, ou seja, discutir com toda a turma as questões investigadas, com o intuito de compreender melhor a situação e entender também as justificativas dadas pelos alunos.

Apresentamos, a seguir, algumas interlocuções entre professor-aluno e, aluno-aluno, que percebemos durante a realização dessa tarefa exploratório-investigativa.

O professor começou seus questionamentos, perguntando: *"quais são os dados dessa situação? O que temos, e o que queremos nessa tarefa?"* Nesse momento, o aluno Edson disse*: "temos os valores do comprimento e da largura do quadrilátero maior (quadrilátero externo) e que medem 6 cm de comprimento 4 cm de largura."* O professor logo perguntou: *"o que mais temos aqui? e o que queremos a princípio?"* Nesse instante, o aluno Neto disse: *"temos um quadrilátero interno e é esse quadrilátero que queremos encontrar a expressão que traduz a sua área em função de x."*

Após esse momento, o professor problematizou a situação, dizendo: *"muito bem, Neto, mas o que é preciso fazer para encontrar a área desse quadrilátero em função de x? O que é preciso fazer para solucionarmos a primeira questão da nossa tarefa exploratório-investigativa que busca encontrar uma fórmula ou uma lei que relaciona a área A do quadrilátero EFGH em função do valor de x. De onde partir?"* Logo após levantar essas questões, o professor desenhou o quadrilátero maior ABCD no quadro negro.

Apresentamos, a seguir, uma representação do desenho feito pelo professor no quadro negro, no qual: AE = BF = CG = DH = X e A (x) = y é a área do quadrilátero EHGF.

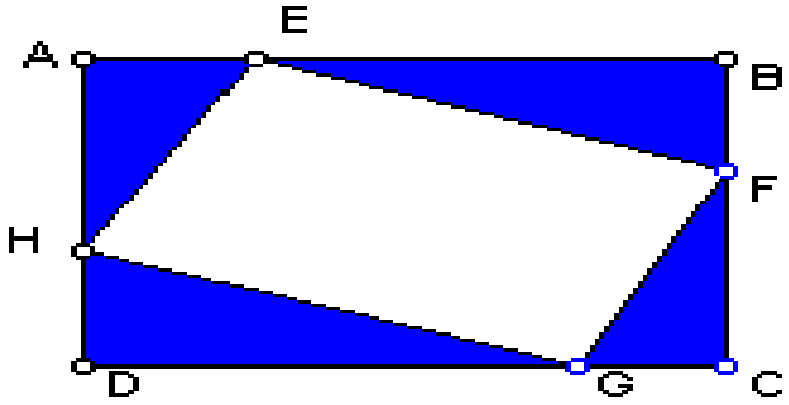
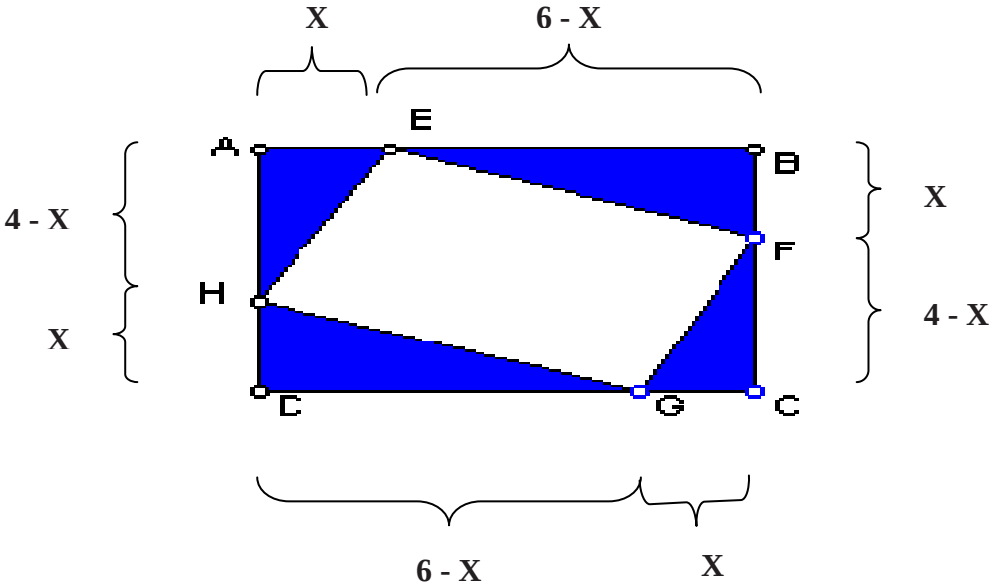


Figura 31: Representação do desenho feito pelo professor no quadro negro

Ao concluir a figura no quadro negro, o professor perguntou: *"alguém consegue e quer apresentar o que fizeram e o que é preciso fazer para chegar na fórmula?"* Nesse momento,

o aluno Edson disse: *"para encontrarmos a fórmula do quadrilátero interior, é preciso, em primeiro lugar determinarmos a área do retângulo exterior, que é dada por base vezes altura"*. O professor perguntou: *"e o que é preciso fazer para descobrir essa lei?"* Edson respondeu: *"para descobrirmos a lei que dá a área do quadrilátero interior em função de x é preciso encontrar a área do quadrilátero exterior e retirar desse quadrilátero os quatro triângulos que são formados no interior do quadrilátero exterior. É fácil perceber as medidas de cada lado do quadrilátero que estão no exterior, é só pensar se a base vale 6 cm e um pedaço mede X, então, o outro pedaço mede 6 – X, e se a altura mede 4 cm e um pedaço mede X, então, o outro pedaço mede 4 – X. Tudo o que temos que descobrir é isso, porque a partir de agora são só cálculos e Matemática."* Nesse momento, o professor disse: *"Edson, registre aqui no quadro-negro o que acabastes de falar."* Edson se dirigiu até a frente da sala e, fez algumas anotações no retângulo que estava no quadro-negro.

Apresentamos, a seguir, uma representação das anotações acrescentadas pelo aluno Edson no quadro negro.



*A = base * altura*
*A = 4 cm * 6cm = 24 cm*^{2}.

Figura 32: Representação das anotações feitas pelo aluno Edson no quadro negro

Concluídos esses cálculos, o professor disse: *"alguém discorda ou tem um outro jeito de encontrar a área do quadrilátero que está no interior do quadrilátero maior?"* Nesse momento, Igor disse: *"professor, eu posso encontrar as medidas dos lados do quadrilátero que estão no interior através do teorema de Pitágoras, não posso?"* O professor falou: *"é você quem está dizendo! Mas como já disse, como faria isso?"* Igor respondeu: *"eu pegaria o pedaço com os catetos, os pedaços que vale X, e o pedaço que vale 4 – X, e, aí, descobriria a*

hipotenusa, que é a medida do lado do quadrilátero que está no interior, e, depois, é só encontrar o outro e pronto." O professor disse: *"muito bem, Igor, percebe que nessa situação temos pelo menos dois caminhos que podemos ir! Eu pessoalmente, acho melhor a idéia do Edson, mas podemos ir também pelo caminho que dissestes."* Igor retrucou: *"é mesmo professor, acho melhor também ir pelo caminho do Edson, mas se não der certo por lá, irei por aqui, ok?"* O professor disse: *"ok, fique à vontade para caminhar, Igor, o que você não pode é ficar parado sem se mover, precisamos ser pessoas ativas e atuantes em qualquer que seja a situação, mas, como já sabemos, qual é o valor da área do retângulo exterior, podemos saber a área do quadrilátero interior."*

Nesse momento, o aluno Danilo disse: *"professor, é só juntar as áreas dos quatro triângulos de dois a dois porque eles são iguais e formam a cada dois retângulos um retângulo"*. O professor disse: *"Danilo, a sua idéia facilitará bastante o caminho e os auxiliará bastante nos cálculos"*.

A idéia apresentada pelo aluno Danilo consistia em definir a medida dos lados de ambos os retângulos. O retângulo que se apresenta na vertical tem dimensões 4 - X por X cm, enquanto que as dimensões do retângulo que se apresenta na horizontal são 6 - X por X cm. Apresentamos, a seguir, a representação do desenho feito pelo professor no quadro-negro.

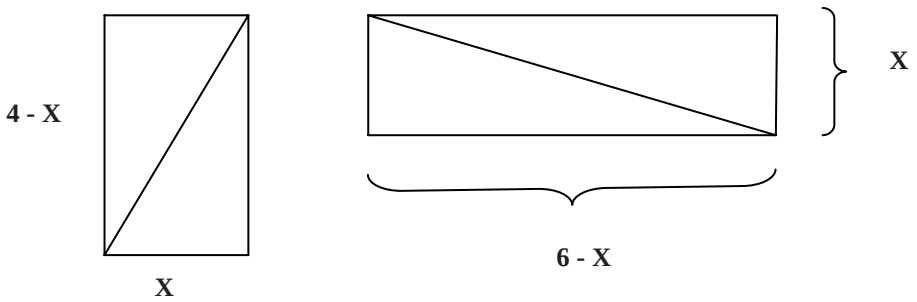


Figura 33: Representação do desenho feito pelo professor no quadro negro

Depois que o professor fez esses dois retângulos, ele convidou o aluno Danilo Maciel para calcular a área de cada um dos retângulos. Nesse momento, ele foi até a frente do quadro negro e fez alguns cálculos representados a seguir.

$$X.\ (6 - X) + X.\ (4 - X)$$
$$6X - X^2 + 4X - X^2$$
$$10X - 2X^2 \quad (cm^2)$$

Depois que desenvolveu esses cálculos, Danilo Maciel disse: *"acabei de encontrar a fórmula viu, professor?"* Nesse momento, Edson disse: *"não encontrou nada, não, Danilo. Professor, é preciso tirar a área do quadrilátero que está no exterior menos toda essa expressão que*

você encontrou aí." Danilo Maciel disse: *"ah é, falei isso só para testar se vocês estavam atentos (risos), mas, então, a área do quadrilátero interior será a área do retângulo exterior menos a área dos retângulos juntos que fiz aqui, aí, sim, obtemos a área do quadrilátero interior."* Nesse momento, ele virou-se novamente para o quadro negro e, registrou sua lei encontrada.

Apresentamos, a seguir, os cálculos feitos pelo aluno Danilo Maciel no quadro negro.

A do retângulo interno = A retângulo externo - A dos quatro triângulos
$A = 24 - (10x - 2x^2)\ (cm^2)$
$A = 2x^2 - 10x + 24\ \ (cm^2)$

Feitos esses registros, Danilo disse: *"correto, professor? Essa primeira parte está pronta."* Nesse momento, Danilo voltou ao seu lugar e, logo em seguida, o professor perguntou: *"a segunda questão era para determinar no contexto do problema quais eram os valores que X podia tomar, ou seja, os lados do retângulo externo. O valor de X pode variar de quanto a quanto?"* Logo, Alisson falou: *"entre 0 e 4, tendo em conta o limite das medidas dos lados do retângulo"*. Danilo Maciel disse: *"professor, não tem que ser de 0 até 6?"*

Nesse momento, Alisson declarou para Danilo *"que se X variar de 0 até 6 quando, por exemplo: se X for igual a 5 ele não fará parte da altura porque a altura só possui 4 cm."* Danilo concordou, mas disse: *"eu disse que era de 0 até 6 porque eu só estava considerando o maior lado e, na verdade, precisamos considerar que é o menor lado em vez do maior, agora, eu acho que já entendi."*

Nesse momento, o professor disse: *"então, Danilo, se você entendeu, qual é o domínio dessa função?"* Danilo questionou o professor: *"como assim domínio?"* Igor disse: *"Danilo, Domínio é o intervalo em que o valor de X pode variar."* Com isso, Danilo disse: *"ah, sim! então o domínio está compreendido entre zero e quatro."*

Nesse momento, o professor falou: *"pessoal, um domínio é representado da seguinte maneira em matemática: D(f) = [0,4]."* Danilo perguntou: *"por que entre colchetes e não parênteses?"* Nesse momento, o professor explicou:*"essa é a simbologia utilizada pela Matemática para representar o domínio, e esta simbologia (colchetes) é uma convenção."*

Ao concluir essas discussões, o professor passou à discussão da terceira questão. O objetivo dessa questão, era para montar uma tabela e representá-la, graficamente, dando a Função Área (A). O professor disse: *"se já conhecemos a lei da nossa função que é* $A(x) = 2x^2 - 10x + 24$*, e já conhecemos os valores que podemos atribuir para X, agora, precisamos montar uma tabela e depois representar essa tabela num plano cartesiano."* Nesse momento,

o professor montou uma tabela no quadro-negro com o auxílio dos cálculos já feitos pelos alunos nos seus grupos, ou seja, o professor apenas registrou os dados na tabela.

Apresentamos, a seguir, uma representação da tabela feita pelo professor no quadro-negro.

Valores atribuídos a variável X	**Valores da Área do quadrilátero interior dado pela função $A(x) = 2x^2 - 10x + 24$**
0	**$A(0) = 2.0^2 – 10. 0 + 24 = 24$**
1	**$A(1) = 2.1^2 – 10. 1 + 24 = 16$**
2	**$A(2) = 2.2^2 – 10. 2 + 24 = 12$**
3	**$A(3) = 2.3^2 – 10. 3 + 24 = 12$**
4	**$A(4) = 2.4^2 – 10. 4 + 24 = 16$**

Tabela 12: Representação da tabela com os valores da Área do quadrilátero

Ao concluir os registros dos valores, na tabela, o professor perguntou: *"quem já fez a representação gráfica dessa função?"* Nesse momento, alguns alunos levantaram as mãos, confirmando que já haviam concluído. O professor perguntou*: "que tipo de função é essa? O que vocês podem dizer sobre essa função? O que você entendeu com essa lei?"* Fernando disse: *"acho que essa função é semelhante à função passada porque é do segundo grau e porque trata de área de um retângulo."* A professor disse: *"como será que ficará o gráfico dessa função?"*

Nesse momento, Edson falou: *"essa função não dá para ser linhas retas porque estão os pontos não estão alinhados e, por isso, acho que é uma curva novamente"*. O professor disse: *"muito bem, uma curva. Essa curva possui um nome especial, sabe qual é o nome especial dessa curva? Essa curva te dá à idéia de que? Ela parece com o quê?"* Logo, Priscila disse: *"parece com uma antena parabólica."* Raíssa disse: *"é verdade professor, nossa, Priscila, é por isso que o nome dessa curva é parábola, porque é parecido com uma antena parabólica."*

Nesse momento, o professor fez a representação dos pontos contidos na tabela em um plano cartesiano no quadro negro.

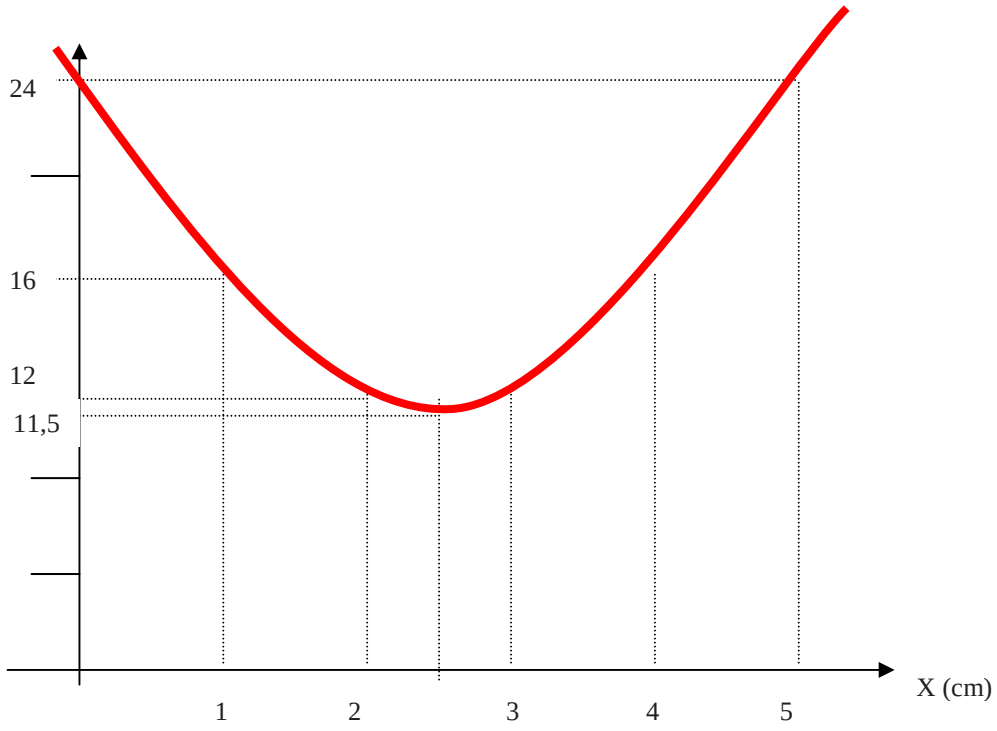


Figura 34: Representação dos pontos contidos na tabela num plano cartesiano no quadro negro.

Concluído este gráfico, chegou o momento de explorar idéias pertinentes a gráficos que possuem esse comportamento. A primeira manifestação dos alunos foi feita pelo aluno Heber ao dizer: *"essa parábola aí não toca o eixo horizontal porque, hein, professor?"* Nesse momento, Letícia disse: *"Heber, não toca porque os valores de X só podem ser de zero a quatro e nesse intervalo a área sempre vai ser positiva."*

Outra coisa que inquietou os alunos foi o motivo desse gráfico possuir uma linha de simetria, ou seja, a necessidade de encontrar os vértices da parábola para poderem encontrar os pontos máximos ou mínimos. Nesse momento, o professor disse: *"alguém sabe diferenciar uma função do primeiro grau e função do segundo grau?"* Nesse momento, todos os alunos manifestaram positivamente a diferenciação, e Neto disse: *"a diferença está no expoente, se for um, será do primeiro grau e, se for dois, será do segundo grau e assim por diante, sem contar com a representação gráfica que, de cada função, é diferente."* O professor disse: *"muito bem, pessoal, as idéias principais estão ficando e isso é importante."* Continuamos o episódio, investigando e discutindo as questões em conjunto com os alunos, pois, eles já haviam investigado questões semelhantes anteriormente.

Em relação à monotonia da Função, podemos dizer que os alunos entenderam bem onde a Função era decrescente ou crescente. O professor começou esse ponto, perguntando: *"O que é uma coisa monótona?"* Danilo disse: *"é um coisa devagar, sempre a mesma coisa."* Hiroshi também falou: *"uma coisa que não muda de rumo ou direção."* O professor

concordou com Hiroshi e, disse: *"isso mesmo, Hiroshi, pois em Matemática uma função é monótona quando não muda de direção, ou seja, é sempre decrescente ou crescente ou constante, mas, nessa função, qual é a monotonia dessa função?"*

Nesse momento, Heber disse: *"como assim, qual é a monotonia?"* Danilo disse: *"eh, Heber, que pergunta, hein, é para ver onde essa função é crescente e onde ela é decrescente."* Heber respondeu, dizendo: *"ah, sim, ela é crescente no intervalo de 2.5 até 4 e, decrescente no intervalo de 0 até 2.5"*. O professor perguntou: *"Todos concordam com o Heber?"* Letícia disse: *"eu concordo, professor, porque essa parábola cai até um certo ponto e depois começa a crescer."*

Ao concluir as discussões dessa questão, o professor passou para a próxima questão que era para encontrar os extremos de uma Função e, começou perguntando: *"alguém sabe quais são os extremos dessa função?"* Igor disse: *"como é que sabemos quais são os extremos dessa função, professor?*" O professor fez uma nova questão, dizendo:*"boa pergunta, Igor, merece uma excelente resposta, mas essa resposta você que me dará. Para isso me diga se essa função teve um ponto máximo ou mínimo e por quê?"* Igor respondeu: *"teve um ponto mínimo, porque ela cai até um ponto e aí começa a crescer."* O Professor perguntou: *"tá vendo, meu jovem, como você sabe, mas qual é a coordenada desse ponto?"* Igor disse: *"esse negócio de coordenada, eu não sei, o que é isso?"*

Nesse momento, o professor falou: *"pense comigo, pessoal, para termos um ponto, num plano cartesiano, precisamos do que?"* Igor respondeu: *"precisamos de um valor para X e um para Y."* O professor falou: *"muito bem, é isso."* Igor disse: *"então quer dizer que esse valor de X e esse valor de Y forma a coordenada de um ponto qualquer."* O professor afirmou: *"é."* Igor falou: *"ah, sim, agora eu já sei o que é coordenada."* O professor disse: *"Então qual é a coordenada desse ponto?"* Igor respondeu: *"o valor de X é igual a 2,5 e o valor de Y é igual a 11,5."* Assim, o professor perguntou: *"em um par ordenado qual valor vem primeiro e por quê?"* Luiz Victor disse: *"o valor de x, porque é o termo independente, para ter o segundo é preciso ter o primeiro"*. O professor disse: *"ok, mas, então, como fica esse par ordenado?*" Igor respondeu: *"fica (2,5; 11,5)"* Luiz Victor perguntou: *"então o ponto mínimo é esse ponto aí professor?"* O professor declarou: *"eu concordo e você?"* Em seguida, Luiz Victor disse: *"bom, eu também professor."*

Nesse momento, o professor aproveitou para problematizar um pouco mais a discussão, levantando algumas questões: *"essa função possui mínimo absoluto ou relativo?"* Heber respondeu: *"possui mínimo absoluto e o valor de Y = 11,5."* O professor perguntou: *"no contexto da nossa situação, o que isso representa?"* Igor respondeu: *"que de todos os*

quadriláteros que é possível fazer, o que terá a menor área será um quadrilátero com 11,5 cm^2 de área." O professor perguntou: *"em relação a este problema em que o maior valor que X pode tomar é?"* Alexandre respondeu: *"o maior valor que X pode tomar é 4."* O professor problematizou a situação, perguntando: *"se X for igual a 4 a função terá um máximo relativo ou um máximo absoluto?"* Alexandre disse: *"eu não sei, mas acho que é um máximo relativo."* Professor falou: *"o que fazer para concluirmos essa nossa idéia? Pense comigo, se X = 4 , qual é valor de Y?"* Igor disse: *"o valor de Y é 16."* O professor perguntou: *"tem algum valor maior que 16?"* Logo, Alexandre respondeu: *"tem quando o valor de X é igual a zero o valor de Y é 24."* Então, o professor perguntou: *"o que vocês concluem então?"* Alexandre concluiu dizendo: *"concluo que a função atinge máximo absoluto em Y = 24, tendo como o valor (maximizante), quando X = 0 o valor de Y = 24."*

Ao concluir essa discussão, o professor passou para o próximo item que era determinar o valor de X, dizendo: *"como nós já conhecemos a fórmula que dá a área em função de x que é $A(x) = 2x^2 - 10x + 24$, aqui, nos queremos encontrar o valor de x, mas temos o valor da área, então qual é o valor de x quando o valor da área é 16?"* Danilo Hiroshi respondeu: *"basta substituir o 16 no lugar de A(x)"* O professor falou: *"eu concordo com você, mas e depois?"* Danilo Hiroshi disse*: "Depois, é só encontrar o valor de X."*

Nesse momento, a aluna Letícia disse: *"professor, como nós já fizemos uma tabela de valores, os valores de x será 1 e 4"*. O professor perguntou a todos: *"todos concordam com a Letícia?"* Nesse momento, houve um silêncio na sala, no entanto, os alunos acabaram concordando, mas o professor continuou problematizando ao dizer: *"Mas, e se vocês não possuíssem essa tabela, como desenvolveriam os cálculos?"* Nesse momento, Danilo Hiroshi se dirigiu até a frente da sala, pegou o giz e fez alguns cálculos no quadro negro para desenvolver os cálculos.

Apresentamos, a seguir, os cálculos feitos pelo aluno Danilo Hiroshi no quadro-negro.

$$A(x) = 2x^2 - 10x + 24$$
$$16 = 2x^2 - 10x + 24$$
$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \ (:2)$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Concluídos esses cálculos, Hiroshi disse: *"essa função, caiu numa equação do segundo grau e aí é só resolver pela formula de Bhaskara."* Nesse momento, Hiroshi desenvolveu todos os cálculos e chegou à conclusão que os valores de X = 1 e X = 4 tinham a mesma imagem.

Um aspecto importante detectado pelo aluno Alexandre Yukio diz respeito ao fato de uma imagem possuir dois domínios, ou um único valor do eixo vertical pode possuir mais de um valor correspondente no eixo horizontal. Alexandre falou: *"percebi que para A (x) = 16, o X pode tomar o valor 1 ou 4, pois a estes dois domínios corresponde uma mesma imagem, e isso mostra que existem dois quadriláteros diferentes com a mesma imagem."* Ele disse isso porque, ele fez todas as figuras sendo que duas delas eram diferentes, mas que possuía a mesma área, pois quando X = 1, o quadrilátero obtido é um retângulo e quando X = 4 o quadrilátero obtido é um losango.

Outro ponto que foi discutido constava em determinar X quando o valor da área é maior ou igual a 22. O professor questionou: *"Como fazer, será que é diferente?"* Alexandre respondeu, dizendo: *"é do mesmo jeito, professor, coloca o 22 no lugar da área e encontra o valor de x."* O professor falou: *"Alexandre você podia fazer e explicar para a turma esse aqui?"* Nesse momento, Alexandre foi até o quadro negro e, fez alguns cálculos referentes a essa questão.

Apresentamos, a seguir, os cálculos feitos pelo aluno Alexandre no quadro-negro.

$$A(x) = 2x^2 - 10x + 24,$$
$$22 = 2x^2 - 10x + 24,$$
$$2x^2 - 10x + 24 - 22$$
$$2x^2 - 10x + 2 = 0 \ (:2)$$
$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

Feitos esses cálculos, Alexandre disse: *"agora, é só encontrar o valor de X e lembrar que X pode tomar valores iguais ou inferiores ao valor que encontrarmos aqui e os valores de X são 4,79 e 0,21."* O professor perguntou: *"No contexto do nosso problema, quais são os valores que satisfazem essa condição?"* Alexandre respondeu: *"os valores de X vão de 0 até 0,21 para qualquer número nesse intervalo a área será maior ou igual a 22"* Então, o professor perguntou: *"quais são as tuas conclusões?"* Alexandre concluiu, dizendo: *"para este conjunto de valores, os quadriláteros obtidos são semelhantes aos da figura apresentada no problema, mas, quanto menores são mais se aproximam do retângulo inicial, pois, para X = 0 a figura obtida é um retângulo que coincide com o retângulo inicial."*

Apresentamos, a seguir, os cálculos e desenhos feitos pelo grupo "Só no Rim" contidos nas narrativas escritas entregues por esse grupo.

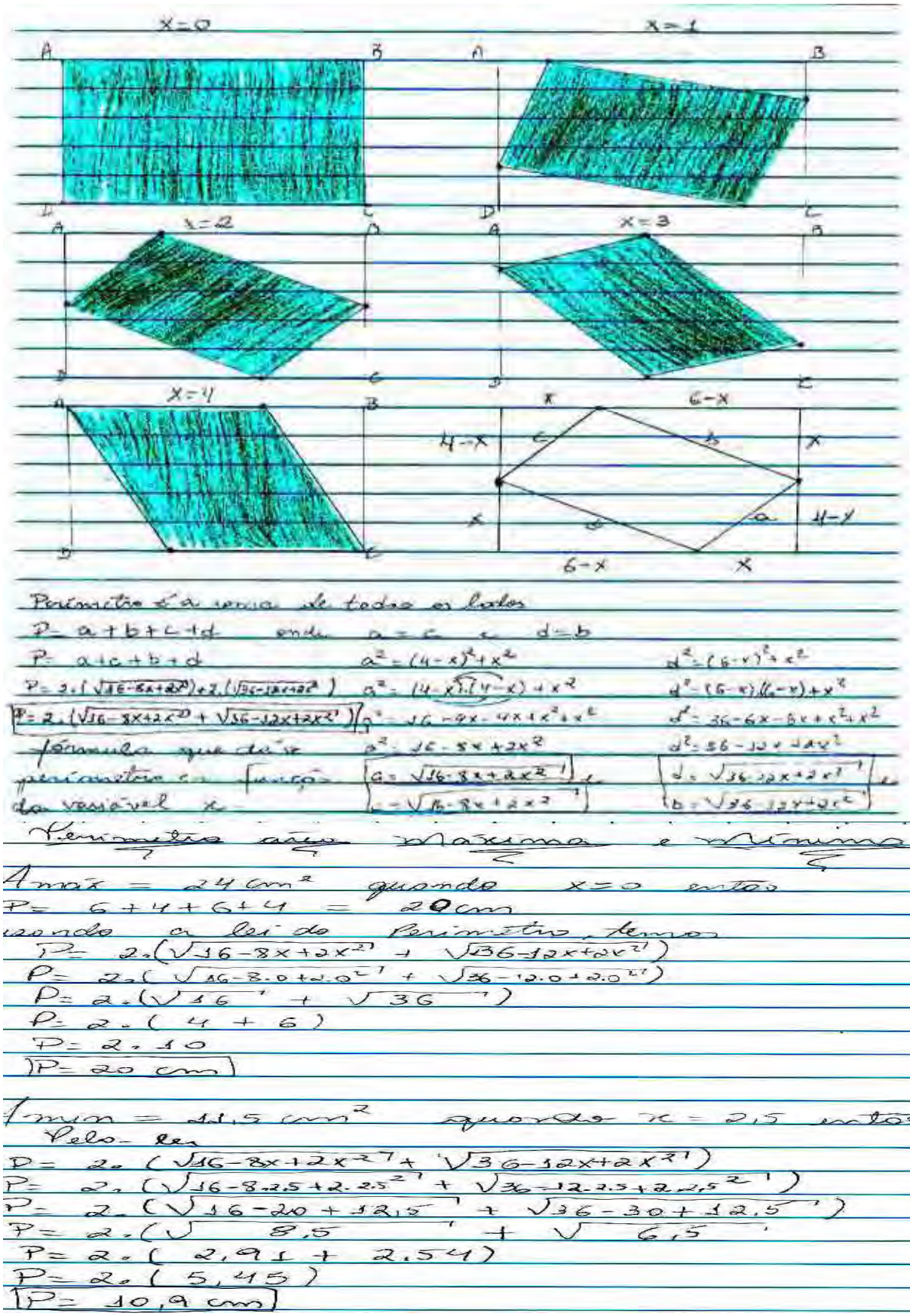


FIGURA 35: Cálculos e Desenhos feitos pelo grupo “Só no Rim” contidos nas narrativas escritas

Depois desses diálogos, o professor passou para os momentos de reflexão e analise sobre o desenvolvimento dos alunos nessa tarefa, e, ainda, sobre o que eles estavam achando de estudar Matemática nessa perspectiva.

De uma maneira geral, pensamos que essa tarefa exploratório-investigativa foi interessante e construtiva, na medida em que, simultaneamente, desenvolvemos nos alunos conhecimentos a respeito da matéria lecionada, como também, raciocínios lógicos para responder ás questões propostas.

4.9. Oitava Tarefa Exploratório-Investigativa: Criptografando Mensagens e as Funções

Esta tarefa exploratório-investigativa objetivou apresentar aos alunos um ambiente propício para exploração das relações existentes entre seqüência de números e as leis que regem uma Função. Preparamos essa tarefa exploratório-investigativa, com a finalidade de levar os alunos a entenderem o conceito de Função como correspondência e, também, como, transformação (máquinas de Funções). A noção do conceito de uma Função inversa também foi explorada nessa tarefa.

Desta maneira, nossa intenção foi dar oportunidades para os alunos se posicionarem perante as situações, através das suas narrativas. Pretendíamos também, desenvolver, nos alunos, capacidades de exploração, dando a oportunidade para formularem as leis através de seqüências de números, levando-os a generalizarem e entenderem os porquês das leis e das fórmulas.

Esta tarefa exploratório-investigativa foi proposta aos alunos em três episódios de ensino de cinqüenta minutos cada episódio, no qual dois aconteceram no dia 14 de setembro de 2005, e um, no dia 15 de setembro de 2005. Apresentamos, a seguir, a maneira como esta tarefa exploratório-investigativa foi introduzida aos alunos.

Tarefa Exploratório-Investigativa "Criptografando Mensagens e as Funções"

A palavra Criptografia tem sua origem grega: *krypto* = significa oculto, envolto, escondido, secreto; *graphos* significa escrever, grafar. Portanto, **criptografia significa escrita secreta ou escrita oculta.** As formas de ocultar mensagens são as mais diversas.

Geralmente a matemática espanta muita gente. Depende de como se encara. Se for preciso decorar zilhões de fórmulas e teoremas, realmente é de se espantar. Se for para oferecer ferramentas para efetuar cálculos que nos interessem e que facilitem nosso trabalho, a coisa muda de figura. Se pretendemos cifrar uma mensagem, queremos que esta cifra seja a mais segura possível. Se pretendemos decifrar uma mensagem, queremos que isto ocorra no menor tempo possível.

Um dos problemas encarados como um passatempo até poucos anos atrás, e que se tornou de importância crucial atualmente, é o de transmitir mensagens codificadas ou, em termos técnicos, criptografar mensagens. Este problema surge e revela toda a sua importância, quando é necessário enviar por meio de uma rede de computadores dados sigilosos: saldos e senhas bancárias, informações pessoais, número de cartão de crédito, etc. É preciso criar, então, meios seguros de transmitir esses dados de modo que somente pessoas autorizadas tenham acesso a eles.

A criptografia é tão antiga quanto a própria escrita; já estava presente no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios e os romanos utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalha.

O primeiro passo para que seja criado um código seguro é estabelecer, de alguma maneira pré-determinada, uma correspondência entre letras e números. Existem muitas formas de se definir tal correspondência, a mais simples das quais é dada pela tabela abaixo:

Letras	Números	Letras	Números	Letras	Números
#	0	I	9	R	18
A	1	J	10	S	19
B	2	K	11	T	20
C	3	L	12	U	21
D	4	M	13	V	22
E	5	N	14	W	23
F	6	O	15	X	24
G	7	9	16	Y	25
H	8	Q	17	Z	26

Essa tabela define uma correspondência que associa a cada letra do nosso alfabeto, um único número natural entre 0 e 26, onde o número zero (o símbolo # representa um espaço em branco) que vamos utilizar nos modelos de códigos que usaremos.

Por essa correspondência, qual letra está associada ao número 15?

Qual o número correspondente a letra *x*?

Você é capaz de estabelecer uma correspondência que associe as letras do alfabeto aos números naturais diferente dessa?

Nesse exemplo, o problema de transmitir mensagens codificadas foi reduzido, simplesmente, ao problema de associar a cada letra do alfabeto um único número natural, de acordo com uma regra conhecida. A correspondência ou regra, estabelecida acima, define uma função matemática.

Uma função matemática é, em essência, uma forma especial de se fazer uma correspondência entre elementos de dois conjuntos.

É claro que, para transmissão de mensagens, não se pode usar um código tão simples assim. O sigilo dos dados não estaria garantido, porque seria muito fácil descobrir a chave do código e então, decodificar a mensagem. Por isso, em geral, depois dessa primeira etapa, em que se faz corresponder letras a números de maneira simples, os números obtidos são ainda operados algebricamente usando-se regras conhecidas somente pelo receptor e pelo transmissor da mensagem.

Portanto, cifrar uma mensagem recai no problema de permutar números por meio de uma regra que chamaremos de f. Pode-se fazer isso, de forma muito prática, por exemplo, através de funções afins f (x) = a. x + b, com a, b inteiros, a diferente de zero, definidas no conjunto {0,1,2,3,4,.....,26}.

Suponhamos que Sonia e Rosinei desejem trocar mensagens sigilosas utilizando um alfabeto escolhido. O primeiro passo, a tomarem é definirem a função cifradora, digamos que seja f(x) = 2.x - 3. Assim, por exemplo:

Mensagem	S	O	U		C	U	I	A	B	A	N	A
Sonia associa a seqüência numérica	19	15	21	0	3	21	9	1	2	1	14	1

Mas Sonia transmite a Rosinei a seqüência numérica obtidas pelas imagens de f, isto é:

35 ; 27 ; 39 ; -3 ; 3 ; 39 ; 15 ; -1 ; 1 ; -1 ; 25 ; -1

Ao recebê-la, Rosinei, calculando a imagem de $\mathbf{f^{-1}(x) = (x+3)/2}$ nessa seqüência e utilizando a correspondência alfabeto -numérico, obtém-se a mensagem original.

Primeira Questão Proposta

O professor Márcio quer enviar uma mensagem sigilosa para os seus alunos da oitava série do Colégio Adventista, mas ele é um professor tímido e por isso resolveu transmitir a mensagem em forma de códigos. Para isso ele definiu a função cifradora como: **f(x) = x/2 – 1.** Mas o professor transmitiu a turma uma seqüência numérica obtidas através das imagens de f. Use este código para "transmitir" a mensagem.

Imagens de f	Domínio de f	Letra Correspondente
6,5		
-2		
8		
3,5		
2,5		
-0,5		
1		

6,5		
-1		
7		
6,5		
8		
-1		
9		
9,5		
1		
6,5		
-1		
2,5		
6,5		
8,5		
9		
6,5		
-1		
5,5		
9,5		
3,5		
9		
6,5		
-1		
1		
1,5		
8,5		
8,5		
-0,5		
-1		
9		
9,5		
8		
5,5		
-0,5		

Consegues descobrir qual é a mensagem? Se consegues, o que achou?

Segunda Questão Proposta

Agora que vocês já estão feras em decodificar mensagens, proponho-lhes o seguinte desafio: Suponha que um intruso (enxerido) tente decifrar as suas mensagens apoderando-se das seqüências numéricas codificadas. Como estamos utilizando funções afins para tanto, é suficiente apenas duas associações corretas entre os números da seqüência original e codificada. Com isso pedimos que **determinem f e descubra a seguinte mensagem:**

Imagens de f	Domínio de f	Letra Correspondente
-5		
-16		
1	**1**	
-12		
-2		
-3		
-17		
2	**0**	
-1		
-13		
-7		
-17		
1		
-17		
2		
-4		
-3		
-24		
2		
-13		

2		
-17		
-3		
-12		
-6		
-13		
-16		
2		
-14		
-13		
-16		
2		
-12		
-13		
-17		
2		
-14		
-13		
-16		
2		
-7		
-17		
-17		
-13		
2		
-3		
-17		
-18		
1		
-11		
-13		
-17		
2		
1		
-10		
-3		
-5		
-16		
-3		
-17		

Terceira Questão Proposta

Com base no que viram e aprenderam, envie uma mensagem para o professor Márcio, dando a ele a oportunidade de desvendar as suas mensagens. Relatem também nas narrativas escritas todo o desenvolvimento do grupo nessas questões.

A dinâmica metodológica foi destinada ao entendimento das idéias de correspondência e transformação como idéias referentes ao conceito de Função. Além de levá-los a se apropriarem das noções de correspondência entre duas grandezas, através da criptografia. Pretendia-se, também, fazer com que os alunos relacionassem as mensagens codificadas com o conceito de Função, entendendo e representando as Funções graficamente, além de compreender a representação gráfica da inversa de uma Função.

A realização desta tarefa exploratório-investigativa foi dividida em três partes. Na primeira e na segunda, descrevemos o modo como apresentamos e como foi desenvolvida em sala de aula. Na terceira parte, apresentamos às reflexões sobre as atividades dos alunos sobre

as conclusões, juntamente, com as implicações pedagógicas dessa tarefa exploratório-investigativa.

4.9.1. Desenvolvimento da Tarefa Exploratório-Investigativa: Criptografando Mensagens e as Funções

Na introdução dessa tarefa exploratório-investigativa, declaramos à turma que eles iriam continuar desenvolvendo atividades investigativas, nas quais, eles deveriam continuar trabalhando em seus grupos. Distribui as folhas contendo a tarefa para todos os componentes dos grupos, e como já lhes era familiar, teriam de entregar, no final, uma narrativa escrita formulada pelo grupo.

Os episódios de ensino do dia 15 de setembro foram momentos de entendimento dos conceitos e das idéias pertinentes a esta tarefa. Começamos o episódio de ensino discutindo as idéias centrais dessa tarefa: transformação e correspondência. Nesses momentos, discutimos com a classe, todas as questões investigadas nesta tarefa, pois tínhamos o intuito de compreender melhor a situação e entender também, as justificativas dadas pelos alunos. Aconteceram, durante o desenvolvimento desta tarefa, algumas interlocuções entre professor-aluno e aluno-aluno.

Apresentamos, a seguir, alguns momentos dessas interlocuções.

O professor começou as suas considerações, perguntando: *"em uma função afim f (x) = a. x + b, o que significa os valores de a, b?"* Alexandre disse: *"o valor de a é o que acompanha o termo independente e o valor de b é o que não depende do termo independente."* O professor disse: *"Na função cifradora apresentada no texto f(x) = 2.x – 3, qual é o valor de 'a' e qual é o valor de 'b' e o que elas significam graficamente?"* Raissa disse: *"o valor de 'a' é dois e o valor de 'b' é três, mas o que eles significam graficamente, eu não sei"*. O professor disse: *"tente representar essa função só para concluirmos algumas idéias referentes aos significados atribuídos às letras 'a' e 'b' em uma função afim"*.

Nesse momento, o professor convidou a aluna Raíssa para ir até o quadro negro e fazer o gráfico que representava essa Função. Ela fez a representação gráfica dessa Função que apresentamos na tabela a seguir, e também uma representação gráfica dos valores contidos na tabela.

x	Y = 2 . x – 3	(x,y)
-1	Y = 2 . (-1) – 3 = -5	(-1, -5)
0	Y = 2 . 0 – 3 = -3	(0, -3)
1	Y = 2.1 – 3 = -1	(1, - 1)
2	Y = 2.2 – 3 = 1	(2, 1)
3	Y = 2.3 – 3 = 3	(2, 3)

Tabela 13: Reprodução da tabela feita pela aluna Raíssa

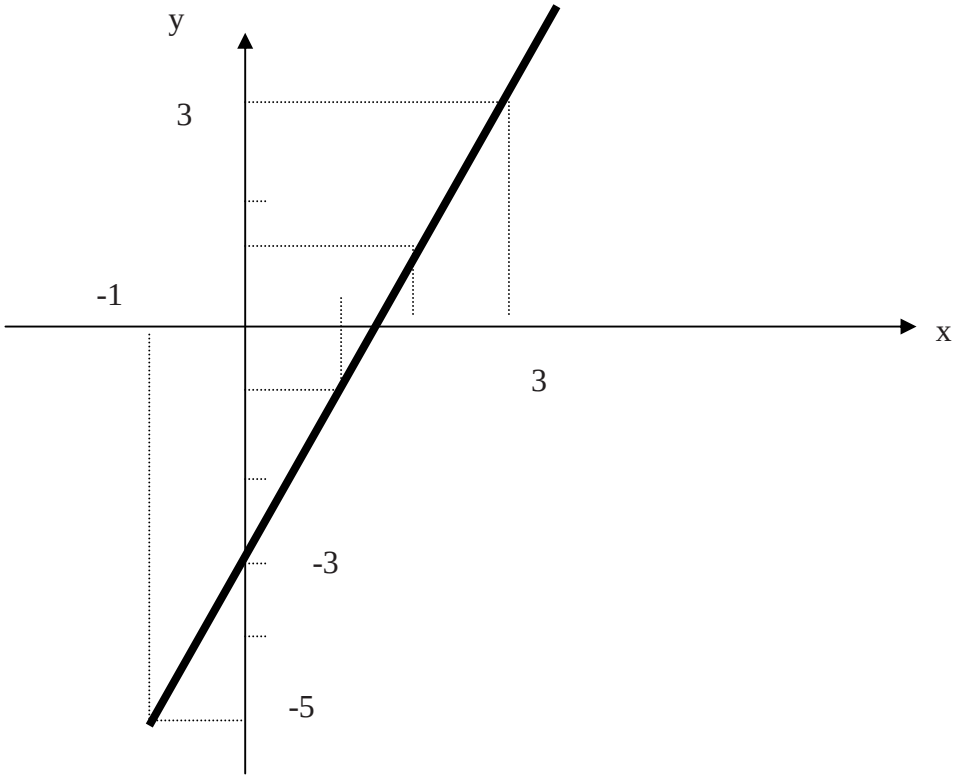


Figura 36: Reprodução da representação gráfica da aluna Raíssa no quadro negro.

Ao concluir essa representação gráfica, a aluna Raíssa disse: *"o valor de 'a' indica que a função vai crescendo sempre de dois em dois, acho que a regularidade que existe aqui é de dois em dois e o valor de b é o valor onde a reta toca o eixo vertical"* O professor problematizou, perguntando: *"então, o parâmetro 'a' influencia em que na reta?"* Neto respondeu: *"influencia da inclinação da reta."* O professor disse: *"como assim na inclinação da reta, podes explicar para nós?"* Nesse momento, Neto ficou em silêncio. No entanto, Alexandre disse: *"professor, se os valores do parâmetro 'a' variarmos, os valores da imagem, ou seja, do eixo vertical variará também na mesma medida, pois aumenta ou diminui o valor da imagem"* Neto se apresentou, questionando: *"então você quer dizer que sempre que variarmos o parâmetro 'a' estaremos aumentando ou diminuindo o gráfico verticalmente, pois alteramos o valor da imagem é isso?"* Alexandre respondeu, afirmando: *"exatamente, professor, é isso mesmo."* O professor disse: *"ok, mas como provar que a reta que corta o eixo vertical é o valor de b?"*

Logo em seguida, Alexandre disse: *"para tocar o eixo vertical, o valor do eixo horizontal é zero e aí é só colocar o zero para X e encontrar o valor da imagem que é o valor que corresponde ao eixo y."* O professor disse: *"Alexandre, registre aqui no quadro negro o que dissestes."* Alexandre foi até o quadro negro e fez o seguinte registro:

Com f(x) = 2.x – 3,
Então f(0) = 2.0 – 3;
f(0) = 0 – 3 = - 3

Ao concluir esse cálculo, Alexandre disse: *"portanto, o ponto que corta o eixo y será sempre (0,b) que, nesse caso é zero e menos três."* O professor disse: *"todos concordam com o Alexandre?"* Nesse momento, todos concordaram, pois ninguém se manifestou contrário.

Ao concluir esses diálogos, o professor passou a discutir a mensagem enviada por ele para os alunos. O professor perguntou: *"gostaram da mensagem?"* Priscila respondeu: "*adoramos, professor, e foi bem fácil descobrir"*. O professor disse: *"que bom, mas como fizeram para descobrir a mensagem?"* Priscila disse: *"a primeira questão foi fácil porque o professor já passou a lei, aí, só foi encontrar os domínios e depois procurar as letras que correspondiam aos números do domínio."* O professor disse: *"qual foi à mensagem que passei para vocês?"* Priscila disse: *"a mensagem é: obrigado por tudo, gosto muito dessa turma."*

Nesse momento, a aluna Letícia, em tom de alegria, disse: *"é verdade isso, professor?"* Igor interveio, dizendo: *"eu acho que o professor gosta mesmo da gente, porque sempre está conosco e também porque sempre faz seus trabalhos da Universidade, pesquisando a nossa aprendizagem e isso eu acho que é um motivo dele gostar de todos nós."* Nesse momento, o professor, um tanto emocionado declarou*: "é verdade, se existe uma turma em que tenho afinidade essa turma são vocês e foi exatamente por esse motivo que resolvi fazer o meu trabalho de mestrado também com vocês."*

Na continuação das interlocuções, o professor perguntou: *"como vocês fizeram para encontrar os domínios, sendo que vocês só possuíam o valor da imagem da função? Alguém quer vir ao quadro explicar?"* O aluno Heber se dirigiu até o quadro-negro e, fez alguns registros.

Apresentamos, a seguir, uma representação dos registros feitos pelo aluno Heber no quadro negro.

f(x) = x/2 – 1
A Im = y "então é só colocar o valor da imagem no lugar de f(x)"

Se Im = 6,5 então 6,5 = x/2 – 1 aí é só resolver a equação e encontrar x que é o domínio.
6,5 + 1 = x/2
7,5 = x/2
7,5 . 2 = x
15 = x
"O número 15 corresponde à letra P"

Depois desses registros feitos, o aluno Igor disse: *"professor, eu acho melhor encontrar a lei da função inversa e, aí, é mais rápido. Em vez de ficar substituindo o valor da imagem para encontrar o domínio, já encontra o valor do domínio direto"*. O professor disse: *"como assim, Igor, explique melhor aqui na frente para a turma toda, por favor, venha fazer a lei que determina a sua função inversa."* Nesse momento, Igor se dirigiu até o quadro-negro e fez algumas anotações neste e, também, falou algumas frases durante a sua explicação.

Apresentamos, a seguir, uma representação das narrativas do aluno Igor para toda a classe.

f(x) = x/2 – 1
Se f(x) = y, então:
y = x/2 – 1 "o menos um está no segundo membro e passa para o primeiro membro mais um"
y + 1 = x/2 "o dois está dividindo no segundo membro e passa para o primeiro membro multiplicando o y + 1"
(y + 1). 2 = x "desenvolvendo os cálculos teremos:"
X = 2.y + 2
$f^{-1}(x) = 2.x + 2$
Prova real:
$f^{-1}(6,5) = 2.\ 6,5 + 2$
$f^{-1}(6,5) = 13 + 2$
$f^{-1}(6,5) = 15$

Igor começou suas argumentações declarando: *"com essa lei, fica bem mais fácil e mais ágil o nosso trabalho, hein, professor, o que acha?"* Nesse momento, o professor disse: *"é verdade Igor, muito bem, você está de parabéns, gostei da sua participação."* Percebemos que todos os grupos procuraram encontrar primeiro o domínio para depois encontrar a lei. No entanto, o grupo liderado pelo aluno Igor procurou encontrar primeiro a lei e, isso, segundo eles, deu agilidade para o trabalho de grupo.

A respeito da segunda questão dessa tarefa exploratório-investigativa, o professor perguntou: *"como vocês determinaram a lei da mensagem codificada?"* Neto respondeu: *"aqui é só encontrar os valores do 'a' e do 'b' e, aí, acabou, pois quando conhecemos dois domínios e duas imagens conseguimos encontrar a lei e, aí, é só ir para o abraço e descobrir a mensagem. Bem, o senhor falou, hein, professor, estou percebendo bem a relação entre matemática e mensagem codificadas, agora entendo porque que os criptólogos precisam ser*

feras em Matemática." O professor problematizou: "*mas, nessa nossa situação como que fica a lei, quer vir, Neto, apresentar aqui no quadro negro?"* Nesse momento, Neto se dirigiu até o quadro negro e fez alguns registros, os quais apresentamos a seguir.

f (x) = a. x + b
1 = a.1 + b
1 = a + b (i)
f (x) = a. x + b
2 = a.0 + b
2 = 0 + b
b = 2 (ii)
"Se b = 2, então substituindo b na equação (i) temos"
1 = a + 2 (iii)
1 – 2 = a
a = -1 "agora que sabemos os valores de 'a' e de 'b' é só substitui na função afim"
f (x) = a. x + b
f (x) = - 1. x + 2
f (x) = - x + 2

Imagens (y)	Domínio (x)
1	1
2	0

Tabela 14: Representação dos registros feitos pelo aluno Neto no quadro negro

Ao concluir esses cálculos e essa tabela, o aluno Neto disse: "*correto, professor, agora é só encontrar a mensagem e nosso grupo já descobriu até a mensagem.*" Então, o professor perguntou: "*diga, então, qual é a mensagem?"* Neto respondeu: "*grandes coisas fez o senhor por nós por isso estamos alegres*". Nesse momento, o professor disse: "*muito bem, que bom que vocês já conseguem encontrar leis de funções afins, quando se conhecem apenas dois pontos.*" Com isso, Letícia disse: "*como assim, dois pontos, professor*?" O professor respondeu, problematizando: "*na situação passada, vocês possuem quantos domínios e quantas imagens?*" Neto disse: "*então, quer dizer que um domínio e uma imagem formam um ponto na malha quadriculada?"* Letícia respondeu ao Neto, dizendo: "*é isso mesmo, Neto, para cada x, tem um único y representado no gráfico.*"

Depois dessas considerações, o aluno Edson perguntou: "*mas, professor, se eu tenho dois pontos quaisquer, eu consigo encontrar a lei que corresponde à reta que passa por esses dois pontos?"* O professor logo respondeu: "*exatamente Edson, se você conhece dois pontos, você consegue encontrar uma lei que caracteriza uma da função afim.*" Edson questionou: "*é só usar o mesmo procedimento feito pelo Neto, mas por exemplo, se eu tenho dois pontos, sei lá, registra aí no quadro (-2, -3) e (3, 2), como é que fica essa lei?"* O professor registrou esses pontos no quadro, e disse: "*venha e apresente como você acha que ficaria a lei.*"

Nesse momento, Edson se dirigiu até o quadro negro e, fez alguns registros e se utilizou a narrativa oral para argumentar em torno das suas representações.

Apresentamos, a seguir parte dessas argumentações.

"Primeiro, eu tenho a característica da função afim que é"
$f(x) = a.\ x + b$
"Agora, é só representar os dois pontos um de cada vez nessa função, o primeiro ponto é" (-2, -3)
"Agora, é só encontrar a primeira equação para substituir essa equação na próxima equação"
$f(x) = a.\ x + b$
$-3 = a.\ -2 + b$
$-3 = -2.a + b$
$-3 + 2.a = b \quad (i)$
"A segunda equação é a do ponto"
(3, 2)
$f(x) = a.\ x + b$
$2 = a.3 + b$
$2 = 3.a + b$
$3.a + b = 2 \quad (ii)$
"Substituindo a primeira equação na segunda equação, teremos:"
$3.a + (-3 + 2.a) = 2$
$3.a -3 + 2.a = 2$
$5.a = 2 + 3$
$5.a = 5$
$a = 5/5 \quad a = 1$
"agora, é só encontrar o valor de b na primeira equação"
$-3 + 2.a = b \quad (i)$
$-3 + 2.\ 1 = b$
$-3 + 2 = b$
$b = -1$
"se a é igual a um e b igual a menos um a lei é determinada por:"
$f(x) = a.\ x + b$
$f(x) = x – 1$

Ao concluir esses cálculos, o professor disse: *"muito bem, mas ficaria a função inversa dessa sua função?"* Edson logo disse: *"professor, eu já fiz essa, acho melhor alguém vir aqui fazer, pode ser o Danilo, pois ele sempre é o inverso de todo mundo" (risos).* Nesse momento, Danilo resolveu ir até o quadro negro para tentar encontrar a inversa dessa Função.

Apresentamos, a seguir, representações das narrativas feitas pelo aluno Danilo Maciel durante a procura da sua Função inversa.

"Eu não garanto nada sobre a minha função, mas acho que sei fazer".
$f(x) = a.\ x + b$
$y = x – 1$
$y + 1 = x$ *"que pelo que o Igor fez pode ser também representada por"*
$f^{-1}(x) = x + 1$

Danilo concluiu, questionando*: "certo professor?"* O professor disse: *"explique o que você fez."* Danilo logo falou: *"tudo o que eu fiz foi isolar o x, pois pelo que eu entendi sobre*

função inversa é que aqui eu isolo o x em vez do y." Nesse momento, o professor disse: *"muito bem Danilo, mas como ficaria a representação dessas duas funções em um mesmo plano cartesiano? Será que você poderia fazer essa representação?"* Danilo perguntou: *"vamos fazer o seguinte, eu vou falando e o professor vai fazendo o gráfico aqui no quadro, pode ser?"* O professor concordou com Danilo e, se dirige também até a frente da turma para auxiliá-lo nas explorações.

Apresentamos, a seguir, uma representação dos gráficos feitos pelo aluno Danilo em sua narrativa escrita. Esse gráfico era semelhante ao gráfico que foi apresentado pelo mesmo no quadro-negro.

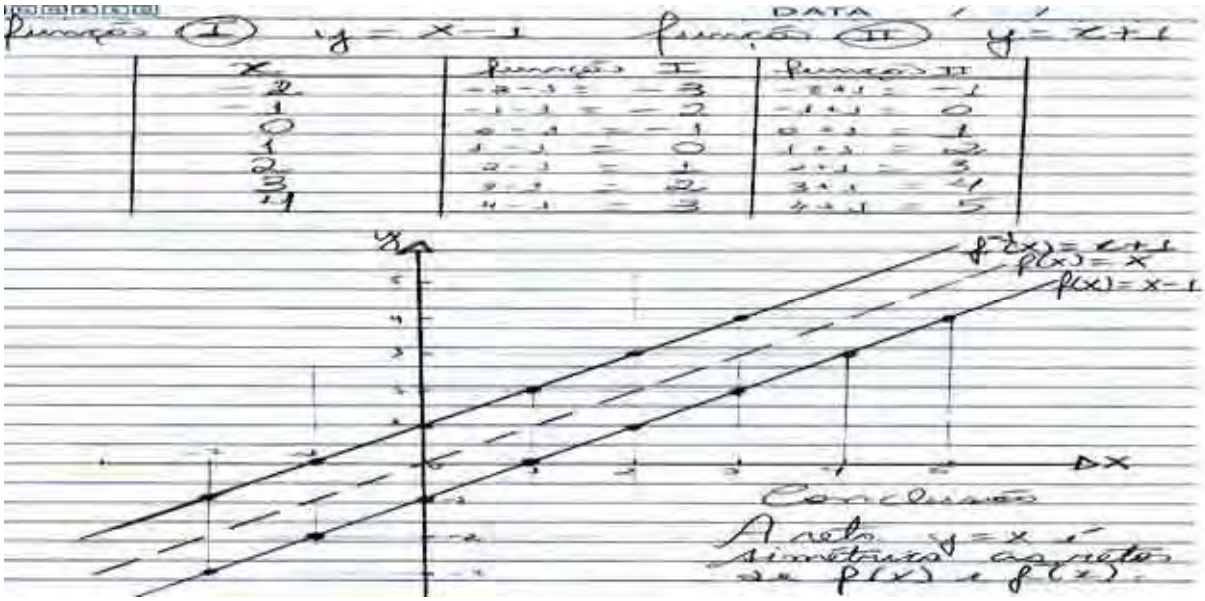


Figura 37: Gráficos feitos pelo aluno Danilo Maciel em suas narrativas escritas

Depois de representadas as duas retas no mesmo gráfico, o professor disse: *"Danilo represente neste mesmo plano cartesiano a reta da função f (x) = x e vê se consegues concluir alguma coisa."* Nesse momento, Danilo fez a representação gráfica dessa Função no mesmo plano cartesiano e que consta na figura anterior.

Concluído a representação desta Função, Danilo disse*: "o que temos que concluir aqui hein professor?"* O professor perguntou: *"consegues notar alguma relação entre essas funções?"* Edson respondeu: *"além de as retas serem paralelas, as retas são simétricas em relação a essa última reta feita pelo Danilo."* Danilo complementou: *"existem pontos parecidos, pois em uma reta existe o ponto (0, 1) e na sua inversa existe o (1, 0), além de outros pontos que são parecidos, mas que se invertem as ordens, uma hora o zero é o x na outra hora o zero e o valor do y."* Alexandre pediu a palavra e disse: *"de tudo que vocês disseram, eu concluo que se eu tenho uma função, meu domínio será imagem na inversa*

dessa função e a imagem da minha função vai ser o domínio desta função inversa." O professor disse: *"muito bem, pessoal, já aprendemos muitas idéias nessa tarefa referente as leis de funções, gráficos de funções afins e suas inversas, mas agora vamos passar para a terceira e ultima questão a ser discutida que diz respeito à mensagem que vocês enviaram para o professor."* Nesse momento, todos queriam apresentar as suas mensagens, no entanto, o professor escolheu a mensagem do grupo "Só no Rim".

Apresentamos, a seguir, a mensagem enviada pelo grupo "Só no Rin" ao professor.

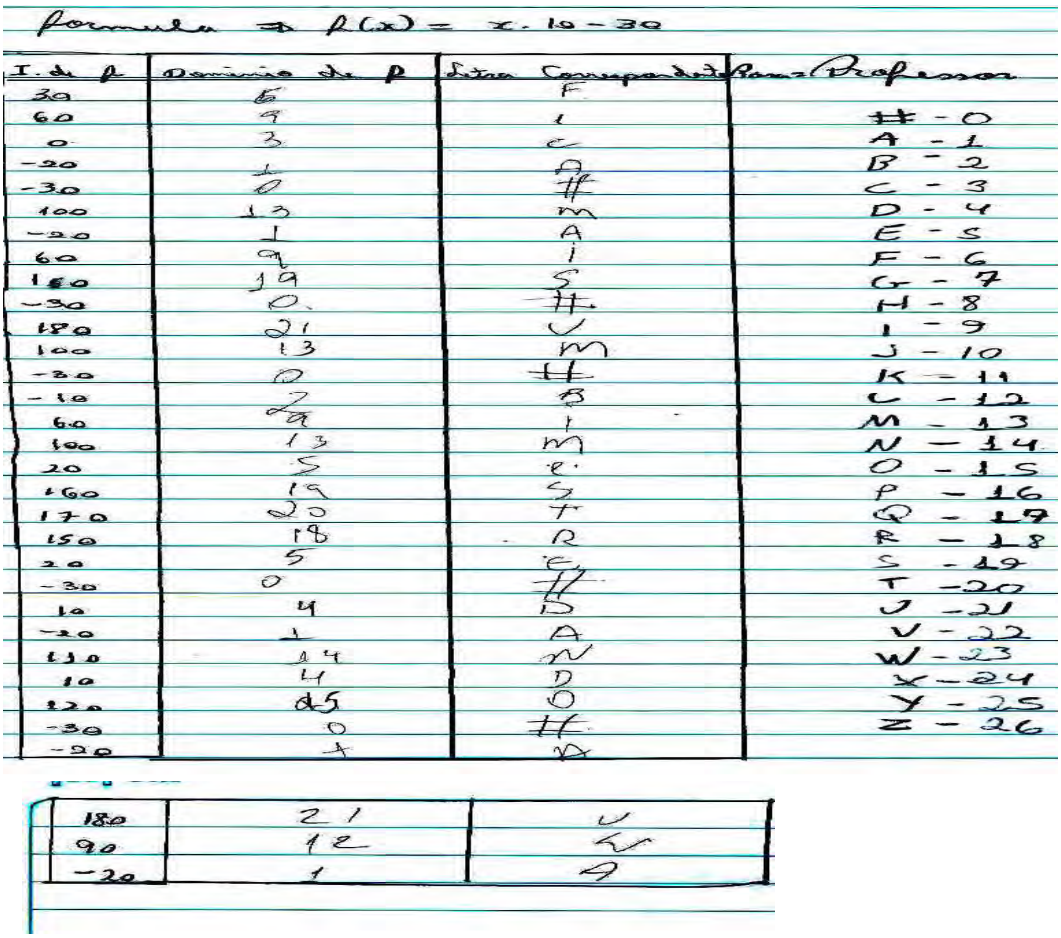


Figura 38: Representação da mensagem enviada pelo grupo "Só no Rin" ao professor

Mensagem Decodificada: "Fica mais um bimestre dando aulas"

Em seguida, o professor procurou rever algumas das noções já estudadas, ao perguntar: *"alguém se lembra das máquinas de funções que vocês estudaram na quinta e sexta série?"* O aluno Neto disse*: "ah, são aquelas que se coloca um número na entrada e, saí um outro número diferente na saída né professor?"* O professor continuou problematizando: *"Muito bem Neto, mas será que as idéias das máquinas podem ser relacionadas com a idéia de função? O que acham?"*

Após alguns segundos de silêncio e expectativa, Igor disse: *"eu acho que se relaciona, sim, professor porque para sair um número é preciso colocar um número na entrada e assim percebo que existe dependência entre o número de saída em função do número de entrada."* O professor disse*: "alguém discorda do que ele (Igor) disse?"* Todos concordaram, e, ainda, Letícia disse: *"professor é verdade, pois uma máquina transforma um número em outro através de uma operação matemática e nessa operação existe dependência."* O professor comentou: *"Letícia você disse uma palavra mágica e que também diz respeito ao conceito de função."* Letícia disse: "*que palavra mágica é essa professor?"* Heber respondeu, dizendo: "*é a palavra transformação Letícia."* O professor, então, perguntou: *"exatamente pessoal, a idéia de transformação é uma das idéias que envolvem o conceito de Função, mas o que vocês entendem por transformação?"*

Após o questionamento, Bianca disse: *"transformação é uma coisa que se modifica ou altera"*. O professor perguntou a ela: "*consegues associar o que dissestes com o conceito de função através das máquinas?*" Bianca respondeu: *"as máquinas de funções, nós já vimos e nelas existe uma regra que transforma o número que eu coloco na entrada ou na saída dessa máquina."* O professor disse: "*muito bem, Bianca, as máquinas de funções é uma das ferramentas mais úteis na busca de compreensão desse conceito matemático e nós quem determinamos valores de entrada e encontramos os números da saída, além de descobrir as leis que regem tais números."*

Nesse momento, Edson questionou o professor, fazendo algumas perguntas, como: *"professor, a idéia de transformação também nos leva ao conceito de função de que maneira? Ou melhor, como o professor define uma função?"* O professor se justificou, no entanto, disse: "*Meu jovem, estamos aqui explorando idéias que nos levam a esse conceito tão importante na Matemática. Estamos fazendo essa exploração em conjunto, e por isso, não quero apresentar a minha definição do que é uma função, mas quero ressaltar que a idéia de transformação está ligada ao conceito de função, pois, existe uma lei (expressão analítica) que transforma os números."*

O professor continuou falando e questionando: *"de todas as idéias que vocês aprenderam o que vocês entendem por função?"* Igor disse: *"as idéias básicas de função são dependência, correspondência, variação, regularidade e agora de transformação"*. O professor novamente perguntou: *"muito bem, mas agora quero algumas definições sobre o que é uma função Matemática?"* Nesse momento, ninguém se pronunciou a princípio, no entanto apareceram três definições dos alunos.

Apresentamos, a seguir, as três definições apresentadas pelos alunos em suas narrativas orais.

> De acordo com o aluno Neto, *"uma função é uma associação de duas variáveis de acordo com alguma regra, de modo que para cada valor da variável independente exista um e somente um valor da variável dependente."*
> Para a aluna Letícia, *"uma função é o relacionamento de dependência de uma variável a outra. A quantidade ou o volume de uma variável são relacionados àquela da outra."*
> Para o aluno Alexandre, *"uma função é uma regra matemática entre duas grandezas que corresponde à primeira grandeza exatamente um único valor para a segunda grandeza."*

Com base nestas três definições do conceito de função, mencionado pelos alunos, percebemos que as idéias de dependência e correspondência estavam mais fortes na mente dos alunos, pois, ao iniciarem a última tarefa de natureza exploratório-investigativa, estas noções ainda estavam firmes em suas mentes. Através dos diálogos acontecidos em sala de aula, notamos que os alunos participaram positivamente desta tarefa exploratório-investigativa.

Nesse momento, uma questão se torna necessária: do que se constitui uma pesquisa qualitativa interpretativa? Essa modalidade de pesquisa se constitui a partir de uma análise interpretativa dos dados coletados, dando-lhes "vidas", ou seja, delineando um diálogo entre os principais aspectos fundamentados de nossa teoria com os momentos de interação do pesquisador com o objeto investigado e com os sujeitos da pesquisa.

CAPÍTULO V

TORNANDO AS NARRATIVAS VIVAS – UMA ANÁLISE INTERPRETATIVA DAS NARRATIVAS

No capítulo anterior, apresentamos a descrição das narrativas dos sujeitos pesquisados. No presente capítulo, apresentamos uma análise interpretativa dessas narrativas traçando um diálogo entre elas e a literatura que trata sobre essa temática. Assim, apresentamos uma análise interpretativa, na qual procuramos evidenciar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas, enfatizando os seus aspectos metodológicos provenientes do contexto investigado à luz das teorias escolhidas. Fundamentamos a análise dos dados, considerando o objetivo desta pesquisa, o qual procura investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no processo de ensinar e aprender Funções.

Apresentamos, a seguir, as categorias de análise que direcionarão a nossa interpretação dos dados, objetivando delinear respostas à questão investigada: "Quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de Funções?" As categorias que surgiram na presente pesquisa, a partir da descrição e da análise interpretativa das narrativas dos alunos, podem ser classificadas em duas perspectivas: **perspectiva conceitual e perspectiva metodológica.**

A **perspectiva conceitual** é caracterizada pelas seguintes categorias: **relação dos alunos com os conceitos matemáticos**, a qual se relaciona à compreensão dos alunos sobre o conceito de Função e sobre outros conceitos matemáticos que emergiram nesse contexto de pesquisa; **relação dos alunos com os processos reflexivos/meta-reflexivos**, a qual se relaciona à reflexão dos alunos sobre os seus próprios processos de aprendizagem - meta-reflexão; **relação dos alunos com as investigações matemáticas e as tarefas exploratório-investigativas**, a qual se relaciona às potencialidades e limites das tarefas exploratório-investigativas na constituição dos conhecimentos matemáticos dos alunos; **relação dos alunos com as narrativas,** a qual se relaciona aos aspectos das narrativas orais e escritas, nos diferentes momentos da realização das tarefas exploratório-investigativas.

A perspectiva metodológica é caracterizada pelas seguintes categorias: **mediação do professor**, a qual se relaciona às experiências docentes do professor/pesquisador ao conduzir o processo investigativo no decorrer da pesquisa. Além disso, considera como a mediação do professor/pesquisador pode possibilitar um contexto propício à exploração e constituição do

conceito de Função; **dimensão colaborativa**, a qual se relaciona às interações entre o pesquisador e a professora da classe escolhida e à maneira como ambos vivenciaram a experiência com as narrativas, no contexto das Investigações Matemáticas, na presente pesquisa; **dimensão interativa**, a qual se relaciona às interlocuções e compartilhamento de idéias, conceitos matemáticos e experiências vividas pelos alunos em grupos, na composição das narrativas; **relação professor/alunos**, a qual se relaciona às interlocuções do professor/pesquisador e dos alunos no desenvolvimento desta pesquisa.

5.1. Perspectiva Conceitual

Apresentamos, a seguir, as **quatro categorias de análise**, pertencente à **perspectiva conceitual.**

5.1.1. Relação dos Alunos com os Conceitos Matemáticos

Essa categoria se relaciona à compreensão dos alunos sobre o conceito de Função e sobre outros conceitos matemáticos que emergiram nesse contexto de pesquisa. Nesta categoria, apresentaremos nossa interpretação sempre procurando responder a questão de investigação: **quais são as compreensões evidenciadas nas narrativas dos alunos do conceito de Função em um contexto das Investigações Matemáticas?**

Na presente pesquisa, na finalização da primeira tarefa exploratório-investigativa – **Uma Fábula Matemática**, os alunos já demonstraram que possuíam uma considerável noção do conceito de Função e, também, uma noção sobre quais seriam os seus papéis nos episódios de ensino desenvolvidos nessa pesquisa. Nesta tarefa exploratório-investigativa, os alunos destacaram a noção de dependência como uma das idéias fundamentais que constitui o conceito de Função. Essa conclusão está evidenciada nas narrativas escritas, entregues pelos grupos, nas quais eles narraram as conclusões que chegaram juntamente com os aspectos metodológicos de suas aprendizagens. Sendo assim, os objetivos foram alcançados pelos alunos, pois podemos evidenciar nas suas narrativas escritas que a noção de dependência entre duas variáveis assumia um papel fundamental na constituição do conceito de Função.

Apresentamos, a seguir, algumas das conclusões contidas nas narrativas escritas dessa tarefa apresentadas pelos grupos sobre seus entendimentos a respeito do conceito de Função.

> *"Ao termino desta tarefa, concluímos que ela despertou um interesse maior sobre Matemática. Tivemos algumas dificuldades em assimilar as dependências entre as grandezas. Mas apesar das dificuldades, essa tarefa contribui muito para nossa aprendizagem.* ***Ela nos ensinou a representar situações no gráfico além de nos ajudar a compreender o que é função (dependência entre grandezas ou variáveis****). O principal foi que aprendemos que existem grandezas e que dentro dessas grandezas, existe uma dependência originando assim uma função"* (grupo Os Orientais, grifo nosso).

Para este grupo, a idéia de **dependência** como uma das idéias que constituem o conceito de Função está evidente, pois os alunos apresentam, em suas narrativas escritas, o termo dependência várias vezes. Notamos que os alunos procuraram apresentar a sua narrativa escrita de maneira bem objetiva, pois destacaram com pertinência o que tinham aprendido e as suas conclusões do trabalho no geral. Assim,

> *"Foi bom começar a aprender funções ainda no Ensino Fundamental, visando o Ensino Médio, pois quando estivermos estudando lá, teremos mais facilidade para compreender melhor esse conceito. Os aspectos que tivemos mais dificuldades foi na hora de descobrir como começar a fazer os cálculos, começar a levantar o esqueleto. Essa tarefa contribuiu para sabermos que a Matemática esta em todos os lugares e também para ter um conceito a mais sobre funções. Com esse estudo, e* ***por meio dessa tarefa nosso grupo entende que uma função pode ser uma dependência entre duas grandezas"*** (grupo 3F Tartaruga, grifo nosso).

Essa narrativa reflexiva foi feita envolvendo todos os componentes do grupo, pois eles declararam que, "[...] por meio dessa tarefa nosso grupo entende que". Percebemos que eles chegam a uma conclusão e a declaram no plural (nosso grupo). Pode até ser que tenha sido o líder que conduziu à escrita dessa narrativa, mas se ele utilizou dos termos no plural, pensamos que todos os componentes do grupo estavam cientes da narrativa escrita, entregue no final da primeira tarefa exploratório-investigativa. O trecho apresentado abaixo evidencia essa idéia.

> *"Essa tarefa* ***contribuiu para o nosso conhecimento sobre funções*** *e despertou o nosso senso crítico. Essa tarefa contribuiu para uma melhor aprendizagem do conceito de função, pois ela nos deu uma idéia e uma noção do que venha ser o conceito de função. Para o nosso grupo, uma Função é uma relação que possui uma dependência entre as grandezas."* (grupo Los Hermanos, grifo nosso).

Esse grupo destacou que a primeira tarefa exploratório-investigativa já havia contribuído para o conhecimento deles a respeito do conceito de Função, e, também, essa primeira tarefa desenvolveu neles o senso crítico. Com base nessa narrativa reflexiva, acreditamos que a natureza da tarefa também interferiu nos empenhos dos alunos para compreenderem os conceitos matemáticos. Assim, esse fato torna-se evidente no trecho das narrativas abaixo e acima apresentadas.

> *"Essa tarefa despertou o nosso interesse no domínio da matemática para sabermos interpretá-la melhor. Nossa maior dificuldade até agora foi na interpretação da história e como entendê-la melhor para realizarmos o gráfico. Porém, nos ajudou a melhorar nossa forma de interpretação e* ***dominar melhor o nosso domínio da matemática.*** *Nosso conceito de função ganhou novos horizontes, pois para nós até então,* ***função é uma dependência entre duas variáveis****. Isso nos ajudou a compreender que todos nós somos dependentes uns dos outros. Praticamente tudo depende de tudo, como a semente depende da terra para crescer, ou seja, há uma dependência"*. (grupo Star Girls, grifo nosso).

O domínio da Matemática foi ressaltado nesta narrativa escrita, pois esse grupo considerou que dominar a Matemática auxilia na interpretação de diversas situações do cotidiano, ou, até mesmo, de situações imaginárias. Nesse sentido, Abrantes (1999) destaca que: "o estudo das Funções pode revelar-se rico em oportunidades para se estabelecerem conexões entre diversos domínios da Matemática" (ABRANTES, 1999, p. 98).

O interessante foi que esse grupo conseguiu relacionar o conceito de Função com os valores humanos, ou seja, quando declaram que, "[...] *função é uma dependência entre duas variáveis. Isso nos ajudou a compreender que todos nós somos dependentes uns dos outros."*

Essa outra reflexão só foi possível porque a noção de **dependência** foi discutida em sala de aula, o que levou esse grupo a pensar e relacionar esta noção em outros campos diferentes da Matemática. A narrativa a seguir, ilustra essa idéia.

> *"Foi muito interessante aprender que tudo que fazemos pode ser representado num gráfico. Tivemos um pouco de dificuldade em reescrever a história da lebre e da tartaruga. Tudo que estudamos sempre contribui para melhorar o nosso conhecimento****. Aprendemos mais sobre as funções que nelas existem grandezas ou variáveis, e que para ser uma função uma grandeza deve depender da outra****. Exemplo: A está em função de B quer dizer que A depende de B. Aprendemos que estamos sempre em dependência do outro"* (Grupo Esquadrão da Morte, grifo nosso).

A narrativa deste grupo apresentou uma relação entre os dois termos mais citados durante a realização da primeira tarefa exploratório-investigativa. Esse grupo conseguiu relacionar o termo **dependência** com o termo **Função** e essa relação foi apresentada de maneira abstrata, pois o grupo utilizou letras como sendo quaisquer grandezas. Desta maneira, a idéia de dependência foi enfatizada pelos alunos nessa tarefa exploratório-investigativa como uma das idéias inerentes ao conceito de Função.

Concluímos que a realização da primeira tarefa exploratório-investigativa apresentou algumas dificuldades para os alunos, contudo, ela apresentou indícios de desenvolvimento cognitivo, pois, as aprendizagens dos alunos foram explicitadas por meio das suas narrativas sobre o desenvolvimento de uma das idéias do conceito de Função.

Na segunda tarefa exploratório-investigativa – **Trajeto de Casa a Escola**, os grupos conseguiram alcançar os objetivos propostos, pois todas as vezes que solicitávamos para os grupos explicitarem algum conceito, os alunos e, principalmente, os líderes explicavam e também apresentavam as suas opiniões sobre as questões propostas para a discussão. Todos os grupos realizaram todas as questões propostas e alcançaram os objetivos propostos, pois explicitaram estes em suas nas narrativas.

Apresentamos, a seguir, os objetivos contemplados nas narrativas escritas de dois grupos.

> *"Explorar gráficos que relacionam noções de variável e dependência e familiarizar com representações gráficas, de funções; Nós tivemos como objetivo desenvolver a criatividade para conseguirmos transformar situações reais em gráfico e ao mesmo tempo refletir sobre isso; Explorar gráficos, fazendo leituras e interpretando-os e familiarização com as representações gráficas"* (grupo Só no Rim e grupo Los Hermanos).

Os objetivos contidos nas narrativas escritas dos alunos eram formulados por eles próprios no decorrer das tarefas exploratório-investigativas. Durante os momentos de apresentação, discutíamos alguns aspectos importantes e, a partir destes, os alunos formulavam os seus próprios objetivos e, refletiam verificando se os objetivos formulados tinham sido alcançados. Ao finalizar a segunda tarefa exploratório-investigativa, o conceito de Função estava explícito na narrativa escrita dos alunos. Alguns aspectos referentes às contribuições das tarefas exploratório-investigativas assumiram significação para os alunos a respeito deste conceito.

Apresentamos, a seguir, algumas reflexões dos alunos contidas em suas narrativas escritas.

> *"Concluímos que **a idéia de uma função está presente até mesmo onde nem percebemos** ali está presente esse conceito"* (grupo 1 – "Só no Rim", grifo nosso).
> *"Ao termino desse trabalho concluímos que essa tarefa contribuiu para nossa maior aprendizagem em interpretar situações e esboçar gráficos com base nas situações. Nossa dificuldade foi na parte de interpretação da situação proposta. **Nosso conceito de função ganhou novos horizontes. Aprendemos que existi uma dependência entre as coisas, inclusive na matemática e desenvolvemos melhor nossa forma de interpretação"*** (grupo "Star Girls", grifo nosso).
> *"Conseguimos aprender mais sobre funções, gráficos com curvas e velocidade constante e variável. A maior dificuldade foi na hora de representar o nosso trajeto de nossa casa até a escola. Essa tarefa contribuiu melhor para descobrirmos o que é uma função, pois **as funções estão ligadas às grandezas**. Aprendemos a fazer o nosso trajeto de casa até a escola e com isso aprendemos um pouco mais sobre funções e para sabermos que a matemática esta em todos os lugares*" (grupo "3F Tartaruga", grifo nosso).

Essas conclusões corroborem com a afirmação dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1999), quando estes declaram que, "[...] o conceito de função desempenha um papel importante para descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento" (p. 42).

Constatamos que esta tarefa exploratório-investigativa proporcionou aos alunos a compreensão das idéias de **dependência** e de **variação** entre **grandezas**. Essas duas idéias foram destacadas pelos alunos nos momentos de reflexão como também em suas narrativas escritas. Sendo assim, concluímos que os alunos se apropriaram destas idéias, pois eles registraram tais entendimentos em suas narrativas, durante os momentos de discussão e interlocuções com a turma toda e, também, quando os alunos Alexandre e Tamara apresentaram suas idéias referentes à segunda tarefa exploratório-investigativa **– Trajeto de Casa a Escola.**

Um exemplo disso pode ser evidenciado nos momentos finais da representação gráfica da aluna Tamara, quando o professor fez as suas considerações finais ressaltando as idéias discutidas nessa tarefa exploratório-investigativa e o aluno Neto intervêm apresentando também as suas considerações finais. Assim, apresentamos parte dessa narrativa.

> *"Nessa tarefa exploratório-investigativa aprendemos idéias importantes para o entendimento e significação do conceito de função, idéias essas relacionadas à* ***dependência*** *entre duas grandezas, e a* ***variação*** *entre as grandezas."*
> Nesse momento, o aluno Neto declarou**:** *"Professor, cada dia que passa, começo a me interessar mais pela Matemática, porque estou começando a perceber que ela está presente em todas as coisas e lugares e esse conceito de função também se faz presente até mesmo no percurso de minha casa até a escola. É incrível esse negócio de poder representar graficamente qualquer movimento que fazemos."*

Na terceira tarefa exploratório-investigativa – **A Rivalidade entre Brasil e Argentina**, as idéias do conceito de Função foram aparecendo nos relatos e nos esquemas da jogada, resultantes de animadas discussões entre os alunos. Esses colocaram algumas questões à professora da turma e também a nós sobre vários aspectos da jogada. Por meio da nossa mediação, orientação e problematização, os alunos iam, aos poucos, formulando suas próprias conjecturas a respeito da tarefa exploratório-investigativa. Nesse sentido, as intervenções dos alunos parecem contemplar as idéias da APM (1988), quando afirma que "a exploração favorece a formulação de conjecturas, etapa fundamental da experiência Matemática que os jovens devem realizar" (p. 43).

As narrativas das jogadas elaboradas pelos alunos mostraram muitas jogadas possíveis. No entanto, elas se distinguiam, pois apresentavam argumentações futebolísticas diferenciadas. Entre os esquemas representativos da jogada, alguns permitiam visualizar linhas de marcações auxiliares como **segmentos de reta** das diferentes **distâncias** traduzidas pelos pontos do **gráfico**.

Apresentamos, a seguir, as narrativas de dois grupos referentes a tal perspectiva conceitual.

> *"Esta tarefa nos fez ver que podemos usar gráficos em qualquer situação até em uma jogada de futebol e que quase tudo tem função, às vezes escondidas que nem percebemos, mas nessa atividade nos a descobrimos"* (Grupo II - Os Orientais).
> *"Essa tarefa nos deu mais uma contribuição para sabermos conceituar o que é uma função, pois está incluía as variáveis, distância e tempo. Função para nós é uma dependência, que está ligada com grandezas ou variáveis.* ***A lição de moral que tiramos foi que não podemos ser sempre dependentes das pessoas, mas sim lutar para buscarmos a independência****"* (grupo Los Hermanos, grifo nosso).

Alguns aspectos de atitudes argumentativas dos alunos sobre as suas aprendizagens foram evidenciados, pois eles eram críticos ao refletirem sobre o que haviam aprendido. Os alunos demonstraram no desenvolvimento dos episódios de ensino reflexos da primeira tarefa exploratório-investigativa, pois havia narrativas escritas que continham lições morais. Pelo fato de a primeira tarefa exploratório-investigativa – **Uma Fábula Matemática** ter deixado uma lição moral para os alunos, eles carregaram consigo a tendência de que em todas as suas narrativas escritas eles deveriam apresentar qual havia sido a lição moral que eles tiraram das atividades posteriores.

Na realização da quarta tarefa exploratório-investigativa – **A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções -** notamos que os alunos já evidenciavam o desenvolvimento das capacidades de dedução de conjecturas e de generalização de leis que regiam as regularidades. Um exemplo disso pode ser evidenciado, quando o professor/pesquisador, ao mediar os diálogos, questionou os alunos com o intuito de levá-los a experienciarem aspectos dedutivos e intuitivos.

Apresentamos, abaixo, um diálogo que evidencia esse fato.

> Letícia disse: *"a regra consiste em, na casa posterior possuir o dobro de grãos da casa anterior."*
> Nesse momento, Raíssa disse: *"mas, quem está em função de quem aqui"?*
> O professor problematizou, dizendo: "boa pergunta, o que vocês acham?"
> Edson disse: *"eu acho que é a função que dá a quantidade de grãos em cada casa, em função do número da casa, não é isso, professor?"*
> O professor perguntou novamente: *"estou com você, mas como representar essas duas grandezas?"*
> Nesse momento, novamente, o silêncio pairava na sala, mas Bianca disse: *"supondo que G seja a quantidade de grãos e C o número da casa."*
> O professor demonstrou ter gostado da resposta da aluna Bianca ao dizer: *"muito bem, Bianca, de onde você tirou essa idéia?"*
> Ela respondeu: *"não sei, só pensei que em G porque é a primeira letra grãos e C porque é a primeira letra de casa."*
> Nesse momento, Letícia questionou: *"como determinar uma lei que relaciona estas duas grandezas?"*

> O professor problematizou ainda mais ao dizer: *"quais são as duas grandezas?"*
> Letícia respondeu*: "quantidade de grãos e número da casa."*
> O professor concordou, no entanto, continuou problematizando: *"Muito bem, mas qual depende uma da outra?"*
> Neste momento, Igor disse: *"é a quantidade de grãos que depende do número da casa."*
> O professor novamente perguntou: *"e o que isso significa?"*
> Igor disse: *"que para saber qual é o número de grãos que se deve colocar numa determinada casa eu preciso saber qual é a casa."*
> O professor perguntou: *"como assim?"*
> Igor respondeu: ***"a grandeza G está em função de C, ou seja, G depende de C."***

Por meio desses diálogos, constatamos que os alunos começaram a produzir suas primeiras generalizações de diferentes tipos de Funções, pois essa tarefa exploratório-investigativa proporcionou a eles a possibilidade de compreenderem que uma Função pode ser representada também por meio de uma expressão analítica. Evidenciamos, também, atitudes argumentativas dos alunos sobre suas conjecturas formuladas. Um exemplo de argumentações em prol da defesa e da justificação de uma conjectura é narrado através do diálogo a seguir.

> O professor disse: *"muito bem, Luiz, mas o que te fez pensar que seria essa a fórmula correta? Da onde você tirou essa formula?"*
> Neste momento, Letícia disse: *"professor, acho que ele pensou na regularidade que existe aí, aí não tem uma regularidade?"*
> Logo, o Professor disse: *"Luiz, responde para ela"*.
> Luiz Victor falou: *"acho que existe, porque a base eu tinha certeza que era dois porque estava sempre dobrando."*
> O professor problematizou, perguntando: *"e por que o menos um no expoente?"*
> Luiz Victor pensou um pouco, mas disse: *"bom, porque se não tivesse ele, não daria certo."*
> Com base na resposta de Luiz, o professor perguntou: *"como assim, não daria certo?"*
> Luiz Victor respondeu: *"não daria certo porque, na primeira casa, se não tivesse o menos um daria 2, na segunda casa, daria 4, na terceira casa, daria 8, aí é só continuar e, por isso, se eu tirasse um do expoente na primeira casa, ficaria 2 elevado a um menos um, que dava 2 elevado a zero que é igual ao um da nossa tabela."*

Apresentamos, a seguir, algumas das narrativas escritas dos alunos referentes às suas compreensões do conceito de Função da quarta tarefa exploratório-investigativa.

> *"Essa tarefa contribuiu para uma melhor aprendizagem porque descobrimos o que* ***é uma correspondência e saber que ela, também nos dá uma idéia a mais sobre funções****. Aprendemos nessa tarefa a trabalhar com funções exponenciais. Essa tarefa contribuiu também para o conceito de função, pois nos deu uma segunda idéia de função, que é a idéia de correspondência e dependência. Para nós até agora função deu duas idéias a esse conceito. O conceito de dependência e de correspondência. A lição moral que tivemos foi de sempre persistir fazendo testes, pois é errando que muitas vezes se aprende.* ***Aprendemos com essa tarefa a trabalhar com exponencial, e saber a idéia de correspondência"*** (grupo "3F – Tartaruga", grifo nosso).

Nessa narrativa escrita, fica evidenciada a compreensão dos alunos a respeito da idéia de **correspondência** e, que esta idéia também constitui em uma das idéias do conceito de Função. Esta tarefa exploratório-investigativa explorou uma situação envolvendo uma **Função Exponencial**. A compreensão do conceito de uma Função Exponencial e, também, da idéia de **correspondência** foram evidenciados nos diálogos interativos entre o professor e os alunos, os quais apresentam abaixo um trecho desses diálogos.

> *"Essa tarefa contribuiu para melhor conceituar o termo função, pois nos deu uma* ***segunda idéia sobre funções, a idéia de correspondência****. Função nos dá a idéia de dependência e correspondência. Dependência que está ligada com as grandezas e variáveis e correspondência que para cada valor do eixo x tem um único valor no eixo y. Aprendemos, com essa tarefa, uma segunda idéia sobre função, a trabalhar com função exponencial e a usar funções no nosso dia-a-dia. Uma função exponencial, para nós é quando o valor independente do termo X está no expoente. Nessa tarefa, podemos refletir que o jogo de xadrez foi um jogo inventado por sábios e pessoas inteligentes"* (grupo "Los Hermanos", grifo nosso).

Na narrativa desse grupo, percebemos que eles entenderam a noção intuitiva do que consiste uma **Função Exponencial**, além de evidenciar a idéia de **correspondência** como uma das idéias fundamentais do conceito de Função.

> *"Aprendemos que função exponencial é aquela em que a variável é um expoente, está no expoente.* ***Aprendemos a formular funções através de testes e conjecturas****. Aprendemos a criar situações usando funções. Não houve bastante dificuldade para realizar estas tarefas, a dificuldade que tivemos foi porque estávamos trabalhando com um tipo novo de função"* (Grupo Só no Rim, grifo nosso).

Esse grupo ressaltou a importância de se fazer conjecturas e testes para a dedução das leis que regiam as Funções estudadas.

> *"Nós desenvolvemos essas questões com base no conhecimento de todos e na pesquisa também. Concluímos que ao término deste trabalho, nós concordamos que tudo, no nosso dia-a-dia, envolve leis e fórmulas"* (Grupo Café com Leite).

Este grupo não destacou em sua narrativa escrita à compreensão da idéia de **correspondência**, mas ressaltou que as **leis** e as **fórmulas** são concebidas por eles como uma das formas de representação do conceito de Função. Assim, com o passar dos episódios de ensino, fomos percebendo que, de maneira gradativa, as posturas dos alunos estavam se modificando, pois eles começaram a considerar a grande importância dos momentos de discussão e reflexão para suas aprendizagem.

Na quinta tarefa exploratório-investigativa – **As Funções vão até a Lanchonete**, os alunos conseguiram encontrar a lei de uma Função e também conseguiram entender e identificar as expressões analíticas como uma maneira de representar uma Função. Evidenciamos um exemplo disso, nas interlocuções existentes entre o professor/pesquisador e alguns alunos.

> Igor disse: *"professor a lei é **P = 2.M+2**"*
> O professor, então, perguntou: *"quem é P? E quem é M? E quem está em função de quem?"*
> Igor respondeu: *"P é o número de pessoas e M é o número de mesas. O número de pessoas está em função da quantidade de mesas, para eu saber quantas pessoas cabem, eu preciso saber quantas mesas tem."*
> Nesse momento, o professor perguntou: *"e se eu quero colocar a quantidade de mesas em função do número de pessoas, como fica essa lei?"*
> Um enorme silêncio tomou conta da sala de aula. No entanto, o professor voltou a perguntar: *"pensem comigo, se eu tenho 100 pessoas, que conta você faz para descobrir o número de mesas que precisam para acomodar todas essas pessoas?"*
> Alexandre logo disse: *"é só fazer o processo inverso."*
> O professor problematizou, dizendo: *"como assim, o processo inverso, você poderia explicar o que está pensando e o que entende por processo inverso*?"

Por meio dessa tarefa exploratório-investigativa os alunos descobriram as leis que determinavam as **regularidades** que estão nas mais diferentes situações do nosso mundo. Uma das dimensões conceituais relacionou-se à compreensão do conceito de **Função Inversa** pelos alunos. Essa compreensão pode ser destacada a partir dos seguintes registros:

> Cálculos feitos pelo aluno Alexandre no quadro negro:
> ***A lei é: P = 2. M + 2 então no lugar de P eu coloco o número 100.***
> ***100 = 2. M + 2***
> ***(100 – 2)/2 = M***
> ***M = 98/2***
> ***M = 49 mesas.***
> Concluídos esses registros do aluno Alexandre, no quadro-negro, o professor disse: *"muito bem, Alexandre, mas como fica a função inversa da lei P = 2.M+2?"* Alexandre disse: *"é do mesmo jeito que fiz os cálculos."* Nesse momento, Alexandre colocou no quadro, novamente, a seguinte lei: **P = 2.M+2,** e disse: *"como queremos a inversa precisamos apenas deixar o M sozinho, ou seja, precisamos isolar a grandeza M".*
> ***P = 2.M+2***
> ***P - 2 = 2.M***
> ***M = (P – 2) / 2 = M***

Nas narrativas escritas dos alunos, percebemos que os objetivos dessa tarefa foram alcançados. Apresentamos, a seguir, algumas das declarações dos alunos referentes às suas aprendizagens sobre o conceito de Função, evidenciadas em suas narrativas escritas.

> *"Aprendemos mais sobre funções através das suas leis que tinham a ver com as mesas da lanchonete. A maior dificuldade foi na hora de descobrir as leis da atividade, mas depois de algumas conjecturas fizemos alguns testes e validamos as fórmulas que representavam as funções"* (grupo "Os Orientais").
> *"Para realizar essa tarefa, precisamos refletir bem sobre o que é uma função (uma coisa que depende da outra, é um objetivo na sua vida que você tem que alcançar ou resolvê-lo, ou seja, precisamos encontrar fórmulas ou algum outro jeito e essa fórmula que chegamos determina uma função)"* (grupo "Scoob-Dôo").
> *"Aprendemos a formular leis de funções através de testes e conjecturas e não houve bastante dificuldade para realizar estas tarefas, a dificuldade que tivemos foi porque estávamos trabalhando em uma das tarefas com um tipo novo de funções"* (grupo "Esquadrão da Morte").

Os alunos destacaram a importância dos processos de formular conjecturas e realizar testes para encontrar as **leis** que determinam uma Função. Destacaram, também, que as fórmulas evidenciam as **regularidades** existentes em algumas situações. Assim sendo, as leis aparecem como uma das maneiras de representar uma Função.

Na sexta tarefa exploratório-investigativa – **Função Área: Respeite o seu Número**, os alunos se empenharam para formular conjecturas e justificá-las de maneira autônoma, pois eles estavam dispostos a entenderem como poderia surgir uma lei Matemática e, isso se deu nessa tarefa pelas **regularidades**. Essa característica foi notada nas narrativas escritas, nas quais os alunos apresentaram as suas conclusões, ressaltando o que eles haviam aprendido.

Apresentamos, a seguir, algumas narrativas escritas dos alunos.

> *"Concluímos que esse trabalho foi de grande aprendizagem para o nosso conhecimento, sabendo nos com tentativas de descobrir a lei que a responde, conforme a função e não tivemos grande dificuldade durante as atividades investigativas. Concluímos que, ao termino deste trabalho, nós concordamos que tudo no nosso dia a dia envolve leis e fórmulas."* (grupo Los Hermanos).
> *"Este trabalho contribuiu muito porque fiquei sabendo de coisas que eu não sabia, como,* ***relembrar que a área de um triangulo é encontrado através da multiplicação entre a base e a altura dividido por dois****. Uma grande dificuldade que enfrentamos foi na hora de descobrir, investigar as fórmulas para até chegar à fórmula exata que conseguimos"* (grupo "Star Girls", grifo nosso).
> *"Compreender os conceitos referidos a noção de função, assim como conseguir aplicar estes conceitos na resolução e formulação de problemas e aprendemos a calcular áreas de figuras com a ajuda das funções"* (grupo "Só no Rim", grifa nosso).

Nestas três narrativas escritas, percebemos que alunos já estavam convictos de que as Funções e a Matemática estão presentes em tudo que está à nossa volta, pois, segundo eles, ao dependermos e relacionarmos com outros, estamos usando a Matemática. Os conceitos prévios foram destacados mais uma vez por um dos grupos, pois o conceito de Função pode ser explorado em diversos contextos próprios da Matemática, como cálculo de **Áreas** e **Perímetros**.

Percebemos que os alunos compreenderam o que a sexta tarefa exploratório-investigativa - **Função Área: Respeite o seu Número** objetivava, pois eles evidenciaram esses conhecimentos nas discussões e, também, nas narrativas escritas. Na narrativa escrita realizada pelo aluno Igor em conjunto com o seu grupo, ele evidenciou muitas idéias e conceitos referentes às características do comportamento de uma determinada Função.

Apresentamos, abaixo, a representação gráfica realizada pelo aluno Igor.

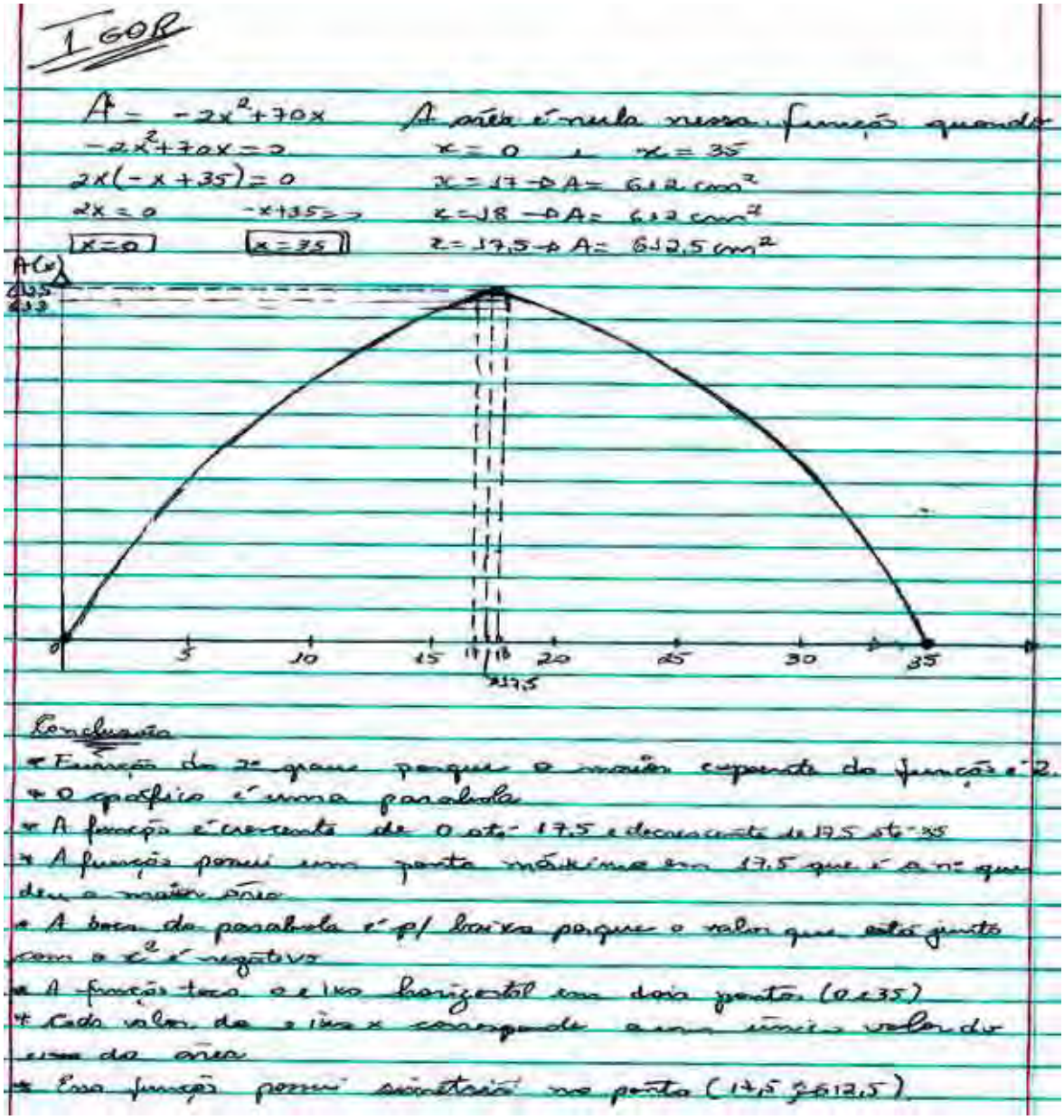


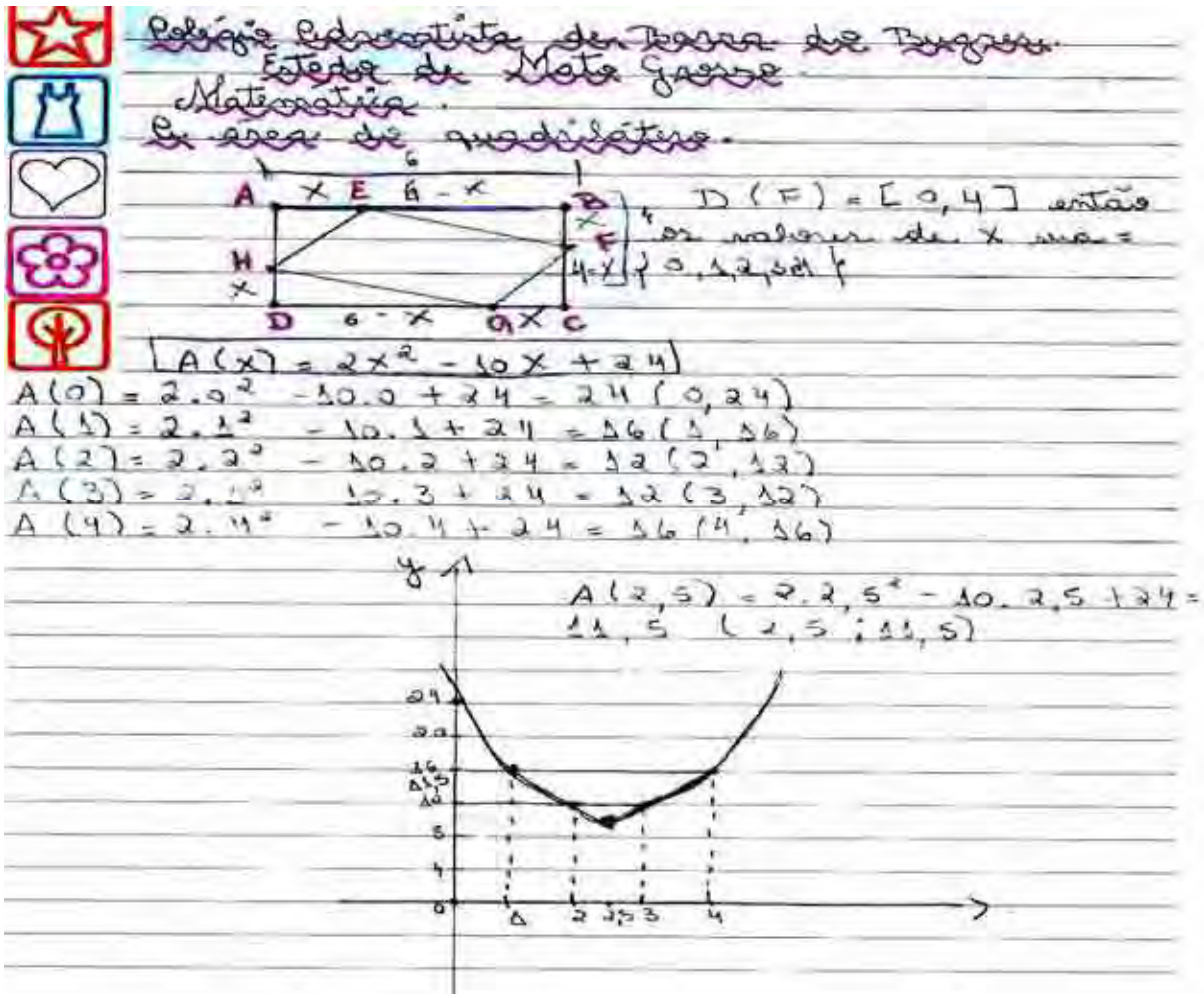
Figura 39: Representação gráfica e conclusões registradas pelo aluno Igor do grupo Los Hermanos

Refletindo sobre essa representação, constatamos que os alunos conseguiram relacionar a lei que rege a área dos quadriláteros em Função dos números de chamada. Além disso, eles compreenderam as principais características de uma **Função Quadrática**, sem nunca terem aprendido na escola sobre Função Quadrática. Desta maneira, concluímos que

essa abordagem metodológica dessa tarefa exploratório-investigativa contribuiu para a formalização desses conceitos no Ensino Médio.

Na sétima tarefa exploratório-investigativa – **Área do Quadrilátero em Função de X**, os alunos estiveram sempre entusiasmados e empenhados nas suas explorações. Eles conseguiram encontrar a **lei da Função**, e, também, conseguiram entender e compreender as idéias do conceito de Função, discutidas nos episódios de ensino anteriores.

Apresentamos, a seguir, parte da narrativa escrita realizada pelo grupo “Star Girls” referente aos cálculos envolvendo o conceito de Função e uma reflexão escrita do desenvolvimento desse grupo na realização desta tarefa exploratório-investigativa.



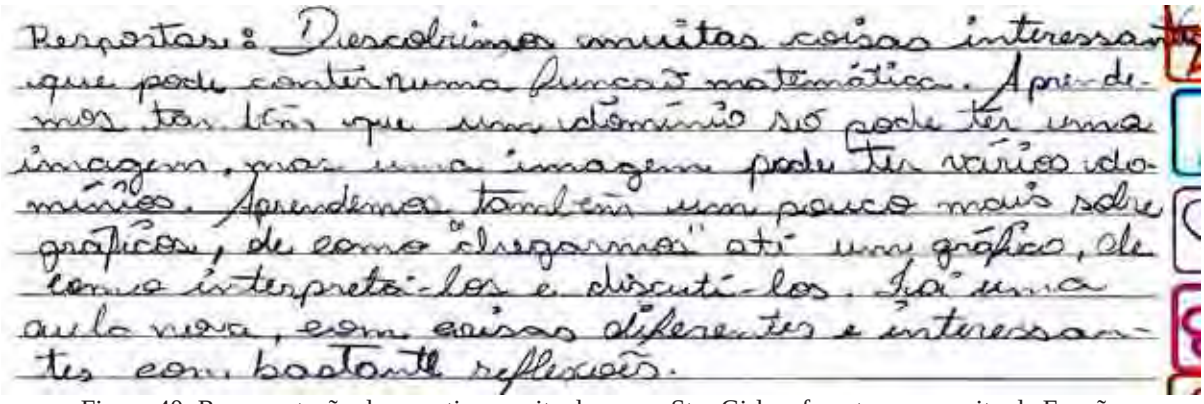

Reportar: Descobrimos muitas coisas interessantes que pode conter numa função matemática. Aprendemos tão bem que um domínio só pode ter uma imagem, mas uma imagem pode ter vários domínios. Aprendemos também um pouco mais sobre gráficos, de como "desgarmos" até um gráfico, de como interpretá-los e discutí-los. Foi uma aula nova, com coisas diferentes e interessantes com bastante reflexões.

Figura 40: Representação da narrativa escrita do grupo Star Girls referente ao conceito de Função

Consideramos que essa tarefa exploratório-investigativa consolidou novos conhecimentos dos alunos a respeito das **leis matemáticas** envolvendo **regularidades**, e, ainda, reforçou o desenvolvimento da criatividade e da capacidade dos alunos nas explorações de situações reais.

Na oitava tarefa exploratório-investigativa – **Criptografando Mensagens e as Funções**, os alunos se posicionavam em procurar entender como funcionava a **Criptografia**, e as leis que regem tais códigos. Nesta tarefa, os alunos já se expressavam mais espontaneamente e defendiam suas idéias com uma maior autonomia. Nesse sentido, Moysés (1997) declara que, "com o passar do tempo, a criança deixa de necessitar desse elemento externo, e passa a utilizar signos internos. Esses nada mais são do que representações mentais que substituem os objetos do mundo real" (p. 26).

Notamos que as comunicações entre os alunos estavam bem desenvolvidas, pois eles já possuíam algumas características referentes ao espírito investigativo. Os alunos estavam animados e entusiasmados para procurarem desvendar mensagens criptografadas através de uma **lei** que representava uma **Função**. Trabalhando nessa abordagem metodológica das Investigações Matemáticas com as tarefas exploratório-investigativas oportunizamos ambientes de constante aprendizagem para os alunos. Sentimos isso, pela disponibilidade demonstrada pelos alunos nos episódios de ensino.

Ponte et al. (1997), afirmam que as tarefas educacionais que exigem um elevado grau de experimentação, exploração, reflexão e comunicação (com outros alunos e com o professor) constitui em uma ferramenta educacional que serve fortemente para aumentar a aprendizagem e o desenvolvimento para além dos limites da disciplina.

As leis trabalhadas e discutidas pertenciam a Funções do tipo **f(x) = a. x + b,** em que procuraram compreender, também, os significados dos valores de **'a'** e de **'b'**. A turma toda se envolveu e eles mesmos perceberam, pois ressaltaram que desenvolveram capacidades

relacionadas às idéias envolvendo o conceito de Função. Nesta tarefa exploratório-investigativa, os grupos discutiram e estabeleceram conexões entre as Funções e a Criptografia, pois, também, foi possível entender algumas características das Funções inversas. Assim, fez-se necessário a nossa mediação durante a existência de alguns conflitos de idéias que surgiram nessa interação.

Um desses conflitos pareceu-nos interessante e pertinente, visto que estava relacionado a uma das grandes dificuldades dos alunos que consistia em solucionar um **sistema de equações** com duas **variáveis**. Depois das nossas intervenções, os alunos ainda debateram mais um pouco esta idéia, e, logo após, efetuaram os respectivos registros, embora mostraram dificuldades para solucionar um sistema de equações.

O modo como decorreu essa tarefa exploratório-investigativa realçou a importância que teve participação dos alunos, por meio das suas **narrativas**, durante as aulas de Matemática, além de destacar a reação positiva que os alunos demonstraram sobre tarefa do tipo exploratório-investigativa, contribuindo, assim, para a compreensão do conceito de **Função**.

Neste sentido, Ponte (2003) afirma que as aulas com Investigações Matemáticas proporcionam aos alunos um espírito investigativo. Assim, "[...] o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor." (p. 23).

Com base na realização das oito tarefas exploratório-investigativas, envolvendo as idéias do conceito de **Função** podemos dizer que essas tarefas proporcionaram um contexto interativo, no qual os alunos apresentaram indícios de aprendizagens, envolvendo algumas das idéias fundamentais do conceito de **Função**.

Desta maneira, os alunos tiveram a oportunidade de compreender as seguintes idéias envolvendo o conceito de Função:

Dependência entre duas **grandezas;** ler e interpretar gráficos relacionados às noções de **variação** e **dependência; representações gráficas** como um meio de representar o conceito de **Função**; interpretar **gráfico** explorando suas possibilidades de adequação a uma situação real; generalizar **leis** de diferentes tipos de Funções, nas quais uma **Função** pode ser representada por meio de uma **expressão analítica; correspondência** entre duas grandezas; determinar leis de Funções envolvendo a idéia de **regularidade;** trabalhar com leis para **generalizar** e entender os porquês das **fórmulas matemáticas; comportamento da Função Área** (A), no contexto de um problema real, envolvendo **Áreas** e **Perímetros,** fazendo assim

a relação entre a **Álgebra das Funções** e a **Geometria das Áreas** e **Perímetros; transformação** (máquinas) de uma Função e de **Função Inversa** durante a exploração de **leis** que regem uma **Função**.

Notamos que os alunos adquiriram as principais idéias, envolvendo o conceito de **Função**, discutidas e exploradas nas **tarefas exploratório-investigativas** realizadas. Concluímos que as idéias de **dependência** e de **correspondência** apresentaram-se com maior persistência no conceito de **Função**. Desta maneira, afirmamos que os alunos conseguiram formalizar seus próprios conceitos referentes ao tema **Funções**.

Apresentamos, a seguir, a **segunda categoria de análise** pertencente à **perspectiva conceitual.**

5.1.2. Relação dos Alunos com os Processos Reflexivos/Meta-Reflexivos

Essa categoria relaciona-se com a reflexão dos alunos sobre os seus próprios processos de aprendizagem (Meta-Reflexão). Assim, destacamos a **dimensão reflexiva e meta-reflexiva** dos alunos ao refletirem sobre a sua aprendizagem e a dimensão reflexiva e meta-reflexiva do professor ao refletir sobre o seu trabalho nos episódios de ensino.

A reflexão é a capacidade do professor analisar o seu próprio processo de refletir em ação, durante suas aulas, contribuindo, assim, para produzir outros sentidos para a ação pedagógica e para o saber matemático. A meta-reflexão favorece a capacidade do professor de reconhecer as próprias idéias e de avaliar o que necessita aprender e se conscientizar de como esta aprendizagem ocorre. Nesse sentido, Smolka e Góes (1995) afirmam que "a ação reflexiva pode ser entendida como aquela que é tomada como objeto de atenção pelo próprio sujeito. Trata-se não só de saber fazer, mas também de pensar sobre o que e como se fez" (p. 103).

Na primeira tarefa exploratório-investigativa – **Uma Fábula Matemática**, as narrativas escritas dos alunos registraram inúmeras lições morais que os alunos extraíram da fábula matemática. Esta relação, feita pelos alunos da fábula com a Matemática, mais especificamente, com aspectos voltados aos valores morais da fábula com os conceitos matemáticos, foram aspectos importantes ao desenvolvimento da reflexão deles. Evidenciamos um exemplo disso, nas narrativas escritas dos alunos referentes a algumas lições morais da fábula matemática.

> *"Esta fábula tem uma lição moral bem grande, em que nunca devemos menosprezar os adversários"* (grupo "Só no Rim").

> *"Para nós a lição moral que essa fabula deixou foi que quando você quer uma coisa, você tem que ir constante, nem muito rápido e nem desistir dessa coisa"* (grupo "Los Hermanos").
> *"Essa tarefa nos ensinou uma importante lição moral: que nunca devemos ignorar pessoas ou coisas, por mais que elas sejam desprezíveis, pois as aparências enganam, e algum dia ou até mesmo hoje, dependeremos de outras pessoas"* (grupo "Star Girls").

Ressaltamos que essas lições morais implícitas nas narrativas escritas também foram destacadas pelas narrativas orais dos alunos nos momentos de reflexão da tarefa. Sendo assim, evidenciamos a importância pedagógica que possui as narrativas orais dos alunos nos momentos de discussão e análise, pois "as vozes dos alunos" são fundamentais para comunicar suas reflexões e compreensões sobre os conceitos matemáticos. Neste sentido, Morais e Galiazzi (2003) declaram que "o exercício de narrar, além de possibilitar a comunicação de conhecimentos já anteriormente apropriados, também é processo de reconstrução de aprendizagens anteriores" (p. 20).

Apresentamos, a seguir, alguns objetivos apresentados pelos grupos em suas narrativas escritas referentes à primeira tarefa exploratório-investigativa – Uma Fábula Matemática.

> *"O nosso objetivo foi investigar situações reais que, no entanto de principio não tinha nada a ver com a Matemática, mas que, depois, proporcionou grandes descobertas matemáticas como de dependência entre duas grandezas"; "Desenvolver uma capacidade para interpretar as situações como: a história da tartaruga e da lebre que teve que ser colocada no plano cartesiano, em que analisamos as situações das grandezas ou variáveis e investigar situações reais representando e interpretando essas situações graficamente." "Aprender cada vez mais sobre o conceito de função, as dependências entre as grandezas e trabalhar um pouco com o que já sabemos." "Despertar a criatividade através de produção de texto e transportar a história para o gráfico"* (grupos "Os Orientais", "Café com Leite" e "Scoob-Doo").

Essa criatividade através da produção dos textos, destacada, por um dos grupos, diz respeito às histórias formuladas por todos os oito grupos. Notamos que os alunos desenvolveram a criatividade e o senso crítico das narrativas. Um indício disso é que alguns deles resolveram formular situações extras, ou seja, histórias diferentes do contexto da fábula da tartaruga e da lebre.

Observamos que os alunos avançaram em seus conhecimentos matemáticos, pois eles recriaram a fábula original colocando-a em um contexto mais significativo para eles, readaptando o conteúdo à sua história de vida, de forma significante e motivadora. Em outras palavras, os alunos refletiram sobre a fábula e incorporaram alguns desses conceitos implícitos. Notamos que o processo de reflexão foi de fundamental importância para a conscientização dos conceitos matemáticos, pois os alunos ao refletirem puderam estabelecer

relações entre os conceitos matemáticos, inerentes às tarefas exploratório-investigativas.

Na segunda tarefa exploratório-investigativa **- Trajeto de Casa a Escola,** os alunos apresentaram algumas compreensões, decorrentes do processo reflexivo, a respeito do conceito de Função, por meio das suas narrativas escritas.

Apresentamos, a seguir, algumas das reflexões registradas nas narrativas escritas dos grupos.

> *"Essa tarefa nos despertou um interesse de traduzir graficamente situações reais ocorrendo dúvidas sendo estas justificadas ampliando o conhecimento de gráficos, mas sem muitas dificuldades ao fazê-lo por já ter estudado sobre essa matéria e mostrou que o objetivo dos personagens ocorreu tudo bem ao transformar fatos da realidade em gráficos."* (grupo Só no Rim).

Para esse grupo, é importante relacionar situações reais com a própria Matemática, pois estas situações despertam os seus interesses.

> *"Ao término desta tarefa, concluímos que aprendemos coisas novas, como por exemplo: na velocidade negativa, não tivemos dificuldades, pois a tarefa era simples e fácil de entender. Ela contribui muito, pois nos ajudará a entender mais as variáveis e a responder futuras tarefas. O conteúdo dessa tarefa foi simples, rápido e fácil de assimilar, não tivemos dúvidas, nem dificuldades, só aprendizagem"* (Grupo Os Orientais).

Evidenciamos que essa tarefa contribuiu para as aprendizagens dos alunos no que concerne à idéia de **variação**, pois, para eles, a compreensão dessa idéia poderá contribuir para aprender outros conceitos matemáticos. Nesse sentido, Coll (1997) declara que

> [...] uma aprendizagem é tanto mais significativa quanto mais relações com sentido o aluno for capaz de estabelecer entre o que já conhece, seus conhecimentos prévios e o novo conteúdo que lhe é apresentado como objeto de aprendizagem (COLL et al. 1997, p. 61).

Sendo assim, acreditamos que os alunos devam ser sujeitos ativos de suas próprias aprendizagens. Eles devem ter oportunidades para criarem hipóteses, experimentarem, questionarem, discutirem e dialogarem com outros para que, desta maneira eles possam construir seus próprios conhecimentos. Para essa construção, consideramos importante a bagagem de conhecimento que os alunos possuem, pois é a partir dela que eles estabelecerão relações, em processos reflexivos, gerando a aprendizagem.

Re-elaborando os conceitos anteriores os alunos podem compreender e dar significados a um determinado conteúdo matemático. Coll et al. (1997), complementam essa

idéia, afirmando que “quando um aluno enfrenta um novo conteúdo a ser aprendido, sempre o faz armado com uma série de conceitos, concepções e representações adquiridos no decorrer de suas experiências anteriores” (p. 12).

> *“Nesse trabalho investigativo, aprendemos uma nova questão: tempo e distância e como representá–la num gráfico. Velocidade negativa foi outra questão que tivemos que saber se existe velocidade negativa. Tendo muito estudo dos gráficos, conseguimos detalhar estas questões. Estudamos como medir o tempo e distância, velocidade média e as unidades de medida de tempo e distância. Tivemos também outros tipos de variedades. O nosso interesse foi pesquisar e aprender a nova lição e a nova maneira de agir que o professor passou para nós, que nós devemos desenvolver a capacidade de posicionarmos perante uma determinada situação e para isso as investigações proporcionam uma autoria do que fazemos. Essa tarefa foi muito importante para a nossa aprendizagem, embora com muita dificuldade para obtermos um raciocínio lógico desta. Foram muitas as dificuldades, principalmente no decorrer da tarefa, em que buscávamos em todo momento, ter uma idéia geral por nós mesmos”* (grupo Scoob-Doo).

Observando essa narrativa, percebemos a riqueza que possui as **narrativas** escritas como uma maneira de viabilizar a **reflexão** dos alunos sobre os seus processos de aprendizagens. Este grupo utilizou o espaço das narrativas escritas para pensar e registrar por escrito as suas conclusões. O interessante nessa narrativa foi que deve ser ressaltado o processo de **reflexão** sobre a postura diferenciada que os alunos possuíam em um contexto das **Investigações Matemáticas**, pois eles afirmam que *“nós devemos desenvolver a capacidade de nos posicionarmos perante uma determinada situação e para isso as investigações proporcionam uma autoria do que fazemos.”*

Assim, algumas palavras que podem evidenciar esses aspectos se relacionam a importância de dominar a Matemática para compreender fenômenos e eventos ocorridos no mundo.

> *“O interesse despertado por essa tarefa, foi o de aprender mais sobre as funções e aprender a enxergar e dominar a Matemática que está presente no nosso dia a dia. A maior dificuldade foi de interpretar os gráficos com curvas”* (Grupo 3F Tartaruga).
> *“Nosso interesse nessa tarefa foi em identificar como os gráficos resolvem e ilustram situações do nosso dia, na nossa opinião, os pontos que tivemos mais dificuldade foram os gráficos de curvas e as fórmulas. Essa tarefa contribuiu muito para a nossa aprendizagem porque agora já desenvolvemos tantos gráficos em sala de aula e conseguimos aplicar em nosso dia a dia”* (grupo “Café com Leite”).

Essas narrativas evidenciaram também a importância da relação entre os conceitos estudados em sala de aula com as suas aplicabilidades no cotidiano.

> *“O interesse que nos despertou nessa tarefa foi dominar os gráficos, descobrir mais coisas sobre grandezas e ter uma idéia a mais sobre funções. A maior dificuldade foi de interpretar gráficos com curvas, mas concluímos que num gráfico envolvendo*

> *uma curva a velocidade de gráfico, é variável. Aprendemos mais sobre gráficos com linhas curvas, velocidade constante e desenvolvimento de alguns conceitos físicos."* (grupo "Los Hermanos").

A reflexão desse grupo evidenciou aspectos de seus processos de aprendizagem, nos quais o grupo destacou as dificuldades enfrentadas no decorrer da **tarefa exploratório-investigativa** mostrando que essas dificuldades funcionaram como desafios para novos procedimentos dos alunos. Esse posicionamento nos levou a pensar na importância das narrativas escritas como uma maneira de refletir sobre o que, de fato, aprendemos.

Neste sentido, Freitas (2006) declara que "a escrita promove a tomada de consciência de seus conhecimentos e crenças acerca do ensino e da aprendizagem da Matemática, desencadeando, assim, processos meta-cognitivos" (p. 185). A narrativa do grupo "Esquadrão da Morte" evidencia esse aspecto.

> *"Aprendemos, nesta tarefa, como apresentar o trajeto de casa até a escola, levando em conta alguns fatores que influenciam na representação gráfica. Quando a velocidade é negativa, ou seja, quando voltamos ao ponto de origem em sentido contrário e, também, escrever graficamente o tempo-distância e tempo-velocidade de determinado trajeto"* (Grupo Esquadrão da Morte).

Este grupo evidenciou alguns aspectos envolvendo outros conteúdos como: velocidade negativa e representações gráficas, envolvendo os conceitos de **velocidade** e de **aceleração**. Desta maneira, podemos concluir que as potencialidades didático-pedagógicas **das narrativas** aparecem nesse contexto, pois por meio delas que os alunos se comunicaram e conseguiram relacionar o conceito de Função estudado com outros conceitos da Matemática e da Física.

Na terceira tarefa exploratório-investigativa – **A Rivalidade entre Brasil e Argentina**, os alunos destacaram que gostaram de aprender Funções através de uma situação futebolística. Essas evidências estão claras em suas reflexões nas narrativas elaboradas no final desta tarefa exploratório-investigativa.

Apresentamos, a seguir, algumas das reflexões contidas nas narrativas escritas dos grupos, que ilustram esses aspectos.

> *"Essa tarefa contribuiu muito para o meu entendimento da interpretação de um gráfico e aprendemos que muitas coisas podem ser escritas, através de um gráfico, até uma partida de futebol. Nós gostamos bastante dessa tarefa, porque tivemos que usar a nossa criatividade para realizá-la"* (grupo "Só no Rim").
>
> *"O interesse do grupo que despertou essa tarefa foi interpretar gráficos e trabalhar com escalas, mas foi nesses aspectos que o grupo teve maior dificuldade. Os aspectos em que o grupo teve maior dificuldades foram na hora de trabalhar com escala e na hora de interpretar os gráficos"* (grupo "3F Tartaruga").

> *"Nós nos interessamos mais pela tarefa porque se trata de futebol e, ainda mais o jogo Brasil e Argentina, nós tivemos mais dificuldades para fazer o campo de futebol com as medidas diminuídas, mas conseguimos fazer e nos superamos. Com essa tarefa, aprendemos que tudo, na Matemática, gira em torno de uma função, nessa tarefa envolve se as grandezas tempo e distância e agora, para nós do grupo, ficou bem mais fácil entender o que é uma função"* (grupo "Café com Leite").
>
> *"Descobrimos como interpretar e resolver gráficos e medidas reais e transformar as medidas reais em imaginarias e colocá-las no papel. Essa tarefa chamou atenção, pois fala sobre um assunto que todo o brasileiro gosta de futebol. Essa tarefa nos envolveu e nos ajudou na aprendizagem de todos os componentes do grupo. Aprendemos as medidas de um verdadeiro campo de futebol e como representá–la em escala ou miniatura. Essa tarefa, nós achamos uma das mais fáceis até agora e foi muito interessante resolvê-la, porque trabalha muito com a nossa mente"* (grupo "Esquadrão da Morte").

Ao revermos essas reflexões dos alunos contidas, em suas narrativas escritas, podemos dizer que os alunos evidenciaram a relação entre as **representações gráficas** e as diversas situações do cotidiano, pois, até em uma jogada de futebol, é possível explorar conceitos matemáticos. Um aspecto importante que notamos foi que os alunos passaram a ter uma nova postura a respeito da Matemática, pois alguns começaram a perceber a presença da Matemática em diferentes situações, nas quais a Matemática foi relacionada a contextos mais significativos e mais próximos da realidade ou da vivência dos alunos.

Evidenciamos, nas interlocuções entre o professor/pesquisador e o aluno Igor referente a essa tarefa exploratório-investigativa o quanto ele gostou de realizar as explorações envolvendo uma partida de futebol. Por suas palavras, podemos evidenciar esse aspecto.

> Quando ele recebeu a tarefa, sabia que ela estava relacionando a Matemática a uma partida de futebol e, segundo ele, *"o mais importante era que o gráfico estava registrando uma jogada de um jogo do Brasil e de uma partida que o Brasil se saiu vencedor"*. Para ele, essa tarefa, a princípio, traria grandes surpresas, mas que seria legal trabalhar assim *"porque além de estar aprendendo mais sobre funções e sobre Matemática estávamos nos divertindo"*. Igor afirma ainda que *"é impossível não gostar de Matemática com tarefas envolvendo futebol ou até mesmo outras coisas que gostamos de fazer"*.

Na quarta tarefa exploratório-investigativa – **A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções**, os alunos mostraram interesse em realizá-la, pois acreditamos que esse fator de motivação aconteceu pela relação existente entre o **jogo de xadrez** e o estudo das **Funções**. Desta maneira, a origem do jogo, as histórias ou lendas registradas em torno desse jogo tão famoso, e que tem muito a ver com a Matemática, contribuiu para a participação dos alunos.

Esta situação proporcionou aos alunos momentos ricos voltados à história da lenda do jogo de xadrez, mostrando aos alunos como é que se origina ou como se chega a uma representação de uma Função de uma maneira analítica. Percebemos que os alunos desenvolveram a criatividade e a capacidade de estabelecer conexões entre **regularidades** e **Funções**. Desta maneira, concluímos que, além dos alunos conseguirem encontrar a **lei** de

uma **Função**, eles conseguiram entender e identificar quando uma **Função** é **Exponencial**, além de poderem relembrar algumas propriedades de **Potenciação**.

Depois da realização dessa tarefa exploratório-investigativa, perguntamos aos alunos sobre o que eles tinham achado e o que haviam aprendido.

Apresentamos, a seguir, uma narrativa reflexiva escrita a respeito do trabalho, em geral.

> *As funções até agora, nos ajudaram e nos mostraram muita coisa no nosso dia-a-dia. Ela nos mostra que a idéia central da matemática sempre cai em uma função. A idéia de função para o grupo é muito boa, mas nem todos sabem conceituar função. O trabalho está sendo satisfatório para nós* ***porque estamos aprendendo a produzir textos na Matemática.*** *Antes isso era um cúmulo para a classe, mas nos ajuda também a ficar mais avançado, pois essa matéria cai no Ensino Médio. Uma coisa interessante é a Investigação Matemática (IM), pois nunca ouvimos falar neste tipo de trabalho.* ***E com a (IM) estamos também tendo de colocar nossas idéias no ar e desenvolvendo opiniões e críticas, quer dizer melhorando o nosso senso crítico.*** *As funções nos realizam saber algumas coisas do nosso dia-a-dia. Para nós, função nos dá a idéia de dependência entre grandezas, mas, agora, estamos começando a conceituar uma função melhor.* (Edson – líder do grupo "Scoob-Doo", grifo nosso).

Os momentos de reflexão foram considerados pelos alunos e também por nós como momentos fundamentais para o desenvolvimento das atividades, pois, nestes momentos, os alunos possuíam a oportunidade de registrar, por escrito, o que estavam aprendendo. Os alunos evidenciaram, em suas narrativas escritas, a importância do ato de refletir sobre cada tarefa exploratório-investigativa e discutirem a respeito dos componentes principais da tarefa e dos possíveis conceitos matemáticos. Apresentamos, a seguir, a narrativa escrita do grupo Star Girls que comprova esse nosso posicionamento.

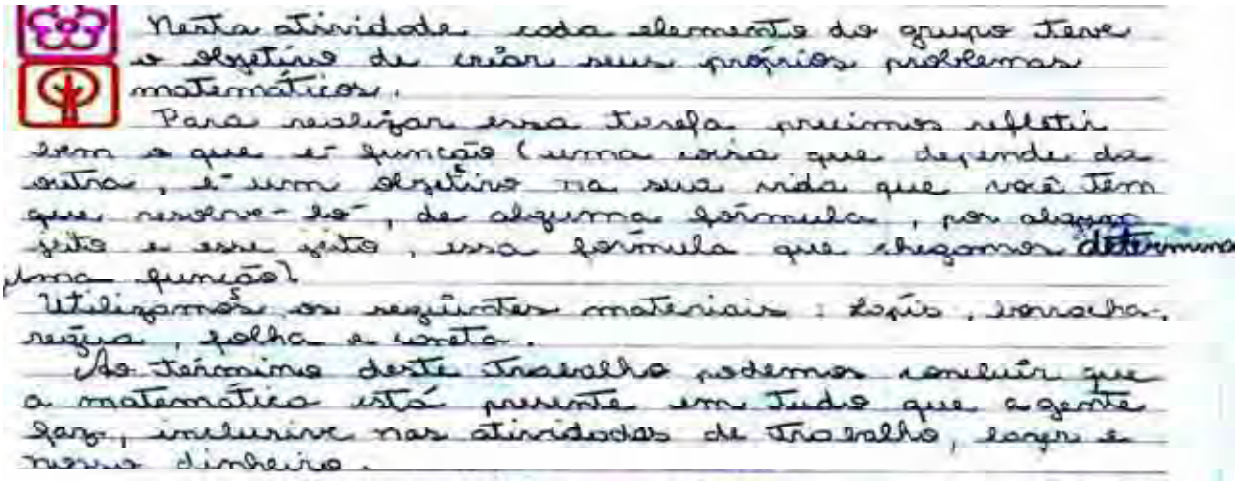
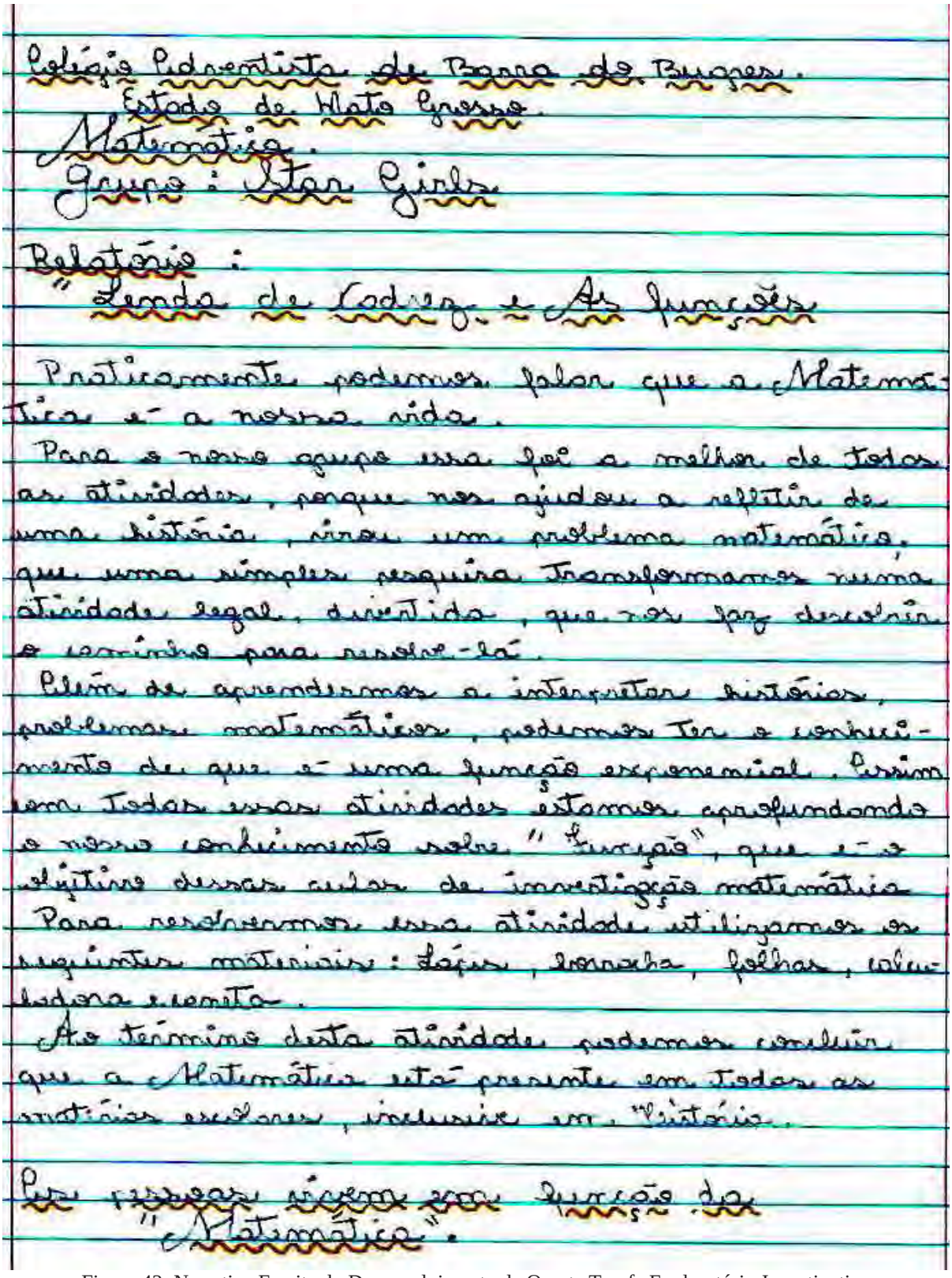

Nesta atividade cada elemento do grupo teve o objetivo de criar seus próprios problemas matemáticos.
Para realizar essa tarefa precisamos refletir bem o que é função (uma coisa que depende da outra, é um objetivo na sua vida que você tem que resolve-lo, de alguma fórmula, por alguma feito e esse feito, essa fórmula que chegamos determina uma função)
Utilizamos os seguintes materiais: lápis, borracha, régua, folha e canetas.
Ao término deste trabalho podemos concluir que a matemática está presente em tudo que a gente faz, inclusive nas atividades de trabalho, lazer e nosso dinheiro.

Figura 41: Narrativa escrita reflexiva feita pelo Grupo Star Girls



Colégio Adventista de Barra do Bugres.
Estado de Mato Grosso.
Matemática.
Grupo: Star Girls

Relatório:
"Lenda de Xadrez e As Funções

Praticamente podemos falar que a Matemática é a nossa vida.
Para o nosso grupo essa foi a melhor de todas as atividades, porque nos ajudou a refletir de uma história, criou um problema matemático, que uma simples pesquisa transformamos numa atividade legal, divertida, que nos faz descobrir o caminho para resolve-lá.
Além de aprendermos a interpretar histórias, problemas matemáticos, podemos ter o conhecimento de que é uma função exponencial. Assim em todas essas atividades estamos aprofundando o nosso conhecimento sobre "Função", que é a última dessas aulas de investigação matemática.
Para resolvermos essa atividade utilizamos os seguintes materiais: lápis, borracha, folhas, calculadora e caneta.
Ao término desta atividade podemos concluir que a Matemática está presente em todas as matérias escolares, inclusive em "História".

Pessoas vivem em função da "Matemática".

Figura 42: Narrativa Escrita do Desenvolvimento da Quarta Tarefa Exploratório-Investigativa

A diversificação de raciocínios, utilizado pelos alunos, em torno da mesma situação, permitiu estabelecer conexões com conceitos matemáticos já estudados, como **Potenciação** e suas propriedades.

Na realização da quinta tarefa exploratório-investigativa – **As Funções vão até a Lanchonete**, da sexta tarefa exploratório-investigativa - **Função Área: Respeite o seu Número** e da sétima tarefa exploratório-investigativa – **Área de um Quadrilátero em Função de X**, percebemos que os alunos compreenderam novos conhecimentos em relação à leis matemáticas, envolvendo regularidades e, ainda, essas tarefas reforçaram o desenvolvimento da criatividade e da capacidade de explorar situações novas.

Refletindo sobre a maneira como apresentamos estas tarefas exploratório-investigativas, constatamos que esse processo foi de suma importância e que este constitui-se em um dos momentos de aula investigativa em Matemática. Salientamos que a apresentação deve ser feita de uma forma bem dinâmica e envolvente, propiciando um contexto, no qual alunos se motivem para irem buscar seus caminhos para desvendarem tais investigações.

Nesse sentido, Ponte et al. (1998), afirmam que a atitude investigativa manifestada consistentemente pelo professor poderá influenciar e despertar nos alunos a curiosidade e a vontade de querer explorar e investigar as questões propostas.

Apresentamos, a seguir, a reflexão de dois alunos referentes às suas conclusões referentes à maneira como compreenderam o conceito de Função.

> *"Aprendemos a trabalhar e a compreender melhor o comportamento das funções e também* ***entendemos a importância que possui a troca de idéias e participação de todos nos grupos para nossa aprendizagem****"* (Famylson – grupo "3F Tartaruga", grifo nosso).
> *"Estamos gostando de aprender através destas tarefas porque elas são completas, e porque, na sua realização, havia a necessidade de pensar muito sobre todas as possibilidades.* ***O que é legal é que temos a oportunidade para dizer a qualquer hora as nossas descobertas e o que estamos explorando****, mas o difícil é que as idéias tem de surgir de nossa cabeça e não somente da cabeça do professor como estávamos acostumados anteriormente."* (Edson – grupo "Scoob-Doo", grifo nosso).

A realização da oitava tarefa exploratório-investigativa – **Criptografando Mensagens e as Funções** revelaram-nos uma postura participativa dos alunos, pois eles estavam dispostos a procurar as relações entre os **Modelos Matemáticos** e a **Criptografia.** As conclusões apresentadas pelos alunos suscitaram um grande debate de idéias em toda a turma. Nesses debates, procurávamos desafiar os alunos, problematizando suas argumentações e criando um ambiente de reflexão.

Iniciamos os momentos de discussão, apresentando uma mensagem codificada e a representação gráfica dessa mensagem, de forma que toda a turma pudesse observar e discutir a respeito das mensagens criptografadas. A estratégia que utilizamos foi à leitura, por um dos alunos, de uma conclusão, na qual ele apresentou argumentos para validar suas decodificações

e assim sendo, foi discutida e analisada por todos.

Não sentimos dificuldades em orientar os momentos de discussão, pois as intervenções dos alunos iam surgindo naturalmente. No entanto, sentimos uma grande dificuldade em controlar o tempo de discussão, pois as contribuições dos alunos eram muitas e eles estavam motivados a discutirem sobre os fatos principais da tarefa. Percebemos o quanto foi importante analisar as tarefas, na medida em que diferentes alunos usavam diferentes linguagens para se referirem ao mesmo assunto.

Para nós, esses momentos de discussão foram importantes, pois proporcionam nos alunos momentos em que eles puderam pensar sobre o modo como pensavam, ou seja, refletirem sobre o próprio pensamento - meta-reflexão. No final do episódio de ensino envolvendo a oitava tarefa exploratório-investigativa, o aluno Neto afirmou: *"esse negócio de refletir sobre o estudado é importante porque todos nós falamos e damos opinião sobre o que aprendemos, e aí quem não conseguiu aprender durante a aula aprende nestas discussões."*

Entendemos que a Matemática, enquanto ciência, está longe de possuir procedimentos básicos e rotineiros, pois a nosso ver ela se apresenta a partir de descobertas e investigações. Constatamos no decorrer deste estudo, que as tarefas de natureza exploratório-investigativas constituem-se em um meio privilegiado para colocarmos os nossos alunos em contato com uma Matemática, pois por meio das tarefas exploratório-investigativas, os alunos experimentaram um pouco desta ciência e a compreenderem.

Uma das finalidades importantes do ensino da Matemática, atualmente, a nosso ver, consiste em desenvolver a capacidade de comunicação dos alunos, que na presente pesquisa, é as narrativas dos alunos, pois essa perspectiva constitui-se em recurso metodológico fundamental para a aprendizagem matemática dos alunos. Nesse sentido, Smole e Diniz (2001) afirmam que,

> Aprender Matemática exige comunicação, no sentido de que é através dos recursos de comunicação que as informações, conceitos e representações são veiculados entre as pessoas. A comunicação do significado é a raiz da aprendizagem. Promover comunicação em matemática é dar aos alunos a possibilidade de organizar, explorar e esclarecer seus pensamentos. O nível ou grau de compreensão de um conceito ou idéia está intimamente relacionado à comunicação bem sucedida deste conceito ou idéia (p. 1).

Assim, quanto mais os alunos tiverem oportunidades para refletirem sobre um determinado assunto, falando, escrevendo ou representando, mais eles o compreendem. Essas autoras ainda afirmam que:

> [...] somente trocando experiências em grupo, comunicando suas descobertas e dúvidas e ouvindo, lendo e analisando as idéias do outro é que o aluno interiorizará os conceitos e significados envolvidos nessa linguagem de forma a conectá-los com suas próprias idéias (SMOLE E DINIZ 2001, p. 1).

No contexto desta pesquisa, comunicação é um processo social, no qual os alunos interagem em sala de aula, trocando informações, influenciando-se reciprocamente na construção de significados, e estes momentos aparecem através das interlocuções e das narrativas. As interações entre os alunos podem ser de diversas formas. Elas podem ser manifestadas desde a execução de tarefas com um par com quem não há comunicação verbal, até alcançar situações em que o grupo de trabalho pode chegar a um acordo sobre uma solução para um problema proposto.

5.1.3. Relação dos Alunos com as Investigações Matemáticas e as Tarefas exploratório-Investigativas

Essa categoria de análise se relaciona às potencialidades e limites das tarefas exploratório-investigativas no contexto das Investigações Matemáticas, na constituição dos conhecimentos matemáticos dos alunos.

A relação dos alunos com as tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas apresentou a princípio, uma sensação de estranheza por parte dos alunos. Muitos dos alunos pensavam que uma questão possuía apenas uma resposta, e que, encontrando essa resposta, a tarefa estava concluída. Notamos que os alunos se preocupavam em saber se a resposta estava certa ou errada, e que, para eles, o papel do professor seria validar as respostas.

No início dos **episódios de ensino** trabalhados, o professor/pesquisador era convidado freqüentemente pelos alunos, em seus grupos, para verificar se o que eles haviam feito estava correto ou não. Os alunos demonstraram um grande entusiasmo e empenho, ficando evidente no início das tarefas **exploratório-investigativas**, que nem sempre, para eles as questões estavam claras, e quais seriam os objetivos pretendidos com os diversos tipos de tarefa.

A realização da primeira tarefa exploratório-investigativa – **Uma Fábula Matemática**, proporcionou aos alunos um cenário educativo, no qual eles possuíram oportunidades para explorar e investigar a noção de **dependência** como uma das noções matemáticas do conceito de Função.

Apresentamos, a seguir, a narrativa de um grupo referente à maneira como eles encararam a primeira tarefa exploratório-investigativa desenvolvida.

> *"Foram muitas as dificuldades, principalmente, no trabalho investigativo porque neste, temos que ter uma idéia geral, por nós mesmos, porque antes de possuirmos uma pergunta, temos que, no mínimo, ter idéia sobre o que estamos perguntando. São reações novas e diferentes que ainda não tínhamos estudado dessa forma"* (Grupo Scoob-Doo).

Essa narrativa evidenciou que, no final da **primeira tarefa exploratório-investigativa**, os alunos nunca haviam realizado tarefas desta natureza e, também, que eles nunca haviam vivenciado o contexto das Investigações Matemáticas em suas trajetórias escolares. Assim sendo, pudemos perceber que eles começaram a se orientar, no sentido de procurarem entender quais seriam os seus papéis nos episódios de ensino. Consideramos esse aspecto fundamental, pois a natureza de **uma tarefa exploratório-investigativa** propicia essa postura nos alunos, tornando-os, cada vez mais, investigadores e construtores de seus próprios conhecimentos.

A narrativa desse grupo nos levou a **refletir** sobre a qualidade **instigadora** e **reflexiva** que as **tarefas exploratório-investigativas** proporcionam. Apesar dessa tarefa, ser apenas a primeira tarefa exploratório-investigativa, já conseguiu despertar nos alunos o interesse para a sua continuidade e para a **reflexão** deles sobre a sua importância, como agentes de suas próprias aprendizagens.

Os alunos ressaltaram que estavam sentindo algumas dificuldades. Essas dificuldades foram provenientes do fato de que os alunos nunca haviam realizado tarefas desta natureza, mas um grupo destacou algumas competências que as Investigações Matemáticas proporcionam aos seus desenvolvimentos. Evidenciamos um exemplo disso na narrativa do grupo "Los Hermanos". Segundo esse grupo, *"Essa tarefa mostrou para nós que, investigar, em Matemática, desperta o senso crítico e mostra que devemos apresentar as nossas opiniões entre as pessoas e não ficar calado quando precisamos falar"*.

Percebemos que existe uma inter-relação entre as "vozes dos alunos" e a ato de investigar em Matemática, pois, segundo a **narrativa reflexiva** desse grupo, não basta somente investigar em Matemática, é preciso se posicionar perante a situação investigada apresentando argumentações para defender suas idéias. Nesse sentido, Martinho (2004) afirma que comunicação é um processo social, em que os participantes interagem trocando informações e influenciando-se mutuamente.

Nesse contexto, esse autor destaca a importância do uso das palavras, pois as palavras, ao serem empregadas em situações e contextos diversos, possibilitam aos alunos uma compreensão progressiva dos seus significados, em que "comunicar pode incluir uma grande variedade de situações tais como, falar, escrever, escutar, observar, ler, argumentar, especular,

provar, explicar, pensar e discutir" (BUSCHMAN 1995, apud MARTINHO 2004, p. 7).

Na segunda tarefa exploratório-investigativa – **Trajeto de Casa a Escola,** os alunos se envolveram positivamente representando seus trajetos graficamente, assim como analisando também as situações propostas. Após apresentarmos esta tarefa, os grupos começaram a procurar estratégias para conduzir suas explorações e investigações. Desta maneira, os alunos se portaram de maneira mais investigativa nesta tarefa exploratório-investigativa do que na primeira, pois notamos que eles se empenhavam em formular conjecturas e justificá-las de maneira mais autônoma do que na primeira tarefa exploratório-investigativa.

Apesar dos alunos demonstrarem desenvolvimento em suas posturas, frente à natureza das tarefas, ainda ficou evidente para alguns, que tarefas desta natureza apresentam questões mais abertas. Assim, os alunos estavam bem mais "ligados" e cientes dos seus papéis e esse fato pode ser atribuído às potencialidades pedagógicas das tarefas de natureza exploratório-investigativa.

Nesta perspectiva, Escher Miskulin e Silva (2006), afirmam que em tarefas de natureza exploratório-investigativas,

> [...] os alunos envolvem-se em processo de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e reelaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema (p. 3).

Sendo assim, nesta tarefa exploratório-investigativa, as "vozes" dos alunos começaram a aparecer de maneira mais autônoma e consciente, pois os alunos expressaram o que estavam achando dos episódios e sobre o que eles estavam aprendendo com a realização desta experiência. Outro fator importante que influenciou na motivação relaciona-se com a interatividade sentido por nós, quando os alunos interagiram com o intuito de compreender as interpretações dos gráficos que ilustram situações do dia-a-dia.

Na terceira tarefa exploratório-investigativa – **A Rivalidade entre Brasil e Argentina -** ficamos surpreendidos pelo fato de os alunos participarem mais do que nos episódios anteriores. Entendemos que este fato aconteceu porque o tema relacionava-se com um lance de uma partida de futebol. Ficamos curiosos por saber se teria sido uma coincidência ou se, de fato, as **tarefas exploratório-investigativas** despertaram também o interesse de alunos menos participativos. Ao longo da nossa experiência nos **episódios de ensino**, constatamos que trabalharmos com a abordagem das **Investigações Matemáticas** se tratou de uma maneira diferenciada de conceber o ensino da Matemática.

Neste sentido, Santos et al. (2002) declaram que as investigações matemáticas devem ocupar um lugar importante no contexto da experiência matemática dos alunos, pois elas possuem,

> [...] importantes potencialidades educacionais, por exemplo, estimulam o tipo de participação dos alunos que favorece uma aprendizagem significativa, proporcionam pontos de entrada diferentes facilitando o envolvimento de alunos com diferentes níveis de competências e o reconhecimento e/ou estabelecimento de conexões (SANTOS et. al. 2002, p. 84).

Assim sendo, verificamos que quase todos os alunos se envolveram nessa tarefa exploratório-investigativa, pois era acessível a todos e o tema abordado era familiar aos alunos, despertando neles muitas idéias e emoções. De todas as tarefas exploratório-investigativas apresentadas, até então, a terceira foi a que mais propiciou a liberdade dos alunos se expressarem e colocarem as suas opiniões, não só sobre as questões matemáticas, mas também, sobre as relações humanas. Isso sucedeu, pelo fato das questões enunciadas nesta proposta terem uma natureza mais exploratória do que investigativa e, também porque essa tarefa exploratório-investigativa apresentou uma situação muito diferente das outras apresentadas, pois se tratava de uma situação da realidade.

Em relação às tarefas com natureza diferenciada, a tarefa **exploratório-investigativa**, está contida neste contexto, pois "a exploração favorece a formulação de conjecturas, etapa fundamental da experiência Matemática que os jovens devem realizar" (APM, 1988, p. 43).

As narrativas e os esquemas da jogada revelaram-se uns mais, outros menos, completos. Foi, também, necessário chamar a atenção de alguns alunos para analisarem a situação do ponto de vista matemático e desenharem os seus esquemas com algum rigor.

Apresentamos, a seguir, algumas narrativas realizadas pelos alunos a respeito da terceira tarefa exploratório-investigativa.

> *"Eu gostei desta tarefa porque foi bastante divertido. Fez-nos pensar bastante e como eu gosto de futebol adorei o tema"* (Alison – grupo "Só no Rim").
> *"Gostei dessa tarefa porque tivemos de relatar uma jogada e de fazer táticas como fazem os treinadores. No fim ouvimos umas cartas muito engraçadas foi muito bom ver gráficos em todos os lugares"* (Edson – grupo "Scoob Dôo").
> *"Foi uma tarefa muito divertida e feita com interesse, em que todos do nosso grupo participamos. A apresentação das cartas e das jogadas foi muito dez"* (Juliana – grupo Café com leite).

A realização dessa tarefa exploratório-investigativa proporcionou aos alunos interações e também eles se desenvolveram cognitiva e socialmente, pois eles comunicaram

suas idéias a respeito do conceito de função relacionando-as com a interpretação gráfica de uma situação real. Após esse momento, trocaram as suas representações, discutiram com os colegas, analisando e refletindo sobre as representações dos colegas. Desta maneira, notamos uma maior atitude investigativa dos alunos do que nas duas primeiras tarefas exploratório-investigativas, pois os alunos se empenharam para formular suas conjecturas de maneira mais autônoma e independente.

Aproveitamos o clima favorável proporcionado pela realização desta tarefa exploratório-investigativa para conversar com os alunos a respeito do que eles estavam achando dos episódios de ensino e das tarefas realizadas. Apresentamos, a seguir, algumas das narrativas orais dos alunos a respeito das tarefas de natureza exploratório-investigativa.

> *"Nessas tarefas, saímos do ambiente normal da aula para termos uma aula mais dinâmica e interativa"* (Letícia – grupo "Café com Leite").
> *"Nestas aulas, sinto que desenvolvo o meu raciocínio e descubro coisas novas"* (Evandro – grupo "Scoob – Dôo").
> *"Estas tarefas investigativas desenvolvem a mente e as aulas são mais interessantes"* (Patrícia – grupo "Star Girls").

As **narrativas reflexivas** dessas alunas apresentam na subjacência do contexto, uma crítica a maneira como ela vinha sendo ensinada, ou seja, uma crítica ao ensino tradicional. Nesse sentido, Demo (1994) afirma que:

> As escolas [tradicionais] são lugares de 'decoreba' onde o aluno é tangido para a domesticação. Por vezes internaliza coisas, ajunta na cabeça um monte de informações, aprende pedaços de conhecimento, mas não os junta, sistematiza, questiona, reconstrói, porque o próprio professor não sabe fazer isso (DEMO 1994, 100).

Presenciamos, nesta experiência, um contexto diferente das aulas tradicionais, pois os alunos notaram a diferença entre as duas perspectivas e, além disso, utilizaram as suas narrativas orais para refletirem sobre a maneira como estavam aprendendo. O aluno Heber também apresentou a sua narrativa reflexiva. Para ele,

> *"Estas aulas despertou o meu interesse e, com estas tarefas, ganhei um certo incentivo, aprendemos mais rápido e é mais difícil de nos esquecermos da matéria estudada e as vantagens são várias como: aprender, desenvolver o raciocínio e discutir opiniões"* (Heber – Grupo Café com Leite).

Ao analisar a narrativa do aluno Heber, lembramos da metáfora apresentada por Braumann, citado por Ponte (2003), em que estes autores apresentam a importância de proporcionar aos alunos tarefas de Matemática que os façam incorporar seu espírito investigativo, pois,

> Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar a bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles (p. 6).

Assim, verificamos, através desta experiência, as contribuições que esta prática pode oferecer para a aprendizagem dos conceitos matemáticos pelos alunos. Uma outra narrativa reflexiva referenciada é a do aluno Lucas. Para ele, *"Essas tarefas foram interessantes, pois permitiu-nos aprender conceitos e desenvolver idéias por nós mesmos, sem a ajuda do professor"* (Lucas – grupo Los Hermanos).

Este aluno ressalta, em um das suas narrativas oral, que o seu papel é ativo no processo de aprendizagem, vivenciado por ele, no qual as idéias são provenientes de seus pensamentos e das suas discussões e não do professor. Neste sentido, relacionamos esta afirmação com a declaração apresentada por Ponte (2003), ao afirmar que,

> [...] O professor deve criar um ambiente favorável à aprendizagem dos alunos, no qual o aluno deve sentir que as suas idéias são valorizadas e que se espera que as discuta com os colegas, não sendo necessária à validação constante por parte do professor (p. 28).

Ao questionarmos os alunos a respeito das dificuldades encontradas por eles ao realizarem as tarefas de natureza **exploratório-investigativas**, eles apresentaram também suas idéias e dificuldades. As dificuldades apontadas pelos alunos prenderam-se na "pouca ajuda" prestada pelos professores, na constituição dos grupos e na elaboração das **narrativas escritas** das tarefas realizadas. Apresentamos, a seguir, algumas das narrativas orais registradas pelos alunos.

Apresentamos, a seguir, algumas das narrativas orais registradas pelos alunos.

> *"As desvantagens de aula nessa perspectiva é a pouca ajuda que o professor dá para a turma"* (Bianca – grupo "Os Orientais").
> *"Nessas tarefas, é muito difícil exprimir o meu raciocínio e compreender o que se pede para fazer"* (Suellen – grupo "Esquadrão da Morte").

A respeito dos tipos de aulas preferidas pelos alunos, a grande maioria elegeu as aulas investigativas como suas prediletas.

Apresentamos, a seguir, algumas das narrativas orais dos alunos a respeito do tipo de aula preferida.

> *"Numa aula investigativa, temos de fazer as coisas por nós próprios, raciocinar um pouco mais, porque, enquanto não se souber a resposta, não se pára de pensar no problema"* (Edson – grupo "Scoob – Dôo").
> *"Nas aulas investigativas, o convívio entre os colegas é bem melhor, as convergências que dão lugar a uma discussão amigável do assunto em questão é maior"* (Igor – grupo "Los Hermanos").
> *"Nessas aulas investigativas, acontece uma divergência de opiniões e cada aluno dá a sua para chegar a uma conclusão"* (Juliana – Grupo Café com Leite).

Entendemos que essa narrativa da aluna Juliana se relaciona ao posicionamento de Ponte et al. (1999) ao afirmar que,

> As investigações matemáticas fornecem um bom contexto para que os alunos compreendam a necessidade de justificar as suas afirmações, ao expressar o seu raciocínio junto do professor e dos colegas. **Ao confrontar as diferentes conjecturas e justificações propostas por diversos alunos, a turma estabelecesse como uma pequena comunidade matemática**, interagindo constantemente, onde o conhecimento matemático se desenvolve como um empreendimento comum (p. 134, grifo nosso).

Desta maneira, pensamos que esta aluna ressaltou aspectos que mostram uma das inter-relações entre as **narrativas** e as **Investigações Matemáticas**, pois, segundo ela, cada aluno tem a oportunidade de apresentar as suas opiniões em momentos de confronto ou entraves de idéias.

Uma postura diferenciada pode ser evidenciada na narrativa reflexiva da aluna Suellen. Para ela, *"Ambas as aulas são necessárias porque uma complementa a outra"* (Suellen – grupo "Esquadrão Morte"). Acreditamos que a aprendizagem Matemática dessa aluna ainda está vinculada à maneira tradicional de ensino. No entanto, ela ressalta a importância de diversificar as maneiras como são conduzidas as aulas de Matemática. Concordamos com ela, pois achamos necessário ensinar Matemática por meio de diferentes perspectivas metodológicas. Nesse sentido, Ponte (2003) afirma que a perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas contribui como atividade de ensino-aprendizagem, pois "traz para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa". (PONTE 2003, p. 23).

Levando em conta os episódios de ensino realizados, concluímos que os alunos estiveram receptivos às tarefas exploratório-investigativas, pois notamos uma evolução ao longo do trabalho. Em geral, os alunos reconheceram a importância das tarefas exploratório-investigativas e reconheceram a sua contribuição para uma visão diferente das aulas tradicionais de Matemática.

Na realização da quarta tarefa exploratório-investigativa – **A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções**, os alunos continuaram se portando de maneira participativa e ainda estimularam os outros alunos a participarem e a descobrirem as fórmulas existentes na lenda da origem do jogo de xadrez. Nesta tarefa exploratório-investigativa, os alunos se empenharam para formular conjecturas e justificá-las de maneira autônoma, desenvolvendo os seus raciocínios e os sensos críticos. Eles estavam dispostos a entenderem a origem das **regularidades** e como essas **regularidades** puderam ser **representadas** matematicamente, por meio de fórmulas, leis ou expressões matemáticas.

Apresentamos, a seguir, algumas narrativas dos alunos que evidenciam alguns aspectos relacionados aos conceitos matemáticos, desenvolvidos pelos alunos.

> *"Nosso desenvolvimento foi bom, e concluímos que esse trabalho foi de grande aprendizagem para o nosso conhecimento, sabendo com tentativas de descobrir a lei que corresponde à função e não tivemos grandes dificuldades durante as atividades investigativas"* (grupo "Scoob-Dôo").
> *"Essa tarefa nos ajudou muito a descobrir e melhorar nosso entendimento do que é função e também mostrou como as funções estão na nossa vida e quase tudo tem uma função"* (grupo "Esquadrão da Morte").
> *"O interesse que despertou nesta tarefa foi o de trabalhar cada vez mais com a investigação matemática e usar as funções no nosso dia-a-dia. Os aspectos que tivemos maior dificuldade foram na hora de descobrir as fórmulas"* (grupo "3F – Tartaruga").
> *"O interesse que tivemos nessa tarefa foi o de saber mais sobre a investigação matemática, começar a trabalhar com função exponencial e saber cada vez mais conceituar o que é função. A maior dificuldade foi na hora de descobrir a lei, na primeira atividade descobrir as fórmulas. Mas, com os testes feitos por nós, descobrimos as fórmulas exatas. Essa tarefa contribuiu para a nossa aprendizagem, pois contribuiu para o nosso conhecimento de forma que aprendemos mais sobre funções, e saber usá-la no nosso dia-a-dia"* (grupo "Los Hermanos").
> *"Ao término deste trabalho, concluímos que aprendemos mais sobre Matemática, aprendemos mais sobre potenciação e sobre leis matemáticas, aprendemos que quando o termo independente é um expoente a conta ou a função é conhecida como exponencial. Está tarefa nos fez ver que nunca podemos desistir de um problema por mais difícil e absurdo que seja, temos que tentar fazer conjecturas fazer testes até solucionar o problema"* (grupo "Os Orientais").

A partir destas narrativas escritas reflexivas, pensamos que esta tarefa exploratório-investigativa explorou os conhecimentos a respeito das leis matemáticas envolvendo **regularidades**, propiciando aos alunos o desenvolvimento da capacidade de explorarem situações diferenciadas.

Na realização da quinta tarefa exploratório-investigativa – **As Funções vão até a Lanchonete**, da sexta tarefa exploratório-investigativa - **Função Área: Respeite o seu Número** e da sétima tarefa exploratório-investigativa – **Área de um Quadrilátero em Função de X**, os alunos se empenharam em entenderem como poderia surgir para entender

como surge uma **lei matemática** e isso se deu pelas **regularidades** que estavam contidas nessas tarefas exploratório-investigativas. Os alunos se mostraram interessados e envolvidos nestas tarefas, pois, relacionaram a presença das Funções matemáticas com os seus números de chamada, descobriram que as leis que regiam as regularidades estavam nas mais diferentes situações do nosso mundo.

Apresentamos, a seguir, algumas narrativas escritas dos alunos a respeito da maneira como estavam aprendendo e também da suas relações com as tarefas exploratório-investigativas.

> *"Estas tarefas nos fizeram ver que nunca podemos desistir de um problema por mais absurdo e difícil que seja, temos que tentar fazer conjecturas, fazer testes até solucionar o problema; concluímos que esse trabalho foi de grande aprendizagem para o nosso conhecimento, nos envolveu com tentativas de descobrir a lei que a responde conforme a função e não tivemos grande dificuldade durante as atividades investigativas; a lição moral que tivemos foi de sempre tentar e nunca desistir. De sempre procurar chegar no seu alvo, no ponto final."* (Todos os grupos).

Refletindo sobre essas narrativas dos alunos, percebemos que eles estavam valorizando alguns processos que fazem parte da natureza de uma atarefa exploratório-investigativa. Os alunos ressaltaram a importância das conjecturas, das hipóteses, das tentativas, dos testes e de todo o processo até se chegar a uma resposta final sobre a questão explorada. Assim, concluímos que os alunos já sentiam a vontade em explorar e investigar as tarefas propostas por nós.

Conforme a literatura sobre tarefas exploratório-investigativas, notamos que diversos autores pontuam suas potencialidades didático-pedagógicas e que professores de Matemática devem lançar mão dessa abordagem metodológica objetivando propiciar aos alunos um contexto interativo de reflexão e envolvimento. Nesta perspectiva, Ponte (2003) afirma que aulas investigativas são aquelas em que os alunos são mobilizados a realizar atividades investigativas em sala de aula e em uma aula investigativa, os alunos são convidados a se envolver em processos de explorações e justificações das suas explorações.

Na oitava tarefa exploratório-investigativa – **Criptografando Mensagens e as Funções,** notamos que os alunos já estavam habituados com a natureza das tarefas e com naturalidade eles encararam a realização de mais essa tarefa exploratório-investigativa.

Explicamos que eles teriam que recorrer aos conhecimentos de conceitos já trabalhados, como por exemplo: **Sistemas de Equações**. Ao afirmarmos que essa tarefa exploratório-investigativa poderia ser proposta até para alunos do ensino superior,

aumentamos assim as expectativas dos alunos, além de percebermos que criamos uma sensação mista de dificuldade, acrescida com vontade de experimentar os conhecimentos que possuíam em situações mais avançadas. Consideramos assim, ter sido benéfico essa abordagem para a atividade dos alunos.

Um aspecto que requer uma reflexão aprofundada refere-se à concepção de tarefa exploratório-investigativa. Assim, o processo de apropriação desse conceito pelos grupos conduziu os alunos ao desenvolvimento de suas investigações possibilitando a eles um contexto, no qual se tornou possível o levantamento de hipóteses e conjecturas no processo de resolução de problemas. Evidenciamos este fato, quando uma aluna procurou levantar uma conjectura encontrando uma fórmula geral, através de apenas alguns dados contidos nas mensagens codificadas.

Durante a realização das tarefas exploratório-investigativas muitas e variadas foram as atitudes e os valores despertados nos alunos ao explorarem as Funções bem como as competências que puderam ser desenvolvidas a partir deste trabalho.

Apresentamos, a seguir, algumas competências destacadas pelos alunos em suas narrativas escritas no desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas.

> *"O método pelo qual estamos aprendendo a Matemática é melhor, porque somos nós mesmos que descobrimos as fórmulas para desenvolvê-las e terminá-las"* (Heber - grupo "Café com Leite").
> *"Nessas tarefas, aprendemos cada vez mais sobre o conceito de função e, também, nos auxiliou a desenvolver a nossa mente e capacidade de aprender e resolver as questões"* (Danilo Hiroshi – grupo "Os Orientais").
> *"Ao passar do tempo, nós estamos aprendendo muitas coisas. Através da experiência que estamos adquirindo, as atividades que estão sendo entregues aos grupos, ajuda bastante interpretar melhor assim fica mais fácil de resolvê-las"* (Edson – "grupo Scoob-Doo").

Várias lembranças nos vêm à mente quando recordamos o caminho que percorremos para realizar essas tarefas exploratório-investigativas, bem como o que descobrimos e aprendemos. Ensinar Matemática através da perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas é proporcionar aos alunos liberdade para se expressarem, desempenhando assim um papel ativo no processo de ensino e aprendizagem.

5.1.4. Relação dos Alunos com as Narrativas

Essa categoria de análise relaciona-se aos aspectos constituintes das narrativas orais e escritas nos diferentes momentos da realização das tarefas exploratório-investigativas.

Destacamos, em nossa pesquisa, as narrativas realizadas pelos alunos durante os momentos de apresentação, desenvolvimento e discussão das tarefas exploratório-investigativas.

As narrativas realizadas nos momentos de apresentação das tarefas exploratório-investigativas foram coordenadas por nós (professor/pesquisador), nas quais apresentávamos oralmente as tarefas exploratório-investigativas aos alunos e estes participavam com suas narrativas orais ao evidenciarem suas dúvidas e incertezas. Nesses momentos, fazíamos breves orientações, sempre respeitando o modo de organização do trabalho e, a maneira como os alunos poderiam começar suas atividades. Para que as tarefas exploratório-investigativas fossem desenvolvidas com entusiasmo pelos alunos, entendemos ser de fundamental importância a motivação, a organização e o incentivo por parte do professor, pois a ausência desses fatores poderá caracterizar um sentimento de desânimo nos alunos.

As narrativas realizadas nos momentos de desenvolvimento das primeiras tarefas exploratório-investigativas, caracterizaram-se pela falta de hábito dos alunos em realizar explorações e investigações em suas aulas de Matemática. Assim, percebemos algumas reações dos alunos, no sentido de eles entenderem que o professor ainda é o principal agente no processo ensino e aprendizagem. Nesse sentido, Connely e Clandinin (1995) afirmam que as narrativas ou histórias de aulas servem como um modo especial dos professores produzirem e relatarem conhecimentos ligados à ação ou à prática. Desta maneira, acreditamos que a troca de narrativas dos professores de Matemática, sobre experiências vividas e sentidas poderão fazê-los refletir sobre suas práticas, além de produzirem outros conhecimentos sobre a prática profissional do professor.

Para alguns alunos, as narrativas deveriam ser realizadas pelos professores e não pelos alunos. Essa visão inicial desses alunos convergia para o professor como o centralizador das narrativas, pois nessa concepção, o professor é quem detém as informações e os conhecimentos. Essas concepções dos alunos foram notórias no início da primeira tarefa exploratório-investigativa – Uma fábula Matemática.

No desenvolvimento desta pesquisa aconteceram momentos de discussão e reflexão, os alunos passaram a perceber que teriam vozes ativas. Notamos, também, que os alunos evoluíram, pois a dependência do professor foi diminuindo com o passar dos episódios de ensino, nos quais os alunos começaram a procurar justificativas para as suas conjecturas de maneira mais autônoma e independente.

As narrativas nos momentos finais de discussão e reflexão das tarefas exploratório-investigativas revelaram-se fundamentais para a continuação da investigação, pois os alunos apresentavam e explicavam suas idéias, como também, formulavam novas conjecturas,

sempre procurando justificá-las através de seus argumentos. Nesses momentos, também pedimos a opinião dos alunos a respeito do trabalho realizado em torno das tarefas exploratório-investigativas, pois procuramos dar "voz" para que os alunos pudessem narrar seus posicionamentos e idéias. Smole e Diniz (2001) confirmam essas idéias afirmando que

> [...] Os alunos falarem nas aulas faz com que eles sejam capazes de conectar sua linguagem, seu conhecimento, suas experiências pessoais com a linguagem da classe e da área do conhecimento que se está trabalhando. É preciso promover a comunicação pedindo que esclareçam e justifiquem suas respostas, que reajam frente ás idéias dos outros, que considerem pontos de vistas alternativos (p. 2).

Aconteciam também, nesses momentos, as socializações das idéias dos alunos, pois os grupos apresentavam suas possíveis explorações e descobertas através de suas narrativas orais (apresentações) e das narrativas escritas no final de cada tarefa exploratório-investigativa. Essas apresentações grupais contribuíram para dar oportunidade a todos os alunos, para exporem suas opiniões e, explicitarem os seus entendimentos. No entanto, a interação na sala de aula entre os alunos pode assumir a forma de colaboração, assim como de competição, conforme o momento e o tipo da aula desenvolvida. Um exemplo disso pode ser evidenciado na quarta tarefa exploratório-investigativa – **A lenda do Jogo de Xadrez e as Funções**, por meio dos seguintes diálogos:

> Luiz Victor, confiante em sua conjectura, logo disse: *"professor, pode fazer todos os testes que quiser, será essa a fórmula."*
> O professor perguntou à turma: *"alguém não entendeu a conjectura do Luiz Victor?"*
> Nesse momento, todos ficaram em silêncio, alguns apenas afirmavam, *"é essa mesmo, concordo com o Luiz."*
> Igor brincando disse: *"**professor olha só o Luiz é do nosso grupo, ponto para o nosso grupo**."*
> O professor disse: *"muito bem, Luiz, mas o que te fez pensar que seria essa a fórmula correta? De onde você tirou essa formula?"*
> Neste momento, Letícia disse: ***"professor, acho que ele pensou na regularidade que existe aí, aí não tem uma regularidade?"***
> Logo, o Professor disse: *"Luiz, responde para ela"*.
> Luiz Victor falou: *"acho que existe, porque a base eu tinha certeza que era dois porque estava sempre dobrando."*
> O professor problematizou: *"e por que o menos um no expoente?"* Luiz Victor pensou um pouco, mas disse: *"bom, porque se não tivesse ele, não daria certo."*
> Com base na resposta de Luiz, o professor perguntou: *"como assim, não daria certo?"*
> Luiz Victor respondeu: *"não daria certo porque, na primeira casa, se não tivesse o menos um daria 2, na segunda casa, daria 4, na terceira casa, daria 8, aí é só continuar e, por isso, se eu tirasse um do expoente na primeira casa, ficaria 2 elevado a um menos um, que dava 2 elevado a zero que é igual ao um da nossa tabela."*

Esses momentos de diálogos, intrínsecos às narrativas, mostram que ao escreverem os seus pensamentos, os alunos deixam transparecer além de suas idéias e concepções a respeito da Matemática, as suas crenças e valores. Nesse sentido e sobre a importância da escrita, Freitas (2006) faz referência a Phillips e Crespo (1996), pois, para essas autoras a escrita "proporciona aos alunos um registro de seus próprios pensamentos e idéias em desenvolvimento" (PHILLIPS e CRESPO 1996 apud FREITAS 2006, p. 33).

Complementando essas idéias, Freitas (2006) declara que a escrita possui a capacidade de auxiliar os alunos a tornarem explícitos seus conhecimentos e pensamentos tácitos, propiciando, assim, uma reflexão sobre esses conhecimentos e pensamentos.

Sendo assim, por meio desses diálogos, percebemos que as narrativas dos alunos possuem potencialidades didático-pedagógicas, pois elas revelam as compreensões, os entendimentos, as dúvidas, as reflexões e os conceitos aprendidos. Nesse sentido, segundo Scheffer (2001), as narrativas proporcionam "[...] a expressão do entendimento, dos significados e das construções relacionadas a um tema em estudo ou experienciado pelos estudantes" (p. 40, grifo nosso).

A apresentação oral das narrativas realizadas pelos alunos foi fundamental, pois dessa forma, os alunos foram confrontados com as diversas resoluções, nomeadamente quanto ao estabelecimento dos diferentes pontos de partida e também dos resultados de suas explorações. Os momentos de apresentação e discussão das atividades pelos alunos foram muito importantes. Os aspectos relacionados à colaboração será melhor detalhada no item 5.2.3. Dimensão Interativa.

A apresentação das tarefas em forma de narrativas à classe centrou-se na exigência e questionamento da linguagem utilizada pelos diferentes grupos, surgida da necessidade de se comunicarem na ausência de referentes concretos. Nesse sentido, Amaral (2003) declara que:

> a apresentação e discussão final das conclusões de cada tarefa assumem um papel relevante na tentativa de potenciar a comunicação matemática e verbalização de argumentos que, em trabalho de grupo assumem por vezes um caráter muito implícito (p. 229).

Segundo Cockcroft (1982), a discussão é uma atividade privilegiada do trabalho com toda a classe. Para esse autor, o termo discussão,

> [...] significa mais do que algumas perguntas e respostas que surgem no decorrer de uma exposição pelo professor. A aptidão para 'dizer o que se entende e entender o que se diz' deveria ser um dos resultados de um bom ensino da Matemática. Esta aptidão desenvolve-se como resultado das oportunidades para falar acerca da

> Matemática, para explicar e discutir os resultados obtidos e para testar hipóteses (COCKCROFT 1982, apud APM 1988, p. 48).

Desta maneira, entendemos que os momentos de discussões com toda a classe se tornaram uma boa oportunidade para sintetizar, criticar e resumir estratégias, idéias ou conjecturas que representavam o produto do trabalho coletivo dos alunos. Nesta perspectiva, o fato de terem de expressar o seu próprio pensamento para outras pessoas ajuda-os a organizá-lo. Isto é, verifica-se uma articulação e uma melhor elaboração na verbalização da tarefa quando ele tem de transmiti-la para os colegas (FORMAN e CAZDEN 1988, apud MOYSÉS 1997, p. 52).

Consideramos as narrativas como um elemento importante para a constituição de momentos de discussão e reflexão, pois os alunos ao comunicarem as suas idéias, falando ou escrevendo estarão discutindo os aspectos mais relevantes implícitos nas tarefas exploratório-investigativas. Nesta perspectiva, Martinho (2004) declara que,

> Comunicando oralmente e por escrito os alunos podem refletir sobre as suas próprias compreensões da Matemática, fazendo conexões e personalizando os conceitos. Do mesmo modo devem ser encorajados a apresentar seus resultados e pensamentos, isto é, as aulas não podem ser espaços silenciosos em que cada aluno se envolve apenas com as suas próprias idéias (MARTINHO 2004, p. 18).

Durante a apresentação dos alunos de suas tarefas torna-se necessário que eles sejam ouvidos e saibam escutar os outros. Sendo assim, essa postura metodológica fornece oportunidades para eles "pensarem alto" e para escutarem seus colegas e professor levando-os a clarificarem seus pensamentos e a negociarem as suas idéias, envolvendo-os em reflexões verbais. Nesse sentido, Paratelli et al. (2005) declaram que "escrever não é fácil, torná-lo público é ainda mais difícil. É se expor, é aceitar a discordância, mas é somente arriscando, expondo o que pensamos que podemos nos rever e crescer com a fala do outro" (p. 9).

Com essas idéias, Smole e Diniz (2001) afirmam que,

> A comunicação oral favorece ainda a percepção das diferenças, a convivência dos alunos entre si, o exercício de escutar um ao outro numa aprendizagem coletiva, possibilitando também aos alunos mais confiança em si mesmos, para que se sintam mais acolhidos e sem medo de se exporem publicamente (p. 2).

Por meio da escrita, os alunos podem rever suas idéias e concepções, além de considerarem que as narrativas escritas contribuem para o processo de ensino e aprendizagem. O aluno Igor afirmou que "*ao escrever sobre as tarefas, revemos o que aprendemos ou se não aprendemos temos a oportunidade de aprender com os outros durante a escrita nos*

grupos" Para esse aluno, *"a escrita é uma boa forma para expormos nossas idéias, e o que estamos achando do trabalho em grupo e também das aprendizagens individuais."*

Essa narrativa do aluno Igor demonstra que o conhecimento também é construído nas interlocuções com os participantes por meio de uma prática social. A esse respeito, Freitas (2006) declara que, para Bakhtin e Vygotsky, "o conhecimento é construído na interação, em que a ação do sujeito sobre o objeto é mediada pelo outro através da linguagem" (p. 150).

Ao aluno perceber que a sua escrita auxiliou e contribuiu na exposição das suas idéias também está evidenciada e relacionada com o pensamento de Freitas (1995). Para essa pesquisadora, "não é a atividade mental que organiza a expressão, mas é a expressão que organiza a atividade mental, modelando e determinando a sua orientação" (FREITAS, 1995, p. 138).

Evidenciando essa referência, o aluno Igor em um dos seus diálogos com o professor, ressalta a importância da escrita para a sua aprendizagem.

> *"Só consigo aprender Matemática escrevendo, fazendo e refazendo os cálculos com lápis e papel. Para mim, depois desse trabalho aprendi que a escrita também nos ajuda a organizar o nosso raciocínio, mas o mais importante a meu ver é escrever sobre o que aprendemos."*

Na **primeira tarefa exploratório-investigativa – Uma Fábula Matemática**, os alunos apresentaram uma grande espontaneidade para apresentarem as suas narrativas orais, pois todos os grupos queriam ler suas histórias criadas. Apesar dos alunos terem gostado desta tarefa, eles mostraram algum receio no desenvolvimento de uma narrativa escrita. Nos primeiros episódios de ensino os alunos demonstraram certa desorientação, relativa aos conteúdos que deveriam constar em uma narrativa escrita.

Acreditamos que as dificuldades iniciais dos alunos para elaborarem as narrativas escritas aconteceram pela falta de experiência deles na realização de narrativas escritas em aulas de Matemática. Sendo assim, entregamos aos alunos um roteiro de orientações que poderiam auxiliá-los na elaboração das suas narrativas escritas. Nesta tarefa exploratório-investigativa, as narrativas escritas apresentadas pelos alunos corresponderam às nossas expectativas, pois os alunos cumpriram todas as suas explorações e até registraram os dados de maneira organizada, apesar de ser apenas a primeira tarefa exploratório-investigativa realizada utilizando essa dinâmica metodológica.

Na segunda tarefa exploratório-investigativa – **Trajeto de Casa a Escola**, sentimos que os alunos já estavam bem mais preparados para discutirem e até para comunicarem as

suas idéias e concepções sobre as questões implícitas às tarefas exploratório-investigativas. As narrativas orais dos alunos começaram a aparecer mesmo que de maneira bem tímida ainda, mas nas narrativas escritas, eles eram mais conclusivos ao escreverem sobre a maneira como decorreram os episódios de ensino. Nas narrativas escritas, alguns grupos justificavam suas conjecturas em todas as questões, registrando todos os resultados, assim como os procedimentos adotados no decorrer do trabalho.

Notamos certa estrutura padrão da narrativa escrita realizada pelos alunos, pois esses tomavam como base a narrativa escrita, realizada anteriormente. Ressaltamos que nestas narrativas escritas, os alunos explicitaram basicamente o que aprenderam e o que acharam com a realização desta tarefa exploratório-investigativa. Com isso, entendemos que as narrativas dos alunos foram aprimoradas com a realização desta segunda tarefa exploratório-investigativa, pois eles estavam utilizando as narrativas de maneira mais natural e espontânea.

Ressaltamos que as narrativas escritas possuem um papel fundamental no **desenvolvimento de uma tarefa exploratório-investigativa**, pois é por meio delas que os alunos comunicam por escrito suas compreensões e entendimentos. Sendo assim, é por meio delas que os alunos deixam "seus recados" para o professor e para um outro interpretador qualquer e também refletem sobre as suas aprendizagens no ato de escrever essas narrativas reflexivas.

Nesse sentido, Santos (1997) afirma ser importante que os alunos experimentem situações de aprendizagem, em que estes tenham que apresentar raciocínios sobre a exploração de tarefas matemáticas, pois,

> Depois de articular oralmente seus argumentos e idéias é importante que o aluno se habitue a registrar por escrito o seu pensamento e se acostume com a idéia de que a versão escrita final nem sempre fica pronta numa primeira tentativa. Colocar idéias no papel de forma clara e articulada é um processo que se aprende ao longo da caminhada (NUNES 2005 apud SANTOS 1997, p.23).

Na terceira tarefa exploratório-investigativa – **A Rivalidade entre Brasil e Argentina**, os alunos já se sentiam bem mais preparados para discutirem e dialogarem com o professor e também com os colegas. Nas narrativas escritas, elaboradas a propósito desta tarefa exploratório-investigativa, uns alunos foram mais longe do que outros. Alguns grupos, principalmente nos grupos liderados pelas meninas, as narrativas limitaram-se apenas em apresentar uma narrativa da jogada, um esquema e o desenho do campo com as suas distâncias marcadas em forma de escala.

Nas discussões e reflexões, vários alunos chamaram a atenção para o fato de a jogada apresentada ser uma entre as muitas possíveis. Alguns grupos consideraram que a jogada tinha resultado em gol, mas outros apresentaram a hipótese de não ter sido gol, porém não justificaram as suas opiniões. Nas narrativas escritas dos grupos, eles apresentaram os objetivos dessa tarefa exploratório-investigativa apresentados a seguir.

> *"Interpretar corretamente um gráfico e explorar possibilidades da sua adequação a uma situação real; analisar uma jogada de uma partida de futebol representada num gráfico e aprender a traduzir situações reais graficamente; desenvolver a imaginação e a criatividade desenvolvendo jogadas de futebol, porém no gráfico; trabalhar alguns conceitos como o de escala, circulo, circunferência, raio, diâmetro, etc e interpretar gráficos de uma situação real; fazer um relato de uma jogada que estava fornecida num gráfico e fundamentar a nossas opiniões e refletir sobre as situações com que são confrontados a respeitar as diferentes opiniões dos colegas; narrar uma jogada relatada no gráfico e conseguir exprimir e fundamentar nossas idéias"* (todos os grupos).

Na realização da quarta tarefa exploratório-investigativa – **A Lenda do Jogo de Xadrez e as Funções**, da quinta tarefa exploratório-investigativa – **As Funções vão até a Lanchonete**, da sexta tarefa exploratório-investigativa - **Função Área: Respeite o seu Número –** e da sétima tarefa exploratório-investigativa – **Área de um Quadrilátero em Função de X**, percebemos que os alunos já se sentiam conscientizados sobre a importância das narrativas para os momentos de discussões e também para os seus processos de criação de estratégias de Resolução de Problemas.

Com a realização destas tarefas exploratório-investigativas, as narrativas escritas pelos grupos após as aulas de discussão, começaram a evidenciar algumas características semelhantes, pois eles já estavam se acostumando a terem que pensar, falar e escrever sobre Matemática.

As narrativas dos alunos foram vistas por nós, nas tarefas exploratório-investigativas como meio de expressar as dúvidas, inquietudes e, até mesmo, a aprendizagem, pois, quando um aluno se expressava ou discutia algumas questões, conseguíamos identificar o que aquele aluno estava querendo e como ele estava entendendo. As discussões feitas entre professor e alunos, discussões estas, que tinham a finalidade, de destacar as narrativas orais dos alunos.

Na comunicação das idéias matemáticas dos alunos durante o decorrer desses episódios de ensino, as narrativas orais antecederam as narrativas escritas, pois muitas vezes os alunos apresentavam idéias e conceitos importantes, mas que não conseguiam transpor para o papel essas idéias.

Assim, na relação entre “narrativa oral e narrativa escrita” percebemos que os alunos pelo fato de precisarem entregar uma narrativa escrita de cada tarefa exploratório-investigativa, a narrativa oral antecedia a narrativa escrita, pois os alunos utilizavam suas falas para sistematizar as idéias contidas em suas narrativas escritas, ou seja, muitos alunos queriam contar como pensavam para assegurar a sua escrita.

Nesse sentido, Vygotsky apresenta a linguagem falada como a base para a linguagem escrita, ou seja, a fala antecede a escrita. Para esse autor,

> [...] A linguagem escrita é constituída por um sistema de signos que designam os sons e as palavras da linguagem falada, os quais, por sua vez, são signos das relações e entidades reais. Gradualmente, este elo intermediário (a linguagem falada) desaparece e a linguagem escrita converte-se num sistema de signos que simboliza diretamente as entidades reais e as relações entre elas (VYGOTSKY, 1935, p.119 apud REGO 1996, p. 40).

Vygotsky ainda complementa firmando que: “a representação simbólica primária deve ser atribuída à fala e que em sua utilização como base que todos os outros sistemas de signos são criados” (VYGOTSKY, 1935 apud REGO 1996, p. 41). Desta maneira, a fala é um sistema privilegiado para a escritura e serve como sistema de base para sua construção.

Desta maneira, concluímos que as narrativas orais antecedem as narrativas escritas, pois, muitas vezes, os alunos diziam coisas e conceitos importantes, mas que não conseguiam transpor para o papel essas idéias. Na comunicação das idéias matemáticas pelos alunos durante o decorrer desses episódios de ensino podemos dizer que as narrativas orais antecederam as narrativas escritas, pois, muitas vezes, os alunos diziam coisas e conceitos importantes, porém mostravam dificuldades em transpor para o papel esses conceitos.

Ressaltamos que alguns alunos resolveram as **tarefas exploratório-investigativas** perfeitamente, mas manifestaram pouca experiência em exporem suas idéias e em questionarem os colegas, aceitando os resultados ou as resoluções, sem emitir opiniões. Acreditamos que esse aspecto aconteceu como resultado de uma prática na sala de aula que não prioriza a reflexão. Notamos também, que às vezes, alguns alunos chegaram até a explicar as suas conjecturas e soluções dos seus problemas aos outros componentes do grupo. No entanto, tinham dificuldades em transpor o que eles discutiam para o papel, ou seja, tinham dificuldades em registrar, narrar os acontecimentos através do recurso da escrita.

Percebemos que os grupos usaram suas narrativas escritas para representar o simbolismo matemático, evitando usar as suas falas nesse processo. Porém, podemos afirmar que foi dada aos alunos a oportunidade de utilizarem as diferentes representações e de se

familiarizarem com elas. Quanto à escrita simbólica da Matemática, percebemos que os alunos não tiveram grandes dificuldades para discutirem oralmente a respeito das situações, refletindo sobre o trabalho de maneira tranqüila. No entanto, percebemos que nas narrativas escritas dos alunos, estes possuíam uma maior dificuldade.

Um exemplo disso pode ser evidenciado na quinta tarefa exploratório-investigativa – **As Funções vão até a Lanchonete**, por meio dos cálculos discutidos e realizados entre os alunos e o professor no quadro negro, mas que não constavam nas suas narrativas escritas.

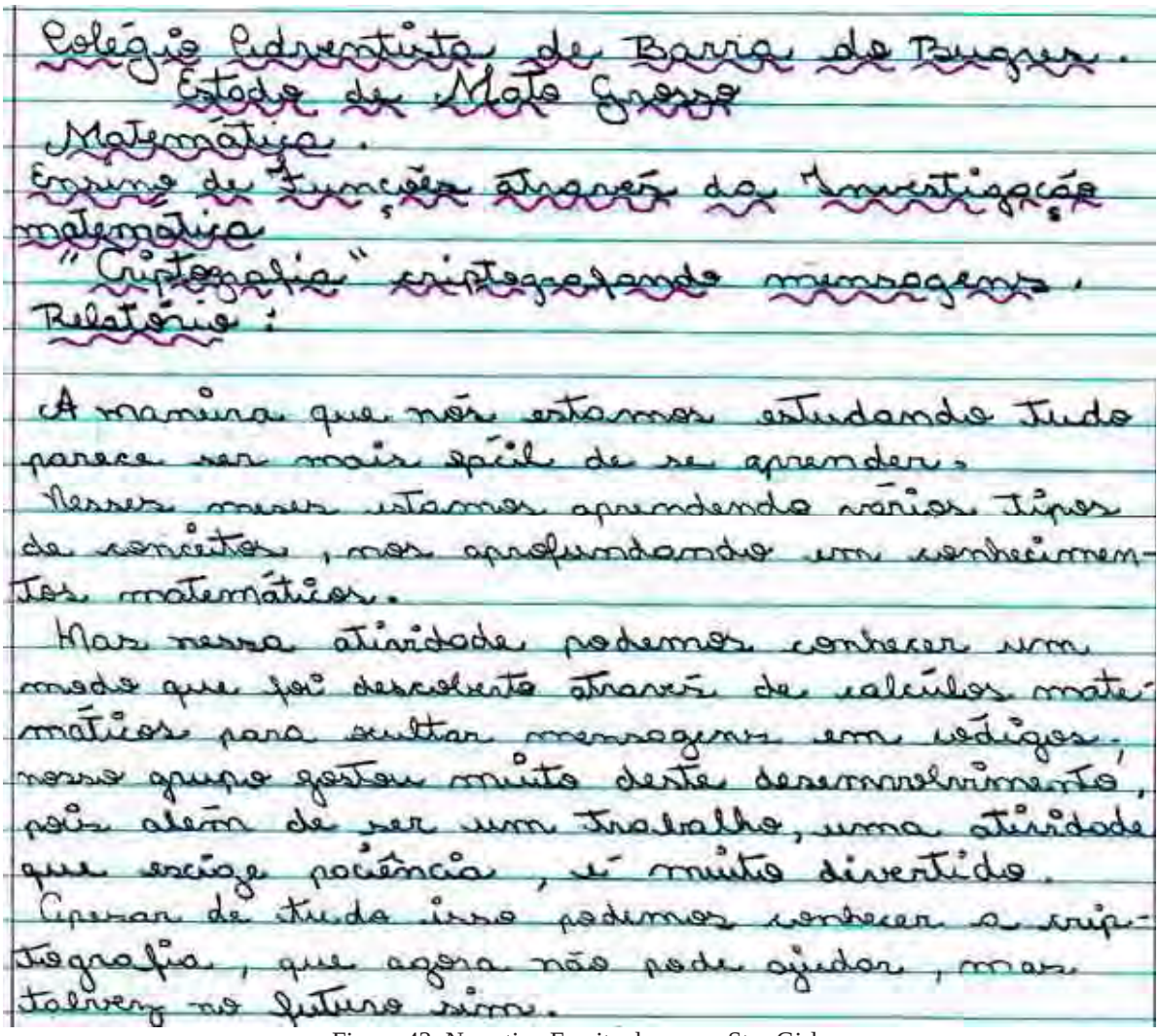
> Em um dos momentos depois dos cálculos feitos pelo aluno Alexandre no quadro-negro o professor disse: *"muito bem, Alexandre, mas como fica a função inversa da lei P = 2.M+2?"* Alexandre, ainda, na frente da sala disse: *"é do mesmo jeito que fiz os cálculos."* Nesse momento, Alexandre colocou no quadro novamente a seguinte lei: **P = 2.M+2** e disse: *"como queremos a inversa, precisamos apenas deixar o M sozinho, ou seja. Precisamos isolar a grandeza M"*. Depois de falado isso, ele voltou para o quadro e, fez os seguintes cálculos:
> **P = 2.M+2**
> **P - 2 = 2.M**
> **(P – 2) / 2 = M**

Através destes cálculos, percebemos que os alunos compreenderam a idéia de Função Inversa, apesar de não apresentarem as idéias e os cálculos da Função Inversa nas suas narrativas escritas. Um exemplo disso pode ser evidenciado nos cálculos contidos na narrativa escrita do grupo "Só no Rim" descrito no capítulo anterior.

Com o passar dos episódios de ensino, notamos que os alunos começaram a manifestar as suas experiências relacionadas à exposição de suas idéias, além de questionamento dos seus colegas. Através desta investigação, procurávamos, ao longo de todos os momentos da realização desses episódios de ensino, desenvolver a capacidade de comunicação dos alunos através das narrativas.

Na realização da oitava tarefa exploratório-investigativa – **Criptografando Mensagens e as Funções** - continuamos a perceber que os alunos discutiam as idéias entre si e, também, com os professores, eles falavam sobre muitas idéias interessantes, ou seja, acontecia um diálogo de idéias bem rico nesse contexto de pesquisa. Assim, essa riqueza do diálogo era sintetizada por uma narrativa escrita reflexiva, com características mais conclusivas, no sentido de eles apresentarem apenas os cálculos matemáticos, os seus desenvolvimentos e as suas conclusões.

Apresentamos, a seguir, uma narrativa escrita de um grupo, na qual evidenciamos os pontos mais relevantes desta tarefa exploratório-investigativa, e, também, apresentam as suas próprias conclusões a respeito de seus conhecimentos matemáticos aprendidos.



Colégio Adventista de Barra do Bugres.
Estado de Mato Grosso
Matemática.
Ensino de Funções através da Investigação matemática
"Criptografia" criptografando mensagens.
Relatório:

A maneira que nós estamos estudando tudo parece ser mais fácil de se aprender.
Nesses meses estamos aprendendo vários tipos de conceitos, mas aprofundando um conhecimentos matemáticos.
Nas nessa atividade podemos conhecer um modo que foi descoberto através de cálculos matemáticos para ocultar mensagens em códigos, nosso grupo gostou muito deste desenvolvimento, pois além de ser um trabalho, uma atividade que exige paciência, é muito divertido.
Apesar de tudo isso podemos conhecer a criptografia, que agora não pode ajudar, mas talvez no futuro sim.

Figura 43: Narrativa Escrita do grupo Star Girls

A socialização dos grupos na elaboração de suas narrativas escritas proporcionou momentos de reflexão. Nesta perspectiva, Weisz (2000) declara que "o ato de refletir por escrito possibilita a criação de um espaço para que a reflexão sobre a prática ultrapasse a simples constatação" (p. 129). Desta maneira, a prática das narrativas escritas sobre o conceito de Função fez com que os alunos construíssem aos poucos uma experiência de reflexão organizada, pois através desta reflexão, os alunos tiveram um conhecimento significativo sobre os conceitos matemáticos.

Constatamos também que a colaboração existe quando os alunos trabalham no interior do grupo. No entanto, quando um grupo apresenta suas conjecturas, começa a aparecer um espírito de competição entre os grupos. Percebemos que a competição entre os grupos foi especialmente relevante nos momentos de apresentação das tarefas à classe, pois todos os grupos queriam apresentar as suas atividades para os outros alunos com o intuito de mostrar o

que estavam aprendendo. No entanto, quando um grupo apresentava, alguns outros questionavam para tentar problematizar as apresentações dos grupos.

Observamos durante os episódios de ensino um desenvolvimento dos alunos através das narrativas, podemos relatar o que diz o aluno Igor, ao perguntarmos como ele se sentiu ao utilizar as narrativas em aulas de Matemática. Para ele

> *"O fato de nós podermos expressar os nossos próprios pensamentos e idéias quer seja falando ou escrevendo, levou-me a ter uma nova relação com a matemática, pois através da escrita tínhamos oportunidade de refletirmos sobre o conceito estudado e o mais importante era de verificar se conseguimos atingir os objetivos propostos para cada tarefa. Era nas narrativas escritas que colocávamos essas idéias, e na fala que defendíamos as idéias contidas nas narrativas escritas"* (Igor – grupo "Los Hermanos").

Tomamos a postura de dar oportunidade aos alunos para comunicarem as suas idéias e, assim os alunos foram melhorando suas capacidades de observar, conjecturar, testar, argumentar e justificar, sempre com alguma criatividade. Aos poucos os alunos foram revelando um espírito investigativo, pois, passaram a formular de maniera autônoma as suas conjecturas, validando e testando vários exemplos, revelavam persistência na procura de um novo caminho quando um contra-exemplo não confirmava abaixo a sua conjectura. Contudo, foi na realização das últimas tarefas exploratório-investigativas, que ficou mais evidente a tomada de consciência por parte dos alunos da importância e da necessidade de justificar e argumentar em defesa dos seus pontos de vista.

Acreditamos que as narrativas escritas contribuíram e ajudaram no desenvolvimento dos alunos de muitas formas, encorajando-os à constantes reflexões, clareando sua idéias, e atuando como um recurso para viabilizar as reflexões e conclusões inerentes às discussões em grupo.

Corroborando com essas idéias, apresentamos abaixo a seguinte abordagem.

> Escrever em matemática pode ajudar os alunos a aprimorarem percepções, conhecimentos e reflexões pessoais. Favorece ainda que realizem processos de escuta, leitura, questionamento, observação, interpretação e avaliação. É como se, ao escrever, pudessem refletir sobre seu próprio pensamento e ganhar assim, uma consciência maior sobre seus caminhos, suas ações, suas aprendizagens (SMOLE e DINIZ 2001, p. 3).

Através desta pesquisa, concluímos que, se começássemos a dar espaço para as falas dos alunos sobre os seus processos de aprendizagem em nossas aulas de Matemática, estaríamos valorizando seus raciocínios e reflexões. Além disso, as narrativas, tanto as orais

como as escritas, poderão proporcionar aos alunos o sentimento de responsabilidade por seus próprios aprendizados.

Na presente pesquisa, denominamos de **Perspectiva Metodológica** uma segunda perspectiva encontrada, pois está relacionada a dimensões que abrangem a **mediação do professor, a dimensão colaborativa a dimensão interativa da pesquisa e a relação do professor/alunos.**

5.2. Perspectiva Metodológica

Dentro desta perspectiva podemos destacar a mediação do professor como a primeira categoria analisada.

5.2.1. Mediação do Professor

Essa categoria se relaciona às experiências docentes do professor/pesquisador ao conduzir o processo investigativo no decorrer da pesquisa. Além disso, considera como a mediação do professor/pesquisador pode possibilitar um contexto propício à exploração e constituição do conceito de Função. Acreditamos que a mediação do professor influencia no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e esta influência é destacada por vários estudiosos no campo da Psicologia e da Educação.

Nos episódios de ensino realizados para a coleta de dados, podemos inferir que a nossa mediação influenciou na aprendizagem dos alunos, pois em todos os momentos estávamos coordenando e mediando as discussões, as falas, os entraves, as contradições e as reflexões. Um exemplo disso pode ser evidenciado na realização da primeira tarefa exploratório-investigativa quando o professor/pesquisador percebeu que um clima de tensão envolveu a explicação do aluno Neto. Essa tensão foi evidenciada em dos momentos da explicação da representação gráfica, por meio dos seguintes diálogos:

> Professor: *"Neto, porque as grandezas foram representadas assim?"*
> Bianca interveio, dizendo: *"ah, professor, é porque o tempo é a variável independente."*
> Igor novamente problematizou a situação ao perguntar: *"como assim, Bianca?"*
> Neto antecipou-se, dizendo: *"é que aqui temos duas grandezas, uma é dependente e a outra é independente. Nesse caso a grandeza tempo é a independente."*
> Igor, não satisfeito com a explicação do Neto, novamente perguntou: *"mas, por quê?"*

> Neto logo respondeu: *"porque o tempo não depende da distância, pois o tempo sempre vai passando e a distância nem sempre, é por isso que o tempo não depende."*
> O professor, atento às discussões, disse: *"muito bem, então quer dizer que toda grandeza que estiver representada no eixo horizontal será a grandeza independente?"*
> Bianca concordou com a pergunta do professor ao dizer: *"exatamente"*.
> Neto, então, perguntou: *"mas será que eu poderia representar a grandeza tempo no eixo vertical?"*
> Igor comentou a pergunta do Neto dizendo: *"depende"*.
> O professor disse: *"como assim depende?"*
> Neto concordou com o Igor ao dizer: *"poder eu posso, mas eu preciso dizer que a grandeza independente está no eixo vertical, se eu falar tudo bem."*
> Durante estas interlocuções, o professor lançou a questão: *"será que sua consideração está correta Neto?"* Bianca interveio, dizendo: *"professor, eu acho que não pode não"*.
> Assim, o professor falou: *"e, agora, o que faremos? Temos duas posições divergentes, quem será que está com a razão?"* Igor logo se posicionou, dizendo: *"eu também acho que não pode não, porque sei lá"*.
> Neste momento, o professor achou melhor interferir e se posicionar, esclarecendo algumas dúvidas. O professor se dirigiu à frente da sala e, apontando para a representação que o aluno Neto havia tinha feito no quadro negro, afirmou.
> O professor, disse: *"pessoal, em Matemática, nos deparamos com muitas situações semelhantes a está. Para sanar algumas destas divergências, existem na Matemática algumas convenções. Essas convenções são importantes porque definem alguns critérios de dualidades que existem como é exatamente esse caso"*.
> Neto argumentou, dizendo: *"mas eu posso, se eu quiser fazer o contrário, né professor?"*
> O professor respondeu: *"penso que se você quiser representar a grandeza dependente no eixo horizontal você pode, mas precisa justificar."*
> Igor disse*: "acho melhor seguirmos as convenções para facilitar a nossa vida, por exemplo, se na matemática uma coisa está em função de uma outra coisa, a primeira coisa será representada no eixo vertical porque ela será a grandeza dependente"*.

Assim, a nossa mediação conduzindo os diálogos dos alunos, proporcionou a eles novos caminhos e estratégias metodológicas nos momentos de entraves e de posicionamentos divergentes, para que eles, por meio das suas discussões, tentassem resolver o problema e compreendessem os conceitos discutidos neste contexto de aprendizagem. Nesse sentido, concordamos com Vygotsky (1996), pois para ele "o professor ao trabalhar com o aluno buscando na sua estrutura cognitiva os pontos relevantes que servirão de base para o que quer ensinar, procura verificar, através do diálogo, se a sua fala foi compreendida" (p. 98).

Desta maneira, entendemos que o apoio dado aos alunos foi essencial para levá-los a perceberem o que era efetivamente uma tarefa de natureza exploratório-investigativa e a importância que essas assumiam no processo de ensino e aprendizagem.

Durante os momentos de desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas, procurávamos motivar e incentivar os alunos para o início e para a progressão das suas atividades. Essa mediação contribuiu para que os alunos se portassem de maneira atuante, sendo esse fato um ponto fundamental para a compreensão das idéias discutidas.

Nessa perspectiva, Vygotsky (1987) ressalta a importância do professor ao mediar as discussões em sala de aula, pois,

> [...] o fato de uma criança conseguir dar explicações convincentes sobre as questões relacionadas às ciências sociais, por exemplo, mesmo usando palavras cujos significados lhe eram, até então, desconhecidos deve-se principalmente à ação do professor (p. 70).

Assim, dialogávamos com os alunos sobre as situações propostas e nos posicionávamos como um aprendiz dos conceitos matemáticos que pretendíamos explorar. Nos diálogos, procurávamos resgatar dos alunos o que eles já sabiam para, a partir deste ponto ajudá-los a ampliarem seus próprios conhecimentos, incorporando novos saberes em seus processos de aprendizagem.

Compreendemos que para haver essa atitude de diálogo em sala de aula, é preciso que olhemos os alunos como sujeitos portadores de muitos saberes e capazes de refletir, questionar, argumentar e criar significados perante as novas experiências. Desta maneira, conforme Shor e Freire (1986),

> [...] o diálogo é a confirmação conjunta do professor e dos alunos no ato comum de conhecer e re-conhecer o objeto de estudo. Então, em vez de transferir o conhecimento estaticamente, como se fosse uma posse fixa do professor, o diálogo requer uma aproximação dinâmica na direção do objeto (SHOR & FREIRE 1986, p.124).

Essa abordagem destacada por esses autores, a respeito do diálogo do professor com os alunos prevê a participação de todos os envolvidos no processo educativo para a compreensão do objeto de estudo. Segundo Vygotsky (1998) a compreensão de um objeto acontece por meio da interação social e do uso de símbolos mediadores para que haja o desenvolvimento da aprendizagem.

Para nós, no contexto desta pesquisa, o diálogo se construiu a partir de uma atitude curiosa e participativa, em uma produção conjunta e a partir de uma troca respeitosa entre os alunos com eles próprios e o professor. Os alunos se pronunciaram, questionando, argumentando, caminhando juntos na conquista de um corpo de conhecimentos compartilhados, após desenvolverem plenamente as etapas de investigação das tarefas exploratório-investigativas. Assim, procurávamos manter um diálogo com os alunos, explorando e investigando com eles os diferentes conceitos matemáticos e as diferentes estratégias metodológicas presentes nos momentos do desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas, pois conforme Ponte at. al (1998),

> O professor desafia os alunos com situações e questões de modo a envolvê-los em trabalho investigativo. Apoiá-los, fazendo perguntas, comentários ou sugestões. Procura avaliar os progressos já realizados e eventuais dificuldades, recolhendo informação e, com base nisso, toma a sua decisão de prosseguir, alterar um ou outro aspecto do que se está a fazer, ou mudar para outra fase do trabalho (PONTE et al. 1998, p. 24).

Durante os momentos de discussão e reflexão das tarefas exploratório-investigativas, coordenávamos as discussões, nas quais os alunos tinham oportunidade para explicitar fatos acontecidos e percebidos durante o trabalho em grupo. Um grande dinamismo aconteceu nos momentos de discussão, pois os alunos refletiram sobre diversos aspectos e apresentaram suas opiniões a respeito das idéias matemáticas, envolvendo o conceito de Função. Um exemplo disso pode ser evidenciado na narrativa escrita entregue pelo grupo Los Hermanos referente à segunda tarefa exploratório-investigativa – **Trajeto de casa a escola** realizada.

> *Essa tarefa contribuiu para uma melhor aprendizagem sobre funções, pois, este conceito também está ligado com variação de grandezas.* ***Para nós, função é uma dependência que relaciona com duas variáveis uma dependente e outra independente*** (grupo "Los Hermanos", grifo nosso).

Durante esses momentos, procurávamos interagir e dialogar com os alunos, colocando questões subjetivas para eles, com o intuito de obter a participação deles nos episódios de ensino.

A nossa mediação foi mais intensa nos momentos de discussão quando aconteciam os confrontos, discutindo as estratégias, as hipóteses e as justificações que os grupos de alunos apresentavam. Nessa fase de discussão, procurávamos direcionar a atenção da turma para os aspectos mais destacados do trabalho desenvolvido, estimulando os alunos a questionarem as asserções dos outros grupos. Neste sentido, Martinho (2004) declara que para valorizar as dinâmicas comunicativas na sala de aula "é necessário que o professor estimule o interesse dos alunos que irá enriquecer as interações estabelecidas" (p. 20).

Sendo assim, um dos papéis do professor enquanto elemento mediador da comunicação na sala de aula se processa por meio da interação e partindo do seu trabalho, ajudando os alunos a empenharem-se em suas próprias aprendizagens e a ganharem confiança neles próprios. Nesta perspectiva, Góes (1997) afirma que "[...] a mediação não se restringe aos outros sujeitos fisicamente presentes, estende-se aos efeitos da incorporação de experiências nas relações sociais, vividas em diferentes contextos e de diferentes modos" (p. 14).

Desta maneira, esta última autora entende ser na dinâmica das trocas dialógicas com outras pessoas em torno de objetos e nas instâncias de produção e compreensão da palavra, que o aluno desenvolve o significado da palavra, pois "[...] ao incorporar uma palavra, a criança não apenas designa um objeto, mas também analisa, abstrai propriedades e generaliza-as" (GÓES, 1997, p.21).

Sendo assim, entendemos que a escola caracteriza-se como espaço para ensinar e para aprender. A aprendizagem, segundo Vygotsky, só é possível através das interações entre as pessoas, ou seja, só ocorre aprendizagem se o ambiente sócio-cultural em que se vive proporcionar tal desenvolvimento.

Neste ambiente, a mediação do professor dirigida pelo uso da palavra e de forma discursiva, poderá levar o aluno a uma abstração sobre os conceitos fundamentais da Matemática, os quais evidenciam as marcas das experiências vividas e compreendidas. Neste contexto, resgatamos de Larrosa (2001) o conceito de experiência e a relevância deste para a compreensão do que vivenciamos. Para esse autor, a experiência é algo forte capaz de tomar conta de nós, pois "a experiência não é o que acontece, mas o que nos acontece, ou o que nos toca" (LARROSA 2001, p.27).

Compreender por meio da experiência pode se relacionar às idéias de Vygotsky (1987) quando este teórico apresenta o que considera ser um ensino voltado para a compreensão, pois, "[...] o professor, trabalhando com o seu aluno, explicou, deu informações, questionou, corrigiu o aluno e o fez explicar" (VYGOTSKY 1987 apud MOYSÉS 1997, p. 36).

Parafraseamos Moysés (1997, p. 37), pois este destaca que, **trabalhar com o aluno** evidencia uma atitude de interação entre professor e aluno através da preposição "com", no qual ambos trabalham (ensinam e aprendem) um com o outro.

Explicar e dar informações significa o professor buscar nos conhecimentos prévios dos alunos, idéias relevantes que podem servir como ponto de partida, relacionando-as com o conceito estudado, para, a partir daí, ampliar os esquemas mentais já existentes com informações relevantes para que, eles se apropriem de idéias mais sólidas.

Questionar e corrigir significa ter uma postura problematizadora no ato de verificar se os conceitos foram compreendidos, e, em casos da não compreensão do conceito, o professor pode auxiliar corrigindo e apresentando caminhos para que o aluno chegue à solução correta.

Fazer o aluno explicar significa, entre outras coisas, "**dar voz**" para que os alunos comuniquem os caminhos trilhados em suas explorações para chegarem a possíveis respostas na resolução de seus problemas.

Nesse sentido, aparece a relevância das narrativas no contexto da sala de aula, pois, por meio dessas, o professor poderá observar se os alunos estão relacionando antigos conhecimentos com os novos. Desta maneira, para o professor entender tais procedimentos dos alunos, esses precisam ter momentos para exporem com suas próprias palavras o conceito estudado e, sempre que possível, fazerem generalizações conclusivas sobre o mesmo.

Na presente pesquisa, esse fato pode ser evidenciado na primeira tarefa exploratório-investigativa **– Uma Fábula Matemática** quando o aluno Neto procurou seguir um outro caminho para tentar fazer a sua representação gráfica. Após concluir a sua interpretação, esse aluno começou argumentando a respeito da sua representação, dizendo:

> *"tudo o que eu fiz foi inverter o gráfico que fizemos no nosso grupo. Em vez de representar o tempo no eixo horizontal, representei no eixo vertical e aí fui registrando os valores com base na fórmula na velocidade que aprendi lá em Física".*
> O professor, então, falou: *"Neto, apresenta em detalhes essa situação, explicando para turma os trajetos da tartaruga e da lebre".*
> Neto disse: *"ah, sim, a tartaruga possui uma velocidade constante e, por isso, que é uma reta, e a lebre possui velocidade variável".*
> Igor problematiza ao dizer: *"explica melhor isso aí neto".*
> Neto olhou para sua representação no quadro-negro e logo disse: *"a tartaruga vai sempre numa velocidade de um quilômetro por hora, já a lebre, faz três quilômetros em uma hora, mas depois fica parada, sem velocidade, durante quase três horas, dormindo, aí ela acorda e corre novamente os mil metros em poucos minutos, mas mesmo assim perde pra tartaruga".*
> O professor apresentou então o seu parecer dizendo: *"muito bem Neto, eu estou satisfeito com a sua resposta, teremos que ver se todos os alunos estão".*

Durante essas interlocuções, percebemos que esse aluno conseguiu argumentar, justificando a sua representação gráfica. O mais importante nessas interlocuções foi que o aluno Neto discordou da posição de todos na sala de aula, mas conseguiu provar que a sua representação gráfica estava correta.

Durante os momentos de divergências de posicionamentos, a nossa postura enquanto mediador de todo o processo foi de deixar o aluno apresentar as suas argumentações para justificar ou não a sua postura. Assim, concluímos que em todo esse contexto, o papel do professor, ao mediar esse processo, foi fundamental para que as discussões e as reflexões fluíssem, pois Moysés (1997), afirma que as inferências do professor ao mediar o processo, influenciam na aprendizagem dos alunos. Esta autora ainda declara que "a fala do professor ajudou a encaminhar a atenção para os pontos fundamentais, para os aspectos básicos, sem os quais não se chegaria às inferências corretas" (p. 47).

Evidenciamos esse fato quando, no final da apresentação do aluno Neto, referente à primeira tarefa exploratório-investigativa – **Uma Fábula Matemática.** Procuramos centrar as discussões conclusivas aos pontos fundamentais da tarefa exploratório-investigativa.

> O professor retomou a palavra perguntando: *"Neto, o que você e seu grupo concluíram disso tudo o que fizestes?"* Neto declarou: *"**eu acho que existe muita coisa legal, mas que muitas vezes temos que decorar fórmulas e aí, essas coisas legais, ficam chatas. Nessa situação, por exemplo, eu achei que poderia inverter os lugares de representação dos dois eixos e vi que isso é possível, mas tenho que sempre afirmar quem está em função de quem.**"* (grifo nosso).

Assim, a mediação das narrativas dos alunos em seus trabalhos nos episódios de ensino pelo professor foi evidenciada pela aluna Juliana, ao declarar que,

> *"Sobre essas aulas, eu gostei muito porque tive a oportunidade de descobrir coisas relacionadas à Matemática e também relacionadas ao nosso dia-a-dia. Gostei também porque nessas aulas, o professor nunca chegou e despejou a matéria, mas apresentava questões e éramos nós que tínhamos que descobrir as coisas, às vezes, ele auxiliava, mas nós tínhamos toda a liberdade em expressar as nossas opiniões e isso eu também achei importante, porque nunca tivemos aulas reflexivas principalmente em Matemática que é uma matéria exata".*

Destacamos, a seguir, três narrativas reflexivas de três alunos, ambos do grupo "Os Orientais", a respeito do papel que tivemos durante a condução dos episódios de ensino. Essas reflexões estão contidas no questionário final, respondidos pelos alunos.

> *"Acho que está bom. Neste tipo de aulas penso que tem mais a ver com os alunos do que propriamente com o professor. Se temos alguma dúvida, **o professor nos ajuda** sem dar a respostas, ele até da uma explicadinha, mas somos nós que temos que descobrir, para poder formular as nossas próprias idéias".* Danilo Hiroshi
> "***O professor nos ajuda**, mas sem dar a resposta, pois somos nós que temos que encontrar. Se estamos a fazer uma aula experimental é para sermos nós a tirar conclusões, a experimentar, a investigar".* Neto
> *"Acho que devíamos continuar a aprender Matemática através do trabalho em grupo. Todos nós aprendemos, já que todos participaram e se mostraram interessados, já que as tarefas investigativas foram interessantes para ser **discutido no grupo e com o professor**".* Bianca

Dessas narrativas, emergem experiências vividas pelos alunos nessa pesquisa. Assim podemos sentir que, por meio da nossa mediação, sempre com o papel de problematizador e moderador das discussões, os alunos participaram apresentando as suas narrativas, comunicando, assim, aos demais alunos da turma, as suas idéias referente ao conceito de função.

Uma outra categoria que emergiu da nossa pesquisa pode ser denominada como Dimensão Colaborativa.

5.2.2. Dimensão Colaborativa

Essa dimensão se relaciona às interações entre o pesquisador e a professora da classe escolhida e a maneira como ambos vivenciaram a experiência com as narrativas, no contexto das Investigações Matemáticas, na presente pesquisa.

Consideramos importante a interação que tivemos com a professora da turma nos momentos de realização dos episódios de ensino e, também, nos momentos de preparação e reflexão das tarefas exploratório-investigativas. Ressaltamos a importância da preparação dos episódios em conjunto com a professora da turma, pois essa preparação se processou com o intuito de deixar a professora ciente de todas as atividades que iríamos desenvolver durante os episódios de ensino.

Acreditamos que a transparência do trabalho contribuiu também para que ela colaborasse em todos os episódios de ensino e também nas discussões em outros momentos, fora de sala de aula. Essas reflexões aconteciam em nossas conversas nos encontros para reflexão aos domingos, fora da escola.

Apesar de o pesquisador ter sido o professor responsável pela condução dos episódios de ensino, alguns grupos aproveitavam a presença da professora Solange para discutirem com a professora, algumas questões referentes às tarefas e também sobre a maneira como eles estavam desenvolvendo as atividades. A professora Solange, ciente de sua função, sempre se mostrou pronta a auxiliar e problematizar o trabalho dos alunos nos episódios de ensino.

Acreditamos que a boa relação que tivemos com a professora da turma influenciou na realização de todas as tarefas exploratório-investigativas e também nas narrativas dos alunos, pois, ela mediava as discussões nos grupos e também auxiliava os alunos que a procuravam individualmente, nos momentos de desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas. Ela procurava orientar os alunos no trabalho, mas sem lhes reduzir a atitude investigativa, por meio do fornecimento de determinadas indicações e da colocação de questões, contribuindo assim para a realização de novas questões a serem exploradas.

Nos episódios de ensino, durante os momentos de discussão e reflexão, a professora Solange teve uma intervenção relativamente discreta. No entanto, nos momentos de desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas, ela atuou ativamente auxiliando e mediando o trabalho dos alunos em seus grupos. Assim, a professora da turma contribuiu para o desenvolvimento do trabalho dos alunos, pois não confirmava as conjecturas e idéias dos alunos antes deles explicarem as suas formas de pensar e suas estratégias.

Destacamos a importância de nossa participação nas aulas da professora Solange, pois,

os alunos acharam interessante esse trabalho conjunto, ou seja, dois professores trabalhando juntos, investigando as explorações e atividades dos alunos. Todo esse movimento de elaborar coletivamente um conjunto de tarefas **exploratório-investigativas** e aplicá-las com nossos alunos, nos levou a constatar que eles se envolveram e chegaram aos objetivos delineados por nós. Esse aspecto nos faz apostar na perspectiva de que se deve aprender Matemática investigando e compartilhando as nossas experiências com outros professores.

Entendemos que, se compartilhássemos nossas aulas com outros professores, permitindo que estes assistissem e se posicionassem perante nossas ações em sala de aula, possuiríamos um outro olhar e, assim, poderíamos enxergar a nossa prática de uma outra dimensão. Nesse sentido, teríamos o conceito de excedente de visão (Bakhtin, 1992) sobre nossas posturas e ações metodológicas, pois refletiríamos sobre a nossa própria prática (Schon, 1995) e sobre as sugestões e apontamentos que alguém de fora nos fizesse.

Queremos destacar a maneira como a professora vivenciou a experiência e as suas reflexões sobre o ensino da Matemática valorizando as narrativas em um contexto das Investigações Matemáticas.

Apresentamos, a seguir, algumas considerações da professora sobre a experiência realizada, pois a visão da professora acerca da experiência constitui-se em um aspecto fundamental desta reflexão, aspecto que consideramos ser um excedente de visão (Bakhtin, 1992).

Ao refletir sobre o trabalho realizado, ela afirmou que, *"ensinar Matemática nessa perspectiva metodológica e, através das tarefas exploratório-investigativa, é uma maneira nova e, que estou aprendendo com essa experiência de ensino."*

De acordo com a professora Solange, o ensino da Matemática realizado por meio das investigações matemáticas possui um papel fundamental para reestruturar a própria prática do professor, pois, para ela, *"ensinar nessa perspectiva metodológica muda a nossa prática, pois, além de ensinarmos os conteúdos formais, damos oportunidades para os alunos apresentarem os seus pontos de vistas e isso nos leva a uma constante reflexão sobre o nosso trabalho"* (Conversas Reflexivas após a realização da **terceira tarefa exploratório-investigativa – A Rivalidade entre Brasil e Argentina).**

As narrativas escritas são importantes, pois *"o aluno tem a oportunidade de dizer a seu modo o que entendeu sobre determinado assunto."* E utilizar as narrativas dos alunos em sala de aula é importante, pois *"só assim poderemos saber o que os nossos alunos estão aprendendo e o que eles estão achando das aulas e também porque essa é uma dificuldade que todos nós temos e por isso é importante desenvolver a escrita ainda no Ensino*

*Fundamental."*Ainda a professora continua mostrando as suas idéias, afirmando que os momentos de reflexão são importantes, pois, *"para o professor, é fundamental, pois muitos conceitos podem e devem, dependendo da situação serem mudados e revistos."*

Depois do desenvolvimento desta narrativa da professora da classe, entendemos que os momentos de reflexão realizados pelos alunos ao concluírem suas tarefas exploratório-investigativas deram, um toque positivo no trabalho, pois, estes momentos foram destinados para interpretar a evolução dos alunos e para tomar decisões relativas aos procedimentos relacionados aos episódios seguintes.

A perspectiva metodológica das Investigações Matemáticas em sala de aula *"contribuiu muito para o enriquecimento dos conhecimentos dos alunos quanto exploradores, leva o aluno a pensar, instiga a curiosidade, desenvolve as narrativas. Foi muito bom ver os alunos interagidos e comprometidos com os trabalhos, melhor ainda foi ver o desempenho deles com as suas narrativas."*

Dessa experiência em diante, envolvendo as Investigações Matemáticas a professora Solange afirma que, *"bom, eu achei muito legal essa experiência de ensino. Eu tenho bastante vontade de trabalhar dessa maneira, mas, para trabalhar assim é preciso que tenhamos um tempo maior para o preparo das tarefas e também para as reflexões sobre o trabalho desenvolvido. Ainda não tenho condições de trabalhar dessa forma porque tenho um tempo bem reduzido, mas uma coisa é certa assim que eu tiver oportunidade irei ensinar Matemática nessa perspectiva também."*

Percebemos que apesar da professora ter gostado de experienciar essa forma de conceber o ensino de Matemática, ela deixou bem claro que existe algumas dificuldades, e estas incluem, principalmente, as condições de trabalho do professor. Isso nos levou a pensar no quadro atual que se encontra o trabalho docente. Além disso, o contexto também influência para a realização de um ensino de Matemática por meio das Investigações Matemáticas.

A professora ainda afirmou que essa experiência contribuiu para o seu desenvolvimento profissional, *"embora seja difícil trabalhar com essa metodologia devido a vários fatores, eu acho que aprendi muita coisa boa, principalmente, a questão de deixar o aluno se aventurar em busca do seu próprio conhecimento."*

Nesse sentido, ao procurarmos sintetizar as principais condições que contribuíram para a colaboração da professora para com o investigador, chegamos ao desenvolvimento profissional da professora. Parece ser importante que a professora encare a sua participação nesta experiência como uma forma de conseguir transformar idéias teóricas em ações práticas, como um aspecto intrínseco à sua profissão de professora.

O trabalho do pesquisador em sala de aula foi *"ótimo, se posicionou muito bem, sendo claro nas suas explicações e portou-se como orientador da turma e não como mero transmissor de informações."* Essa declaração apenas comprova a boa relação existente entre a professora da turma e o pesquisador. Esse fato evidencia as potencialidades do compartilhamento de experiências diferenciadas para o ensino de Matemática.

Por meio dessa narrativa reflexiva da professora da classe, podemos concluir que desenvolvemos nossa experiência de maneira colaborativa, ou seja, realizamos um trabalho colaborativo, na perspectiva de (Boavida e Ponte, 2002). Para esses pesquisadores, o termo colaboração só é considerado quando o grupo formado trabalha em uma base de igualdade, ajudando-se mutuamente para que os objetivos traçados por todos sejam atingidos – de forma que todos se beneficiem – num clima de partilha, interação, confiança e diálogo. Assim, o trabalho colaborativo, "é uma forma de trabalho onde envolve negociação cuidadosa, tomada conjunta de decisões, comunicação efetiva e aprendizagem mútua num empreendimento que se foca na promoção do diálogo profissional." (BOAVIDA e PONTE, 2002, p.45). Nesta perspectiva, esses autores concluem que a colaboração é uma estratégia importante para a realização de investigações sobre a prática do professor em sala de aula envolvendo professores e investigadores.

Ainda na perspectiva do trabalho colaborativo, Penteado (2000) afirma que o trabalho colaborativo emerge como uma tentativa "de compreender as atividades de pesquisa e ensino e encontrar formas de superar as contradições nela presentes. É planejar e implementar novas agendas e prioridades que levem em conta os interesses dos colaboradores" (p. 32).

Assim, concluímos que os professores ao desenvolverem trabalhos colaborativos, eles terão suportes presenciais para dialogar e refletir sobre as suas práticas.

Uma outra categoria que emergiu da nossa pesquisa pode ser denominada como Dimensão Interativa.

5.2.3. Dimensão Interativa

A dimensão **interativa** foi outra categoria que emergiu dos dados desta pesquisa e se relaciona às interlocuções e compartilhamento de idéias, conceitos matemáticos e **experiências vividas** pelos alunos em grupos na composição das narrativas.

No trabalho nos grupos nós precisamos acertar algumas regras de funcionamento e acertar algumas normas de organização. A **relação aluno/aluno**, em relação às **narrativas** no trabalho em grupo, emergiu de maneira bem forte nesta pesquisa. Percebemos que muitos

alunos participaram de forma passiva, pois procuravam trabalhar ainda de maneira individual, mas, no decorrer da realização da primeira tarefa exploratório-investigativa – **Uma Fábula Matemática**, os alunos começaram a compartilhar as idéias e conceitos com os colegas. Evidenciamos um exemplo disso na narrativa escrita elaborada pelo grupo "Café com Leite".

> *"A nossa maior dificuldade foi trabalhar em grupo porque temos que compartilhar os nossos conhecimentos com os outros colegas. Nessa tarefa, todos do grupo contribuíram com o desenvolvimento das tarefas. Nós aprendemos com essa tarefa a raciocinar e tentar resolver problemas com o nosso conhecimento."*

Compreendemos a postura desses alunos, pois eles não estavam acostumados com a dinâmica do trabalho em grupo. Ao finalizarmos a **primeira tarefa exploratório-investigativa – Uma Fábula Matemática,** os alunos perceberam que foi muito importante trabalhar em grupo, uma vez que, por meio desta dinâmica, mais interações aconteceram, favorecendo a troca de idéias referentes ao conceito de Função.

As narrativas dos alunos nos grupos, principalmente a narrativa do líder do grupo, influenciaram as outras narrativas, pois os líderes dos grupos levaram o trabalho a sério e foram bastante determinados e compromissados durante a condução das discussões nos grupos, assim como na elaboração das narrativas escritas. Inicialmente, os líderes estavam com certa apreensão em terem que ser eles os responsáveis em conduzirem as tarefas em seus grupos. Contudo, no decorrer dos episódios de ensino, os líderes interagiram positivamente com os componentes de seus grupos.

Quando essas interações não aconteciam, o líder, juntamente com os outros componentes do grupo, apresentava a falta de participação de alguns componentes em suas narrativas escritas. Evidenciamos um exemplo disso na narrativa escrita do grupo "3F tartaruga" na realização da primeira tarefa exploratório-investigativa – Uma Fábula Matemática ao afirmar que *"para nós, o trabalho em grupo é muito bom, mas nessa tarefa não obtivemos êxito na presença 100 % dos integrantes do grupo."*

Constatamos que os alunos destacaram, na primeira narrativa escrita, algumas das potencialidades do trabalho cooperativo em grupos, pois eles mencionaram a participação e o envolvimento dos componentes do grupo na realização das tarefas exploratório-investigativas como fator positivo. Um exemplo disso pode ser evidenciado na narrativa do grupo "Los Hermanos" ao afirmarem que, "*acreditamos que o trabalho em grupo melhora no relacionamento com as pessoas, fortalece a amizade com os amigos e interagimos com pessoas diferentes também.*"

Compartilhar as idéias com a turma ou interagir com colegas nos grupos são possibilidades potencializadas para a sala de aula, pois a interação com "o outro", é vista como fundamental na condução de atividades que privilegiam as "vozes dos alunos". Nesse sentido, (D' AMBROSIO 2002, p.19 apud FREITAS 2006) declara que, na interação com o outro, o pensamento de cada um recebe alguns ajustes e se modifica adequando à construção das idéias que surgem no contexto interativo.

> No esforço para colocar suas idéias aos colegas, os alunos expõem seu conhecimento de forma pura e profunda. Percebe-se também que no caso de uma conversa genuína, a construção de cada aluno participante é modificada durante a interação (D' AMBROSIO 2002, p.19 apud FREITAS 2006, p. 181).

Na segunda tarefa exploratório-investigativa – **Trajeto de Casa a Escola**, os alunos já possuíam a convicção de que era importante trabalhar em grupo, pois, dessa forma, havia uma interação maior entre os envolvidos. Nas narrativas escritas, entregues pelos líderes dos grupos, percebemos que os alunos ressaltaram que trabalho interativo nos grupos possuía relevância para eles.

Apresentamos, a seguir, alguns aspectos do trabalho em grupo contido nas narrativas dos grupos.

> *"Essa tarefa foi muito importante para a nossa aprendizagem, embora com muita dificuldade, obtivemos um raciocínio lógico dessa tarefa. Foram muitas as dificuldades, mas* ***com o apoio do nosso grupo, buscamos entender as idéias estudadas"*** (grupo "Scoob–Dôo", grifo nosso).
> *"O grupo, até certo ponto, foi muito bom, pois tivemos, em alguns* ***momentos, algumas trocas de idéias****. Aprendemos a fazer o nosso trajeto de casa até a escola e, com isso, aprendemos um pouco mais sobre funções, para sabermos que a Matemática esta em todos os lugares"* (grupo "3 F – Tartaruga", grifo nosso).
> ***"Todos os integrantes do nosso grupo contribuíram para a resolução dos problemas*** *e das situações, alguns com mais dificuldades e outros, com menos, mas nessa tarefa todos do grupo contribuíram com o desenvolvimento das tarefas.* (grupo "Café com Leite", grifo nosso).
> *"O trabalho em grupo teve um rendimento muito favorável, pois* ***todos participaram e colocaram suas idéias e opiniões no ar.*** *O grupo aprendeu a desenvolver e interpretar gráficos, e ter idéia sobre velocidade negativa e dar mais um passo para saber com todas as letras o que é uma função*. (grupo "Los Hermanos", grifo nosso).

Evidenciamos, nestas narrativas escritas dos grupos, que a dinâmica do trabalho em grupo contribui para a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, Moran (1998) declara que, quando "o aluno desenvolve a aprendizagem cooperativa, a pesquisa em grupo, a troca de resultados, a interação bem sucedida aumenta a aprendizagem" (p. 86).

Por meio dessas narrativas escritas a respeito da importância que possui o trabalho em grupo para a troca de idéias e diálogos em sala de aula, e também da nossa observação, notamos que já, no decorrer da segunda tarefa exploratório-investigativa – **"Trajeto de Casa a Escola**", aconteceu uma maior interação entre os componentes dos grupos e os líderes. Os líderes souberam dividir as questões das tarefas exploratório-investigativas nos grupos, cooperando com os outros alunos, moderando as discussões e apresentando idéias para que os grupos resolvessem as situações propostas. Os líderes dos grupos levaram o trabalho a sério, foram bastante determinados e compromissados durante a condução das discussões e também na elaboração das narrativas escritas.

À medida que o tempo ia passando, os diálogos e as interações entre os componentes dos grupos eram cada vez mais visíveis. Destacamos os diálogos, pois os diálogos se tornaram cada vez mais eficazes, mostrando indícios de uma troca e compartilhamento de opiniões e idéias a respeito das atividades desenvolvidas.

Observamos, por diversas vezes, um dos alunos a dizer uma coisa e o outro aluno responder outra coisa. Percebemos que, através dessas divergências, os alunos discutiram até chegarem a um consenso. Esse aspecto foi de fundamental importância no desenvolvimento da pesquisa, pois a visão do outro ajudava os alunos a re-elaborarem as suas próprias visões (Bakhtin, 1997).

Na realização da terceira tarefa exploratório-investigativa – **A Rivalidade entre Brasil e Argentina**, esses aspectos anteriormente mencionados foram evidenciados.

Apresentamos, a seguir, algumas narrativas escritas, destacando a reflexão dos alunos do trabalho em grupos.

> *"O grupo teve um grande interesse na tarefa por ela se tratar de uma partida de futebol e por não haver muita dificuldade na realização das tarefas propostas"* (grupo "Só no Rim").
> *"O grupo está razoável porque a tarefa foi individual e com essa, cada um teve que fazer a sua parte. Só na hora das dúvidas que discutíamos as questões. Aprendemos com essa tarefa que precisamos usar a Matemática no nosso dia - a dia, a rivalidade com os argentinos e aprendemos ainda que temos que colocar nossas idéias no ar"* (grupo "3F Tartaruga").
> *"Essa tarefa foi um ótimo exercício para o grupo. O interesse que essa tarefa despertou foi de começar a trabalhar com escala e desenvolver alguns tipos de jogadas de futebol e interpretar corretamente um gráfico, tudo isso nós alcançamos. O grupo apresentou um retrospecto muito bom, apesar de o trabalho ser individual, em alguns momentos discutimos algumas idéias. Aprendemos a trabalhar com escala e aprendemos um pouco a mais sobre funções. Este trabalho foi muito interessante e educativo, pois, enquanto estávamos a brincar estivemos a aprender, e que deveríamos voltar a fazer mais vezes este tipo de trabalho"* (grupo "Los Hermanos").

A dinâmica do trabalho em grupo permitiu um contexto de aprendizagem em sala de aula, de confronto dos diferentes pontos de vista. Esse contorno de opiniões foi importante porque promoveu discussões e diálogos em sala de aula. Assim, os alunos tiveram oportunidades de desenvolverem o senso crítico e aprenderem a ouvir e a respeitar as opiniões dos colegas. Nesse sentido, Freitas (2006) declara ser fundamental que um aluno discuta e ouça o que o outro tem para falar, para que juntos aprendam através dessa discussão. Martinho (2004) complementa essa abordagem, afirmando que:

> [...] o professor tem que procurar que cada grupo trabalhe como um todo, que os elementos se respeitem mutuamente, saibam discutir de uma forma construtiva, dando as suas opiniões e ouvindo atentamente as dos colegas e chegando a um acordo quando necessário (MARTINHO 2004, p. 21).

Desta maneira, concluímos que o trabalho em grupos foi um contexto que contribuiu para o desenvolvimento das capacidades comunicativas dos alunos. Sendo assim, as narrativas dos alunos possuíram um papel fundamental para a aprendizagem do conceito de Função, pois os alunos sempre tiveram a oportunidade de comunicarem suas idéias, pensamentos e raciocínios. Nesta perspectiva, o Currículo da Educação Básica (2001), de Portugal, declara que em uma atividade de investigação, "[...] os alunos exploram uma situação aberta, procuram regularidades, fazem e testam conjecturas, argumentam e comunicam oralmente ou por escrito as suas conclusões" (p. 65).

Salientamos que para se concretizar essa idéia de trabalho em grupo, foi preciso um planejamento cuidadoso por parte do pesquisador, da professora e também dos alunos, pois nossa experiência privilegiou as discussões acontecidas no processo, apesar de os nossos alunos não terem experiências anteriores com a dinâmica do trabalho em grupo.

Percebemos com o desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas que os alunos participaram ativamente nos seus grupos, com raras exceções. Os grupos trabalharam objetivando apresentar argumentos consistentes. Um fator que consideramos importante no trabalho em grupo é que os alunos discutiam suas idéias com os componentes do grupo, aprendendo por meio do pensamento e das idéias dos outros.

Ao ouvirmos seus diálogos, pensamos em uma possibilidade positiva e outra negativa para tal fato: a positiva refere-se à troca de idéias e a constante interação, e, a negativa refere-se ao fato de que, em alguns grupos, alunos que apenas só recebem as informações e idéias e não discutem, apenas concordam ou discordam sem entender os porquês das questões. Porém, não podemos deixar de enfatizar a importância das múltiplas visões que emergem em grupos

de discussão e a importância dessas múltiplas visões na constituição do conhecimento dos membros dos grupos.

Ao concluir a última tarefa exploratório-investigativa – **Criptografando Mensagens e as Funções** - tivemos um episódio de ensino destinado exclusivamente à reflexão sobre a maneira como transcorreu a pesquisa desenvolvida. Nessa reflexão, apresentamos as narrativas orais de alguns alunos referentes às suas opiniões sobre o trabalho em grupo, tanto no sentido colaborativo, quanto no sentido da produção das narrativas escritas e também da troca e compartilhamento de idéias.

Apresentamos, a seguir, as narrativas orais de alguns dos alunos e também algumas considerações sobre o trabalho em grupo, contidos na última narrativa escrita apresentada pelos grupos.

> *"Aprendi muito com o trabalho em grupo, porque,* ***num grupo, temos espaço, principalmente para falar e colocar a nossa opinião****"* (Alison "Só no Rim", grifo nosso).
> *"Trabalhar em grupo é melhor porque podemos dividir as tarefas e também porque podemos* ***apresentar o meu ponto de vista****, importante ou sem importância, o que eu dizia para mim era válido. Foi mais legal"* (Alexandre "Só no Rim", grifo nosso).
> *"Desde a primeira tarefa, fiquei encantada com a maneira que estávamos aprendendo Matemática e, também, com a forma que o meu grupo se integrou.* ***Aprendi com esse trabalho o quanto é importante nos relacionarmos com os outros, de modo a enxergar o outro como um ser humano complexo e cheio de características distintas****"* (Raissa "Star Girls", grifo nosso).
> *"Aprendi com esse trabalho que a vivência no nosso grupo se deu de forma cada vez mais intensa. Aprendi a relaxar dentro do grupo, conduzir, me deixar levar, agir espontaneamente e* ***refletir sobre tudo isso****, levando em conta as sensações que me foram despertadas e que me fez despertar"* (Priscila "Star Girls", grifo nosso).
> *"Eu gostei de trabalhar em grupo, pois acho que podemos aprender melhor nos grupos porque* ***podemos trocar de idéias e assim aprender sempre****. Assim, acho que o trabalho de grupo só tem vantagens, permitindo aumentar a nossa aprendizagem e divulgar as nossas idéias"* (Danilo Maciel "Scoob–Dôo", grifo nosso).
> *"Acho que é bom trabalhar em grupo, pois* ***podemos discutir as questões*** *e também porque duas cabeças pensam melhor do que uma. É bom trabalhar em grupo, porque saímos da rotina das aulas. O trabalho do meu grupo em geral, correu bem. No entanto, alguns componentes do grupo percebem um pouco menos que os outros porque não tem a devida atenção ao trabalho, mas sozinhos aprenderiam bem menos. Meu grupo não achou as tarefas difíceis, mas se estivéssemos realizando-as sozinhos, alguns componentes do grupo teriam grande dificuldade. Concluindo, acredito que o trabalho do grupo serve também como uma boa forma para ajudar aqueles que não estão tão dentro da matéria"* (Luis Victor "Los Hermanos").
> *"Achei o trabalho em grupo bastante importante, pois aprendi a dividir tarefas e trabalhar com organização, mas tudo isso implica que todos os elementos do grupo se apliquem no trabalho, trabalhando todos com o mesmo empenho. O trabalhar em grupo além de ser importante é também bastante interessante, pois é mais fácil resolver um problema quando estão três ou quatro pensando sobre o problema. É uma maneira diferente de estudo que acho que deve continuar a fazer, no meu ponto de vista"* (Igor "Los Herrmanos").
> *"O trabalho realizado em grupo é interessante pelo fato da* ***troca e da discussão de idéias, o que em minha opinião é muito importante para a aprendizagem, e também porque temos que ser nós a explicar para o resto da turma, a forma de nós resolvemos as atividades****. Em minha opinião, o trabalho de grupo é muito*

> *importante e que nessas aulas correram muito bem"* (Edson "Scoob–Dôo", grifo nosso).
> *"Gostei de trabalhar em grupo, pois acho que aprendemos uns com os outros. No nosso grupo, todos os elementos participaram ativamente e isso é para mim importantíssimo porque dividimos as questões e depois* ***nos ajuntamos para discutir e para ver se a questão feita por cada um, estava correta ou não.*** *Trabalhar desta maneira é legal, porque conhecemos melhor nossos colegas e melhoramos nosso relacionamento com eles"* (Letícia "Café com Leite", grifo nosso).
> *"Achei o trabalho em grupo bastante interessante, apesar do funcionamento do meu grupo não ser dos melhores. Gostei especialmente da parte de cada um ir apresentar o seu trabalho ao quadro, pois assim podemos ver vários processos de resolução que até aí não nos tínhamos apercebido. Eu gostaria de continuar trabalhando em grupo mais vezes, mas com uma maior responsabilidade de todos os componentes"* (Fernando Gasques "3F Tartaruga").
> *"Gostei do trabalho de grupo, mas não é propriamente a minha tarefa preferida na sala de aula. Gostei também das apresentações das atividades a turma. Aprendi com este trabalho, mas nem sempre a explicação e exposição dos meus colegas eram satisfatórias deixando algumas dúvidas"* (Tâmara "Esquadrão da Morte").

Ao analisarmos estas narrativas, percebemos que os alunos evidenciaram a importância de se relacionarem com os outros no processo de aprendizagem. Nessa perspectiva, Alro e Skovsmose (2002), Ponte et al. (1998) também destacam a importância das interações para a aprendizagem matemática, pois as interações aluno–aluno em uma aula de investigação em trabalho de grupo são potencialmente mais ricas do que em uma aula organizada de uma forma tradicional. Assim, corroborando com essas idéias, Martinho (2004) afirma que,

> As interações entre alunos provocam discussões estimulando-os a novas descobertas e permitindo que construam um conhecimento mais sólido. Por outro lado, os alunos sentem-se mais confortáveis a falar em pequeno grupo do que em grande grupo (LESTER 1996 apud MARTINHO 2004, p. 20).

Complementando essas idéias, concluímos que, aprendendo em um ambiente colaborativo, os alunos se sentem cada vez mais à vontade para utilizarem a linguagem matemática, pois,

> Ao falarem e ouvirem os colegas, os alunos vão clarificando os significados das palavras bem como os seus pensamentos e idéias e, além disso, o conhecimento pessoal, ao ser combinado com o conhecimento dos outros, torna-se útil. Efetivamente, quando os alunos trabalham em grupo, a participação torna-se mais espontânea (MARTINHO 2004, p. 20).

Consideramos que essas narrativas emergiram de processos reflexivos na interação do pesquisador com os grupos e das interações dos alunos com os próprios alunos. Assim, concluímos que a dinâmica de grupo aplicou técnicas que incluíram o desempenho de papéis,

de discussões em grupo, de observação e, principalmente, de “feedback”, ou seja, de mútuas interações e interlocuções entre os participantes.

Uma outra categoria evidenciada por nós, na presente pesquisa constitui-se na relação professor/alunos.

5.2.4. Relação Professor/Alunos

Essa categoria relaciona-se às interlocuções do professor/pesquisador e os alunos no desenvolvimento desta pesquisa. Assim, as relações existentes entre o professor/pesquisador e os alunos durante a realização das oito tarefas exploratório-investigativas apresentaram alguns aspectos que contribuíram para a compreensão dos alunos do conceito de Função e influenciaram a aprendizagem dos alunos e também contribuíram para o desenvolvimento dos episódios de ensino.

Entendemos, com base nessa experiência, que, para haver essas interlocuções entre professor/pesquisador e os alunos, tornou-se necessário estabelecer interações sociais e afetivas. Enfatizamos a socialização de saberes neste trabalho, pois acreditamos que em sala de aula, as relações existentes entre todos os atores possuem importância. Nesta perspectiva, Alro e Skovsmose (2002) afirmam que o mais importante no diálogo é “a natureza da conversação e a relação entre os participantes” (p. 115).

Para esses autores, a comunicação na sala de aula leva a uma maior participação por parte dos alunos, tornando-os mais responsáveis pela sua própria aprendizagem e menos dependentes do professor.

> Dar oportunidade aos alunos de ouvir os colegas e conferir sentido aos conceitos promove o desenvolvimento da autonomia em Matemática, uma vez que esta está intimamente ligada ao desenvolvimento da capacidade de raciocínio e da auto-confiança (MARTINHO 2004, p. 22).

Um exemplo disso pode ser evidenciado durante a realização da primeira tarefa exploratório-investigativa – **Uma Fábula Matemática** - quando os alunos criaram uma história e nos chamava em muitos momentos durante a elaboração da história e da representação gráfica da mesma, para ver se as histórias e as representações estavam ficando boas, e também para dar uma opinião, sobre os caminhos que suas histórias estavam tomando. Por meio dessas narrativas, percebemos que quando nós professores propomos tarefas que levam em consideração as características dos alunos, seus interesses e suas formas de

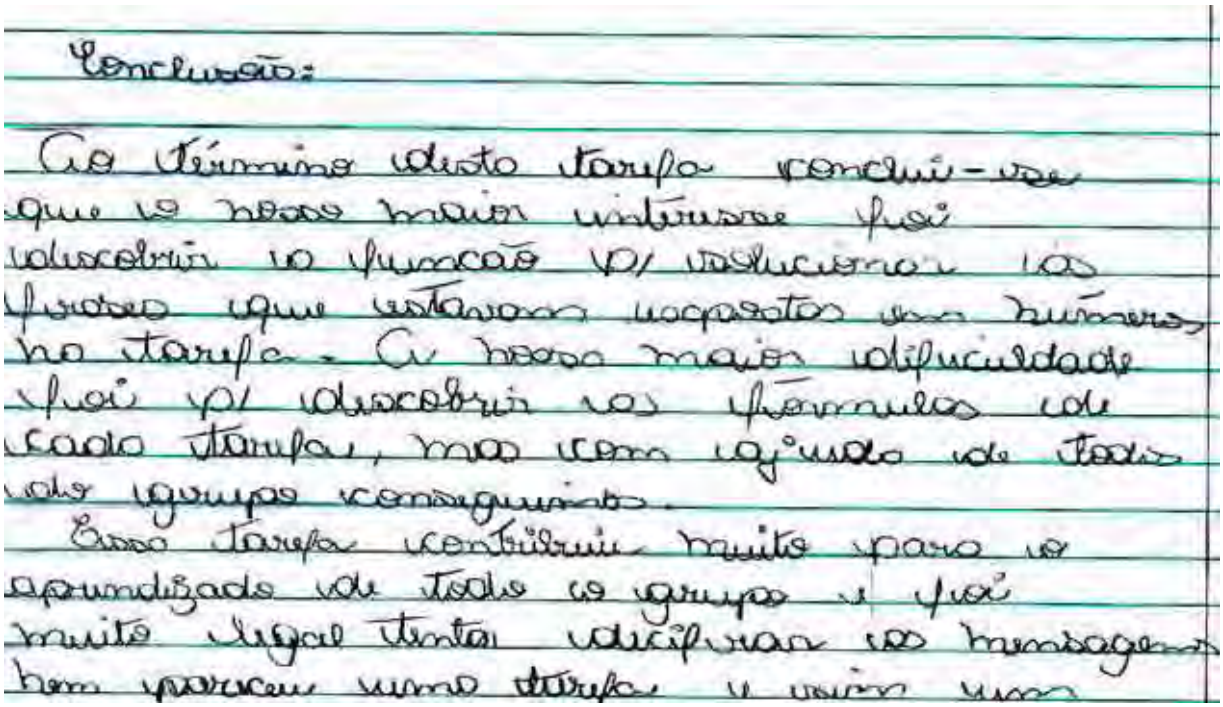
aprender, estas poderão possibilitar indícios de um interesse maior por parte dos alunos e, consequentemente uma aprendizagem mais significativa.

Um outro aspecto que contribuiu nos episódios de ensino relacionou-se ao clima de amizade entre professor/pesquisador e alunos e o espírito de contribuição por parte dos alunos para com o trabalho do professor/pesquisador. Essa vontade pode ser evidenciada na narrativa do aluno Edson ao refletir sobre a quarta tarefa exploratório-investigativa – **A lenda do Jogo de Xadrez e as Funções**.

> *"Uma coisa legal é investigar os problemas e solucioná-los com nossas próprias idéias, nossas bases sobre a matemática. Estamos gostando do trabalho e* ***esperamos que seja satisfatório e importante para os alunos e para o nosso amigo e orientador Márcio Urel"*** (Edson, grupo "Scoob-Doo", grifo nosso).

Um outro episódio que evidencia esse bom relacionamento entre os participantes do contexto desta pesquisa aconteceu durante a realização da oitava tarefa exploratório-investigativa – **Criptografando Mensagens e as Funções**, quando o professor solicitou aos alunos que enviassem uma mensagem criptografada para o professor decodificar. Essas mensagens foram produzidas nos episódios de ensino destinadas à elaboração das narrativas escritas e às apresentações das discussões da classe.

Apresentamos, a seguir, algumas conclusões dos grupos implícitas em suas narrativas escritas e também uma mensagem enviada para o professor decodificar.


Conclusão:

Ao término desta tarefa conclui-se que o nosso maior interesse foi descobrir a função p/ resolvermos os furos que estavam ocupados com números na tarefa. A nossa maior dificuldade foi p/ descobrir as fórmulas de cada tarefa, mas com esforço de todos do grupo conseguimos.

Essa tarefa contribuiu muito para o aprendizado de todo o grupo e foi muito legal tentar decifrar as mensagens bem parecem uma tarefa e vários um

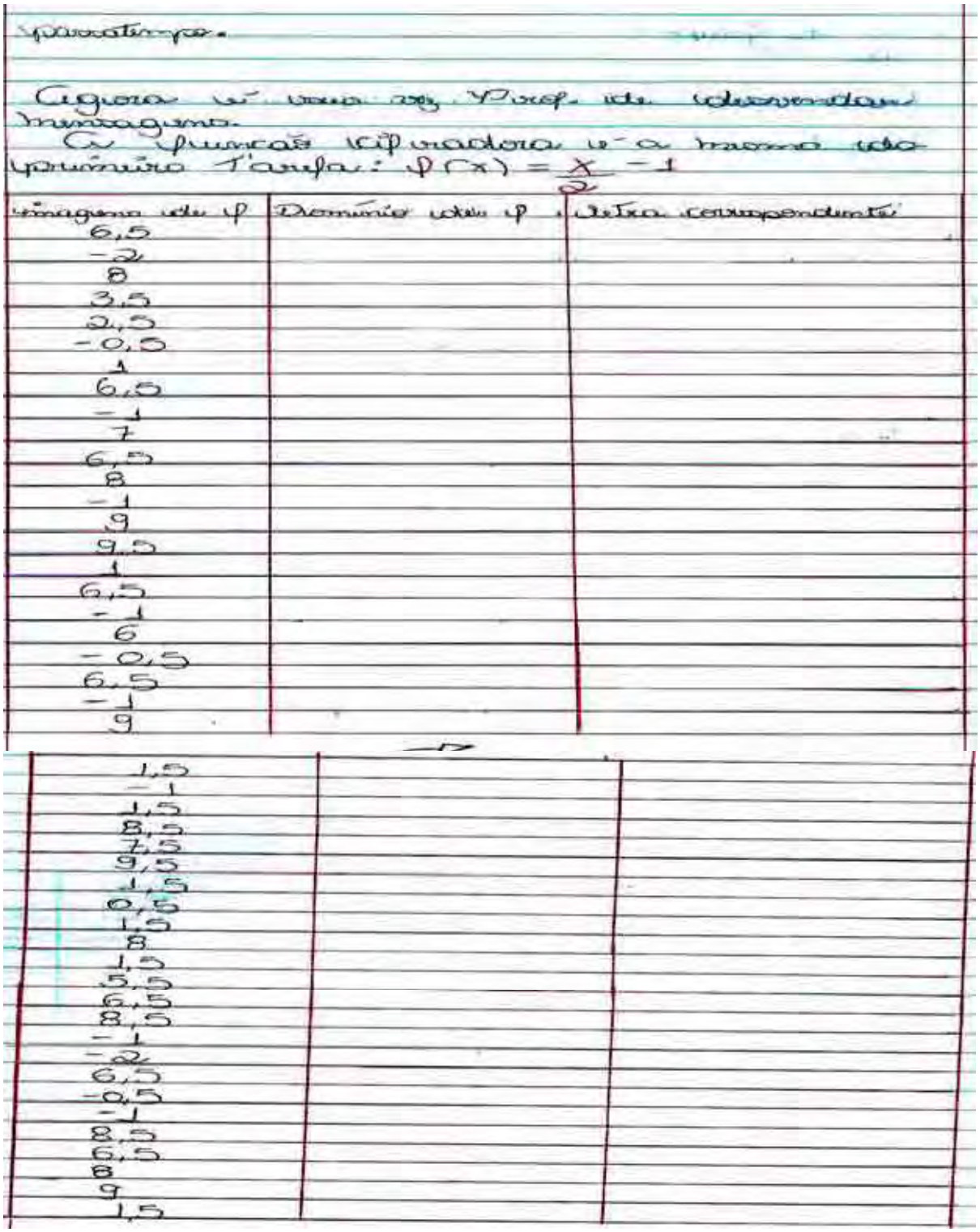


Figura 44: Mensagem codificada para o professor decodificar

Mensagem Decodificada: Obrigado por tudo. Não te esqueceremos, boa sorte.

Dentre as **oito mensagens** que recebemos, ressaltamos essa, pois, ao refletirmos sobre essa mensagem, confessamos que sentimos grande alegria ao recebê-la, pois por meio dessas mensagens concluímos os episódios de ensino felizes em ver o reconhecimento dos alunos

para conosco. Pensamos que o envio dessas mensagens dos grupos para nós decodificarmos significou que eles, além de conseguirem decodificar as suas mensagens, conseguiram também montar algumas estratégias para codificar uma mensagem utilizando o recurso das leis matemáticas. Os alunos valorizaram esses episódios de ensino, considerando que o ensino da Matemática realizado por meio dessa **perspectiva metodológica**, estimula e os obrigam a pensarem sobre as questões exploratórias no contexto das atividades **exploratório-investigativas.**

Durante as interlocuções existentes nos momentos de desenvolvimento e discussão das tarefas exploratório-investigativas, quando colocávamos mais algumas questões referentes às atividades, notamos uma participação ativa ordenada de muitos alunos. Antes dos alunos expressarem as suas idéias, eles levantavam suas mãos acenando que queriam contribuir com as discussões, expondo suas visões sobre os assuntos matemáticos, sendo tão importante o que o aluno pensa ou fala, quanto o que o professor pensa e fala.

O diálogo é importante, porque, muitas vezes, aquilo que o aluno está entendendo não é aquilo que o professor espera que os alunos entendam, dessa forma há um "desencontro" entre professor e aluno. O professor pensa que o aluno está entendendo e, na realidade, o aluno atribui significado diferente à fala do professor. Nesta perspectiva, Huppes (2002) declara que,

> Ao professor cabe buscar os diferentes significados atribuídos à situação matemática pelos alunos e, através do diálogo captar o que realmente o aluno está pensando. Procurar problematizar a situação, criar conflitos, tendo como objetivo a exploração dessas contradições, porque através dos conflitos e contradições melhora a compreensão e a aprendizagem (p. 116).

Na interação entre professor e aluno é de fundamental importância que eles cresçam juntos na busca do conhecimento. Nesta perspectiva, Morales (2000) afirma que "[...] o aluno constrói o seu próprio conhecimento vendo no professor um indicador para a sua caminhada, e não um ditador de regras, um dono da verdade" (p. 35).

Assim sendo, o professor possui o papel de mediador desse processo e não o de agente principal, pois entre aluno e professor deve haver uma interação, propiciando um contexto no qual, o aluno construa o seu próprio conhecimento, percebendo, no professor, um orientador para a sua caminhada. Nesta perspectiva, Delizoicov (2002) afirma que os professores desempenham um papel importante nos processos de aprendizagem dos alunos.

Acreditamos que a interação deva fazer parte da comunicação em sala de aula, de forma a envolver a participação dos alunos em relação ao professor e entre eles próprios.

Nesse sentido, Ribeiro (1996) declara que se deve resgatar a competência e superar a comunicação unilateral, sendo o professor um mediador "[...] num conjunto que engloba ações do professor, reações dos alunos a estas ações, reações do professor às ações dos alunos e reações dos alunos entre si" (p.16).

Rego (1995) também argumenta sobre essas idéias de Vygotsky afirmando que o desenvolvimento do ser humano acontece a partir das interações sociais estabelecidas.

> Na perspectiva de Vygotsky, construir conhecimentos implica uma ação partilhada, já que é através dos outros que as relações entre sujeito e objeto de conhecimento são estabelecidas. O paradigma esboçado sugere, assim, um redimensionamento do valor das interações sociais (entre os alunos e o professor e entre as crianças) no contexto escolar. Essas passam a serem entendidas como condição necessária para a produção de conhecimentos por parte dos alunos, particularmente aquelas que permitem o diálogo, a cooperação e a troca de informações mútuas, no confronto de pontos de vista divergentes e que implicam a divisão de tarefas onde cada um tem a sua responsabilidade que, somadas, resultarão no alcance de um objetivo comum. Cabe, portanto, ao professor não somente permitir que elas ocorram, como também, promovê-las no cotidiano das salas de aula (REGO, 1995, p.110).

Concluímos que as interlocuções entre professor/pesquisador e os alunos foram fundamentais para o desenvolvimento dos episódios de ensino. Sentimos que a quantidade e a qualidade da evolução dos alunos dependeram de muitos fatores inclusive da maneira como os alunos interagiram com o professor/pesquisador, na realização das tarefas exploratório-investigativas.

CAPÍTULO VI

CONSIDERAÇÕES E REFLEXÕES FINAIS

Começamos este capítulo recordando a **questão investigativa**, os **objetivos** e a **metodologia** adotada em nossa pesquisa. Seguidamente, apresentamos algumas considerações e reflexões provenientes da análise dos dados referentes às narrativas como uma forma de viabilizar a comunicação em sala de aula, por meio das Investigações Matemáticas no processo de ensino e aprendizagem do conceito de Função.

Esta pesquisa focou-se em torno das narrativas dos alunos durante a realização de tarefas exploratório-investigativas envolvendo o conceito de Função, na qual procuramos investigar e compreender, **"Quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no contexto do ensino de funções?"** Desta maneira, objetivamos **investigar e ressaltar as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no processo de ensinar e aprender o conceito de Função.**

A natureza do objeto de estudo, direcionou-nos para nossa imersão no ambiente de investigação, ou seja, a sala de aula. Assim, optamos por usar uma abordagem de pesquisa qualitativa, de natureza interpretativa, na qual utilizamos as narrativas dos sujeitos como objeto de análise da pesquisa.

Realizamos a coleta de dados com os alunos da turma de 8ª série do Ensino Fundamental do Colégio Adventista de Barra do Bugres – MT, no ano de 2005, para desenvolvermos as oito tarefas de natureza exploratório-investigativas, com o intuito de coletar os dados desta pesquisa.

A análise dos dados foi fundamentada considerando o objetivo desta pesquisa e os aspectos que emergiram do contexto investigado. Assim, a nossa interpretação dos dados foi direcionada pela formulação de algumas **categorias de análise**, objetivando delinear respostas à questão investigada. As categorias que surgiram, na presente pesquisa, a partir da descrição e da análise interpretativa das narrativas dos alunos foram classificadas na **perspectiva conceitual** e na **perspectiva metodológica**. Essas duas perspectivas incidiram sobre algumas potencialidades das narrativas na promoção dos processos de argumentação e justificação dos sujeitos quando envolvidos em um contexto de Investigações Matemáticas.

Finalizamos este capítulo, apresentando algumas reflexões sobre os episódios de ensino realizados, apontando algumas possibilidades para o trabalho dos professores e, ambas apontando ainda para perspectivas de investigações futuras.

6.1. Considerações Reflexivas dos Episódios de Ensino Realizados

Por meio da realização das tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas nos episódios de ensino, percebemos que a prática das narrativas em sala de aula foi significativa para o processo de ensino e aprendizagem de Funções. **As narrativas foram vistas como uma forma de viabilização da comunicação das idéias matemáticas dos alunos e da comunicação entre os alunos em seus grupos e com o professor/ pesquisador.**

Desta maneira, os alunos foram colocados no centro da ação, discutindo e refletindo sobre seus próprios processos de aprendizagem, pois, através das suas narrativas, a respeito de seus próprios pensamentos e entendimentos, o professor/pesquisador percebeu o que eles, de fato, aprenderam durante a realização desta pesquisa.

Durante os quarenta episódios de ensino realizados, percebemos que aliar tarefas exploratório-investigativas às narrativas dos alunos em aulas de Matemática propiciou pára os alunos um espaço de manifestações de entendimentos e de criatividade em um ambiente de interação. Neste cenário, aconteceram discussões matemáticas entre os alunos, a partir da cooperação mútua. Assim, enfatizamos que as tarefas de natureza exploratório-investigativas representaram aos alunos oportunidades de aprendizagem sobre algumas idéias relacionadas ao conceito de Função.

As tarefas de natureza exploratório-investigativas desenvolvidas nos episódios de ensino proporcionaram aos alunos oportunidades para formularem suas conjecturas e justificá-las através das suas narrativas, contribuindo e influenciando para o seu desempenho cognitivo e também para o desenvolvimento de suas capacidades de argumentação, e justificação.

Através da realização desta pesquisa, envolvendo as **narrativas** dos alunos no processo de ensino e aprendizagem do conceito de **Função**, pudemos evidenciar algumas potencialidades didático-pedagógicas das **narrativas**, pois, nos episódios de ensino, percebemos que os alunos argumentavam e justificavam seus caminhos realizados na exploração das tarefas. Além disso, queriam saber os motivos que levaram os outros alunos a criarem certas estratégias no processo de resolução das tarefas **exploratório-investigativas**.

Assim, essa **experiência** com as **narrativas** por meio das **Investigações Matemáticas**

revelou-nos que a utilização das **narrativas** nas aulas de Matemática proporcionou momentos de interações e interlocuções entre os participantes, aluno-aluno e aluno-professor. A utilização das **narrativas** orais dos alunos proporcionou ao professor a compreensão do domínio conceitual que os alunos adquiriram no processo de resolução das tarefas, pois, eles apresentavam, por meio das **narrativas** orais, os processos relacionados à compreensão de determinados conceitos.

A utilização das **narrativas** escritas dos alunos proporcionou aos alunos momentos para "pensarem sobre os seus modos de pensar", ou seja, para refletirem por escrito a respeito de seus raciocínios implícitos, tornando-os seres **epistemológicos**. Dessa maneira, as **narrativas** com suas **possibilidades didático-pedagógicas**, podem ser entendidas como uma dimensão educativa, na qual, veiculam-se valores e capacidades comunicativas, pois foram através das narrativas que os alunos defenderam as suas idéias, justificando seus pontos de vista e, também argumentaram em situações de confrontos.

Durante os episódios de ensino realizados, tomamos a postura de deixar que os alunos comunicassem suas idéias, pois queríamos propiciar um contexto que pudessem desenvolver nos alunos o espírito investigativo. Percebemos que, aos poucos, os alunos foram despertando para esse **espírito investigativo**, pois passaram a formular de maneira autônoma suas conjecturas, validando e testando várias hipóteses e conjecturas. Desta forma, os alunos revelaram persistência na procura de novos caminhos, quando um contra-exemplo invalidava a sua conjectura. Contudo, foi na realização das últimas tarefas que ficou mais evidente a tomada de consciência por parte dos alunos, da importância que as suas narrativas possuíam na justificação e argumentação dos seus pontos de vista.

As tarefas exploratório-investigativas apresentadas aos alunos contribuíram para com o processo de aprendizagem dos alunos, pois provocaram, em alguns momentos, conflitos e questionamentos fazendo com que eles refletissem sobre as estratégias escolhidas. Através destes momentos, notamos, ao analisar e interpretar as narrativas dos alunos, que suas "vozes" foram importantes e que devem ser consideradas pelo professor na sala de aula como um elemento que contribui para a aprendizagem dos alunos.

Os alunos valorizaram esses episódios de ensino, pois consideraram que o ensino de Matemática realizado por meio das investigações matemáticas, estimula-os a pensarem sobre as questões abertas dos problemas. Segundo os alunos, um espírito investigativo traz empenho e motivação, e assim, eles podem explorar os diversos caminhos no processo de resolução das tarefas.

Nesta perspectiva, Ponte (2003) destaca as **investigações matemáticas**, como perspectiva metodológica que favorece um ensino e uma aprendizagem genuína, em que os alunos são convidados a serem verdadeiros matemáticos em busca de conjecturas e resultados.

Concluímos que, desenvolver o ensino de Matemática, utilizando as narrativas dos alunos, juntamente com as tarefas exploratório-investigativas, promoveu uma **cultura diferenciada** na sala de aula, pois as vozes, os diálogos, as discussões e as interlocuções realizadas durante os episódios foram valorizadas.

Entendemos que, desenvolver uma cultura diferenciada em sala de aula consiste em "dar voz" aos alunos. Desta maneira, a utilização das narrativas dos alunos contribuiu para o desenvolvimento da cultura de argumentação em sala de aula. Sendo assim, o que deve estar em pauta, na sala de aula, não é somente um determinado conteúdo, mas, sobretudo, aspectos comunicativos devem ser desenvolvidos, como forma de argumentação e de justificação.

A articulação dos momentos de apresentação dos alunos para a turma toda foi estimulante, pois, percebemos que os alunos se sentiram motivados e desafiados a participarem ao exporem suas idéias quando lhes são dadas atenção e significância às suas "vozes". Estamos cientes de que não foi possível atingir a todos, mas todos os alunos se empenharam e aprovaram essa maneira de conceber o ensino de Matemática.

A respeito dos momentos de exposição, discussão e reflexão dos grupos, consideramos importante a declaração do aluno Neto, ao argumentar sobre uma das tarefas,

> *"Nessas tarefas o interessante é que vemos que realmente as coisas vão acontecendo numa certa regularidade, aí é só encontrar a fórmula e, além do mais a fórmula aqui nós vemos da onde ela aparece, em vez de inúmeras fórmulas matemáticas que existem que nós não sabemos para que serve e nem como elas aparecem"* (Neto, grupo "Os Orientais").

Por meio desta narrativa, percebemos a maneira positiva com o qual este aluno experienciou o ensino da Matemática por meio de Investigações Matemáticas e com as narrativas para comunicar suas compreensões. Assim, todos os grupos tiveram oportunidades para exporem suas opiniões pelo menos uma vez, na qual apresentava para toda a turma as estratégias utilizadas por eles e, por sua vez, os outros grupos, puderam questionar os raciocínios e as estratégias utilizadas pelo grupo que estava apresentando.

Desta maneira, concluímos que a realização dos momentos de reflexão foi fundamental para que os alunos percebessem o que estavam realizando e, assim conseguiram compreender, com toda a extensão, a validade, ou não, de uma opção tomada. Esses

momentos foram importantes para os alunos prolongarem as suas investigações, promovendo mais o uso de suas narrativas orais.

Nesta perspectiva, Ponte (2000) destaca o papel das narrativas orais em sala de aula, pois, segundo ele, devia-se dar mais atenção ao papel da oralidade pedindo aos alunos para fazerem apresentações e criando momentos de discussões coletivas.

Também se torna importante dar mais ênfase à atividade argumentativa dos alunos no processo de ensino e aprendizagem. Assim, as apresentações dos alunos aconteceram com o intuito de socializar as idéias de um grupo com o restante da turma, em que este grupo argumentava e justificava seus percursos nas explorações e investigações das tarefas realizadas.

Também ficamos com a percepção de que alguns alunos revelaram algumas dificuldades de comunicação e organização nos processos de raciocínio, mas que com a continuação deste tipo de trabalho, esses alunos tenderam a evoluir, desenvolvendo suas capacidades de comunicação e argumentação.

Com essas perspectivas, a partir da análise e da descrição dos dados coletados, emergiram nesta pesquisa a **perspectiva conceitual** e a **perspectiva metodológica**. Assim, vamos tecer primeiramente reflexões sobre a **perspectiva conceitual**.

6.2. Considerações sobre a Perspectiva Conceitual

Consideramos nesta pesquisa, a perspectiva conceitual como sendo caracterizada pela relação envolvendo os alunos com alguns aspectos detectados durante a realização dos episódios de ensino. Dentre estas, ressaltamos as **relações dos alunos com os conceitos matemáticos,** com os **processos reflexivos/meta-reflexivos**, com as **Investigações Matemáticas e tarefas exploratório-investigativas** e com as **narrativas**.

Na **relação dos alunos com os conceitos matemáticos**, as narrativas dos alunos evidenciaram as suas compreensões sobre o conceito de Função e sobre outros conceitos matemáticos que emergiram nesse contexto de pesquisa. Assim, concluímos que os alunos apresentaram indícios de aprendizagens, envolvendo as idéias fundamentais do conceito de Função discutidas nas tarefas exploratório-investigativas desenvolvidas.

Os alunos mostraram, em suas narrativas, que conseguiram compreender durante os episódios de ensino algumas idéias envolvendo o conceito de Função. As idéias mencionadas pelas narrativas dos alunos foram: dependência entre duas grandezas, variação na interpretação de gráficos, generalização de leis (expressão analítica), correspondência entre

duas grandezas, à idéia de regularidade, comportamento de uma Função, a idéia de transformação de uma Função e de Função inversa. Concluímos que as idéias de dependência e de correspondência foram as mais evidenciadas pelos alunos.

Na **relação dos alunos com os processos reflexivos/meta-reflexivos**, as narrativas dos alunos apresentaram reflexões sobre os seus próprios processos de aprendizagem. Percebemos que os alunos utilizaram as suas narrativas escritas como uma maneira para apresentarem as suas reflexões sobre as suas conclusões. Os momentos de reflexão foram considerados pelos alunos como importantes, pois estes foram momentos destinados à produção das narrativas escritas, nas quais os alunos registravam, por escrito, o que estavam aprendendo. Os alunos evidenciaram em suas narrativas escritas que o ato de refletir sobre cada tarefa exploratório-investigativa contribuiu para seus processos de aprendizagem.

Na **relação dos alunos com as Investigações Matemáticas e as tarefas exploratório-investigativas**, os alunos destacaram, em suas narrativas, as potencialidades das tarefas exploratório-investigativas para os seus conhecimentos matemáticos. Assim, a natureza das tarefas exploratório-investigativas revelou ter uma grande influência nas narrativas dos alunos, pelo fato delas possuírem características propícias para a exploração e investigação matemática. Notamos que a sua natureza contribuiu para o desenvolvimento das narrativas dos alunos com o passar dos episódios de ensino, assim como afirmam Silva Miskulin e Escher (2006).

Esses pesquisadores afirmam que em atividades exploratório-investigativas “os alunos envolvem-se em processo de soluções, buscando estratégias próprias, experimentando conjecturas e hipóteses a respeito das diversas partes que compõem o problema, discutindo-as com seus colegas e reelaborando-as no contexto prático no qual se insere o problema” (p. 3).

Essa experiência com as tarefas de natureza exploratório-investigativa mostrou-nos que estas possibilitaram aos alunos a oportunidade de vivenciar uma Matemática em constante evolução, em um mundo cada vez mais matematizado. Entendemos ser importante introduzir tarefas de natureza exploratório-investigativa na prática pedagógica do professor de todos os níveis, proporcionando um envolvimento do professor com os alunos.

Esta experiência, tendo as tarefas exploratório-investigativas como ponto de partida, nos comprovou que as **Investigações Matemáticas** exigem outras atitudes dos alunos em sala de aula, pois eles passam a se responsabilizar pelos seus resultados obtidos e, também por seus próprios pensamentos. Sendo assim, o professor, ao conduzir o processo educativo, é importante enfatizar em sua ação didática tarefas de natureza exploratório-investigativas, pois representam, a nosso ver, oportunidades de aprendizagem aos alunos. É importante que o

professor instigue os alunos em sala de aula para produzirem **narrativas** sobre diversos conceitos matemáticos, pois assim sendo, estará propiciando um contexto de ensino capaz de provocar as potencialidades comunicativas dos alunos.

Dessa maneira, evidenciamos que os sujeitos da pesquisa gostaram das tarefas **exploratório-investigativas,** pois se envolveram de tal forma que as suas posturas foram se modificando e, aspectos como autonomia, senso crítico, entre outros foram percebidos com o passar dos episódios de ensino.

Na **relação dos alunos com as narrativas**, destacamos que as narrativas orais e escritas se completam, pois, além dos alunos discutirem sobre as questões, refletiam por escrito sobre as conclusões que emergiram de cada tarefa **exploratório-investigativa** (**narrativa** escrita).

As **narrativas** foram fundamentais para a constituição dos momentos de **discussão** e **reflexão**, pois elas viabilizaram a comunicação das idéias matemáticas dos alunos, falando ou escrevendo. Assim, ao recorrermos às **narrativas** como forma de comunicação sobre a situação vivenciada e ao atribuirmos a elas significados, tornou-se necessário, considerarmos a interação com o outro, com a palavra, com a fala, que envolve o gesto, com a capacidade de ouvir e de descrever as experiências vivenciadas e analisadas.

6.3. Considerações sobre a Perspectiva Metodológica

Consideramos, nesta pesquisa, a **perspectiva metodológica** como sendo caracterizados pelos aspectos metodológicos presentes na interação professor/professora; professor/alunos; professor/tarefas exploratório-investigativas e professor/narrativas. Assim, ressaltamos as seguintes **categorias**: a **mediação do professor**, a **dimensão colaborativa**, a **dimensão interativa** e as **relações entre professor/aluno**.

A **mediação do professor** relacionou as experiências docentes do professor/pesquisador ao conduzir o processo investigativo nos episódios de ensino, procurando possibilitar um contexto propício à exploração e constituição do conceito de Função.

Com base em nossa análise interpretativa, afirmamos que a mediação do professor influenciou na aprendizagem dos alunos, pois coube ao professor coordenar e mediar todo o processo de ensino e aprendizagem. Nossa interpretação está ancorada nas idéias de mediação apresentadas por Vygotsky (1998), pois este autor destaca a importância da mediação e das interlocuções entre professores e alunos em sala de aula.

Nesta pesquisa, sentimos que, por meio da nossa mediação, sempre com o papel de problematizador e moderador das discussões, os alunos participaram apresentando as suas narrativas, comunicando, assim, aos demais alunos da turma as suas idéias referentes ao conceito de Função.

A **dimensão colaborativa** relacionou as interações acontecidas entre o pesquisador e a professora da classe escolhida e a maneira como ambos vivenciaram a experiência com as narrativas, no contexto das Investigações Matemáticas, na presente pesquisa. A interação que tivemos com a professora da turma nos momentos de realização dos episódios de ensino e também nos momentos de preparação e reflexão das tarefas exploratório-investigativas foi de fundamental importância.

Desta maneira, afirmamos que o compartilhamento de experiências entre professores contribuiu para as reflexões da nossa própria prática, pois ao dialogarmos com outros professores, eles poderão nos apresentar um outro olhar sobre a nossa postura pedagógica. Esse outro olhar poderá influenciar a maneira como conduziremos nossas aulas no futuro, redimensionando a nossa **prática pedagógica.**

A **dimensão interativa** relacionou as interlocuções e o compartilhamento de idéias, conceitos matemáticos e experiências vividas pelos alunos em seus grupos na composição das narrativas. A interação dos alunos nos grupos influenciou a elaboração das narrativas escritas, na realização das tarefas **exploratório-investigativas**. Através das interações dos alunos em seus grupos, constatamos que eles criaram uma dinâmica interativa diferente do seu modo habitual. Esta diferença parece ser responsável pelo seu desenvolvimento cognitivo e social, já que proporcionou aos alunos a elaboração de hipóteses, a levantarem conjecturas, e justificarem e argumentarem seus pontos de vista.

Desta maneira, os alunos aprenderam a respeitar seus novos ritmos de trabalho e dos outros, além de desenvolverem-se nas capacidades, que anteriormente não sabiam e nem conheciam, tais como: liderança e de comunicação. A importância de se trabalhar em grupo foi ressaltada por todos os participantes dos grupos e, confirmou-se em uma das estratégias adotadas em sala de aula.

Apresentamos, a seguir, uma narrativa escrita reflexiva do grupo Café com Leite.

> *"O trabalho em grupo é importante porque aprendemos a trabalhar sem a presença do professor para explicar e mostrar a solução dos problemas. Confessamos que é um pouco difícil aprender por nós próprios, mas é muito bom porque desenvolvendo assim muitas das nossas qualidades e também a nossa autonomia."*

Concluímos que possibilitar o trabalho coletivo em sala de aula pode trazer ganhos palpáveis tanto para os professores quanto para os alunos. O professor, trabalhando nessa perspectiva, vai deixar de ser aquele tipo de professor que apenas expõe o conteúdo à classe e, passará a desenvolver a função de mediador e organizador do processo educativo. Os alunos percebem que, além de buscarem soluções para as situações propostas, deveriam cooperar para resolvê-la. Desta maneira, os laços afetivos entre eles se estreitaram, tornando mais proveitosas as atividades, pois, a habilidade em se expressar e, em compreender o pensamento do colega se desenvolveu de forma plena.

A **relação professor/alunos** caracterizou-se pelas interlocuções entre o professor/pesquisador e os alunos no desenvolvimento desta pesquisa. Assim, as relações existentes entre o professor/pesquisador e os alunos durante a realização das tarefas exploratório-investigativas, apresentaram alguns aspectos que contribuíram para a compreensão dos alunos do conceito de Função e influenciaram no desenvolvimento dos alunos e também no bom desempenho nos episódios de ensino.

Desta maneira, enfatizamos a socialização de saberes neste trabalho, pois acreditamos que, em sala de aula, as relações existentes entre todos os atores do processo educativo possuem importância fundamental, à medida que ambos precisam ouvir o que o outro está a falar e, assim, compartilharem idéias e concepções.

6.4. As Possibilidades Didático-Pedagógicas das Narrativas

Nesta pesquisa, percebemos as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no desenvolvimento de tarefas exploratório-investigativas referentes ao conceito de Função. Mas, afinal, quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas?

A experiência elucidada por nós durante a realização dessa pesquisa com a utilização das narrativas dos alunos em um contexto da perspectiva metodológica de Investigações Matemáticas evidenciou algumas possibilidades e vantagens de integrá-las na sala de aula para se ensinar Matemática. Assim, concluímos que além de ser possível, o professor assumiu essa abordagem metodológica necessária e útil ao desenvolvimento dos alunos.

Continuaremos defendendo experiências pedagógicas diferenciadas para as aulas de Matemática. Essa experiência nos possibilitou a compreensão sobre as **narrativas** e a importância que estas assumem no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Assim, As **narrativas** e as **Investigações Matemáticas** podem ser entendidas como uma alternativa metodológica que o professor pode utilizar para ensinar Matemática.

Entretanto, uma análise mais cuidadosa dessa experiência, como a que foi realizada neste estudo, revela outras potencialidades didático-pedagógicas que as narrativas envolvidas neste contexto possuem, tais como: **por meio das narrativas, os alunos são capazes de "pensar sobre seu modo de pensar", pois tiveram oportunidades para refletirem a respeito dos raciocínios implícitos na descrição de suas estratégias de resolução das tarefas, além de argumentarem para defenderem esses raciocínios;** a **utilização das narrativas nos episódios de ensino proporcionou momentos de interação e interlocuções entre os alunos nos grupos e também entre os alunos e os professores; a utilização das narrativas orais dos alunos nos episódios de ensino possibilitou aos alunos oportunidades para expressarem e comunicarem suas idéias e concepções para os outros alunos a respeito do conceito de Função. Desta maneira, percebemos que, com o passar dos episódios, os alunos utilizaram suas "vozes" para argumentarem sobre suas atividades desenvolvidas de uma maneira mais autônoma e mais crítica; as narrativas dos alunos nos episódios de ensino proporcionaram-nos a percepção e o entendimento do desenvolvimento de algumas habilidades e capacidades dos alunos, tais como: capacidade de argumentações sobre as suas explorações e justificativas e sobre as suas conjecturas; ouvir as narrativas dos alunos proporcionou-nos o entendimento dos diferentes níveis de compreensão e de domínio conceitual adquiridos pelos alunos, pois, através das suas narrativas, eles apresentaram a maneira como compreenderam o conceito de Função; percebemos que os alunos desenvolveram um espírito investigativo com o passar das tarefas exploratório-investigativas, pois eles passaram a formular de maneira mais autônoma suas conjecturas, validando-as através de testes, criando assim, uma cultura diferenciada em sala de aula.**

Dessa maneira, apresentamos as narrativas em sala de aula como uma possibilidade didático-pedagógica e também em uma perspectiva inovadora e educativa. Essa perspectiva relaciona-se à veiculação de valores e de capacidades comunicativas, pois os alunos ao utilizarem as narrativas, precisaram defendê-las em situação de confronto de suas idéias e concepções.

Ressaltamos que o trabalho com as **narrativas** e suas possibilidades didático - pedagógicas contribuiu de muitas maneiras, dentre elas, para uma **cultura diferenciada em sala de aula**, cultura essa que valoriza o que os alunos dizem, expressam e comunicam no desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas.

6.5. As Narrativas e a Cultura da Argumentação

Somos conscientes da existência de uma tradição pedagógica para se ensinar Matemática. Assim, ensinar Matemática em uma perspectiva metodológica diferenciada, ainda é, para nós, um grande desafio, pois confrontamos-nos com a falta de condições e também com a falta de conscientização dos professores e alunos, pois esses, muitas vezes, ainda estão arraigados ao estilo tradicional de ensino e aprendizagem.

Entendemos que as perspectivas metodológicas diferenciadas aparecem para contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, e também representa uma ameaça ao modelo tradicional. Para nós, romper essa tradição é nosso objetivo, mas só seremos ativos neste empreendimento, se estivermos dispostos a enfrentar os desafios que nossa profissão nos proporciona.

Assim, "dar vozes" aos alunos significa desenvolver uma cultura diferenciada em sala de aula. Utilizá-las no processo de ensino e aprendizagem torna-se importante, pois suas "vozes" interagem com as "vozes" de outros, constituindo-se em interlocuções e discussões sobre o tema estudado, além de criar uma cultura diferenciada na sala de aula.

O professor assume e cria uma cultura diferenciada para as suas aulas de Matemática quando proporciona espaço para os seus alunos apresentarem suas idéias e considerá-las com seriedade. Desta maneira, os alunos adquiriram oportunidade de se comunicarem e de se envolverem em atividades de argumentações e defesas de suas idéias matemáticas.

Desenvolver uma cultura de argumentação tem a ver com dar sentido às "vozes" dos alunos em sala de aula e "essas vozes" podem ser destacadas por meio de suas narrativas. Sendo assim, o que está em pauta não é apenas um conteúdo a aprender, mas também aspectos cognitivos devem ser desenvolvidos a partir das formas de expressão, comunicação e argumentação.

Nesta perspectiva, Boavida et al. (2002) afirmam ser importante que os alunos se envolvam em atividades de argumentação, pois através desta

> [...] a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações, a resolução de desacordos através de explicações e justificações convincentes e válidas de um ponto de vista matemático, a formulação e avaliação de conjecturas e a refutação ou prova dessas conjecturas assumem papel importante (BOAVIDA et al. 2002, p. 18).

Durante os episódios de ensino, o confronto de argumentos dos alunos proporcionou a eles oportunidades para que participassem na negociação da resolução das tarefas exploratório-investigativas. Assim, ao descentrarem-se de suas posições iniciais, com o

objetivo de compreenderem os argumentos do parceiro e, simultaneamente, explicarem os seus próprios pontos de vista nos grupos e também durante as apresentações. Desta maneira, notamos que os alunos se envolveram, contribuindo, assim, para o desenvolvimento das suas competências.

Nesta perspectiva, afirmamos que permitir "as vozes dos alunos" no processo de ensino e aprendizagem torna-se importante, pois desenvolver uma cultura de argumentação na sala de aula está relacionado com a utilização das vozes dos alunos, nas quais as narrativas orais e escritas podem ser destacadas.

Por meio das **narrativas**, o que está em causa não é apenas um conteúdo a aprender, mas também aspectos cognitivos e capacidades a se desenvolverem, como formas de expressão e de comunicação. Entendemos que as **narrativas** com suas **possibilidades didático-pedagógicas** influenciaram e contribuíram para a aprendizagem do conceito de **Função** pelos alunos, além de apresentarem indícios de promoção desta cultura diferenciada que valoriza aspectos argumentativos na aula de Matemática.

6.6. Reflexões sobre as Investigações Matemáticas

Destacamos as **Investigações Matemáticas** como uma das perspectivas metodológicas que vem se apresentando no cenário da Educação Matemática. Pesquisas e estudos têm evidenciado que esta perspectiva metodológica contribui para uma melhor compreensão da Matemática por parte dos alunos, em que estes participam ativamente de seus processos aprendizagem, contrariando o ensino tradicional.

Nesta experiência, evidenciamos algumas vantagens de um ensino de Matemática realizado na perspectiva metodológica das investigações matemáticas e a sua diversificação do modelo tradicional de aula, mostrando que tal metodologia é possível, necessária e útil. De acordo com Ponte (2003) as investigações matemáticas, favorecem um ensino e uma aprendizagem genuína, pois, nessas, os alunos são convidados a serem verdadeiros matemáticos em busca de conjecturas e resultados.

Assim, os alunos podem se sentir livres para exporem suas idéias e questões e também os seus resultados, ou seja, utilizarem as suas narrativas em diversos momentos da aula. Assim, cabe ao professor entender o quanto é importante à participação do aluno e, dos seus posicionamentos em um processo investigativo.

Ao professor interessado em desenvolver suas aulas utilizando essa dinâmica, é preciso estudar um pouco mais a respeito das **Investigações Matemáticas**, assim pode-se

utilizar exemplos já estudados e propor aos poucos problemas diferentes e novos. Mas, para que isso ocorra, é preciso não ter medo de tentar novas perspectivas metodológicas. Assim, esperamos que, com esta pesquisa, tenhamos delineado algumas possibilidades didático-pedagógicas das **narrativas** e a importância das tarefas de natureza **exploratório-investigativas** para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Sabemos que não existe uma metodologia de ensino que seja a metodologia ideal para todos os casos, como se fosse uma metodologia modelo. No entanto, existem estratégias de ensino e de organização do trabalho dos alunos mais adequadas do que outras. Sendo assim, tornou-se necessário que o professor conheça diferentes estratégias de ensino para que ele possa diferenciar e escolher qual deve usar em cada situação de ensino.

Em nosso estudo, evidenciamos indícios de que o desenvolvimento de tarefas de natureza exploratório-investigativas em sala de aula representa um contexto rico e desafiador de aprendizagem tanto para o aluno quanto para o professor. Para o aluno. porque este passa a constituir-se em um agente ativo no processo de aprender Matemática, pois tornam-se participantes da produção de suas idéias matemáticas. Para o professor, pois esse pode encontrar nas Investigações Matemáticas uma estratégia metodológica significativa para ensinar, compreender, trabalhar e estabelecer relações com a Matemática, levando os alunos a se interessarem pelos temas e conceitos matemáticos.

6.7. Dificuldades enfrentadas pelo Pesquisador

Enfrentamos algumas dificuldades durante os episódios de ensino, referentes à adesão dos alunos acerca da maneira como estavam sendo conduzidos os episódios. Percebemos nos episódios de ensino desta pesquisa, que a forma como é conduzida uma aula investigativa realmente interfere positivamente no interesse e na motivação dos alunos na busca de novos conhecimentos.

Assim, apresentamos, a seguir, algumas dificuldades que enfrentamos e, também, aspectos que consideramos como obstáculos na realização de aulas investigativa.

O número de alunos em sala de aula é uma das dificuldades enfrentadas pelos professores, para implementar tarefas de natureza exploratório-investigativa. Nos episódios de ensino, a sala de aula tinha vinte e sete alunos, e este número de alunos a nosso ver trata-se de um bom número. Acreditamos que se tivermos mais de trinta alunos por sala, o professor terá alguns outros problemas como indisciplina e falta de motivação. Afirmamos isso, pois em uma aula investigativa, os alunos possuem papéis ativos.

O problema de indisciplina é outra dificuldade que se apresenta em uma aula na perspectiva das investigações matemáticas, pois, com essa dinâmica, os alunos são convidados a agir como pessoas ativas e se procederem desta maneira, eles querem falar o tempo todo, dando suas opiniões, apresentando conjecturas, defendendo suas idéias, suas concepções e interpretações, além de defenderem seus posicionamentos em relação as suas conjecturas.

Nos episódios de ensino, tivemos, em alguns momentos, um certo atropelamento de diálogos, pois em alguns casos, principalmente na tarefa**: A Rivalidade entre Brasil e Argentina**, os alunos queriam apresentar suas argumentações de qualquer jeito, no entanto, percebemos que essas posturas não se caracterizaram como indisciplina.

A elaboração de tarefas investigativas foi uma outra dificuldade que enfrentamos. As tarefas de natureza exploratório-investigativas, envolvendo o conceito de Função, foram elaboradas pensando em contemplar as diferentes idéias que caracterizam esse conceito. Apesar da riqueza desse tema, também existe uma dificuldade em elaborar tarefas considerando essa abordagem.

O tempo foi outra dificuldade enfrentada, pois o tempo disponível para a realização de uma tarefa exploratório-investigativa em sala de aula, muitas vezes, não é suficiente, se formos considerar todos os momentos que se configuram em um episódio de ensino investigativo. O tempo é um "vilão" de todo professor que prepara uma tarefa e determina um tempo limitado para seu desenvolvimento em classe pois, se o professor interromper ou apressar a produção dos alunos, pode representar um retrocesso e uma ameaça à efetiva realização das investigações matemáticas no currículo escolar.

Percebemos nos episódios de ensino, que, quando se trabalha com tarefas de natureza mais aberta, não é possível desenvolver todos os conteúdos do currículo no tempo estipulado. Em nosso caso, o tema Funções teria que ser trabalhado em cinco semanas, isso da forma tradicional. Com a realização desses episódios de ensino foram necessárias oito semanas de aulas, cerca de quarenta aulas para contemplar todo o programa. Queremos deixar claro que acreditamos que é possível trabalhar muitos temas e conceitos durante o ano letivo com tarefas desta natureza e nesta perspectiva metodológica.

6.8. Dificuldades enfrentadas pelos Alunos

Ao longo dos episódios de ensino realizados para a coleta de dados desta pesquisa, presenciamos algumas diferenças de comportamento manifestadas pelos alunos. Quando os

alunos foram confrontados com as tarefas de natureza exploratório-investigativa, que iam desde a curiosidade, ao interesse, passando por momentos de desistência, de angústia, de alegria e, até orgulho ao descobrirem algo. Desta maneira, verificamos que existem diferentes ritmos de trabalho em um episódio de ensino de caráter investigativo.

Notamos que, nas primeiras tarefas exploratório-investigativas, os alunos possuíam idéia de que uma questão possui apenas uma resposta correta. A princípio, a concepção dos alunos era de que eles precisavam apenas encontrar a solução, pois, quando eles encontravam uma resposta, eles logo queriam saber se a resposta estava certa ou errada, e para isso, nos chamavam para verificar se o que haviam feito estava correto ou não.

Essas dificuldades manifestadas pelos alunos na concretização das primeiras tarefas exploratório-investigativas provêm da falta de costume deles com tarefas desta natureza. No entanto, verificamos a evolução do desempenho dos alunos durante a realização das últimas **tarefas exploratório-investigativas** nas próximas tarefas, pois, nessas os alunos já começaram a entender e a adotar seus novos papéis.

Evidenciamos algumas dificuldades na realização das narrativas escritas, pois, os alunos estavam acanhados na elaboração de textos em suas aulas de Matemática. Contudo, o empenho, a atitude e a dedicação dos alunos foram evoluindo de forma positiva, superando as dificuldades iniciais e, originando as narrativas escritas com qualidade. Na tese de doutorado de Freitas (2006), essa pesquisadora também conclui que a escrita dos alunos se desenvolvem, principalmente a escrita reflexiva.

O tempo é outro fator que também influencia no trabalho dos alunos, pois, em algumas situações a falta dele impede a progressão e o aprofundamento das explorações dos alunos. De fato, quando os alunos tiveram algum tempo para elaborarem as suas narrativas escritas, eles conseguiram progredir, prolongando o seu trabalho elaborando narrativas matemáticas mais completas e sofisticadas. O tempo limitado dos episódios de ensino e o prazo dado aos alunos para entregarem as suas narrativas escritas constituem um obstáculo para transpassar.

6.9. Reflexões Finais sobre as Narrativas

Por meio da análise dos dados, percebemos que a prática das narrativas em sala de aula confirmou a teoria sobre a importância da utilização das narrativas como elemento comunicativo nas aulas de Matemática. Assim, as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas apresentadas anteriormente são caracterizadas pelas narrativas elaboradas pelos alunos nos episódios de ensino.

Escolhemos investigar as narrativas dos alunos, pois considerávamos importante utilizar a comunicação em sala de aula, na qual vimos às narrativas como um meio para viabilizar essa comunicação. Entendemos com base nessa experiência que enfatizar aspectos comunicativos em sala de aula, contribui para o trabalho do professor, pois, os alunos ao narrarem seus pensamentos e entendimentos, o professor pode perceber o que eles de fato estão aprendendo. Por meio das narrativas, os alunos são colocados no centro da ação, discutindo e refletindo sobre os seus processos de suas aprendizagens em diferentes momentos da aula de Matemática.

Após termos experienciado essa maneira de conduzir o processo de ensino e aprendizagem, utilizando as **narrativas** em um contexto das **Investigações Matemáticas,** defendemos um Ensino de Matemática voltado para a inclusão de oportunidades de comunicação na sala de aula, nas quais os professores possam criar oportunidades para que os alunos criem, reflitam sobre os seus próprios pensamentos nas situações didáticas, discutindo as idéias matemáticas e construindo suas conjecturas e argumentos.

Nessa perspectiva, concordamos com Cândido (2001), quando argumenta que a ênfase na comunicação na aula de Matemática ajuda a transformar uma situação em que os alunos são dependentes do professor em um ambiente em que os alunos assumem responsabilidade na validação do seu próprio pensamento. Os professores favorecem a comunicação em Matemática através de perguntas ou colocando aos alunos situações exploratórias em que eles se envolvam ativamente, incluindo situações que encorajam os alunos a criarem eles próprios as situações exploratórias.

Na presente pesquisa, as narrativas escritas se realizaram nos momentos finais da fase de desenvolvimento das tarefas exploratório-investigativas. Utilizamos as narrativas escritas dos alunos em todas as tarefas exploratório-investigativas, objetivando propiciar um cenário educativo, no qual os alunos puderam enunciar as diferentes fases de suas investigações, as suas estratégias utilizadas, as suas conjecturas formuladas e verificadas.

Desta maneira, os alunos argumentaram e comunicaram por escrito as suas conclusões. Essas narrativas ajudaram os alunos a compreenderem as idéias relevantes contidas na exploração de cada tarefa exploratório-investigativa e também, contribuíram para o desenvolvimento da capacidade de comunicação e socialização nos grupos. Além disto, constituíram-se em registros importantes acerca da evolução dos alunos.

A utilização das narrativas escritas foi adquirindo maior importância para os alunos com o decorrer do tempo, pois, a grande maioria dos alunos considerou que esta forma de narrativa (escrita) contribuiu para verificar as suas hipóteses e conjecturas para

desenvolverem suas idéias. Foi possível verificar que, com o passar do tempo, as narrativas acabaram sendo bem aceitas pelos alunos, pois o desconforto sentido por alguns alunos no início do trabalho, converteu-se em normalidade contribuindo para que os alunos elaborassem boas e estruturadas narrativas escritas.

As **narrativas** escritas realizadas pelos alunos mostraram que a maior dificuldade enfrentada por eles está associada à organização dos seus raciocínios. Entendemos que essas dificuldades são naturais, pelo fato deles não haverem aprendido na escola, por meio de **Investigações Matemáticas** e nunca terem elaborado textos na disciplina de Matemática. Com o passar dos episódios de ensino, os alunos melhoraram suas capacidades de investigar tendo, conseqüentemente, melhorado a justificação das suas explorações e as suas considerações finais. Nesta perspectiva, Candido (2001) declara que,

> Temos observado que escrever em matemática ajuda a aprendizagem dos alunos de muitas maneiras, encorajando a reflexão, clareando as idéias e agindo como um catalisador para as discussões em grupo. Também ajuda o aluno a aprender o que está sendo estudado (p. 24).

Podemos concluir com esse trabalho que, quando os alunos **narram** como foram os seus desenvolvimentos por meio de **narrativas** escritas, eles refletem sobre toda a tarefa e, esse ato de reflexão, para nós, é o mais importante em uma aula de Matemática.

6.10. Recomendações aos Profissionais da Educação

Com essa pesquisa procuramos investigar "Quais são as possibilidades didático-pedagógicas das narrativas no ensino de Funções?" Assim, recomendamos aos professores, que percebam que as tarefas exploratório-investigativas podem proporcionar aos alunos momentos de verdadeira atividade matemática e, que elas contribuem no processo de ensino e aprendizagem.

Desta maneira, torna-se necessário pensarmos na sua inclusão no desenvolvimento currículo de Matemática. Um elemento fundamental para esta inclusão é o próprio professor, pois ele não deve assumir o currículo como prescritivo, mas como um quadro de referência que pode ser influenciado de acordo com as reflexões que faz de sua prática pedagógica e também, por meio de experiências diferenciadas vivenciadas por ele.

Cada vez mais, parece ser essencial o trabalho colaborativo entre professores, baseado na troca de experiências e na reflexão sobre a prática, de modo a facilitar um maior poder de intervenção daqueles que têm menos experiência e, por outro lado, fazer com que os

professores mais experientes reflitam sobre determinados problemas de suas práticas que, sozinhos, dificilmente o poderiam fazer. Pensamos que a formação de professores deve ser repensada, tanto no que se refere à sua formação inicial quanto à sua formação contínua. É fundamental que, durante a formação inicial, os professores possam envolver em diferentes perspectivas metodológicas.

Neste sentido, Fiorentini (2004), diz que na colaboração, todos trabalham juntos e se apóiam mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo do grupo. Na colaboração as relações, portanto, tendem a ser não-hierárquicas, havendo liderança compartilhada, confiança mútua e co-responsabilidade pela condução das ações.

Esta experiência foi gratificante para nós e, por isso, queremos que nossa pesquisa, não se destine unicamente à comunidade de investigadores, mas também que esta sirva de incentivo para que muitos professores experimentem as potencialidades e as possibilidades didático-pedagógicas das **narrativas**. Desta maneira, esses professores poderão proporcionar aos seus alunos contextos de exploração e de investigação, além de estarem contribuindo para o desenvolvimento de suas capacidades comunicativas.

Defendemos um ensino de Matemática voltado à criação de oportunidades de comunicação em sala de aula, nas quais os alunos possam vivenciar contextos em que para criarem, refletirem e, clarificarem seus próprios pensamentos a respeito das situações de ensino. Desta maneira, a discussão sobre as idéias matemáticas e a apresentação de argumentos convincentes para suas conjecturas possuem real significância. Sendo assim, a capacidade de comunicar-se e a validação de suas soluções, ajudarão aos alunos a desenvolverem com mais profundidade as suas compreensões dos conceitos matemáticos estudados.

Nas **Considerações Finais**, cabe a nós refletirmos sobre o trabalho do professor na sala de aula e para a investigação neste cenário. Nossa pesquisa é recomendada para aqueles professores que estão interessados em ensinar o conceito de **Função** de uma maneira diferenciada e, sendo assim, possibilitarem aos seus alunos oportunidades de desenvolvimento de algumas capacidades comunicativas.

Nesta pesquisa, verificamos ser possível recorrer a perspectivas metodológicas diferenciadas e aplicá-las em nossas aulas de Matemática. Assim, esperamos que esta pesquisa contribua para a Educação Matemática, pois, abordamos as temáticas das **narrativas** (SCHEFFER, 2001, FREITAS, 2006 e outros) e das **Investigações Matemáticas** (Ponte, 2003) relativamente recentes para o contexto da sala de aula.

6.11. Reflexões Finais da Pesquisa

O ponto de partida para esta dissertação consistiu em investigar as **narrativas** dos alunos envolvidos em tarefas **exploratório-investigativas**, pois queríamos experenciar uma **cultura diferenciada** de aula de Matemática, na qual os alunos fossem ativos e, desenvolvessem hábitos comunicativos ao exporem os seus raciocínios matemáticos utilizados na resolução das tarefas **exploratório-investigativas**.

Desta maneira, concluímos que a utilização das **narrativas** dos alunos em aulas de Matemática em um contexto de **Investigações Matemáticas** poderá oportunizar aos professores a compreensão de indícios dos processos de aprendizagem dos seus alunos. Assim, nosso estudo conclui que utilizar as **narrativas** dos alunos em aulas de Matemática, favorece o desenvolvimento das competências de argumentação e justificação das idéias dos alunos.

Concluímos os episódios de ensino com a certeza de que os alunos pesquisados não são mais os mesmos, pois eles ressaltaram através das suas **narrativas** que vários aspectos contribuíram para que eles compreendessem o conceito de **Função**. Percebemos que os alunos vibravam com suas criações e descobertas, pois quando um aluno testava uma conjectura, que estava correta, sentimentos de alegria e satisfação eram perceptíveis nesse aluno. Esses fatores fizeram com que muitos alunos afirmassem que passaram a gostar mais de Matemática.

As potencialidades didático-pedagógicas das narrativas contribuíram para o envolvimento, participação e interações dos alunos nos episódios de ensino de Matemática, como também para diferenciar e dinamizar as nossas práticas pedagógicas.

6.12. Possibilidades e Sugestões para Próximas Pesquisas

No decorrer desta pesquisa, nos deparamos, em vários momentos, com temas relacionados às **narrativas** e com a sua utilização em diferentes contextos na Educação Matemática. Assim, delineamos alguns aspectos que poderão contribuir para futuras pesquisas, possibilitando aos pesquisadores da Educação, como também da Educação Matemática, investigar sobre novos caminhos e novas perspectivas metodológicas de ensino e de pesquisa.

Sugerimos pesquisas, relacionadas às **narrativas** e às suas potencialidades, com alunos de diferentes níveis de ensino e também com professores repensando sobre as suas

práticas pedagógicas. Sugerimos também outras pesquisas utilizando a perspectiva metodológica das **Investigações Matemáticas** abordando conteúdos matemáticos no Ensino Superior, pois a nosso ver, essa perspectiva metodológica tem sido pouco utilizada nesse nível de ensino.

Uma outra pesquisa poderia dar ênfase na escrita dos alunos como aporte teórico metodológico para tópicos relacionados à Matemática trabalhada na Educação Infantil, com a integração de tarefas de natureza **exploratório-investigativas**. Concluindo, destacamos que outras sugestões poderiam surgir, porém, torna-se importante enfatizar a necessidade de pesquisas em Educação Matemática, voltadas às experiências, inovações e abordagens que visem à sala de aula e os atores que ali interagem.

6.13. Desenvolvimento Profissional e Desejo de Prosseguir

Ingressamos em um programa de **Mestrado** em **Educação Matemática**, por estarmos interessados em buscar na literatura, diferentes estratégias de ensino para dinamizar nossas aulas de Matemática. A partir daí, nos aproximamos das **narrativas** objetivando investigar suas potencialidades didático-pedagógicas em um contexto de **Investigações Matemáticas.**

A maior de todas as contribuições que essa dissertação de Mestrado, nos possibilitou se deu pelo processo de reflexão Schon (1995), que nos proporcionou durante o desenvolvimento desta pesquisa. Esta pesquisa, envolvendo a sala de aula, contribuiu para a nossa constituição, enquanto professor de Matemática e, ainda, devemos ressaltar que um trabalho desta natureza contribuiu para o nosso desenvolvimento profissional (Ponte, 2002).

Essa experiência nos levou à reflexão sobre nossa prática de ensino, conscientizando-nos da necessidade e da possibilidade de ensinarmos Matemática de maneiras diferenciadas. Esperamos que o presente trabalho represente uma contribuição significativa para outros educadores e professores, preocupados em oferecer aos alunos contextos de aprendizagem, nos quais, eles possam ser atores críticos de seus próprios processos de pensamento.

Ao concluir esse trabalho envolvendo uma pesquisa em sala de aula, saímos satisfeitos com o “crescimento intelectual” que tivemos, durante o percurso de Mestrado, pois durante os dois anos que passamos envolvidos nesse curso, ampliamos nossos horizontes e compreendemos a importância da reflexão sobre nossa prática pedagógica enquanto educador matemático.

Certos de que ao término desta pesquisa, novas incertezas aparecerão e convictos de que estas nos instigarão e nos impulsionarão a investigar novas problemáticas buscaremos,

sempre que necessário e possível, refletir sobre o nosso fazer pedagógico, buscando sempre um novo conhecimento Miskulin (1999), um novo olhar para a sala de aula e para o nosso próprio desenvolvimento profissional. Assim, a busca pelo novo conhecimento será nossa principal meta, daqui para frente, enquanto educador e professor de Matemática.

CAPÍTULO VII

BIBLIOGRAFIAS

ABRANTES, P., SERRAZINA, L., & OLIVEIRA, I. **A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica (DEB). 1999. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/a_matematica.pdf> Acesso em: 28 mar. 2005.

ABRANTES, P. et al. (Org.) **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: APM e Projecto MPT. 1999.

ALRO, H. & SKOVSMOSE, O. **Dialogue and learning in mathematics education**: Intention, reflection, critique. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

AMARAL, H. M. R. P. **Atividades Investigativas na Aprendizagem da Matemática no 1º Ciclo.** (Dissertação de Mestrado - Departamento de Educação da Faculdade de Ciências: Universidade de Lisboa), 2003.

APM. Competências matemáticas essenciais na educação básica. In: **Competências essenciais no Ensino Básico** - visões multidisciplinares. Cadernos do CRIAP. Porto: ASA. 2001.

APM. **A renovação do currículo de Matemática**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1988. Disponível em: <http://www.apm.pt/rinovacao/inovacao.pdf> acesso em: 02 mar 2006.

ÁVILA G. Evolução do conceito de função e de integral. **Revista de Matemática Universitária**, n.1, pág. 14-46, São Paulo, 1985.

BAKHTIN, M. **Marxismo e filosofia da linguagem**. 8ª. ed. São Paulo, Editora Hucitec, 1997.

BAKHTIN M. **Estética da criação verbal**. São Paulo, Martins Fontes, 1ª edição, 1992.

BARALDI, I. M. **Matemática na escola:** que ciência é esta? Bauru: EDUSC, 1999.

BASTOS, L.K**. Coesão e coerência em narrativas escolares**. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

BENEDETTI, F. C. **Funções, Software Gráfico e Coletivos Pensantes**. 2002. 316 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP).

BENJAMIN, W. **Obras escolhidas**: magia e técnica, arte e política. São Paulo: Brasiliense, v. 1, 1994.

BERGERON, J. & HERSCOVICS, N. **Level in the Understanding of Functions Concept, Procedings of the Workshop of functions**. Holanda. 1982.

BIAGGI, G. V. Uma nova forma de ensinar matemática para futuros administradores: uma experiência que vem dando certo. **Revista de Ciências da Educação**. Lorena. v. 2, n. 2, p. 103-113, 2000. Disponível em: <http://www.am.unisal.br/graduacao/Administracao/pdf/publicacoes-4.pdf> Acesso em 25 out 2006.

BISHOP, A. J, & GOFFREE, F. Classroom organization and dinamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, M. Otte (Eds.) **Perspectives on mathematics education**. Dordrecht: Reidel. 1986.

BOAVIDA, A M. R. **A argumentação na aula de Matemática**: Olhares sobre o trabalho do professor. (Conferência XVI SIEM - Seminário de Investigação em Educação Matemática Évora, 2005. Disponível em: <http://fordis.ese.ips.pt/docs/siem/texto57.doc> Acesso em: 20 jan. 2006.

BOAVIDA, A. M., & PONTE, J. P. Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas.

In GTI (Ed.), **Refletir e investigar sobre a prática profissional** (pp. 43-55). Lisboa: APM, 2002. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/02-Boavida-Ponte(GTI).pdf> Acesso em: 23 mai 2006.
BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal, Porto Editora, 1994.
BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza I. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1986.
BRAGA, C. **O Processo Inicial de Disciplinarização de Função na Matemática do Ensino Secundário Brasileiro**. 2003. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC /SP.
BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 2002.
BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCNs Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002. 144 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> Acesso em: 26 de mar 2005.
BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: SEMT/MEC. 1999.
BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (5ª a 8ª séries). Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998. 148 p. Disponível em: <http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf> Acesso em: 28 abr 2006.
BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, MEC / SEF, 1997, 142 p. Disponível em: <http://www.mec.gov.br/sef/estrut2/pcn/pdf/matematica.pdf> Acesso em: 06 mar2005.
BRAUMANN, C. Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matemática. In: PONTE, J.P. et al. **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2002, p. 5-24
BROCARDO, J. **As investigações na aula de matemática**: um projecto curricular no 8º ano (Tese de Doutoramento). Lisboa: Universidade de Lisboa. 2001.
BRUNER, J. **A Cultura da Educação.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2001**.**
BRUNER, J. **Atos de Significação**. Porto Alegre: Artmed Editora, 1997.
BRUNER, J. **The Narrative Construction of Reality**. Critical Inquiry, Chicago, v. 18, p. 1-21, 1991.
BRUNHEIRA, L. **O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de atividades de investigação na aula de matemática**. 2000. 268 p. Tese de mestrado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
BUSCHMAN, L. Communicating in the language of mathematics. **Teaching Children Mathematics**, 1(6), 324-329. 1995.
CÂNDIDO, P. T. Comunicação Matemática. In: SMOLE, C.S. K e DINIZ, M. I (Orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 15-28
CÂNDIDO, S. L. Uma experiência sobre o ensino e a aprendizagem de funções. In: **Educação Matemática em Revista**. São Paulo: SBEM, 2000.
CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** (1.ed. 1941) 2.ed. Lisboa: Gradiva, 1998.
CARNEIRO V. C. et al. **Funções: Significados Circulantes na Formação de Professores**. Bolema (Boletim de Educação Matemática). Rio Claro, ano 16 - n.19, p. 37-57, 2003.

CARVALHO, C. **Comunicações e Interações Sociais nas Aulas de Matemática**. (Conferência - I Seminário de Ensino de Matemática no âmbito da 14ª Conferência COLE) Campinas/SP, 2003. Disponível em: <http://cie.fc.ul.pt/membros/ccarvalho/docc53.pdf> Acesso: 28 mar. 2006.
CARVALHO, M. C. C. e S. **Padrões Numéricos e Funções**. 1ª Edição, São Paulo: Moderna, 1998.
CASTRO, J. F. U**m estudo sobre a própria prática em um contexto de aulas investigativas de Matemática.** 197 p. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação: Educação Matemática). Campinas: FE/Unicamp.
CASTRO, J. F. **Quadrados e perímetros:** Uma experiência sobre aprender a investigar e investigar para aprender. In: FIORENTINI, D; JIMÉNEZ, A. (Org.). Histórias de aulas de matemática: Compartilhando saberes profissionais. Campinas-SP: Editora Gráfica da Faculdade de Educação/UNICAMP/ CEMPEM, 2003. (p.69-79)
CHAVES, M. I. A. e CARVALHO H. C**. Formalização do Conceito de Função no Ensino Médio:** uma Seqüência de ensino-aprendizagem. In: 1 CD-ROM - VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife. Anais. Recife: SBEM/PE, 2004. Disponível em: http://ufpa.br/npadc/gemm/documentos/docs/Formalizacao%20Conceito%20Funcao%20Ensino%20Medio.pdf Acesso em: 22 ago 2005.
CHIZZOTTI, A. **Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais**, 3ª ed. Cortez São Paulo, 1998.
CLANDININ, J; CONNELLY, M. **Narrative Inquiry**: experience and story in qualitative research. San Francisco: Jossey-Bass Publishers, 2000.
CLANDININ, J; CONNELLY, M. Relatos de Experiência e Investigación Narrativa. In: LARROSA, Jorge et al, **Déjame Que Te Cuente**: ensayos sobre narrativa y educacíon. Barcelona: Editorial Laertes, 1995, p. 11-51.
CLANDININ, J,; CONNELLY, M. Narrative and Story in Practice and Research. In: SCHON (ed.) **The Refletive turn:** Case Studies of Refletive Practice. New York: Teachers College Press, 1991, p. 258-281.
CLANDININ, J,; CONNELLY, M. Stories of experience and narrative inquiry. **Educational Researcher**, v.19, n.5, p.2-14, 1990.
COCKCROFT, W. **Mathematics counts**. London: HMSO. 1982.
COLL, C. et al. **O construtivismo na sala de aula**. São Paulo: Ática, 1997.
COSTA, A. C. **Conhecimentos de Estudantes Universitários sobre o Conceito de Função**. 2004. 92f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC / SP.
COUTO, C. G. **Professor**: O Início da Prática Profissional. Lisboa: APM. 1998.
CUNHA, M. H. **Saberes profissionais de professores de matemática**: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação (tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM. 1998.
CUNHA, M. H. et al. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Actas do ProfMat95, Lisboa: APM, 1995. p. 161-167. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/12Livro-Cunha.PDF> Acesso em: 25 mai. 2005.
CUNHA, M I. Conta-Me Agora! As narrativas como alternativas pedagógicas na pesquisa e no ensino. **Revista da Faculdade de Educação** São Paulo, v.23, n.1/2, p. 185-195, 1997.
D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática:** da teoria à prática. Campinas. Papirus, 1996
D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. **A Educação Matemática em Revista**. Blumenau: SBEM, n.1, pp. 5-11, 1993.
D'AMBROSIO, U**. Da realidade à ação**: reflexões sobre a Educação Matemática. São Paulo, Summus, 1986.
D'AMBROSIO, B. S. **Conversas Matemáticas**: Metodologia de Pesquisa ou Prática Profissional: In: Anais do VI EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Campinas, SP: Graf FE, p. 18-20, 2002.

DELGADO, C. R. S. C. A. **Reflexão Sobre as Práticas de Ensino da Matemática de Futuros Professores do 1º Ciclo**: Três Estudos de Caso. 2003. 234 p. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa.

DELIZOICOV, D. **Ensino de Ciências**: fundamentos e métodos. São Paulo: Cortez Editora, 2002.

DEMO, P. **Educação e Qualidade.** Campinas: Papirus, 1994.

ERICKSON, F. Qualitative Methods in Research on Teaching. In: WITTROCK, M. C. (Ed). **Handbook of Research on Teaching** (3 ed.), New York, 1986.

ESCHER, M. A; MISKULIN, R. G. S.; SILVA, C. R. M. **Atividades no Maple:** Uma atividade Exploratório-Investigativa em uma Aula de Cálculo Diferencial I. (Comunicação no I Seminário de Histórias e Investigações de / em Aulas de Matemática). Faculdade de Educação UNICAMP – Campinas / SP. (Org). Grupo de Sábado. 2006.

EVES, H**. Introdução à História da Matemática**. Tradução Hygino H. Rodrigues. – ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

FERREIRA, A. C. **Metacognição e desenvolvimento profissional dos professores de** matemática**:** uma experiência de trabalho colaborativo. 2003. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

FIORENTINI, D. et al. **Cultura, Formação e Desenvolvimento Profissional de Professores que Ensinam Matemática:** Investigando e Teorizando a partir da Prática**.** São Paulo: Musa Editora; Campinas, SP: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005.

FIORENTINI, D. et al. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. (Comunicação - I Seminário Luso-Brasileiro Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores) Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa 2005. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm> Acesso em: 06 mar. 2005.

FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In BORBA, M.C; ARAÚJO, J.L (org.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004, p. 47-76.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A (Orgs.). **Por trás da porta, que matemática acontece?** Editora Gráfica da Faculdade de Educação / UNICAMP / CEMPEM, 2001.

FIORENTINI, D; MIORIN, M. A**.** Pesquisar e Escrever também é preciso: a trajetória de um Grupo de Professores de Matemática. In: FIORENTINI, D; MIORIN, M. A. (Orgs.) **Por trás da porta, que Matemática acontece?** Campinas, SP: Gráfica e Editora FE/ Unicamp, 2001. p.18-44.

FIORENTINI, D. **Alguns Modos de ver e conceber o Ensino de Matemática no Brasil.** Zetetiké, vol. 3 n. 4, 1995. p. 01-37.

FONSECA, H. **Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula**. 2000. 208p. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade de Lisboa.

FONSECA, H. et al. **As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática.** Actas do ProfMat 99 (pp. 91-101). Lisboa: APM, 1999. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/99%20Fons.-Br.-Ponte%20(ProfMat-MPT.pdf> Acesso em: 26 abr. 2005.

FONSECA, H., & ABRANTES, P. Investigações em geometria realizadas pelos alunos. In ABRANTES P. et al (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. (pp. 183-188). Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.

FONTANA, R.A.C. A elaboração conceitual: a dinâmica das interlocuções na sala de aula, In: SMOLKA, A.B. e GÓES M.C.R de (Orgs.). **A linguagem e o outro no espaço escolar**: Vygotsky e a construção do conhecimento. 4ª edição, Campinas: Papirus, 1995.

FREIRE, M. **Construtivismo Pós- Piagetiano.** Um Novo Paradigma sobre Aprendizagem**.** Org. GROSSI, Éster. Vozes. 1995. Rio de Janeiro.
FREIRE, P. **Pedagogia da Esperança**: um reencontro com a pedagogia do oprimido. 3°ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1994.
FREITAS, M.T. A. **Vygotsky e Bakhtin.** Psicologia e Educação: um intertexto. SP: Editora Ática, 1995.
FREITAS, M. T. M. **A escrita no processo de formação contínua do professor de matemática.** 2006. 250p. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE, Unicamp, Campinas (SP). Orientador: Dario Fiorentini.
FREITAS, M. T. M & FIORENTINI, D. **Comunicação e Formação: o papel da escrita na formação inicial de professores de matemática**. (XVI SIMPÓSIO IBEROAMERICANO). Castellón – España. 2004. Disponível em: <http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/123_maria_teresa_menezes.doc> Acesso em: 25 abr 2006.
GALVÃO, C. Narrativas em Educação. Revista Ciência & Educação, v. 11, n. 2, p.327-345, 2005. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/pos/revista/pdf/revista11vol2/ar12r11v2.pdf> Acesso em: 25 mai 2006.
GÓES, M. C. R. As Relações Intersubjetivas na Construção de Conhecimentos. In: Góes, M. C. R., Smolka, A. L. B. (orgs.). **A Significação nos Espaços Educacionais**: Interação Social e Subjetivação. Campinas/SP: Papirus, 1997.
GOLDENBERG, M. **A Arte de Pesquisar**. como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.
GOLDENBERG, E. P. Quatro funções da investigação na aula de Matemática. In: ABRANTES, P. et. al (Orgs.). **Investigações matemáticas na aula e no currículo.** Portugal, APM, 1999, p. 35–49.
GOMÉZ, P. **A Cultura Escolar na Sociedade Neoliberal**. Porto Alegre: ARTMED Ed. 2001.
GUDMUNDSDOTTIR, S. La narrativa del saber pedagógico sobre los contenidos. In: MCEWAN, H.; EGAN, K. **La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación**. Buenos Aires: Amorrortu Editores, 1998.
HARGREAVES, A**. Os professores em tempos de mudança**. Lisboa: Mc Graw-Hill. 1998.
HUPPES, R. **Uma proposta de melhoria do ensino-aprendizagem de matemática**. 2002. 147f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis.
JAWORSKI, B. **Investigating mathematics teaching**: A construtivist inquiry. London: Falmer.1994.
KAIBER, C. T. **A prática de resolução de problemas no estudo das funções reais**. Universidade Luterana do Brasil. Disponível em: <http://www.ulbra.br/ppgecim/kaiberc.doc> Acesso em: 27 out 2006.
KENSKI, V. Memória e ensino. **Cadernos de Pesquisa**. São Paulo, n. 90, p.45-51, ago. 1994.
KIERAN, C. The Learning and Teaching of School Algebra. **Handbook of Research on Mathematics, Teaching and Learning.** Cap. XVII. Ed. NCTM – MacMillan Publishing Co. – NY; USA, 1992.
KLINE, M, Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. **The Function Concept**. New York, USA. Oxford University Press, 1972. p. 335–340.
KRAMER S. Escrita, experiência e formação - múltiplas possibilidades de criação de escrita. In: ZACCUR, E. (org.) **Linguagens, espaços e tempos no ensinar e aprender**. Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino (ENDIPE) - RJ: DP&A, 2000.
LARROSA, J. B. **Notas sobre narrativa e identidad**. In: ABRAHÃO, Maria Helena M. B. (org.) A aventura (auto) biográfica: teoria & empiria. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

LARROSA, J. B. Notas sobre a experiência e o saber de experiência. **Revista Brasileira de Educação.** nº 19: São Paulo, 2002. pp. 20-28. Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=27501903> Acesso em: 31 ago 2006.

LARROSA, J. B. **Notas sobre a experiência e o saber de experiência**. Conferência proferida no I seminário Internacional de Educação de Campinas. Leituras SME: Textos - subsídios ao trabalho pedagógico das unidades da Rede Municipal de Educação de Campinas/FUMEC. Julho de 2001.

LEAL, L. C. Funções no Terceiro Ciclo do Ensino Básico – Uma possível Abordagem. **Revista Educação e Matemática**, v. 15, APM, Lisboa, Portugual. 1990.

LESTER, J. B. Establishing a community of mathematics learners. In D. Schifter (Ed.), **What's happening in math class? The mathematics classroom: A community of inquiry** (pp. 88-102). New York: Teacher College Press, 1996.

LOPES, W. S. A**. Importância da Utilização de Múltiplas Representações no desenvolvimento do Conceito de Função:** Uma Proposta de Ensino, 2003. 95f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC / SP.

LUDKE, M.; ANDRÉ. M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, A. C. **A Aquisição do Conceito de Função**: perfil de imagens produzidas pelos alunos. Dissertação (Mestrado em Educação), UFMG, Belo Horizonte/MG, 1998.

MARTINHO, M. H & PONTE, J. P. **Comunicação na sala de aula de Matemática**: Práticas e reflexão de uma professora de Matemática. 2005. disponível em: http://fordis.ese.ips.pt/docs/siem/texto33.doc. Acesso em: 14 abr 2005.

MARTINHO, M. H. **A comunicação na sala de aula de matemática**: Contríbutos para o desenvolvimento profissional do professor. (Tese de Doutorado - Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa), 2004.

MENEZES, L. **Matemática, linguagem e comunicação**, Actas do ProfMat 99 (pp. 71-81). Lisboa: APM, 1999. Disponível em: <http://www.ipv.pt/millenium/20_ect7.htm> Acesso em: 15 jun. 2005.

MENDES, M. H. M. **O conceito função:** aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC, Rio de Janeiro.

MENDES, M. T. R. P. J. **Casos e Narrativas:** Contextos e Pretextos para a Integração das TICs no Processo Educativo. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 4, n.12, 2004. p. 49-64.

MENDES, E. J. **A actividade matemática escolar numa perspectiva investigativa e exploratória na sala de aula** – implicações para a aprendizagem. 1997. Dissertação (Mestrado em Educação). Lisboa: DEFCUL.

MENINO, H. **O relatório escrito, o teste em duas fases e o portefólio como instrumentos de avaliação das aprendizagens em Matemática:** Um estudo no 2º ciclo do ensino básico. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade de Lisboa.

MISKULIN, R. G. S. et al. Pesquisas sobre trabalho colaborativo de Professores de Matemática: um olhar sobre a produção do Prapem/Unicamp. In: FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. (Org.) **Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática**. São Paulo: Musa Editora, 2005. p.198 - 223.

MISKULIN, R. G. S. **Aprendizagem colaborativa em educação matemática**: uma abordagem interativa através do ambiente computacional e-team. Funchal-Madeira: Profmat, 2000.

MISKULIN. S. G. R., **Concepções Teórico-Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria**. 1999. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, SP.

MISKULIN R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas baseadas em logo e em resolução de problemas para o processo ensino-aprendizagem da geometria**. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação – Educação Matemática) FE-UNICAMP, Campinas/SP, 1994

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Currículo Nacional do Ensino Básico**: Competências Essenciais – Matemática. p, 57-71. 2001. Lisboa. Disponível em: www.dgidc.min-edu.pt/public/compessenc_pdfs/pt/LivroCompetenciasEssenciais.pdf Acesso em: 22 mai 2006.

MORAES. R & GALIAZZI. M. C. **Tomando conta do ambiente em que se vive:** aprendizagem e apropriação de discursos pela linguagem**.** (Comunicação Oral no II Encontro Internacional da Linguagem, Cultura e Cognição, de 16 a 18 de Julho de 2003). Disponível em: http://www.fc.unesp.br/abrapec/revistas/v3n3a1.pdf Acesso em: 19 mar 2005.

MORAN, J. M. Mudar a forma de ensinar e aprender com a internet. In: Salto para o Futuro: TV e Informática na Educação. Brasília. Secretaria de Educação a Distância. Ministério da Educação e do Desporto. 1998. p.81-90.

MORALES, P. A relação professor-aluno: o que é, como se faz. São Paulo: Loyola, 2000.

MORETTI, V. D. **O Conceito de Função:** os conhecimentos prévios e as interações sociais como desencadeadores da aprendizagem. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1998.

MOURA, M. O. **A construção do signo numérico em situação de ensino**. 1992. Tese (Doutorado em Educação FEUSP). São Paulo, SP.

MOURA, M. O; MORETTI, V. Investigando a aprendizagem do conceito de função a partir dos conhecimentos prévios e das interações sociais. **Revista Ciência e Educação**, vol 9, n° 1, 2003. Disponível em: http://www.fc.unesp.br/pos/revista/vol9num1.htm. Acesso em: 28 out 2005.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky a Educação Matemática**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NACARATO, A. M. LOPES, C. A. E. (org.). **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, 2005.

NCTM. (1994). **Normas profissionais para o ensino da Matemática**. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original em inglês, publicado em 1991) NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

NEMIROVSKY, R. Mathematical Narratives, Modeling and Álgebra. In: BERNARZ, N. et al. **Approaches to Algebra**. Netherlands. Kluwer Academic, 1996. p. 197–220.

NUNES, C. C. Os **Relatórios na Avaliação das Tarefas de Investigação**. (Comunicações Seminário Luso-Brasileiro. Investigações matemáticas no currículo e na formação de professores Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa 2005). Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/seminario_lb.htm> Acesso em: 20 set. 2005.

OLIVEIRA, N. **Conceito de função:** Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem. 1997. 137f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – PUC, São Paulo.

OLIVEIRA, H., et al. Investigações matemáticas na sala de aula. In: ABRANTES, P., LEAL, L. C., & PONTE, J. P. (Orgs.). **Investigar para aprender Matemática**: Textos selecionados. Lisboa: Projeto MPT e APM, 1999.

OLIVEIRA, H. **Actividades de investigação na aula de Matemática – Aspectos da prática do professor.** 1998. Dissertação (Mestrado em Educação). Lisboa: DEFCUL. Disponível em: http://ia.fc.ul.pt/textos/holiveira/index.htm Acesso em: 20 nov 2005.

OLIVEIRA, H. M Vivências de duas professoras com as actividades de investigação. **Quadrante**, 7(2), 71-98, 1998.

PARATELI, C. A. et al. **A Escrita no Processo de Aprender Matemática.** Revista de Educação Matemática – Ano 9, Nos. 9-10 (2004-2005), p. 23-29. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/RevEdMatVol9.pdf> Acesso em: 26 jun. 2005.
PELHO, E. B. B. **Introdução ao Conceito de Função**: A Importância da Compreensão das Variáveis. 2003. 122p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC / SP.
PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de matemática**.** In: PENTEADO, M.; BORBA, M.C. (org.). **A informática em ação: formação de professores, pesquisa e extensão.** São Paulo: Olho d'Água, 2000
PIRES, M. **A diversificação de tarefas em matemática no ensino secundário: um projeto de investigação-ação**. 2001. 328p. Tese de mestrado. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
PONTE, J. P., BROCADO. J., OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
PONTE, J. P. **Investigar, Ensinar e Aprender**, actas do profmat, CD-ROM, Lisboa, p.25-39, Lisboa, APM, 2003.
PONTE, J. P. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em Educação, 2, pp. 93-169. 2003. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev–SPCE).pdf> Acesso em: 26 mar. 2005.
PONTE, J. P. (Orgs.). **Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Secção de Educação e Matemática. 2002.
PONTE, J. P. Investigar a nossa própria prática. In: GTI (Org.), **Refletir e investigar sobre a prática Profissional.** Lisboa: APM, 2002, p. 5–28.
PONTE, J, P. **O Ensino da Matemática em Portugal na Viragem do Milênio**. Sobre a "Sessão Matemática ano 2000" Departamento de. Educação da F.C.- U.L. Disponível em: <http://www.clad.pt/Artigos/artopin0022000.doc> Acesso em: 02 mar. 2006.
PONTE, J. P. et al. Investigando as aulas de investigações matemáticas. In: ABRANTES. P. et. al. (Eds**.), Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projeto MPT e APM, p. 133-151, 1999.
PONTE, J. P. et al. **Relação professor aluno na realização de investigações matemáticas.** Projeto Matemática para Todos. Lisboa – Portugal; APM, 1999.
PONTE, J. P. et al. Narrativas de Situações de Ensino-Aprendizagem. In: PONTE, J. P. (Org.). **Histórias de Investigações Matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998. p. 27-32.
PONTE, J. P. et. al. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, 7(2), 1998. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/98%20Ponte%20etc%20(Quadrante-MPT).pdf.> Acesso em: 05 de mai 2006.
PONTE, J. P., & SANTOS, L. **Práticas lectivas num contexto de reforma curricular**. Quadrante, 7(1), 3-32, 1998.
PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, M. H. e SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: IIE, 1998.
PONTE, J. P. et al. **Investigating mathematical investigations**. In P. Abrantes, J. Porfírio e M. Baía (Orgs.). Proceedings of CIEAEM 49 (pp. 3-14). Setúbal: ESE de Setúbal.1998.
PONTE, J. P. et al. **Didáctica da Matemática.** Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário, 1997.
PONTE, J. P. & MATOS, J. F. Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas**.** In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), **Investigar para aprender matemática:** Textos selecionados (pp. 119-137). Lisboa, 1996.

PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. **Quadrante** 3(1), 3-18. 1994. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/94-Ponte(Quadrante-Estudo%20caso).pdf> Acesso em: 20 jun 2005.
PONTE, J. P. e MATOS, J. F. Cognitive processes and social interactions in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), **Mathematical problem solving and new information technologies**: research in contexts of practice (pp. 239-254). Berlin: Springer-Verlag. 1992
POWELL, A. B. **Captando, Examinando e Reagindo ao Pensamento Matemático**. Boletim 39. Revista GEPEM. Setembro, 2001.
POWELL, A.B., LÓPEZ, J.A., **A escrita como veículo de aprendizagem da matemática**: Estudo de um caso. Boletim do GEPEM, n.33, p.9-41, 1995.
POZO, J.I. (Org.) **A Solução de Problemas**: Aprender a Resolver, Resolver para Aprender. Trad: Beatriz Afonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.
PRADO, G. V. T & SOLIGO, R. A. Memorial de Formação: quando as memórias narram a história de formação. In: PRADO, G. V. T; SOLIGO, R. A. (Org.). **Porque escrever é fazer história.** 1 ed. Campinas: Graf. FE, 2005, v. 1, p. 47-62. Disponível em: http://www.fe.unicamp.br/ensino/graduacao/downloads/proesfmemorial_GuilhermePrado_RosauraSoligo.pdf#search=%22memorial%20de%20forma%C3%A7%C3%A3o%3A%20quando%20as%20mem%C3%B3rias%20narram%20a%20hist%C3%B3ria%20da%20forma%C3%A7%C3%A3o%22 Acesso em: 20 set 2006.
RÊGO, R. G. **Um Estudo sobre a Construção do Conceito de Função**. Tese (Doutorado em Educação) UFRGN, Natal, 2000.
REGO, T. C. **Vygotsky**: uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis: Vozes, 1996, 138p.
RIBEIRO, L. C. **Interação em Sala de Aula**: Questões Conceituais e Metodológicas. Belo Horizonte: UMFG, 1996.
ROCHA, A. **Uma experiência com actividades de investigação na aula de Matemática:** Competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Porto.
ROMÃO, M. M. **O papel da comunicação na aprendizagem da Matemática**: um estudo realizado com quatro professores no contexto das aulas de apoio de Matemática. 1998. Dissertação (Mestrado). Lisboa: APM.
ROQUE M., GALIAZZI M. C. **Tomando conta do ambiente em que se vive:** aprendizagem e apropriação de discursos pela linguagem. (II Encontro Internacional da Linguagem, Cultura e Cognição). 2003. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/abrapec/revistas/v3n3a1.pdf> Acesso em: 27 mar. 2005.
ROSSINI, R. **Uma proposta para o ensino de função linear**. Disponível em <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/co.html> extraído em 23 de março de 2005.
SANTOS, E. P. **Função Afim y = a.x + b:** a articulação entre os registros gráfico e algébrico com o auxílio de um software educativo. Dissertação de Mestrado, PUC/SP, 2002.
SANTOS, S. A. Explorações da linguagem escrita nas aulas de Matemática. In: NACARATO, A. M. LOPES, C. A. E.; (org.). **Escritas e Leituras na Educação Matemática**. São Paulo: Autêntica, p. 127-141, 2005.
SANTOS, V. M. P. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em Matemática**: Métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ. 1997
SANTOS, L. et al. Investigações matemáticas na aprendizagem do 2º ciclo do ensino básico ao ensino superior. In: PONTE J. P et al. (Orgs) **Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. (pp. 83 – 106) Lisboa: SPCE, 2002.

SARAIVA, M. J. F. S. **O Conhecimento e o Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática.** Um trabalho colaborativo. (Tese de Doutorado – Departamento de Educação Faculdade de Ciências Universidade de Lisboa), 2001.

SCHEFFER, N. F. **As Tecnologias e a Representação Matemática de Movimentos Corporais.** (IV Encontro Ibero-Americano de Coletivos Escolares e Redes de Professores que fazem Investigação na sua Escola) UNIVATES – Lajeado/RS, 2005. Disponível em: <http://ensino.univates.br/~4iberoamericano/> acesso em: 21 de abril de 2006.

SCHEFFER, N. F. As Narrativas Matemáticas e o estudo da representação gráfica de movimentos corporais, realizados com o auxílio de tecnologias, In: **Revista Perspectiva**, Erechim/RS, v.27 n. 98,2003. p. 53-64

SCHEFFER, N. F. **Sensores, Informática e o Corpo:** A Noção de Movimento no Ensino Fundamental. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática). IGCE (Instituto de Geociência e Ciências Exatas) – UNESP, Campus de Rio Claro / SP.

SCHON, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In NÓVOA, A.(org.) **Os professores e sua formação.** Lisboa, Publicações Dom Quixote, 1995.

SCHÖN, D. A. Formar Professores como Profissionais Reflexivos. In: Nóvoa, A. (Orgs). **Os Professores e a sua Formação.** Lisboa: Publicações Dom Quixote, 1992, p.77-91.

SEGURADO, M. I. A. **O que acontece quando os alunos realizam investigações matemáticas?** In: Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional. Organização: GTI-Grupo de Trabalho de Investigação. Editora: Associação de Professores de Matemática. 1ª edição, 2002. (p. 57-73).

SEGURADO, M. I. A. **A Investigação Como Parte da Experiência Matemática dos Alunos do 2º Ciclo**. 1997. 152p. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/> Acesso em: 20 de agosto de 2005.

SEGURADO, I., & PONTE, J.P. **Concepções sobre Matemática e o trabalho investigativo**. Revista Quadrante, vol. 7, n, 2, p. 5-39, 1998.

SIERPINSKA, A. On Understanding the Notion of Function. In: **The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy** – Dubinsky E. S e Harel G. (ed) – MAA Notes nº 15, Estados Unidos, 1992.

SIMÕES, M. H. P. **Uma seqüência para o Ensino/Aprendizagem de Função do 2º Grau.** 1995. 259f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), PUC / SP.

SCHWARZ, O. **Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau**. Dissertação de Mestrado. PUC/SP, 1995

SHOR, I., FREIRE, P. **Medo e ousadia: o cotidiano do professor**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

SHULMAN, L. S. **Those Who Understand**: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, v.15, p. 4-14, 1986.

SILVA, C. R. M; MISKULIN, R. G. S.; ESCHER, M. A. **A utilização didatico-pedagógica do maple em uma perspectiva de investigação matemática.** In: Encontro Paulista de Educação Matemática. VIII EPEM, São Paulo. UNICSUL, 2006.

SILVA, A. et al. O currículo de matemática e as Atividades de Investigação. In. ABRANTES, P. et al. (Orgs). **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Projeto MPT e APM, p. 69-85, 1999.

SILVA, M. G. P. **Resolução de problemas, uma perspectiva de trabalho em sala de aula.** 1990. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Rio Claro, IGCE-UNESP.

SMOLKA, A.L.B e GÓES, M.C.R. **A linguagem e o outro no espaço escolar**: Vygotsky e a Construção do Conhecimento. 4ª edição, Campinas: Papirus, 1995.

SMOLKA, A. L. B. A dinâmica discursiva no ato de escrever: relações oralidade-escritura. In Smolka & Góes (orgs.) **A linguagem e o outro no espaço escolar**: Vygotsky e a Construção do Conhecimento. 4ª edição, Campinas: Papirus, 1995.
SMOLKA, A. L. A prática discursiva na sala de aula: Uma perspectiva teórica e um esboço de análise. In: Cadernos Cedes 24. **Pensamento e Linguagem** - estudos na Perspectiva da Psicologia Soviética. 3. ed., p. 60-75, 2000.
SMOLE, C. S. K. Textos em Matemática: Por Que Não? In: SMOLE, C.S. K e DINIZ, M. I. (Orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 29-68.
SMOLE, C. S. K., DINIZ, M. I. (Orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 203p. 2001.
SMOLE, C. S. K, DINIZ, M. **A Interpretação Gráfica e o Ensino de Funções.** Revista do Professor de Matemática - RPM. São Paulo, n. º 14, 1989.
SMOLE, K. C. S e DINIZ, M. I. **Comunicação em matemática**: instrumento de ensino e aprendizagem. Extra Classe. Ano 6 n. 58, 2001. Disponível em: http://www.sinpro-rs.org.br/extra/dez01/artigos.asp Acesso em: 25 nov 2005.
SMOLKA, A. L. A prática discursiva na sala de aula: Uma perspectiva teórica e um esboço de análise. In: Cadernos Cedes 24. **Pensamento e Linguagem** - estudos na Perspectiva da Psicologia Soviética. 3ª ed, 2000. p. 60-75.
TALL, D. O. & VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**. n.12, 151-169, 1981.
TINOCO, L. A. A, (Org.). **Construindo o Conceito de Função no 1º Grau.** Equipe do Projeto Fundão Rio de Janeiro: Instituto de Matemática – UFRJ, 1996.
TRINDADE, J. A. O & MORETTI, M. T. Uma relação entre a teoria histórico-cultural e a epistemologia histórico crítica no ensino de funções: a mediação. **In: Zetetiké**, vol.8, nº 13/14, jun/jul., p.29-50, 2000.
TRIVIÑOS, A. N. S. **Introdução à pesquisa em ciências sociais**: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas, 1987.
TROVON A. L & REIS, L. F. **Coleção Matemática Interativa – 5ª a 8ª séries**. Primeira Edição. Casa Publicadora Brasileira (CPB). Tatuí – SP, 2002.
TUDELLA, A. et al. **Dinâmica de uma aula com investigações**. In: ABRANTES. P. et al. (Orgs) Investigações matemáticas na aula e no currículo (pp. 87-96). Lisboa: Projecto MPT e APM. 1999.
USISKIN, Z., Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. **In:** ARTHUR F. C & ALBERT P. S. (org). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.
VAZ, A. et al. **Episódios e Narrativas de Professores**: experiências e perspectivas docentes discutidas a partir de pesquisa sobre conhecimento pedagógico de conteúdo. In: Anais 24ª Reunião da Anped. Caxambu, 2001. p. 01-12. Disponível em: http://www.anped.org.br/24/T0841200938269.doc Acesso em 23 out 2005.
VALENCIA, F. J. La escritura: proceso semiótico reestructurador de la conciencia. In: VALENCIA, F. J.; ZAMUDIO, G.B. **Los procesos de la escritura.** Hacia la producción interactiva de los sentidos. Bogota: Cooperativa Editorial Magisterio, 2001.
VARANDAS, J. **Avaliação de investigações matemáticas:** Uma experiência. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade de Lisboa. 2000.
YOUSCHKEVITCH, A. P. **The Concept of Function**. In: Artchive for History of Exact Sciences. Editions Springer v.16, n.1, p.37-85, 1976.
VYGOTSKY, L.S. **A Formação Social da Mente**. 6ª Reimpressão. São Paulo. Martins Fontes. 1998.

VYGOTSKY, L. **A formação social da mente**. SP, Martins Fontes, 1987
VYGOTSKY, L.S. **Pensamento e Linguagem**. 6ª Reimpressão. São Paulo. Martins Fontes. 1996.
WEIZ, T. **O diálogo entre o ensino e a aprendizagem**. São Paulo: Ática, 2000.
ZEICHNER, K. M. **A Formação Reflexiva dos Professores:** Idéias e Práticas. Lisboa: Dom Quixote, 1993.
ZUFFI, E. M. et al. **Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função.** Educação Matemática em Revista. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática em Revista (SBEM), n. 9/10, p. 10-16, São Paulo, 2001.
ZUFFI, E. M. **O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio:** por uma aprendizagem de significados. Tese (Doutorado em Educação). São Paulo: Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo 1999, 307 p.
ZUFFI, E. M & PACCA, J. L. A. O Conceito de Função e sua Linguagem para os Professores de Matemática e de Ciências. **Revista Ciência & Educação**, v.8, nº1, p.1 – 12, 2002.
ZUFFI E.M.; PACCA J.L.A. Sobre funções e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio**. Revista Zetetikê**, CEPEM-FE/UNICAMP, n.13/14, p.7-27, 2000.

ANEXOS