

LEIDY DIANE WOLMUTH SILVA

**CONTROLE H_∞ CHAVEADO COM REALIMENTAÇÃO
DERIVATIVA DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS
CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE**

LEIDY DIANE WOLMUTH SILVA

**CONTROLE H_∞ CHAVEADO COM REALIMENTAÇÃO
DERIVATIVA DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS
CONSIDERANDO A SATURAÇÃO DO SINAL DE CONTROLE**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S586c Silva, Leidy Diane Wolmuth .
Controle \mathcal{H}_∞ chaveado com realimentação derivativa de sistemas lineares incertos considerando a saturação do sinal de controle / Leidy Diane Wolmuth Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2019
129 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.
Área de conhecimento: Automação, 2019

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

1. Realimentação derivativa. 2. Controle \mathcal{H}_∞ chaveado. 3. Sistemas lineares incertos. 4. Saturação dos atuadores.

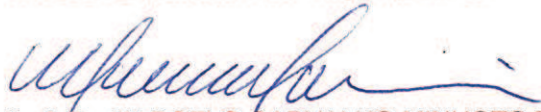
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle H_∞ Chaveado com Realimentação Derivativa de Sistemas Lineares Incertos Considerando a Saturação do Sinal de Controle

AUTORA: LEIDY DIANE WOLMUTH SILVA

ORIENTADOR: MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:



Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. RODRIGO CARDIM
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

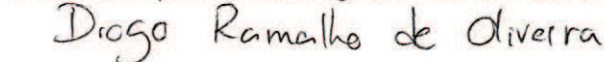


Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO
Divisão de Engenharia Eletrônica / Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais - CCMN / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - Campus Palmas



Prof. Dr. DIOGO RAMALHO DE OLIVEIRA
IFMS - Câmpus de Três Lagoas / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul



Ilha Solteira, 22 de agosto de 2019

Ao meu esposo Rosalvo, por todo amor, apoio, confiança e incentivo em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos a todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- A meu esposo Rosalvo, pelo apoio incondicional, paciência em suportar a distância, por sempre me incentivar a correr atrás dos meus sonhos, a minha mãe Dulce pelo apoio e suporte em minhas decisões, agradeço todo o amor e empenho que teve na minha formação, ao meu pai Altino e meus irmãos Leandro e Luiz pelo carinho e incentivo;
- Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo, por todo ensinamento, incentivo, confiança e orientação. Agradeço pela paciência, compreensão e por proporcionar um ambiente agradável e saudável de estudo;
- Ao Prof. Dr. Uiliam pela amizade e co-orientação informal, sem sua ajuda este trabalho seria mais difícil;
- Aos demais professores do grupo de pesquisa em controle: Edvaldo, Cardim e Jean, por toda a ajuda, presto meus agradecimentos, pelo acompanhamento nas bancas examinadoras, sugestões e incentivo;
- Aos meus amigos e colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) que de forma direta ou indiretamente me ajudaram: Uiliam, Marco Beteto, Bruno, Igor, Leonardo, Douglas, Hadamez, Gilberto, Hyago, Diogo, Marco Travassos, Lázaro, Ivan, Ariel, Mariana, Gustavo, Adalberto, Veronese e Paulo, meu muito obrigada pelos momentos de descontração, pelo café compartilhado, pelo ambiente maravilhoso de estudo e por todas as discussões para a resolução dos problemas que surgem no decorrer da pesquisa;
- Aos colegas professores e técnicos do Departamento de Matemática - UFMT, agradeço pelo apoio, em especial ao Prof. Dr. André Krindges, pela ajuda nas simulações;
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (processo 140131/2019-1) pela oportunidade e apoio financeiro na fase final do doutorado. A FAPESP (processo número 2011/17610-0) pela aquisição dos softwares e equipamentos utilizados.

”Descobrir consiste em olhar para o que todo mundo está vendo e pensar uma coisa diferente.” Roger Von Oech

”O período de maior ganho em conhecimento e experiência é o período mais difícil da vida de alguém.” Dalai Lama

RESUMO

Esta tese propõe projetos de controle \mathcal{H}_∞ e controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas lineares com incertezas invariantes no tempo, nos quais apenas a derivada do vetor de estado é considerada para realimentação. Neste cenário, as estratégias propostas utilizam dinâmicas auxiliares, cujas variáveis de estado estão disponíveis para realimentação, para controlar a planta original. São propostas estruturas e procedimentos de projeto por meio de desigualdades matriciais lineares. A primeira estrutura de controle apresentada, considera a saturação do atuador e um integrador para definir a estratégia de controle, e se as condições propostas são factíveis, assegura que o ponto de equilíbrio do sistema de malha fechada seja localmente assintoticamente estável, para todas as condições iniciais em uma região elipsoidal, contida em uma determinada região definida para a nova dinâmica. Na segunda estrutura, é proposta uma técnica sem o uso de integradores para definir as estratégias para o controle chaveado e controle \mathcal{H}_∞ chaveado, para plantas com e sem saturação da entrada de controle. Na terceira estrutura, considera-se um caso mais geral porém com o uso de integradores para definir as estratégias para o controle chaveado e controle \mathcal{H}_∞ chaveado, para plantas sem saturação da entrada de controle. Embora todos os projetos propostos considerem a dinâmica auxiliar, são asseguradas as propriedades de estabilidade, taxa de decaimento e custo garantido \mathcal{H}_∞ para a planta original. Exemplos de simulação e uma implementação prática ilustram a eficácia das abordagens propostas.

Palavras-chave: Realimentação derivativa. Controle \mathcal{H}_∞ chaveado. Sistemas lineares incertos. Saturação dos atuadores.

ABSTRACT

This thesis proposes \mathcal{H}_∞ switched control designs for a class of linear systems with time-invariant uncertainties, where only the derivative of the state vector is considered for feedback. In this scenario, the proposed strategies use auxiliary dynamics, whose state variables is accessible for feedback, to control the original plant. The proposed structures and design procedures are based on Linear Matrix Inequalities (LMIs). The first structure considers the actuator saturation and an integrator to define the control strategy, and if the proposed conditions are feasible, it assures that the equilibrium point of the closed-loop system is locally asymptotically stable, for all initial conditions in an ellipsoidal region, which is within a given region defined for this new dynamic. In the second structure, we adopted a technique without the use of integrators to define the strategies for the switched control and \mathcal{H}_∞ switched control, for plants with and without control input saturation. In the third structure, we study a more general case, however, with the use of integrators to define the strategies for the switched control and \mathcal{H}_∞ switched control, for plants without control input saturation. Although all proposed designs consider the auxiliary dynamics, it is assured the stability, decay rate proprieties, and \mathcal{H}_∞ guaranteed cost for the original plant. Simulation examples and practical implementation illustrate the effectiveness of the proposed approaches.

Keywords: Derivative feedback. \mathcal{H}_∞ switched control. Uncertain linear system. Actuator saturation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Representação de $\text{sat}(u_j(t))$ como uma função de $u_j(t)$ e sua região de operação.	27
Figura 2	Esquema da lei de controle proposta (18) para o sistema linear incerto sujeito à saturação do atuador (1).	31
Figura 3	Esquema da lei de controle proposta (44) para o sistema linear incerto sujeito à saturação do atuador (1).	37
Figura 4	Região de factibilidade para $\hat{w} = 0,2236$, $\eta = 6,7968 \times 10^6$ e $\mu_0 = 1$: com Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (*) e Teoremas 2, 3 e Lema 2 representado por (*, □).	45
Figura 5	Região de factibilidade obtida minimizando \bar{w} com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$, o que resulta na maximização de \hat{w} , mantendo $\eta = 6,7968 \times 10^6$ fixo e $\mu_0 = 1$: com Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (- -) e Teoremas 2, 3 e Lema 2 representado por (-).	45
Figura 6	Região elipsoidal $\mathcal{E}(P, 1)$ e trajetória para $x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$ com $x_{N_3}(t) = u(t) = 0$, (a,b)=(60,50) da Figura 4; com Teoremas 2, 3 e Lema 2 representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado pela curva (- -); a curva T é a trajetória para a condição inicial $x(0) = A_2^{-1}[1,08 \ 1,76]^T$.	47
Figura 7	Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$) da simulação do sistema (1), com (80); com Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (82), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle(18) e (81), representado pela curva (- -).	47
Figura 8	Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{L}_r$, função de Lyapunov $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$ ($x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$), entrada de controle $u(t) = x_{N_3}(t)$ e sinal $u_N(t)$, para o sistema (1) e (80); para Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (82), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle $u_N(t) = -K x_N(t)$ e (81), representado pela curva (- -).	48
Figura 9	Sistema de absorção de vibrações.	49

Figura 10	Variáveis de estado auxiliares $(x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T)$ da simulação do sistema (1), com (84); com Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).	52
Figura 11	Variáveis de estado da simulação do sistema (1), com (84); com Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).	53
Figura 12	Entrada de controle $u_1(t) = x_{N_5}(t)$, $u_2(t) = x_{N_6}(t)$ e sinal $u_N(t)$, para o sistema (1) e (80); para Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).	53
Figura 13	Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{I}_r$, função de Lyapunov $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$ ($x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$), para o sistema (1) e (80); para Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).	54
Figura 14	Região de factibilidade obtida minimizando η com $\bar{w} = 0,004$ fixo, $\mu_0 = 1$: com Teoremas 1 e 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (- -); Teoremas 2 e 3 e Lema 2 representado por (-).	54
Figura 15	Região de factibilidade obtida minimizando \bar{w} com $\eta = 9 \times 10^8$ fixo, $\mu_0 = 1$: com Teoremas 1 e 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (- -); Teoremas 2 e 3 e Lema 2 representado por (-).	55
Figura 16	Esquema da lei de controle proposta (110) para o sistema linear incerto (105).	61
Figura 17	Esquema da lei de controle proposta (134) para o sistema linear incerto (105).	66
Figura 18	Região de factibilidade: com Teorema 15 ($\circ, *, \square$), Teorema 13, (\circ) e Teorema 3.2 dado em Silva <i>et al.</i> (2012) ($\circ, *$) com $\mu = 1 \times 10^{-5}$.	87
Figura 19	Região factível utilizando o Lema 4: com Teorema 19, representado por (- -) e Teorema 21 representado por (-).	88

Figura 20	Regiões elipsoidais, regiões de operação e trajetória T para a condição inicial $x(0) = A_1^{-1}[0,9 \ 3,4]^T$: com $\check{\mathcal{E}}_{L_\sigma}(P, 1)$, região de operação \mathcal{U}_{L_σ} para o Teorema 21 com Lema 2; com $\check{\mathcal{E}}_L(P, 1)$, região de operação \mathcal{U}_L para o Teorema 19 com Lema 2.	88
Figura 21	Região elipsoidal $\check{\mathcal{E}}(P, 1)$; região de operação \mathcal{U} ; trajetória T para a condição inicial $x(0) = A_1^{-1}[1,91 \ 4]^T$ para o Teorema 21 com o Lema 2.	90
Figura 22	Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($\hat{x}(t)$) da simulação do sistema (191), com (239) para o Teorema 21 com o Lema 2.	90
Figura 23	Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{I}_r$, função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, entrada de controle $u(t)$, para o sistema sistema (191), com (239) para o Teorema 21 com o Lema 2.	91
Figura 24	Região factível: com Teorema 16, representado por (-) e para o Teorema 14 não foram obtidos pontos factíveis.	92
Figura 25	Região factível utilizando o Lema 4: com Teorema 20 (-) e Teorema 22 (-).	93
Figura 26	Regiões elipsoidais $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$, $\check{\mathcal{E}}(P, \kappa^{-1}\varepsilon)$ e $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$; região de operação \mathcal{U} ; trajetórias T_1 e T_2 para $w(t) = 0$ e trajetórias T_3 e T_4 para $w(t) \neq 0$ e Teorema 22 com Lema 2.	94
Figura 27	Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($\hat{x}(t)$) da simulação do sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com o Lema 2.	95
Figura 28	Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{I}_r$, entrada de controle $u(t)$, distúrbio externo $w(t)$, derivada do distúrbio $\dot{w}(t)$, para o sistema sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com Lema 2.	95
Figura 29	Saída $y(t)$, derivada da saída $\dot{y}(t)$, para o sistema sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com o Lema 2.	96
Figura 30	Para $w(t) \neq 0$, γ para $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$, $I_1 = \frac{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}$, $I_2 = \frac{\int_0^\infty \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt}{\int_0^\infty \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt}$ para o sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com o Lema 2.	96
Figura 31	Esquema da lei de controle proposta (257) para o sistema linear incerto (250).	100
Figura 32	Esquema da lei de controle proposta (44) para o sistema linear incerto sujeito à saturação do atuador (1).	103

Figura 33	Região factível: com Teorema 3.2 em Silva <i>et al.</i> (2012), representado por (\circ) , Teorema 25, representado por $(\circ,*)$, e Teorema 27, representado por $(\circ,*,\square)$.	106
Figura 34	Custo garantido: Teorema 26 representado por $(- -)$ e Teorema 28, representado por $(-)$.	107
Figura 35	Integrais $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^6 y(t)^T y(t) dt}{\int_0^6 w(t)^T w(t) dt}$ representado por $(-)$, $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^6 \tilde{y}(t)^T \tilde{y}(t) dt}{\int_0^6 \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt}$ representado por $(- -)$, $\gamma_r(t) < \gamma = 510,8621$.	109
Figura 36	Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($\tilde{x}(t)$) para o Teorema 28.	109
Figura 37	Saída $y(t)$ e saída auxiliar $\tilde{y}(t)$ para o Teorema 28.	110
Figura 38	Modelo de suspensão ativa de $\frac{1}{4}$ do veículo.	111
Figura 39	Região de factibilidade obtida minimizando ξ com $\gamma = \sqrt{\xi}$, mantendo $\eta = 1 \times 10^9$ fixo e $\mu_0 = 1$ no Teorema 3: com Teorema 26 representado pelas curvas tracejadas e o Teorema 28 representado pelas curvas contínuas.	113
Figura 40	Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.	115
Figura 41	Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.	116
Figura 42	Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 1,455 \text{ kg}$.	116
Figura 43	Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 1,455 \text{ kg}$.	117
Figura 44	$\gamma_r(t) = \frac{\int_0^{15} y(t)^T y(t) dt}{\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt}$, $\gamma_{r_d}(t) = \frac{\int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt}{\int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt}$ para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.	117
Figura 45	$I_y = \int_0^{15} y(t)^T y(t) dt$, $I_{y_d} = \int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$, $I_w = \int_0^{15} w(t)^T w(t) dt$, $I_{w_d} = \int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt$: para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ representada por $(- -)$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$ representada por $(-)$.	118

- Figura 46 Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 2,45 \text{ kg}$. 119
- Figura 47 Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$. 119
- Figura 48 Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 1,455 \text{ kg}$. 120
- Figura 49 Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 1,455 \text{ kg}$. 120
- Figura 50 $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^{15} y(t)^T y(t) dt}{\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt}$, $\gamma_{r_d}(t) = \frac{\int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt}{\int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt}$ para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$. 121
- Figura 51 $I_y = \int_0^{15} y(t)^T y(t) dt$, $I_{y_d} = \int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$, $I_w = \int_0^{15} w(t)^T w(t) dt$, $I_{w_d} = \int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt$: para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ representada por (- -) e $M_s = 2,45 \text{ kg}$ representada por (-). 121

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Combinações para mudanças de variáveis na descrição da saturação por uma combinação convexa para $m = 2$.	29
Tabela 2	Combinações para mudanças de variáveis na descrição da saturação por uma combinação convexa.	29
Tabela 3	Parâmetros do sistema de suspensão ativa (QUANSER, 2009).	112

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathfrak{R}	Conjunto dos números reais.
\mathfrak{R}^n	Conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais.
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais.
Z_+	Conjunto dos números inteiros positivos.
\mathbb{I}_r	Conjuntos dos números $\{1, 2, \dots, r\}$.
$\text{co} = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$	Conjunto das combinações convexas dos vetores w_i , $\forall i \in \mathbb{I}_r$; $w \in \text{co} = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ se e somente se $w = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i$, $w_i > 0$ e $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$.
$\text{diag} \{M_1, M_2, \dots, M_r\}$	Matriz bloco-diagonal cujos elementos diagonais são M_1, M_2, \dots, M_r .
$\lambda_{\max}(A)$	Maior autovalor da matriz A .
$\lambda_{\min}(A)$	Menor autovalor da matriz A .
$M_{(l)}$	Representa a l -ésima linha de uma matriz M .
m_{lj}	Representa o elemento que está na linha l coluna j da matriz M .
$M_{j(l)}$	Representa a l -ésima linha da matriz M_j , $\forall j \in \mathbb{I}_r$.

$x_l(t)$	Representa o elemento l do vetor $x(t)$.
$sgn(u_l(t))$	Representa a função sinal para todo $l \in \mathbb{I}_r$, $sgn(u_l(t)) = \begin{cases} 1, & u_l(t) > 0 \\ 0, & u_l(t) = 0 \\ -1 & u_l(t) < 0 \end{cases} .$
$\min\{a, b\}$	Representa o menor valor entre a e b .
$\text{sat}(u(t)) = [\text{sat}(u_1(t)) \quad \cdots \quad \text{sat}(u_m(t))]^T$	Saturação do vetor $u(t)$, com $\text{sat}(u_l(t)) = sgn(u_l(t)) \min\{\rho_l, u_l(t) \}$.
M^T	Transposta da matriz real M .
$M > (\geq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (se- midefinida) positiva.
$M < (\leq) 0$	M é uma matriz simétrica e definida (se- midefinida) negativa.
I	Matriz identidade de ordem apropriada.
$ z $	Valor absoluto de um número real z .
$\ x\ $	Norma Euclidiana do vetor $x \in \mathfrak{R}^n$: $\ x\ = \sqrt{x^T x}$.
$\ A\ $	Norma Euclidiana da matriz $A \in \mathfrak{R}^{n \times m}$: $\ A\ = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$.
$\arg \min_{i \in \mathbb{I}_r}^* \{h_i\}$	Menor índice $i \in \mathbb{I}_r$ tal que, para o con- junto $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$, $h_i = \min_{i \in \mathbb{I}_r} \{h_i\}$; por exemplo, dado um conjunto $H = \{h_1 = 4, h_2 = 2, h_3 = 5, h_4 = 3, h_5 = 2\}$, sendo $r = 5$, então $\arg \min_{i \in \mathbb{I}_r}^* \{h_i\} = \min\{2, 5\} = 2$.
$\partial \mathcal{E}$	Representa a fronteira do conjunto \mathcal{E} .

$\mathcal{E} \setminus \partial \mathcal{E}$	Representa o do conjunto \mathcal{E} menos a sua fronteira.
$\Omega \subset \mathfrak{R}$	Intervalo aberto.
$L^2(\Omega)$	Conjunto de todas as trajetórias $f(t)$ tais que $\ f(t)\ _2 = (\int_{\Omega} f(t)^T f(t) dt)^{1/2} < \infty$.
$L^1_{loc}(\Omega)$	Espaço das funções localmente integráveis em Ω .
$C^k(\Omega)$	Espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω .
$C^k_0(\Omega)$	Conjunto das funções $C^k(\Omega)$ com $f = 0$ em ∂I , $k \geq 0$.
$C^\infty_0(\Omega)$	Espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω .
$supp(f) = \overline{\{t \in \Omega : f(t) \neq 0\}}$	O suporte de f , denotado por $supp(f)$, é o fecho, em Ω , do conjunto dos pontos t pertencentes a Ω , em que f não se anula.
$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev com norma $\ f(t)\ _{W^{1,2}} = (\ f(t)\ _2 + \ \dot{f}(t)\ _2)^{1/2}$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	20
2	CLASSE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS SUJEITO À SATURAÇÃO DO ATUADOR USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA	25
2.1	CONTROLE DERIVATIVO COM SATURAÇÃO DO ATUADOR	25
2.1.1	Descrição da saturação do sinal de controle como combinação convexa	26
2.1.2	Representação do sistema através da descrição da saturação do sinal de controle como combinação convexa	29
2.2	CONTROLE ROBUSTO DA DINÂMICA AUXILIAR COM SATURAÇÃO DO ATUADOR	31
2.2.1	Relação entre a dinâmica auxiliar e a dinâmica da planta	34
2.3	CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO PARA A DINÂMICA AUXILIAR	36
2.4	EXEMPLOS	44
2.4.1	Exemplo 1	44
2.4.2	Exemplo 2	48
2.5	CONCLUSÕES PARCIAIS	55
3	CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES SUJEITO À SATURAÇÃO NO ATUADOR USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA COM DINÂMICA AUXILIAR SEM INTEGRADOR	56
3.1	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	56
3.2	SISTEMAS LINEARES INCERTOS SUJEITO A UM DISTÚRBO EXTERNO	60
3.3	CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ - MATRIZ DE ENTRADA CONHECIDA	61
3.4	CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO - MATRIZ DE ENTRADA CONHECIDA	65
3.5	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SUJEITO À SATURAÇÃO DO ATUADOR E DISTÚRBO EXTERNO	74
3.5.1	O problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação	76

3.6	EXEMPLOS	86
3.6.1	Exemplo 3	86
3.7	CONCLUSÕES PARCIAIS	97
4	CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES COM REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA PARA UMA DINÂMICA AUXILIAR COM INTEGRADOR	98
4.1	SISTEMAS LINEARES INCERTOS SUJEITO A UM DISTÚRBO EXTERNO	98
4.2	CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ - MATRIZ DE ENTRADA INCERTA	100
4.3	CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO - MATRIZ DE ENTRADA INCERTA	102
4.4	EXEMPLOS NÚMERICOS E IMPLEMENTAÇÃO	105
4.4.1	Exemplo 4	105
4.4.2	Exemplo 6: Implementação prática utilizando um sistema de suspensão ativa de bancada com falha no atuador	110
4.5	CONCLUSÕES PARCIAIS	122
5	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	123
5.1	CONCLUSÕES	123
5.2	PERSPECTIVAS FUTURAS	124
5.3	ARTIGO COMPLETO PUBLICADO EM PERIÓDICO	125
5.4	ARTIGO ACEITO EM CONGRESSO	125
	REFERÊNCIAS	126

1 INTRODUÇÃO

O interesse para o estudo da realimentação derivativa vem do fato que em sistemas mecânicos que utilizam acelerômetros como sensores para medir sinais desses sistemas, é mais fácil de se medir a derivada do vetor de estado do que o vetor de estado, normalmente composto pelas posições e velocidades dos sistemas. A partir da aceleração é possível obter a velocidade com boa precisão, porém para a estimação da posição o resultado poderá ter um acúmulo de erros e não representará adequadamente o deslocamento do sistema (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004). Com esta metodologia, os sinais usados na realimentação em sistemas mecânicos são as velocidades (derivadas das posições) e as acelerações (derivadas das velocidades), que são as derivadas das variáveis de estado do sistema. Devido à estrutura simples e ao baixo custo operacional, os acelerômetros têm sido aplicados nas indústrias para a solução de vários tipos de problemas de engenharia.

A realimentação derivativa pode ser útil na solução de problemas práticos em que a derivada do vetor de estado é mais fácil de se obter do que o vetor de estado, por exemplo, em sistemas de suspensão ativa de automóveis (REITHMEIER; LEITMANN, 2003; SILVA *et al.*, 2013; ASSUNÇÃO *et al.*, 2007). Em Yazici e Sever (2017b) é proposto um projeto de controladores com realimentação de saída derivativo para o controle ativo de vibração de um sistema de suspensão de veículos; o controle de vibrações em pontes suspensas por cabos é encontrado em Duan, Ni e Ko (2005); um projeto de controlador LQR de realimentação derivativa para o controle de vibração de uma plataforma *offshore* tipo jaqueta de aço é proposto em Yazici e Sever (2017a).

Projetos de controladores para sistemas mecânicos, incluindo o controle de vibrações, utilizando realimentação derivativa podem ser encontrados em Abdelaziz e Valášek (2005), Cardim *et al.* (2007), Abdelaziz e Valášek (2004) e Rossi *et al.* (2018). Em Silva *et al.* (2012) foram propostos métodos baseados em LMI (do inglês Linear Matrix Inequality) para sistemas lineares incertos com realimentação derivativa, empregando técnicas de flexibilização das condições de estabilidade, primeiramente pela inserção de variáveis extras consideradas no Lema de Finsler, e posteriormente com o incremento de um escalar extra (que é encontrado através de um procedimento de busca). Já em Silva *et al.* (2011) são utilizadas técnicas de flexibilização das condições de estabilidade, primeiramente pela inserção de variáveis extras consideradas no Lema da Projeção Recíproca, e posteriormente com o incremento de um escalar extra (que é encontrado através de um procedimento de busca). Em ambos artigos houve um aumento na relaxação das condições.

O controle chaveado pode ser usado para obter um melhor desempenho em comparação ao uso de um ganho constante de realimentação na estrutura de controle. Nesse sentido, foi proposto em Souza *et al.* (2013) um controlador com ganho chaveado, para plantas lineares e invariantes no tempo com incertezas politópicas, que oferece uma alternativa menos conservadora ao uso de um ganho constante na realimentação do vetor estado. Estratégias semelhantes foram aplicadas a sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, considerando uma candidata a função de Lyapunov do tipo quadrática (SOUZA *et al.*, 2014) e uma candidata a função Lyapunov de tipo mínimo (SOUZA *et al.*, 2014a). O procedimento proposto em Alves *et al.* (2016) também contempla uma região de operação e saturação do atuador no projeto do controlador chaveado. Além disso Oliveira *et al.* (2018) consideram o índice de desempenho \mathcal{H}_∞ nesta estrutura. É importante notar que todos os casos acima mencionados usam o vetor de estado para compor o sinal de controle.

Em Moreira (2015), são apresentadas estratégias para utilizar o controle chaveado para uma classe de sistemas lineares incertos utilizando realimentação derivativa. A metodologia proposta é apresentada em duas partes. A primeira seleciona um ganho K_σ , $\sigma \in \mathbb{I}_r$ em um conjunto de ganhos, por meio de uma lei de chaveamento que retorna o menor valor da derivada temporal da função de Lyapunov quadrática ($V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$) (SOUZA *et al.*, 2014). A segunda utiliza uma função de Lyapunov quadrática por partes ($V(x(t)) = x(t)^T P_k x(t)$), $k \in \mathbb{I}_r$, é proposto um controlador $K_{v\sigma}$, $v \in \mathbb{I}_f$, $\sigma \in \mathbb{I}_r$, que é especificada através de dois estágios, sendo que o primeiro estágio é baseado em Geromel e Korogui (2006) e Chen *et al.* (2012), no qual é selecionada uma matriz simétrica definida positiva P_k , que minimiza a função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo. Posteriormente, escolhe-se um ganho do controlador que minimiza a derivada temporal da função de Lyapunov. Então, novas condições de estabilidade foram estabelecidas e algumas condições são baseadas em BMIs (do inglês, *Bilinear Matrix Inequality*) (SOUZA *et al.*, 2014).

A saturação dos atuadores está presente em grande parte das aplicações práticas devido às restrições operacionais nos equipamentos. Em Hu, Lin e Chen (2002) o domínio de atração da origem para um sistema linear saturado com realimentação do vetor de estado é estimado utilizando uma função quadrática de Lyapunov. Uma função de Lyapunov quadrática composta é apresentada em Hu e Lin (2003) para sistemas lineares contínuos no tempo com saturação, que mostram que, para um sistema linear saturado, a casca convexa de um conjunto elipsoidal invariantes é também invariante. Projeto de controladores chaveados são proposto em Alves *et al.* (2016) para uma classe de sistemas não lineares incertos, descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno, dentro de uma região de operação no espaço de estados. Esses resultados foram estabelecidos considerando uma planta sujeita à saturação do atuador, empregando desigualdades matriciais lineares, e mostram que o ponto de equilíbrio dos sistemas controlados é localmente assintoticamente estável para uma taxa de decaimento adequada e todas as condições iniciais em uma região, se as condições de projeto forem satisfeitas.

O controle \mathcal{H}_∞ é uma técnica que reduz o efeito da entrada exógena na saída do sistema e, conseqüentemente, melhora o desempenho do sistema. O problema de projetar um sistema de controle \mathcal{H}_∞ via realimentação conjunta de estado e derivada de estado para sistemas fotovoltaicos, baseado em uma abordagem de LMIs é apresentado em Kaewpraek e Assawinchaichote (2016). Para sistemas lineares contínuos no tempo, com incertezas do tipo politópicas e realimentação de estado, novas LMIs são apresentadas, introduzindo uma nova matriz variável, para o cálculo da norma \mathcal{H}_∞ e posteriormente é apresentada uma aplicação no controle dos ângulos de guinada de um sistema de satélite (XIE, 2008).

Os autores Ren e Zhang (2010) lidam com o problema do controle \mathcal{H}_∞ robusto para sistemas descritores incertos, para a realimentação proporcional e derivativa do vetor de estado. Em Oliveira *et al.* (2018) foi proposto um projeto de um controlador \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de plantas não lineares incertas, descrita por modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Aliyu e Boukas (2011) generalizaram a formulação da teoria de controle não linear \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para espaços de Sobolev. Segundo os autores, essa nova formulação permite que sejam projetados melhores controladores em termos dos quesitos de erro de regime e resposta transitória. Apresentam condições suficientes para a solução do problema do controle ótimo utilizando novas equações de Hamilton-Jacobi e abordam os problemas de realimentação de estado e saída.

Tendo em vista o panorama apresentado, visando contemplar uma área de pesquisa ainda não desenvolvida, que utiliza realimentação derivativa com controladores chaveados, esse texto aborda uma classe de sistemas lineares com incertezas invariantes no tempo, em que apenas a derivada do vetor de estado é considerada para a realimentação. Neste cenário, a estratégia proposta utiliza dinâmicas auxiliares, cujo vetor de estado está disponível para realimentação, para controlar a planta original e as condições de projeto garantem um desempenho \mathcal{H}_∞ ao sistema realimentado. Procedimentos para projetos de controladores são apresentados para o caso sem distúrbio, de modo que o ponto de equilíbrio do sistema de malha fechada seja localmente assintoticamente estável, com uma taxa de decaimento apropriada, para todas as condições iniciais e domínio de atração em uma região elipsoidal, que está dentro de uma determinada região definida para estas novas dinâmicas.

No Capítulo 2, baseado em Moreira (2015), mostra-se uma representação alternativa da saturação do vetor de controle e o novo vetor de estado (WOLMUTH *et al.*, 2019), define-se a região de operação e apresentam-se as LMIs que garantem a estabilidade local para o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada, para uma lei de controle com ganho constante e com uma lei de controle chaveada. Restrições que garantem a redução das normas dos ganhos da realimentação são inseridas e mostra-se que se um sistema linear pode ser controlado com um ganho constante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada com o procedimento proposto.

Uma outra dinâmica auxiliar é proposta no Capítulo 3, sem a utilização de integradores para

obter a entrada de controle. Primeiramente propõe-se um projeto de controle chaveado sem saturação e sem região de operação, apresentam-se as LMIs que garantem que o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada seja globalmente assintoticamente estável, e comparam-se os resultados obtidos com o encontrado em Silva *et al.* (2012). Em uma segunda abordagem, utiliza-se o procedimento de projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado, descrito em Oliveira *et al.* (2018), garantindo um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ ao sistema realimentado. A saturação do sinal de controle será representada por uma combinação convexa apresentada em Wolmuth *et al.* (2019) diferente da proposta em Cao e Lin (2003), Hu e Lin (2003), Alves *et al.* (2016), garantindo um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ ao sistema realimentado e assegurando que todas as trajetórias do vetor de estado permanecem dentro da região de operação. Em ambas as abordagens garante-se que se um sistema linear pode ser controlado com um ganho constante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada.

O Capítulo 4, propõe um projeto de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas lineares incertos mais ampla dos que as apresentadas nos capítulos anteriores. Para um distúrbio externo não nulo e com energia limitada, as condições de projeto visam resolver o problema de controle \mathcal{H}_∞ , garantindo um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ ao sistema realimentado. Apresentam-se as LMIs que garantem a estabilidade para o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada, para uma lei de controle com ganho constante e com uma lei de controle chaveada. Mostra-se que se um sistema linear pode ser controlado com um ganho constante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada com o procedimento proposto. Para os Capítulos 3 e 4 tem-se a garantia da taxa de decaimento e da norma \mathcal{H}_∞ para a planta original a partir das garantias fornecidas pelos teoremas desenvolvidos para a planta auxiliar.

O Capítulo 5 apresenta as conclusões finais e as perspectivas futuras.

Os resultados numéricos e a implementação prática, descritos ao longo do trabalho, foram obtidos utilizando o *software* MatLab[®] e o *solver* LMILab (GAHINET *et al.*, 1994), interfaceado pelo YALMIP (LÖFBERG, 2004), para resolver as condições de projeto e realizar as simulações.

Notações: \mathfrak{R} representa o conjunto dos números reais, Z_+ simboliza o conjunto dos números inteiros positivos, \mathfrak{R}^n e $\mathfrak{R}^{n \times m}$ denotam o conjunto dos vetores $n \times 1$ com elementos reais e o conjunto das matrizes $n \times m$ com elementos reais, respectivamente. Define-se o conjunto $\mathbb{I}_r = \{1, 2, \dots, r\}$, $r \in Z_+$, $\arg \min_{k \in \mathbb{I}_r} \{h_k\}$ representa o menor índice $j \in \mathbb{I}_r$ tal que $h_j = \min_{k \in \mathbb{I}_r} \{h_k\}$. A combinação convexa dos vetores w_i , $\forall i \in \mathbb{I}_r$, é dada por $co = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$. Para matrizes simétricas, o símbolo $(*)$ denota cada um dos seus blocos simétricos. A matriz bloco diagonal formada pelas matrizes M_1, M_2, \dots, M_r é representada por $diag\{M_1, M_2, \dots, M_r\}$, $M_{(l)}$ representa a l -ésima linha de uma matriz M , $M > 0$ ($M < 0$, $M \geq 0$ e $M \leq 0$) significa que a matriz M é definida positiva (definida negativa, semi-definida positiva, semi-definida negativa), respectivamente. $\|f(t)\|_2^2 = \int_0^\infty f(t)^T f(t) dt$ é o quadrado da norma de uma trajetória $f(t)$,

para tempo contínuo e $L_2[0, \infty)$ é o conjunto de todas as trajetórias $f(t)$ tais que $\|f(t)\|_2^2 < \infty$. $W^{1,2}[0, \infty)$ representa o espaço de Sobolev com norma $\|f(t)\|_{W^{1,2}} = (\|f(t)\|_2 + \|\dot{f}(t)\|_2)^{1/2}$.

2 CLASSE DE SISTEMAS LINEARES INCERTOS SUJEITO À SATURAÇÃO DO ATUADOR USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA

Neste capítulo considera-se uma classe de sistemas lineares com incertezas invariantes no tempo, em que apenas a derivada do vetor de estado é considerada para realimentação. Neste cenário, a estratégia proposta utiliza uma dinâmica auxiliar, cujo vetor de estado está disponível para realimentação e este novo vetor de estado é utilizado para controlar a planta original. Em seguida, dois projetos de controladores são apresentados para que o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada seja localmente assintoticamente estável, com uma taxa de decaimento apropriada, para todas as condições em uma região elipsoidal, que está contida em uma determinada região definida para essa nova dinâmica.

2.1 CONTROLE DERIVATIVO COM SATURAÇÃO DO ATUADOR

Considere o sistema linear com incertezas invariantes no tempo, sujeito à saturação no atuador, dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B\text{sat}(u(t)), \quad (1)$$

sendo $A(\alpha) \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$ as matrizes que representam a dinâmica do sistema incerto, $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ o vetor de estado e $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ o vetor de entrada. A matriz $A(\alpha)$ é representada pela combinação convexa de vértices descrita por, $A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i$ como feito em Boyd *et al.* (1994), com $\alpha \in \mathcal{P}$,

$$\mathcal{P} = \left\{ \alpha = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{r_1}]^T : \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0 \quad e \quad r_1 \in \mathbb{Z}_+ \right\}. \quad (2)$$

A saturação do sinal de controle é dada por

$$\text{sat}(u(t)) = [\text{sat}(u_1(t)) \quad \dots \quad \text{sat}(u_{n_u}(t))]^T, \quad \text{sat}(u_l(t)) = \text{sgn}(u_l(t)) \min\{\rho_l, |u_l(t)|\},$$

com $u(t) = [u_1(t) \quad \dots \quad u_{n_u}(t)]^T$, sendo $\rho_l > 0$, $\forall l \in \mathbb{I}_{n_u}$, constantes reais conhecidas (HU; LIN, 2003; HU; LIN; CHEN, 2002; ALVES *et al.*, 2016).

Dado o sistema linear incerto (1), considere que o posto de $A(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathcal{P}$, é completo e que a derivada do vetor de estado está disponível para realimentação. Então, tem-se que

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B\text{sat}(u(t)) \quad (3)$$

$$A(\alpha)x(t) = \dot{x}(t) - B\text{sat}(u(t)).$$

Observe que, como a derivada do vetor de estado e a saturação do vetor de controle estão disponíveis, tem-se de (3) que $A(\alpha)x(t)$ também está disponível para realimentação. Agora, a partir de (3) é possível definir um novo vetor de estado do sistema (1) como feito por Moreira (2015) tomando:

$$\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t). \quad (4)$$

De (3) e (4), temos que $\hat{x}(t)$ está disponível para realimentação. Além disso, derivando (4) obtém-se

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\alpha)\dot{x}(t), \quad (5)$$

pois considera-se o sistema linear com incertezas invariantes no tempo.

Pré-multiplicando (1) por $A(\alpha)$, e considerando (4) e (5), tem-se que

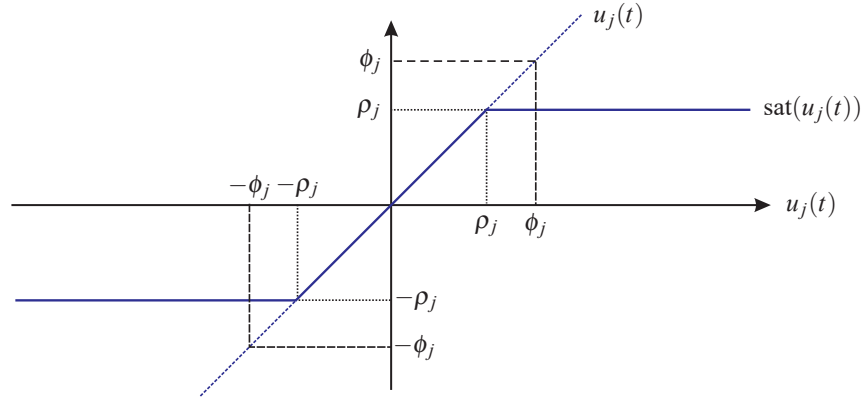
$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\alpha)\hat{x}(t) + A(\alpha)B\text{sat}(u(t)). \quad (6)$$

Observação 1. (WOLMUTH *et al.*, 2019) *Para a realimentação derivativa estudada nesta tese, a suposição de que a matriz $A(\alpha)$ é uma matriz de posto completo para todo α definido em (2) é uma condição necessária para a estabilização da planta dada em (1) (ABDELAZIZ; VALÁŠEK, 2004; ASSUNÇÃO *et al.*, 2007; MOREIRA *et al.*, 2010; SILVA *et al.*, 2012b; SILVA *et al.*, 2012a).*

2.1.1 Descrição da saturação do sinal de controle como combinação convexa

Na Figura 1 é apresentada a representação gráfica da saturação do sinal de controle $u_j(t)$ e uma região especificada $|u_j(t)| \leq \phi_j$.

Figura 1 - Representação de $\text{sat}(u_j(t))$ como uma função de $u_j(t)$ e sua região de operação.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Dado o sistema linear incerto, assume-se que $\phi_j > 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_{n_u}$, $-\phi_j \leq u_j \leq \phi_j$ e utiliza-se uma representação alternativa para a saturação de $u(t)$ dada em Wolmuth *et al.* (2019):

$$\text{sat}(u(t)) = \begin{bmatrix} \text{sat}(u_1(t)) \\ \vdots \\ \text{sat}(u_{n_u}(t)) \end{bmatrix}, \quad \text{sat}(u_j(t)) = u_j(t)\varphi_j(t) \quad (7)$$

com

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |u_j(t)| \leq \rho_j \\ \rho_j/|u_j(t)| & \text{se } |u_j(t)| > \rho_j \end{cases}, \quad \max\{\varphi_j(t)\} = 1 \quad \text{e} \quad \min\{\varphi_j(t)\} = \rho_j/\phi_j. \quad (8)$$

Assim, representa-se a função $\varphi_j(t)$ pela seguinte combinação convexa

$$\varphi_j(t) = \tau_{1(j)}(t)v_{1(j)} + \tau_{2(j)}(t)v_{2(j)}, \quad (9)$$

com $v_{1(j)} = 1$, $v_{2(j)} = \rho_j/\phi_j$, $\tau_{1(j)}(t) + \tau_{2(j)}(t) = 1$, $\tau_{1(j)}(t) \geq 0$, $\tau_{2(j)}(t) \geq 0$, para todo $j \in \mathbb{I}_{n_u}$.

Lema 1. (WOLMUTH *et al.*, 2019) *Considere que existam constantes $\phi_j > 0$, $j \in \mathbb{I}_{n_u}$, tais que $-\phi_j \leq u_j \leq \phi_j$ para todo $j \in \mathbb{I}_{n_u}$. Defina $Z_s \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_u}$, $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$, as matrizes diagonais cujos elementos (j, j) são todas as combinações possíveis de $v_{1(j)} = 1$ e $v_{2(j)} = \rho_j/\phi_j$, para todo $j \in \mathbb{I}_{n_u}$. Então, de (7)-(9), obtém-se:*

$$\text{sat}(u(t)) = Z(\lambda)u(t), \quad \text{com} \quad Z(\lambda) = \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s Z_s, \quad (10)$$

com o vetor incerto $\lambda \in \mathcal{L}$,

$$\mathcal{L} = \left\{ \lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_{2^{n_u}}]^T : \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1, \lambda_s \geq 0 \right\} \text{ e } 2^{n_u} \in Z_+.$$

Demonstração. Para $n_u = 1$, observe que (10) contém, de (7) - (9), para $Z_1 = v_{1(1)} = 1$, $Z_2 = v_{2(1)} = \rho_1/\phi_1$, $\lambda_1 = \tau_{1(1)}(t)$ e $\lambda_2 = \tau_{2(1)}(t)$.

Agora, para $n_u = 2$, tem-se $u(t) = [u_1(t) \quad u_2(t)]^T$, $-\phi_1 \leq u_1(t) \leq \phi_1$, $-\phi_2 \leq u_2(t) \leq \phi_2$, com ϕ_1 e ϕ_2 conhecidos, e de (7) - (9), lembrando que $\tau_{1(j)}(t) + \tau_{2(j)}(t) = 1$, $\tau_{1(j)}(t) \geq 0$, $\tau_{2(j)}(t) \geq 0$, para todo $j \in \mathbb{I}_{n_u}$,

$$\begin{aligned} \text{sat}(u(t)) &= \begin{bmatrix} \text{sat}(u_1(t)) \\ \text{sat}(u_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\tau_{1(1)}(t)v_{1(1)} + \tau_{2(1)}(t)v_{2(1)} \right) u_1(t) \\ \left(\tau_{1(2)}(t)v_{1(2)} + \tau_{2(2)}(t)v_{2(2)} \right) u_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left(\tau_{1(2)}(t) + \tau_{2(2)}(t) \right) \left(\tau_{1(1)}(t)v_{1(1)} \right) u_1(t) \\ \left(\tau_{1(1)}(t) + \tau_{2(1)}(t) \right) \left(\tau_{1(2)}(t)v_{1(2)} \right) u_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \left(\tau_{1(2)}(t) + \tau_{2(2)}(t) \right) \left(\tau_{2(1)}(t)v_{2(1)} \right) u_1(t) \\ \left(\tau_{1(1)}(t) + \tau_{2(1)}(t) \right) \left(\tau_{2(2)}(t)v_{2(2)} \right) u_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \tau_{1(1)}(t)\tau_{1(2)}(t) \begin{bmatrix} v_{1(1)} & 0 \\ 0 & v_{1(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \tau_{1(2)}(t)\tau_{2(1)}(t) \begin{bmatrix} v_{2(1)} & 0 \\ 0 & v_{1(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \tau_{1(1)}(t)\tau_{2(2)}(t) \begin{bmatrix} v_{1(1)} & 0 \\ 0 & v_{2(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} + \tau_{2(2)}(t)\tau_{2(1)}(t) \begin{bmatrix} v_{2(1)} & 0 \\ 0 & v_{2(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1(t)Z_1 + \lambda_2(t)Z_2 + \lambda_3(t)Z_3 + \lambda_4(t)Z_4]u(t). \end{aligned} \tag{11}$$

De (10), (11) e da Tabela 1, note que para $s = 1$: $j = 1 \Rightarrow l_1 = 1$, $j = 2 \Rightarrow l_2 = 1$ e $\lambda_1(t) = \tau_{l_1(1)}(t)\tau_{l_2(1)}(t) = \tau_{1(1)}(t)\tau_{1(2)}(t)$; $s = 2$: $j = 1 \Rightarrow l_1 = 2$, $j = 2 \Rightarrow l_2 = 1$ e $\lambda_2(t) = \tau_{l_1(1)}(t)\tau_{l_2(2)}(t) = \tau_{2(1)}(t)\tau_{1(2)}(t)$; $s = 3$: $j = 1 \Rightarrow l_1 = 1$, $j = 2 \Rightarrow l_2 = 2$ e $\lambda_3(t) = \tau_{l_1(1)}(t)\tau_{l_2(2)}(t) = \tau_{1(1)}(t)\tau_{2(2)}(t)$; $s = 4$: $j = 1 \Rightarrow l_1 = 2$, $j = 2 \Rightarrow l_2 = 2$ e $\lambda_4(t) = \tau_{l_1(1)}(t)\tau_{l_2(2)}(t) = \tau_{2(1)}(t)\tau_{2(2)}(t)$. A Tabela 1 apresenta todas as combinações desses elementos. Portanto, verifica-se (10) com $v_{1(1)} = v_{1(2)} = 1$, $v_{2(1)} = \rho_1/\phi_1$, $v_{2(2)} = \rho_2/\phi_2$, e de (9), $\sum_{s=1}^4 \lambda_s = \tau_{1(1)}(t)\tau_{1(2)}(t) + \tau_{2(1)}(t)\tau_{1(2)}(t) + \tau_{1(1)}(t)\tau_{2(2)}(t) + \tau_{2(1)}(t)\tau_{2(2)}(t) = (\tau_{1(1)}(t) + \tau_{2(1)}(t))(\tau_{1(2)}(t) + \tau_{2(2)}(t)) = 1$, em que

$$[Z_1|Z_2|Z_3|Z_4] = \begin{bmatrix} v_{1(1)} & 0 & v_{1(1)} & 0 & v_{2(1)} & 0 & v_{2(1)} & 0 \\ 0 & v_{1(2)} & 0 & v_{2(2)} & 0 & v_{1(2)} & 0 & v_{2(2)} \end{bmatrix}.$$

Assim, seguindo a mesma ideia, para todos os $n_u \geq 1$, $j \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$ obtém-se (10), definindo $s = 1 + \sum_{j=1}^{n_u} 2^{(j-1)}(l_j - 1)$, $\lambda_s = \prod_{j=1}^{n_u} \tau_{l_j}(j)(t) = \tau_{l_1(1)}(t)\tau_{l_2(2)}(t) \cdots \tau_{l_{n_u}}(n_u)(t)$, $l_j \in \mathbb{I}_2$ e as combinações apresentadas na Tabela 2.

Note que a Tabela 2 é criada para fazer a mudança de variáveis, sendo a ordem dos fatores $\tau_{l_j}(j)$ determinada pelo valor de j , sendo $j = 1$ a coluna mais à direita e $j = n_u$ a coluna mais à esquerda e antes do índices.

□

Tabela 1 - Combinações para mudanças de variáveis na descrição da saturação por uma combinação convexa para $m = 2$.

s	$l_2 \tau_{l_2}(2)$	$l_1 \tau_{l_1}(1)$
1	1	1
2	1	2
3	2	1
4	2	2

Fonte: Elaboração da própria autora.

Tabela 2 - Combinações para mudanças de variáveis na descrição da saturação por uma combinação convexa.

s	$l_{n_u} \tau_{l_{n_u}}(n_u)$	$l_{n_u-1} \tau_{l_{n_u-1}}(n_u-1)$	\dots	$l_2 \tau_{l_2}(2)$	$l_1 \tau_{l_1}(1)$
1	1	1	\dots	1	1
2	1	1	\dots	1	2
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
2^m	2	2	\dots	2	2

Fonte: Elaboração da própria autora.

2.1.2 Representação do sistema através da descrição da saturação do sinal de controle como combinação convexa

Substituindo (10) em (6)

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\alpha)\hat{x}(t) + A(\alpha)BZ(\lambda)u(t), \quad (12)$$

com $\lambda = [\lambda_1 \ \dots \ \lambda_{2^{n_u}}]^T$, $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$ para $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$ e $\alpha \in \mathcal{P}$ definido em (2). Assim,

segue de (12) que

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{s=1}^{2^{nu}} \lambda_s \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i B \sum_{s=1}^{2^{nu}} \lambda_s Z_s u(t). \quad (13)$$

Para reescrever a dinâmica em (13) em um único simplex, executa-se a seguinte mudança de variável: $\mu_k = \lambda_s \alpha_i$ com $k = r_1(s-1) + (i-1) + 1$ para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$ e $s \in \mathbb{I}_{2^{nu}}$ em (13). Após este procedimento, encontra-se

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{s=1}^{2^{nu}} \lambda_s \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i B \sum_{s=1}^{2^{nu}} \lambda_s Z_s u(t) \\ &= \lambda_1 \left\{ \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i B Z_1 u(t) \right\} + \cdots + \lambda_{2^{nu}} \left\{ \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i B Z_{2^{nu}} u(t) \right\} \\ &= \lambda_1 \{ \alpha_1 \{ A_1 \hat{x}(t) + A_1 B Z_1 u(t) \} \} + \cdots + \lambda_1 \{ \alpha_{r_1} \{ A_{r_1} \hat{x}(t) + A_{r_1} B Z_1 u(t) \} \} \\ &\quad + \cdots + \lambda_{2^{nu}} \{ \alpha_1 \{ A_1 \hat{x}(t) + A_1 B Z_{2^{nu}} u(t) \} \} + \cdots + \lambda_{2^{nu}} \{ \alpha_{r_1} \{ A_{r_1} \hat{x}(t) + A_{r_1} B Z_{2^{nu}} u(t) \} \} \\ &= \mu_1 \{ A_1 \hat{x}(t) + A_1 B Z_1 u(t) \} + \cdots + \mu_{r_1} \{ A_{r_1} \hat{x}(t) + A_{r_1} B Z_1 u(t) \} \\ &\quad + \mu_{r_1+1} \{ A_1 \hat{x}(t) + A_1 B Z_2 u(t) \} + \cdots + \mu_{2r_1} \{ A_{r_1} \hat{x}(t) + A_{r_1} B Z_2 u(t) \} \\ &\quad + \cdots + \mu_{(2^{nu}-1)r_1+1} \{ A_1 \hat{x}(t) + A_1 B Z_{2^{nu}} u(t) \} + \cdots + \mu_{2^{nu}r_1} \{ A_{r_1} \hat{x}(t) + A_{r_1} B Z_{2^{nu}} u(t) \}, \end{aligned} \quad (14)$$

com $k \in \mathbb{I}_r$, $r = 2^{nu}r_1$ o número de vértices da representação politópica, (12), sendo que $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$ e $\mu_k \geq 0$.

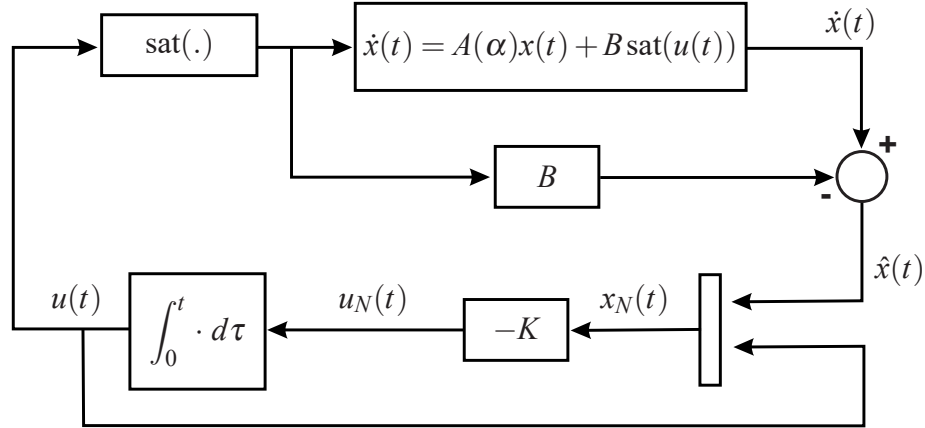
Em (14) considerando as definições abaixo:

$$\begin{aligned} \hat{A}_{f r_1+k} &= A_k, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, r_1\} \text{ e para cada } f \in \{0, 1, \dots, 2^{nu}-1\}, \\ \hat{Z}_k &= Z_s \text{ para } k = (s-1)r_1 + 1, \dots, sr_1 \text{ para cada } s \in \{1, \dots, 2^{nu}\}, \\ \hat{B}_k &= \hat{A}_k B \hat{Z}_k \text{ para todo } k \in \{1, \dots, r\}. \end{aligned} \quad (15)$$

por exemplo,

$$\begin{aligned} \text{para } f &= 0 \Rightarrow \hat{A}_k = A_k, \text{ para cada } k, \text{ ou seja,} \\ &\quad \hat{A}_1 = A_1, \dots, \hat{A}_{r_1} = A_{r_1}, \\ \text{para } f &= 1 \Rightarrow \hat{A}_{r_1+k} = A_k, \text{ para cada } k, \text{ ou seja,} \\ &\quad \hat{A}_{r_1+1} = A_1, \dots, \hat{A}_{2r_1} = A_{r_1}, \\ &\quad \vdots \\ \text{para } f &= 2^{nu}-1 \Rightarrow \hat{A}_{(2^{nu}-1)r_1+k} = A_k, \text{ para cada } k, \text{ ou seja,} \\ &\quad \hat{A}_{(2^{nu}-1)r_1+1} = A_1, \dots, \hat{A}_{2^{nu}r_1} = A_{r_1}, \\ \text{para } s &= 1 \Rightarrow \hat{Z}_k = Z_1 \text{ para } k = 1, \dots, r_1 \end{aligned}$$

Figura 2 - Esquema da lei de controle proposta (18) para o sistema linear incerto sujeito à saturação do atuador (1).



Fonte: Elaboração da própria autora.

$$\begin{aligned}
 &\text{para } s = 2 \Rightarrow \hat{Z}_k = Z_2 \quad \text{para } k = r_1 + 1, \dots, 2r_1 \\
 &\quad \quad \quad \vdots \\
 &\text{para } s = 2^{n_u} \Rightarrow \hat{Z}_k = Z_{2^{n_u}} \quad \text{para } k = (2^{n_u} - 1)r_1 + 1, \dots, 2^{n_u}r_1.
 \end{aligned}$$

Assim, definindo-se $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_r]^T$, tem-se de (14) e (15) que

$$\dot{\hat{x}}(t) = \sum_{k=1}^r \mu_k \{ \hat{A}_k \hat{x}(t) + \hat{B}_k u(t) \}. \quad (16)$$

Ou equivalentemente,

$$\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\mu) \hat{x}(t) + \hat{B}(\mu) u(t). \quad (17)$$

2.2 CONTROLE ROBUSTO DA DINÂMICA AUXILIAR COM SATURAÇÃO DO ATUADOR

Considere o sistema linear incerto sujeito à saturação do atuador (1). Utilizando a dinâmica auxiliar (17), propõe-se o esquema de controle apresentado na Figura 2. Note que a dinâmica da lei de controle é dada para $u_N(t) = \dot{u}(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ representada em (18)

$$u_N(t) = -Kx_N(t), \text{ com } x_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix}^T. \quad (18)$$

De (17) e (18) tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\mu) \hat{x}(t) + \hat{B}(\mu) u(t) \\ \dot{u} = u_N(t) = -Kx_N(t) \end{cases}, \quad (19)$$

que também pode ser representado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_N(t) &= \begin{bmatrix} \hat{A}(\mu) & \hat{B}(\mu) \\ \mathbf{0}_{n_u \times n_x} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} x_N(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_u} \\ I_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} u_N(t) \\ &= \sum_{k=1}^r \mu_k A_{N_k} x_N(t) + \sum_{k=1}^r \mu_k B_N u_N(t),\end{aligned}\quad (20)$$

com

$$x_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad A_{N_k} = \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ \mathbf{0}_{n_u \times n_x} & \mathbf{0}_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}, \quad B_N = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_x \times n_u} \\ I_{n_u \times n_u} \end{bmatrix},$$

\hat{A}_k e \hat{B}_k definidos em (15), ou equivalentemente (BARMISH, 1983)

$$\dot{x}_N(t) = A_N(\mu)(t)x_N(t) + B_N u_N(t). \quad (21)$$

É interessante notar que o sinal de controle $u(t)$ compõe o vetor de estado $x_N(t)$, portanto a restrição $|u_j(t)| \leq \phi_j$, utilizada para obter (20), pode ser vista como uma região de operação para o dinâmica auxiliar. Assim, considere matrizes $N = [\mathbf{0}_{n_u \times n_x} \quad I_{n_u \times n_u}] \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$, $P \in \mathfrak{R}^{(n_x + n_u) \times (n_x + n_u)}$ com $P = P^T > 0$, vetores $\phi = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{n_u}]^T \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $\rho = [\rho_1 \quad \dots \quad \rho_{n_u}]^T \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $\mathbb{I}_{n_u} = \{1, 2, \dots, n_u\}$, $\rho_j > 0$, $\phi_j \geq \rho_j$, para todo $j \in \mathbb{I}_{n_u}$ e uma constante positiva δ .

Sejam \mathcal{X} e $\mathcal{E}(P, \delta)$ os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{X} \triangleq \{x_N(t) \in \mathfrak{R}^{n_x + n_u} : |N_{(h)}x_N(t)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{I}_{n_u}\}, \quad (22)$$

com $N = [\mathbf{0}_{n_u \times n_x} \quad I_{n_u \times n_u}]$,

$$\mathcal{E}(P, \delta) \triangleq \{x_N(t) \in \mathfrak{R}^{n_x + n_u} : x_N(t)^T P x_N(t) \leq \delta\} \quad (23)$$

em que N e ϕ são conhecidas, $N_{(h)}$ representa a linha h da matriz N , ϕ_h o elemento h do vetor ϕ e uma candidata a função de Lyapunov $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015; ALVES *et al.*, 2016; OLIVEIRA *et al.*, 2018).

Teorema 1. *Considere o sistema linear sujeito à saturação no atuador descrito em (19)-(21) com lei de controle dada em (18) e uma região de operação com $x_N(t) \in \mathcal{X}$, $t \geq 0$ dada em (22) sendo $\phi \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $N = [\mathbf{0}_{n_u \times n_x} \quad I_{n_u \times n_u}] \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$ e $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$ conhecidos. Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{(n_x + n_u) \times (n_x + n_u)}$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que*

$$A_{N_k} X + X A_{N_k}^T - B_N M - M^T B_N^T + 2\beta X < 0, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)} X \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (25)$$

para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$, $k \in \mathbb{I}_r$. Então, a lei de controle (18), $u_N(t) = -Kx_N(t)$, com $K = MX^{-1}$, torna a origem do espaço de estados do sistema (21) localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ dado em (23) sendo que $\delta = 1$ e $P = X^{-1}$.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$, com $P = P^T > 0$. Defina $X = P^{-1}$, $M = KX$ e que as LMIs descritas em (24) e (25), para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$, $k \in \mathbb{I}_r$, são factíveis.

Então de (24) e $M = KX$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> A_{N_k}X + XA_{N_k}^T - B_N M - M^T B_N^T + 2\beta X \\ &= A_{N_k}X + XA_{N_k}^T - B_N KX - XK^T B_N^T + 2\beta X. \end{aligned} \quad (26)$$

Pré e pós-multiplicando (26) por $P = P^T > 0$, obtém-se

$$0 > PA_{N_k} + A_{N_k}^T P - PB_N K - K^T B_N^T P + 2\beta P. \quad (27)$$

Supondo $x_N(t) = 0$ e pré e pós-multiplicando (27) por $x_N(t)^T$ e $x_N(t)$, respectivamente, note que

$$x_N(t)^T [PA_{N_k} + A_{N_k}^T P - PB_N K - K^T B_N^T P + 2\beta P] x_N(t) < 0. \quad (28)$$

Multiplicando (28) por μ_k , com $\mu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$ para $k \in \mathbb{I}_r$, e somando todos os termos de $k = 1$ a r , considerando (21) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{k=1}^r \mu_k \left[x_N(t)^T (PA_{N_k} + A_{N_k}^T P - PB_N K - K^T B_N^T P + 2\beta P) x_N(t) \right] \\ &= x_N(t)^T \left[PA_N(\mu) + A_N(\mu)^T P - PB_N K - K^T B_N^T P \right] x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\ &= x_N(t)^T P \dot{x}_N(t) + \dot{x}_N(t)^T P x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) = \dot{V}(x_N(t)) + 2\beta V(x_N(t)). \end{aligned} \quad (29)$$

Pré e pós-multiplicando a LMI (25) por $\text{diag}\{1, P\}$ com $P = X^{-1}$, observe que

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)} \\ N_{(h)}^T & P \end{bmatrix} \geq 0. \quad (30)$$

Aplicando o Complemento de Schur (BOYD et al., 1994, p. 7 - 8) em (30), observe que

$$P - N_{(h)}^T \phi_h^{-2} N_{(h)} \geq 0. \quad (31)$$

Pré-multiplicando (31) por $x_N(t)^T = 0$ e pós-multiplicando por $x_N(t)$

$$x_N(t)^T P x_N(t) \geq x_N(t)^T N_{(h)}^T \phi_h^{-2} N_{(h)} x_N(t). \quad (32)$$

Se $x_N(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ definido em (23), então $x_N(t)^T P x_N(t) \leq 1$ e de (32) obtém-se

$$\begin{aligned} \phi_h^2 &\geq x_N(t)^T N_{(h)}^T N_{(h)} x_N(t), \\ \phi_h^2 &\geq |N_{(h)} x_N(t)|^2, \\ |N_{(h)} x_N(t)| &\leq \phi_h \quad \forall h \in \mathbb{I}_{n_u}. \end{aligned} \quad (33)$$

Portanto, $|N_{(h)} x_N(t)| = |u_h(t)| \leq \phi_h$ para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$. Estas condições permitem o uso dos resultados do Lema 1, para representar a planta (6) por (17) e a planta com dinâmica auxiliar por (21).

Então, se (25) é factível, para todo $x_N(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ tem-se $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$. De (29), para $x_N(t) = 0$, $\dot{V}(x_N(t)) < -2\beta V(x_N(t)) < 0$. De (23) se $x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ então, desde que (25) seja válida para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$, então $x_N(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ para todo $t \geq 0$.

Portanto, para $x_N(t) = 0$, $\dot{V}(x_N(t)) < -2\beta V(x_N(t))$, e o sistema de malha fechada (21) e (18) é localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento igual ou maior do que β (BOYD *et al.*, 1994, p. 66 - 67).

□

2.2.1 Relação entre a dinâmica auxiliar e a dinâmica da planta

No Teorema 1 garante-se que a origem do sistema (21) é localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ dado em (23). É necessário garantir que haja uma taxa de decaimento para o sistema (1) com vetor de estado $x(t)$. Para isso, utiliza-se o seguinte resultado apresentado em Boyd *et al.* (1994), reescrito em termos do vetor de estado $x_N(t)$.

A taxa de decaimento do sistema (21) (ou maior expoente de Lyapunov) é definida como sendo o maior β tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\beta t} \|x_N(t)\| = 0.$$

Considere a candidata a função de Lyapunov $V(x_N(t))$ com $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$. Se

$$\dot{V}(x_N(t)) \leq -2\beta V(x_N(t)), \quad (34)$$

é satisfeita, para todo $x_N(t) = 0$, garante-se que (SLOTINE; LI *et al.*, 1991, p. 91-92):

$$V(x_N(t)) \leq V(x_N(0)) e^{-2\beta t}, \quad \forall t > 0,$$

e além disso, definindo-se a norma Euclidiana $\|x_N(t)\| = \sqrt{x_N(t)^T x_N(t)}$, $\lambda_{\min}(P)$, $\lambda_{\max}(P)$ o menor e o maior autovalor de P , respectivamente, que são reais e positivos, pois $P = P^T > 0$, então

$$\|x_N(t)\| \leq e^{-\beta t} \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)} \|x_N(0)\|, \quad (35)$$

para toda trajetória $x_N(t)$. Este fato garante que o sistema (21) sob a ação da lei de controle apresentada no Teorema 1, possui uma taxa de decaimento maior ou igual a β .

De fato, $x_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix}^T e$

$$\|x_N(t)\|^2 = x_N(t)^T x_N(t) = \hat{x}(t)^T \hat{x}(t) + u(t)^T u(t). \quad (36)$$

Agora, de (35) tem-se

$$\|x_N(t)\|^2 \leq e^{-2\beta t} \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P) \|x_N(0)\|^2. \quad (37)$$

Logo, de (36), (37) e considerando $u(0) = 0$ (Note que a partir da Figura 2 pode-se implementar o sistema de controle com $u(0) = 0$) obtém-se:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t)^T \hat{x}(t) &\leq e^{-2\beta t} \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P) \|x_N(0)\|^2 - u(t)^T u(t) \\ &\leq e^{-2\beta t} \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P) \|x_N(0)\|^2 \\ &= e^{-2\beta t} \lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P) \|\hat{x}(0)\|^2. \end{aligned} \quad (38)$$

Logo,

$$\|\hat{x}(t)\| \leq e^{-\beta t} \sqrt{\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P)} \|\hat{x}(0)\|. \quad (39)$$

Supondo $A(\alpha)$ não singular, tem-se que $A(\alpha)^T A(\alpha)$ é simétrica definida positiva, para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2). Então, de (4) em que $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t)$, note que

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A(\alpha)^T A(\alpha)) \|x(t)\|^2 &\leq x(t)^T A(\alpha)^T A(\alpha)x(t) = \hat{x}(t)^T \hat{x}(t) \\ &\leq \lambda_{\max}(A(\alpha)^T A(\alpha)) \|x(t)\|^2. \end{aligned} \quad (40)$$

De (40), tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A(\alpha)^T A(\alpha)) \|x(0)\|^2 &\leq x(0)^T A(\alpha)^T A(\alpha)x(0) \\ &\leq \lambda_{\max}(A(\alpha)^T A(\alpha)) \|x(0)\|^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Para $\Upsilon(P) = (\lambda_{\max}(P)/\lambda_{\min}(P))$, $\Upsilon(A) = (\lambda_{\max}(A(\alpha)^T A(\alpha))/\lambda_{\min}(A(\alpha)^T A(\alpha)))$, de (39),

(40) e (41) obtém-se

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A(\alpha)^T A(\alpha)) \|x(t)\|^2 &\leq \hat{x}(t)^T \hat{x}(t) \leq e^{-2\beta t} \Upsilon(P) \|A(\alpha)x(0)\|^2 \\ &\leq e^{-2\beta t} \Upsilon(P) \lambda_{\max}(A(\alpha)^T A(\alpha)) \|x(0)\|^2. \end{aligned} \quad (42)$$

Logo, de (42),

$$\|x(t)\| \leq e^{-\beta t} \sqrt{\Upsilon(P)} \sqrt{\Upsilon(A)} \|x(0)\|. \quad (43)$$

Então, $\|x(t)\|$ é limitada para $t \geq 0$, com uma taxa de decaimento maior ou igual a β .

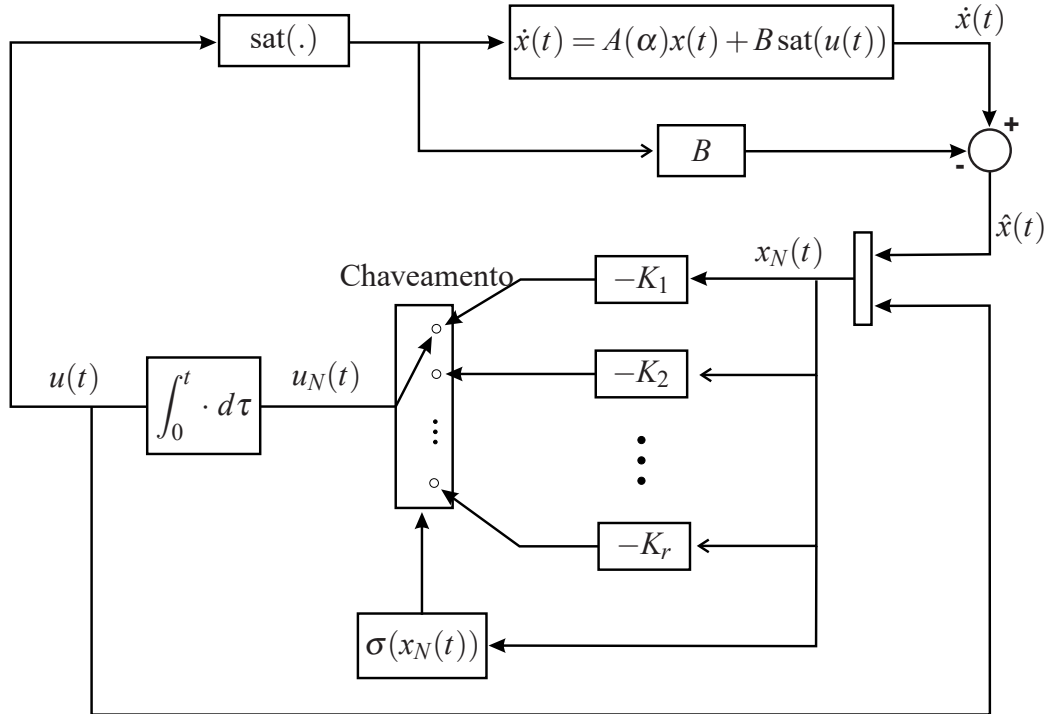
É importante notar que $x_N(t)^T = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]$. Assim, se $x_N(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$, segue que $\hat{x}(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Portanto, como $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t)$ e da Observação 1, $A(\alpha)$ é uma matriz de posto completo para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2). Logo, se $\hat{x}(t) \rightarrow 0$, então $x(t) \rightarrow 0$.

2.3 CONTROLE ROBUSTO CHAVEADO PARA A DINÂMICA AUXILIAR

Considere o esquema de controle proposto na Figura 3. A partir deste diagrama, a lei de controle robusta chaveada dada por

$$\begin{aligned} u_N(t) &= \dot{u}(t) = u_{N_\sigma}(t) = -K_\sigma x_N(t), \quad \sigma = \arg \min_{k \in \mathbb{I}_r}^* \left\{ x_N(t)^T P B_N (-K_k) x_N(t) \right\}, \\ \text{com } \sigma &\in \mathbb{I}_r, \quad K_\sigma \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x + n_u)} \quad \text{e} \quad x_N(t) \in \mathfrak{R}^{n_x + n_u}. \end{aligned} \quad (44)$$

Figura 3 - Esquema da lei de controle proposta (44) para o sistema linear incerto sujeito à saturação do atuador (1).



Fonte: Elaboração da própria autora.

De (17) e (44) tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(\mu)\hat{x}(t) + \hat{A}(\mu)B\hat{Z}(\mu)u(t), \\ \dot{u} = u_N(t) = -K_\sigma x_N(t), \end{cases} \quad (45)$$

representado por,

$$\dot{x}_N(t) = \sum_{k=1}^r \mu_k A_{N_k}(t) x_N(t) + \sum_{k=1}^r \mu_k B_N u_N(t), \quad (46)$$

com

$$A_{N_k} = \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{B}_k \\ 0_{n_u \times n_x} & 0_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}, \quad x_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad B_N = \begin{bmatrix} 0_{n_x \times n_u} \\ I_{n_u \times n_u} \end{bmatrix},$$

com \hat{A}_k e \hat{B}_k , definidos em (15), ou equivalentemente

$$\dot{x}_N(t) = A_N(\mu)(t)x_N(t) + B_N u_N(t). \quad (47)$$

Teorema 2. Considere o sistema linear sujeito à saturação no atuador descrito em (45)-(47) com a lei de controle (44) e uma região de operação com $x_N(t) \in \mathcal{X}$, $t \geq 0$ dada em (22) sendo $\phi \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $N = [0_{n_u \times n_x} \quad I_{n_u \times n_u}] \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x + n_u)}$ e $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$ conhecidos. Suponha que existam uma

matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, matrizes $M_k \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que

$$A_{N_k}X + XA_{N_k}^T - B_N M_k - M_k^T B_N^T + 2\beta X < 0, \quad (48)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)}X \\ XN_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (49)$$

para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$, $k \in \mathbb{I}_r$. Então, a lei de controle (44), com $K_k = M_k X^{-1}$, torna a origem do espaço de estados do sistema (47) localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ dado em (23) sendo que $\delta = 1$ e $P = X^{-1}$.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$, sendo $P = P^T > 0$. Defina $X = P^{-1}$, $M_k = K_k X$ e considere as LMIs descritas em (48), para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$, $k \in \mathbb{I}_r$, factíveis. Então de (48) e $M_k = K_k X$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> A_{N_k}X + XA_{N_k}^T - B_N M_k - M_k^T B_N^T + 2\beta X \\ &= A_{N_k}X + XA_{N_k}^T - B_N K_k X - X K_k^T B_N^T + 2\beta X. \end{aligned} \quad (50)$$

Pré e pós-multiplicando (50) por $P = P^T > 0$ segue que

$$0 > P A_{N_k} + A_{N_k}^T P - P B_N K_k - K_k^T B_N^T P + 2\beta P. \quad (51)$$

Supondo $x_N(t) \neq 0$ e pré e pós-multiplicando (51) por $x_N(t)^T$ e $x_N(t)$, respectivamente, obtém-se

$$0 > x_N(t)^T (P A_{N_k} + A_{N_k}^T P - P B_N K_k - K_k^T B_N^T P) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t). \quad (52)$$

Agora, multiplicando (52) por μ_k , com $\mu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$ para $k \in \mathbb{I}_r$, e somando todos os termos para $k = 1$ até r , e considere (47), obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{k=1}^r \mu_k \left[2x_N(t)^T P A_{N_k} x_N(t) + 2x_N(t)^T P B_N (-K_k) x_N(t) \right] + \sum_{k=1}^r \mu_k \left[2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \right] \\ &= 2x_N(t)^T P A_N(\mu) x_N(t) + 2x_N(t)^T P B_N \left(- \sum_{k=1}^r \mu_k K_k \right) x_N(t) + 2\beta \sum_{k=1}^r \mu_k x_N(t)^T P x_N(t). \end{aligned} \quad (53)$$

De $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$, $\mu_k \geq 0$, $k \in \mathbb{I}_r$, note que de (44),

$$x_N(t)^T P B_N (-K_\sigma) x_N(t) = \min_{k \in \mathbb{I}_r} \left\{ x_N(t)^T P B_N (-K_k) x_N(t) \right\} \leq x_N(t)^T P B_N \left(- \sum_{k=1}^r \mu_k K_k \right) x_N(t). \quad (54)$$

Tendo em vista que o mínimo de um conjunto de números reais é menor ou igual do que

qualquer combinação convexa desses números, então de (44), (53) e (54) tem-se que

$$\begin{aligned}
0 &> 2x_N(t)^T P A_N(\mu)x_N(t) + 2x_N(t)^T P B_N \left(- \sum_{k=1}^r \mu_k K_k \right) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\
&\geq 2x_N(t)^T P A_N(\mu)x_N(t) + 2x_N(t)^T P B_N (-K_\sigma) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\
&= 2x_N(t)^T P [A_N(\mu)x_N(t) + B_N (-K_\sigma) x_N(t)] + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\
&= 2x_N(t)^T P [A_N(\mu)x_N(t) + B_N u_N(t)] + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\
&= 2x_N(t)^T P \dot{x}_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\
&= \dot{V}(x_N(t)) + 2\beta V(x_N(t)).
\end{aligned}$$

Logo, como visto na prova do Teorema 1, se (49), que é equivalente a (25) é factível, para todo $x_N(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ tem-se $\mathcal{E}(P, 1) \subset \mathcal{X}$. De (55), para $x_N(t) = 0$, $\dot{V}(x_N(t)) < -2\beta V(x_N(t)) < 0$, de (23) se $x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ então, desde que (25) seja válida para todo $h \in \mathbb{I}_n$, $x_N(t) \in \mathcal{E}(P, 1)$ para todo $t \geq 0$.

Portanto, para $x_N(t) = 0$, $\dot{V}(x_N(t)) < -2\beta V(x_N(t))$, e o sistema de malha fechada (47) e (44) é localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento igual ou maior do que β (BOYD *et al.*, 1994, p. 66-67). □

As condições suficientes apresentadas nos Teoremas 1 e 2 garantem a estabilidade local com restrição na taxa de decaimento para o sistema controlado (21) e (47), com leis de controle (18) e (44), respectivamente. A existência de matrizes X e M satisfazendo (24) e (25) e matrizes X e M_k satisfazendo (48) e (49) são condição suficiente para o projeto dos controladores propostos. A busca por essas matrizes pode ser feita computacionalmente. Neste trabalho utiliza-se o *software* MatLab e o LMILab (GAHINET *et al.*, 1994), interfaceados por YALMIP (LÖFBERG, 2004) na busca de tais matrizes.

Os Teoremas 1 e 2, garantem a estabilidade local, com taxa de decaimento maior ou igual a β , para a origem do sistema linear incerto (47) em malha fechada, com a lei de controle (18) e (44), respectivamente, para qualquer condição inicial $x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$. Da mesma forma que em Alves *et al.* (2016) e Wolmuth *et al.* (2019), consideram-se condições iniciais politópicas, o vetor de estado da planta $x(0) \in \mathcal{X}_0$, com $\mathcal{X}_0 = \text{co} \{x_{0_1}, \dots, x_{0_q}\}$, $x_{0_e} \in \mathfrak{R}^n$ para todo $e \in \mathbb{I}_q$, $x(0) = \sum_{e=1}^q \eta_e x_{0_e}$, $\eta_e \geq 0$ e $\sum_{e=1}^q \eta_e = 1$, que é a combinação convexa dos vetores conhecidos x_{0_1}, \dots, x_{0_q} . A partir de \mathcal{X}_0 , define-se os conjuntos de condições iniciais de interesse para o vetor de estado $x(t)$ e para $x_N(t) = [(A(\alpha)x(t))^T \ u(t)^T]^T$, respectivamente como $\hat{w}\mathcal{X}_0$ e $\hat{w}\tilde{\mathcal{X}} \in \mathcal{E}(P, 1)$, com $\hat{w} > 0$, $u(0) = 0_{m \times 1}$, sendo $\tilde{\mathcal{X}} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A(\alpha)x_{0_1} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A(\alpha)x_{0_q} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} \right\}$, o casco convexo de vetores $\begin{bmatrix} A(\alpha)x_{0_1} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A(\alpha)x_{0_q} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}$, com $\sum_{e=1}^q \eta_e \begin{bmatrix} A(\alpha)x_{0_e} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} \in \tilde{\mathcal{X}}$, $\sum_{e=1}^q \eta_e = 1$,

$\eta_e \geq 0$ para todo $e \in \mathbb{I}_q$, com o vetor incerto mas constante $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2).

Lema 2. (WOLMUTH *et al.*, 2019) *A condição $\hat{w}\tilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{E}(P, 1)$ é aplicada se*

$$\begin{bmatrix} \hat{w}^{-2} & \begin{bmatrix} A_i x_{0_e} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} A_i x_{0_e} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (55)$$

com \hat{w} uma constante positiva, para todo $e \in \mathbb{I}_q$ e $i \in \mathbb{I}_{r_1}$. Assim \hat{w} pode ser usado como uma variável para obter uma estimativa menos conservadora do domínio de atração na busca do maior elipsóide $\mathcal{E}(P, 1)$ que contenha as condições iniciais de interesse (ALVES *et al.*, 2016; HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003).

Demonstração. *Vamos definir uma condição inicial $x_N(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha)x_0(\eta) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} e$ multiplicando (55) por α_i e η_e , com $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i = 1$, $\sum_{e=1}^q \eta_e = 1$, $\alpha_i \geq 0$ e $\eta_e \geq 0$ obtém-se*

$$\begin{bmatrix} \hat{w}^{-2} & \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \sum_{e=1}^q \eta_e x_{0_e} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \sum_{e=1}^q \eta_e x_{0_e} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (56)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{w}^{-2} & \begin{bmatrix} A(\alpha)x_0(\eta) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} A(\alpha)x_0(\eta) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} & X \end{bmatrix} \geq 0. \quad (57)$$

Aplicando o complemento de Schur (BOYD *et al.*, 1994) em (57) com $P = X^{-1}$

$$\hat{w}^{-2} - \begin{bmatrix} A(\alpha)x_0(\eta) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} A(\alpha)x_0(\eta) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (58)$$

e multiplicando (58) por $-\hat{w}^2$

$$\hat{w} \begin{bmatrix} A(\alpha)x_0(\eta) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}^T P \hat{w} \begin{bmatrix} A(\alpha)x_0(\eta) \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} \leq 1. \quad (59)$$

Portanto de (59) e (23) tem-se que $\hat{w}x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$.

□

Note que na LMI (55), \hat{w} é um fator de escala do conjunto $\tilde{\mathcal{X}}$ (BOYD *et al.*, 1994; HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; ALVES *et al.*, 2016), dado por

$\tilde{\mathcal{X}} = \text{co} \left\{ \begin{bmatrix} A(\alpha)\mathbf{x}_{0_1} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} A(\alpha)\mathbf{x}_{0_q} \\ 0_{m \times 1} \end{bmatrix} \right\}$, para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2). Portanto, \hat{w} pode ser usado como uma variável a ser maximizada (\hat{w}^{-2} minimização) para obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\mathcal{E}(P, 1)$.

Para as dinâmicas propostas com $x_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix}^T$, $\text{sat}(u(t))$, $u_N(t) = \dot{u}(t)$ e ganhos de realimentação K e K_k , a saturação de $u(t)$ garante uma restrição para a entrada $u(t)$. A utilização das LMIs para reduzir a norma dos ganhos da realimentação K e K_k , justifica-se devido (18) e (44) serem baseadas em $u_N(t) = \dot{u}(t)$.

Teorema 3. (ASSUNÇÃO *et al.*, 2007; BUZETTI, 2017) *Dada uma constante $\mu_0 > 0$, então a norma dos ganhos de realimentação K_k , $k \in \mathbb{I}_r$, pode ser majorada utilizando a minimização de η , $\eta > 0$, tal que $K_k K_k^T < \eta I / \mu_0^2$. O valor ótimo de η pode ser obtido solucionando o seguinte problema de otimização:*

$$\min \eta$$

$$s.a.$$

$$\begin{bmatrix} \eta I & M_k \\ M_k^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (60)$$

$$X > \mu_0 I, \quad (61)$$

sendo que o conjunto de LMIs pode ser igual a (48), (49) ou (24), (25) (substituindo M_k por M em (60)).

Demonstração. *Aplicando o complemento de Schur em (60), obtém-se*

$$M_k M_k^T < \eta I. \quad (62)$$

Pré e pós-multiplicando (61) por \sqrt{X} ,

$$\begin{aligned} \sqrt{X} X \sqrt{X} &> \sqrt{X} \mu_0 \sqrt{X} \\ \mu_0 X &< X X. \end{aligned} \quad (63)$$

Pré e pós-multiplicando (61) por K_k e K_k^T , respectivamente

$$K_k X K_k^T > K_k \mu_0 K_k^T. \quad (64)$$

De (61) - (64) e $M_k = K_k X$,

$$K_k \mu_0 K_k^T < K_k X K_k^T = \frac{K_k \mu_0 X K_k^T}{\mu_0} < \frac{K_k X X K_k^T}{\mu_0} = \frac{M_k M_k^T}{\mu_0} < \frac{\eta I}{\mu_0}. \quad (65)$$

Portanto, $K_k K_k^T < \eta I / \mu_0^2$.

□

O teorema a seguir apresenta uma análise teórica das factibilidades das condições do procedimento proposto no Teorema 2, que usa a lei de controle chaveada (44), com o procedimento apresentado no Teorema 1, que usa uma lei de controle com um único ganho (18).

Teorema 4. *Suponha a existência de $X = X^T > 0$, $X = P^{-1}$ e K constante, tais que*

$$A_{N_k} X + X A_{N_k}^T - B_N M - M^T B_N^T + 2\beta X < 0, \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 & N_{(h)} X \\ X N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{w}^{-2} & \begin{bmatrix} A_i x_{0_e} \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} A_i x_{0_e} \\ 0 \end{bmatrix} & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (68)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I & M \\ M^T & I \end{bmatrix} > 0, \quad (69)$$

$$X > \mu_0 I, \quad (70)$$

sendo que as LMIs (66) e (67) são provenientes do Teorema 1. Isto é, para $u_N(t) = -Kx_N(t)$, a origem do sistema (47) é localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $x_N(0) \in \mathcal{E}(P, 1)$ dado em (23) sendo que $P = X^{-1}$ e $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$. Então existem K_k , $k \in \mathbb{I}_r$, tais que, para $M_k = K_k P$, as LMIs (48), (49), descritas no Teorema 2, juntamente com (68), (69) e (70) são satisfeitas.

Demonstração. Considere $P = P^T > 0$, $X = P^{-1}$, $M = KX$ e suponha que as LMIs descritas em (66), para todo $k \in \mathbb{I}_r$, factíveis. Então de (66) e $M = KX$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> A_{N_k} X + X A_{N_k}^T - B_N M - M^T B_N^T + 2\beta X \\ &= A_{N_k} X + X A_{N_k}^T - B_N K X - X K^T B_N^T + 2\beta X. \end{aligned} \quad (71)$$

Pré e pós multiplicando (71) por $P = P^T > 0$ tem-se

$$0 > P A_{N_k} + A_{N_k}^T P - P B_N K - K^T B_N^T P + 2\beta P. \quad (72)$$

Supondo $x_N(t) \neq 0$ e pré e pós-multiplicando (72) por $x_N(t)^T$ e $x_N(t)$, respectivamente,

tem-se

$$\begin{aligned} 0 &> x_N(t)^T [PA_{N_k} + A_{N_k}^T P] x_N(t) - x_N(t)^T [PB_N K + K^T B_N^T P] x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\ &= 2x_N(t)^T PA_{N_k} x_N(t) + 2x_N(t)^T PB_N (-K) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t). \end{aligned} \quad (73)$$

Multiplicando (73) por μ_k , $k \in \mathbb{I}_r$ e somando todos os termos, para $k = 1$ até $k = r$ e considere (47),

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{k=1}^r \mu_k \left[2x_N(t)^T PA_{N_k} x_N(t) + 2x_N(t)^T PB_N (-K) x_N(t) \right] + \sum_{k=1}^r \mu_k \left[2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \right] \\ &= 2x_N(t)^T PA_N(\mu) x_N(t) + 2x_N(t)^T PB_N \left(- \sum_{k=1}^r \mu_k K \right) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t). \end{aligned} \quad (74)$$

Tomando $K = K_k$ em (74) para todo $k \in \mathbb{I}_r$ obtém-se

$$\begin{aligned} 0 &> 2x_N(t)^T PA_N(\mu) x_N(t) + 2x_N(t)^T PB_N \left(- \sum_{k=1}^r \mu_k K \right) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\ &= 2x_N(t)^T PA_N(\mu) x_N(t) + 2x_N(t)^T PB_N \left(- \sum_{k=1}^r \mu_k K_k \right) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t). \end{aligned} \quad (75)$$

De (75), $A_N(\mu) = \sum_{k=1}^r \mu_k A_{N_k}$, $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$ e $\mu_k \geq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} 0 &> 2x_N(t)^T PA_N(\mu) x_N(t) + 2x_N(t)^T PB_N \left(- \sum_{k=1}^r \mu_k K_k \right) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\ &= 2x_N(t)^T PA_{N_k} x_N(t) + 2x_N(t)^T PB_N (-K_k) x_N(t) + 2\beta x_N(t)^T P x_N(t) \\ &= x_N(t)^T [PA_{N_k} + A_{N_k}^T P - PB_N K_k - K_k^T B_N^T P] x_N(t) + x_N(t)^T (2\beta P) x_N(t). \end{aligned} \quad (76)$$

De (76)

$$PA_{N_k} + A_{N_k}^T P - PB_N K_k - K_k^T B_N^T P + 2\beta P < 0. \quad (77)$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando (77) por $X = P^{-1}$ e substituindo $M_k = K_k X$ obtém-se

$$A_{N_k} X + X A_{N_k}^T - B_N M_k + M_k^T B_N^T + 2\beta X < 0. \quad (78)$$

Logo se (66) é factível então (78) é factível com $K = K_k$ para todo $k \in \mathbb{I}_r$.

Em (69), tomando $K = K_k$ para todo $k \in \mathbb{I}_r$ tem-se que $M = M_k$, logo (69) e (70), são equivalentes a (60) e (61).

As LMIs (67) e (49) são iguais, e as LMIs (68) e (55) também.

Mostra-se que se um sistema linear da forma (1) pode ser controlado com um ganho cons-

tante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada.

□

2.4 EXEMPLOS

Nesta seção, exemplos de simulação são apresentados para ilustrar a eficácia das abordagens propostas. Nos Exemplos 1 e 2, são descritas comparações entre o controle robusto com ganho constante e o chaveado. No Exemplo 2, faz-se uso de um sistema de amortecimento de vibrações (ABDELAZIZ, 2012) considerando falhas nos amortecedores.

2.4.1 Exemplo 1

Exemplo baseado em (MOREIRA, 2015; WOLMUTH *et al.*, 2019). Considere o sistema linear incerto (1) com vértices politópicos:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} \check{a} & -100 \\ 10 & \check{b} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (79)$$

com $-1 \leq \check{a} \leq a$ e $b \leq \check{b} \leq 110$. Os vértices do politopo de $A(\alpha)$ são dados por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & 110 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & -100 \\ 10 & 110 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & b \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a & -100 \\ 10 & b \end{bmatrix} \quad (80)$$

com a e b variando nos intervalos $40 \leq a \leq 90$ e $-9 \leq b \leq 60$. Para que o sistema (1) esteja na forma adequada para a utilização dos Teoremas 1 e 2, tem-se

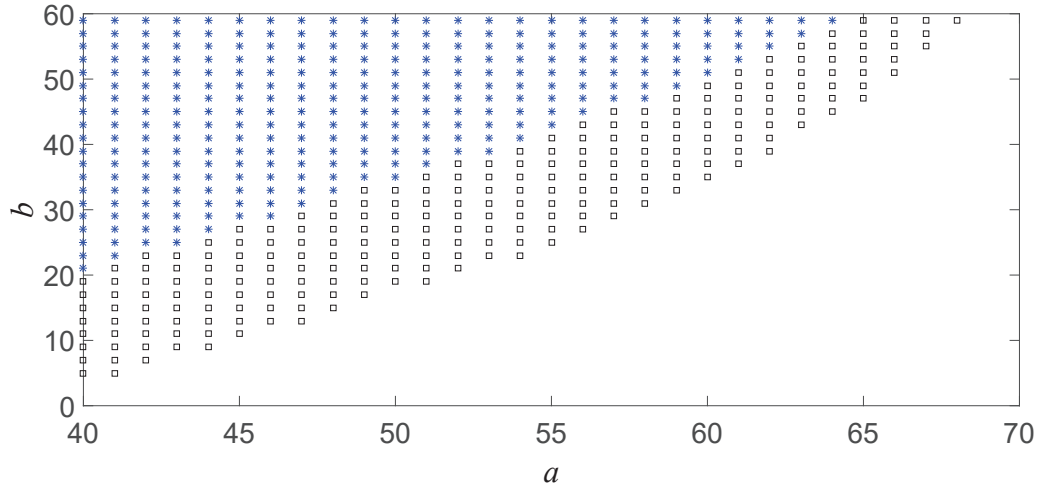
$$A_{N_k} = \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{A}_k B Z_1 \\ 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{para } k = 1, \dots, 4, \quad A_{N_k} = \begin{bmatrix} \hat{A}_k & \hat{A}_k B Z_2 \\ 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{para } k = 5, \dots, 8,$$

com $B_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$, $x_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix}^T$, $Z_1 = 1$, $Z_2 = \frac{\rho}{\phi}$, $\hat{A}_5 = \hat{A}_1 = A_1$, $\hat{A}_6 = \hat{A}_2 = A_2$, $\hat{A}_7 = \hat{A}_3 = A_3$ e $\hat{A}_8 = \hat{A}_4 = A_4$, com taxa de decaimento $\beta = 2,44$ para as LMIs (55) presentes na Lema 2, com $q = 2$, $x_{0_1} = [0, 1 \quad 0, 0]^T$ e $x_{0_2} = [-0, 1 \quad 0, 0]^T$, $\phi = 1, 2$, $\rho = 1$ e $\mu_0 = 1$.

Para obter a região de factibilidade da Figura 4, escolhe-se de forma adequada $\bar{w} = 20,0016$ com $\hat{w} = \bar{w}^{-1/2} = 0,2236$ e $\eta = 6,7968 \times 10^6$, com espaçamento uniforme de 1 para a e de 2 para b para ilustrar a comparação proposta no Teorema 4.

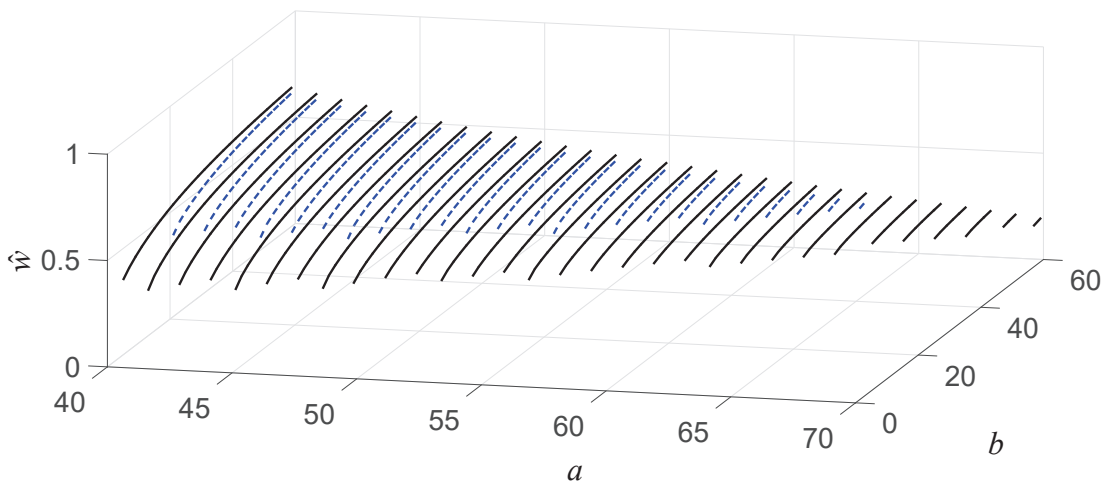
Observe que a região obtida nas Figuras 4 e 5, para os Teorema 2 com o Teorema 3 e Lema 2 representada por $(*, \square)$ e $(-)$ é maior do que a obtida pelo Teorema 1, Teorema 3 (tomando

Figura 4 - Região de factibilidade para $\hat{w} = 0,2236$, $\eta = 6,7968 \times 10^6$ e $\mu_0 = 1$: com Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (*) e Teoremas 2, 3 e Lema 2 representado por (*, □).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 5 - Região de factibilidade obtida minimizando \bar{w} com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$, o que resulta na maximização de \hat{w} , mantendo $\eta = 6,7968 \times 10^6$ fixo e $\mu_0 = 1$: com Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (- -) e Teoremas 2, 3 e Lema 2 representado por (-).



Fonte: Elaboração da própria autora.

$K_k = K$) e Lema 2 representada por (*) e (- -), respectivamente. Além disso, na Figura 5 pode-se observar que os valores de \hat{w} obtidos para o controle chaveado são maiores que os obtidos para o uso de um único ganho de realimentação. Isto se reflete na garantia de estabilidade local para uma região elipsoidal maior para o ganho chaveado do que para único ganho.

Para o Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, minimiza-se \bar{w} com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$, o que resulta na maximização de \hat{w} , obtém-se $\hat{w} = 0,2236$, para $\eta = 6,7968 \times 10^6$ e $\mu_0 = 1$,

$$\begin{aligned} K &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,7515 & 0,4143 & 2,3752 \end{bmatrix}, \quad \|K\| = 2,5255 \times 10^3 \\ P &= \begin{bmatrix} 0,5611 & -0,0287 & -0,2027 \\ -0,0287 & 0,1439 & 0,1368 \\ -0,2027 & 0,1368 & 0,8800 \end{bmatrix}, \quad \|P\| = 1,0000. \end{aligned} \quad (81)$$

Para a solução, minimiza-se \bar{w} com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$ com as LMIs do Lema 2 e Teoremas 2 e 3, obtém-se $\hat{w} = 0,2950$ e

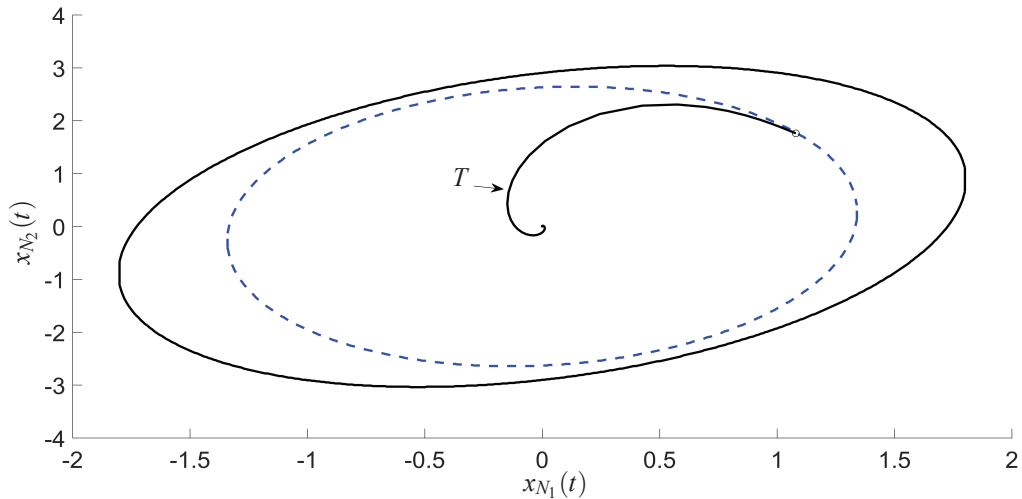
$$\begin{aligned} K_1 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,4511 & 0,3381 & 1,6030 \end{bmatrix}, \quad \|K_1\| = 1,6992 \times 10^3, \\ K_2 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,3653 & 0,3367 & 1,5508 \end{bmatrix}, \quad \|K_2\| = 1,6284 \times 10^3, \\ K_3 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,4867 & 0,3023 & 1,5444 \end{bmatrix}, \quad \|K_3\| = 1,6472 \times 10^3, \\ K_4 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,3919 & 0,3115 & 1,5083 \end{bmatrix}, \quad \|K_4\| = 1,5892 \times 10^3, \\ K_5 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,4250 & 0,3369 & 1,5708 \end{bmatrix}, \quad \|K_5\| = 1,6618 \times 10^3, \\ K_6 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,3635 & 0,3364 & 1,5257 \end{bmatrix}, \quad \|K_6\| = 1,6041 \times 10^3, \\ K_7 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,4553 & 0,3034 & 1,5308 \end{bmatrix}, \quad \|K_7\| = 1,6256 \times 10^3, \\ K_8 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,3810 & 0,3088 & 1,4958 \end{bmatrix}, \quad \|K_8\| = 1,5742 \times 10^3, \\ P &= \begin{bmatrix} 0,3351 & -0,0579 & -0,1637 \\ -0,0579 & 0,1182 & 0,1565 \\ -0,1637 & 0,1565 & 0,9264 \end{bmatrix}, \quad \|P\| = 1,0000. \end{aligned} \quad (82)$$

Para as simulações, considere a condição inicial $x(0) = A_2^{-1} \begin{bmatrix} 1,08 & 1,76 \end{bmatrix}^T$ e o ponto da região de factibilidade $(a,b) = (60,50)$ da Figura 4.

Nas Figuras de 6 a 8, as curvas (- -) representam as simulações utilizando o Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) com o Lema 2, e as curvas (-) representam as simulações utilizando o Teorema 2 e 3 com o Lema 2.

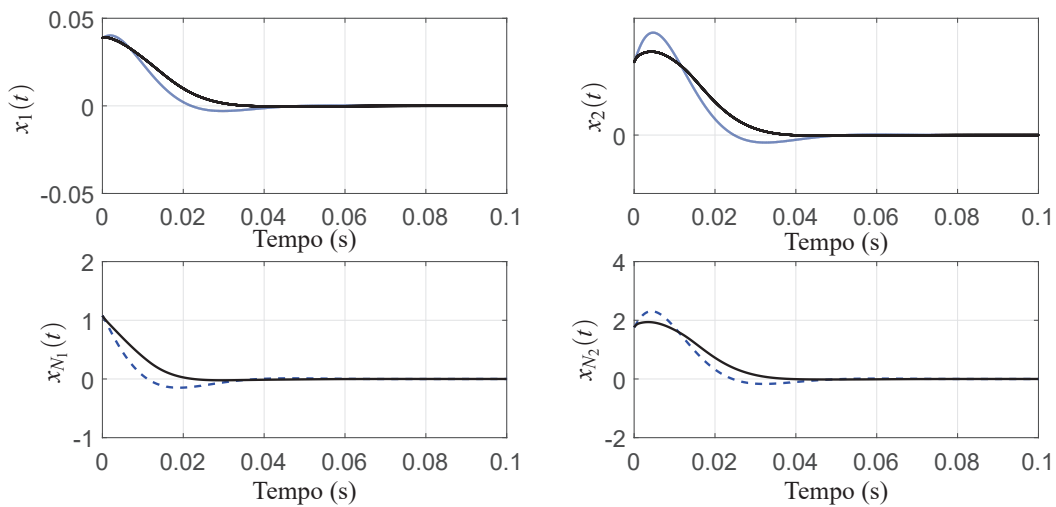
Na Figura 6, a região elipsoidal para o caso do controle chaveado representado pela curva (-) é maior que a região obtida com o ganho constante, representado pela curva (- -).

Figura 6 - Região elipsoidal $\mathcal{E}(P,1)$ e trajetória para $x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$ com $x_{N_3}(t) = u(t) = 0$, $(a,b)=(60,50)$ da Figura 4; com Teoremas 2, 3 e Lema 2 representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado pela curva (- -); a curva T é a trajetória para a condição inicial $x(0) = A_2^{-1}[1,08 \ 1,76]^T$.



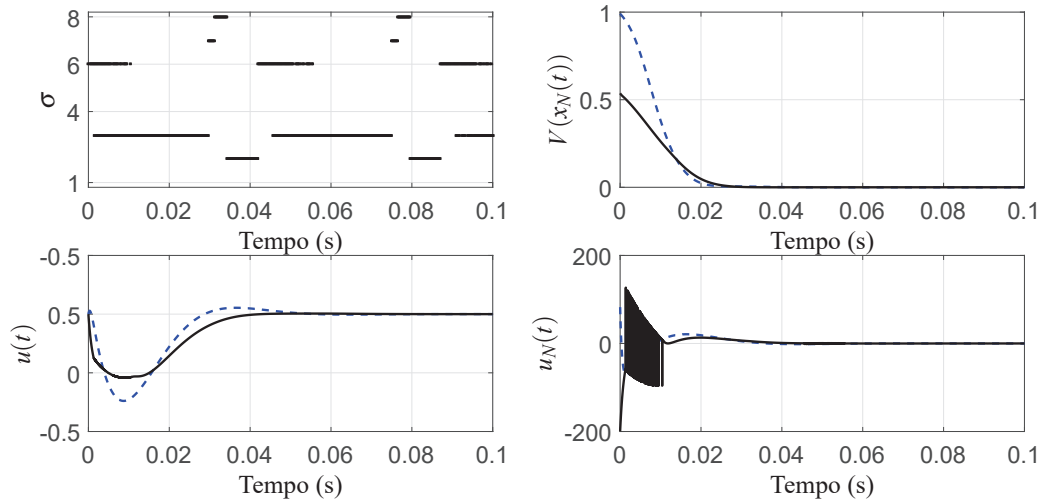
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 7 - Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$) da simulação do sistema (1), com (80); com Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (82), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle(18) e (81), representado pela curva (- -).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 8 - Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{I}_r$, função de Lyapunov $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$ ($x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$), entrada de controle $u(t) = x_{N_3}(t)$ e sinal $u_N(t)$, para o sistema (1) e (80); para Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (82), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle $u_N(t) = -K x_N(t)$ e (81), representado pela curva (- -).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Na Figura 8, para o sistema (1) e (80), considerando a condição inicial $x(0) = A_2^{-1}[1,08 \ 1,76]^T$, ou seja, $x_N(0) = [1,08 \ 1,76 \ 0]^T$, a função de Lyapunov $V(x_N(0)) = x_N(0)^T P x_N(0) = 0,5367$ com matrix P dada em (82). Para o sistema com controle robusto com ganho constante obtém-se $V(x_N(0)) = x_N(0)^T P x_N(0) = 0,9910$ com P dada em (81).

2.4.2 Exemplo 2

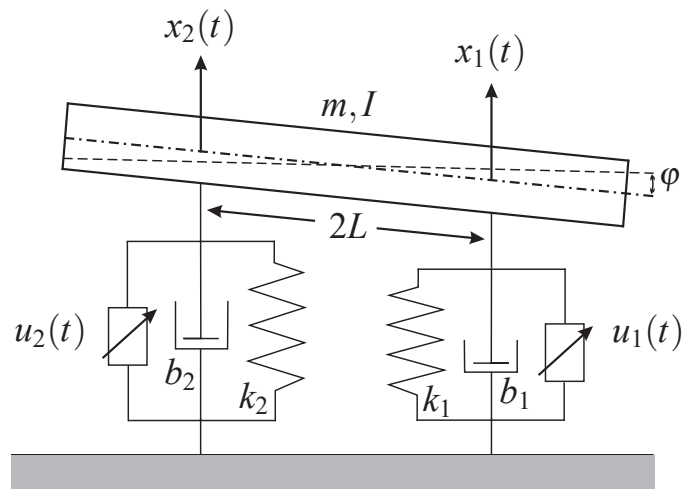
Este exemplo é baseado no sistema de absorção de vibração mostrado na Figura 9 apresentado em Abdelaziz (2012). A equação dinâmica do sistema pode ser descrita pela forma de espaço de estados, com vetor estado $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dot{x}_1(t) \ \dot{x}_2(t)]^T$. Considere a saturação do atuador e a possibilidade de falhas nos amortecedores, como a seguir

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 c_1 & -k_2 c_2 & -f_1 b_1 c_1 & -f_2 b_2 c_2 \\ -k_1 c_2 & -k_2 c_1 & -f_1 b_1 c_2 & -f_2 b_2 c_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad (83)$$

sendo que $c_1 = \frac{1}{m} + \frac{L^2}{I}$, $c_2 = \frac{1}{m} - \frac{L^2}{I}$, m e I representam a massa e a inércia da massa, k_1 e k_2 são as constantes da mola, b_1 e b_2 são as constantes do amortecedor, x_1 e x_2 são o deslocamento de massa de ambos os lados, φ é o ângulo de inclinação da massa com a horizontal, $2L$ é

a distância entre dois pontos de suporte e u_1 e u_2 são as entradas de controle. Parâmetros do sistema: $m = 10\text{kg}$, $I = 1\text{kg.m}^2$, $L = 1\text{m}$, $k_1 = 500\text{N/m}$, $k_2 = 600\text{N/m}$, $b_1 = 10\text{N.s/m}$ e $b_2 = 15\text{N.s/m}$. Se $f_1 = 0$ e $f_2 = 0$ significa que os amortecedores possuem uma falha total, se $f_1 = 1$ e $f_2 = 1$ significa que não ocorre falha nos amortecedores e se $0 < f_1 < 1$ e $0 < f_2 < 1$ significa que existe uma falha parcial nos amortecedores. Então, uma falha no amortecimento pode ser representada como uma incerteza paramétrica.

Figura 9 - Sistema de absorção de vibrações.



Fonte: Adaptado de (ABDELAZIZ, 2012).

Para a solução, no Teorema 3 considere $\mu_0 = 1$, $\eta = 6,1 \times 10^8$, no Lema 2 minimize \bar{w} o que resulta na maximização de $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$ e considere $x_{0_1} = [-0,01 \ 0,01 \ -0,02 \ 0,02]^T$ e $x_{0_2} = -x_{0_1}$. Para os Teoremas 1 e 2 adote a taxa de decaimento $\beta = 4,9152$, $\phi = [100,2 \ 100,2]^T$, $\rho = [100 \ 100]^T$, $N = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$ e $x_N(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t)^T & u(t)^T \end{bmatrix}^T$. Suponha uma falha de 30% no amortecedor 1 e de 5% no amortecedor 2.

Para que o sistema (1) esteja na forma adequada para a utilização dos Teoremas 1 e 2, tem-se

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -550,0000 & 540,0000 & -7,7000 & 13,5000 \\ 450,0000 & -660,0000 & 6,3000 & -16,5000 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_5 = \hat{A}_9 = \hat{A}_{13} = \hat{A}_1 = A_1,$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -550,0000 & 540,0000 & -11,0000 & 12,8250 \\ 450,0000 & -660,0000 & 9,0000 & -15,6750 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_6 = \hat{A}_{10} = \hat{A}_{14} = \hat{A}_2 = A_2,$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -550,0000 & 540,0000 & -7,7000 & 12,8250 \\ 450,0000 & -660,0000 & 6,3000 & -15,6750 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_7 = \hat{A}_{11} = \hat{A}_{15} = \hat{A}_3 = A_3, \\
A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -550,0000 & 540,0000 & -11,0000 & 13,5000 \\ 450,0000 & -660,0000 & 9,0000 & -16,5000 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_8 = \hat{A}_{12} = \hat{A}_{16} = \hat{A}_4 = A_4, \\
Z_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = \hat{Z}_3 = \hat{Z}_4 = Z_1, \\
Z_2 &= \begin{bmatrix} 0,9980 & 0 \\ 0 & 1,0000 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_5 = \hat{Z}_6 = \hat{Z}_7 = \hat{Z}_8 = Z_2, \\
Z_3 &= \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 \\ 0 & 0,9980 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_9 = \hat{Z}_{10} = \hat{Z}_{11} = \hat{Z}_{12} = Z_3, \\
Z_4 &= \begin{bmatrix} 0,9980 & 0 \\ 0 & 0,9980 \end{bmatrix}, \quad \hat{Z}_{13} = \hat{Z}_{14} = \hat{Z}_{15} = \hat{Z}_{16} = Z_4, \quad B_N^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{84}$$

Para os Teoremas 1 e 3 (tomando $K_k = K$) com o Lema 2, obtém-se $\hat{w} = 4,7672$,

$$\begin{aligned}
K &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,1253 & 1,6033 & 0,7110 & 0,7292 & -0,1947 & 0,1909 \\ -0,8452 & 1,0975 & 0,8775 & 0,9010 & -0,2500 & 0,2232 \end{bmatrix}, \quad \|K\| = 2,6256 \times 10^3, \\
P &= \begin{bmatrix} 0,7508 & 0,2679 & -0,1893 & -0,1935 & 0,0556 & -0,0354 \\ 0,2679 & 0,7095 & 0,1835 & 0,1893 & -0,0522 & 0,0577 \\ -0,1893 & 0,1835 & 0,1603 & 0,1643 & -0,0454 & 0,0390 \\ -0,1935 & 0,1893 & 0,1643 & 0,1684 & -0,0467 & 0,0401 \\ 0,0556 & -0,0522 & -0,0454 & -0,0467 & 0,0133 & -0,0113 \\ -0,0354 & 0,0577 & 0,0390 & 0,0401 & -0,0113 & 0,0103 \end{bmatrix}, \quad \|P\| = 1.
\end{aligned} \tag{85}$$

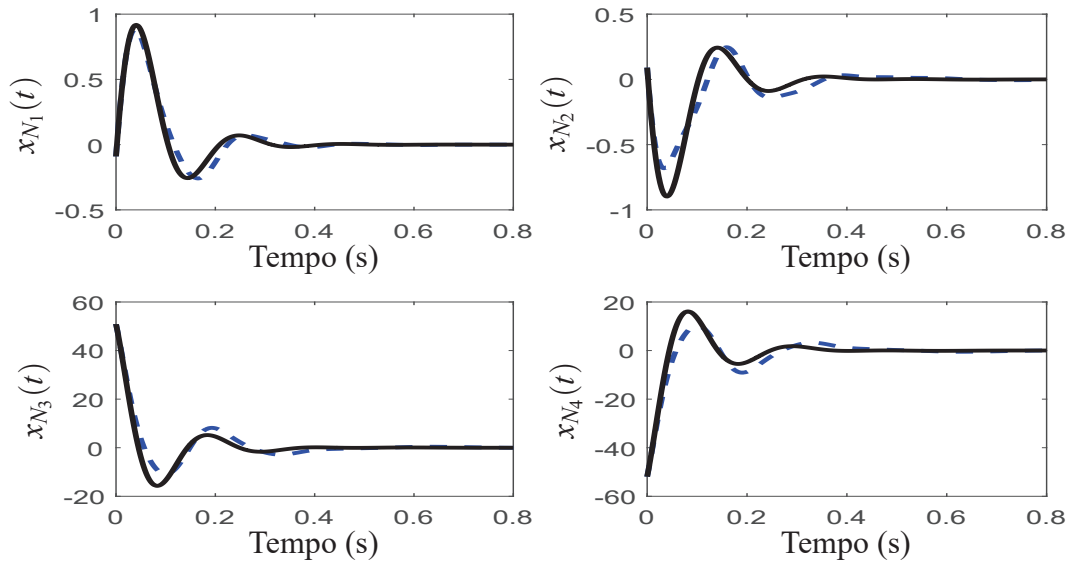
Para os Teoremas 2 e 3 com o Lema 2 obtém-se $\hat{w} = 19,0690$, e

$$\begin{aligned}
K_1 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2492 & 1,8866 & 1,0958 & 1,0774 & -0,2342 & 0,2197 \\ -1,4162 & 1,5879 & 1,5350 & 1,5111 & -0,3437 & 0,2942 \end{bmatrix}, \quad \|K_1\| = 3,8377 \times 10^3, \\
K_2 &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1306 & 1,5002 & 0,7023 & 0,6902 & -0,1466 & 0,1468 \\ -2,0624 & 2,2399 & 2,2015 & 2,1669 & -0,4921 & 0,4177 \end{bmatrix}, \quad \|K_2\| = 4,6256 \times 10^3, \\
K_3 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2202 & 1,8572 & 1,0658 & 1,0479 & -0,2275 & 0,2142 \\ -1,5629 & 1,7357 & 1,6857 & 1,6594 & -0,3773 & 0,3222 \end{bmatrix}, \quad \|K_3\| = 4,0397 \times 10^3, \\
K_4 &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1128 & 1,5190 & 0,7210 & 0,7086 & -0,1507 & 0,1503 \\ -1,9092 & 2,0858 & 2,0442 & 2,0121 & -0,4570 & 0,3885 \end{bmatrix}, \quad \|K_4\| = 4,3462 \times 10^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_5 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2538 & 1,8896 & 1,0995 & 1,0810 & -0,2350 & 0,2204 \\ -1,4172 & 1,5885 & 1,5358 & 1,5118 & -0,3438 & 0,2943 \end{bmatrix}, & \|K_5\| &= 3,8433 \times 10^3, \\
K_6 &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1256 & 1,5035 & 0,7064 & 0,6942 & -0,1475 & 0,1475 \\ -2,0629 & 2,2401 & 2,2018 & 2,1672 & -0,4921 & 0,4178 \end{bmatrix}, & \|K_6\| &= 4,6289 \times 10^3, \\
K_7 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2263 & 1,8626 & 1,0716 & 1,0536 & -0,2288 & 0,2153 \\ -1,5663 & 1,7386 & 1,6888 & 1,6625 & -0,3780 & 0,3228 \end{bmatrix}, & \|K_7\| &= 4,0511 \times 10^3, \\
K_8 &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1079 & 1,5221 & 0,7250 & 0,7126 & -0,1516 & 0,1510 \\ -1,9097 & 2,0859 & 2,0444 & 2,0124 & -0,4570 & 0,3885 \end{bmatrix}, & \|K_8\| &= 4,3496 \times 10^3, \\
K_9 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2493 & 1,8865 & 1,0957 & 1,0774 & -0,2342 & 0,2197 \\ -1,4157 & 1,5857 & 1,5337 & 1,5098 & -0,3434 & 0,2939 \end{bmatrix}, & \|K_9\| &= 3,8354 \times 10^3, \\
K_{10} &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1307 & 1,5000 & 0,7022 & 0,6901 & -0,1465 & 0,1467 \\ -2,0613 & 2,2372 & 2,1996 & 2,1651 & -0,4917 & 0,4173 \end{bmatrix}, & \|K_{10}\| &= 4,6219 \times 10^3, \\
K_{11} &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2199 & 1,8566 & 1,0654 & 1,0475 & -0,2274 & 0,2141 \\ -1,5618 & 1,7330 & 1,6838 & 1,6575 & -0,3769 & 0,3219 \end{bmatrix}, & \|K_{11}\| &= 4,0358 \times 10^3, \\
K_{12} &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1128 & 1,5188 & 0,7209 & 0,7086 & -0,1507 & 0,1502 \\ -1,9083 & 2,0833 & 2,0425 & 2,0104 & -0,4566 & 0,3881 \end{bmatrix}, & \|K_{12}\| &= 4,3428 \times 10^3, \\
K_{13} &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2539 & 1,8895 & 1,0995 & 1,0810 & -0,2350 & 0,2204 \\ -1,4167 & 1,5863 & 1,5345 & 1,5106 & -0,3435 & 0,2941 \end{bmatrix}, & \|K_{13}\| &= 3,8410 \times 10^3, \\
K_{14} &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1256 & 1,5033 & 0,7063 & 0,6942 & -0,1475 & 0,1475 \\ -2,0618 & 2,2374 & 2,2000 & 2,1654 & -0,4917 & 0,4174 \end{bmatrix}, & \|K_{14}\| &= 4,6252 \times 10^3, \\
K_{15} &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,2262 & 1,8623 & 1,0713 & 1,0534 & -0,2287 & 0,2152 \\ -1,5654 & 1,7361 & 1,6872 & 1,6608 & -0,3776 & 0,3225 \end{bmatrix}, & \|K_{15}\| &= 4,0480 \times 10^3, \\
K_{16} &= 10^3 \begin{bmatrix} 0,1078 & 1,5220 & 0,7250 & 0,7125 & -0,1516 & 0,1510 \\ -1,9088 & 2,0834 & 2,0428 & 2,0107 & -0,4567 & 0,3882 \end{bmatrix}, & \|K_{16}\| &= 4,3462 \times 10^3, \\
P &= \begin{bmatrix} 0,7517 & 0,2540 & -0,2421 & -0,2385 & 0,0571 & -0,0351 \\ 0,2540 & 0,7398 & 0,2465 & 0,2424 & -0,0528 & 0,0569 \\ -0,2421 & 0,2465 & 0,2506 & 0,2466 & -0,0558 & 0,0465 \\ -0,2385 & 0,2424 & 0,2466 & 0,2426 & -0,0550 & 0,0458 \\ 0,0571 & -0,0528 & -0,0558 & -0,0550 & 0,0127 & -0,0104 \\ -0,0351 & 0,0569 & 0,0465 & 0,0458 & -0,0104 & 0,0092 \end{bmatrix}, & \|P\| &= 1. \quad (86)
\end{aligned}$$

Nas Figuras de 10 a 13 apresentam-se resultados de simulação para os sistemas (21) e (47) com leis de controle (18) e (44) e condição inicial $x(0) = [-0,0450 \ 0,0450 \ -0,0900 \ 0,0900]^T$, as curvas tracejadas (- -) representam as simulações utilizando os Teoremas 1 e 3 (tomando $K_k = K$) com o Lema 2, as curvas contínuas (-) representam as simulações utilizando os Teoremas 2 e 3 com o Lema 2.

Figura 10 - Variáveis de estado auxiliares ($x_N(t) = [\hat{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$) da simulação do sistema (1), com (84); com Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Para obter as regiões de factibilidade para os Teoremas 1 e 2, mostradas nas Figuras 14 e 15, considere $x_{01} = [-0,01 \ 0,01 \ -0,02 \ 0,02]^T$, $x_{02} = -x_{01}$, uma taxa de decaimento $\beta = 4,9$, $\phi = [100,2 \ 100,2]^T$, $\rho = [100 \ 100]^T$, $N = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 4} & I_{2 \times 2} \end{bmatrix}$, $\mu_0 = 1$.

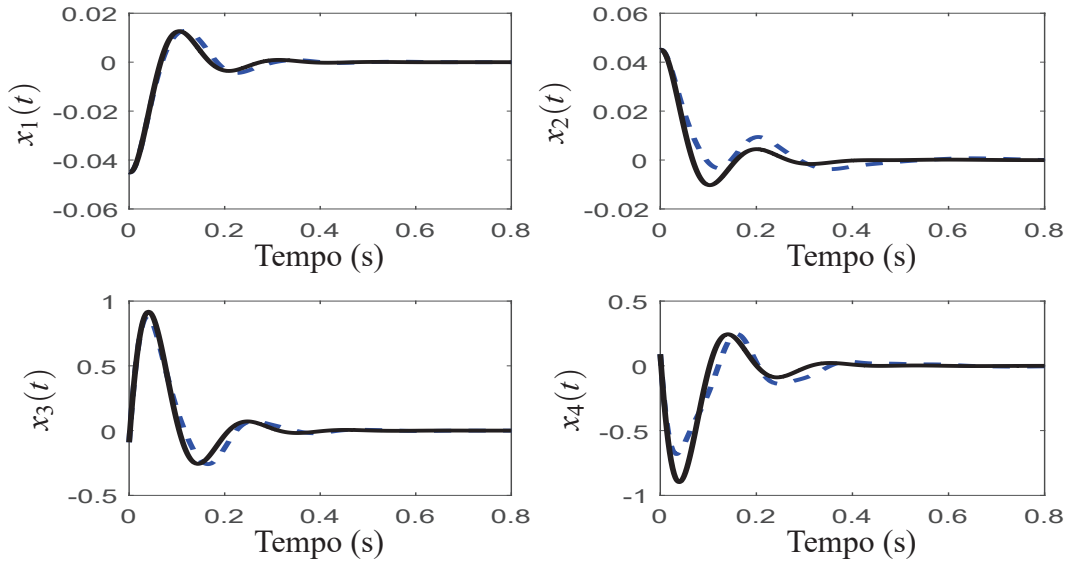
Para a Figura 14, fixamos $\bar{w} = 0,004$ o que resulta $\hat{w} = 15,8114$ e minimizamos η , para as falhas nos amortecedores variando de 0% a 100% com espaçamento uniforme de 5% para ambas as falhas.

Na Figura 14, η mínimo do controlador chaveado foi menor que η do controlador com ganho constante, para falhas nos amortecedores variando de 0% a 100%, e observa-se que a região de factibilidade do controlador chaveado é maior e portanto menos conservador.

Para a Figura 15, fixamos $\eta = 9 \times 10^8$ e minimizamos \bar{w} , para as falhas nos amortecedores variando de 0% a 100% com espaçamento uniforme de 5% para ambas as falhas.

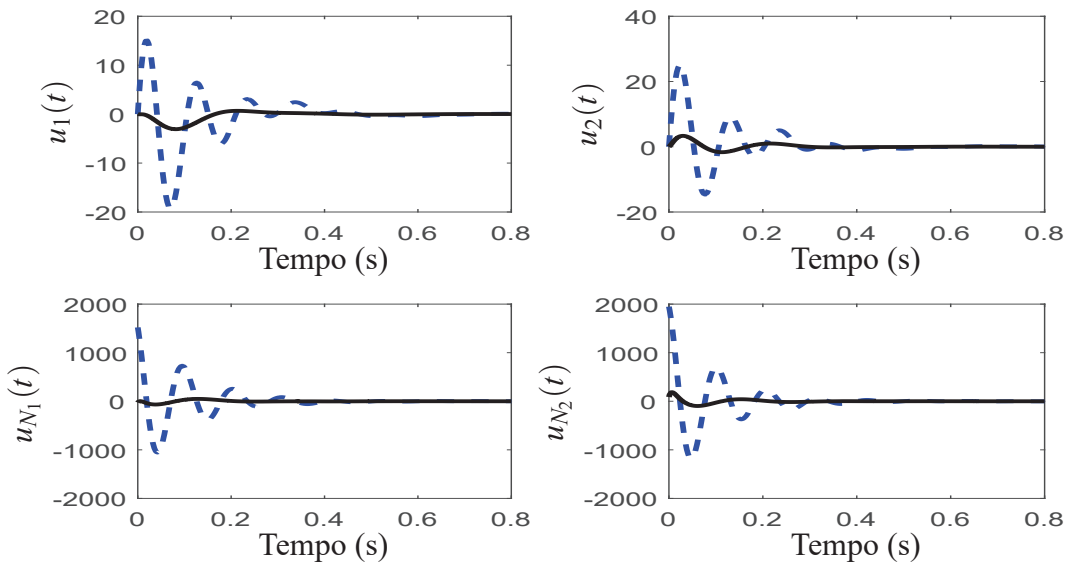
Na Figura 15, \hat{w} máximo do controlador chaveado é maior que \hat{w} do controlador com ganho constante, para falhas nos amortecedores variando de 0% a 100%, e observa-se que a região de factibilidade do controlador chaveado é maior e portanto menos conservador.

Figura 11 - Variáveis de estado da simulação do sistema (1), com (84); com Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).



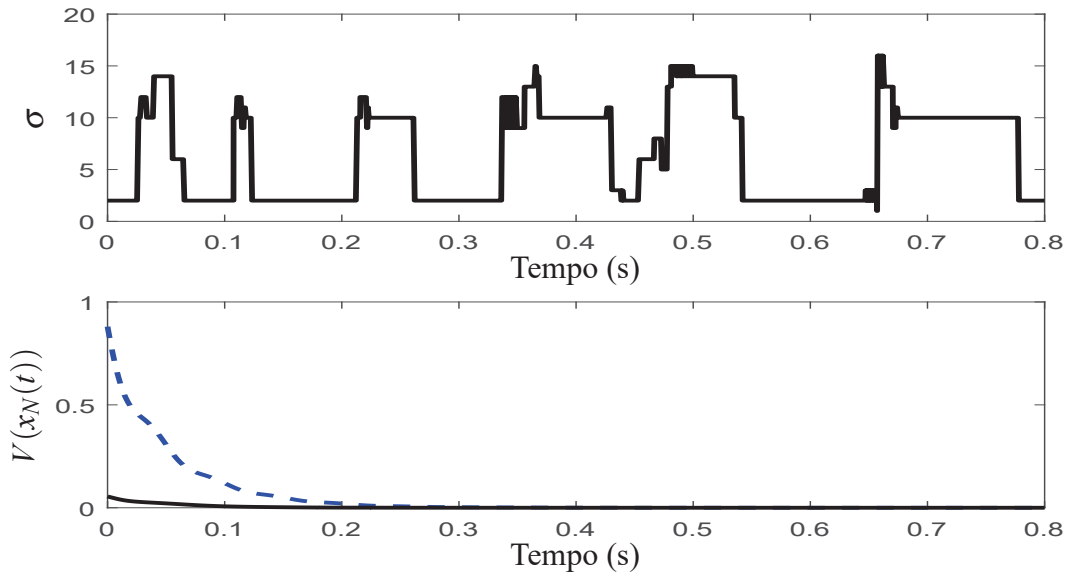
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 12 - Entrada de controle $u_1(t) = x_{N_5}(t)$, $u_2(t) = x_{N_6}(t)$ e sinal $u_N(t)$, para o sistema (1) e (80); para Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).



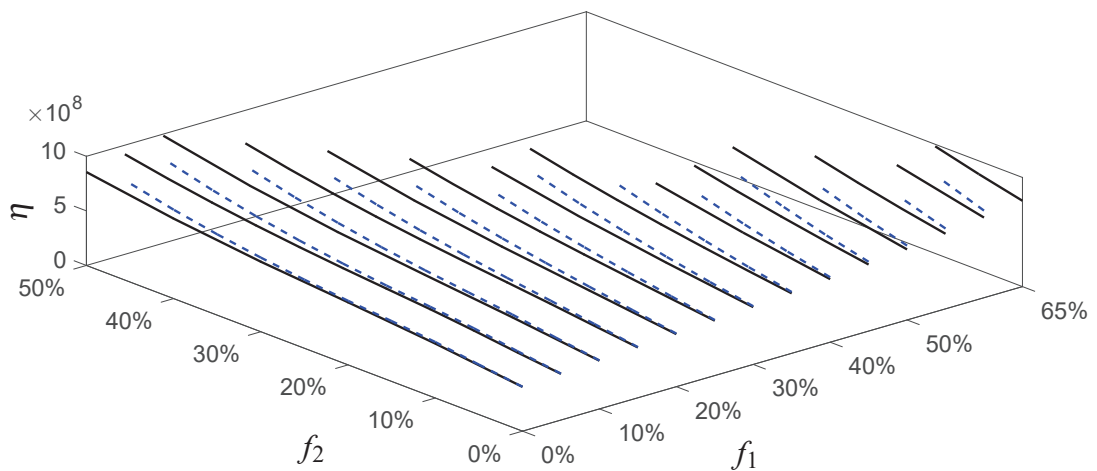
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 13 - Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{I}_r$, função de Lyapunov $V(x_N(t)) = x_N(t)^T P x_N(t)$ ($x_N(t) = [\hat{x}(t)^T u(t)^T]^T$), para o sistema (1) e (80); para Teoremas 2, 3 e Lema 2, lei de controle (44) e (86), representados por (-); Teorema 1, Teorema 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2, lei de controle (18) e (85), representado pela curva (- -).



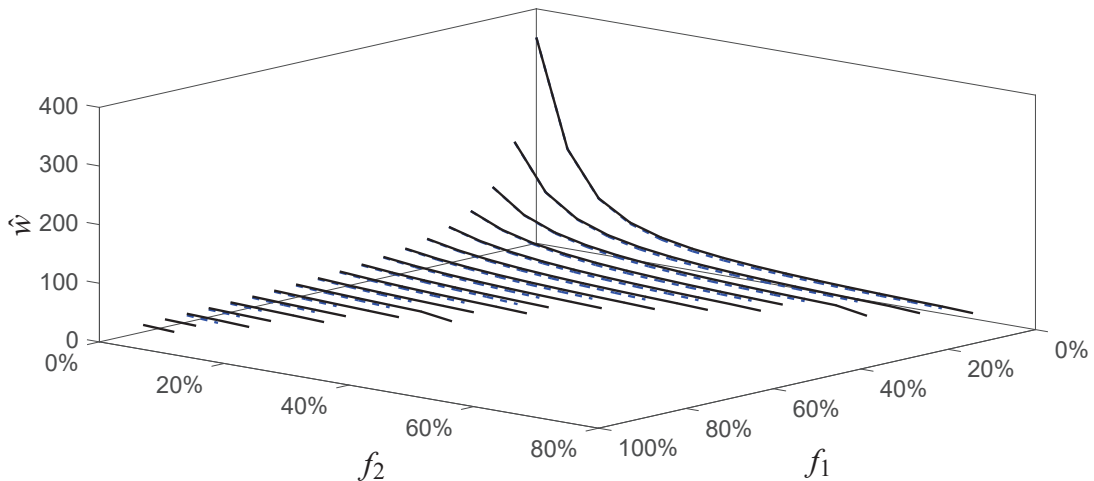
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 14 - Região de factibilidade obtida minimizando η com $\bar{w} = 0,004$ fixo, $\mu_0 = 1$: com Teoremas 1 e 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (- -); Teoremas 2 e 3 e Lema 2 representado por (-).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 15 - Região de factibilidade obtida minimizando \bar{w} com $\eta = 9 \times 10^8$ fixo, $\mu_0 = 1$: com Teoremas 1 e 3 (tomando $K_k = K$) e Lema 2 representado por (- -); Teoremas 2 e 3 e Lema 2 representado por (-).



Fonte: Elaboração da própria autora.

2.5 CONCLUSÕES PARCIAIS

A realimentação derivativa é adequada para implementações práticas nos casos em que a derivada do vetor de estado do sistema é mais fácil de se medir do que o vetor de estado do sistema. Em implementações reais, geralmente o sinal de controle está sujeito à saturação do atuador. Este capítulo investigou o projeto de sistemas de controle chaveados para sistemas lineares invariantes no tempo com incertezas politópicas e sujeitos à saturação do atuador. Foi proposto um projeto de controle chaveado baseado em uma dinâmica auxiliar, para plantas dadas em (1) e (2), sendo que $A(\alpha)$ deve ser uma matriz de posto completo e com B uma matriz constante, o que permitiu usar uma descrição convexa para a saturação do atuador. É importante notar que esta descrição para a saturação é válida em uma região de operação da dinâmica auxiliar e é garantida para todas as condições iniciais em um conjunto elipsoidal em que o estado permanece nesta região de operação para todo $t \geq 0$. No exemplo, mostrou-se a vantagem de se trabalhar com a lei de controle chaveada comparada com a lei de controle com ganho constante de realimentação.

3 CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES SUJEITO À SATURAÇÃO NO ATUADOR USANDO REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA COM DINÂMICA AUXILIAR SEM INTEGRADOR

Neste capítulo são apresentados os conceitos fundamentais necessários para a elaboração deste e do próximo capítulo. Considera-se que o vetor de estado não está disponível para realimentação, propõem-se procedimentos de projeto de controle robusto com ganho constante e chaveado utilizando a realimentação de um novo vetor de estado dependente dos parâmetros disponíveis do sistema, dentre eles a derivada do vetor de estado, e assegura-se também o critério de desempenho \mathcal{H}_∞ . Inicialmente apresenta-se um procedimento sem as especificações da região de operação e da saturação, garantindo que a origem seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Posteriormente, acrescentado uma região de operação e um conjunto elipsoidal invariante para o novo sistema linear, através de LMIs garante-se que a origem seja um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável ($w(t) = 0$), e para o caso com distúrbio não nulo ($w(t) \neq 0$) garante-se um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ e assegura-se que as trajetórias do vetor de estado auxiliar permanecem dentro da região de operação.

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

A revisão é baseada em Aliyu e Boukas (2011), Wannebo (1994), Carvalho (2014), Brezis (2010), Sarıkaya (2019), Wang e Wu (2015).

Definição 1. *Seja p um número real tal que $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathfrak{R}$ um aberto. Representa-se por $L^p(\Omega)$ a classe de todas as funções reais mensuráveis f , definidas em Ω tais que $|f|^p$ é integrável.*

Em L^p pode-se definir uma norma, associando a cada $f \in L^p$ como o número real $\|f(t)\|_p = \left(\int_{\Omega} f(t)^T f(t) dt \right)^{1/p}$ se $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$ a norma é definida como $\|f(t)\|_{L^\infty} = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$.

Em muitos problemas, não é suficiente trabalhar com a noção de soluções clássicas de equações diferenciais. Sendo necessário estender o conceito de solução. Para isto introduz-se a seguir a ideia de derivadas fracas e o espaço de Sobolev.

Definição 2. *Seja $\Omega \subset \mathfrak{R}$ um intervalo (possivelmente ilimitado) e seja $p \in \mathfrak{R}$ com $1 \leq p \leq +\infty$. Se $f(t) \in W^{1,2}(\Omega)$, diz-se que f tem derivada fraca em $L^2(\Omega)$ se existir $v(t) \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_{\Omega} f(t) \dot{h}(t) dt = - \int_{\Omega} v(t) h(t) dt \quad \forall h \in C_0^\infty(\Omega) \quad (87)$$

Considere $\Omega = (0, 2)$ e $f : \Omega \rightarrow \Re$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (88)$$

Observe que para $f \in L^1_{loc}(0, 2)$ (espaço das funções localmente integráveis no intervalo $(0, 2)$) não existe a derivada no sentido clássico, visto que não existe a derivada clássica no ponto $t = 1$. Vamos mostrar que f possui derivada fraca $v : (0, 2) \rightarrow \Re$ dada por

$$v(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (89)$$

De fato, $v \in L^1_{loc}(0, 2)$. Seja $h \in C_0^\infty(0, 2)$ (espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto no intervalo $(0, 2)$) e observe que

$$\int_{\Omega} f \dot{h} dt = \int_0^1 t \dot{h} dt + \int_1^2 \dot{h} dt \quad (90)$$

$$= t h(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 h(t) dt + (h(2) - h(1)) \quad (91)$$

$$= h(1) - \int_0^1 h(t) dt - h(1) \quad (92)$$

$$= - \int_0^1 h(t) dt = - \int_{\Omega} v(t) h(t) dt, \quad (93)$$

de modo que $v = \dot{f}$ no sentido fraco.

Definição 3. *Seja $\Omega \subset \Re$ um aberto. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ consiste nas funções $f \in L^p(\Omega)$ tais que a derivada fraca $\dot{f} \in L^p(\Omega)$ exista.*

Em $W^{1,p}(\Omega)$ pode-se definir uma norma, associando a cada $f \in L^p(\Omega)$ como o número real $\|f(t)\|_{W^{1,p}} = \left(\|f(t)\|_p + \|\dot{f}(t)\|_p \right)^{1/p}$ para $1 \leq p < \infty$. Se $p = \infty$ a norma é definida por $\|f(t)\|_{W^{1,\infty}} = \max \{ \|f(t)\|_{L^\infty}, \|\dot{f}(t)\|_{L^\infty} \}$. Seja $\Omega \subset \Re$ um aberto, $L^2(\Omega)$ o conjunto de todas as trajetórias $f(t)$ tais que $\|f(t)\|_2 = \left(\int_{\Omega} f(t)^T f(t) dt \right)^{1/2} < \infty$, $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das funções localmente integráveis em Ω , $C^k(\Omega)$ o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis em Ω , $C_0^k(\Omega)$ o conjunto das funções $C^k(\Omega)$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$, $k \geq 0$, $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω e seja o espaço de Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$ que consiste em funções $f \in L^2(\Omega)$ tais que a derivada fraca $\dot{f} \in L^2(\Omega)$ com norma $\|f(t)\|_{W^{1,2}} = \left(\|f(t)\|_2 + \|\dot{f}(t)\|_2 \right)^{1/2}$ para toda $f \in W^{1,2}(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega)$ é o espaço de Sobolev com fronteira nula.

Definição 4. *Seja $f : \Omega \rightarrow \Re$ contínua. O suporte de f , denotado por $\text{supp}(f)$, é o fecho, em*

Ω , do conjunto dos pontos t pertencentes a Ω , em que f não se anula. Simbolicamente tem-se:

$$\text{supp}(f) = \left\{ \overline{t \in \Omega : f(t) = 0} \right\} \text{ em } \Omega.$$

Da definição 4, vemos que o $\text{supp}(f)$ é o menor fechado fora do qual f se anula. O fecho de $\Omega = (a, b)$ é $\bar{\Omega} = [a, b]$.

A desigualdade clássica de Wirtinger (SARIKAYA, 2019) é dada por

$$\int_a^b (f(t))^2 dt \leq \int_a^b (\dot{f}(t))^2 dt, \quad (94)$$

para qualquer $f \in C^1[a, b]$ satisfazendo $f(a) = f(b) = 0$.

Teorema 5. (SARIKAYA, 2019) *Seja $f \in C^1[a, b]$ com $f(a) = f(b) = 0$, $p > 1$, e $\dot{f} \in L^p[a, b]$. Então, tem-se a seguinte inequação*

$$\int_a^b |f(t)|^p dt \leq \frac{(b-a)^{p-1}}{2^{p-1}p} \int_a^b |\dot{f}(t)|^p dt. \quad (95)$$

Teorema 6. (WANG; WU, 2015) *Seja $f \in W^{1,2}[a, b]$, $f : [a, b] \rightarrow \mathfrak{R}$ com $f(a) = f(b) = 0$. Então,*

$$\int_a^b f(t)^2 dt \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \dot{f}(t)^2 dt. \quad (96)$$

O teorema a seguir é um caso particular do teorema apresentado em Wannebo (1994), considerando $p = 2$, $m = 1$ em $W^{m,p}$.

Teorema 7. *Seja $f \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e $C > 0$ uma constante. Então*

$$\left(\int |f(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq C \left(\int |\dot{f}(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad (97)$$

sendo que

- $p \leq q < np/(n - mp)$ em que $p \geq 1$ e $mp < n$;
- $p \leq q < \infty$ em que $p \geq 1$ e $mp = n$;
- $p \leq q \leq \infty$ em que $mp \geq n$ e $p \geq 1$.

Teorema 8. (Desigualdade de Poincaré) (BREZIS, 2010, p. 218). *Seja Ω um intervalo limi- tado. Então existe uma constante $\zeta > 0$ tal que*

$$\|f(t)\|_{W^{1,p}} \leq \zeta \|\dot{f}(t)\|_p \quad (98)$$

para toda $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

O Teorema 8 com $m = 1$ e $p = 2$, nos diz que a norma dada por $\|f\| = \|\dot{f}\|_2$ em $W_0^{1,2}(\Omega)$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$, pois temos que $\|\dot{f}\|_2 \leq \|f\|_{W^{1,2}}$.

Teorema 9. (BREZIS, 2010, p. 204) *Seja $f \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$, com Ω limitado ou não, então existe $\tilde{f} \in C(\bar{\Omega})$ tal que*

$$f = \tilde{f} \text{ em quase todo ponto de } \Omega \text{ e} \quad (99)$$

$$\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y) = \int_y^x \dot{f}(t) dt, \forall x, y \in \Omega. \quad (100)$$

O Teorema 9 afirma que cada função $f \in W^{1,p}(\Omega)$ admite único representante contínuo em $\bar{\Omega}$, isto é, existe uma função contínua em $\bar{\Omega}$ que pertence a classe de equivalência de f . Observe que f ter um representante contínuo não é o mesmo que f ser contínua em quase todo ponto.

Como $\|f(t)\|_{L^\infty} = \sup_{t \in \Omega} |f(t)|$, temos o Teorema a seguir

Teorema 10. (BREZIS, 2010, p. 212-213) *Existe uma constante ζ dependendo de $|\Omega| \leq \infty$ tal que $\|f\|_{L^\infty} \leq \zeta \|f\|_{W^{1,p}}$, para todo $f \in W^{1,p}$ e $1 \leq p \leq \infty$.*

Observação 2. (BREZIS, 2010, p. 214) *Seja Ω um intervalo ilimitado. Seja $f \in W^{1,p}(\Omega)$, então $f \in L^p(\Omega)$ para todo $q \in [p, \infty]$. Visto que*

$$\int_{\Omega} |f|^q \leq \|f\|_{L^\infty}^{q-p} \|f\|_p^p. \quad (101)$$

Mas geralmente f não pertence a $L_p(\Omega)$ para $q \in [1, p)$.

Corolário 1. (BREZIS, 2010, p. 214) *Suponha que Ω é um intervalo ilimitado e $f \in W^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\lim_{t \in \Omega, |t| \rightarrow \infty} f(t) = 0. \quad (102)$$

Teorema 11. (BREZIS, 2010, p. 288). *Suponha Ω de classe C^1 . Seja*

$$f \in W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega}) \text{ com } 1 \leq p < \infty. \quad (103)$$

Então as seguintes propriedades são equivalentes:

- $f = 0$ em $\partial\Omega$.
- $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 12. (Desigualdade de Poincaré) (BREZIS, 2010, p. 290). *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e Ω um intervalo aberto e limitado. Então existe uma constante $\zeta > 0$ (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|f(t)\|_p \leq \zeta \|\dot{f}(t)\|_p \quad \forall f \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (104)$$

Como em Aliyu and Boukas (2011), utiliza-se $L^2[0, \infty)$ o conjunto de todas as trajetórias $f(t)$ tais que $\|f(t)\|_2 = \left(\int_0^\infty f(t)^T f(t) dt \right)^{1/2} < \infty$ e generalizando a derivada primeira em $L^2[0, \infty)$, tem-se o espaço de Sobolev $W^{1,2}[0, \infty)$ com norma $\|f(t)\|_{W^{1,2}} = (\|f(t)\|_2 + \|\dot{f}(t)\|_2)^{1/2}$.

3.2 SISTEMAS LINEARES INCERTOS SUJEITO A UM DISTÚRBO EXTERNO

Considere o sistema linear com incertezas invariantes no tempo sujeito a um distúrbio externo, dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + Bu(t) + H(\alpha)w(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + Du(t) + G(\alpha)w(t),\end{aligned}\tag{105}$$

sendo, $A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $C(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i C_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_x}$, $H(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i H_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_w}$, $G(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i G_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_w}$ são representados pela combinação convexa de matrizes conhecidas descritas por (BOYD *et al.*, 1994), com $\alpha \in \mathcal{P}$ definido em (2), matrizes conhecidas $B \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$ e $D \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_u}$, $w(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é a entrada exógena, $y(t) \in \mathfrak{R}^{n_y}$ é o vetor de saída, $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ o vetor de entrada.

Dado o sistema linear incerto (105), para todo $\alpha \in \mathcal{P}$, então,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - Bu(t) &= A(\alpha)x(t) + H(\alpha)w(t), \\ y(t) - Du(t) &= C(\alpha)x(t) + G(\alpha)w(t).\end{aligned}\tag{106}$$

Observe que, como a derivada do vetor de estado e o vetor de controle estão disponíveis, tem-se que $A(\alpha)x(t) + H(\alpha)w(t)$ também está disponível para a realimentação. Agora, a partir de (106) é possível definir um novo vetor de estado do sistema (105) como feito por Wolmuth *et al.* (2019) tomando:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + H(\alpha)w(t), \\ \hat{y}(t) &= C(\alpha)x(t) + G(\alpha)w(t).\end{aligned}\tag{107}$$

De (106) e (107), tem-se que $\hat{x}(t)$ está disponível para realimentação. Além disso, derivando (107) obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(\alpha)\dot{x}(t) + H(\alpha)\dot{w}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= C(\alpha)\dot{x}(t) + G(\alpha)\dot{w}(t).\end{aligned}\tag{108}$$

Note que, $\dot{w}(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ representa a derivada fraca da entrada exógena tal que $w(t), \dot{w}(t) \in W^{1,2}[0, t_f]$ para todo $t_f \geq 0$. Se $w \in C^1[0, t_f]$, então a derivada clássica de w coincide com a derivada fraca de w .

Considerando (105), (107), (108) e $\tilde{w}(t) = \dot{w}(t)$, note que

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{B}(\alpha)u(t) + H(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= C(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{C}(\alpha)u(t) + G(\alpha)\tilde{w}(t),\end{aligned}\quad (109)$$

com $\hat{B}(\alpha) = A(\alpha)B$, $\hat{C}(\alpha) = C(\alpha)B$, para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2).

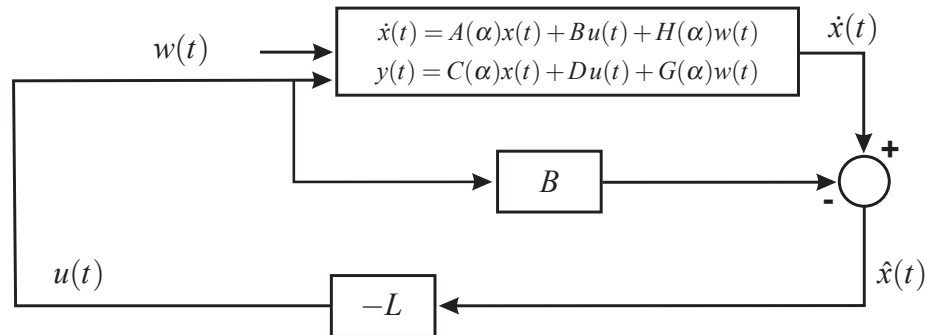
3.3 CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ - MATRIZ DE ENTRADA CONHECIDA

Considere o sistema linear incerto (105) e o esquema proposto na Figura 16. Utilizando a dinâmica auxiliar (109). Note que a lei de controle é dada para $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$, sendo

$$u(t) = -L\hat{x}(t), \quad (110)$$

com $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t) + H(\alpha)w(t) = \dot{x}(t) - Bu(t)$.

Figura 16 - Esquema da lei de controle proposta (110) para o sistema linear incerto (105).



Fonte: Elaboração da própria autora.

De (109) e (110) tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(\alpha)\hat{x}(t) - \hat{B}(\alpha)L\hat{x}(t) + H(\alpha)\tilde{w}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= C(\alpha)\hat{x}(t) - \hat{C}(\alpha)L\hat{x}(t) + G(\alpha)\tilde{w}(t).\end{aligned}\quad (111)$$

Para o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), obtém-se

$$\dot{\hat{x}}(t) = [A(\alpha) - \hat{B}(\alpha)L]\hat{x}(t), \quad \text{com } \hat{x}(t) = A(\alpha)x(t). \quad (112)$$

Teorema 13. *Para o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$). Considere o sistema linear descrito em (112) com lei de controle dada em (110). Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que*

$$A_i X + X A_i^T - \hat{B}_i M - M^T \hat{B}_i^T + 2\beta X < 0, \quad (113)$$

para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$. Então, a lei de controle (110), $u(t) = -L\hat{x}(t)$, com $L = MX^{-1}$, torna a origem do espaço de estado do sistema (112) assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β .

Demonstração. *A demonstração segue os passos dados em (BOYD et al., 1994), com a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, com $0 < P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$. Defina $X = P^{-1}$, $M = LX$ e considere as LMIs descritas em (113), para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$, factíveis.*

□

Para $w(t), \tilde{w}(t) \in L_2[0, \infty)$, ou seja, $w(t) \in W^{1,2}[0, \infty)$ e $\hat{x}(0) = 0$, o sistema em malha fechada (111) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma > 0$, se a seguinte desigualdade é satisfeita:

$$\|\hat{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2, \quad \forall \alpha \in \mathcal{P}. \quad (114)$$

Note que como consideramos o distúrbio de energia limitada com $w(t) \in W_0^{1,2}[0, \infty)$, ou seja, considerando $w(0) = w(t_f) = 0$ e $w(t) = 0$ para todo $t \geq t_f$, e para o caso em que a matriz $D = 0$, que é uma suposição razoável para problemas aplicados, resulta de (108) que $\dot{y}(t) = \dot{y}(t)$ e escreve-se

$$\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt = \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt + \int_{t_f}^\infty w(t)^T w(t) dt = \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt. \quad (115)$$

Se $w(t) \in C^1[0, t_f]$, utilizando a desigualdade clássica de Wirtinger (94) (SARIKAYA, 2019), note que

$$\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^{t_f} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt. \quad (116)$$

Assim, para $\gamma > 0$, de (114), (115) e (116) com $\tilde{w}(t) = \dot{w}(t)$ tem-se que para $D = 0$ em (108) que

$$\|w(t)\|_2^2 \leq \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \implies \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \leq \|\tilde{w}(t)\|_2^2, \quad (117)$$

$$\|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2. \quad (118)$$

Tomando (118), e para $y(0) = y(\infty) = 0$, da desigualdade clássica de Wirtinger, tem-se que $\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2$, obtém-se

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2. \quad (119)$$

Note que,

$$\begin{aligned} \min \left\{ \|w(t)\|_2^2 \right\} &\leq \|w(t)\|_2^2 \leq \max \left\{ \|w(t)\|_2^2 \right\} < \infty, \\ \min \left\{ \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \right\} &\leq \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \leq \max \left\{ \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \right\} < \infty. \end{aligned} \quad (120)$$

Agora, para $\varepsilon_w > 0$ tal que $0 < \varepsilon_w \leq \|w(t)\|_2^2$, vamos mostrar que existe $\tilde{\varepsilon} > 0$, para qualquer $w(t) \in W_0^{1,2}[0, \infty)$, tal que $\|\tilde{w}(t)\|_2^2 \leq \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2$.

De fato, como $-\|w(t)\|_2^2 \leq -\varepsilon_w$, tem-se que

$$\|\tilde{w}(t)\|_2^2 - \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2 \leq \max \left\{ \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \right\} - \tilde{\varepsilon} \varepsilon_w. \quad (121)$$

Assim, como $\varepsilon_w > 0$, pode-se considerar $\tilde{\varepsilon} = \frac{\max \left\{ \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \right\}}{\varepsilon_w}$ e obtém-se $\|\tilde{w}(t)\|_2^2 - \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2 \leq 0$, ou seja, existe um $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\|\tilde{w}(t)\|_2^2 \leq \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2$.

Assim, de (119) e de $\|\tilde{w}(t)\|_2^2 \leq \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2$, conclui-se que

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2. \quad (122)$$

Logo de (122), existe um $\tilde{\varepsilon} = \frac{\max \left\{ \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \right\}}{\varepsilon_w} > 0$, tal que $\|y(t)\|_2^2 < \gamma^2 \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2$. Assim, temos um custo garantido \mathcal{H}_∞ para a planta original.

Teorema 14. *Dado um escalar arbitrário $\kappa > 0$, considere o sistema linear descrito em (111) com lei de controle dada em (110) e distúrbio de energia limitada ($\tilde{w}(t)$). Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\xi > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:*

$$\begin{aligned} &\min \xi \\ &\text{sujeito a} \\ &\begin{bmatrix} XA_i^T + A_iX - \hat{B}_iM - M^T \hat{B}_i^T + 2\beta X & H_i & XC_i^T - M^T \hat{C}_i^T \\ H_i^T & -\kappa^{-1}I & G_i^T \\ C_iX - \hat{C}_iM & G_i & -\kappa\xi I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (123)$$

para todo $i \in \mathbb{I}_r$. Então, a lei de controle (110), $u(t) = -\hat{L}\hat{x}(t)$ com $L = MX^{-1}$, torna o sistema (111) assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β , e custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi}$ (114).

Demonstração. *Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P\hat{x}(t)$, com $P = P^T > 0$. Assuma que $X = P^{-1}$, $M = LX$ e suponha as LMIs descritas em (123), para todo $i \in \mathbb{I}_{r1}$, factíveis.*

Multiplicando (123) por α_i , com $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i = 1$ para $i \in \mathbb{I}_r$, e somando todos os termos para $i = 1$ até r , com $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i = A(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \hat{B}_i = \hat{B}(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i G_i = G(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i H_i = H(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \hat{C}_i = \hat{C}(\alpha)$, e posteriormente pré e pós-multiplicando a LMI (123) por $\text{diag}\{P, I, I\}$ com $P = X^{-1}$, $L = MP$ observe que

$$\begin{bmatrix} A(\alpha)^T P + PA(\alpha) - P\hat{B}(\alpha)L - L^T \hat{B}(\alpha)^T P + 2\beta P & PH(\alpha) & C(\alpha)^T - L^T \hat{C}(\alpha)^T \\ H(\alpha)^T P & -\kappa^{-1}I & G(\alpha)^T \\ C(\alpha) - \hat{C}(\alpha)L & G(\alpha) & -\kappa\xi I \end{bmatrix} < 0. \quad (124)$$

Aplicando o Complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (124) e pré e pós multiplicando por $[\hat{x}(t)^T \tilde{w}(t)^T]$ e $[\hat{x}(t)^T \tilde{w}(t)^T]^T$, respectivamente, então

$$\begin{aligned} & [\hat{x}(t)^T \quad \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} A(\alpha)^T P + PA(\alpha) - P\hat{B}(\alpha)L - L^T \hat{B}(\alpha)^T P + 2\beta P & PH(\alpha) \\ H(\alpha)^T P & -\kappa^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \\ & + [\hat{x}(t)^T \quad \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} C(\alpha)^T - L^T \hat{C}(\alpha)^T \\ G(\alpha)^T \end{bmatrix} \kappa^{-1} \xi^{-1} \begin{bmatrix} C(\alpha)^T - L^T \hat{C}(\alpha)^T \\ G(\alpha)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (125)$$

De (125), considerando $C(\alpha) - \hat{C}(\alpha)L = \bar{C}(\alpha)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & \hat{x}(t)^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) - P\hat{B}(\alpha)L - L^T \hat{B}(\alpha)^T P + 2\beta P) \hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T H(\alpha)^T P \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T P \\ & \times H(\alpha) \tilde{w}(t) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T \bar{C}(\alpha) \hat{x}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T G(\alpha) \\ & \times \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T \bar{C}(\alpha) \hat{x}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T G(\alpha) \tilde{w}(t) < 0. \end{aligned} \quad (126)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) &= \hat{x}(t)^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) - P\hat{B}(\alpha)L - L^T \hat{B}(\alpha)^T P) \hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T \\ & \times H(\alpha)^T P \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T PH(\alpha) \tilde{w}(t) + 2\beta \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t), \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) &= \hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T \bar{C}(\alpha) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T G(\alpha) \tilde{w}(t) + \tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T \bar{C}(\alpha) \hat{x}(t) \\ & + \tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T G(\alpha) \tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (128)$$

Logo de (126), (127) e (128)

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) < -2\beta V(\hat{x}(t)) \leq 0. \quad (129)$$

Então, de (129)

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) < 0. \quad (130)$$

Integrando ambos os lados de (130) de $t = 0$ a $t = t_f$, para todo $t_f \geq 0$, tem-se, para $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, e para $\hat{x}(0) = 0$, então $V(\hat{x}(0)) = 0$, $V(\hat{x}(t_f)) \geq 0$, para todo $t_f \geq 0$,

$$\begin{aligned} -\kappa^{-1} \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt + \kappa^{-1} \xi^{-1} \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt &< -\int_0^{t_f} \dot{V}(\hat{x}(t)) dt \\ &= V(\hat{x}(0)) - V(\hat{x}(t_f)) \leq 0. \end{aligned} \quad (131)$$

Logo de (131), com $\|\tilde{w}(t)\|_2^2 = \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt$ e $\|\dot{y}(t)\|_2^2 = \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$, para todo $t_f \geq 0$, note que

$$-\kappa^{-1} \|\tilde{w}(t)\|_2^2 + \kappa^{-1} \xi^{-1} \|\dot{y}(t)\|_2^2 < 0 \longrightarrow \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \xi \|\tilde{w}(t)\|_2^2. \quad (132)$$

De (132) e $\xi = \gamma^2$

$$\|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2, \quad (133)$$

demonstrando que o sistema linear incerto (111) com lei de controle com um ganho constante dada em (110), possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi} > 0$.

Observe que para o caso em que a matriz $D = 0$, como mostrado nas equações de (114)-(122) (existe $\tilde{\epsilon} > 0$ tal que $\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \tilde{\epsilon} \|w(t)\|_2^2$), garante-se um custo \mathcal{H}_∞ para o sistema (105) com lei de controle (110).

□

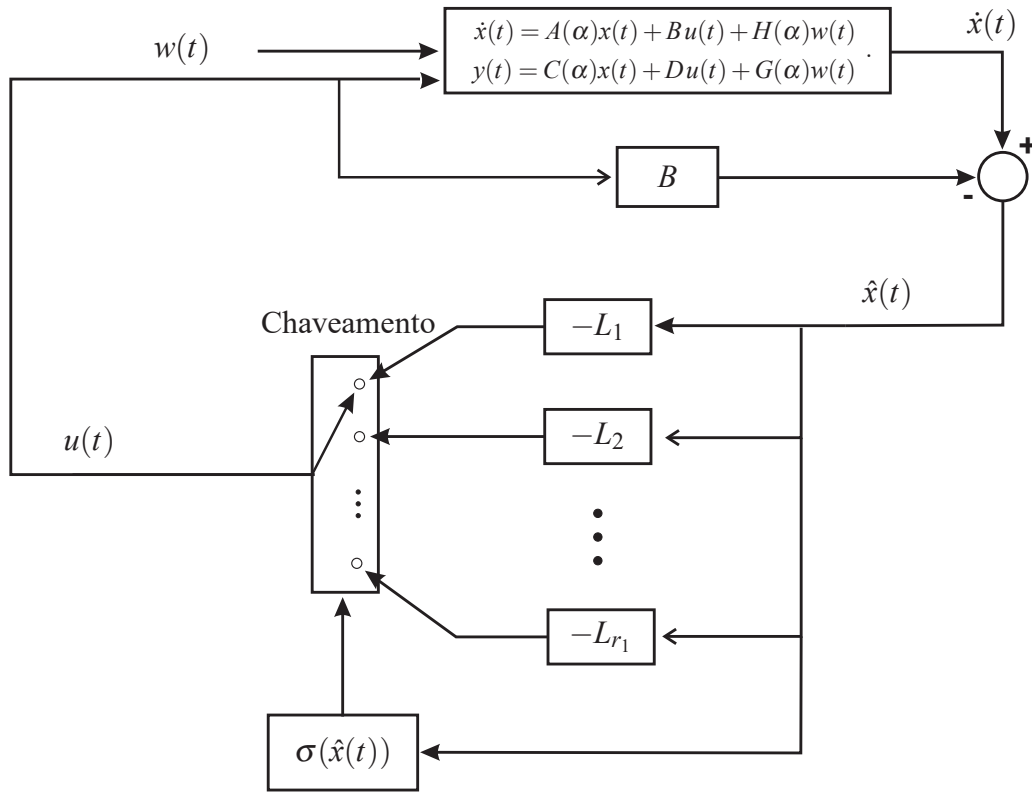
Observação 3. Um escalar $\kappa > 0$ (LEE et al., 2015) é incorporado no conjunto de LMIs, com uma escolha adequada de κ , é possível obter resultados menos conservadores. O significado deste parâmetro κ é ilustrado na Subseção 4.4.2, Figura 39.

3.4 CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO - MATRIZ DE ENTRADA CONHECIDA

Considere o esquema de controle proposto na Figura 17. A partir deste diagrama, a lei de controle robusta chaveada dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= u_\sigma(t) = -L_\sigma \hat{x}(t), \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{I}_{r_1}}^* \left\{ \hat{x}(t)^T Q_i \hat{x}(t) \right\}, \text{ com} \\ \sigma &\in \mathbb{I}_{r_1}, \quad L_\sigma \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}, \quad Q_i = Q_i^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x} \quad \text{e} \quad \hat{x}(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}. \end{aligned} \quad (134)$$

Figura 17 - Esquema da lei de controle proposta (134) para o sistema linear incerto (105).



Fonte: Elaboração da própria autora.

De (109) e (134) tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(\alpha)\hat{x}(t) + A(\alpha)Bu(t) + H(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= C(\alpha)\hat{x}(t) + C(\alpha)Bu(t) + G(\alpha)\tilde{w}(t), \\ u(t) &= -L_{\sigma}\hat{x}(t),\end{aligned}\tag{135}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= [A(\alpha) - \hat{B}(\alpha)L_{\sigma}]\hat{x}(t) + H(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= [C(\alpha)\hat{x}(t) - \hat{C}(\alpha)L_{\sigma}]\hat{x}(t) + G(\alpha)\tilde{w}(t),\end{aligned}\tag{136}$$

com $\hat{B}(\alpha) = A(\alpha)B$ e $\hat{C}(\alpha) = C(\alpha)B$.

Para o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), obtém-se,

$$\dot{\hat{x}}(t) = [\tilde{A}(\alpha) - \hat{B}(\alpha)L_{\sigma}]\hat{x}(t), \text{ com } \hat{x}(t) = A(\alpha)x(t).\tag{137}$$

O teorema a seguir foi inspirado nos resultados propostos em Souza *et al.* (2014a) e Alves

et al. (2016).

Teorema 15. Para o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$). Considere o sistema linear descrito em (112) com lei de controle dada em (134). Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $\bar{Q}_i, \bar{R}_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que

$$A_i X + X A_i^T + \bar{R}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (138)$$

$$-\hat{B}_i M_j - M_j^T \hat{B}_i^T - \bar{R}_i - \bar{Q}_j < 0, \quad (139)$$

sejam satisfeitas para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$. Então, a lei de controle (134), com $L_j = M_j X^{-1}$, $Q_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$ e $R_i = X^{-1} \bar{R}_i X^{-1}$, torna a origem do sistema (136) assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β .

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, sendo $P = P^T > 0$. Defina $X = P^{-1}$, $M_j = L_j X$ e considere as LMIs descritas em (138) e (139), para todo $i, j \in \mathbb{I}_r$, factíveis.

Então pré e pós-multiplicando (139) por P e substituindo $M_j = L_j X$

$$-P \hat{B}_i L_j - L_j^T \hat{B}_i^T P - P \bar{R}_i P - P \bar{Q}_j P < 0. \quad (140)$$

Supondo $\hat{x}(t) = 0$ e pré e pós-multiplicando (140) por $\hat{x}(t)^T$ e $\hat{x}(t)$, respectivamente, trocando-se j por σ e substituindo $P \bar{R}_i P = R_i$ e $P \bar{Q}_j P = Q_j$ obtém-se

$$0 > -\hat{x}(t)^T (P \hat{B}_i L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}_i^T P) \hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T R_i \hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T Q_\sigma \hat{x}(t). \quad (141)$$

Multiplicando (141) por α_i , $i \in \mathbb{I}_{r_1}$ e somando todos os termos de $i = 1$ a r_1 , tem-se

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \left[-\hat{x}(t)^T (P \hat{B}_i L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}_i^T P) \hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T R_i \hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T Q_\sigma \hat{x}(t) \right] \\ &= -\hat{x}(t)^T \left(P \hat{B}(\alpha) L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P \right) \hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T R(\alpha) \hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T Q_\sigma \hat{x}(t). \end{aligned} \quad (142)$$

De (142) note que

$$-\hat{x}(t)^T \left(P \hat{B}_i(\alpha) L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}_i(\alpha)^T P \right) \hat{x}(t) < \hat{x}(t)^T \bar{R}(\alpha) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T \bar{Q}_\sigma \hat{x}(t). \quad (143)$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando (138) por $P = X^{-1}$ e substituindo $P \bar{R}_i P = R_i$ e $P \bar{Q}_i P = Q_i$, observe que

$$P A_i + A_i^T P + 2\beta P + Q_i + R_i < 0. \quad (144)$$

Supondo agora $\hat{x}(t) = 0$ e pré e pós-multiplicando (144) por $\hat{x}(t)^T$ e $\hat{x}(t)$, respectivamente, então

$$0 > \hat{x}(t)^T (PA_i + A_i^T P + 2\beta P) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (Q_i + R_i) \hat{x}(t). \quad (145)$$

Multiplicando (145) por α_i , $i \in \mathbb{I}_{r_1}$ e somando todos os termos, de $i = 1$ a r_1 tem-se

$$\begin{aligned} 0 &> \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \left[\hat{x}(t)^T (PA_i + A_i^T P + 2\beta P) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (Q_i + R_i) \hat{x}(t) \right] \\ &= \hat{x}(t)^T \left(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + 2\beta P \right) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (Q(\alpha) + R(\alpha)) \hat{x}(t). \end{aligned} \quad (146)$$

De $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $i \in \mathbb{I}_{r_1}$, note que de (134),

$$\hat{x}(t)^T Q_\sigma \hat{x}(t) = \min_{i \in \mathbb{I}_{r_1}} \left\{ \hat{x}(t)^T Q_i \hat{x}(t) \right\} \leq \hat{x}(t)^T \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i Q_i \hat{x}(t). \quad (147)$$

De (143), (146) e (147)

$$\begin{aligned} 0 &> \hat{x}(t)^T \left(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + 2\beta P \right) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (Q(\mu) + R(\alpha)) \hat{x}(t) \\ &\geq \hat{x}(t)^T \left(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + 2\beta P \right) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (Q_\sigma + R(\alpha)) \hat{x}(t) \\ &> \hat{x}(t)^T \left(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P + 2\beta P \right) \hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T \left(P\hat{B}(\alpha)L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P \right) \hat{x}(t) \\ &= \hat{x}(t)^T \left(PA(\alpha) + A(\alpha)^T P - P\hat{B}(\alpha)L_\sigma - L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P \right) \hat{x}(t) + 2\beta \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t) \\ &= \dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)). \end{aligned} \quad (148)$$

Portanto, $\dot{V}(\hat{x}(t)) < -2\beta V(\hat{x}(t))$ e a origem do sistema em malha fechada (136) é assintoticamente estável com taxa de decaimento igual ou maior que β (BOYD et al., 1994).

□

Teorema 16. Dado um escalar arbitrário $\kappa > 0$, considere o sistema linear descrito em (111) com lei de controle dada em (134) e distúrbio de energia limitada ($\tilde{w}(t)$). Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $\bar{R}_i, \bar{Q}_j \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\xi > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:

$$\begin{aligned} &\min \xi \\ &\text{sujeito a} \\ &XA_i^T + A_i X + \bar{R}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{bmatrix} -\hat{B}_i M_j - M_j^T \hat{B}_i^T - \bar{R}_i - \bar{Q}_j & H_i & X C_i^T - M_j^T \hat{C}_i^T \\ H_i^T & -\kappa^{-1} I & G_i^T \\ C_i X - \hat{C}_i M_j & G_i & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0, \quad (150)$$

para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$. Então, a lei de controle (134), com $L_j = M_j X^{-1}$, torna a origem do sistema (111) assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β , com $X = P^{-1}$, $Q_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$, $R_i = X^{-1} \bar{R}_i X^{-1}$ para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$ e um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi}$ (114).

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, com $P = P^T > 0$. Assuma que $X = P^{-1}$, $M_j = L_j X$ e considere as LMIs descritas em (149) e (150), para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$, factíveis.

Pré e pós-multiplicando as LMIs (149) e (150) por P e $\text{diag}\{P, I, I\}$, respectivamente, com $P = X^{-1}$, $Q_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$, $R_i = X^{-1} \bar{R}_i X^{-1}$, $L_j = M_j P$ observe que

$$A_i^T P + P A_i + P \bar{R}_i P + P \bar{Q}_i P + 2\beta P < 0, \quad (151)$$

$$\begin{bmatrix} -P \hat{B}_i L_j - L_j^T \hat{B}_i^T P - R_i - Q_j & P H_i & C_i^T - L_j^T \hat{C}_i^T \\ H_i^T P & -\kappa^{-1} I & G_i^T \\ C_i - \hat{C}_i L & G_i & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0. \quad (152)$$

Multiplicando (151) e (152) por α_i , com $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i = 1$ para $i \in \mathbb{I}_r$, e somando todos os termos para $i = 1$ até r , com $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i = A(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \hat{B}_i = \hat{B}(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i G_i = G(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i H_i = H(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \bar{C}_i = \bar{C}(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \bar{R}_i = \bar{R}(\alpha)$, $\sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i \bar{Q}_i = \bar{Q}(\alpha)$, $P \bar{R}(\alpha) P = R(\alpha)$, $P \bar{Q}(\alpha) P = Q(\alpha)$ e substituindo j por σ , tem-se que

$$A(\alpha)^T P + P A(\alpha) + R(\alpha) + Q(\alpha) + 2\beta P < 0, \quad (153)$$

$$\begin{bmatrix} -P \hat{B}(\alpha) L_\sigma - L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P - R(\alpha) - Q_\sigma & P H(\alpha) & C(\alpha)^T - L_\sigma^T \hat{C}(\alpha)^T \\ H(\alpha)^T P & -\kappa^{-1} I & G(\alpha)^T \\ C(\alpha) - \hat{C}(\alpha) L_\sigma & G(\alpha) & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0. \quad (154)$$

Aplicando o Complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (154) e pré e pós multiplicando por $[\hat{x}(t)^T \quad \tilde{w}(t)^T]$ e $[\hat{x}(t)^T \quad \tilde{w}(t)^T]^T$, respectivamente,

$$\begin{aligned} & [\hat{x}(t)^T \quad \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} -P \hat{B}(\alpha) L_\sigma - L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P - R(\alpha) - Q_\sigma & P H(\alpha) \\ H(\alpha)^T P & -\kappa^{-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \\ & + [\hat{x}(t)^T \quad \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} C(\alpha)^T - L_\sigma^T \hat{C}(\alpha)^T \\ G(\alpha)^T \end{bmatrix} \kappa^{-1} \xi^{-1} \begin{bmatrix} C(\alpha)^T - L_\sigma^T \hat{C}(\alpha)^T \\ G(\alpha)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned}$$

(155)

De (155) obtém-se

$$\begin{aligned}
& -\hat{x}(t)^T (P\hat{B}(\alpha)L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P)\hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T (R(\mu) + Q_\sigma)\hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T H(\alpha)^T P\hat{x}(t) \\
& + \hat{x}(t)^T PH(\alpha)\tilde{w}(t) - \kappa^{-1}\tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T \bar{C}(\alpha)\hat{x}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\hat{x}(t)^T \\
& \times \bar{C}(\alpha)^T G(\alpha)\tilde{w}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T \bar{C}(\alpha)\hat{x}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T G(\alpha)\tilde{w}(t) < 0.
\end{aligned} \tag{156}$$

Pré e pós-multiplicando (153) por $\hat{x}(t)^T$ e $\hat{x}(t)$, respectivamente

$$\hat{x}(t)^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + 2\beta P)\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (R(\alpha) + Q(\alpha))\hat{x}(t) < 0. \tag{157}$$

De (156) e (157), considere $C(\alpha) - \hat{C}(\alpha)L_\sigma = \bar{C}(\alpha)$ e note que de (134),

$$\hat{x}(t)^T Q_\sigma \hat{x}(t) = \min_{j \in \mathbb{I}_{r_1}} \left\{ \hat{x}(t)^T L_j \hat{x}(t) \right\} \leq \hat{x}(t)^T \sum_{j=1}^{r_1} \alpha_j Q_j \hat{x}(t), \tag{158}$$

obtem-se

$$\begin{aligned}
0 & > \hat{x}(t)^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + 2\beta P)\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (R(\alpha) + Q(\alpha))\hat{x}(t) \\
& \geq \hat{x}(t)^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + 2\beta P)\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (R(\alpha) + Q_\sigma)\hat{x}(t) \\
& > \hat{x}(t)^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) + 2\beta P)\hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T (P\hat{B}(\alpha)L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P)\hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T \\
& \quad \times H(\alpha)^T P\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T PH(\alpha)\tilde{w}(t) - \kappa^{-1}\tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T \bar{C}(\alpha)\hat{x}(t) \\
& \quad + \kappa^{-1}\xi^{-1}\hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T G(\alpha)\tilde{w}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T \bar{C}(\alpha)\hat{x}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\tilde{w}(t)^T \\
& \quad \times G(\alpha)^T G(\alpha)\tilde{w}(t).
\end{aligned} \tag{159}$$

Observe que, considerando $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P\hat{x}(t)$, tem-se que $\dot{V}(\hat{x}(t)) = \dot{\hat{x}}(t)^T P\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T P\dot{\hat{x}}(t)$, e de (136), segue que

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) & = \hat{x}(t)^T (A(\alpha)^T P + PA(\alpha) - P\hat{B}(\alpha)L_\sigma - L_\sigma^T \hat{B}(\alpha)^T P)\hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T \\
& \quad \times H(\alpha)^T P\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T PH(\alpha)\tilde{w}(t) + 2\beta \hat{x}(t)^T P\hat{x}(t),
\end{aligned} \tag{160}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{y}}(t)^T \dot{\hat{y}}(t) & = \hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T \bar{C}(\alpha)\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T \bar{C}(\alpha)^T G(\alpha)\tilde{w}(t) + \tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T \bar{C}(\alpha)\hat{x}(t) \\
& \quad + \tilde{w}(t)^T G(\alpha)^T G(\alpha)\tilde{w}(t).
\end{aligned} \tag{161}$$

Logo, de (159), (160) e (161)

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) < -2\beta \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t) \leq 0. \quad (162)$$

Assim, de (162), note que

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) < 0. \quad (163)$$

Integrando ambos os lados de (163) de $t = 0$ a $t = t_f$, para todo $t_f \geq 0$, obtém-se, para $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, e para $\hat{x}(0) = 0$, então $V(\hat{x}(0)) = 0$, $V(\hat{x}(t_f)) \geq 0$ e

$$\begin{aligned} -\kappa^{-1} \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt + \kappa^{-1} \xi^{-1} \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt &< - \int_0^{t_f} \dot{V}(\hat{x}(t)) dt \\ &= V(\hat{x}(0)) - V(\hat{x}(t_f)) \leq 0. \end{aligned} \quad (164)$$

Logo de (164), com $\|\tilde{w}(t)\|_2^2 = \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt$ e $\|\dot{y}(t)\|_2^2 = \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$ tem-se

$$-\kappa^{-1} \|\tilde{w}(t)\|_2^2 + \kappa^{-1} \xi^{-1} \|\dot{y}(t)\|_2^2 < 0 \Rightarrow \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \xi \|\tilde{w}(t)\|_2^2. \quad (165)$$

De (165) e $\xi = \gamma^2$

$$\|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2, \quad (166)$$

demonstrando que o sistema linear incerto (136) com lei de controle dada em (134) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi} > 0$.

Observe que para o caso em que a matriz $D = 0$, como mostrado nas equações de (114)-(122) (existe $\tilde{\epsilon} > 0$, tal que $\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \tilde{\epsilon} \|w(t)\|_2^2$), garante-se um custo \mathcal{H}_∞ , para o sistema (105) com lei de controle chaveada (134).

□

O teorema a seguir apresenta uma análise teórica da factibilidade das condições relacionadas ao procedimento proposto no Teorema 15, que usa a lei de controle chaveada (134) e com o procedimento apresentado no Teorema 13, que usa uma lei de controle (110).

Teorema 17. (BUZETTI, 2017) *Se as condições dadas no Teorema 13 com lei de controle (110) são factíveis, então as condições dadas no Teorema 15 com a lei de controle chaveada (134) também são factíveis.*

Demonstração. Considere $P = P^T > 0$, $X = P^{-1}$, $M = LX$ e as LMIs descritas em (113), para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$, factíveis. Do Teorema 15 as LMIs (138) e (139) são equivalentes a

$$A_i^T P + P A_i + R_i + Q_i + 2\beta P < 0, \quad (167)$$

$$-P\hat{B}_iL_j - L_j^T\hat{B}_i^T P - R_i - Q_j < 0. \quad (168)$$

Então de (113) e $M = LX$ tem-se que

$$\begin{aligned} 0 &> A_iX + XA_i^T - \hat{B}_iM - M^T\hat{B}_i^T + 2\beta X \\ &= A_iX + XA_i^T - \hat{B}_iLX - XL^T\hat{B}_i^T + 2\beta X. \end{aligned} \quad (169)$$

Pré e pós multiplicando (169) por $P = P^T > 0$, obtém-se

$$0 > PA_i + A_i^T P - P\hat{B}_iL - L^T\hat{B}_i^T P + 2\beta P. \quad (170)$$

Considere $L_j = L$, então de (170), nota-se que existe $\vartheta > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$PA_i + A_i^T P - P\hat{B}_iL - L^T\hat{B}_i^T P + \vartheta I + 2\beta P < 0. \quad (171)$$

Defina $Q_j = 0$, $R_i = -P\hat{B}_iL - L^T\hat{B}_i^T P + \vartheta I$, então (171) implica na factibilidade da expressão $PA_i + A_i^T P + R_i + 2\beta P < 0$ descrita em (167). Note que a LMI (168) também é satisfeita,

$$\begin{aligned} -P\hat{B}_iL_j - L_j^T\hat{B}_i^T P - R_i - Q_j &= -P\hat{B}_iL_j - L_j^T\hat{B}_i^T P - 0 - [-P\hat{B}_iL_j - L_j^T\hat{B}_i^T P + \vartheta I] \\ &= -\vartheta I < 0. \end{aligned} \quad (172)$$

Logo se (113) é factível então (138) e (139) são factíveis com $L = L_j$, $Q_j = 0$, $R_i = -P\hat{B}_iL - L^T\hat{B}_i^T P + \vartheta I$ para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$ e $\vartheta > 0$ suficientemente pequeno.

Mostrou-se que se um sistema linear da forma Eq. (105) pode ser controlado com um ganho constante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada, com o procedimento proposto (BUZETTI, 2017). □

O teorema a seguir apresenta uma análise teórica da estabilidade entre o procedimento proposto no Teorema 16, que usa a lei de controle chaveada (134), com o procedimento apresentado no Teorema 14, que usa uma lei de controle (110).

Teorema 18. *Se as condições dadas no Teorema 14 com lei de controle (110) são factíveis, então as condições dadas no Teorema 16 com a lei de controle chaveada (134) também são factíveis.*

Demonstração. *Aplicando o complemento de Schur em (123) e considere $\bar{C}_i = C_iX - \hat{C}_iM$, obtém-se*

$$\begin{aligned} 0 &> \begin{bmatrix} XA_i^T + A_iX - \hat{B}_iM - M^T\hat{B}_i^T + 2\beta X & H_i \\ H_i^T & -\kappa^{-1}I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}_i^T \\ G_i^T \end{bmatrix} \kappa^{-1}\xi^{-1}I \begin{bmatrix} \bar{C}_i & G_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} XA_i^T + A_iX - \hat{B}_iM - M^T\hat{B}_i^T + 2\beta X + \kappa^{-1}\xi^{-1}\bar{C}_i^T\bar{C}_i & * \\ H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T\bar{C}_i & \kappa^{-1}(-I + \xi^{-1}G_i^T G_i) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(173)

Agora, aplicando o complemento Schur em (173), segue que

$$0 > XA_i^T + A_iX - \hat{B}_iM - M^T \hat{B}_i^T + 2\beta X + \kappa^{-1}\xi^{-1}\bar{C}_i^T \bar{C}_i + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)^T \times [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i). \quad (174)$$

De (174), note que existe um $\vartheta > 0$ suficientemente pequeno, tal que

$$0 > \vartheta I + XA_i^T + A_iX - \hat{B}_iM - M^T \hat{B}_i^T + 2\beta X + \kappa^{-1}\xi^{-1}\bar{C}_i^T \bar{C}_i + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)^T \times [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i). \quad (175)$$

Definindo $\bar{Q}_j = 0$ e $\bar{R}_i = -\hat{B}_iM - M^T \hat{B}_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}\bar{C}_i^T \bar{C}_i + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)^T \times [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i) + \vartheta I$. Note que para $\bar{R}_i = \bar{R}_i^T$. Então (175) implica na factibilidade de $A_iX + XA_i^T + \bar{R}_i + 2\beta X < 0$ descrita em (149).

Considere, $M_j = M$ para todo $j \in \mathbb{I}_{r_1}$, logo

$$\begin{aligned} & -\hat{B}_iM_j - M_j^T \hat{B}_i^T - \bar{R}_i - \bar{Q}_j + \kappa^{-1}\xi^{-1}(\bar{C}_i)^T (\bar{C}_i) + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T (\bar{C}_i))^T \\ & \times [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i) \\ = & -\hat{B}_iM_j - M_j^T \hat{B}_i^T - [-\hat{B}_iM - M^T \hat{B}_i^T + \bar{C}_i^T \kappa^{-1}\xi^{-1}(\bar{C}_i) + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)^T \\ & \times [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)] + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)^T \\ & - \vartheta I - 0 + \kappa^{-1}\xi^{-1}\bar{C}_i^T (\bar{C}_i) [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i) \\ = & -\vartheta I < 0. \end{aligned} \quad (176)$$

Assim, (176), resulta em

$$\begin{aligned} & -\hat{B}_iM_j - M_j^T \hat{B}_i^T - \bar{R}_i - \bar{Q}_j + \kappa^{-1}\xi^{-1}\bar{C}_i^T \bar{C}_i + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)^T \\ & \times [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i) < 0. \end{aligned} \quad (177)$$

Aplicando recursivamente o complemento de Schur em (177), obtém-se (150) com $\bar{Q}_j = 0$ e $\bar{R}_i = -\hat{B}_iM - M^T \hat{B}_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}\bar{C}_i^T \bar{C}_i + (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i)^T [\kappa^{-1}I - \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T G_i]^{-1} (H_i^T + \kappa^{-1}\xi^{-1}G_i^T \bar{C}_i) + \vartheta I$. Então a prova está concluída. \square

3.5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA SUJEITO À SATURAÇÃO DO ATUADOR E DISTÚRBO EXTERNO

Considere o sistema linear com incertezas invariantes no tempo, sujeito à saturação do atuador e um distúrbio externo, dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B\text{sat}(u(t)) + H(\alpha)w(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D\text{sat}(u(t)) + G(\alpha)w(t),\end{aligned}\quad (178)$$

sendo, $A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $C(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i C_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_x}$, $H(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i H_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_w}$, $G(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i G_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_w}$ representadas pelas combinações convexas de matrizes conhecidas descritas por (BOYD *et al.*, 1994), com $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2), matrizes conhecidas $B \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$ e $D \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_u}$, $w(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é a entrada exógena com $w(t) \in \mathcal{W}^{1,2}[0, \infty)$, $\dot{w}(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é a derivada fraca da entrada exógena tal que $w(t), \dot{w}(t) \in L^2[0, \infty)$, $y(t) \in \mathfrak{R}^{n_y}$ é o vetor de saída, $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ o vetor de entrada.

De (6), considere que o posto de $A(\alpha)$, para todo $\alpha \in \mathcal{P}$, é completo, e que a derivada do vetor de estado está disponível para realimentação, logo,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - B\text{sat}(u(t)) &= A(\alpha)x(t) + H(\alpha)w(t), \\ y(t) - D\text{sat}(u(t)) &= C(\alpha)x(t) + G(\alpha)w(t).\end{aligned}\quad (179)$$

Observe que, como a derivada do vetor de estado e a saturação do vetor de controle estão disponíveis, tem-se que $A(\alpha)x(t) + H(\alpha)w(t)$ também está disponível para a realimentação. Agora, a partir de (179) é possível definir um novo vetor de estado do sistema (178), inspirado em Moreira (2015), Wolmuth *et al.* (2019):

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \dot{x}(t) - B\text{sat}(u(t)) = A(\alpha)x(t) + H(\alpha)w(t), \\ \hat{y}(t) &= y(t) - D\text{sat}(u(t)) = C(\alpha)x(t) + G(\alpha)w(t).\end{aligned}\quad (180)$$

De (179) e (180), temos que $\hat{x}(t)$ está disponível para a realimentação. Além disso, derivando (180) obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A(\alpha)\dot{x}(t) + H(\alpha)\dot{w}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= C(\alpha)\dot{x}(t) + G(\alpha)\dot{w}(t).\end{aligned}\quad (181)$$

Pré-multiplicando (178) por $A(\alpha)$, e considerando (180), (181) e $\tilde{w}(t) = \dot{w}(t)$, note que

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\alpha)\hat{x}(t) + A(\alpha)B\text{sat}(u(t)) + H(\alpha)\tilde{w}(t),$$

$$\dot{\hat{y}}(t) = C(\alpha)\hat{x}(t) + C(\alpha)B\text{sat}(u(t)) + G(\alpha)\tilde{w}(t). \quad (182)$$

Da saturação definida no Lema 1 e (182),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A(\alpha)\hat{x}(t) + A(\alpha)BZ(\lambda)u(t) + H(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= C(\alpha)\hat{x}(t) + C(\alpha)BZ(\lambda)u(t) + G(\alpha)\tilde{w}(t), \end{aligned} \quad (183)$$

com $\lambda = [\lambda_1 \ \cdots \ \lambda_{2^{n_u}}]^T$, $\lambda_s \geq 0$, $\sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s = 1$ para $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$ e $\alpha \in \mathcal{P}$ definido em (2). Assim, segue de (183) que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i B \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s Z_s u(t) + \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i H_i \tilde{w}(t), \\ \dot{\hat{y}}(t) &= \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i C_i \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i C_i B \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s Z_s u(t) + \sum_{s=1}^{2^{n_u}} \lambda_s \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i G_i \tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (184)$$

Para reescrever a dinâmica em (184) em um único simplex, executa-se a seguinte mudança de variável: $\mu_k = \lambda_s \alpha_i$ com $k = r_1(s-1) + (i-1) + 1$ para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$ e $s \in \mathbb{I}_{2^{n_u}}$ em (184). Após este procedimento, encontra-se

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \sum_{k=1}^r \mu_k \{ \check{A}_k \hat{x}(t) + \check{B}_k u(t) + \check{H}_k \tilde{w}(t) \} \\ \dot{\hat{y}}(t) &= \sum_{k=1}^r \mu_k \{ \check{C}_k \hat{x}(t) + \check{D}_k u(t) + \check{G}_k \tilde{w}(t) \}, \end{aligned} \quad (185)$$

com $r = r_1 2^{n_u}$ e as matrizes abaixo definidas de forma análoga a apresentada no Capítulo 1 (15):

$$\begin{aligned} \check{A}_{fr_1+k} &= A_k, \quad \check{C}_{fr_1+k} = C_k, \quad \check{H}_{fr_1+k} = H_k, \quad \check{G}_{fr_1+k} = G_k \quad \text{para todo } k \in \{1, \dots, r_1\} \text{ e} \\ &\quad \text{para cada } f \in \{0, 1, \dots, 2^{n_u} - 1\}, \\ \check{Z}_k &= Z_s \quad \text{para } k = (s-1)r_1 + 1, \dots, sr_1 \quad \text{para cada } s \in \{1, \dots, 2^{n_u}\}, \\ \check{B}_k &= \check{A}_k B \check{Z}_k, \quad \check{D}_k = \check{C}_k B \check{Z}_k, \quad \text{para cada } k \in \{1, \dots, r\}. \end{aligned} \quad (186)$$

De (185), com $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$, $\mu_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{I}_r$,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \check{A}(\mu)\hat{x}(t) + \check{B}(\mu)u(t) + \check{H}(\mu)\tilde{w}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= \check{C}(\mu)\hat{x}(t) + \check{D}(\mu)u(t) + \check{G}(\mu)\tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (187)$$

De (187) e (110)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= [\check{A}(\mu) - \check{B}(\mu)L]\hat{x}(t) + \check{H}(\mu)\tilde{w}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= [\check{C}(\mu) - \check{D}(\mu)L]\hat{x}(t) + \check{G}(\mu)\tilde{w}(t).\end{aligned}\quad (188)$$

De (187) e (134)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= [\check{A}(\mu) - \check{B}(\mu)L_\sigma]\hat{x}(t) + \check{H}(\mu)\tilde{w}(t) \\ \dot{\hat{y}}(t) &= [\check{C}(\mu) - \check{D}(\mu)L_\sigma]\hat{x}(t) + \check{G}(\mu)\tilde{w}(t).\end{aligned}\quad (189)$$

Para o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), obtém-se

$$\dot{\hat{x}}(t) = [\check{A}(\mu) - \check{B}(\mu)L]\hat{x}(t), \quad (190)$$

com $u = -L\hat{x}(t)$ (110) e $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t)$,

$$\dot{\hat{x}}(t) = [\check{A}(\mu) - \check{B}(\mu)L_\sigma]\hat{x}(t), \quad (191)$$

com $u = -L_\sigma\hat{x}(t)$ (134) e $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t)$.

3.5.1 O problema de controle \mathcal{H}_∞ considerando a região de operação

O índice de desempenho \mathcal{H}_∞ , está relacionado com a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios de energia limitada (BOYD *et al.*, 1994; OLIVEIRA *et al.*, 2018). Então, considere o distúrbio de energia limitada $w(t) \in L^2[0, \infty)$ com derivada fraca $\tilde{w}(t) = \dot{w}(t) \in L^2[0, \infty)$ e uma constante positiva ε , tais que

$$\mathcal{W} = \left\{ w(t), \tilde{w}(t) \in \mathfrak{R}^{n_w} : \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon, \int_0^\infty \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt \leq \varepsilon \right\}. \quad (192)$$

Para o projeto de controle \mathcal{H}_∞ , o distúrbio $\tilde{w}(t)$ possuir energia limitada é uma condição essencial. Como realizado em Oliveira *et al.* (2018), será atribuído um valor ao limitante da energia do distúrbio, dado por ε , tal que $w(t), \tilde{w}(t) \in \mathcal{W}$.

O sinal de controle $u(t)$, com a saturação definida no Lema 1, temos que a restrição $|u_j(t)| \leq \phi_j$, pode ser vista como uma região de operação para a dinâmica auxiliar. Assim, considere matrizes $N = I_{n_u \times n_u} \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_u}$, $P \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$ com $P = P^T > 0$, vetores $\phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{n_u}]^T \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $\rho = [\rho_1 \ \dots \ \rho_{n_u}]^T \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $\mathbb{I}_{n_u} = \{1, 2, \dots, n_u\}$, $\rho_l > 0$, $\phi_l \geq \rho_l$, para todo $l \in \mathbb{I}_{n_u}$ e uma constante positiva δ .

Sejam \mathcal{U} e $\mathcal{E}(P, \delta)$ os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{U} \triangleq \{u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u} : |N_{(h)}u(t)| \leq \phi_h, h \in \mathbb{I}_{n_u}\}, \quad (193)$$

com $N = I_{n_u \times n_u}$,

$$\check{\mathcal{E}}(P, \delta) \triangleq \left\{ \hat{x}(t) \in \mathfrak{R}^{n_x} : \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t) \leq \delta \right\} \quad (194)$$

em que N e ϕ são conhecidas, $N_{(h)}$ representa a linha h da matriz N , ϕ_h a entrada h do vetor ϕ e uma candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$ (KLUG; CASTELAN; COUTINHO, 2015; ALVES *et al.*, 2016; OLIVEIRA *et al.*, 2018; WOLMUTH *et al.*, 2019).

Baseado em Oliveira *et al.* (2018), temos o seguinte Problema 1:

Problema 1. *O problema de controle \mathcal{H}_∞ para a classe de sistemas lineares invariante no tempo, considerando a região de operação (193), para distúrbios de energia limitada $\tilde{w}(t) \in \mathcal{W}$ (192), uma variável de folga $\kappa > 0$, uma constante $\epsilon_0 \geq 0$ e uma constante $\xi > 0$, consiste em determinar uma lei de controle que satisfaça os seguintes requisitos:*

1. *para $\tilde{w}(t) = 0$, $t > 0$, a origem é um ponto de equilíbrio localmente estável do sistema linear incerto (187) com lei de controle (134) (ou (110)), e o conjunto elipsoidal $\check{\mathcal{E}}(P, \epsilon_0 + \kappa^{-1}\epsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração (ou seja, se $\hat{x}(0)$ pertence ao conjunto $\check{\mathcal{E}}(P, \epsilon_0 + \kappa^{-1}\epsilon)$, então todas as trajetórias de $\hat{x}(t)$, $t > 0$, também irão permanecer dentro deste conjunto);*
2. *para $\tilde{w}(t) = 0$, se $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \epsilon_0)$, então $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \epsilon_0 + \kappa^{-1}\epsilon)$, para todo $t \geq 0$;*
3. *para $\tilde{w}(t) = 0$, se $\hat{x}(0) = 0$, então o sistema linear incerto realimentado (189) (ou (188)) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi}$, tal que*

$$\|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2, \quad (195)$$

e $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \kappa^{-1}\epsilon)$, para todo $\mu \in \mathcal{P}$.

Lema 3. *Considere os conjuntos \mathcal{U} , $\check{\mathcal{E}}(P, \delta)$ dados em (193) e (194), respectivamente. A condição $\check{\mathcal{E}}(P, \delta) \subset \mathcal{U}$ é assegurada se a seguinte LMI for factível,*

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \delta^{-1} & N_{(h)} M \\ M^T N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (196)$$

para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$, sendo que $X = P^{-1}$, $M = LX$ e $u = -L\hat{x}(t)$.

Demonstração. *Pré e pós-multiplicando a LMI (196) por $\text{diag}\{1, P\}$ com $P = X^{-1}$ e $M = LX$, observe que*

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \delta^{-1} & N_{(h)} L \\ L^T N_{(h)}^T & P \end{bmatrix} \geq 0. \quad (197)$$

*Aplicando o Complemento de Schur (BOYD *et al.*, 1994) em (197)*

$$P - L^T N_{(h)}^T \phi_h^{-2} \delta N_{(h)} L \geq 0. \quad (198)$$

Pré-multiplicando (198) por $\hat{x}(t)^T = 0$ e pós-multiplicando por $\hat{x}(t)$

$$\hat{x}(t)^T P \hat{x}(t) \geq \hat{x}(t)^T L^T N_{(h)}^T \phi_h^{-2} \delta N_{(h)} L \hat{x}(t). \quad (199)$$

Se $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \delta)$ definido em (194), então $\hat{x}(t)^T P \hat{x}(t) \leq \delta$, logo de (199), obtém-se

$$\begin{aligned} \delta &\geq \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t) \geq \hat{x}(t)^T L^T N_{(h)}^T \phi_h^{-2} \delta N_{(h)} L \hat{x}(t), \\ \phi_h^2 &\geq \hat{x}(t)^T L^T N_{(h)}^T N_{(h)} L \hat{x}(t) = |N_{(h)} L \hat{x}(t)|^2, \\ |N_{(h)} L \hat{x}(t)| &\leq \phi_h \quad \forall h \in \mathbb{I}_{n_u}. \end{aligned} \quad (200)$$

Portanto, $|N_{(h)} L \hat{x}(t)| = |N_{(h)}(-L \hat{x}(t))| = |N_{(h)} u(t)| \leq \phi_h$ para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$, ou seja, se $u(t) \in \mathcal{U}$ tem-se que $u(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \delta) \subset \mathcal{U}$. □

Da mesma forma que em Alves *et al.* (2016) e Wolmuth *et al.* (2019), consideram-se condições iniciais politópicas, o vetor de estado da planta $x(0) \in \mathcal{X}_0$, com $\mathcal{X}_0 = \text{co} \{x_{0_1}, \dots, x_{0_q}\}$, $x_{0_e} \in \mathfrak{R}^n$ para todo $e \in \mathbb{I}_q$, $x(0) = \sum_{e=1}^q \eta_e x_{0_e}$, $\eta_e \geq 0$ e $\sum_{e=1}^q \eta_e = 1$, que é o conjunto convexo dos vetores conhecidos x_{0_1}, \dots, x_{0_q} . A partir de \mathcal{X}_0 , define-se os conjuntos de condições iniciais de interesse para o vetor de estado $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t)$, respectivamente como $\hat{w}\mathcal{X}_0$ e $\hat{w}\hat{\mathcal{X}} \in \check{\mathcal{E}}(P, 1)$, com $\hat{w} > 0$, $u(0) = 0_{m \times 1}$, sendo $\hat{\mathcal{X}} = \text{co} \{A(\alpha)x_{0_1}, \dots, A(\alpha)x_{0_q}\}$, o casco convexo de vetores $A(\alpha)x_{0_1}, \dots, A(\alpha)x_{0_q}$, com $\sum_{e=1}^q \eta_e A(\alpha)x_{0_e} \in \hat{\mathcal{X}}$, $\sum_{e=1}^q \eta_e = 1$, $\eta_e \geq 0$ para todo $e \in \mathbb{I}_q$, com o vetor incerto mas constante $\alpha \in \mathcal{P}$ (2).

Lema 4. A condição $\hat{w}\hat{\mathcal{X}} \subset \check{\mathcal{E}}(P, \delta)$ é satisfeita se

$$\begin{bmatrix} \hat{w}^{-2} & (A_i x_{0_e})^T \\ A_i x_{0_e} & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (201)$$

com \hat{w} uma constante positiva, para todo $e \in \mathbb{I}_q$ e $i \in \mathbb{I}_{r_1}$. Assim \hat{w} pode ser usado como uma variável para obter uma estimativa menos conservadora do domínio de atração na busca da maior região elipsoidal $\check{\mathcal{E}}(P, 1)$ que contenha as condições iniciais de interesse (ALVES *et al.*, 2016; HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; WOLMUTH *et al.*, 2019).

Demonstração. Para a condição inicial $\hat{x}(0) = A(\alpha)x_0(\eta)$, a demonstração é análoga à apresentada no Lema 2. □

Note que na LMI (201), \hat{w} é um fator de escala do conjunto $\hat{\mathcal{X}}$ (BOYD *et al.*, 1994; HU; LIN; CHEN, 2002; CAO; LIN, 2003; ALVES *et al.*, 2016; WOLMUTH *et al.*, 2019), dado por $\hat{\mathcal{X}} = \text{co} \{A(\alpha)x_{0_1}, \dots, A(\alpha)x_{0_q}\}$, para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2). Portanto, \hat{w} pode ser usado

como uma variável a ser maximizada (minimização de \hat{w}^{-2}) para obter uma estimativa menos conservadora do conjunto de condições iniciais $\check{\mathcal{E}}(P, \delta)$.

Teorema 19. *Considere o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), o sistema linear descrito em (190) com a lei de controle dada em (110) e uma região de operação \mathcal{U} dada em (193) sendo que $\phi \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $N = I_{n_u \times n_u}$, $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que*

$$\check{A}_k X + X \check{A}_k^T - \check{B}_k M - M^T \check{B}_k^T + 2\beta X < 0, \quad (202)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \delta^{-1} & N_{(h)} M \\ M^T N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (203)$$

para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $k \in \mathbb{I}_r$. Então, a lei de controle (110), $u(t) = -L\hat{x}(t)$ (110), com $L = MX^{-1}$, torna a origem do espaço de estado do sistema (190) localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \delta)$ dado em (194) sendo que $P = X^{-1}$. Além disso, $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \delta) \subset \mathcal{U}$.

Demonstração. *A demonstração segue os passos dados em (BOYD et al., 1994) e do Lema 3, com a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, com $0 < P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$. Defina $X = P^{-1}$, $M = LX$ e considere que as LMIs descritas em (202) e (203), para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $k \in \mathbb{I}_r$, são factíveis.*

□

Teorema 20. *Dado um escalar arbitrário $\kappa > 0$, considere o sistema linear descrito em (188) com lei de controle dada em (110) e distúrbio de energia limitada ($\tilde{w}(t)$) e uma região de operação \mathcal{U} dada em (193) sendo que $\phi \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $N = I_{n_u \times n_u}$, $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$ são conhecidos. Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\xi > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:*

$$\min \xi$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \check{A}_k X + X \check{A}_k^T - \check{B}_k M - M^T \check{B}_k^T + 2\beta X & \check{H}_k & X \check{C}_k^T - M^T \check{D}_k^T \\ \check{H}_k^T & -\kappa^{-1} I & \check{G}_k^T \\ \check{C}_k X - \check{C}_k M & \check{G}_k & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0, \quad (204)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi_h^2}{\varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon} & N_{(h)} M \\ M^T N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (205)$$

para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $k \in \mathbb{I}_r$. Então $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ e a lei de controle $u(t) = -L\hat{x}(t)$ (110), sendo que o ganho $L = MX^{-1}$, garante as condições do Problema 1 com uma taxa de decaimento maior ou igual a β para $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon)$ dado em (194).

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, com $0 < P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$. Assuma que $X = P^{-1}$, $M = LX$ e considere que as LMIs descritas em (204) e (205), para todo $k \in \mathbb{I}_r$, são factíveis.

Multiplicando (204) por μ_k , com $\mu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$ para $k \in \mathbb{I}_r$, e somando todos os termos para $k = 1$ até r , com $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{A}_k = \check{A}(\mu)$, $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{B}_k = \check{B}(\mu)$, $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{G}_k = \check{G}(\mu)$, $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{H}_k = \check{H}(\mu)$, $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{C}_k = \check{C}(\mu)$, e pré e pós-multiplicando a LMI (204) por $\text{diag}\{P, I, I\}$ com $P = X^{-1}$, $L = MP$ observe que

$$\begin{bmatrix} \check{A}(\mu)^T P + P \check{A}(\mu) - P \check{B}(\mu) L - L^T \check{B}(\mu)^T P + 2\beta P & P \check{H}(\mu) & \check{C}(\mu)^T - L^T \check{D}(\mu)^T \\ \check{H}(\mu)^T P & -\kappa^{-1} I & \check{G}(\mu)^T \\ \check{C}(\mu) - \check{D}(\mu) L & \check{G}(\mu) & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0. \quad (206)$$

Aplicando o Complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (206) e pré e pós multiplicando por $[\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T]$ e $[\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T]^T$, respectivamente e considerando $\check{C}(\mu) - \check{D}(\mu)L = \bar{C}(\mu)$, obtém-se

$$\begin{aligned} & [\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} \check{A}(\mu)^T P + P \check{A}(\mu) - P \check{B}(\mu) L - L^T \check{B}(\mu)^T P + 2\beta P & P \check{H}(\mu) \\ \check{H}(\mu)^T P & -\kappa^{-1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \\ & + [\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} \bar{C}(\mu)^T \\ \check{G}(\mu)^T \end{bmatrix} \kappa^{-1} \xi^{-1} \begin{bmatrix} \bar{C}(\mu)^T \\ \check{G}(\mu)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (207)$$

De (207), tem-se que

$$\begin{aligned} & \hat{x}(t)^T (\check{A}(\mu)^T P + P \check{A}(\mu) - P \check{B}(\mu) L - L^T \check{B}(\mu)^T P + 2\beta P) \hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T \check{H}(\mu)^T P \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T P \\ & \times \check{H}(\mu) \tilde{w}(t) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \bar{C}(\mu) \hat{x}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \\ & \times \check{G}(\mu) \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \tilde{w}(t)^T \check{G}(\mu)^T \bar{C}(\mu) \hat{x}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \tilde{w}(t)^T \check{G}(\mu)^T \check{G}(\mu) \tilde{w}(t) < 0. \end{aligned} \quad (208)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) &= \hat{x}(t)^T (\check{A}(\mu)^T P + P \check{A}(\mu) - P \check{B}(\mu) L - L^T \check{B}(\mu)^T P) \hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T \check{H}(\mu)^T \\ & \times P \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T P \check{H}(\mu) \tilde{w}(t) + 2\beta \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t), \end{aligned} \quad (209)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}(t)^T \dot{\hat{y}}(t) &= \hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \bar{C}(\mu) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \check{G}(\mu) \tilde{w}(t) + \tilde{w}(t)^T \check{G}(\mu)^T \bar{C}(\mu) \hat{x}(t) \\ & + \tilde{w}(t)^T \check{G}(\mu)^T \check{G}(\mu) \tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (210)$$

Logo, de (208), (209) e (210)

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) < -2\beta V(\hat{x}(t)) \leq 0. \quad (211)$$

Então, agora é possível verificar que a lei de controle satisfaz as condições do Problema 1:

- Primeira condição do Problema 1:

Se $\tilde{w}(t) = 0$, $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon)$ e $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, como $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, do sistema descrito em (190) (ou seja, $\dot{\hat{x}}(t) = [\check{A}(\mu) - \check{B}(\mu)L]\hat{x}(t)$), de (211)

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) < -\kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t). \quad (212)$$

Logo, de (212), obtém-se $\dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) < 0$, desde que $\kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) > 0$, para todo $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon) \setminus 0$. Portanto para $w(t) = 0$, a lei de controle (110) torna a origem do sistema linear incerto (190) um ponto de equilíbrio localmente estável para todo $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon)$.

É importante notar que como $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t)$ e assim da Observação 1, $A(\alpha)$ é uma matriz de posto completo para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2), se $\hat{x}(t) \rightarrow 0$, então $x(t) \rightarrow 0$.

- Segunda condição do Problema 1:

Se $\tilde{w}(t) \in \mathcal{W}$, $\tilde{w}(t) \neq 0$ e $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$, do Lema (3) $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0) \subset \mathcal{U}$, e integrando ambos os lados de (211) de $t = 0$ a $t = t_f$, obtém-se, para $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, e para $\hat{x}(0) = 0$, então $V(\hat{x}(0)) = 0$, $V(\hat{x}(t_f)) \geq 0$ e obtém-se

$$\begin{aligned} -\kappa^{-1} \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt + \kappa^{-1} \xi^{-1} \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt &< - \int_0^{t_f} \dot{V}(\hat{x}(t)) dt \\ &= V(\hat{x}(0)) - V(\hat{x}(t_f)) \leq 0. \end{aligned} \quad (213)$$

De (213), como $\kappa^{-1} > 0$, $\xi^{-1} > 0$, logo $\kappa^{-1} \xi^{-1} \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt \geq 0$ e

$$\begin{aligned} 0 &> V(\hat{x}(t_f)) - V(\hat{x}(0)) - \kappa^{-1} \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt + \kappa^{-1} \xi^{-1} \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt \\ &\geq V(\hat{x}(t_f)) - V(\hat{x}(0)) - \kappa^{-1} \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt. \end{aligned} \quad (214)$$

Dessa forma, como $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$ e de (192), tem-se que $V(\hat{x}(0)) \leq \varepsilon_0$ e $\int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt \leq \varepsilon$, e da equação (214)

$$V(\hat{x}(t_f)) < V(\hat{x}(0)) + \kappa^{-1} \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt \leq \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon. \quad (215)$$

Portanto, $V(\hat{x}(t_f)) < \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon$ para todo $t_f \geq 0$. Do Lema 3, $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0) \subset \mathcal{U}$, a desigualdade (215) assegura que qualquer trajetória com condição inicial $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$ irá permanecer dentro do conjunto $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon) \setminus \partial\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$ para todo $t > 0$, sendo que $\partial\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$ é a fronteira de $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$.

- Terceira condição do Problema 1:

Se $\tilde{w}(t) \in \mathcal{W}$, $\tilde{w}(t) \neq 0$, $\hat{x}(0) = 0$, integrando ambos os lados de (211) de $t = 0$ a $t = t_f$, obtém-se, para $V(\hat{x}(t_f)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, e considere $\hat{x}(0) = 0$, então $V(\hat{x}(0)) = 0$, $V(\hat{x}(t_f)) \geq 0$, logo

$$V(\hat{x}(t_f)) - \kappa^{-1} \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt < -\kappa^{-1} \xi^{-1} \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt. \quad (216)$$

Como $\kappa^{-1} > 0$, $\xi^{-1} > 0$ e $V(\hat{x}(0)) \geq 0$ de (216) obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt &\leq \xi \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt - \kappa \xi V(\hat{x}(t_f)) \\ &\leq \xi \int_0^{t_f} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt, \quad \forall t_f \geq 0. \end{aligned} \quad (217)$$

Assim, o sistema linear incerto (188) com lei de controle dada em (110) possui um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi} > 0$.

Assim as condições propostas no Problema 1 são satisfeitas, e conclui-se a demonstração. \square

Teorema 21. Considere o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), o sistema linear descrito em (191) com lei de controle chaveada dada em (134) e uma região de operação \mathcal{U} dada em (193) sendo que $\phi \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $N = I_{n_u \times n_u}$, $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$ são conhecidos. Suponha a existência de uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $\bar{Q}_k, \bar{R}_k \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que

$$-\check{B}_k M_j - M_j^T \check{B}_k^T - \bar{R}_k - \bar{Q}_j < 0, \quad (218)$$

$$\check{A}_k X + X \check{A}_k^T + \bar{R}_k + \bar{Q}_k + 2\beta X < 0, \quad (219)$$

$$\begin{bmatrix} \phi_h^2 \delta^{-1} & N_{(h)} M_j \\ M_j^T N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (220)$$

para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $j, k \in \mathbb{I}_r$. Então, a lei de controle (134), com $L_j = M_j X^{-1}$, torna a origem do espaço de estado do sistema (191) localmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β para todo $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \delta)$ dado em (194) então $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \delta) \subset \mathcal{U}$. Sendo que $P = X^{-1}$.

Demonstração. A demonstração segue os passos da demonstração do Teorema 15 e do Lema 3, com a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, com $0 < P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$.

Defina $X = P^{-1}$, $M_j = L_j X$ e considere as LMIs descritas em (218), (219) e (220), para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $j, k \in \mathbb{I}_r$, factíveis.

□

Teorema 22. Dado um escalar arbitrário $\kappa > 0$, considere o sistema linear descrito em (189) com lei de controle dada em (134) e distúrbio de energia limitada ($\tilde{w}(t)$) e uma região de operação \mathcal{U} dada em (193) sendo $\phi \in \mathfrak{R}^{n_u}$, $N = I_{n_u \times n_u}$, $\rho \in \mathfrak{R}^{n_u}$ são conhecidos. Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes simétricas $\bar{Q}_k, \bar{R}_k \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, matrizes $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times n_x}$ e um escalar $\xi > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:

$$\begin{aligned} & \min \xi \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} -\check{B}_k M_j - M_j^T \check{B}_k^T - \bar{R}_k - \bar{Q}_j & \check{H}_k & X \check{C}_k^T - M_j^T \check{D}_k^T \\ \check{H}_k^T & -\kappa^{-1} I & \check{G}_k^T \\ \check{C}_k X - \check{C}_k M_j & \check{G}_k & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (221)$$

$$\check{A}_k X + X \check{A}_k^T + \bar{R}_k + \bar{Q}_k + 2\beta X < 0, \quad (222)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\phi_h^2}{\varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon} & N_{(h)} M_j \\ M_j^T N_{(h)}^T & X \end{bmatrix} \geq 0, \quad (223)$$

para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $j, k \in \mathbb{I}_r$. Então $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ e a lei de controle (134), sendo que $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$, $\bar{R}_j = X^{-1} \bar{R}_j X^{-1}$ e $L_j = M_j X^{-1}$, garante as condições do Problema 1 e uma taxa de decaimento maior ou igual a β para $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon)$.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, com $0 < P = P^T \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$. Assuma que $X = P^{-1}$, $M_j = L_j X$ e considere as LMIs descritas em (221), (222) e (223), para todo $h \in \mathbb{I}_{n_u}$ e $j, k \in \mathbb{I}_r$, factíveis.

Pré e pós-multiplicando a LMI (221) por $\text{diag}\{P, I, I\}$ e (222) por P , com $P = X^{-1}$, $\bar{Q}_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$, $\bar{R}_j = X^{-1} \bar{R}_j X^{-1}$, $L_j = M_j P$ observe que

$$P \check{A}_k + \check{A}_k^T P + \bar{R}_k + \bar{Q}_k + 2\beta X < 0, \quad (224)$$

$$\begin{bmatrix} -P \check{B}_k L_j - L_j^T \check{B}_k^T P - \bar{R}_k - \bar{Q}_j & P \check{H}_k & \check{C}_k^T - L_j^T \check{D}_k^T \\ P \check{H}_k^T & -\kappa^{-1} I & \check{G}_k^T \\ \check{C}_k - \check{D}_k L_j & \check{G}_k & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0. \quad (225)$$

Multiplicando (224) e (225) por μ_k , com $\mu_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^r \mu_k = 1$ para $k \in \mathbb{I}_r$, e somando todos os termos para $k = 1$ até r , com $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{A}_k = \check{A}(\mu)$, $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{B}_k = \check{B}(\mu)$, $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{G}_k = \check{G}(\mu)$, $\sum_{k=1}^r \mu_k \check{H}_k =$

$\check{H}(\mu), \sum_{k=1}^r \mu_k \bar{C}_k = \bar{C}(\mu), \sum_{k=1}^r \mu_k \bar{R}_k = \bar{R}(\mu), \sum_{k=1}^r \mu_k \bar{Q}_k = \bar{Q}(\mu), P\bar{R}(\mu)P = R(\mu), P\bar{Q}(\mu)P = Q(\mu)$
e substituindo j por σ ,

$$\check{A}(\mu)^T P + P\check{A}(\mu) + R(\mu) + Q(\mu) + 2\beta P < 0, \quad (226)$$

$$\begin{bmatrix} -P\check{B}(\mu)L_\sigma - L_\sigma^T \check{B}(\mu)^T P - R(\mu) - Q_\sigma & PH(\mu) & C(\mu)^T - L_\sigma^T \check{C}(\mu)^T \\ H(\mu)^T P & -\kappa^{-1}I & G(\mu)^T \\ C(\mu) - \check{C}(\mu)L_\sigma & G(\mu) & -\kappa\xi I \end{bmatrix} < 0. \quad (227)$$

Aplicando o Complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (227) e pré e pós multiplicando por $[\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T]$ e $[\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T]^T$, respectivamente,

$$\begin{aligned} & [\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} -P\hat{B}(\mu)L_\sigma - L_\sigma^T \hat{B}(\mu)^T P - R(\mu) - Q_\sigma & PH(\mu) \\ H(\mu)^T P & -\kappa^{-1}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \\ & + [\hat{x}(t)^T \ \tilde{w}(t)^T] \begin{bmatrix} C(\mu)^T - L_\sigma^T \hat{C}(\mu)^T \\ G(\mu)^T \end{bmatrix} \kappa^{-1}\xi^{-1}I \begin{bmatrix} C(\mu)^T - L_\sigma^T \hat{C}(\mu)^T \\ G(\mu)^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} < 0. \end{aligned} \quad (228)$$

De (228) obtém-se

$$\begin{aligned} & -\hat{x}(t)^T (P\hat{B}(\mu)L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}(\mu)^T P)\hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T (R(\mu) + Q_\sigma)\hat{x}(t) + \tilde{w}(t)^T H(\mu)^T P\hat{x}(t) \\ & + \hat{x}(t)^T PH(\mu)\tilde{w}(t) - \kappa^{-1}\tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \bar{C}(\mu)\hat{x}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \\ & \times G(\mu)\tilde{w}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\tilde{w}(t)^T G(\mu)^T \bar{C}(\mu)\hat{x}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\tilde{w}(t)^T G(\mu)^T G(\mu)\tilde{w}(t) < 0. \end{aligned} \quad (229)$$

Pré e pós-multiplicando (226) por $\hat{x}(t)^T = 0$ e $\hat{x}(t)$, respectivamente

$$\hat{x}(t)^T (\check{A}(\mu)^T P + P\check{A}(\mu))\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (R(\mu) + Q(\mu) + 2\beta P)\hat{x}(t) < 0. \quad (230)$$

De (229) e (230), considere $\check{C}(\mu) - \check{D}(\mu)L_\sigma = \bar{C}(\mu)$ e note que de (134),

$$\hat{x}(t)^T Q_\sigma \hat{x}(t) = \min_{j \in \mathbb{I}_r} \left\{ \hat{x}(t)^T Q_j \hat{x}(t) \right\} \leq \hat{x}(t)^T \sum_{j=1}^r \mu_j Q_j \hat{x}(t), \quad (231)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} 0 & > \hat{x}(t)^T (\check{A}(\mu)^T P + P\check{A}(\mu) + 2\beta P)\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (R(\mu) + Q(\mu))\hat{x}(t) \\ & \geq \hat{x}(t)^T (\check{A}(\mu)^T P + P\check{A}(\mu) + 2\beta P)\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T (R(\mu) + Q_\sigma)\hat{x}(t) \\ & > \hat{x}(t)^T (\check{A}(\mu)^T P + P\check{A}(\mu) + 2\beta P)\hat{x}(t) - \hat{x}(t)^T (P\hat{B}(\mu)L_\sigma + L_\sigma^T \hat{B}(\mu)^T P)\hat{x}(t) \\ & \quad + \tilde{w}(t)^T H(\mu)^T P\hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T PH(\mu)\tilde{w}(t) - \kappa^{-1}\tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1}\xi^{-1}\hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \bar{C}(\mu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \hat{x}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T G(\mu) \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \tilde{w}(t)^T G(\mu)^T \bar{C}(\mu) \hat{x}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \tilde{w}(t)^T \\ & \times G(\mu)^T G(\mu) \tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (232)$$

Observe que, considerando $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$ tem-se $\dot{V}(\hat{x}(t)) = \dot{\hat{x}}(t)^T P \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T P \dot{\hat{x}}(t)$.

Assim, de (136), segue que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) &= \hat{x}(t)^T (\check{A}(\mu)^T P + P \check{A}(\mu) - P \check{B}(\mu) L_\sigma - L_\sigma^T \check{B}(\mu)^T P) \hat{x}(t) \\ &+ \tilde{w}(t)^T H(\mu)^T P \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T P H(\mu) \tilde{w}(t) + 2\beta \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t), \end{aligned} \quad (233)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{y}}(t)^T \dot{\hat{y}}(t) &= \hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T \bar{C}(\mu) \hat{x}(t) + \hat{x}(t)^T \bar{C}(\mu)^T G(\mu) \tilde{w}(t) + \tilde{w}(t)^T G(\mu)^T \bar{C}(\mu) \hat{x}(t) \\ &+ \tilde{w}(t)^T G(\mu)^T G(\mu) \tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (234)$$

Logo, de (232), (233) e (234)

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) - \kappa^{-1} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) + \kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{\hat{y}}(t)^T \dot{\hat{y}}(t) < -2\beta V(\hat{x}(t)) \leq 0. \quad (235)$$

Então, é possível verificar que a lei de controle satisfaz as condições do Problema 1:

- Primeira condição do Problema 1:

Se $\tilde{w}(t) = 0$, $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon)$ e $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, como $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon) \subset \mathcal{U}$, do sistema descrito em (190) (ou seja, $\dot{\hat{x}}(t) = [\check{A}(\mu) - \check{B}(\mu) L_\sigma] \hat{x}(t)$), de (235)

$$\dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) < -\kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{\hat{y}}(t)^T \dot{\hat{y}}(t). \quad (236)$$

Logo, $\dot{V}(\hat{x}(t)) + 2\beta V(\hat{x}(t)) < 0$, desde que $\kappa^{-1} \xi^{-1} \dot{\hat{y}}(t)^T \dot{\hat{y}}(t) > 0$, para todo $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon) \setminus \{0\}$. Portanto para $w(t) = 0$, a lei de controle (134) torna a origem do sistema linear incerto (189) um ponto de equilíbrio localmente estável para todo $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1} \varepsilon)$.

É importante notar que como $\hat{x}(t) = A(\alpha)x(t)$ e assim da Observação 1, $A(\alpha)$ é uma matriz de posto completo para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2), se $\hat{x}(t) \rightarrow 0$, então $x(t) \rightarrow 0$.

As condições 2 e 3 do Problema 1 são análogas a demonstrada no Teorema 20.

Assim as condições propostas no Problema 1 são satisfeitas, e conclui-se a demonstração. \square

Teorema 23. Se as condições dadas no Teorema 19 com lei de controle (110) são factíveis, então as condições dadas no Teorema 21 com a lei de controle chaveada (134) também são factíveis.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}^T P \hat{x}(t)$, $P = P^T > 0$. Considere $X = P^{-1}$, $M_j = L_j X$ e considere que as LMIs descritas em (202), para todo $k \in \mathbb{I}_r$, são factíveis. Da demonstração apresentada no Teorema 17 garante-se que (218) e (219) são factíveis.

Da factibilidade de (203) temos que tomando $L_j = L$ para todo $j \in \mathbb{I}_r$ implica na factibilidade de (220). □

Teorema 24. Se as condições dadas no Teorema 20 com lei de controle (110) são factíveis, então as condições dadas no Teorema 22 com a lei de controle chaveada (134) também são factíveis.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}^T P \hat{x}(t)$, $P = P^T > 0$. Considere $X = P^{-1}$, $M_j = L_j X$ e considere as LMIs descritas em (204), para todo $k \in \mathbb{I}_r$, são factíveis. Da demonstração apresentada no Teorema 18 garante-se que (221) e (222) são factíveis.

Da factibilidade de (205) temos que tomando $L_j = L$ para todo $j \in \mathbb{I}_r$ implica na factibilidade de (223). □

3.6 EXEMPLOS

Nesta seção, exemplos de simulação são fornecidos para ilustrar a eficácia das abordagens.

3.6.1 Exemplo 3

Considere o sistema linear incerto (136) com vértices politópicos:

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \begin{bmatrix} \check{a} & -100 \\ 10 & \check{b} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad H(\alpha) = \begin{bmatrix} \check{c} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C(\alpha) = \begin{bmatrix} \check{a} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ G(\alpha) &= \begin{bmatrix} \check{b} \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{237}$$

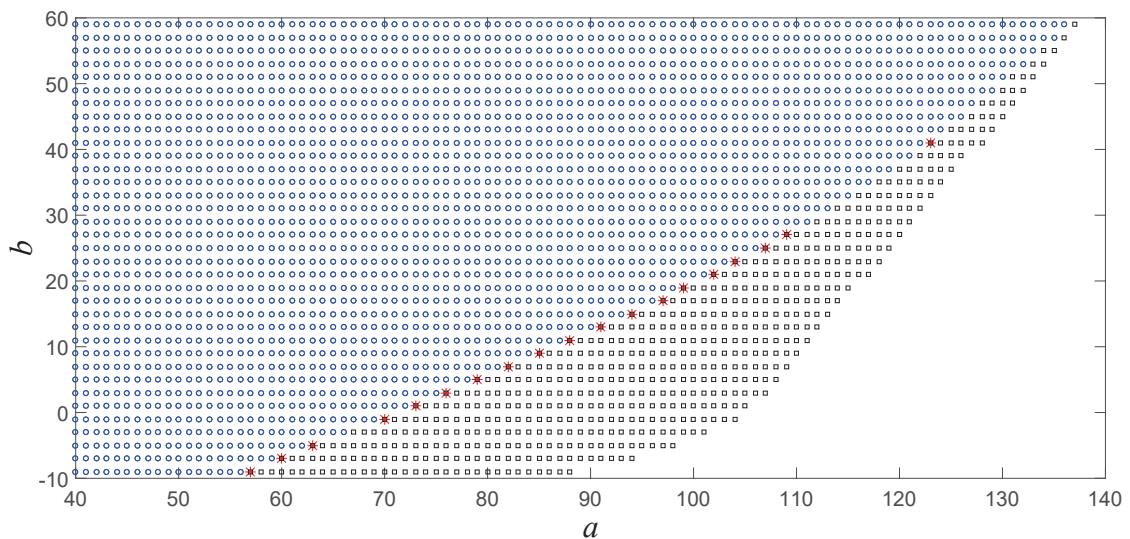
com $-1 \leq \check{a} \leq a$, $b \leq \check{b} \leq 110$ e $c \leq \check{c} \leq 10$.

Para os casos sem distúrbio, ou seja, para $w(t) = 0$, os vértices do politopo são dados por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & 110 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} a & -100 \\ 10 & b \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} a & -100 \\ 10 & 110 \end{bmatrix}. \tag{238}$$

Para os Teoremas 13, 15, e Teorema 3.2 dado em Silva *et al.* (2012) (com $\mu = 1 \times 10^{-5}$ que é encontrado através de um procedimento de busca). Obtém-se a região factível dada na Figura 18, com a e b variando no intervalo $40 \leq a \leq 180$ e $-9 \leq b \leq 60$ com espaçamento uniforme 1 para a e 2 para b , e uma taxa de decaimento $\beta = 2,4$.

Figura 18 - Região de factibilidade: com Teorema 15 ($\circ, *, \square$), Teorema 13, (\circ) e Teorema 3.2 dado em Silva *et al.* (2012) ($\circ, *$) com $\mu = 1 \times 10^{-5}$.



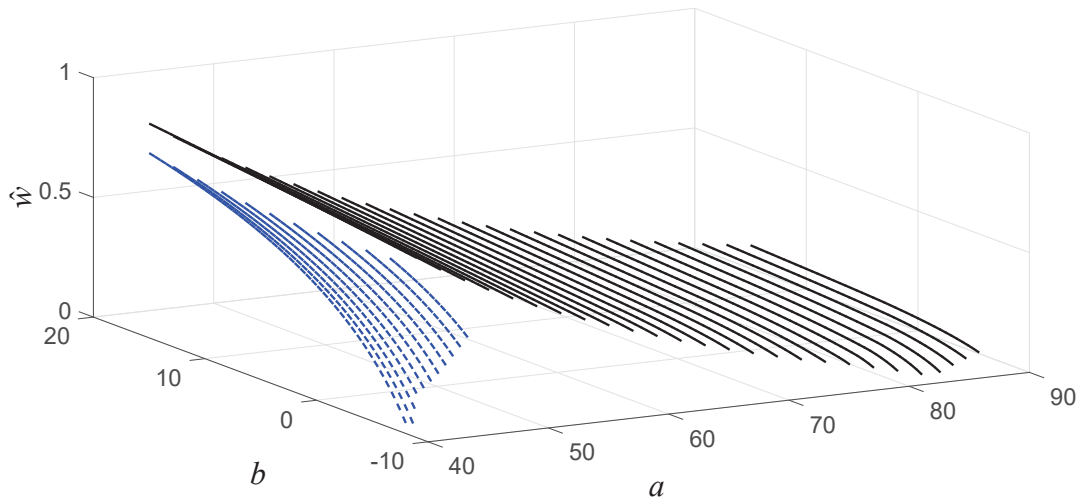
Fonte: Elaboração da própria autora.

Para os Teoremas 19 e 21 e Lema 4, obtém-se a Figura 19, com a e b variando nos intervalos $40 \leq a \leq 90$ e $-9 \leq b \leq 15$ com espaçamento uniforme de 2 para a e 0,5 para b , com taxa de decaimento $\beta = 2,4$, $\delta = 1$, $x_{01} = [0,1 \ 0,01]$, $x_{02} = -x_{01}$, $x_{03} = [-0,1 \ 0,01]$ e $x_{04} = -x_{03}$ e minimizando \bar{w} com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$.

Note que a região obtida na Figura 18 para o Teorema 15 ($\circ, *, \square$), é maior do que a encontrada pelo Teorema 13 (\circ) e o Teorema 3.2 dado em Silva *et al.* (2012) ($\circ, *$), mas a nossa abordagem não utiliza integrador na planta, no entanto, em Silva *et al.* (2012) é necessário fazer uma busca unidimensional para encontrar o $\mu = 1 \times 10^{-5}$ que representa a maior região factível. Na Figura 19, o Teorema 21 apresenta uma região factível maior que a obtida pelo Teorema 19. Observe que na região em que ambos os Teoremas 19 e 21 são factíveis, tem-se \hat{w} sempre maior para o Teorema 21, o que nos garante um elipsoide maior como mostra a Figura 20.

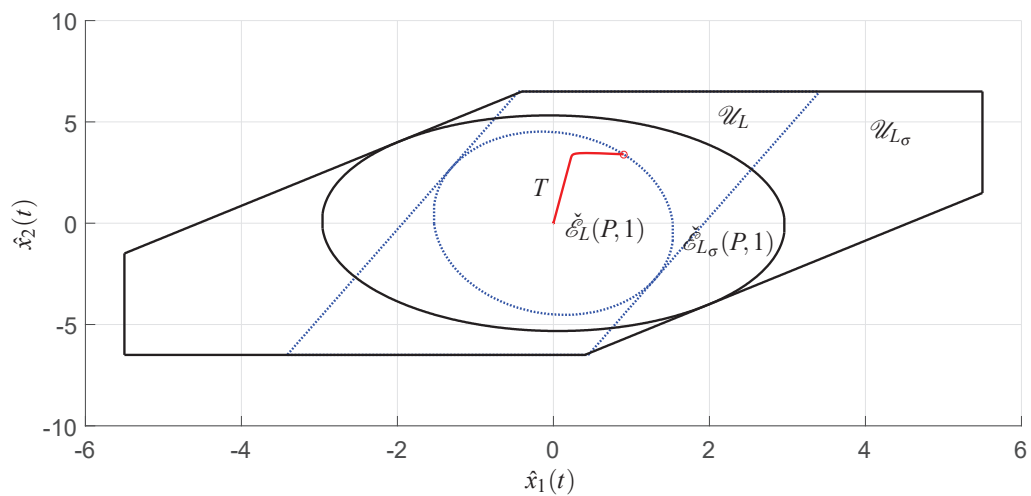
Na Figura 20, são apresentadas as regiões $\check{\mathcal{E}}_L(P, 1)$ e \mathcal{U}_L para o Teorema 19. $\check{\mathcal{E}}_{L\sigma}(P, 1)$, $\mathcal{U}_{L\sigma}$ para o Teorema 21 e a curva T correspondente à trajetória para a condição inicial $x(0) = A_1^{-1}[0,9 \ 3,4]^T$.

Figura 19 - Região factível utilizando o Lema 4: com Teorema 19, representado por (- -) e Teorema 21 representado por (-).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 20 - Regiões elipsoidais, regiões de operação e trajetória T para a condição inicial $x(0) = A_1^{-1}[0,9 \ 3,4]^T$: com $\check{\mathcal{E}}_{L_\sigma}(P,1)$, região de operação \mathcal{U}_{L_σ} para o Teorema 21 com Lema 2; com $\check{\mathcal{E}}_L(P,1)$, região de operação \mathcal{U}_L para o Teorema 19 com Lema 2.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Considere um ponto da Figura 19 no qual somente o Teorema 21 com o Lema 2 é factível, $(a, b, c) = (60, 15, 6)$, com taxa de decaimento $\beta = 2,4$, $\delta = 1$, $x_{01} = [0,1 \ 0,01]$, $x_{02} = -x_{01}$, $x_{03} = [-0,1 \ 0,01]$ e $x_{04} = -x_{03}$ e minimizando \bar{w} com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$, o que resulta na maximização de \hat{w} . Foi obtido nesse processo, $\hat{w} = 0,4223$,

$$\begin{aligned}
L_1 &= L_2 = \begin{bmatrix} -0,0642 & 0,1228 \end{bmatrix}, & \|L_1\| &= \|L_2\| = 0,1385, \\
L_3 &= L_4 = \begin{bmatrix} -0,1847 & 0,524 \end{bmatrix}, & \|L_3\| &= \|L_4\| = 0,2395, \\
L_5 &= L_6 = \begin{bmatrix} -0,2621 & 0,1647 \end{bmatrix}, & \|L_5\| &= \|L_6\| = 0,3096, \\
L_7 &= L_8 = \begin{bmatrix} -0,2375 & 0,1646 \end{bmatrix}, & \|L_7\| &= \|L_8\| = 0,2890, \\
Q_1 &= Q_2 = \begin{bmatrix} 7,2434 & 8,9109 \\ 8,9109 & -1,9035 \end{bmatrix}, & \|Q_1\| &= \|Q_2\| = 12,6860, \\
Q_3 &= Q_4 = \begin{bmatrix} 5,2368 & 8,0343 \\ 8,0343 & -1,0469 \end{bmatrix}, & \|Q_3\| &= \|Q_4\| = 10,7218, \\
Q_5 &= Q_6 = \begin{bmatrix} -18,4490 & 16,9128 \\ 16,9128 & -2,5083 \end{bmatrix}, & \|Q_5\| &= \|Q_6\| = 29,1754, \\
Q_7 &= Q_8 = \begin{bmatrix} -17,9395 & 13,6068 \\ 13,6068 & -1,0309 \end{bmatrix}, & \|Q_7\| &= \|Q_8\| = 25,5046, \\
P &= \begin{bmatrix} 0,1136 & 0,0012 \\ 0,0012 & 0,0353 \end{bmatrix}, & \|P\| &= 0,1136.
\end{aligned} \tag{239}$$

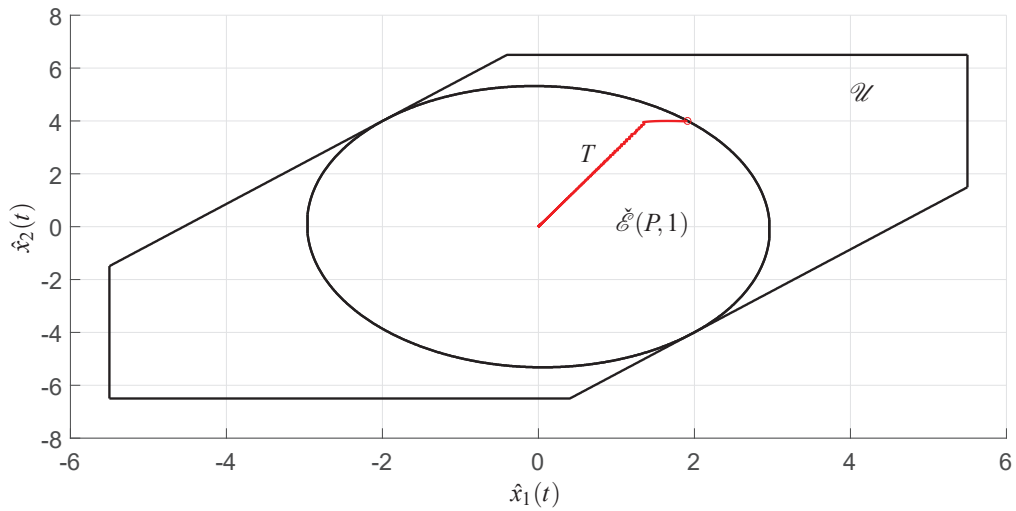
Para as simulações apresentadas nas Figuras 21-23, considere (239) e a condição inicial $x(0) = A_1^{-1} \begin{bmatrix} 1,91 & 4 \end{bmatrix}^T$.

Na Figura 23, para o sistema (191), com (239) para o Teorema 21 com o Lema 2, considerando a condição inicial $x(0) = A_1^{-1} [1,91 \ 4]^T$, ou seja, $\hat{x}(0) = [1,91 \ 4]^T$, a função de Lyapunov $V(\hat{x}(0)) = \hat{x}(0)^T P \hat{x}(0) = 0,9971$ com matrix P dada em (239).

Para os casos com distúrbio, ou seja, para $w(t) \neq 0$, os vértices do polítopo são dados por:

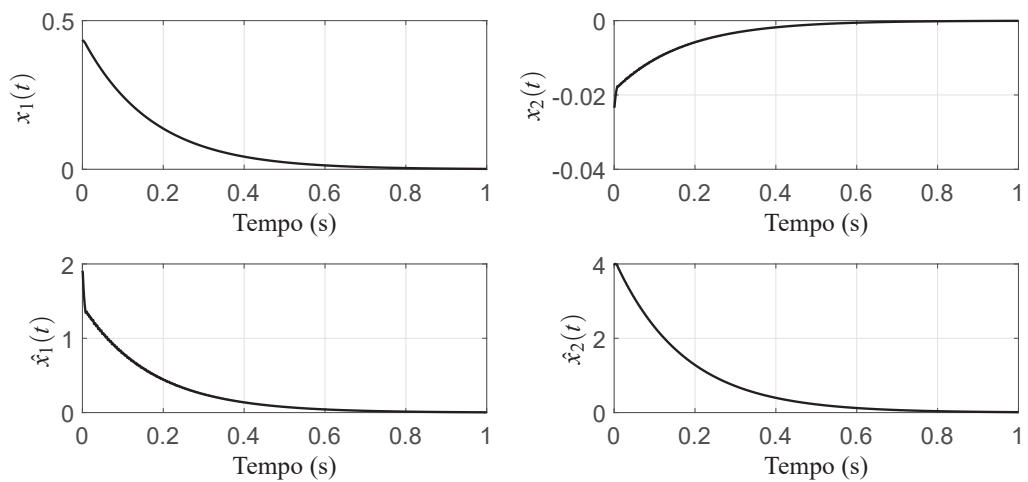
$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & b \end{bmatrix}, & A_3 &= \begin{bmatrix} -1 & -100 \\ 10 & 110 \end{bmatrix}, & A_5 &= \begin{bmatrix} a & -100 \\ 10 & b \end{bmatrix}, & A_7 &= \begin{bmatrix} a & -100 \\ 10 & 110 \end{bmatrix}, \\
A_2 &= A_1, & A_4 &= A_3, & A_6 &= A_5, & A_8 &= A_7, \\
H_1 &= \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, & H_2 &= \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, & H_3 &= H_5 = H_7 = H_1, & H_4 &= H_6 = H_8 = H_2, \\
C_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, & C_5 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, & C_2 &= C_3 = C_4 = C_1, & C_6 &= C_7 = C_8 = C_2, \\
G_1 &= \begin{bmatrix} b \\ 1 \end{bmatrix}, & G_3 &= \begin{bmatrix} 110 \\ 1 \end{bmatrix}, & G_2 &= G_5 = G_6 = G_1, & G_4 &= G_7 = G_8 = G_3
\end{aligned} \tag{240}$$

Figura 21 - Região elipsoidal $\check{\mathcal{E}}(P, 1)$; região de operação \mathcal{U} ; trajetória T para a condição inicial $x(0) = A_1^{-1}[1, 91 \ 4]^T$ para o Teorema 21 com o Lema 2.



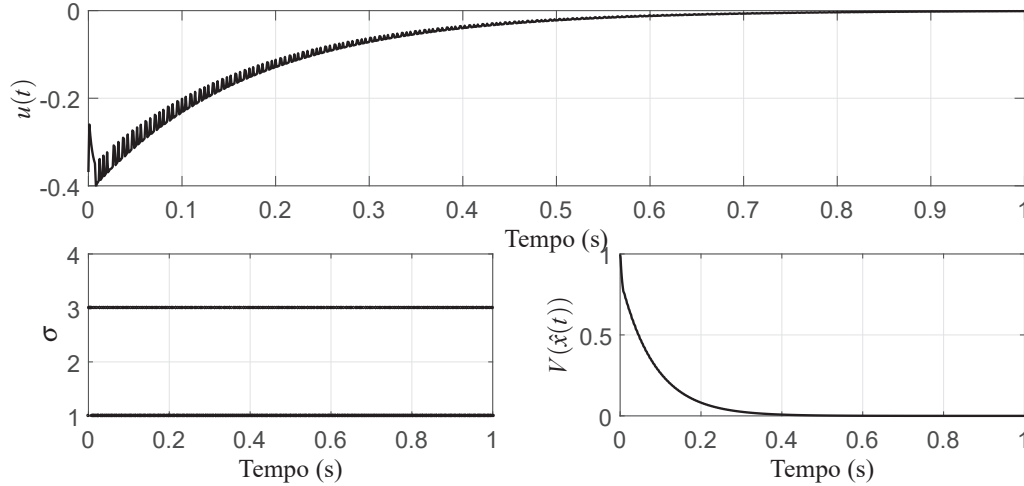
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 22 - Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($\hat{x}(t)$) da simulação do sistema (191), com (239) para o Teorema 21 com o Lema 2.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 23 - Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{I}_r$, função de Lyapunov $V(\hat{x}(t)) = \hat{x}(t)^T P \hat{x}(t)$, entrada de controle $u(t)$, para o sistema sistema (191), com (239) para o Teorema 21 com o Lema 2.



Fonte: Elaboração da própria autora.

e o distúrbio de energia limitada, $w(t), \dot{w}(t) \in W^{1,2}$, (o espaço de Sobolev $W^{1,2}[0, \infty)$ que consiste em funções $w(t) \in L^2[0, \infty)$ tais que a derivada fraca $\dot{w}(t) \in L^2[0, \infty)$ com norma $\|w(t)\|_{W^{1,2}} = (\|w(t)\|_2 + \|\dot{w}(t)\|_2)^{1/2}$ para toda $w(t) \in W^{1,2}[0, \infty)$) é dado por

$$w(t) = \begin{cases} \mathcal{A} \sin(\omega t), & \text{se } t \in [0, t_f) \\ 0, & \text{se } t \in [t_f, \infty) \end{cases}, \quad (241)$$

a derivada fraca de $w(t)$ é dada por

$$\dot{w}(t) = \begin{cases} \omega \mathcal{A} \cos(\omega t), & \text{se } t \in [0, t_f) \\ 0, & \text{se } t \in [t_f, \infty) \end{cases}, \quad (242)$$

com os parâmetros \mathcal{A} , ω e t_f escolhidos de forma adequada para satisfazer as seguintes condições:

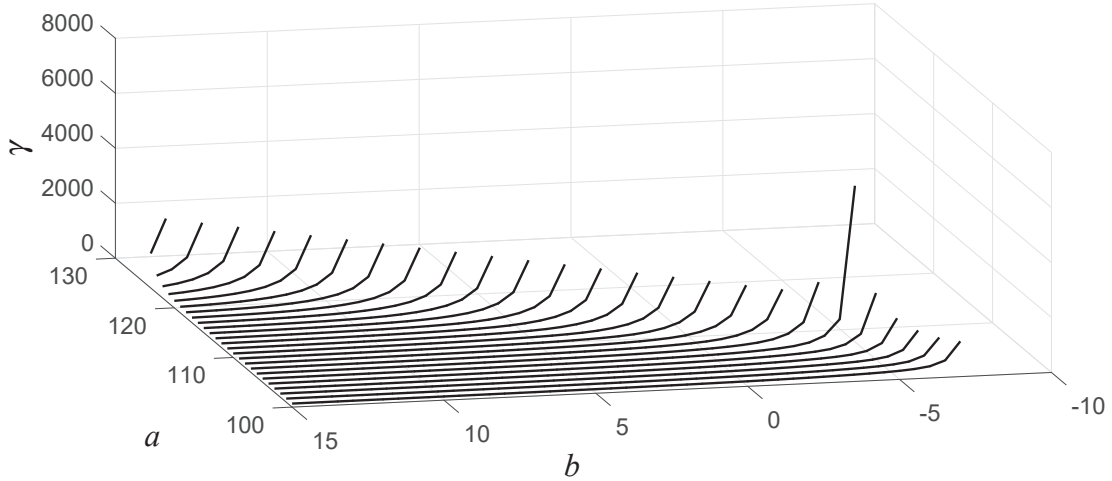
$$\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt < \infty \text{ e } \int_0^\infty \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt < \infty. \quad (243)$$

Considere $I = [0, \infty)$ e $w(t)$ dada em (241) e observe que para $t = t_f$ não existe a derivada no sentido clássico.

De fato, $w(t) \in L^1_{loc}(I)$, ou seja, $w(t)$ pertence ao espaço das funções localmente integráveis em I . Seja $h \in C_0^\infty(I)$ (o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em I) e observe que da Definição 2,

$$\int_I w \dot{h} dt = \int_0^{t_f} \mathcal{A} \sin(\omega t) \dot{h} dt + \int_{t_f}^\infty 0 \dot{h} dt \quad (244)$$

Figura 24 - Região factível: com Teorema 16, representado por (-) e para o Teorema 14 não foram obtidos pontos factíveis.



Fonte: Elaboração da própria autora.

$$= \mathcal{A} \sin(\omega t) h(t) \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} h(t) \omega \mathcal{A} \cos(\omega t) dt \quad (245)$$

$$= 0 - \int_0^{t_f} h(t) \omega \mathcal{A} \cos(\omega t) dt \quad (246)$$

$$= - \int_0^{\infty} h(t) \dot{w}(t) dt, \quad (247)$$

de modo que $\dot{w}(t)$ é a derivada no sentido fraco de $w(t)$.

Para os Teoremas 14 e 16, a Figura 24 é obtida considerando , $c = 6$, a e b variando nos intervalos $100 \leq a \leq 130$ e $-9 \leq b \leq 15$ com espaçamento uniforme de 1 para a e 0,5 para b , $\kappa = 1,5$, com taxa de decaimento $\beta = 2,4$ e minimizando $\xi > 0$.

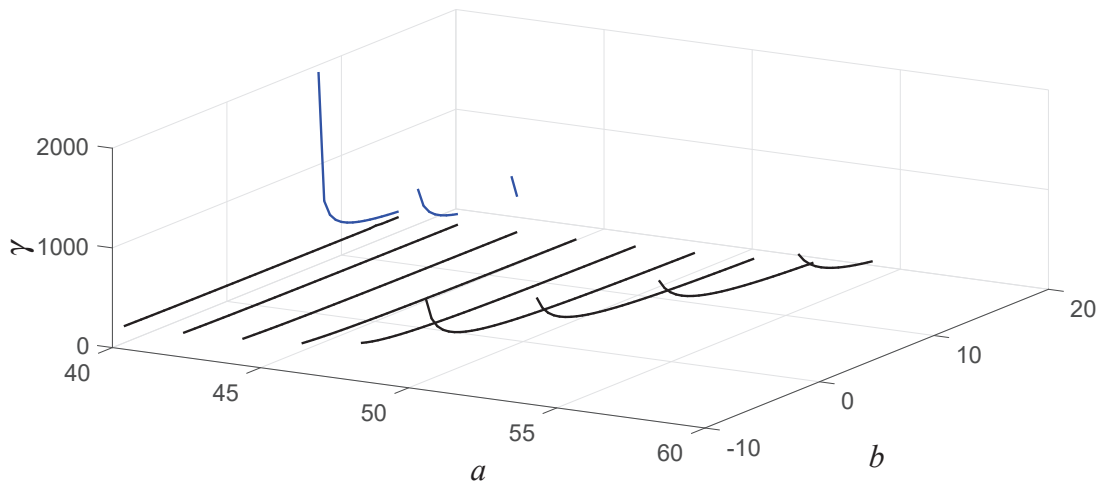
Para o problema com saturação do atuador, temos que $w(t)$ (241) e $\dot{w}(t)$ (242) de modo que os parâmetros \mathcal{A} , ω e T escolhidos de forma adequada para satisfazer as seguintes condições:

$$\int_0^{\infty} w(t)^T w(t) dt \leq \varepsilon \text{ e } \int_0^{\infty} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt \leq \varepsilon. \quad (248)$$

Para os Teoremas 20 e 22 e Lema 4, a Figura 25, com $c = 6$, a e b variando nos intervalos $40 \leq a \leq 60$ e $-9 \leq b \leq 15$ com espaçamento uniforme de 2 para a e 0,5 para b . $\phi = 1,2$, $\rho = 1$, $\kappa = 1,5$, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon = 0,1$, $Z_1 = 1$, $Z_2 = \frac{\rho}{\phi}$, com taxa de decaimento $\beta = 2,4$ para as LMIs (201) presentes na Lema 4, com $q = 4$, $x_{01} = [0,1 \quad 0,01]^T$, $x_{02} = -x_{01}$, $x_{03} = [-0,1 \quad 0,01]^T$, $x_{04} = -x_{03}$ e minimizando $\bar{w} + \xi$ com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$.

Nas Figuras 24 e 25 as regiões obtidas pelos Teoremas 16, 22 representados por (-) são maiores do que a obtida nos Teoremas 14 e 20, respectivamente. Observe que em ambos os

Figura 25 - Região factível utilizando o Lema 4: com Teorema 20 (-) e Teorema 22 (-).



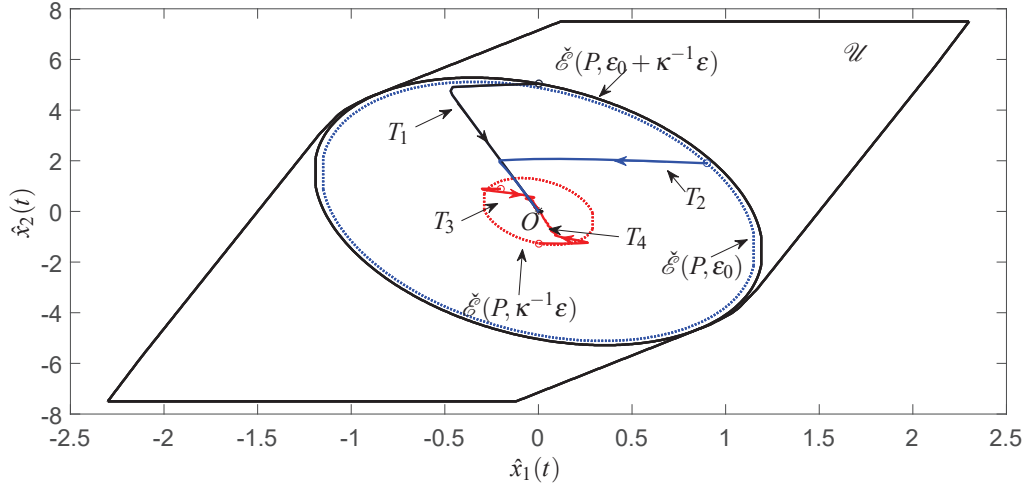
Fonte: Elaboração da própria autora.

casos, obtemos um custo garantido \mathcal{H}_∞ sempre menor para o controlador chaveado.

Considere um ponto da Figura 25 somente o Teorema 22 Lema 2 é factível, $(a, b, c) = (50, 10, 6)$, com $\kappa = 1,5$, $\beta = 2,4$, $\varepsilon = 0,1$, $\varepsilon_0 = 1$, minimiza-se $\bar{w} + \xi$ com $\bar{w} = \hat{w}^{-2}$, o que resulta na maximização de \hat{w} e obtém-se $\hat{w} = 0,1811$ e $\gamma = 204,4321$.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \begin{bmatrix} -0,6904 & 0,0880 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} -0,2911 & 0,0997 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} -0,7832 & 0,0803 \end{bmatrix}, \\
 L_4 &= \begin{bmatrix} -0,7798 & 0,0814 \end{bmatrix}, L_5 = \begin{bmatrix} -0,6845 & 0,1220 \end{bmatrix}, L_6 = \begin{bmatrix} -0,6892 & 0,1212 \end{bmatrix}, \\
 L_7 &= \begin{bmatrix} -0,7888 & 0,0893 \end{bmatrix}, L_8 = \begin{bmatrix} -0,7999 & 0,0865 \end{bmatrix}, L_9 = \begin{bmatrix} -0,7725 & 0,0882 \end{bmatrix}, \\
 L_{10} &= \begin{bmatrix} -0,7762 & 0,0873 \end{bmatrix}, L_{11} = \begin{bmatrix} -0,7322 & 0,0867 \end{bmatrix}, L_{12} = \begin{bmatrix} -0,2879 & 0,0997 \end{bmatrix}, \\
 L_{13} &= \begin{bmatrix} -0,5778 & 0,1497 \end{bmatrix}, L_{14} = \begin{bmatrix} -0,4906 & 0,1677 \end{bmatrix}, L_{15} = \begin{bmatrix} -0,7548 & 0,1021 \end{bmatrix}, \\
 L_{16} &= \begin{bmatrix} -0,7641 & 0,1001 \end{bmatrix}, Q_1 = \begin{bmatrix} 206502,9296 & 8804,5396 \\ * & 597,5777 \end{bmatrix}, \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} 206589,8701 & 8804,9605 \\ * & 597,4649 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 206488,2701 & 8794,7882 \\ * & 597,444 \end{bmatrix}, \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} 206455,1919 & 8793,2777 \\ * & 597,3106 \end{bmatrix}, Q_5 = \begin{bmatrix} 206247,0714 & 8828,0821 \\ * & 601,3823 \end{bmatrix}, \\
 Q_6 &= \begin{bmatrix} 206213,3614 & 8825,7241 \\ * & 601,2198 \end{bmatrix}, Q_7 = \begin{bmatrix} 206146,1399 & 8803,6584 \\ * & 600,1062 \end{bmatrix}, \\
 Q_8 &= \begin{bmatrix} 206094,7521 & 8800,2990 \\ * & 599,9101 \end{bmatrix}, Q_9 = \begin{bmatrix} 206419,2996 & 8810,7698 \\ * & 598,4949 \end{bmatrix}, \\
 Q_{10} &= \begin{bmatrix} 206386,47386 & 8808,3949 \\ * & 598,3298 \end{bmatrix}, Q_{11} = \begin{bmatrix} 206472,4635 & 8802,9367 \\ * & 597,5507 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

Figura 26 - Regiões elipsoidais $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$, $\check{\mathcal{E}}(P, \kappa^{-1}\varepsilon)$ e $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$; região de operação \mathcal{U} ; trajetórias T_1 e T_2 para $w(t) = 0$ e trajetórias T_3 e T_4 para $w(t) \neq 0$ e Teorema 22 com Lema 2.



Fonte: Elaboração da própria autora.

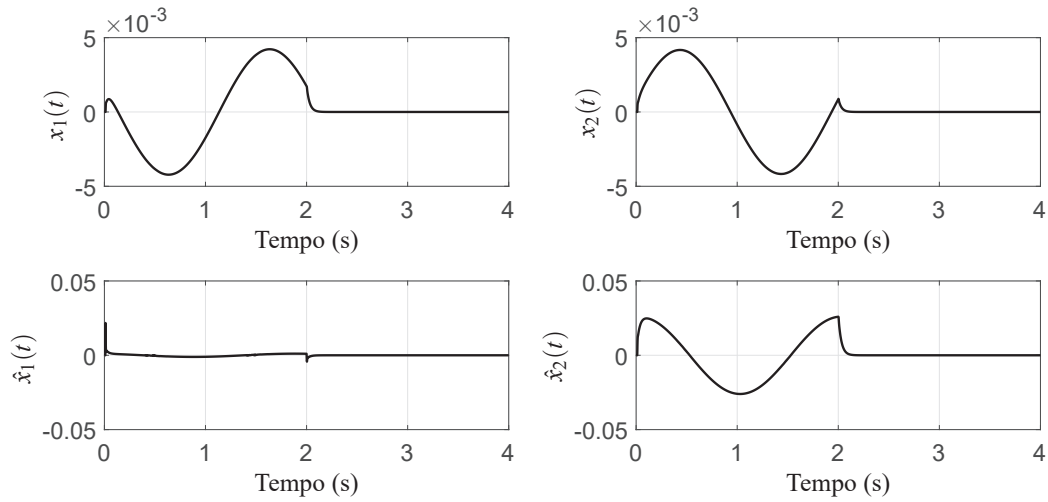
$$\begin{aligned}
 Q_{12} &= \begin{bmatrix} 206645,4619 & 8805,8697 \\ * & 597,4797 \end{bmatrix}, & Q_{13} &= \begin{bmatrix} 206264,5770 & 8840,3517 \\ * & 602,7959 \end{bmatrix}, \\
 Q_{14} &= \begin{bmatrix} 206285,8282 & 8846,2692 \\ * & 603,736 \end{bmatrix}, & Q_{15} &= \begin{bmatrix} 206120,7308 & 8809,9452 \\ * & 599,9525 \end{bmatrix}, \\
 Q_{16} &= \begin{bmatrix} 206069,5756 & 8806,6528 \\ * & 599,7477 \end{bmatrix}, & P &= \begin{bmatrix} 0,8146 & 0,0546 \\ 0,0546 & 0,0418 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{249}$$

Na Figura 26 utiliza-se as funções $w(t)$ (241) e $\dot{w}(t)$ (242) com $\mathcal{A} = 1$ e $\omega = \pi$. Para $w(t) = 0$ as trajetórias T_1 com $\hat{x}(0) = [0,0 \ 5,04]^T \in \partial\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$ e T_2 com $\hat{x}(0) = [0,9 \ 1,9]^T \in \partial\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$. Para $w(t) \neq 0$, a trajetória T_3 com $\hat{x}(0) = [-0,2 \ -0,89]^T \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$ e para a trajetória T_4 tem-se $\hat{x}(0) = [0 \ -1,26]^T \in \partial\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0)$.

Observe que na Figura 26, para $w(t) = 0$ as trajetórias T_1 e T_2 exemplificam que a origem é um ponto de equilíbrio localmente assintoticamente estável do sistema linear incerto (189) com lei de controle (134), e o conjunto elipsoidal $\check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$ é um conjunto positivamente invariante do domínio de atração, ou seja, se $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$, então para $t_f \geq 0$, $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$. As trajetórias T_3 e T_4 mostram que para $w(t) \neq 0$ e $\hat{x}(0) \in \check{\mathcal{E}}(P, \kappa^{-1}\varepsilon)$ temos $\hat{x}(t) \in \check{\mathcal{E}}(P, \varepsilon_0 + \kappa^{-1}\varepsilon)$ para todo $t_f \geq 0$.

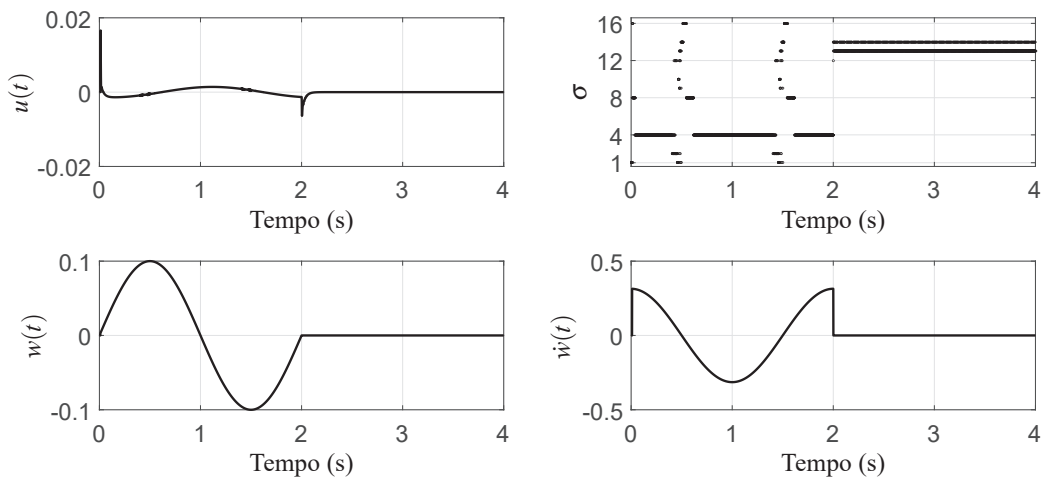
Para as simulações apresentadas nas Figuras 27-30, considere as funções $w(t)$ (241) e $\dot{w}(t)$ (242) com $\mathcal{A} = 1$, $\omega = \pi$, as matrizes em (249), $t_f = 2s$ e a condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$.

Figura 27 - Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($\hat{x}(t)$) da simulação do sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com o Lema 2.



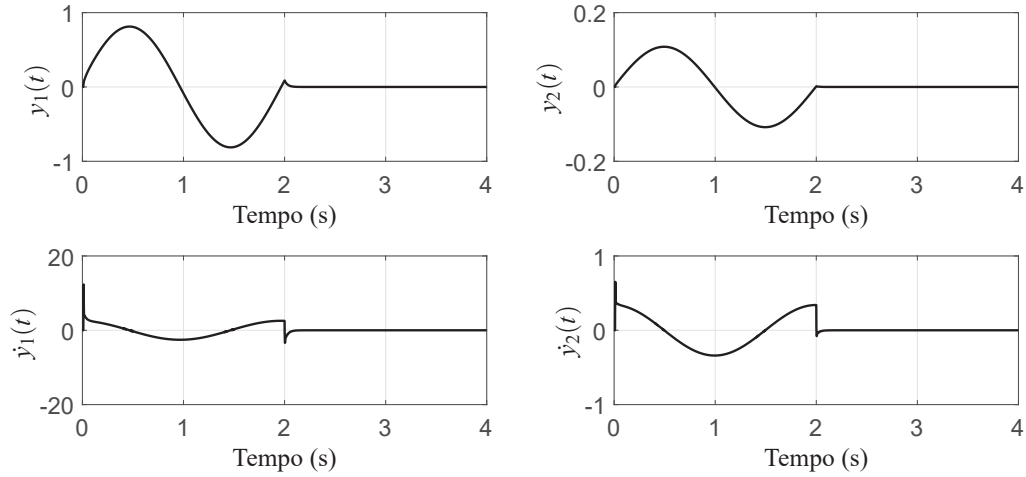
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 28 - Índice de chaveamento $\sigma \in \mathbb{I}_r$, entrada de controle $u(t)$, distúrbio externo $w(t)$, derivada do distúrbio $\dot{w}(t)$, para o sistema sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com Lema 2.



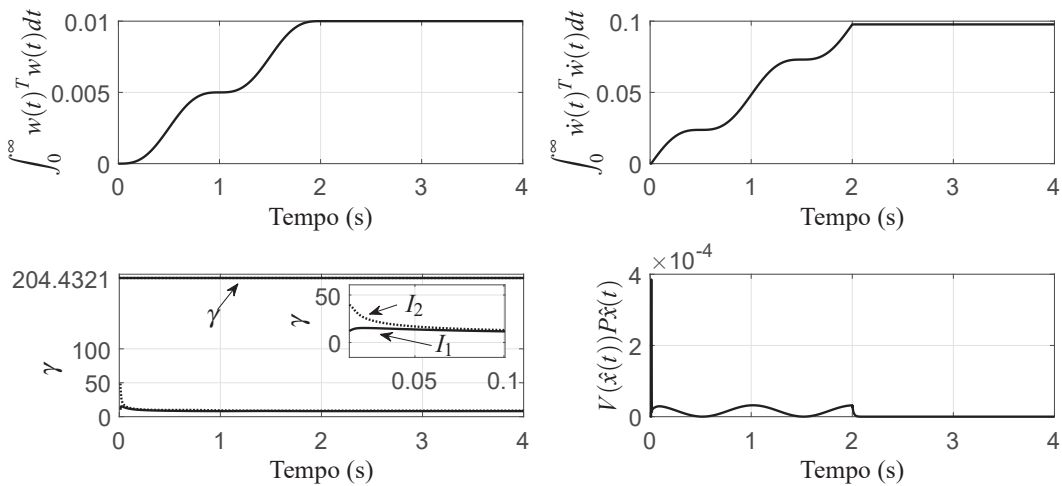
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 29 - Saída $y(t)$, derivada da saída $\dot{y}(t)$, para o sistema sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com o Lema 2.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 30 - Para $w(t) \neq 0$, γ para $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$, $I_1 = \frac{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt}$, $I_2 = \frac{\int_0^\infty \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt}{\int_0^\infty \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt}$ para o sistema (189), com (249) para o Teorema 22 com o Lema 2.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Na Figura 30, para o sistema (189), com as matrizes em (249) para o Teorema 22 com o Lema 2, considerando as condições iniciais $\hat{x}(0_1) = [0 \ 5,04]^T$, $\hat{x}(0_2) = [0,9 \ 1,9]^T$ e $\hat{x}(0_3) =$

$[-0,5 \ -0,546]^T$, obtém-se a função de Lyapunov $V(\hat{x}(0_1)) = \hat{x}(0_1)^T P \hat{x}(0_1) = 1,0625$, $V(\hat{x}(0_2)) = \hat{x}(0_2)^T P \hat{x}(0_2) = 0,9977$ e $V(\hat{x}(0_3)) = \hat{x}(0_3)^T P \hat{x}(0_3) = 0,2460$ com a matriz P dada em (249). Note que $\frac{\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt}{\int_0^\infty y(t)^T y(t) dt} \leq 15,27 \leq 204,4321$ e $\frac{\int_0^\infty \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt}{\int_0^\infty \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt} \leq 48,8 \leq 204,4321$. Note que a desigualdade de Wirtinger é satisfeita, ou seja, $\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^\infty \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt$.

3.7 CONCLUSÕES PARCIAIS

Projetos de controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas lineares incertos, nos quais somente a derivada do vetor de estado está disponível para a realimentação foram propostos neste capítulo. Na abordagem sem saturação e sem distúrbio ($w(t) = 0$), no Exemplo 3, na Figura 18, mostra-se que o Teorema 15 apresenta uma região factível melhor do que a obtida pelo Teorema 13 e Teorema 3.2 dado em Silva *et al.* (2012) (com $\mu = 1 \times 10^{-5}$ que é encontrado através de um procedimento de busca). Considerando o distúrbio ($w(t) = 0$) observa-se que para o Teorema 16 obtém-se uma região factível em casos nos quais o Teorema 14 não obteve nenhum ponto factível, (como mostra a Figura 24). Considerando a saturação do atuador, nota-se que as abordagens com controlador chaveado e controlador \mathcal{H}_∞ chaveado, apresentaram melhores resultados do que os casos dos projetos com controladores com ganho constante.

4 CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO DE SISTEMAS LINEARES COM REALIMENTAÇÃO DERIVATIVA PARA UMA DINÂMICA AUXILIAR COM INTEGRADOR

Neste capítulo considera-se que a matriz de entrada B é incerta. Apresenta-se um procedimento sem as especificações da região de operação e da saturação. Através de LMIs, garante-se que a origem seja um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, e assegura-se ao sistema realimentado uma taxa de decaimento maior ou igual a β . Para o projeto de controle \mathcal{H}_∞ , garante-se ao sistema realimentado um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ .

4.1 SISTEMAS LINEARES INCERTOS SUJEITO A UM DISTÚRPIO EXTERNO

Considere o sistema linear com incertezas invariantes no tempo sujeito a um distúrbio externo, dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D(\alpha)u(t) + G(\alpha)w(t),\end{aligned}\tag{250}$$

sendo, $A(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i A_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_x}$, $B(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_u}$, $C(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i C_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_x}$, $D(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i D_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_u}$, $H(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i H_i \in \mathfrak{R}^{n_x \times n_w}$, $G(\alpha) = \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i G_i \in \mathfrak{R}^{n_y \times n_w}$ são representados pela combinação convexa de matrizes conhecidas descritas por (BOYD *et al.*, 1994), com $\alpha \in \mathcal{P}$ definido em (2), $w(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é a entrada exógena, sendo que $w(t) \in W^{1,2}[0, \infty)$, $\dot{w}(t) \in \mathfrak{R}^{n_w}$ é a derivada fraca da entrada exógena tal que $w(t), \dot{w}(t) \in L^2[0, \infty)$, $y(t) \in \mathfrak{R}^{n_y}$ é o vetor de saída, $x(t) \in \mathfrak{R}^{n_x}$ é o vetor de estado e $u(t) \in \mathfrak{R}^{n_u}$ o vetor de entrada. Considere $B(\alpha) = B_m + \Delta B(\alpha)$, $D(\alpha) = D_m + \Delta D(\alpha)$ com B_m e D_m matrizes conhecidas.

Dado o sistema linear incerto (250), para todo $\alpha \in \mathcal{P}$, então,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_m u(t) + \Delta B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + D_m u(t) + \Delta D(\alpha)u(t) + G(\alpha)w(t),\end{aligned}\tag{251}$$

com, $A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t) = \dot{x}(t) - B_m u(t) = \check{x}(t)$ e $C(\alpha)x(t) + \Delta D(\alpha)u(t) + G(\alpha)w(t) = y(t) - D_m u(t) = \check{y}(t)$.

Observe que, como a derivada do vetor de estado e o vetor de controle estão disponíveis, temos que $\dot{x}(t) - B_m u(t) = A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t)$ também está disponível para a realimentação (WOLMUTH *et al.*, 2019).

Logo, de (251) é possível definir um novo vetor de estado do sistema (250):

$$\begin{aligned}\check{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t), \\ \check{y}(t) &= C(\alpha)x(t) + \Delta D(\alpha)u(t) + G(\alpha)w(t).\end{aligned}\quad (252)$$

Note que, (251) e (252), $\check{x}(t)$ está disponível para a realimentação. Além disso, derivando (252), segue que

$$\begin{aligned}\dot{\check{x}}(t) &= A(\alpha)\dot{x}(t) + \Delta B(\alpha)\dot{u}(t) + H(\alpha)\dot{w}(t), \\ \dot{\check{y}}(t) &= C(\alpha)\dot{x}(t) + \Delta D(\alpha)\dot{u}(t) + G(\alpha)\dot{w}(t).\end{aligned}\quad (253)$$

Considerando (250), (252) e (253), então,

$$\begin{aligned}\dot{\check{x}}(t) &= A(\alpha)\check{x}(t) + A(\alpha)B_mu(t) + \Delta B(\alpha)\dot{u}(t) + H(\alpha)\dot{w}(t), \\ \dot{\check{y}}(t) &= C(\alpha)\check{x}(t) + C(\alpha)B_mu(t) + \Delta D(\alpha)\dot{u}(t) + G(\alpha)\dot{w}(t),\end{aligned}\quad (254)$$

para todo $\alpha \in \mathcal{P}$ dado em (2).

Defina $\tilde{u}(t) = \dot{u}(t) \in \mathfrak{X}^{n_u}$, $\tilde{w}(t) = \dot{w}(t) \in \mathfrak{X}^{n_w}$, $\tilde{x}(t) = [\check{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$, $\check{x}(t) = A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t) = \dot{x}(t) - B_mu(t)$ e $\check{y}(t) = C(\alpha)x(t) + \Delta D(\alpha)u(t) + G(\alpha)w(t) = y(t) - D_mu(t)$. Logo, de (254), tem-se que

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\check{x}}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & A(\alpha)B_m \\ 0_{n_u \times n_x} & 0_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B(\alpha) \\ I_{n_u \times n_u} \end{bmatrix} \tilde{u}(t) + \begin{bmatrix} H(\alpha) \\ 0_{n_u \times n_w} \end{bmatrix} \tilde{w}(t), \\ \dot{\check{y}}(t) &= \begin{bmatrix} C(\alpha) & C(\alpha)B_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \check{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \Delta D(\alpha)\tilde{u}(t) + G(\alpha)\tilde{w}(t),\end{aligned}\quad (255)$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\alpha)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(\alpha)\tilde{u}(t) + \tilde{H}(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}(\alpha)\tilde{x}(t) + \tilde{D}(\alpha)\tilde{u}(t) + \tilde{G}(\alpha)\tilde{w}(t),\end{aligned}\quad (256)$$

para $\tilde{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & A(\alpha)B_m \\ 0_{n_u \times n_x} & 0_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}$, $\tilde{B}(\alpha) = \begin{bmatrix} \Delta B(\alpha) \\ I_{n_u \times n_u} \end{bmatrix}$, $\tilde{H}(\alpha) = \begin{bmatrix} H(\alpha) \\ 0_{n_u \times n_w} \end{bmatrix}$, $\tilde{D}(\alpha) = \Delta D(\alpha)$, $\tilde{C}(\alpha) = \begin{bmatrix} C(\alpha) & C(\alpha)B_m \end{bmatrix}$, $\tilde{G}(\alpha) = G(\alpha)$, $\tilde{y}(t) = \dot{\check{y}}(t)$ e $\tilde{x}(t) = [\check{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$.

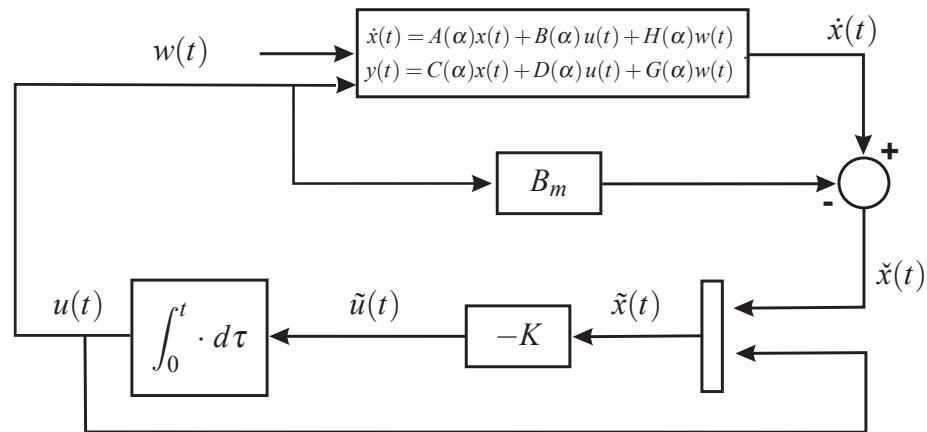
4.2 CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ - MATRIZ DE ENTRADA INCERTA

Considere o sistema linear incerto (250) e o esquema de controle proposto na Figura 31. Utilizando a dinâmica auxiliar (256), propõe-se a lei de controle, onde

$$\tilde{u}(t) = \dot{u}(t) = -K\tilde{x}(t), \quad (257)$$

$$\text{com } \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t) + H(\alpha)w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) - B_m u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

Figura 31 - Esquema da lei de controle proposta (257) para o sistema linear incerto (250).



Fonte: Elaboração da própria autora.

De (256) e (257) tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}(\alpha)\tilde{x}(t) - \tilde{B}(\alpha)K\tilde{x}(t) + \tilde{H}(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \tilde{y}(t) &= \tilde{C}(\alpha)\tilde{x}(t) - \tilde{D}(\alpha)K\tilde{x}(t) + \tilde{G}(\alpha)\tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (258)$$

Então de (258)

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= [\tilde{A}(\alpha) - \tilde{B}(\alpha)K]\tilde{x}(t) + \tilde{H}(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \tilde{y}(t) &= [\tilde{C}(\alpha) - \tilde{D}(\alpha)K]\tilde{x}(t) + \tilde{G}(\alpha)\tilde{w}(t). \end{aligned} \quad (259)$$

Para o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), de (259), obtém-se

$$\dot{\tilde{x}}(t) = [\tilde{A}(\alpha) - \tilde{B}(\alpha)K]\tilde{x}(t), \quad (260)$$

$$\text{com } \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) - B_m u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}.$$

Teorema 25. *Considere o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), o sistema linear descrito por (260) e a lei de controle dada por (257). Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que*

$$X\tilde{A}_i^T + \tilde{A}_iX - \tilde{B}_iM - M^T\tilde{B}_i^T + 2\beta X < 0, \quad (261)$$

para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$. Então, a lei de controle (257), $\tilde{u}(t) = -K\tilde{x}(t)$, com $K = MX^{-1}$, torna o sistema (260) assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual a β , com $X = P^{-1}$.

Demonstração. *A demonstração segue os passos descritos em (BOYD et al., 1994), com a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P\tilde{x}(t)$, sendo que $P = P^T > 0$. Para $X = P^{-1}$, $M = KX$, suponha as LMIs descritas em (261), para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$, factíveis.*

□

Para $w(t), \tilde{w}(t) \in L_2[0, \infty)$ e $\tilde{x}(0) = 0$, considere que o sistema em malha fechada (259) tem um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma > 0$, se a seguinte inequação for satisfeita:

$$\|\tilde{y}(t)\|^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|^2, \quad \forall \alpha \in \mathcal{P}. \quad (262)$$

Como $\check{y}(t) = y(t) - D_mu(t)$, tem-se que $\tilde{y}(t) = \dot{\check{y}}(t) = \dot{y}(t) - D_m\dot{u}(t)$. Observe que para o caso em que a matriz $D(\alpha) = 0$, obtém-se $\tilde{y}(t) = \dot{y}(t)$ e escreve-se

$$\int_0^\infty w(t)^T w(t) dt = \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt + \int_{t_f}^\infty w(t)^T w(t) dt = \int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt. \quad (263)$$

Se $w(t) \in C^1[0, t_f]$, utilizando a desigualdade clássica de Wirtinger (94) (SARIKAYA, 2019), note que

$$\int_0^{t_f} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^{t_f} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt. \quad (264)$$

Assim, para $\gamma > 0$, de (263) e (264) com $\tilde{w}(t) = \dot{w}(t)$ tem-se que para $D(\alpha) = 0$ em (254) que

$$\|w(t)\|_2^2 \leq \|\tilde{w}(t)\|_2^2 \implies \gamma^2 \|w(t)\|_2^2 \leq \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2, \quad (265)$$

$$\|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2. \quad (266)$$

Tomando (266), e para $y(0) = y(\infty) = 0$, da desigualdade clássica de Wirtinger (94) tem-se que $\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2$, obtém-se

$$\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|\tilde{w}(t)\|_2^2. \quad (267)$$

Logo de (267) e das equações (114)-(122) apresentadas na Seção 3.3 do Capítulo 3, existe

$\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $\|y(t)\|_2^2 \leq \|\dot{y}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \tilde{\varepsilon} \|w(t)\|_2^2$, assim, garante-se um custo garantido \mathcal{H}_∞ para o sistema (250) com lei de controle (257).

Teorema 26. *Dado um escalar arbitrário $\kappa > 0$, considere o sistema linear descrito em (259) com lei de controle dada em (257) e distúrbio de energia limitada ($\tilde{w}(t)$). Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, uma matriz $M \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$, um escalar $\xi > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:*

$$\begin{aligned} & \min \xi \\ & \text{sujeito a} \\ & \begin{bmatrix} X\tilde{A}_i^T + \tilde{A}_iX - \tilde{B}_iM - M^T\tilde{B}_i^T + 2\beta X & \tilde{H}_i & X\tilde{C}_i^T - M^T\tilde{D}_i^T \\ & \tilde{H}_i^T & -\kappa^{-1}I \\ & \tilde{C}_iX - \tilde{D}_iM & \tilde{G}_i & -\kappa\xi I \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (268)$$

para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$. Então, a lei de controle (257), $\tilde{u}(t) = -K\tilde{x}(t)$, com $K = MX^{-1}$, torna o sistema (259) assintoticamente estável, com taxa de decaimento maior ou igual a β , e custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi}$ dado em (114).

Demonstração. *A demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 14, com candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P\tilde{x}(t)$, com $P = P^T > 0$. Considere que $X = P^{-1}$, $M = KX$, considere que as LMIs descritas em (268), para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$, são factíveis.*

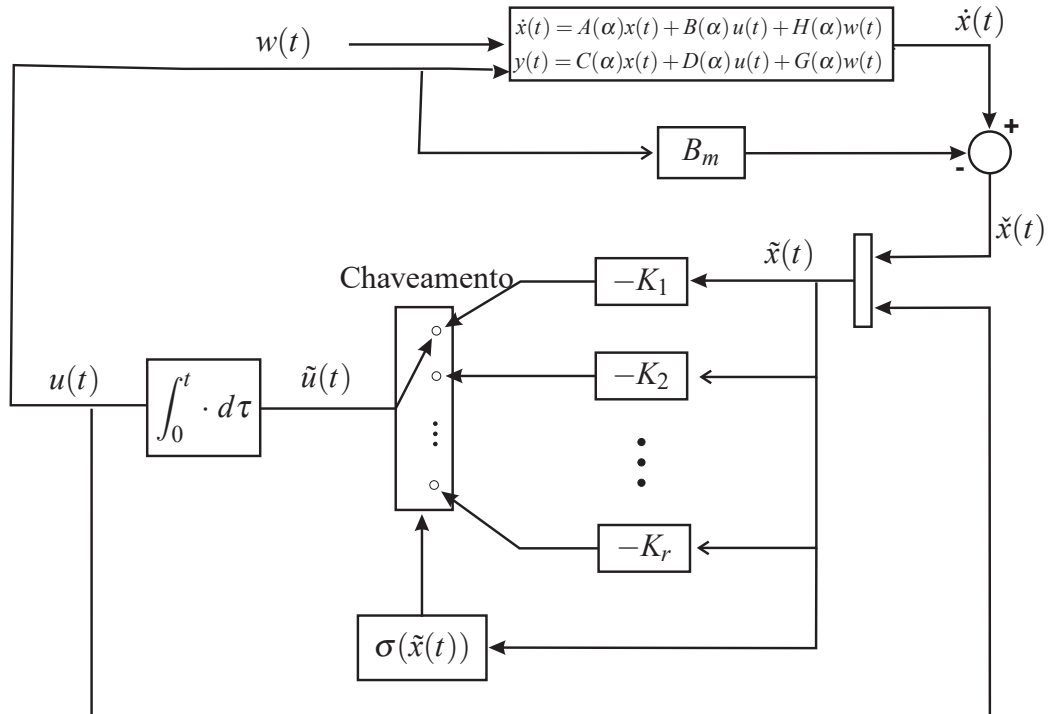
□

4.3 CONTROLE \mathcal{H}_∞ CHAVEADO - MATRIZ DE ENTRADA INCERTA

Considere o sistema linear incerto (250) e o esquema de controle proposto na Figura 32. Da dinâmica auxiliar (256), propõe-se a utilização da lei de controle chaveada, dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \tilde{u}_\sigma(t) = -K_\sigma\tilde{x}(t), \quad \sigma = \arg \min_{i \in \mathbb{I}_{r_1}}^* \left\{ \tilde{x}(t)^T Q_i \tilde{x}(t) \right\}, \text{ sendo que } \sigma \in \mathbb{I}_{r_1}, \\ K_\sigma &\in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}, \quad Q_i = Q_i^T \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)} \quad \text{e} \quad \tilde{x}(t) \in \mathfrak{R}^{n_x+n_u}. \end{aligned} \quad (269)$$

Figura 32 - Esquema da lei de controle proposta (44) para o sistema linear incerto sujeito à saturação do atuador (1).



Fonte: Elaboração da própria autora.

De (254) e (269)

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= [\tilde{A}(\alpha) - \tilde{B}(\alpha)K_{\sigma}]\tilde{x}(t) + \tilde{H}(\alpha)\tilde{w}(t), \\ \hat{y}(t) &= [\tilde{C}(\alpha) - \tilde{D}(\alpha)K_{\sigma}]\tilde{x}(t) + \tilde{G}(\alpha)\tilde{w}(t).\end{aligned}\quad (270)$$

Para o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), obtém-se, de (270),

$$\dot{\hat{x}}(t) = [\tilde{A}(\alpha) - \tilde{B}(\alpha)K_{\sigma}]\tilde{x}(t), \text{ com } \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (271)$$

Teorema 27. *Considere o caso particular em que a perturbação externa é nula ($w(t) = 0$), com o sistema linear incerto (271) e a lei de controle dada em (269). Suponha que exista uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, matrizes simétricas $\bar{R}_i, \bar{Q}_j \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, matrizes $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$ e um escalar $\beta > 0$, tais que*

$$-\tilde{B}_i M_j - M_j^T \tilde{B}_i^T - \bar{R}_i - \bar{Q}_j < 0, \quad (272)$$

$$X \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X + \bar{R}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (273)$$

para todo $i, j \in \mathbb{I}_r$. Então, a lei de controle (269), $\tilde{u}(t) = -K_\sigma \tilde{x}(t)$, com $K_j = M_j X^{-1}$, torna a origem do sistema (271) assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β , sendo que $X = P^{-1}$, $Q_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$ e $R_i = X^{-1} \bar{R}_i X^{-1}$ para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$.

Demonstração. A demonstração segue os passos descritos em Alves et al. (2016), com a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, sendo que $P = P^T > 0$, $X = P^{-1}$, $M_j = K_j X$ e supondo que as LMIs (272) e (273), para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$, factíveis. \square

Teorema 28. Dado um escalar arbitrário $\kappa > 0$, considere o sistema linear descrito em (270) com lei de controle dada em (269) e distúrbio de energia limitada ($\tilde{w}(t)$). Suponha que existam uma matriz simétrica definida positiva $X \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, matrizes simétricas $\bar{R}_i, \bar{Q}_j \in \mathfrak{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$, matrizes $M_j \in \mathfrak{R}^{n_u \times (n_x+n_u)}$, um escalar $\xi > 0$, tais que o seguinte problema de otimização seja factível:

$$\min \xi$$

sujeito a

$$X \tilde{A}_i^T + \tilde{A}_i X + \bar{R}_i + \bar{Q}_i + 2\beta X < 0, \quad (274)$$

$$\begin{bmatrix} -\tilde{B}_i M_j - M_j^T \tilde{B}_i^T - \bar{R}_i - \bar{Q}_j & \tilde{H}_i & X \tilde{C}_i^T - M_j^T \tilde{D}_i^T \\ \tilde{H}_i^T & -\kappa^{-1} I & \tilde{G}_i^T \\ \tilde{C}_i X - \tilde{D}_i M_j & \tilde{G}_i & -\kappa \xi I \end{bmatrix} < 0, \quad (275)$$

para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$. Então, a lei de controle (269), $\tilde{u}(t) = -K_\sigma \tilde{x}(t)$, com $K_j = M_j X^{-1}$, sendo que $X = P^{-1}$, $Q_j = X^{-1} \bar{Q}_j X^{-1}$, $R_i = X^{-1} \bar{R}_i X^{-1}$ para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$, torna a origem do sistema linear (259) assintoticamente estável com taxa de decaimento maior ou igual a β , e com um custo garantido \mathcal{H}_∞ igual a $\gamma = \sqrt{\xi}$ dado em (114).

Demonstração. A demonstração segue os passos da demonstração apresentada no Teorema 16, com a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, $P = P^T > 0$, $X = P^{-1}$, $M_j = K_j X$ e considerando que as LMIs descritas em (274) e (275), para todo $i, j \in \mathbb{I}_{r_1}$, são factíveis. \square

Teorema 29. Se as condições dadas no Teorema 25 com lei de controle (257) são factíveis, então as condições dadas no Teorema 27 com a lei de controle chaveada (269) também são factíveis.

Demonstração. A demonstração segue os passos apresentados no Teorema 17, com a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, $P = P^T > 0$, sendo que $X = P^{-1}$, $M_j = K_j X$ e considerando que as LMIs descritas em (268), para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$, são factíveis. \square

Teorema 30. *Se as condições dadas no Teorema 26 com lei de controle (257) são factíveis, então as condições dadas no Teorema 28 com a lei de controle chaveada (269) também são factíveis.*

Demonstração. *A demonstração segue os passos dados no Teorema 18, com a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$, sendo que $P = P^T > 0$, $X = P^{-1}$, $M_j = K_j X$ e considerando que as LMIs descritas em (268), para todo $i \in \mathbb{I}_{r_1}$, são factíveis.*

□

Observação 4. *Para o caso particular em que o distúrbio externo é nulo ($w(t) = 0$) existe uma relação entre a dinâmica auxiliar e a dinâmica da planta, semelhante a apresentada no Capítulo 1, na Subseção 2.2.1 (WOLMUTH et al., 2019). Considere o sistema (271), com Teoremas 25 e 27 e leis de controle dadas em (257) e (269), respectivamente, com a candidata a função de Lyapunov $V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T P \tilde{x}(t)$ para $\tilde{x}(t) = [\check{x}(t)^T \ u(t)^T]^T$ com $\check{x}(t) = A(\alpha)x(t) + \Delta B(\alpha)u(t)$. Seguindo os mesmos passos em Wolmuth et al. (2019) que foi apresentado na Subseção 2.2.1, pode-se provar que se existe uma taxa de decaimento β para a dinâmica auxiliar, então a planta original tem a taxa de decaimento β para todo $x(t)$ e $x(0)$.*

4.4 EXEMPLOS NÚMERICOS E IMPLEMENTAÇÃO

Nesta seção, exemplos de simulação e uma implementação são fornecidos para ilustrar a eficácia das abordagens.

4.4.1 Exemplo 4

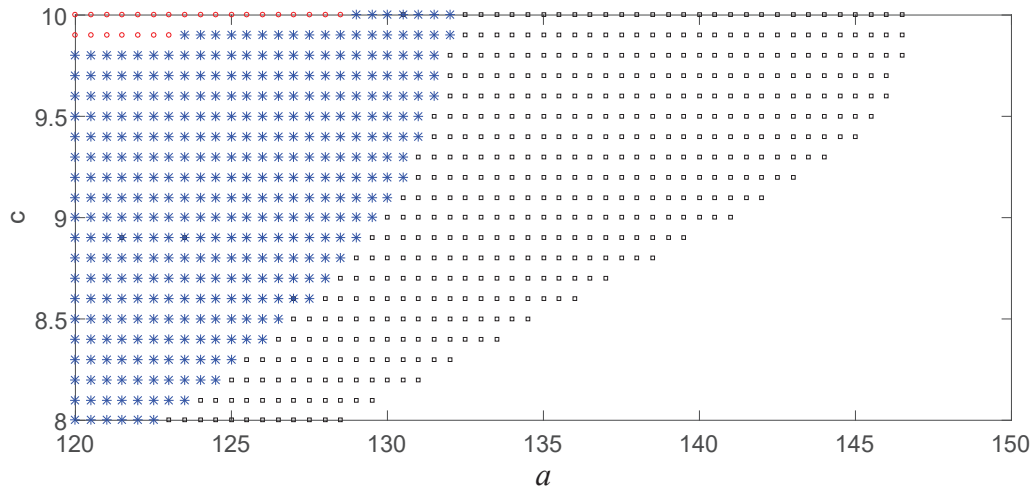
Considere o Exemplo 3 dado na Subseção 3.6.1 do Capítulo 3. Considere os vértices do polítopo dados pelas matrizes apresentadas em (240) e

$$\begin{aligned} \Delta B_1 &= \Delta D_1 = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_3 = \Delta B_5 = \Delta B_7 = \Delta D_3 = \Delta D_5 = \Delta D_7 = \Delta B_1, \\ \Delta B_2 &= \Delta D_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta B_4 = \Delta B_6 = \Delta B_8 = \Delta D_4 = \Delta D_6 = \Delta D_8 = \Delta B_2, \\ B_m &= \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad D_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{276}$$

Primeiramente exemplifica-se o caso sem distúrbio para comparar a região factível com o trabalho de Silva et al. (2012). Utilize as LMIs presentes no Teorema 3 (ASSUNÇÃO et al., 2007) com $\mu_0 = 0,1$ e $\eta = 6 \times 10^8$, para restringir a norma do controlado. Para o Teorema 3.2

dados em Silva *et al.* (2012) (com $\mu = 0,01$ que é obtido através de um procedimento de busca), e Teoremas 25 e 27, com $b = 60$, a e c variando nos intervalos $120 \leq a \leq 150$, $8 \leq c \leq 10$, com espaçamento uniforme 0,5 para a e 0,1 para c .

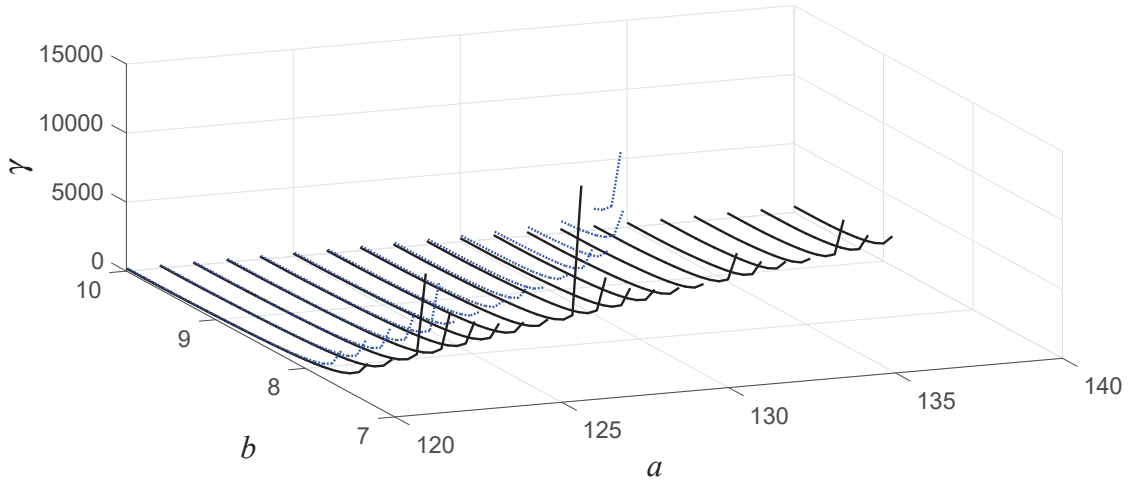
Figura 33 - Região factível: com Teorema 3.2 em Silva *et al.* (2012), representado por (○), Teorema 25, representado por (○,*), e Teorema 27, representado por (○,*,□).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Agora compara-se a região factível para os casos com $w(t) = 0$. Para os Teoremas 26 e 28, com a, b e c variando nos intervalos $120 \leq a \leq 140$, $4 \leq c \leq 10$ e $b = 60$, espaçamento uniforme 1 para a e 0,1 para c e a matriz $D(\alpha) = 0$, $\kappa = 1,5$, taxa de decaimento $\beta = 2,4$ e para as LMIs presentes no Teorema 3 (ASSUNÇÃO *et al.*, 2007), $\mu_0 = 0,1$ e $\eta = 10 \times 10^8$, que são inseridas para restringir a norma do controlador.

Figura 34 - Custo garantido: Teorema 26 representado por (- -) e Teorema 28, representado por (-).



Fonte: Elaboração da própria autora.

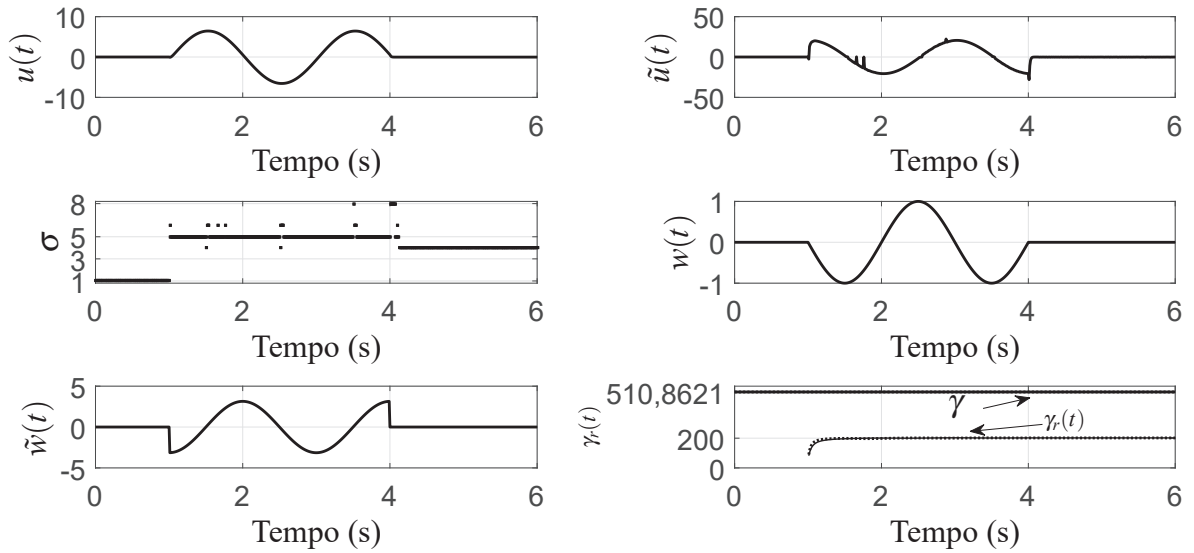
Para $(a, b, c) = (137, 60, 9, 3)$ um ponto da região representada na Figura 34 onde o Teorema 26, não é factível, e obtém-se

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 10^4 \begin{bmatrix} -0,3090 & 0,3408 & 3,4075 \end{bmatrix}, & K_2 &= 10^4 \begin{bmatrix} -0,3216 & 0,3546 & 3,5458 \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= 10^4 \begin{bmatrix} -0,3608 & 0,3975 & 3,9750 \end{bmatrix}, & K_4 &= 10^4 \begin{bmatrix} -0,3490 & 0,3846 & 3,8458 \end{bmatrix}, \\
 K_5 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,1738 & 0,2054 & 2,0542 \end{bmatrix}, & K_6 &= 10^3 \begin{bmatrix} -0,3388 & 0,3868 & 3,8684 \end{bmatrix}, \\
 K_7 &= 10^4 \begin{bmatrix} -0,0912 & 0,1015 & 1,0150 \end{bmatrix}, & K_8 &= 10^4 \begin{bmatrix} -0,1148 & 0,1274 & 1,2739 \end{bmatrix}, \\
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 26188,0297 & * & * \\ -28762,2267 & 31589,5108 & * \\ -287622,3154 & 315895,1615 & 3158952,1512 \end{bmatrix}, \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} 26126,5581 & * & * \\ -28693,9785 & 31513,7529 & * \\ -286939,8339 & 315137,5821 & 3151376,3551 \end{bmatrix}, \\
 Q_3 &= \begin{bmatrix} 6148,6184 & * & * \\ -28715,6000 & 31534,6379 & * \\ -287156,0488 & 315346,4322 & 3153464,8572 \end{bmatrix}, \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} 26139,0300 & * & * \\ -28704,8311 & 31522,5517 & * \\ -287048,36 & 315225,5707 & 3152256,2422 \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_5 &= \begin{bmatrix} 26454,0528 & * & * \\ -29067,8122 & 31939,7670 & * \\ -290678,1709 & 319397,7243 & 3193977,7843 \end{bmatrix}, \\
Q_6 &= \begin{bmatrix} 26415,0389 & * & * \\ -29024,1550 & 318909,3379 & * \\ -290241,5988 & 318909,3920 & 3189094,4608 \end{bmatrix}, \\
Q_7 &= \begin{bmatrix} 26378,4328 & * & * \\ -28980,9094 & 31840,1008 & * \\ -289809,14355 & 318401,0620 & 3184011,1596 \end{bmatrix}, \\
Q_8 &= \begin{bmatrix} 26324,7565 & * & * \\ -28920,9127 & 31773,0616 & * \\ -289209,1759 & 317730,6694 & 3177307,2325 \end{bmatrix}, \\
P &= \begin{bmatrix} 0,0818 & * & * \\ -0,0894 & 0,0982 & * \\ -0,8938 & 0,9820 & 9,8202 \end{bmatrix}. \tag{277}
\end{aligned}$$

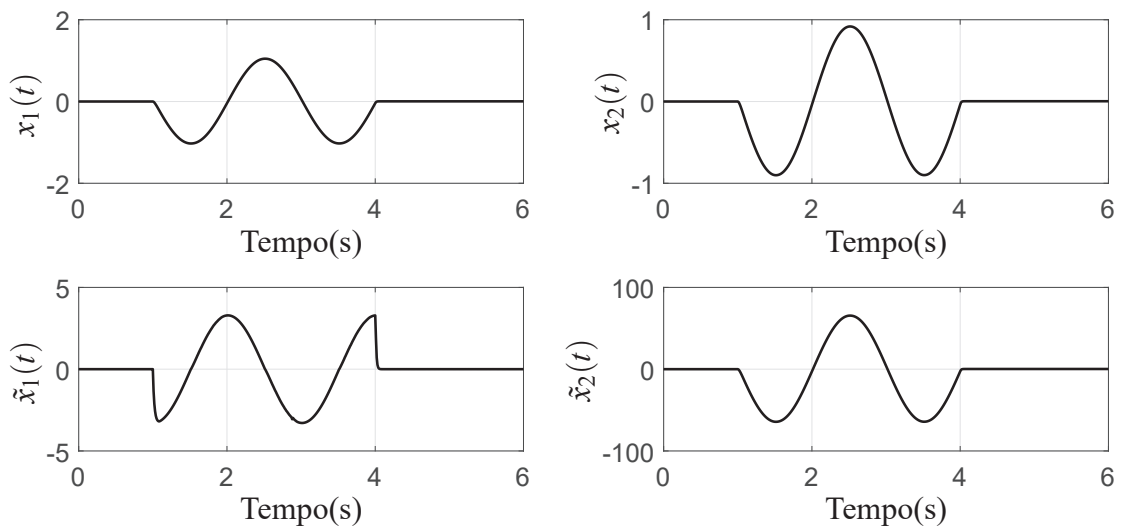
Para as simulações no tempo, Figuras 35-37, considera-se as funções $w(t)$ (241) e $\dot{w}(t)$ (242) com $\mathcal{A} = 1$, $\omega = \pi$ para $1 < t < 4$, e para $0 \leq t \leq 1$ e $4 \leq t \leq 6$, $w(t) = \tilde{w}(t) = 0$. $\tilde{x}(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$, ou seja, $x(0) = [0 \ 0]^T$ pois $\tilde{x}(0) = [A(\alpha)x(0) + \Delta B(\alpha)u(0) + H(\alpha)w(0) \ u(0)]^T$ com $u(0) = 0$ e $w(0) = 0$.

Figura 35 - Integrais $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^6 y(t)^T y(t) dt}{\int_0^6 w(t)^T w(t) dt}$ representado por (-), $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^6 \tilde{y}(t)^T \tilde{y}(t) dt}{\int_0^6 \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt}$ representado por (- -), $\gamma_r(t) < \gamma = 510,8621$.



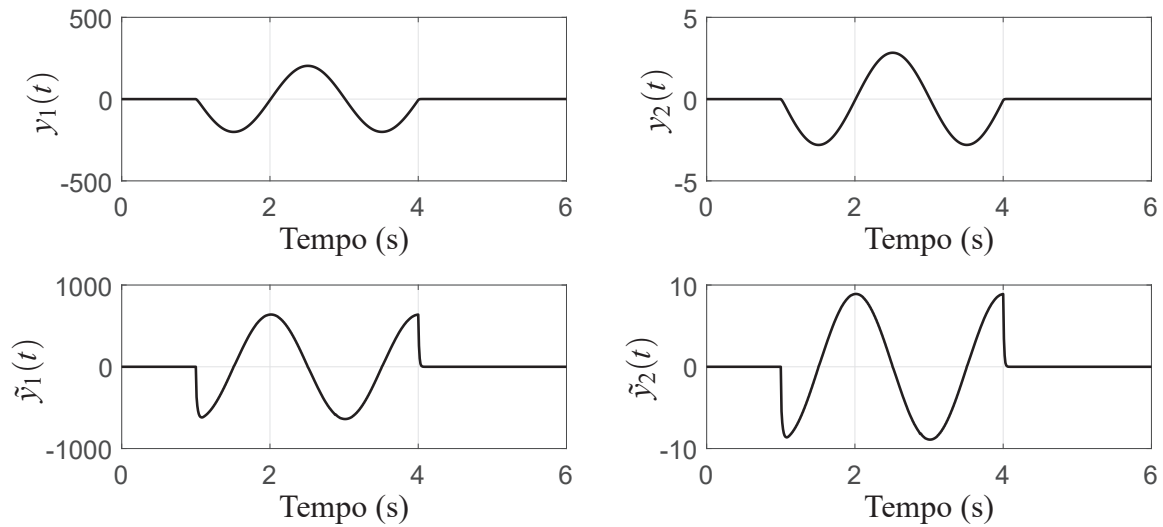
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 36 - Variáveis de estado e variáveis de estado auxiliares ($\tilde{x}(t)$) para o Teorema 28.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 37 - Saída $y(t)$ e saída auxiliar $\tilde{y}(t)$ para o Teorema 28.



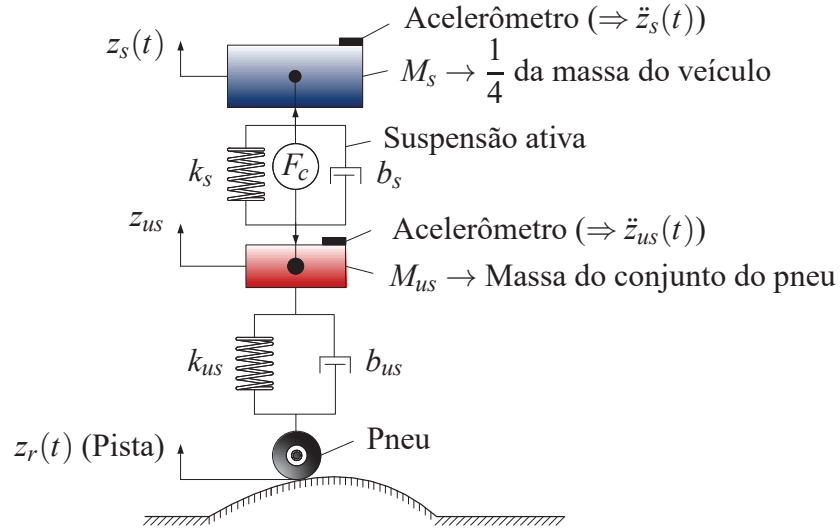
Fonte: Elaboração da própria autora.

A Figura 33 mostra uma comparação entre as regiões factíveis obtidas através das condições dadas nos Teoremas 25, 27 e o Teorema 3.2 dado em Silva *et al.* (2012). Note que, a metodologia proposta no Teorema 27 (*, \circ , \square) apresenta uma região factível maior do que aquela obtida com as condições dadas no Teorema 25 (*, \circ) e Teorema 3.2 (*, \circ) dado em Silva *et al.* (2012). Observe que, nossa abordagem usa um integrador na planta, no entanto, em (SILVA *et al.*, 2012) é necessário realizar uma busca unidimensional para encontrar o parâmetro μ que obtém a maior região factível. Observe que na Figura 34, condições menos conservadoras são propostas no Teorema 27 (-), e o custo garantido \mathcal{H}_∞ é reduzido quando comparado com as condições dadas no Teorema 25 (- -). Além disso, observe que temos uma região onde o Teorema 25 não é factível. Observe que na Figura 35 o custo real γ_r com sempre ficou menor do que o custo simulado $\gamma = 510,8621$.

4.4.2 Exemplo 6: implementação prática utilizando um sistema de suspensão ativa de bancada com falha no atuador

Considere o sistema de suspensão ativa de um veículo, fabricado pela Quanser[®] (QUANSER, 2009) representado na Figura 38.

Figura 38 - Modelo de suspensão ativa de $\frac{1}{4}$ do veículo.



Fonte: Adaptado de (SILVA *et al.*, 2012).

Neste exemplo é considerada uma falha do atuador que resulta na perda de energia. A perda de potência é representada, no modelo matemático, pela função $k_{fault}(t)$ (SILVA *et al.*, 2013; OLIVEIRA *et al.*, 2018).

$$\tilde{u}(t)_{fault} = k_{fault}(t)\tilde{u}(t), \quad \tilde{u}(t) = F_c(t), \quad (278)$$

e como em Silva *et al.* (2013), Oliveira *et al.* (2018), considere que: se $k_{fault}(t) = 0$ ou $k_{fault}(t) = 1$, o atuador $u(t)_{fault}$ possui uma falha total ou não possui falha, respectivamente. Porém se $0 < k_{fault}(t) < 1$, existe uma falha parcial no atuador $k_{fault}(t)$. Assim, pode-se considerar que a falha no atuador representa uma incerteza paramétrica.

O modelo dinâmico do sistema de suspensão ativa pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -k_s/M_s & -b_s/M_s & 0 & b_s/M_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k_s/M_{us} & b_s/M_{us} & -k_s/M_{us} & -(b_s + b_{us})/M_{us} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{fault}(t)/M_s \\ 0 \\ -k_{fault}(t)/M_{us} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ b_{us}/M_{us} \end{bmatrix} w(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t), \quad x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s(t) \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us}(t) \end{bmatrix}, \quad w(t) = \dot{z}_r. \quad (279)$$

Os parâmetros do sistema são mostrados na Tabela 3.

Tabela 3 - Parâmetros do sistema de suspensão ativa (QUANSER, 2009).

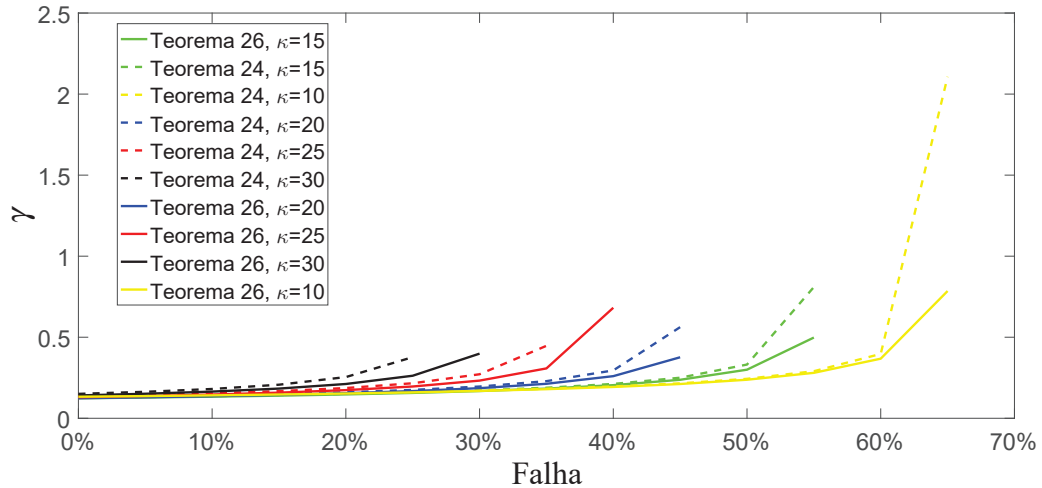
Parametros	Simbolo	Valor
Massa de 1/4 do total do veículo (kg)	M_s	$1,455 \leq M_s \leq 2,45$
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
Constante de rigidez da mola(N/m)	k_{us}	2500
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
Coefficiente de amortecimento (Ns/m)	b_{us}	5

Fonte: (QUANSER, 2009).

O sinal de controle $F_c(t)$ é limitado entre os valores $\pm 39,2N$, de acordo com as sugestões do fabricante e as restrições físicas do equipamento (QUANSER, 2009).

A Figura 39, representa as regiões factíveis para os Teoremas 26 e 28, utilizando os dados da Tabela 3, taxa de decaimento $\beta = 0$ com $10 \leq \kappa \leq 30$ com espaçamento 5 e a falha no atuador variando de 0% a 100% com espaçamento de 5%, então $0 \leq k_{fault}(t) \leq 1$.

Figura 39 - Região de factibilidade obtida minimizando ξ com $\gamma = \sqrt{\xi}$, mantendo $\eta = 1 \times 10^9$ fixo e $\mu_0 = 1$ no Teorema 3: com Teorema 26 representado pelas curvas tracejadas e o Teorema 28 representado pelas curvas contínuas.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Agora, considere a falha no atuador variando de 0% to 30%, então $0,7 \leq k_{fault}(t) \leq 1$. Assim, de (278), (279) e da Tabela 3, os modelos locais a seguir são obtidos:

$$\begin{aligned}
 A_1 = A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -618,5567 & -5,1547 & 0 & 5,1546 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,6873 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4811 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}, \\
 A_3 = A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,3469 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -12,5 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,4082 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2857 \\ 0 \\ -0,7 \end{bmatrix}, \\
 H_1 = H_2 = H_3 = H_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta B_1 = B_1, \Delta B_2 = B_2, \Delta B_3 = B_3, \Delta B_4 = B_4, \\
 C_1 = C_2 = C_3 = C_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{280}$$

Para as simulações apresentadas a seguir, vamos considerar uma falha de 30% com o pa-

râmetro $\kappa = 30$ e uma taxa de decaimento $\beta = 0$, note que na Figura 39, o Teorema 26 não apresenta factibilidade neste ponto.

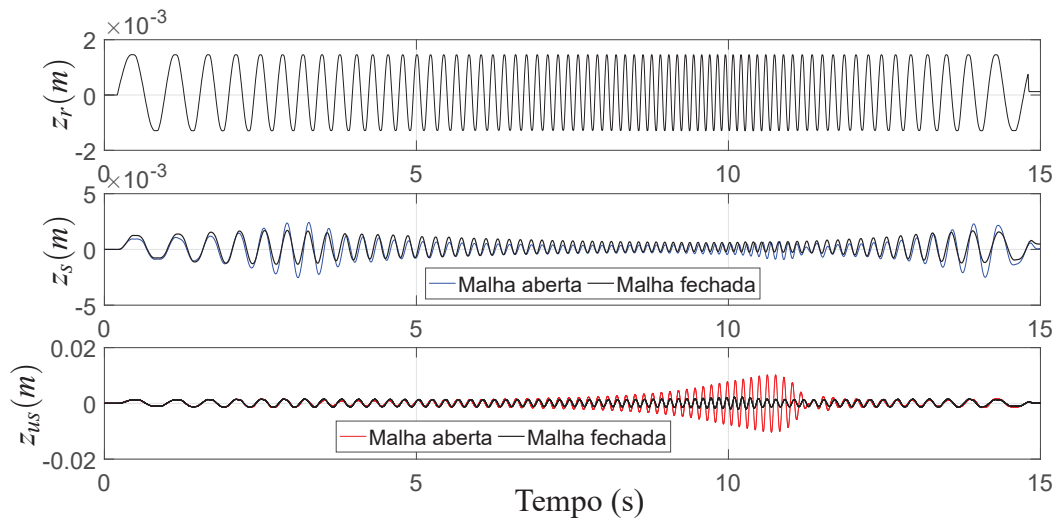
Resolvendo o problema de otimização para uma falha no atuador de 30% e $\kappa = 30$ onde o Teorema 26 não foi factível, para o Teorema 28, obtém-se $\gamma = 0,3988$ e

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \begin{bmatrix} 458,2297 & 57,6697 & -987,9925 & 8,1990 & 8,9644 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{bmatrix} 459,2727 & 62,8503 & -1142,5240 & 8,8144 & 8,2230 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\
 K_3 &= \begin{bmatrix} 599,7686 & 62,2744 & -1116,7429 & 7,3030 & 9,8262 \times 10^{-5} \end{bmatrix}, \\
 K_4 &= \begin{bmatrix} 737,5505 & 75,4569 & -1383,9423 & 8,8354 & 1,0545 \times 10^{-4} \end{bmatrix}, \\
 \|K_1\| &= 1,0906 \times 10^3, \quad \|K_2\| = 1,2330 \times 10^3, \quad \|K_3\| = 1,2692 \times 10^3, \quad \|K_4\| = 1,5701 \times 10^3, \\
 Q_1 &= \begin{bmatrix} 561351,0843 & * & * & * & * \\ 13568,2719 & 304,4951 & * & * & * \\ 795102,5797 & 20992,7138 & 991953,9721 & * & * \\ 5237,8962 & 128,9558 & 7241,0600 & 48,6384 & * \\ 1,2160 \times 10^{-1} & 2,9960 \times 10^{-3} & 1,67946 \times 10^{-1} & 1,1290 \times 10^{-3} & 2,6200 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \\
 Q_2 &= \begin{bmatrix} 561350,3859 & * & * & * & * \\ 13568,1776 & 304,4820 & * & * & * \\ 795103,4170 & 20992,8285 & 991954,31369 & * & * \\ 5237,8858 & 128,9544 & 7241,0682 & 48,6383 & * \\ 1,2160 \times 10^{-1} & 2,9959 \times 10^{-3} & 1,6795 \times 10^{-1} & 1,1290 \times 10^{-3} & 2,6200 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \\
 Q_3 &= \begin{bmatrix} 561346,0003 & * & * & * & * \\ 13567,8655 & 304,4677 & * & * & * \\ 795103,4747 & 20992,8851 & 991955,8435 & * & * \\ 5237,8372 & 128,9529 & 7241,1068 & 48,6383 & * \\ 1,1290 \times 10^{-1} & 2,9959 \times 10^{-3} & 1,6795 \times 10^{-1} & 1,1290 \times 10^{-3} & 2,6200 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \\
 Q_4 &= \begin{bmatrix} 561345,6423 & * & * & * & * \\ 13567,8029 & 304,4588 & * & * & * \\ 795103,7603 & 20992,9633 & 991956,0396 & * & * \\ 5237,8366 & 128,9526 & 7241,1031 & 48,6384 & * \\ 1,2160 \times 10^{-1} & 2,9959 \times 10^{-3} & 1,6795 \times 10^{-1} & 1,1290 \times 10^{-3} & 2,6200 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \\
 P &= \begin{bmatrix} 0,4281 & * & * & * & * \\ 0,0133 & 0,0015 & * & * & * \\ 0,3799 & 0,0064 & 0,74733 & * & * \\ 0,0037 & 0,0003 & 0,0038 & 0,0002 & * \\ 0,8548 \times 10^{-7} & 0,3168 \times 10^{-8} & 0,8899 \times 10^{-7} & 0,1423 \times 10^{-8} & 0,1343 \times 10^{-8} \end{bmatrix}, \\
 \|P\| &= 0,9999.
 \end{aligned} \tag{281}$$

O sinal de referência $z_r(t)$, que altera o perfil da pista, foi escolhido para reproduzir um sinal senoidal com amplitude de $0,0015\text{ m}$ e frequência variando de 1 até 9 Hz para $0,2 \leq t \leq 14,8\text{ s}$. Para $0 \leq t < 0,2\text{ s}$ e $14,8 < t \leq 15\text{ s}$ a amplitude de $z_r(t)$ é igual a zero. Como $w(t)$ e $\dot{w}(t)$ possuem energia limitada, logo para $\tilde{x}(0) = 0$, $\tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) = 0$, $\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt < \infty$ e $\int_0^{15} \tilde{w}(t)^T \tilde{w}(t) dt < \infty$.

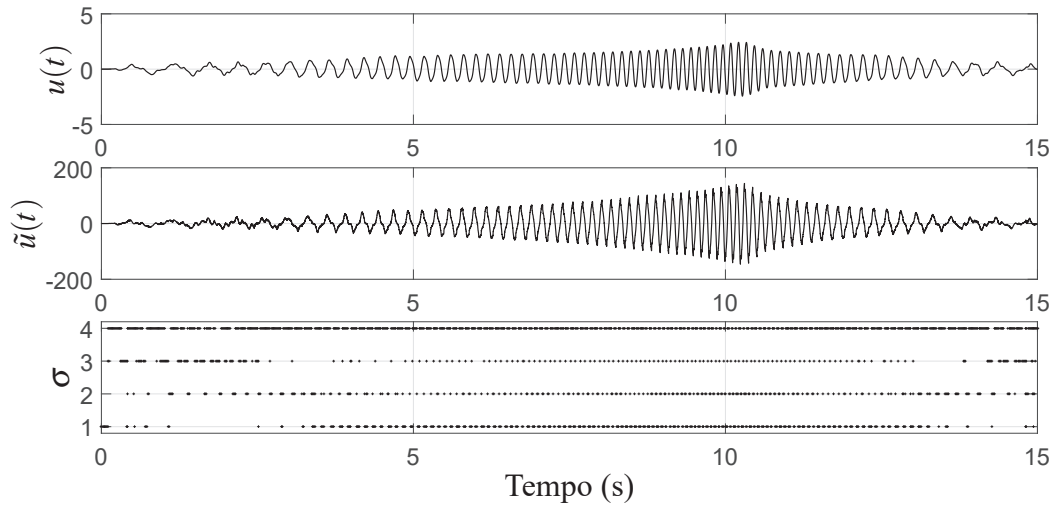
As Figuras de 40-45, representam a implementação do Teorema 28, para massas $M_s = 2,45\text{ kg}$ e $M_{us} = 1,455\text{ kg}$. A resposta dinâmica de z_s (placa azul) e z_{us} (placa vermelha) para o perfil de estrada fornecido z_r (placa prata) é mostrado nas Figuras 40 e 42.

Figura 40 - Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 2,45\text{ kg}$.



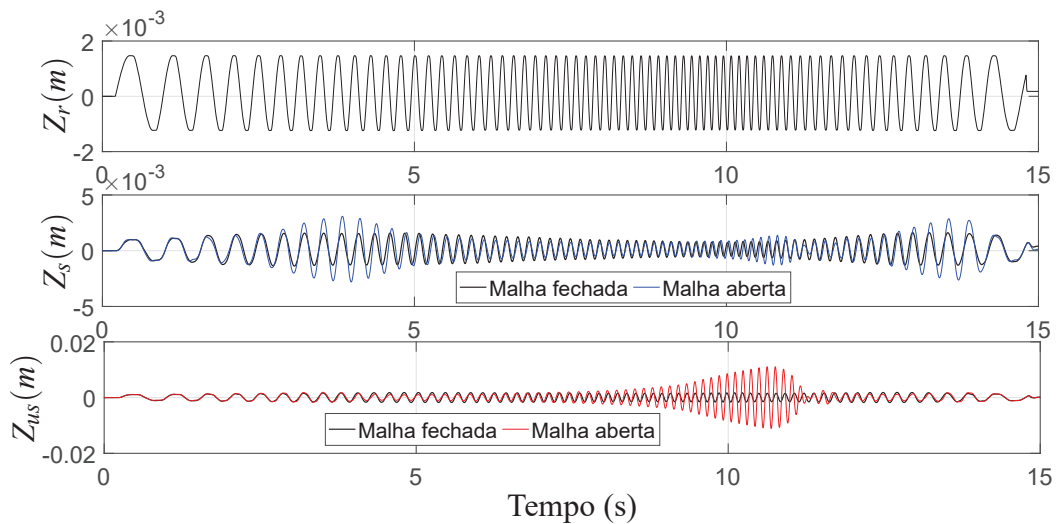
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 41 - Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.



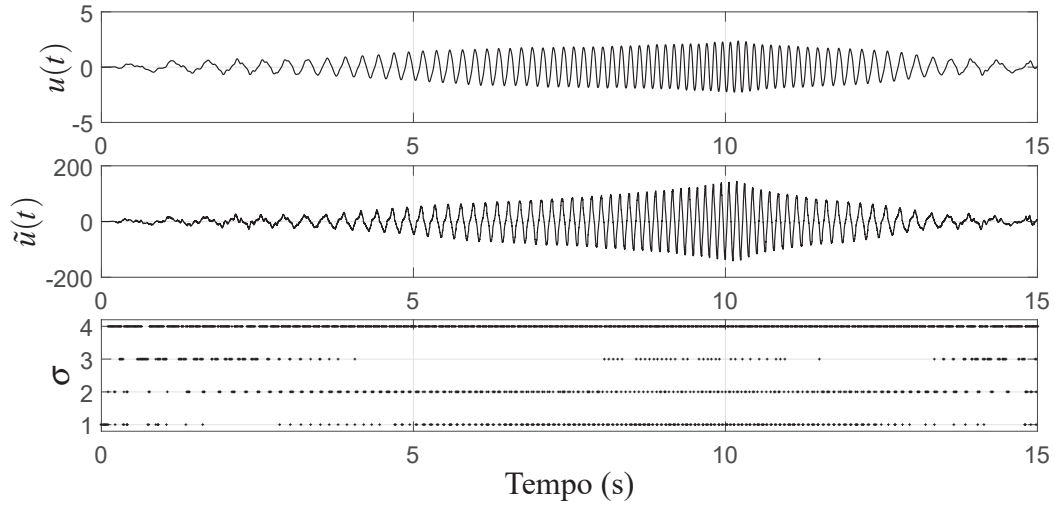
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 42 - Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 1,455 \text{ kg}$.



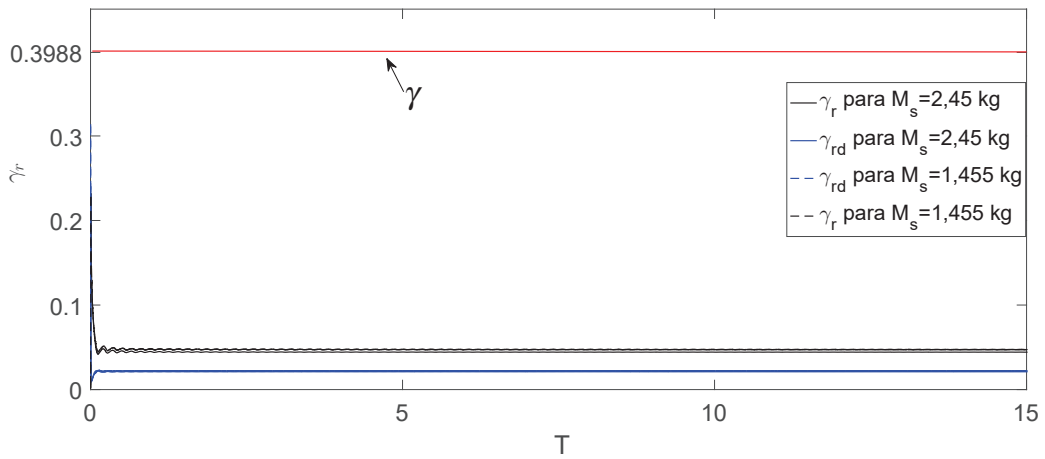
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 43 - Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 1,455 \text{ kg}$.



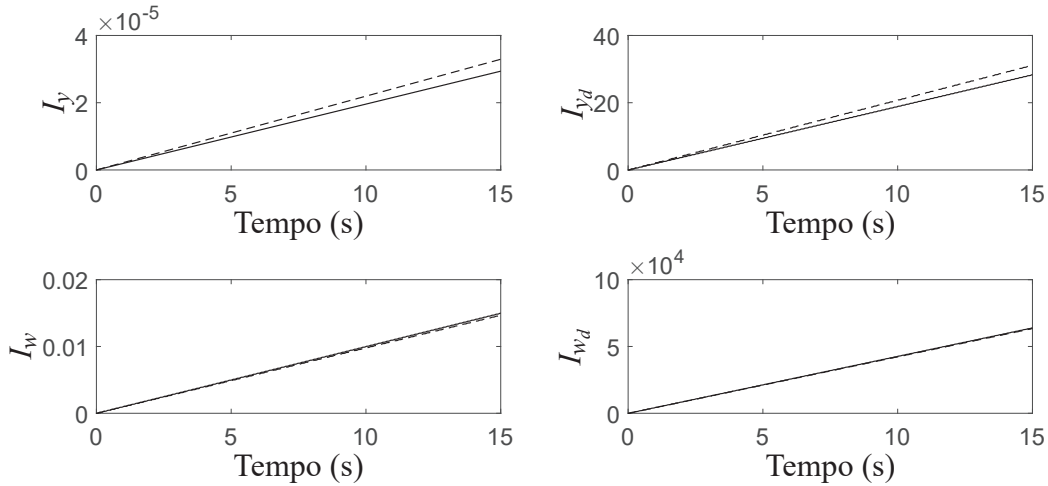
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 44 - $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^{15} y(t)^T y(t) dt}{\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt}$, $\gamma_{rd}(t) = \frac{\int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt}{\int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt}$ para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 45 - $I_y = \int_0^{15} y(t)^T y(t) dt$, $I_{y_d} = \int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$, $I_w = \int_0^{15} w(t)^T w(t) dt$, $I_{w_d} = \int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt$: para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ representada por (- -) e $M_s = 2,45 \text{ kg}$ representada por (-).



Fonte: Elaboração da própria autora.

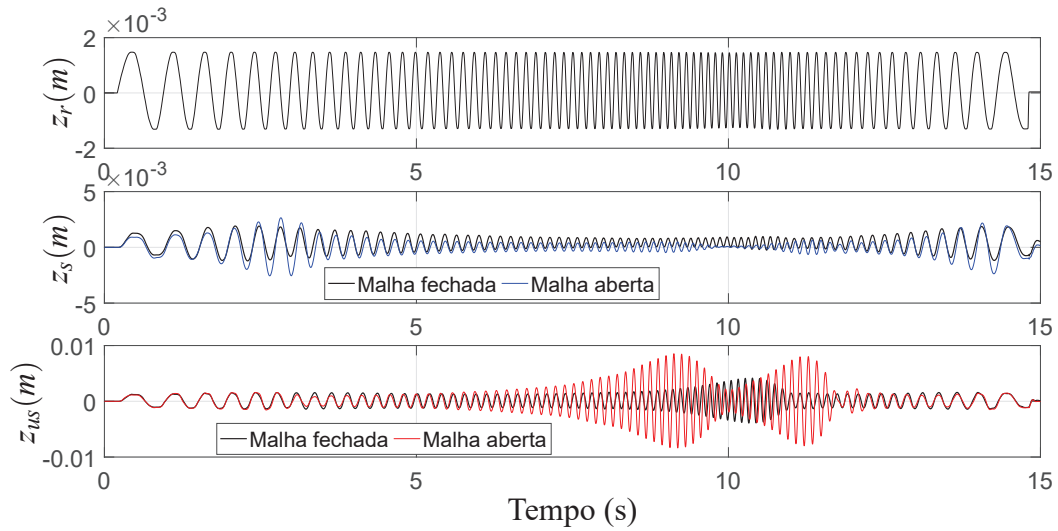
Na Figura 44 para $M_s = 2,45 \text{ kg}$ obtém-se $\max \gamma_r = 0,2321$ e $\max \gamma_{r_d} = 0,2404$, $M_s = 1,455 \text{ kg}$ obtém-se $\max \gamma_r = 0,2281$ e $\max \gamma_{r_d} = 0,3139$, note que todos os valores estão abaixo de $\gamma = 0,3988$, obtido resolvendo o problema de otimização para uma falha no atuador de 30%, $\kappa = 30$ utilizando o Teorema 28.

Observe que na Figura 45, a desigualdade de Wirtinger é mantida, ou seja, $\int_0^{15} y(t)^T y(t) dt \leq \int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$ e $\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt$ para ambas as massas.

O sinal de referência $z_r(t)$, que altera o perfil da pista, foi escolhido para reproduzir um sinal senoidal com amplitude de $0,0015 \text{ m}$ e frequência variando de 1 até 10 Hz para $0,2 \leq t \leq 14,8 \text{ s}$. Para $0 \leq t < 0,2 \text{ s}$ e $14,8 < t \leq 15 \text{ s}$ a amplitude de $z_r(t)$ é igual a zero. Como $w(t)$ e $\dot{w}(t)$ possuem energia limitada, logo para $\tilde{x}(0) = 0$, $\tilde{x}(0)^T P \tilde{x}(0) = 0$, $\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt < \infty$ e $\int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt < \infty$.

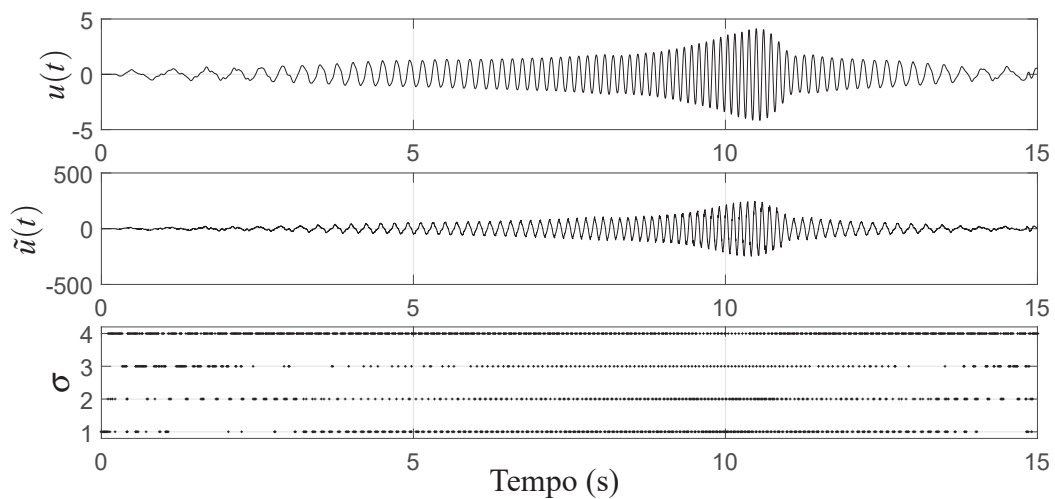
As Figuras de 46-50, representam a implementação do Teorema 28, para massas $M_s = 2,45 \text{ kg}$ e $M_s = 1,455 \text{ kg}$. A resposta dinâmica de z_s (placa azul) e z_{us} (placa vermelha) para o perfil de estrada fornecido z_r (placa prata) é mostrado nas Figuras 46 e 48.

Figura 46 - Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.



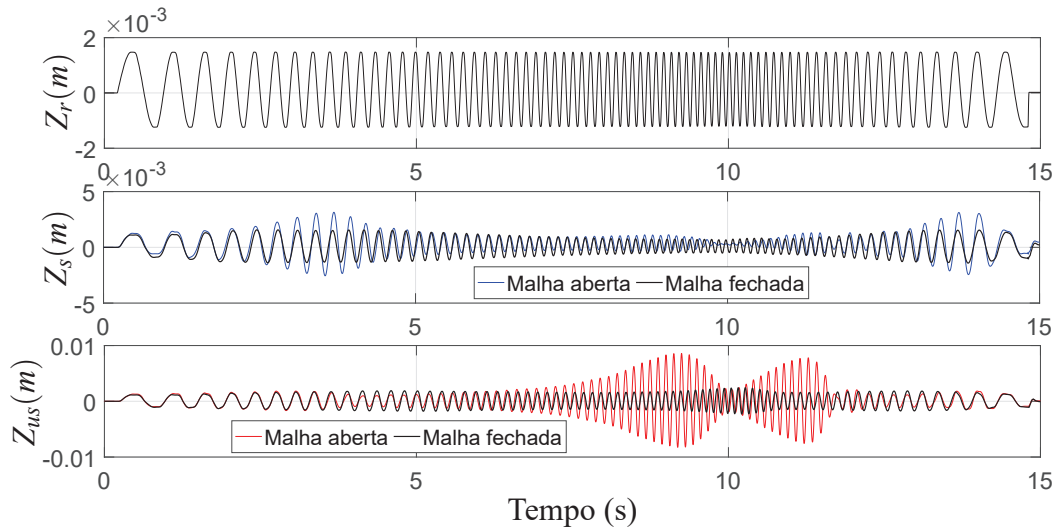
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 47 - Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.



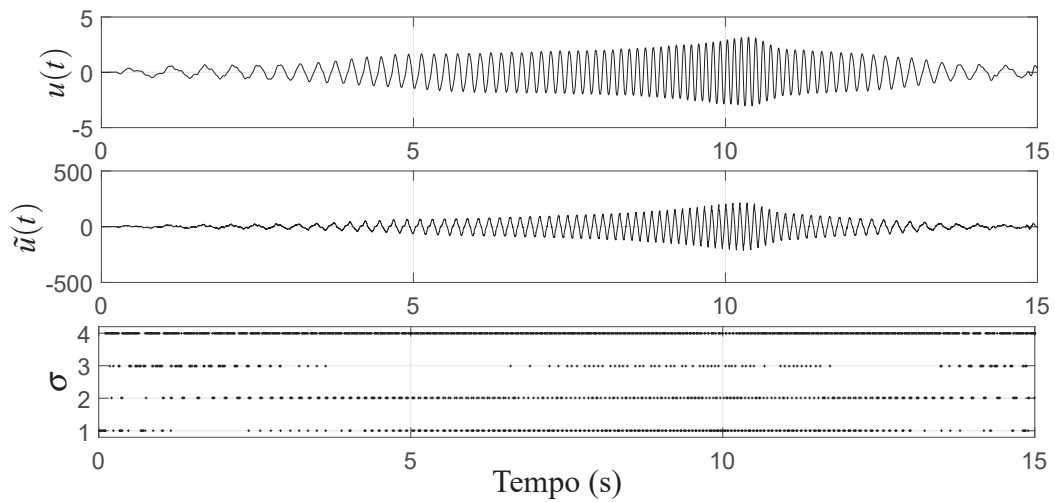
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 48 - Resposta temporal prática para a varredura em frequência do sistema de suspensão ativa em malha aberta e em malha fechada, com falha no atuador e $M_s = 1,455 \text{ kg}$.



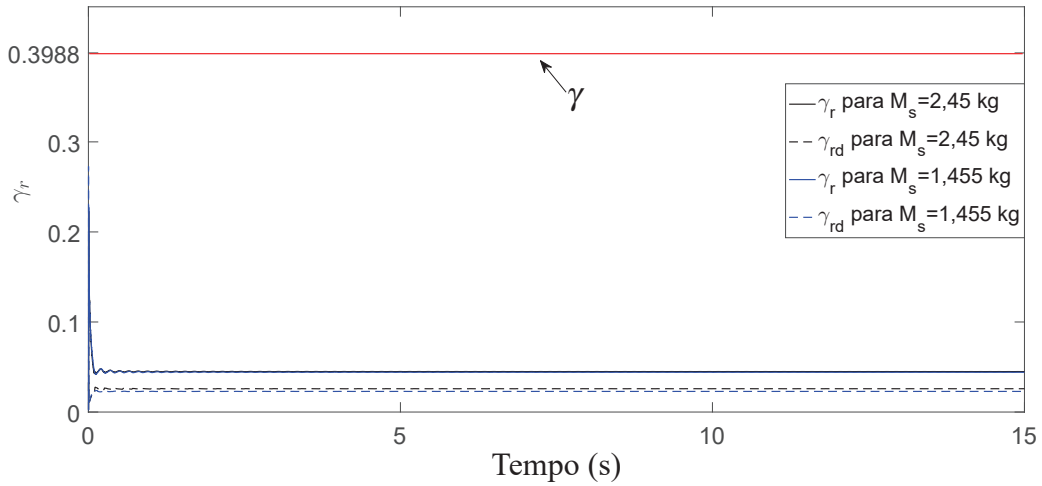
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 49 - Entrada de controle $u(t)$, sinal de controle $\tilde{u}(t)$, índice de chaveamento σ , com $u(t) = \tilde{x}_5$ e $M_s = 1,455 \text{ kg}$.



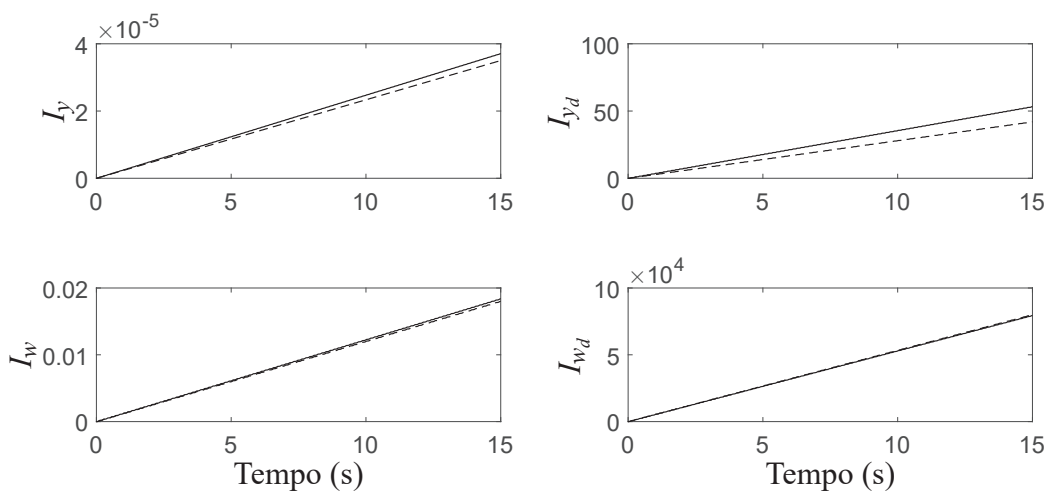
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 50 - $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^{15} y(t)^T y(t) dt}{\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt}$, $\gamma_{rd}(t) = \frac{\int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt}{\int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt}$ para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$.



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 51 - $I_y = \int_0^{15} y(t)^T y(t) dt$, $I_{y_d} = \int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$, $I_w = \int_0^{15} w(t)^T w(t) dt$, $I_{w_d} = \int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt$: para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ representada por (- -) e $M_s = 2,45 \text{ kg}$ representada por (-).



Fonte: Elaboração da própria autora.

Na Figura 50 para $M_s = 2,45 \text{ kg}$ obtém-se $\max \gamma_r = 0,2229$ e $\max \gamma_{r_d} = 0,1947$, para $M_s = 1,455 \text{ kg}$ obtém-se $\max \gamma_r = 0,2273$ e $\max \gamma_{r_d} = 0,2728$, note que todos os valores estão abaixo de $\gamma = 0,3988$, obtido resolvendo o problema de otimização para uma falha no atuador de 30%, $\kappa = 30$ utilizando o Teorema 28.

Observe que na Figura 51, a desigualdade de Wirtinger é mantida, ou seja, $\int_0^{15} y(t)^T y(t) dt \leq \int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt$ e $\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt \leq \int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt$ para ambas as massas.

4.5 CONCLUSÕES PARCIAIS

Neste capítulo foram apresentados projetos de controle chaveado e controle \mathcal{H}_∞ chaveado para uma classe de sistemas lineares incertos onde a matriz de entrada $B(\alpha)$ é incerta, sendo que somente a derivada do vetor de estado está disponível para a realimentação. Na abordagem sem distúrbio ($w(t) = 0$), no Exemplo 5, na Figura 33, mostra-se que o Teorema 27 apresenta uma região factível melhor que a obtida pelo Teorema 25 e pelo Teorema 3.2 dado em Silva *et al.* (2012) (com $\mu = 0,01$ que é obtido através de um procedimento de busca, visando obter a maior região factível). Considerando o distúrbio ($w(t) = 0$) e os Teoremas 26 e 28, nota-se na Figura 34 que o Teorema 28 obteve uma região factível maior, e quando ambos são factíveis obteve um custo \mathcal{H}_∞ menor que o obtido pelo Teorema 26. Na implementação prática, observe que as respostas do sistema de malha aberta são limitadas, mesmo sem a ação de controle. Note que o sistema em malha fechada reduziu a amplitude máxima de z_s e z_{us} , proporcionando conforto e segurança ao equipamento, e que a minimização da norma \mathcal{H}_∞ mitigou o efeito de entrada exógeno na saída. Na Figura 44, note que $\gamma_r(t) = \frac{\int_0^{15} y(t)^T y(t) dt}{\int_0^{15} w(t)^T w(t) dt} < \gamma = 0,3988$, $\gamma_{r_d}(t) = \frac{\int_0^{15} \dot{y}(t)^T \dot{y}(t) dt}{\int_0^{15} \dot{w}(t)^T \dot{w}(t) dt} < \gamma = 0,3988$, para ambas as massas $M_s = 1,455 \text{ kg}$ e $M_s = 2,45 \text{ kg}$. Observa-se também que o $\gamma_r(t)$ para a massa $M_s = 1,455 \text{ kg}$ (- -) ficou sempre maior ou igual ao $\gamma_r(t)$ para a massa $M_s = 2,45 \text{ kg}$ (-). Figura 45, a desigualdade de Wirtinger é mantida para ambas as massas.

5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este capítulo é dedicado as conclusões e discutir as perspectivas de trabalho futuros.

5.1 CONCLUSÕES

Este trabalho investigou o problema do projeto de controle com ganho constante de realimentação e controle chaveado ou controle \mathcal{H}_∞ chaveado, para uma classe sistemas lineares invariantes no tempo com incertezas politópicas. As estratégias propostas utilizam dinâmicas auxiliares, cujo vetor de estado está disponível para a realimentação, para controlar a planta original. Vale a pena salientar que neste texto sempre se faz necessária a condição da matriz $A(\alpha)$ ter posto completo, e nos casos em que utilizamos distúrbio, sempre é necessária a derivada fraca do distúrbio.

No Capítulo 2, adota-se uma técnica proposta em Moreira (2015) como uma estratégia para utilizar o controle chaveado. Primeiramente define-se a região de operação para a dinâmica auxiliar com restrição apenas na entrada de controle $u(t)$, que compõe o novo vetor de estado. Neste capítulo apresenta-se a saturação como uma região de operação para a entrada de controle u (WOLMUTH *et al.*, 2019). Para uma lei de controle com um único ganho e lei de controle chaveada, inserem-se restrições que garantem a redução das normas dos ganhos da realimentação e prova-se que se um sistema linear pode ser controlado com um ganho constante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada. Mostra-se a relação entre a dinâmica auxiliar e a dinâmica da planta, garantindo a existência da taxa de decaimento para a dinâmica da planta a partir da dinâmica auxiliar.

No Capítulo 3, adota-se uma técnica sem a utilização de integradores como estratégia para projetar o controle chaveado e o controle \mathcal{H}_∞ chaveado. Sem saturação e sem região de operação garante-se que a origem seja um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e compara-se os resultados com o apresentados em Silva *et al.* (2012). Note que não foi provado que se as condições Do Teorema 3.2 de Silva *et al.* (2012) são factíveis então as condições propostas são factíveis também. Entretanto, no exemplo abordado, este fato ocorreu e ainda as condições propostas apresentaram regiões factíveis maiores. Isto evidencia que esta abordagem pode proporcionar uma região de factibilidade maior do que a encontrada para o Teorema 3.2 de Silva *et al.* (2012), mostrando que o controlador proposto neste capítulo, utilizando uma candidata a função de Lyapunov quadrática $V(\hat{x}(t))$ e um controlador chaveado L_σ , apresentou resultados menos conservadores do que os obtidos em Silva *et al.* (2012) que utiliza técnicas de flexibilização das condições de estabilidade,

de flexibilização das condições de estabilidade, primeiramente pela inserção de variáveis extras consideradas no Lema de Finsler, e posteriormente com o incremento de um escalar extra, que necessita de um procedimento de busca. Define-se uma região de operação para a dinâmica auxiliar. Apresentam-se LMIs que garantem a estabilidade local para o ponto de equilíbrio do sistema em malha fechada, para uma lei de controle com um único ganho e lei de controle chaveada. Mostra-se que se um sistema linear pode ser controlado com um ganho constante, então ele também pode ser controlado de forma chaveada. Mostra-se a relação entre a dinâmica auxiliar e a dinâmica da planta, garantindo a existência da taxa de decaimento e da norma \mathcal{H}_∞ para a dinâmica da planta a partir da dinâmica auxiliar para a abordagem com e sem saturação e região de operação.

Finalmente no Capítulo 4, apresenta-se o caso mais geral considerando a matriz B incerta, porém apresenta-se apenas a abordagem sem saturação do atuador. Neste cenário é necessária a utilização do integrador para recuperar a entrada de controle u . Em cada capítulo são apresentados exemplos numéricos e no Capítulo 4, apresenta-se uma implementação prática para ilustrar a eficácia das técnicas apresentadas.

Como contribuição deste trabalho temos a saturação do atuador apresentada no Capítulo 2, que pelo conhecimento dos autores é nova, como também a utilização do controlador chaveado com realimentação derivativa. Outra novidade é a junção do controle \mathcal{H}_∞ chaveado para sistemas lineares quando temos somente a derivada do vetor de estado disponível para a realimentação.

5.2 PERSPECTIVAS FUTURAS

Como perspectivas futuras, pode-se listar os seguintes tópicos de pesquisa:

- Inserir a saturação do atuador no Capítulo 4;
- Utilizar a função *sigmoide* para representar a saturação do atuador;
- Utilizar as técnicas apresentadas para a realimentação derivativa da saída.
- Generalizar os resultados apresentados neste trabalho para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno;
- Estudar o conjunto positivamente invariante de uma função de Lyapunov quadrática por partes do tipo mínimo.

5.3 ARTIGO COMPLETO PUBLICADO EM PERIÓDICO

WOLMUTH, LEIDY DIANE; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; ASSUNÇÃO, EDVALDO; CARDIM, RODRIGO; MOREIRA, MANOEL RODRIGO. Derivative Feedback Control for a Class of Uncertain Linear Systems Subject to Actuator Saturation. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 30, p. 490–500, 2019.

<https://doi.org/10.1007/s40313-019-00474-x>

5.4 ARTIGO ACEITO EM CONGRESSO

WOLMUTH, LEIDY DIANE; ALVES, UÍLIAM NELSON LENDZION TOMAZ; TEIXEIRA, MARCELO CARVALHO MINHOTO; ASSUNÇÃO, EDVALDO; CARDIM, RODRIGO. Controle Chaveado de Sistemas Lineares Sujeitos à Saturação no Atuador Usando Realimentação Derivativa. Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI 2019), que ocorrerá na cidade de Ouro Preto, Minas Gerais, entre os dias 27 e 30 de outubro de 2019.

REFERÊNCIAS

- ABDELAZIZ, T. H. S. Parametric eigenstructure assignment using state-derivative feedback for linear systems. *Journal of Vibration and Control*, London, v. 18, n. 12, p. 1809–1827, 2012.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. Pole-placement for SISO linear systems by state-derivative feedback. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, Stevenage, v. 151, n. 4, p. 377–385, 2004.
- ABDELAZIZ, T. H. S.; VALÁŠEK, M. State derivative feedback by LQR for linear time-invariant systems. *IFAC Proceedings Volumes*, Amsterdam, v. 38, n. 1, p. 435–440, 2005.
- ALIYU, M. D. S.; BOUKAS, E. K. Extending nonlinear H_2 , H_∞ optimisation to $W^{1,2}$, $W^{1,\infty}$ spaces - part I: optimal control. *International Journal of Systems Science*, Abingdon, v. 42, n. 5, p. 889–906, 2011.
- ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; OLIVEIRA, D. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. Smoothing switched control laws for uncertain nonlinear systems subject to actuator saturation. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, West Sussex, v. 30, n. 8-10, p. 1408–1433, 2016. ISSN 1099-1115.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; SILVA, N. A. P. D.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.
- BARMISH, B. R. Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 28, n. 8, p. 848–850, 1983.
- BOYD, S. P.; El Ghaoui, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Philadelphia: SIAM, 1994. 193 p.
- BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Piscataway: Springer Science & Business Media, 2010. 599 p.
- BUZETTI, A. S. *Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores*. 2017. 88 f. Tese (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Iha Solteira, 2017.
- CAO, Y.-Y.; LIN, Z. Robust stability analysis and fuzzy-scheduling control for nonlinear systems subject to actuator saturation. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 11, n. 1, p. 57–67, 2003. ISSN 1063-6706.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Design of state-derivative feedback controllers using a state feedback control design. *IFAC Proceedings Volumes*, Frankfurt, v. 40, n. 20, p. 22–27, 2007.

- CARVALHO, V. J. A. de. *Uma introdução aos espaços de Sobolev e aplicações à equações diferenciais*. 2014. 51 f. Trabalho de Conclusão (Graduação) — Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, João Pessoa, 2014.
- CHEN, Y.-J.; OHTAKE, H.; TANAKA, K.; WANG, W.-J.; WANG, H. O. Relaxed stabilization criterion for T–S fuzzy systems by minimum-type piecewise-Lyapunov-function-based switching fuzzy controller. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Piscataway, v. 20, n. 6, p. 1166–1173, 2012.
- DUAN, Y. F.; NI, Y. Q.; KO, J. M. Design guidelines for open-loop vibration control of stay cables using MR dampers. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, San Diego, v. 20, n. 6, p. 431–449, 2005.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. The LMI control toolbox. In: IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 33rd., 1994, Lake Buena Vista. *Proceedings ...* Piscataway: IEEE, 1994. 1994. v. 3, p. 2038–2041.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 51, n. 12, p. 1984–1989, 2006.
- HU, T.; LIN, Z. Composite quadratic lyapunov functions for constrained control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Piscataway, v. 48, n. 3, p. 440–450, 2003.
- HU, T.; LIN, Z.; CHEN, B. M. An analysis and design method for linear systems subject to actuator saturation and disturbance. *Automatica*, Langford Lane, v. 38, n. 2, p. 351–359, 2002.
- KAEWPRAEK, N.; ASSAWINCHAICHOTE, W. \mathcal{H}_∞ fuzzy state-feedback control plus state-derivative-feedback control synthesis for photovoltaic systems. *Asian Journal of Control*, Hoboken, v. 18, n. 4, p. 1441–1452, 2016.
- KLUG, M.; CASTELAN, E. B.; COUTINHO, D. A T–S fuzzy approach to the local stabilization of nonlinear discrete-time systems subject to energy-bounded disturbances. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, v. 26, n. 3, p. 191–200.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H.; KIM, S. K. Local \mathcal{H}_∞ controller design for continuous-time TS fuzzy systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, Heidelberg, v. 13, n. 6, p. 1499–1507, 2015.
- LOFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 13 th. 2004, Taipei. *Proceedings ...* Piscataway: IEEE, 2004. 2004. p. 284–289.
- MOREIRA, M. R. *Controle robusto de sistemas não lineares e chaveados de sistemas lineares usando realimentação derivativa*. 2015. 163 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Iha Solteira, 2015.
- MOREIRA, M. R.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; ESTEVES, T. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Stabilizability and disturbance rejection with state-derivative feedback. *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2010, n. 1,

2010.

OLIVEIRA, D. R. de; TEIXEIRA, M. C. M.; ALVES, U. N. L. T.; SOUZA, W. A. de; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. On local \mathcal{H}_∞ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 344, n. 1, p. 1–26, 2018. ISSN 0165-0114. Theme: Control Engineering.

QUANSER. *Active Suspension: User's Manual*, Canada, Quanser Consulting, 2009. 2009.

REITHMEIER, E.; LEITMANN, G. Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state. *Archive of Applied Mechanics*, Heidelberg, v. 72, n. 11, p. 856–864, 2003.

REN, J.; ZHANG, Q. Robust \mathcal{H}_∞ control for uncertain descriptor systems by proportional–derivative state feedback. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 83, n. 1, p. 89–96, 2010.

ROSSI, F. Q.; GALVÃO, R. K. H.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Direct discrete time design of robust state derivative feedback control laws. *International Journal of Control*, Abingdon, v. 91, n. 1, p. 70–84, 2018.

SARIKAYA, M. Z. On the new Wirtinger type inequalities. *Konuralp Journal of Mathematics*, Konuralp, v. 7, n. 1, p. 112–116, 2019.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNCAO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust controller implementation via state-derivative feedback in an active suspension system subjected to fault. In: CONFERENCE ON CONTROL AND FAULT-TOLERANT SYSTEMS- SYSTOL, 2nd., 2013, Nice. *Proceedings ...* Piscataway: IEEE, 2013. p. 752--757 .

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; BUZACHERO, L. S. Parameter-dependent Lyapunov functions for state-derivative feedback control in polytopic linear systems . *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 84, n. 8, p. 1377 – 1386, 2011.

SILVA, E. R. P. da; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZACHERO, L. S. Less conservative control design for linear systems with polytopic uncertainties via state-derivative feedback . *Mathematical Problems in Engineering*, New York, v. 2012, n. 1, p. 1– 21, 2012.

SLOTINE, J.-J. E.; LI, W. et al. *Applied nonlinear control*. : Englewood Cliffs:Prentice–Hall, 1991.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched regulator design of uncertain nonlinear systems using Takagi-Sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, Piscataway, v. 22, n. 6, p. 1720–1727, 2014a.

SOUZA, W. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIM, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Robust switched control design for nonlinear systems using fuzzy models. *Mathematical Problems in Engineering*, Nova Iorque, v. 2014, n. 1, p. 1–11, 2014.

- SOUZA, W. A. de; TEIXEIRA, M. C. M.; SANTIN, M. P. A.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. On switched control design of linear time-invariant systems with polytopic uncertainties. *Mathematical Problems in Engineer*, Nova Iorque, v. 2013, n. 1, p. 1–10, 2013.
- WANG, J.-W.; WU, H.-N. Some extended Wirtingers inequalities and distributed proportional-spatial integral control of distributed parameter systems with multi-time delays. *Journal of the Franklin Institute*, Langford Lane, v. 352, n. 10, p. 4423–4445, 2015.
- WANNEBO, A. Equivalent norms for the Sobolev space $W_0^{m,p}(\Omega)$. *Arkiv för Matematik*, Somerville, v. 32, n. 1, p. 245–254, 1994.
- WOLMUTH, L. D.; ALVES, U. N. L. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R. Derivative feedback control for a class of uncertain linear systems subject to actuator saturation. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Heidelberg, v. 30, n. 4, p. 490–500, 2019.
- XIE, W. An equivalent LMI representation of bounded real lemma for continuous-time systems. *Journal of Inequalities and Applications*, Heidelberg, v. 2008, n. 1, p. 672–905, 2008.
- YAZICI, H.; SEVER, M. Design of an optimal state derivative feedback lqr controller and its application to an offshore steel jacket platform. *International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, Balikesir, v. 8, n. 1, p. 84–91, 2017.
- YAZICI, H.; SEVER, M. Output derivative feedback vibration control of an integrated vehicle suspension system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, London, v. 233, n. 1, p. 1–11, 2017.