

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá

LAÍS LAMAR RODRIGUES SILVA

Conteúdo físico de teorias livres de ordem superior em derivadas via invariantes de calibre

Guaratinguetá

2024 defesa

LAÍS LAMAR RODRIGUES SILVA

Conteúdo físico de teorias livres de ordem superior em derivadas via invariantes de calibre

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Facul-
dade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá,
para obtenção do título de Bacharela em Física.

Orientador: Profº Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá

2024

S586c	Silva, Lais Lamar Rodrigues Conteúdo físico de teorias livres de ordem superior em derivadas via invariantes de calibre / Lais Lamar Rodrigues Silva - Guaratinguetá, 2024. 51 f. : il. Bibliografia: f. 51 Trabalho de Graduação em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2024. Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi 1. Campos de calibre (Física). 2. Derivativos (Matemática). 3. Física teórica I. Título.
	CDU 53

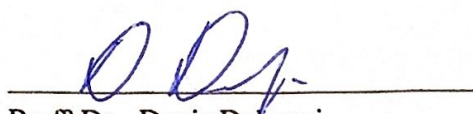
LAÍS LAMAR RODRIGUES SILVA

**CONTEÚDO FÍSICO DE TEORIAS LIVRES DE ORDEM SUPERIOR EM
DERIVADAS VIA INVARIANTES DE CALIBRE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá, para obtenção do título de Bacharela em Física.

Data de defesa: 03/12/2024

BANCA EXAMINADORA



Profº Dr. Denis Dalmazi

UNESP – Faculdade de Engenharia e Ciências – Campus de Guaratinguetá



Profº Dr. Elias Leite Mendonça

UNESP - Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá



Profº Dr. Saulo Henrique Pereira

UNESP - Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá

À minha mãe, por ser minha fonte constante de inspiração e luz em todos os momentos, guiando-me com amor e sabedoria ao longo dessa jornada. E ao meu pai e ao meu irmão, por acreditarem em mim e estarem ao meu lado nos momentos mais críticos.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas impactaram o desenvolvimento desse trabalho. Agradeço aos meus pais, Izilda e Edivaldo, por dedicarem seu tempo para me incentivar nos estudos, e pelo apoio nos momentos difíceis. Agradeço ao meu irmão, Gesés, por acreditar em mim e alegrar meus dias.

Também agradeço algumas pessoas fundamentais para o desenvolvimento desse projeto, por estarem ao meu lado em todos os momentos: Bianca, Ana Karolina, Vítor, Doriane, Thais e Cássia.

Em especial, agradeço ao meu orientador, Denis Dalmazi, pela paciência no desenvolvimento desse trabalho, e por me guiar apesar das dificuldades. Agradeço também, imensamente, aos professores Elias e Saulo, por concordarem em compor a banca. Suas sugestões foram fundamentais para o enriquecimento deste trabalho.

Agradeço aos professores dos departamentos de Física e Matemática, que me proporcionaram todo o ferramental teórico e prático para o desenvolvimento do trabalho, muito importantes na construção de meu conhecimento em Física. Em especial, agradeço aos professores Júlio, Antônio, Isabel e Daniela.

Por fim, agradeço à Pró-reitoria de Pesquisa da Unesp (PROPE) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro proporcionado ao projeto, pelo edital 9/2023 - PIBIC Programa UNESP de Bolsas de Iniciação Científica.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Pró-reitoria de Pesquisa da Unesp (PROPE) e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Edital 9/2023 - PIBIC Programa UNESP de Bolsas de Iniciação Científica.

“Se eu não fosse físico, provavelmente seria músico. Muitas vezes penso na música. Vivo meus devaneios na música. Vejo minha vida em termos de música. Não sei dizer se teria feito algum trabalho criativo de importância na música, mas sei que o meu violino extrai a maior alegria da vida.”

(Albert Einstein)

RESUMO

Nesse trabalho, analisamos o conteúdo físico de teorias de gauge, abordando o estudo de teorias de ordem superior em derivadas. Iniciamos nossa discussão com a análise hamiltoniana de sistemas vinculados, e apresentamos um método de análise que consiste em decompor os campos em helicidades e compactá-los em um número reduzido de invariantes de calibre (variáveis de Bardeen), obtidos de forma construtivista a partir das transformações de calibre das teorias. Analisamos as teorias de Maxwell (em segunda e quarta ordem), as teorias triviais vetorial e tensorial, e a teoria do campo escalar massivo, em quarta ordem. A decomposição em helicidades se mostrou um método vantajoso para o estudo de teorias de ordem superior em derivadas, contornando a complexidade associada ao fantasma de Ostrogradsky, o que preserva a estrutura canônica das teorias estudadas.

Palavras-Chave: Teorias de Gauge; Fantasma de Ostrogradsky; Variáveis de Bardeen; Decomposição em Helicidades; Formalismo de Dirac; Derivadas de Ordem Superior.

ABSTRACT

In this work, we analyze the physical content of gauge theories, studying higher derivative theories. We begin our discussion with the Hamiltonian analysis of constrained systems and introduce a method of analysis that consists of decomposing the fields in helicities and compacting them into a reduced number of gauge invariants (Bardeen variables), obtained in a constructivist way from the gauge transformations of the theories. We analyzed the Maxwell theory (in second and fourth order), the trivial vector and tensor theories, and the theory of the massive scalar field, in fourth order. The decomposition in helicities has proven to be an advantageous method in studying higher derivative theories, bypassing the complexity associated with the Ostrogradsky ghost, which preserves the canonical structure of the studied theories.

Keywords: Gauge theories; Ostrogradsky Ghost; Bardeen Variables; Helicity Decomposition; Dirac Formalism; Higher-order Derivatives.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ANÁLISE HAMILTONIANA DE SISTEMAS FÍSICOS VINCULADOS	13
2.1	O formalismo hamiltoniano	13
2.1.1	Parênteses de Poisson e as equações de Hamilton	15
2.2	Sistemas hamiltonianos vinculados	15
2.2.1	Algoritmo de Dirac-Bergmann	17
2.2.2	Classificação dos vínculos	18
2.2.3	Contagem de graus de liberdade	19
2.2.4	Exemplo	20
2.3	Teoria de Campos	23
3	INTRODUÇÃO ÀS VARIÁVEIS DE BARDEEN	25
3.1	Decomposição em helicidades	25
3.2	Invariância de calibre	25
4	APLICAÇÕES EM TEORIAS DE SEGUNDA ORDEM	27
4.1	Lagrangiana de Maxwell	27
4.1.1	Formalismo hamiltoniano de Dirac	27
4.1.2	Decomposição em helicidades	30
4.1.3	Invariantes de calibre (variáveis de Bardeen)	31
4.2	Teoria vetorial trivial	33
4.2.1	Formalismo hamiltoniano de Dirac	33
4.2.2	Decomposição em helicidades	35
4.2.3	Invariantes de calibre	35
4.3	Teoria tensorial trivial	36
4.3.1	Formalismo hamiltoniano de Dirac	36
4.3.2	Decomposição em helicidades	38
4.3.3	Invariantes de calibre	40
5	TEORIAS DE ORDEM SUPERIOR EM DERIVADAS	42
5.1	Aplicações	42
5.1.1	Campo escalar massivo	42
5.1.1.1	Decomposição em helicidades	42
5.1.2	Lagrangiana de Maxwell (via tensor simétrico)	43

5.1.2.1	Decomposição em helicidades	44
5.1.2.2	Invariantes de calibre	44
6	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	48

1 INTRODUÇÃO

As Teorias de Campos de calibre (simetrias locais) constituem uma das bases da física teórica moderna. Para teorias com simetria de calibre, é comum considerar sistemas com até uma derivada temporal nos campos, para os quais já é estabelecido um algoritmo hamiltoniano (a saber, o formalismo hamiltoniano de Dirac (Dirac, 1964) para sistemas vinculados). Entretanto, a busca por uma compreensão mais profunda das interações da natureza levou ao crescimento do interesse da comunidade científica em explorar teorias de ordem superior em derivadas temporais, sobretudo devido às dificuldades em quantizar a gravidade, como proposto por (Rham; Gabadadze; Tolley, 2011), (Bergshoeff; Hohm; Townsend, 2009), (Dalmazi; Santos, 2013) e (Menezes, 2022), que descrevem teorias de spin-2 com ordem superior em derivadas. As teorias de ordem superior vêm sendo cogitadas, principalmente, para lidar com o problema de infinitos que aparecem na gravitação, pois as teorias de ordem superior se comportam melhor do que as teorias usuais, para grandes momentos, estabelecendo um processo de renormalização (vide (Stelle, 1977)).

É natural considerar teorias de ordem superior em derivadas, ao lidar com modelos mais complexos. Em (Dutra; Natividade, 1999) e (Dalmazi; Santos, 2013), por exemplo, observamos como explorar a dualidade entre teorias usuais e de ordem superior. Um panorama histórico acerca do interesse em estudar teorias de ordem superior é encontrado em (Dutra; Natividade, 1996).

Vemos que a presença de derivadas de ordem superior permite incorporar novos graus de liberdade, aprofundando a descrição dinâmica dos sistemas e garantindo teorias consistentes. Essas teorias exigem generalizações na definição dos vínculos e condições de contorno, e nos aproximam de uma descrição mais sólida das interações fundamentais da natureza.

Ao analisarmos o conteúdo físico de teorias de ordem superior em derivadas pelo método usual de Dirac, nos deparamos com uma tarefa árdua, porque essas teorias não são descritas apenas por suas posições e velocidades, como nas teorias usuais, levando ao aparecimento de novos graus de liberdade que podem levar à instabilidade nas soluções das equações clássicas de movimento (a chamada “instabilidade de Ostrogradsky”, vide (Ostrogradsky, 1850) e (Motohashi; Suyama, 2015)). Para sistemas não-degenerados (sem vínculos), a construção de Ostrogradsky pode tratar sistemas de ordem superior em derivadas, por uma redefinição nas coordenadas e momentos generalizados, descrita, por exemplo, em (Woodard, 2015), embora o problema da instabilidade continue. Entretanto, para sistemas degenerados como as teorias de calibre, não há na literatura, até onde sabemos, uma generalização sistemática desse procedimento.

Em teorias de calibre, nas quais a ação do sistema não muda sob certas transformações locais, essa dificuldade pode ser contornada, por meio de uma decomposição geométrica (gradientes

e rotacionais) dos campos das teorias nas chamadas variáveis de helicidade, as quais são compactadas num número reduzido de invariantes de calibre, também conhecidos como variáveis de Bardeen (vide (Jaccard; Maggiore; Mitsou, 2013) e (Dalmazi; Santos, 2021)). Frente a essa possibilidade, no decorrer deste trabalho analisamos teorias de spin-0 e spin-1 de ordem superior em derivadas. As análises para teorias de ordem superior em derivadas foram feitas à la Bardeen, como uma introdução ao estudo de teorias de ordem superior. Futuramente, essas análises podem ser utilizadas para embasar um formalismo hamiltoniano para teorias degeneradas de ordem superior, sem que seja necessário introduzir campos auxiliares para baixar a ordem das teorias, sendo aplicações interessantes por termos um número reduzido de campos.

Tomamos como ponto de partida o formalismo hamiltoniano de Dirac, no capítulo 2. Nesse capítulo, é feita uma breve revisão dos formalismos lagrangiano e hamiltoniano, para que seja introduzido o chamado “algoritmo de Dirac-Bergmann”, que será ilustrado por um exemplo adaptado de (Sundermeyer, 1982). Também é apresentado o formalismo no contexto da teoria de campos, onde generalizamos os conceitos introdutórios para sistemas com um número infinito de graus de liberdade.

No capítulo 3, apresentamos a decomposição em helicidades, para análise do conteúdo físico de teorias de rank-1 e rank-2, em $D = 2 + 1$ dimensões. Tal decomposição nos permite identificar os graus de liberdade propagantes e não propagantes da teoria. Após decompostos, os campos foram compactados em um número reduzido de grandezas invariantes de calibre (vide (Jaccard; Maggiore; Mitsou, 2013)).

Os conceitos expostos nos capítulos 2 e 3 serão aplicados a teorias de segunda ordem, no capítulo 4. Exemplificaremos o método de Dirac e a decomposição em helicidades e invariantes de calibre para a teoria de Maxwell, para uma teoria vetorial trivial, que serve como base para a teoria que descreve um campo escalar massivo, de quarta ordem, e para uma teoria tensorial trivial, que serve como base para a teoria de Maxwell de quarta ordem, em adição à teoria de Maxwell usual.

No quinto capítulo, apresentamos brevemente o problema de teorias de ordem superior em derivadas. Apesar dos avanços no estudo dessas teorias, não é conhecida uma generalização que se assemelhe ao algoritmo de Dirac para teorias de ordem superior. De fato, segundo (Banerjee; Mukherjee; Paul, 2011), “é notável que os vastos recursos de análise hamiltoniana de invariâncias de calibre disponíveis na literatura estão quase confinados no reino dos sistemas lagrangianos usuais”, uma vez que, apesar do avanço no estudo de teorias de ordem superior, sua análise hamiltoniana ainda tem questões a serem abordadas. Uma dessas questões se relaciona ao fato de que, enquanto em teorias de segunda ordem os vínculos primários de primeira classe geram transformações de gauge independentes, não temos análises que provem que o mesmo ocorre em teorias de ordem superior. Logo, ainda no quinto capítulo, analisamos as teorias pela decomposição em helicidades e invariantes de calibre.

2 ANÁLISE HAMILTONIANA DE SISTEMAS FÍSICOS VINCULADOS

2.1 O FORMALISMO HAMILTONIANO

Seja $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ uma função lagrangiana, dada pela diferença da energia cinética e energia potencial da teoria, dependente de suas coordenadas generalizadas e suas respectivas velocidades, podemos determinar as equações de Euler-Lagrange¹, usadas para obter as equações de movimento no formalismo lagrangiano:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, N), \quad (1)$$

com ação dada por:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt. \quad (2)$$

A trajetória real de uma teoria lagrangiana, num espaço de configuração com dimensão N , ocorre quando a ação é mínima. Dessa forma, determinamos o princípio da mínima ação:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0. \quad (3)$$

É possível reescrever as equações de Euler-Lagrange (1) na forma:

$$W_{ij} \ddot{q}_i \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_i = - \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (4)$$

Note que as acelerações $\ddot{q}_i$ podem ser determinadas unicamente em função das coordenadas e das velocidades generalizadas se e somente se a matriz $N \times N$ hessiana $\mathbb{W} = (W_{ij})$, com elementos

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \quad (5)$$

é inversível, ou seja, $\det \mathbb{W} \neq 0$.

no decorrer desse trabalho, focamos na formulação hamiltoniana, onde o movimento de um sistema pode ser representado por uma curva no espaço de fase composto por $2N$ variáveis independentes, dadas pelas coordenadas generalizadas q_i da partícula e seus momentos conjugados, definidos por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (6)$$

¹ A dedução das equações de Euler-Lagrange pode ser encontrada detalhadamente em (Lemos, 2007). Em particular devemos supor que $\delta q(t) = 0$ em $t = t_1$ e $t = t_2$.

Se o determinante da matriz hessiana $\mathbb{W}$ for nulo, essa matriz é singular, e essa característica está associada, em geral, com a presença de vínculos da forma:

$$\phi_A(q_i, p_i) = 0 \quad (m = 1, \dots, N). \quad (7)$$

Aqueles advindos diretamente da definição dos momentos (6) são chamados vínculos primários. Se o jacobiano da transformação $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, p)$, dado por $\det \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right\|$, não for nulo, os momentos canônicos em (6) são inversíveis, e obtêm-se uma relação coincidente à condição sobre a matriz hessiana:

$$\det \left\| \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j} \right\| = \det \left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right\| = \det \mathbb{W} \neq 0. \quad (8)$$

Assim, se a matriz hessiana for inversível, pode-se expressar as velocidades generalizadas $\dot{q}_i$ unicamente em termos dos momentos conjugados e coordenadas generalizadas. Então, é possível substituir a função lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ por uma função hamiltoniana canônica $H_c(q_i, p_i, t)$, mediante a transformação de Legendre:

$$H_c(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (9)$$

e a evolução do sistema físico é representada no espaço de fase descrito pelas $2N$ coordenadas (q_j, p_j) . As $2N$ equações canônicas de Hamilton são dadas por:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} \quad (i = 1, \dots, N), \quad (10a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, N). \quad (10b)$$

Estas $2N$ equações determinam a dinâmica do sistema físico no espaço de fase, dadas as condições $(q_i(0), p_i(0)) = (q_{i0}, p_{i0})$.

As equações de Hamilton e as equações de Euler-Lagrange têm como diferença fundamental o espaço em que operam: enquanto as equações de Euler-Lagrange operam no espaço de configuração, com variáveis q_i e $\dot{q}_i$, as equações de Hamilton operam no espaço de fase, que depende das variáveis q_i e p_i da teoria. Dessa forma, as equações de Euler-Lagrange resultam em um sistema de equações diferenciais de segunda ordem, que exige que sejam especificadas as condições iniciais para q_i e $\dot{q}_i$, e as equações de Hamilton resultam em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, especificadas pelas condições iniciais de q_i e p_i .

2.1.1 Parênteses de Poisson e as equações de Hamilton

Dadas duas grandezas dinâmicas, $F(q, p)$ e $G(q, p)$, pode-se definir o parêntese de Poisson entre estas variáveis como²:

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i}. \quad (11)$$

Assim, podemos obter os parênteses de Poisson entre as coordenadas e momentos canônicos:

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}, \quad (12)$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij} = -\{p_j, q_i\}, \quad (13)$$

e as equações de Hamilton (10a) e (10b) podem ser reescritas com o uso dos parênteses de Poisson:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_c\}, \quad (14a)$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_c\}. \quad (14b)$$

Para qualquer variável dinâmica $F(q, p)$, pode-se escrever a evolução temporal como:

$$\dot{F}(q, p) = \{F(q, p), H_c\}. \quad (15)$$

Os parênteses de Poisson satisfazem as seguintes propriedades, supondo três variáveis dinâmicas quaisquer (F, G, R) :

$$i) \{F, G\} = -\{G, F\}, \quad (16)$$

$$ii) \{F, GR\} = \{F, G\}R + G\{F, R\}, \quad (17)$$

$$iii) \{\{F, G\}, R\} + \{\{R, F\}, G\} + \{\{G, R\}, F\} = 0 \quad (\text{Identidade de Jacobi}). \quad (18)$$

2.2 SISTEMAS HAMILTONIANOS VINCULADOS

Para sistemas vinculados, onde $\det \mathbb{W} = 0$, abordamos a teoria formulada por Dirac em (Dirac, 1964), que estende a análise de sistemas hamiltonianos a sistemas que possuem vínculos. Como proposto em (Santos, 2018), suponha um sistema em que somente M das N velocidades $\dot{q}_i$ possam ser escritas como:

² Utilizamos a notação de Einstein, que consiste em omitir o símbolo de somatório, interpretando índices que se repetem como indicador desse somatório. Por exemplo:

$$\sum_j A_{ij} x_j \equiv A_{ij} x_j$$

$$\dot{q}_a = f_a(q_i, p_b) \quad (a, b = 1, \dots, M \leq N). \quad (19)$$

As $N - M$ velocidades restantes seguem indeterminadas no espaço de fase. Assim, temos os momentos canônicos:

$$p_a = g_a(q_i, \dot{q}_b) \quad (a, b = 1, \dots, M). \quad (20)$$

Além disso, temos ainda os $n = N - M$ vínculos entre as variáveis dinâmicas, denotados por:

$$\phi_A(q_i, p_a) = 0 \quad (A = 1, \dots, n). \quad (21)$$

Os n vínculos primários da teoria definem um subespaço Γ_p imerso no espaço de fase Γ , que restringe o movimento do sistema, inclusive suas condições iniciais.

É natural definir a chamada hamiltoniana primária em todo o espaço de fase Γ como

$$H_P = H_c + \lambda_A \phi_A, \quad (22)$$

onde os multiplicadores λ_A são, a priori, funções arbitrárias. Apesar da definição da hamiltoniana primária implicar que $H_c = H_P$ no subespaço Γ_p , a dinâmica da hamiltoniana primária é diferente da hamiltoniana canônica. A partir do princípio variacional (vide capítulo 2 de (Lemos, 2007)):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H_P) dt = 0, \quad (23)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-\delta q_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q_i} + \lambda_A \frac{\partial \phi_A}{\partial q_i} \right) + \delta p_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \lambda_A \frac{\partial \phi_A}{\partial p_i} \right) + \delta \lambda_A \phi_A \right] = 0, \quad (24)$$

pode-se determinar as equações de Hamilton sujeitas aos n vínculos $\phi_A(q, p) = 0$ como:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_A \frac{\partial \phi_A}{\partial p_i} = \{q_i, H_P\}, \quad (25a)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_A \frac{\partial \phi_A}{\partial q_i} = \{p_i, H_P\}, \quad (25b)$$

$$\phi_A = 0 \quad (A = 1, 2, \dots, n). \quad (25c)$$

Para que as equações de Hamilton considerem a contribuição dos vínculos $\phi_A = 0$ como em (25a) e (25b), não se pode igualar $\phi_A(q, p) = 0$ fortemente em (22), pois assim $H_P = H_c$. Dessa forma, será importante introduzir o conceito de igualdade fraca e igualdade forte.

Uma variável dinâmica é dita *fracamente nula* ($F(q, p) \approx 0$) se esta for nula apenas no subespaço Γ_p , ou seja:

$$F(q, p) \Big|_{\Gamma_p} = F(q_i, p_a, \phi_A = 0) \approx 0. \quad (26)$$

Por outro lado, uma variável dinâmica é dita ser *fortemente nula* ($F(q, p) = 0$) se for nula também em alguma vizinhança do subespaço Γ_p .

Como os vínculos se anulam no subespaço Γ_p e $\partial\phi_A/\partial p_i = \delta_{iA}$, as equações de vínculos serão escritas como igualdades fracas, pois cada vínculo ϕ_A não é identicamente nulo sobre todo o espaço de fase Γ :

$$\phi_A(q, p) \approx 0. \quad (27)$$

Para uma variável dinâmica qualquer $F(q, p)$, pode-se escrever a partir de (25a) e (25b) a evolução temporal:

$$\dot{F}(q, p) = \{F, H_P\} = \{F, H_c\} + \lambda_A \{F, \phi_A\}. \quad (28)$$

É importante salientar que a mudança de H_c para H_p é necessária, conforme (Dirac, 1964) para que as equações de movimento de Hamilton sejam equivalentes às de Euler-Lagrange.

2.2.1 Algoritmo de Dirac-Bergmann

Para manter a consistência dos sistemas vinculados, uma exigência é que os vínculos primários sejam mantidos no tempo, ou seja, $\dot{\phi}_A \approx 0$. Assim, com (28), são obtidas as condições de consistência:

$$\dot{\phi}_A = \{\phi_A, H_c\} + \lambda_B \{\phi_A, \phi_B\} \approx 0 \quad (A, B = 1, \dots, n). \quad (29)$$

As n equações (29) podem determinar alguns ou todos os multiplicadores λ_A , ou até mesmo levar a novos vínculos (secundários, terciários, ...), que também devem ser preservados no tempo gerando novas condições de consistência, formando um processo chamado *algoritmo de Dirac-Bergmann*, que deve ser repetido até que todos os multiplicadores sejam determinados ou até que a relação de consistência seja identicamente satisfeita, ou seja, sem que nenhum vínculo novo apareça.

Um vínculo primário da forma (27), sob a condição de consistência (29), pode levar a três casos:

1. As condições de consistência são identicamente satisfeitas ($0 \approx 0$) se:

$$\{\phi_A, H_c\} \approx 0 \quad e \quad \{\phi_B, \phi_A\} \approx 0.$$

Se todos os vínculos primários da teoria tiverem sua condição de consistência identicamente satisfeita, a teoria só conterá esses vínculos primários, e todos os multiplicadores de Lagrange permanecerão indeterminados.

2. As condições de consistência determinam univocamente os multiplicadores de Lagrange se a matriz $\mathbb{C}$:

$$C_{AB} = \{\phi_A, \phi_B\}$$

for não singular ($\det \mathbb{C} \neq 0$). Se isso ocorrer, e se $\mathbb{C}^{-1}$ for a inversa da matriz $\mathbb{C}$, é possível determinar os multiplicadores de Lagrange, a partir de (29), como:

$$\lambda_A = - (\mathbb{C}^{-1})_{AB} \{\phi_B, H_c\}. \quad (30)$$

3. As condições de consistência levam a vínculos secundários

$$\chi_r(q, p) \equiv \dot{\phi}_r(q, p) \approx 0 \quad (r = 1, \dots, m \leq n). \quad (31)$$

Aplicando as condições de consistência sobre cada um dos m vínculos secundários:

$$\dot{\chi}_r = \{\chi_r, H_c\} + \lambda_A \{\chi_r, \phi_A\} \approx 0 \quad (r = 1, \dots, m \leq n), \quad (32)$$

é possível recair em um dos três casos, continuando ou terminando o processo. O processo termina quando não houver mais nenhum novo vínculo, após um número finito de etapas.

2.2.2 Classificação dos vínculos

Todos os vínculos que decorrem do procedimento de manutenção no tempo dos vínculos primários podem ser chamados genericamente de secundários. A existência de vínculos leva a uma arbitrariedade que faz com que as variáveis dinâmicas não sejam completamente determinadas pelas condições iniciais sobre as coordenadas da teoria, exibindo um número maior de variáveis do que o número de graus de liberdade da teoria. Para compreender essa arbitrariedade, é necessário definir uma terminologia para os vínculos e para as funções dinâmicas.

Os vínculos podem ser classificados como:

1. **Vínculos de primeira classe:** são vínculos cujos parênteses de Poisson são fracamente nulos com todos os vínculos.
2. **Vínculos de segunda classe:** são vínculos com pelo menos um parêntese de Poisson não fracamente nulo com os vínculos.

A matriz C formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe independentes:

$$C_{\mu\nu} = \{\xi_\mu, \xi_\nu\} \quad (\mu, \nu = 1, \dots, j_2) \quad (33)$$

é não singular. A matriz C é antissimétrica, pela anticomutatividade dos parênteses de Poisson:

$$C_{\mu\nu} = \{\xi_\mu, \xi_\nu\} = -\{\xi_\nu, \xi_\mu\} = -C_{\nu\mu}, \quad (34)$$

o que implica que a ordem da matriz é par, pois o determinante de qualquer matriz antissimétrica de ordem ímpar é zero, o que tornaria a matriz C singular. Assim, deve haver um número par de vínculos de segunda classe.

Vínculos primários de primeira classe geram transformações de simetria (locais) da teoria, vide (Dirac, 1964). Em geral, os vínculos secundários de primeira classe também são geradores de calibre, mas há contra-exemplos, como em (Henneaux; Teitelboim, 1992). Na grande maioria dos casos, todos os vínculos de primeira classe geram transformações de simetria locais, que também são chamadas simetrias de calibre ou simetrias de gauge.

2.2.3 Contagem de graus de liberdade

É possível converter cada vínculo de primeira classe em um vínculo de segunda classe impondo um vínculo adicional de segunda classe para cada vínculo de primeira classe, chamados de condições de fixação de calibre. Inicialmente, sem a presença de vínculos, o espaço de fase Γ possui dimensão $2N$, referente a (q_i, p_i) com $i = 1, 2, \dots, N$. Colocando os vínculos fortemente a zero, permitimos que seja reescrita uma hamiltoniana reduzida H_r , importante no estudo da estabilidade clássica das teorias de campo. A implementação de condições de calibre reduz o espaço de fase, possibilitando a obtenção do número de graus de liberdade físicos de uma teoria em sua formulação hamiltoniana, dado por:

$$N_{DOF}^H = EF - SC - 2PC, \quad (35)$$

onde:

N_{DOF}^H : número de graus de liberdade (no formalismo hamiltoniano).

EF : dimensão do espaço de fase completo Γ ;

SC : número de vínculos de segunda classe;

PC : número de vínculos de primeira classe;

Para o formalismo lagrangiano, o número de graus de liberdade é coloquialmente definido como:

$$N_{DOF}^L = \frac{N_{DOF}^H}{2}. \quad (36)$$

2.2.4 Exemplo

De modo a ilustrar o uso do algoritmo de Dirac, será apresentado o exemplo adaptado de (Sundermeyer, 1982), onde se considera a lagrangiana:

$$L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + \alpha\dot{q}_1q_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2, \quad (37)$$

onde α e β são constantes arbitrárias tais que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. A matriz hessiana dessa lagrangiana, dada por:

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

é singular para todos os valores de α e β , pois não há um termo cinético para q_2 .

As equações de Euler-Lagrange (1) podem ser escritas como:

$$E_1 = \ddot{q}_1 + \alpha\dot{q}_2 - \beta(q_1 - q_2) = 0, \quad (39a)$$

$$E_2 = \alpha\dot{q}_1 - \beta(q_1 - q_2) = 0, \quad (39b)$$

onde (39b) representa um vínculo lagrangiano, pois em $t = 0$ vincula as condições iniciais $\dot{q}_1(0)$ e $q_1(0)$.

Os momentos canônicos (6) são:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 + \alpha q_2, \quad (40a)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = 0. \quad (40b)$$

Dessa forma, o vínculo primário desse sistema, no formalismo hamiltoniano, é o momento canônico p_2 :

$$\phi = p_2 \approx 0. \quad (41)$$

A hamiltoniana canônica (9) desse sistema pode ser escrita como:

$$H_c = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L = \frac{(p_1 - \alpha q_2)^2}{2} - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2, \quad (42)$$

e a hamiltoniana primária (22), com o vínculo (41), é dada por:

$$H_P = H_c + \lambda\phi = \frac{1}{2}(p_1 - \alpha q_2)^2 - \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 + \lambda p_2. \quad (43)$$

Pelo algoritmo de Dirac-Bergmann, o vínculo primário (41) deve ser preservado no tempo, pela condição de consistência:

$$\dot{\phi} = \{\phi, H_p\} = \alpha(p_1 - \alpha q_2) - \beta(q_1 - q_2) \approx 0. \quad (44)$$

A condição de consistência (44) leva ao vínculo secundário:

$$\chi = \alpha(p_1 - \alpha q_2) - \beta(q_1 - q_2) \approx 0, \quad (45)$$

que deve ser preservado no tempo pela condição

$$\dot{\chi} = \{\chi, H_c\} + \lambda \{\chi, \phi\} \approx 0. \quad (46)$$

Resolvidos os parênteses de Poisson, obtém-se a condição de consistência:

$$\dot{\chi} = \alpha[\beta(q_1 - q_2)] - \beta(p_1 - \alpha q_2) + (\beta - \alpha^2)\lambda \approx 0. \quad (47)$$

Levando a dois casos, a depender de α e β .

Caso (1): $\beta \neq \alpha^2$

A condição de consistência (47) determina λ univocamente como:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\beta - \alpha^2} [(p_1 - \alpha q_2) - \alpha(q_1 - q_2)]. \quad (48)$$

Os vínculos ϕ e χ são de segunda classe, pois $\{\chi, \phi\} = \beta - \alpha^2 \neq 0$, e as equações de movimento advindas de (43) são:

$$\dot{q}_1 = p_1 - \alpha q_2 \quad , \quad \dot{q}_2 = \lambda(t) = \frac{\beta}{\beta - \alpha^2} [(p_1 - \alpha q_2) - \alpha(q_1 - q_2)], \quad (49)$$

$$\dot{p}_1 = \beta(q_1 - q_2) \quad , \quad \dot{p}_2 = \alpha(p_1 - \alpha q_2) - \beta(q_1 - q_2) = \chi = 0, \quad (50)$$

além do vínculo $\phi = p_2 = 0$. Multiplicando $\dot{q}_1$ por α , obtemos:

$$\alpha \dot{q}_1 = \alpha(p_1 - \alpha q_2) = \chi + \beta(q_1 - q_2) \approx \beta(q_1 - q_2), \quad (51)$$

devido ao vínculo $\chi \approx 0$. Logo, de (51) temos que:

$$\beta(q_1 - q_2) = \alpha \dot{q}_1. \quad (52)$$

Substituindo em (49), na equação para $\lambda(t)$, obtemos:

$$\dot{q}_2 = \dot{q}_1. \quad (53)$$

Podemos também derivar $\dot{q}_1$ no tempo e usando (49), (50), (52) e (53) temos:

$$\ddot{q}_1 = \dot{p}_1 - \alpha \dot{q}_2 = \beta(q_1 - q_2) - \alpha \dot{q}_2 = \alpha(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0. \quad (54)$$

Logo usando (53) temos $\ddot{q}_2 = \ddot{q}_1 = 0$. Das equações acima temos a solução geral:

$$q_1(t) = \frac{\beta}{\alpha}(c_1 - c_2)t + c_1, \quad (55a)$$

$$q_2(t) = \frac{\beta}{\alpha}(c_1 - c_2)t + c_2, \quad (55b)$$

onde c_1 e c_2 são duas constantes indeterminadas. O número de graus de liberdade de uma teoria hamiltoniana pode ser dado pelo número de constantes indeterminadas. Portanto, quando $\beta \neq \alpha^2$, a teoria tem 2 graus de liberdade hamiltonianos, das constantes c_1 e c_2 , correspondendo a 1 grau de liberdade lagrangiano. Note que essa contagem é compatível com (35), pois temos dois vínculos de segunda classe (χ e ϕ) e nenhum de primeira classe.

Caso (2): $\beta = \alpha^2$

A condição de consistência para o vínculo secundário é trivialmente satisfeita:

$$\dot{\chi} = -\alpha\chi \approx 0. \quad (56)$$

Observa-se que ambos os vínculos ϕ e χ são de primeira classe pois $\{\chi, \phi\} = \beta - \alpha^2 = 0$.

Além dos vínculos $\phi \approx 0$ e $\chi \approx 0$ que implicam em

$$p_2 \approx 0 \quad ; \quad p_1 \approx \alpha q_1. \quad (57)$$

temos $\dot{q}_2 = \lambda(t)$ e $\dot{q}_1 = p_1 - \alpha q_2 = \alpha(q_1 - q_2)$.

Como não podemos determinar q_2 , já que $\lambda(t)$ é arbitrária, não temos acesso também a $q_1(t)$. Dessa forma, o sistema não apresenta conteúdo físico.

Quando $\beta = \alpha^2$, a ação é invariante pelas transformações:

$$\delta q_1 = \alpha \Lambda(t), \quad (58a)$$

$$\delta q_2 = \alpha \Lambda(t) - \dot{\Lambda}. \quad (58b)$$

De (58a), podemos escrever o parâmetro $\Lambda(t)$ em termos de δq_1 , como $\Lambda(t) = \delta q_1 / \alpha$. Assim, podemos reescrever δq_2 como:

$$\delta q_2 = \alpha \frac{\delta q_1}{\alpha} - \frac{\delta \dot{q}_1}{\alpha} \Rightarrow \delta \left[q_2 + \frac{\dot{q}_1}{\alpha} - q_1 \right] \equiv \delta I = 0. \quad (59)$$

onde I é um invariante. Neste primeiro momento, não entraremos em detalhes sobre os invariantes, mas o exemplo serve como introdução ao que será abordado no capítulo 3, sobre o papel dos invariantes de gauge na descrição de modelos com simetria de calibre, como é o caso de $\beta = \alpha^2$.

Nesse caso, a menos de uma derivada no tempo, podemos escrever a lagrangiana (37) de forma quadrática no invariante de calibre:

$$L = \frac{\alpha^2}{2} I^2. \quad (60)$$

Logo, a equação de movimento $\frac{\partial S}{\partial I} = 0$ nos diz que $I = 0$. Portanto, a teoria não apresenta conteúdo físico quando $\beta = \alpha^2$. Assim como no caso 1, a contagem é compatível com (35), pois temos dois vínculos de primeira classe (χ e ϕ) e nenhum de segunda classe.

2.3 TEORIA DE CAMPOS

Nessa seção, generalizaremos os conceitos anteriores para tratar de sistemas com um número infinito e contínuo de graus de liberdade, descritos por campos clássicos. Para um sistema contínuo, em D dimensões, a lagrangiana é dada pela integral de uma densidade lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A, x, t)$, ou seja:

$$L = \int d^{D-1}x \mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A, x, t). \quad (61)$$

Com ação:

$$S = \int dt \int d^{D-1}x \mathcal{L}(\varphi_A, \partial_\mu \varphi_A, x, t). \quad (62)$$

Com o princípio variacional de Hamilton, obtemos as equações de Euler-Lagrange³:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_A)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_A} = 0. \quad (63)$$

O momento canonicamente conjugado a φ_A é

$$\pi_A(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_A(x)}. \quad (64)$$

Podemos definir a densidade hamiltoniana canônica:

$$\mathcal{H}_c(\varphi_A, \pi_A) = \pi_A \dot{\varphi}_A - \mathcal{L}. \quad (65)$$

Se nem todas as velocidades $\dot{\varphi}_A$ puderem ser determinadas em termos dos momentos π_A , em

³ A partir desse ponto, vamos escrever as derivadas parciais na forma ∂_μ , onde $\mu = 0, j$, e, supondo uma coordenada espacial x , temos:

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x}.$$

(64), aparecem vínculos $\phi_A(\varphi, \pi) \approx 0^4$. A hamiltoniana canônica é definida por:

$$H(\varphi_A, \pi_A) = \int d^{D-1}x \mathcal{H}_c(\varphi_A, \varphi_A, \nabla\varphi_A, \nabla\pi_A). \quad (66)$$

Podemos expressar uma variável dinâmica $A[\varphi, \pi]$ em termos de sua densidade:

$$A[\varphi, \pi] = \int d^{D-1}x \mathcal{A}. \quad (67)$$

Como a variável dinâmica é um funcional, sua derivada funcional é:

$$\frac{\delta A[\varphi, \pi]}{\delta \varphi_A(y)} = \int d^{D-1}x \left[\frac{\partial \mathcal{A}(x)}{\partial \varphi_B(x)} \frac{\delta \varphi_B(x)}{\delta \varphi_A(y)} + \frac{\partial \mathcal{A}(x)}{\partial (\partial_j \varphi_B(x))} \frac{\delta (\partial_j \varphi_B(x))}{\delta \varphi_A(y)} \right]. \quad (68)$$

Onde $\frac{\delta \varphi_B(x)}{\delta \varphi_A(y)} = \delta_{AB} \delta^D(x - y)$. Podemos, então, deduzir as equações de Hamilton:

$$\dot{\varphi}_A = \frac{\delta H_c[\varphi, \pi]}{\delta \pi_A} = \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \pi_A} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial (\partial_j \pi_A)}, \quad (69a)$$

$$\dot{\pi}_A = \frac{\delta H_c[\varphi, \pi]}{\delta \varphi_A} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial \varphi_A} + \partial_j \frac{\partial \mathcal{H}_c}{\partial (\partial_j \varphi_A)}, \quad (69b)$$

e redefinimos os parênteses de Poisson:

$$\{F(y), G(z)\} = \int d^{D-1}x \left[\frac{\delta F(y)}{\delta \varphi_A(x)} \frac{\delta G(z)}{\delta \pi_A(y)} - \frac{\delta F(y)}{\delta \pi_A(x)} \frac{\delta G(z)}{\delta \varphi_A(y)} \right]. \quad (70)$$

Na presença de vínculos, repetimos o algoritmo de Dirac-Bergmann, com vínculos $\phi_A \approx 0$, e hamiltoniana primária:

$$H_P = \int d^{D-1}x \mathcal{H}_p \quad , \quad \mathcal{H}_p = \mathcal{H}_c + \lambda_A(x) \phi_A(x). \quad (71)$$

Essa generalização será importante para a análise das teorias que serão abordadas nos próximos capítulos. Uma discussão mais detalhada sobre o formalismo hamiltoniano e sua generalização para a teoria de campos pode ser encontrada em (Sundermeyer, 1982) e (Lemos, 2007).

⁴ A existência de vínculos torna a transformada de Legendre de $(\varphi_A, \dot{\varphi}_A)$ para (φ_A, π_A) singular, pois o Jacobiano, que é proporcional a

$$\det \left(\frac{\partial \pi^A(y)}{\partial \dot{\varphi}_B(x)} \right) = \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\varphi}_A(x) \partial \dot{\varphi}_B(y)} \right) = \det(W_{AB}(x, y))$$

é nulo, onde $W_{AB}(x, y)$ é a matriz hessiana, para um número infinito de graus de liberdade.

3 INTRODUÇÃO ÀS VARIÁVEIS DE BARDEEN

Neste capítulo, introduziremos o conceito das variáveis de Bardeen, explicitando as simetrias de calibre, e a necessidade de expressar os graus de liberdade em termos de quantidades invariantes de calibre, como proposto por James Bardeen, vide (Bardeen, 1980). Esse formalismo é amplamente utilizado em teorias de perturbação cosmológica, e recentemente vem sendo utilizado em modelos de gravidade linearizada.

3.1 DECOMPOSIÇÃO EM HELICIDADES

Para definir as variáveis de Bardeen (invariantes de calibre), é conveniente decompor os campos originais das teorias, de modo a expressá-los em termos de uma decomposição ortogonal¹. Esse método foi utilizado com êxito, por exemplo, em (Deser; Jackiw; Templeton, 1982), para análise do conteúdo físico de teorias de spin-1 e spin-2, em $D = 2 + 1$ dimensões. Usaremos, no decorrer do trabalho, as decomposições em helicidades para campos vetoriais A_μ e campos tensoriais simétricos $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$. Também faremos a decomposição da transformação de calibre das teorias, para encontrar os invariantes de calibre. Dessa forma, esperamos compactar as variáveis de helicidade em um número reduzido de invariantes de calibre, de modo a reescrever a teoria como uma forma quadrática dos invariantes. Poderemos, por fim, determinar os graus de liberdade propagantes e não-propagantes da teoria.

3.2 INVARIÂNCIA DE CALIBRE

A proposta de Bardeen decorre de um problema na interpretação física de perturbações cosmológicas, sendo relacionado com a liberdade de fazer transformações de calibre. Para resolver esse problema, Bardeen apresenta uma estrutura completa invariante por transformações de calibre, seguindo o formalismo matemático desenvolvido por Gerlach e Sengupta, em (Gerlach; Sengupta, 1979).

Neste trabalho, ao analisar as teorias de calibre pelo formalismo de Bardeen, buscamos combinações de campos invariantes por transformações de calibre. Compactaremos os campos decompostos em um número reduzido de grandezas invariantes de calibre, conhecidas também como variáveis de Bardeen. O número de invariantes de calibre (N_I) de uma teoria é dado por:

$$N_I = N_{eq} - N_P, \quad (1)$$

¹ Qualquer tensor de rank-1 ou superior pode ser decomposto em componentes transversais e longitudinais ao momento espacial.

onde N_{eq} representa o número de equações independentes que aparecem na definição da transformação de calibre, e N_P é o número de parâmetros de calibre independentes da teoria. Após determinar os invariantes de forma construtivista a partir das transformações de calibre da teoria correspondente, expressamos a lagrangiana como uma função quadrática dos invariantes e determinamos o número de graus de liberdade propagantes e não-propagantes da teoria. Os invariantes serão denotados por I_M ($M = 1, 2, \dots, N_I$).

4 APLICAÇÕES EM TEORIAS DE SEGUNDA ORDEM

Para ilustrar os conceitos apresentados até agora, é interessante nos voltarmos para teorias simples. Nesse capítulo, aplicamos o método de Dirac e a decomposição em helicidades e invariantes de calibre para analisar o conteúdo físico da teoria de Maxwell para o eletromagnetismo, uma teoria vetorial trivial, e uma teoria tensorial trivial, todas de segunda ordem em derivadas.

4.1 LAGRANGIANA DE MAXWELL

Começaremos nossa discussão com uma teoria bastante importante para a física, a teoria eletromagnética, descrita pela lagrangiana de Maxwell:

$$\mathcal{L}_{MAX} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2[A_\mu] \quad , \quad \mu, \nu = 0, j \quad (j = 1, \dots, D-1), \quad (1)$$

onde $F_{\mu\nu}[A_\mu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor eletromagnético da teoria. Como $F_{\mu\nu}[A_\mu] = F_{\mu\nu}(A_\mu + \partial_\mu \phi)$, onde $\phi = \phi(x)$ é uma função qualquer, dizemos que $\mathcal{L}_{MAX}$ tem simetria de calibre, e essa simetria trará consequências para a estrutura do espaço de fase e para a existência de vínculos como veremos a seguir.

4.1.1 Formalismo hamiltoniano de Dirac

Podemos separar as componentes espaciais e temporal, e reescrever (1) como¹:

$$\mathcal{L}_{MAX} = \frac{1}{2}\dot{A}_k^2 - \dot{A}_k \partial_k A_0 + \frac{1}{2}(\partial_k A_0)^2 - \frac{1}{4}F_{kj}^2 \quad , \quad k, j = 1, 2, \dots, D-1. \quad (2)$$

Os momentos canônicos são:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0, \\ \pi_k &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_k} = \dot{A}_k - \partial_k A_0. \end{aligned} \quad (3)$$

A teoria tem um vínculo primário:

$$\phi(x) = \pi_0(x) \approx 0. \quad (4)$$

A densidade hamiltoniana canônica é dada por:

¹ Há outras formas de escrever $\mathcal{L}_{MAX}$ fazendo integrações por partes. Neste trabalho sempre desprezaremos termos de superfície (integrais de derivadas totais) supondo que os campos vão a zero no infinito.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \pi_0 \dot{A}_0 + \pi_k \dot{A}_k - \mathcal{L} \\
&= \pi_k \dot{A}_k - \mathcal{L} \\
&= \frac{1}{2} \pi_k \pi_k + \pi_k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} F_{kj}^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

A hamiltoniana primária, considerando o vínculo, é dada por:

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H}_c + \lambda \phi) = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi_k \pi_k + \pi_k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} F_{kj}^2 + \lambda \phi \right], \tag{6}$$

onde $\lambda = \lambda(x^\mu)$ é uma função arbitrária a princípio, sendo um multiplicador hamiltoniano. A condição de consistência para o vínculo primário $\phi \approx 0$ é dada por:

$$\dot{\phi}(y) = \int d^{D-1}x [\{\phi(y), \mathcal{H}_c(x)\} + \lambda(x) \{\phi(y), \phi(x)\}] \approx 0. \tag{7}$$

Resolvendo os parênteses de Poisson, chegamos a:

$$\begin{aligned}
\{\phi(y), \mathcal{H}_c(x)\} &= \{\pi_0(y), \mathcal{H}_c(x)\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(x)}{\partial A_0(y)} = -\pi_k(x) \partial_k^{(x)} \delta^D(x-y), \\
\{\phi(y), \phi(x)\} &= \{\pi_0(y), \pi_0(x)\} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo esses resultados em (7):

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}(y) &= \int d^{D-1}x \left[-\pi_k(x) \partial_k^{(x)} \right] \delta^D(x-y), \\
&= \int d^{D-1}x [\partial_k \pi_k(x)] \delta^D(x-y) = \partial_k \pi_k(y),
\end{aligned} \tag{9}$$

obtemos o vínculo secundário (lei de Gauss):

$$\chi = \partial_k \pi_k \approx 0. \tag{10}$$

Continuamos o algoritmo aplicando a condição de consistência sobre o vínculo secundário $\dot{\chi} \approx 0$:

$$\dot{\chi} = \int d^{D-1}x [\{\chi(y), \mathcal{H}_c(x)\} + \lambda(x) \{\chi(y), \phi(x)\}] \approx 0. \tag{11}$$

Resolvendo os parênteses de Poisson, chegamos a:

$$\begin{aligned}
\{\chi(y), \mathcal{H}_c(x)\} &= \partial_k^{(y)} \{\pi_k(y), \mathcal{H}_c(x)\} = -\partial_k^{(y)} \frac{\partial \mathcal{H}_c(x)}{\partial A_k(y)} \\
&= -\partial_k^{(y)} \left[\partial_j A_k(x) \partial_j^{(x)} - \partial_k A_j(x) \partial_j^{(x)} \right] \delta^D(x-y), \\
\{\chi(y), \phi(x)\} &= \partial_k^{(y)} \{\pi_k(y), \pi_0(x)\} = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Substituindo esses resultados em (11):

$$\begin{aligned}\dot{\chi}(y) &= \int d^{D-1}x \left[\partial_j A_k(x) \partial_j^{(x)} - \partial_k A_j(x) \partial_j^{(x)} \right] \partial_k^{(y)} \delta^D(x-y), \\ &= \int d^{D-1}x \left[\nabla^2 \partial_k A_k(x) - \nabla^2 \partial_j A_j(x) \right] \delta^D(x-y) = \nabla^2 \partial_k A_k(y) - \nabla^2 \partial_j A_j(y) = 0.\end{aligned}\tag{13}$$

Como a condição de consistência para o vínculo secundário é identicamente satisfeita, não há mais vínculos na teoria, e podemos classificar os vínculos, observando que:

$$\begin{aligned}\{\phi(y), \phi(x)\} &= 0 = \{\chi(y), \chi(x)\}, \\ \{\phi(y), \chi(x)\} &= 0 = -\{\chi(y), \phi(x)\}.\end{aligned}\tag{14}$$

Logo, ambos os vínculos $\phi \approx 0$ e $\chi \approx 0$ são de primeira classe e o multiplicador $\lambda(x)$ fica indeterminado. Podemos, enfim, fazer a contagem de graus de liberdade. O campo vetorial A_μ possui D componentes, assim como o momento π_μ . Com os vínculos de primeira classe $\phi \approx 0$ e $\chi \approx 0$ fazemos a contagem no espaço de fase de acordo com (35):

$$N_{DOF}^H = 2D - 2(1 + 1) = 2(D - 2),\tag{15}$$

ou $N_{DOF}/2 = (D - 2)$ no formalismo lagrangiano. Em particular, temos 2 graus de liberdade lagrangianos, em $D = 4$ dimensões, que correspondem às duas helicidades ± 1 do fóton.

Usando os vínculos como igualdades fortes², podemos escrever a hamiltoniana no chamado espaço de fase reduzido, de forma explicitamente definido positiva. De (6) temos:

$$\begin{aligned}H^{(pr)} &= \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi_j \pi_j + \frac{1}{4} F_{kj} F_{kj} \right], \\ &= \frac{1}{2} \int d^{D-1}x \left\{ \pi_k \delta_{kj} \pi_j - A_k (\nabla^2 \delta_{kj} - \partial_k \partial_j) A_j \right\}.\end{aligned}\tag{16}$$

² Podemos igualar os vínculos fortemente a zero se:

- Os vínculos forem de segunda classe;
- Os vínculos de primeira classe forem sujeitos a uma condição de fixação de calibre consistente.

Estas condições são obtidas pela definição dos chamados parênteses de Dirac (para mais detalhes, vide (Dirac, 1964)), dados por:

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \xi_\mu\} C_{\mu\nu}^{-1} \{\xi_\nu, G\},$$

onde $C_{\mu\nu}^{-1}$ é a inversa da matriz formada pelos parênteses de Poisson dos vínculos de segunda classe independentes. Os parênteses de Dirac dos vínculos de segunda classe $\xi_\mu \approx 0$ com uma função arbitrária qualquer $F(q, p)$ são nulos, e os parênteses de Dirac de qualquer função arbitrária de primeira classe $G(q, p)$ com qualquer função arbitrária $F(q, p)$ satisfazem a $\{G, F\}^* \approx \{G, F\}$. Dessa forma, a evolução temporal de uma variável dinâmica, após calculados todos os parênteses da teoria, é dada por:

$$\dot{F} = \{F, H_c\}^*.$$

Introduzindo os operadores projetores³ de spin-0 e spin-1, dados por:

$$\omega_{kj} = \frac{\partial_k \partial_j}{\nabla^2} \quad , \quad \theta_{kj} = \delta_{kj} - \omega_{kj}. \quad (17)$$

O vínculo primário $\chi = \partial_j \pi_j = 0$ leva a $\omega_{kj} \pi_{kj} = 0$, e podemos escrever a hamiltoniana reduzida como função apenas das componentes transversas (especialmente) dos momentos e dos campos:

$$H^{pr} = \frac{1}{2} \int d^{D-1}x [\pi_k \theta_{kj} \pi_j - A_k \nabla^2 \theta_{kj} A_j] = \frac{1}{2} \int d^{D-1}x [\pi_j^T \pi_j^T + \partial_k A_j^T \partial_k A_j^T]. \quad (18)$$

Onde $\pi_j^T = \theta_{jk} \pi_k$ e $A_j^T = \theta_{jk} A_k$.

A hamiltoniana primária reduzida é positivo definida, garantindo a estabilidade clássica da teoria, e apenas as $(D - 2)$ componentes transversas de π_j e A_j contribuem em (18).

4.1.2 Decomposição em helicidades

Vamos escrever o campo A_μ em variáveis de helicidade como:

$$A_\mu = \begin{cases} A_0 = \psi \\ A_j = v_j^T + \partial_j u \end{cases}. \quad (19)$$

Note que $\partial_j v_j^T = 0$, e (19) é inversível, pois sempre supomos que a equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$ só possui solução trivial $f = 0$. Ou seja, o Laplaciano é inversível, embora não localmente⁴:

$$\psi = A_0 \quad ; \quad u = \frac{\partial_j A_j}{\nabla^2} \quad ; \quad v_j^T = \theta_{jk} A_k.$$

A lagrangiana pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{MAX} = \frac{1}{2} (\partial_0 A_j - \partial_j A_0)^2 - \frac{1}{4} (\partial_k A_j - \partial_j A_k)^2. \quad (20)$$

³ Note que $\theta_{ij} \theta_{jk} = \theta_{ik}$ e $\omega_{ij} \omega_{jk} = \omega_{ik}$. Os projetores θ_{ij} e ω_{ij} projetam um vetor na direção transversal e um vetor na direção longitudinal, respectivamente. Além disso, $\omega_{ij} \theta_{jk} = 0 = \theta_{ij} \omega_{jk}$. Por fim, $\delta^{ij} \theta_{ij} = D - 2$ e $\delta^{ij} \omega_{ij} = 1$.

⁴ Por exemplo, em 3 dimensões espaciais:

$$\nabla^2 \int \frac{d^3 x' g(x', y', z')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} = g(x, y, z),$$

uma vez que a função de Green $\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$ é a solução da equação de Poisson:

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}').$$

com $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ representando a função delta tridimensional. Assim, como $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ pode ser escrita como a identidade $\mathbb{1}$, a função $\frac{1}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$ é o inverso do Laplaciano $1/\nabla^2$.

Substituindo (19) em (20):

$$\mathcal{L}_{MAX} = \frac{1}{2}(\dot{v}_j^T + \partial_j \dot{u} - \partial_j \psi)^2 - \frac{1}{4}(\partial_k v_j^T - \partial_j v_k^T)^2. \quad (21)$$

Podemos redefinir a variável ψ , no primeiro termo, para eliminar a derivada temporal em u , escrevendo

$$\tilde{\psi} = -\dot{u} + \psi. \quad (22)$$

Assim, usando $\partial_j v_j^T = 0$, temos:

$$\mathcal{L}_{MAX} = \frac{1}{2}(\dot{v}_j^T + \partial_j \tilde{\psi})^2 + \frac{1}{2}v_j^T \nabla^2 v_j^T. \quad (23)$$

Finalmente reescrevemos a lagrangiana em termos das variáveis de helicidade, como:

$$\mathcal{L}_{MAX} = \frac{v_j^T \square v_j^T}{2} - \frac{\tilde{\psi} \nabla^2 \tilde{\psi}}{2}, \quad (24)$$

onde $\square \equiv -\partial_t^2 + \nabla^2$ é o operador d'Alembertiano. Antes de comentarmos sobre as equações de movimento de (24), vamos identificar os invariantes de calibre da teoria em função das variáveis de helicidade.

4.1.3 Invariantes de calibre (variáveis de Bardeen)

A lagrangiana de Maxwell é invariante sob a transformação:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \phi. \quad (25)$$

Temos apenas um parâmetro de calibre (ϕ), e o número de equações em (25) é D , logo o número de invariantes é dado pela fórmula (1):

$$N_I = D - 1. \quad (26)$$

Decompondo (25) em componentes temporal e espaciais:

$$\delta A_0 = \partial_0 \phi, \quad (27a)$$

$$\delta A_j = \partial_j \phi. \quad (27b)$$

Aplicando ∂_j em (27b), e sabendo que é possível inverter o laplaciano, podemos escrever:

$$\phi = \frac{\partial_j \delta A_j}{\nabla^2}. \quad (28)$$

Substituindo ϕ em (27a), temos que:

$$\delta A_0 = \partial_0 \frac{\partial_j \delta A_j}{\nabla^2} \Rightarrow \delta \left(A_0 - \partial_0 \frac{\partial_j A_j}{\nabla} \right) \equiv \delta I_0 = 0. \quad (29)$$

Temos então um invariante:

$$I_0 = \psi - \dot{u}. \quad (30)$$

Já para a parte espacial, podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \delta A_j &= \partial_j \phi = \frac{\partial_j \partial_k \delta A_k}{\nabla^2}, \\ \delta \left[\left(\delta_{jk} - \frac{\partial_j \partial_k}{\nabla^2} \right) A_k \right] &= \delta [\theta_{jk} A_k] \equiv \delta I_j^T = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

onde temos o invariante transverso:

$$I_j^T = \theta_{jk} A_k = \theta_{jk} (v_k^T + \partial_k u) = v_j^T. \quad (32)$$

Podemos reescrever a teoria em termos dessas variáveis de Bardeen, como:

$$\mathcal{L}_{MAX} = \frac{v_j^T \square v_j^T}{2} - \frac{\tilde{\psi} \nabla^2 \tilde{\psi}}{2} = \frac{I_j^T \square I_j^T}{2} + \frac{I_0 (-\nabla^2) I_0}{2}, \quad (33)$$

cujas equações de movimento:

$$\square v_j^T = 0, \quad (34a)$$

$$\nabla^2 I_0 = 0, \quad (34b)$$

implicam em $I_0 = 0$ (invariante de gauge não propagante), e $(D - 2)$ graus de liberdade propagantes satisfazendo a equação de onda eletromagnética. Em $D = 4$ temos as duas helicidades do fóton ± 1 .

Temos, então, $D - 2$ invariantes propagantes de v_j^T e 1 invariante não-propagante de I_0 , resultando nos $D - 1$ invariantes da teoria como esperávamos.

É natural buscarmos a relação entre os invariantes (I_j^T, I_0) e os campos eletromagnéticos $(\vec{E}, \vec{B})$. Primeiramente, notemos que $E_k = \partial_0 A_k - \partial_k A_0$. Logo, $\partial_k E_k = \partial_0 \partial_k A_k - \nabla^2 A_0 = \nabla^2 (\dot{u} - \psi) = -\nabla^2 I_0$; Enquanto $\partial_k F_{kj} = \nabla^2 A_j - \partial_j \partial_k A_k = \nabla^2 (v_j^T + \partial_j u) - \partial_j (\nabla^2 u) = \nabla^2 v_j^T$. Portanto, I_0 está ligado com a componente longitudinal de $\vec{E}$, enquanto v_j^T está ligado com a componente transversal de $\vec{B}$:

$$\begin{aligned}
I_0 &= -\frac{\partial_j E_j^2}{\nabla}, \\
I_j^T &= v_j^T = \frac{\partial_k F_{kj}}{\nabla^2}.
\end{aligned} \tag{35}$$

4.2 TEORIA VETORIAL TRIVIAL

Agora, partimos para uma teoria bem simples, que tratamos como uma introdução ao modelo escalar de quarta ordem. Vamos analisar a lagrangiana

$$\mathcal{L}_{VT} = \frac{(\partial^\mu A_\mu)^2}{2}, \quad \mu = 0, j \quad (j = 1, \dots, D-1). \tag{36}$$

Essa teoria, caracterizada como puro gauge, não possui conteúdo físico. Vamos demonstrar essa ausência de conteúdo físico por meio do formalismo hamiltoniano e da decomposição em helicidades e invariantes de calibre.

4.2.1 Formalismo hamiltoniano de Dirac

Separando as componentes espaciais e temporal, reescrevemos (36) como:

$$\mathcal{L}_{VT} = \frac{(\dot{A}_0)^2}{2} - \dot{A}_0 \partial_j A_j + \frac{(\partial_j A_j)^2}{2}. \tag{37}$$

Os momentos canônicos da teoria são:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = \dot{A}_0 - \partial_j A_j \Rightarrow \dot{A}_0 = \pi_0 + \partial_j A_j \\
\pi_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_j} = 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Temos, então, $D - 1$ vínculos primários:

$$\phi_j(x) \equiv \pi_j(x) \approx 0. \tag{39}$$

A teoria tem densidade hamiltoniana canônica dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \pi_\mu \dot{A}_\mu - \mathcal{L}, \\
&= \pi_0 \dot{A}_0 - \mathcal{L}, \\
&= \frac{1}{2} \pi_0 \pi_0 + \pi_0 \partial_j A_j.
\end{aligned} \tag{40}$$

A hamiltoniana primária, considerando os vínculos ϕ_j , é dada por:

$$H_P = \int d^{D-1}x (\mathcal{H}_c + \lambda_j \phi_j) = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi_0 \pi_0 + \pi_0 \partial_j A_j + \lambda_j \phi_j \right]. \quad (41)$$

A condição de consistência para os vínculos primários $\phi_k \approx 0$ é dada por:

$$\dot{\phi}_k(y) = \int d^{D-1}x [\{\phi_k(y), \mathcal{H}_c(x)\} + \lambda_j(x) \{\phi_k(y), \phi_j(x)\}]. \quad (42)$$

Resolvendo os parênteses de Poisson, chegamos a:

$$\begin{aligned} \{\phi_k(y), \mathcal{H}_c(x)\} &= \{\pi_k(y), \mathcal{H}_c(x)\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(x)}{\partial A_k(y)} = -\pi_0(x) \partial_k^{(x)} \delta^D(x-y), \\ \{\phi_k(y), \phi_k(x)\} &= \{\pi_k(y), \pi_k(x)\} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

Substituindo esses resultados em (42):

$$\int d^{D-1}x \left[-\pi_0(x) \partial_k^{(x)} \right] \delta^D(x-y) = \int d^{D-1}x \partial_k \pi_0(x) \delta^D(x-y) = \partial_k \pi_0(y). \quad (44)$$

Como $\partial_j \pi_0 = 0$ implica em $\partial_j \partial_j \pi_0 = \nabla^2 \pi_0 = 0$, e supondo que os campos se anulem no infinito, a única solução da equação de Laplace possível é $\pi_0 = 0$. Isso nos leva ao vínculo secundário:

$$\chi = \pi_0 \approx 0. \quad (45)$$

Aplicando a condição de consistência sobre o vínculo secundário $\chi \approx 0$:

$$\dot{\chi} \approx \int d^{D-1}x [\{\chi(y), \mathcal{H}_c(x)\} + \lambda_j(x) \{\chi(y), \phi_j(x)\}]. \quad (46)$$

Resolvendo os parênteses de Poisson, chegamos a:

$$\begin{aligned} \{\chi(y), \mathcal{H}_c(x)\} &= \{\pi_0(y), \mathcal{H}_c(x)\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(x)}{\partial A_0(y)} = 0, \\ \{\chi(y), \phi_j(x)\} &= \{\pi_0(y), \pi_j(x)\} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Portanto, a condição de consistência para o vínculo secundário $\dot{\chi} \approx 0$ é identicamente satisfeita ($0 \approx 0$). Logo, não há mais vínculos na teoria, e podemos classificar os vínculos, observando que:

$$\begin{aligned} \{\phi_j(y), \phi_j(x)\} &= 0 = \{\chi(y), \chi(x)\}, \\ \{\phi_j(y), \chi(x)\} &= 0 = -\{\chi(y), \phi_j(x)\}. \end{aligned} \quad (48)$$

Logo, ambos os vínculos $\phi_j \approx 0$ e $\chi \approx 0$ são de primeira classe. Contando os graus de liberdade da teoria, temos $2D$ campos (A_μ, ϕ_μ) , além de $D - 1$ vínculos primários de primeira classe, de

$\phi_j = \pi_j \approx 0$, e um vínculo secundário de primeira classe $\chi = \pi_0$. Logo:

$$N_{DOF}^H = 2D - 2(D - 1 + 1) = 0. \quad (49)$$

A teoria não tem conteúdo físico. Usando os vínculos como igualdades fortes, podemos mostrar que a hamiltoniana no espaço de fase reduzido ($\phi_j = 0 = \chi$) é nula:

$$H^{pr} = \int d^{D-1}x \left[\frac{1}{2} \pi_0 \pi_0 + \pi_0 \partial_j A_j + \lambda_j \phi_j \right] \Big|_{\phi_j=0=\chi} = 0, \quad (50)$$

condizente com a ausência de conteúdo físico.

4.2.2 Decomposição em helicidades

O campo A_μ será decomposto em helicidades, como em (19):

$$A_\mu = \begin{cases} A_0 = \psi \\ A_j = v_j^T + \partial_j u \end{cases}. \quad (51)$$

Na lagrangiana reescrita (37), substituímos as variáveis de helicidade, e obtemos:

$$\mathcal{L}_{VT} = \frac{(\dot{\psi} - \nabla^2 u)^2}{2}. \quad (52)$$

Podemos eliminar a derivada temporal redefinindo u , como $\tilde{u} = u - \frac{\dot{\psi}}{\nabla^2}$. Assim, nossa lagrangiana é simplificada como:

$$\mathcal{L}_{VT} = \frac{\nabla^2 \tilde{u}}{2}. \quad (53)$$

Como a equação de movimento dessa lagrangiana leva a $\nabla^4 \tilde{u} = 0$, teremos $\tilde{u} = 0$ e a teoria não apresenta conteúdo físico, em acordo com o formalismo de Dirac.

4.2.3 Invariantes de calibre

A lagrangiana é invariante sob a transformação $\delta A_\mu = \epsilon_\mu$, com $\partial^\mu \epsilon_\mu = 0$. Essa condição de transversalidade nos dá $D - 1$ parâmetros de calibre independentes, e temos D equações ($\delta A_\mu = \epsilon_\mu$), nos levando a 1 invariante segundo (1). Usando (51):

$$\delta A_0 = \epsilon_0, \quad (54a)$$

$$\delta A_j = \epsilon_j. \quad (54b)$$

A condição de transversalidade sobre o parâmetro ϵ_μ leva a:

$$\delta(\partial^0 A_0) = -\delta\dot{\psi} = +\partial^0 \epsilon_0 = 0, \quad (55a)$$

$$\delta(\partial^j A_j) = \delta\nabla^2 u = \partial^j \epsilon_j = 0. \quad (55b)$$

Logo, temos que:

$$\delta I \equiv \delta(\partial^\mu A_\mu) = 0, \quad (56)$$

onde $I = \dot{\psi} - \nabla^2 u$ é o invariante da teoria. Podemos, enfim, escrever a lagrangiana em termos do invariante, como uma forma quadrática:

$$\mathcal{L}_{VT} = \frac{I^2}{2}. \quad (57)$$

Logo, não há invariantes propagantes na lagrangiana, confirmando a ausência de dinâmica na teoria.

4.3 TEORIA TENSORIAL TRIVIAL

Podemos agora partir para uma teoria de rank-2 trivial, determinada pela lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{(\partial_A W^{\alpha\mu})(\partial^\beta W_{\beta\mu})}{2}, \quad (58)$$

onde $W_{\mu\nu}$ são campos tensoriais simétricos, do tipo $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$, com $\mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, D-1$. Podemos, então, trocar W_{j0} por W_{0j} , e W_{jk} (com $j > k$) por W_{kj} . Sem perda de conteúdo podemos nos restringir apenas aos campos $W_{\mu\nu}$ com $\mu \leq \nu$.

4.3.1 Formalismo hamiltoniano de Dirac

Separando a componente temporal das componentes espaciais, reescrevemos (58) como:

$$\mathcal{L} = -\frac{\dot{W}_{00}^2}{2} + \dot{W}_{00}(\partial_j W_{0j}) - \frac{(\partial_j W_{0j})^2}{2} + \frac{\dot{W}_{0j}^2}{2} - \dot{W}_{0j}(\partial_k W_{kj}) + \frac{(\partial_k W_{kj})^2}{2}. \quad (59)$$

Os momentos canônicos da teoria são:

$$\begin{aligned} \pi_{00} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{W}_{00}} = -\dot{W}_{00} + \partial_j W_{0j} \Rightarrow \dot{W}_{00} = -\pi_{00} + \partial_j W_{0j}, \\ \pi_{0j} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{W}_{0j}} = \dot{W}_{0j} - \partial_k W_{kj} \Rightarrow \dot{W}_{0j} = \pi_{0j} + \partial_k W_{kj}, \\ \pi_{kj} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{W}_{kj}} = 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Assim, temos os vínculos primários:

$$\phi_{kj} \equiv \pi_{kj} \approx 0 \quad (k \leq j). \quad (61)$$

A densidade hamiltoniana canônica da teoria é, após alguns cancelamentos e integrações por partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \pi_{\mu\nu} \dot{W}_{\mu\nu} - \mathcal{L} \\ &= \pi_{00} \dot{W}_{00} + \pi_{0j} \dot{W}_{0j} - \mathcal{L} \\ &= -\frac{\pi_{00}\pi_{00}}{2} + \frac{\pi_{0j}\pi_{0j}}{2} + \pi_{0j}\partial_k W_{kj} + \pi_{00}\partial_j W_{0j} \\ &= -\frac{\pi_{00}\pi_{00}}{2} + \frac{\pi_{0j}\pi_{0j}}{2} - (\partial_k \pi_{0j})W_{kj} - (\partial_j \pi_{00})W_{0j}. \end{aligned} \quad (62)$$

Com os vínculos ϕ_{kj} , temos a hamiltoniana primária:

$$\begin{aligned} H_p &= \int d^{D-1}x (\mathcal{H}_c + \lambda\phi) \\ &= \int d^{D-1}x \left[-\frac{\pi_{00}\pi_{00}}{2} + \frac{\pi_{0j}\pi_{0j}}{2} - (\partial_k \pi_{0j})W_{kj} - (\partial_j \pi_{00})W_{0j} + \lambda_{kj}\phi_{kj} \right]. \end{aligned} \quad (63)$$

Para os vínculos $\phi_{kj} \approx 0$, temos a condição de consistência:

$$\dot{\phi}_{kj}(y) = \int d^{D-1}x [\{\phi_{kj}(y), \mathcal{H}_c(x)\} + \lambda_{lm}(x) \{\phi_{kj}(y), \phi_{lm}(x)\}], \quad (64)$$

com parênteses de Poisson:

$$\begin{aligned} \{\phi_{kj}(y), \mathcal{H}_c(x)\} &= \{\pi_{kj}(y), \mathcal{H}_c(x)\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(x)}{\partial W_{kj}(y)} = \partial_k \pi_{0j} \delta^D(x-y), \\ \{\phi_{kj}(y), \phi_{lm}(x)\} &= \{\pi_{kj}(y), \pi_{lm}(x)\} = 0. \end{aligned} \quad (65)$$

Na condição de consistência (64) usando:

$$\int d^{D-1}x [\partial_k \pi_{0j}(x)] \delta^D(x-y) = \partial_k \pi_{0j} \approx 0. \quad (66)$$

Aplicando ∂_k em (66) temos $\nabla^2 \pi_{0j} = 0$, e supondo que os campos se anulem no infinito, nos resta apenas a solução da equação de Laplace $\pi_{0j} \approx 0$. Assim, chegamos aos vínculos secundários:

$$\chi_j \equiv \pi_{0j} \approx 0, \quad (67)$$

cuja condição de consistência é dada por:

$$\dot{\chi}_l(y) = \int d^{D-1}x [\{\chi_l(y), \mathcal{H}_c(x)\} + \lambda_{kj}(x) \{\chi_l(y), \phi_{kj}(x)\}] \approx 0. \quad (68)$$

Resolvendo os parênteses de Poisson:

$$\begin{aligned}\{\chi_l(y), \mathcal{H}_c(x)\} &= \{\pi_{0l}(y), \mathcal{H}_c(x)\} = -\frac{\partial \mathcal{H}_c(x)}{\partial W_{0l}(y)} = \partial_l \pi_{00}(x) \delta^D(x-y), \\ \{\chi_l(y), \phi_{kj}(x)\} &= \{\pi_{0l}(y), \pi_{kj}(x)\} = 0,\end{aligned}\quad (69)$$

temos a condição de consistência (68):

$$\int d^{D-1}x [\partial_j \pi_{00}(x)] \delta^D(x-y) = \partial_j \pi_{00}(y) \approx 0, \quad (70)$$

que nos leva a um novo vínculo, dado por:

$$\xi \equiv \pi_{00} \approx 0. \quad (71)$$

Como a hamiltoniana (63) não depende do campo W_{00} e os vínculos $\xi = 0 = \phi_{kj} = \chi_l$ têm parênteses nulos entre si, a condição de consistência para $\dot{\xi}$ é identicamente satisfeita e o algoritmo termina.

Podemos, então, partir para a classificação dos vínculos. Como todos os vínculos dependem dos momentos canônicos da teoria, todos os $\pi_{\mu\nu} \approx 0$ ($\mu, \nu = 0, j$) são de primeira classe.

Para contar os graus de liberdade, temos, em D dimensões, $D(D+1)$ componentes de $W_{\mu\nu}$ e $\pi_{\mu\nu}$. Além disso, temos $\frac{D(D+1)}{2}$ vínculos de primeira classe de $\pi_{\mu\nu} \approx 0$, nos levando, segundo (35), a:

$$N_{DOF}^H = D(D+1) - 2 \left[\frac{D(D+1)}{2} \right] = 0. \quad (72)$$

A teoria não apresenta conteúdo físico. No espaço de fase reduzido definido por $\pi_{\mu\nu} = 0$, temos de (63):

$$H^{pr} = 0. \quad (73)$$

Assim como para a teoria vetorial trivial, a hamiltoniana primária reduzida é nula, e demonstra a falta de conteúdo físico da teoria.

4.3.2 Decomposição em helicidades

Decompondo o campo $W_{\mu\nu}$ em helicidades de forma semelhante ao que fizemos com o campo vetorial em (19), temos:

$$W_{\mu\nu} = \begin{cases} W_{00} = \rho \\ W_{0j} = \gamma_j^T + \partial_j \Gamma \\ W_{kj} = W_{kj}^{TT} + \partial_k \psi_j^T + \partial_j \psi_k^T + \nabla^2 \theta_{kj} \psi + \partial_k \partial_j \tilde{\psi} \end{cases}, \quad (74)$$

onde W_{kj}^{TT} significa transversalidade e traço nulo: $\delta^{ij} W_{ij}^{TT} = 0 = \partial^i W_{ij}^{TT}$.

A lagrangiana (58) pode ser reescrita em termos das variáveis de helicidade como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-(\dot{\rho} - \nabla^2 \Gamma)^2 + (-\dot{\gamma}_j^T - \partial_j \dot{\Gamma} + \nabla^2 \psi_j^T + \nabla^2 \partial_j \tilde{\psi})^2 \right]. \quad (75)$$

Podemos redefinir o segundo termo da lagrangiana, para eliminar as derivadas temporais, como:

$$\tilde{\tilde{\psi}} = \tilde{\psi} - \frac{\dot{\Gamma}}{\nabla^2}, \quad (76)$$

$$\tilde{\tilde{\psi}}_j^T = \psi_j^T - \frac{\dot{\gamma}_j^T}{\nabla^2}. \quad (77)$$

Assim, escrevemos a lagrangiana como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-(\dot{\rho} - \nabla^2 \Gamma)^2 + \left(\nabla^2 \tilde{\tilde{\psi}}_j^T + \nabla^2 \partial_j \tilde{\tilde{\psi}} \right)^2 \right]. \quad (78)$$

Também podemos redefinir Γ como $\tilde{\Gamma} = -\frac{\dot{\rho}}{\nabla^2} + \Gamma$. Assim, temos a lagrangiana simplificada:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-(\nabla^2 \tilde{\Gamma})^2 + \left(\nabla^2 \tilde{\tilde{\psi}}_j^T + \nabla^2 \partial_j \tilde{\tilde{\psi}} \right)^2 \right]. \quad (79)$$

Minimizando a ação correspondente, podemos escrever:

$$\delta S = \delta S_{\Gamma\Gamma} + \delta S_{\psi\psi} = 0, \quad (80)$$

onde:

$$\begin{aligned} S_{\Gamma\Gamma} &= \int d^{D-1}x (\nabla^2 \tilde{\Gamma})(\nabla^2 \tilde{\Gamma}), \\ S_{\psi\psi} &= \int d^{D-1}x \left[(\nabla^2 \partial_j \tilde{\tilde{\psi}})^2 + (\nabla^2 \tilde{\tilde{\psi}}_j^T)^2 \right]. \end{aligned} \quad (81)$$

De (80) temos:

$$\nabla^4 \tilde{\Gamma} = 0 \quad ; \quad \nabla^6 \tilde{\tilde{\psi}} = 0 \quad ; \quad \nabla^4 \tilde{\tilde{\psi}}_j^T = 0, \quad (82)$$

o que implica em:

$$\tilde{\Gamma} = 0 = \tilde{\tilde{\psi}}_j^T = \tilde{\tilde{\psi}}. \quad (83)$$

Logo, a lagrangiana (58) não tem conteúdo físico. É importante destacar que as variáveis de helicidade foram redefinidas pela matriz:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{\Gamma} \\ \tilde{\tilde{\psi}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial_t}{\nabla^2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial_t}{\nabla^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ \Gamma \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = \mathbb{M} \begin{pmatrix} \rho \\ \Gamma \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Como $\det \mathbb{M} = 1$, a matriz é inversível, já que o jacobiano da transformação não é nulo

($\det \mathbb{M} \neq 0$), e a mudança de variáveis não é singular, apesar das derivadas temporais presentes na matriz $\mathbb{M}$.

4.3.3 Invariantes de calibre

A teoria (58) é invariante por $\delta W_{\mu\nu} = \lambda_{\mu\nu}$, onde $\partial^\mu \lambda_{\mu\nu} = 0$, com $\lambda_{\mu\nu} = \lambda_{\nu\mu}$. Portanto, temos $\frac{D(D+1)}{2}$ equações e $\frac{D(D+1)}{2}$ parâmetros de gauge sujeitos a D vínculos. Assim, a teoria tem D invariantes segundo (1).

Decompondo os parâmetros simétricos, seguindo (74) temos:

$$\lambda_{\mu\nu} = \begin{cases} \lambda_{00} = \phi \\ \lambda_{0j} = \lambda_j^T + \partial_j \Lambda \\ \lambda_{kj} = \lambda_{kj}^{TT} + \partial_k A_j^T + \partial_j A_k^T + \nabla^2 \theta_{kj} B + \partial_k \partial_j D \end{cases}. \quad (85)$$

Do vínculo $\partial^\mu \lambda_{\mu\nu} = 0$, com $\nu = 0, j$, temos que:

$$\partial^\mu \lambda_{\mu 0} = 0 \Rightarrow -\partial_0 \lambda_{00} + \partial_k \lambda_{k0} = 0, \quad (86)$$

$$\partial^\mu \lambda_{\mu j} = 0 \Rightarrow -\partial_0 \lambda_{0j} + \partial_k \lambda_{kj} = 0. \quad (87)$$

De (86), determinamos Λ como:

$$\Lambda = \frac{\dot{\phi}}{\nabla^2}, \quad (88)$$

e de (87), temos que:

$$-\dot{\lambda}_j^T - \partial_j \dot{\Lambda} + \nabla^2 A_j^T + \nabla^2 \partial_j D = 0. \quad (89)$$

Aplicando ∂_j em (89), obtemos D como:

$$D = \frac{\dot{\Lambda}}{\nabla^2} = \frac{\ddot{\phi}}{\nabla^4}, \quad (90)$$

que, substituindo em (89), nos fornece:

$$A_j^T = \frac{\dot{\lambda}_j^T}{\nabla^2}. \quad (91)$$

As variáveis de Bardeen da teoria são determinadas pelas transformações:

$$\delta W_{\mu 0} = \lambda_{\mu 0}, \quad (92)$$

$$\delta W_{kj} = \lambda_{kj}. \quad (93)$$

Dessa forma, de δW_{00} e δW_{k0} temos:

$$\delta\rho = \phi, \quad (94a)$$

$$\delta(\gamma_k^T + \partial_k \Gamma) = \lambda_k^T + \partial_k \Lambda, \quad (94b)$$

e, de δW_{kj} :

$$\delta(W_{kj}^{TT} + \partial_k \psi_j^T \partial_j + \psi_k^T + \nabla^2 \theta_{kj} \psi + \partial_k \partial_j \tilde{\psi}) = \lambda_{kj}^{TT} + \partial_k A_j^T + \partial_j A_k^T + \nabla^2 \theta_{kj} B + \partial_k \partial_j D. \quad (95)$$

Usando (88) em (94b) e usando ainda (94a), temos:

$$\delta(\gamma_k^T + \partial_k \Gamma) = \partial_k \frac{\delta \dot{\rho}}{\nabla^2} + \lambda_k^T. \quad (96)$$

Aplicando ∂_k em (96) temos $\delta(\nabla^2 \Gamma - \dot{\rho}) = 0$ que equivale a $\delta(\partial^\mu W_{\mu 0}) \equiv \delta I_0 = 0$. De forma semelhante, usando (90) em (95) e aplicando ∂_k e $\partial_k \partial_j$ em (95) obtemos:

$$\delta(\partial^\mu W_{\mu k}) \equiv \delta I_k = 0, \quad (97)$$

onde $I_k = -\dot{\gamma}_k^T - \partial_k \dot{\Gamma} + \nabla^2 \psi_k^T + \nabla^2 \partial_k \tilde{\psi}$.

Assim, podemos reescrever a lagrangiana (58) como uma forma quadrática em termos das variáveis de Bardeen, como:

$$\mathcal{L} = -\frac{I_0^2}{2} + \frac{I_j^2}{2}. \quad (98)$$

As equações de movimento da lagrangiana reescrita mostram que a teoria tem D invariantes não propagantes, confirmando a ausência de conteúdo físico. Também é interessante notar que houve uma redução dramática no número de variáveis da teoria.

5 TEORIAS DE ORDEM SUPERIOR EM DERIVADAS

Seguindo as tendências nos estudos em Teoria de Campos, proponho focarmos nossos esforços em teorias que apresentam mais de uma derivada temporal nos campos, com lagrangiana do tipo $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x} \dots)$. Em especial, visamos estudar teorias que não podem ter sua ordem reduzida por uma integração por partes. Entretanto, é preciso notar que, segundo o Teorema de Ostrogradsky, vide (Ostrogradsky, 1850), teorias que contém derivadas temporais de ordem superior levam a uma instabilidade linear na hamiltoniana, e teorias desse tipo possuem graus de liberdade “fantasma”, que se apresentam como graus de liberdade instáveis. O chamado fantasma ou instabilidade de Ostrogradsky “adoece” a teoria, trazendo complicações em sua interpretação física. Por isso, é comum o interesse em teorias de ordem superior livres de fantasmas, ou “saudáveis”.

Apesar da construção de Ostrogradsky levar a uma adaptação da formulação de Dirac para teorias de ordem superior, temos uma generalização complicada. Por isso, analisamos essas teorias pela decomposição em helicidades e invariantes de calibre. As teorias de ordem superior que analisamos têm spin-0 e spin-1, e foram sugeridas em (Dalmazi; Santos, 2013) como passos intermediários para o desenvolvimento de teorias de spin-2 que inspirem teorias de gravitação de ordem superior.

5.1 APLICAÇÕES

5.1.1 Campo escalar massivo

Em (Dalmazi; Santos, 2013) foi sugerido um modelo que descreve uma partícula de spin-0 massiva, via um campo vetorial. A teoria é de quarta ordem em derivadas, dada por:

$$\mathcal{L}_{SV}^m = \frac{1}{2m^2} [\partial \cdot A (\square - m^2) \partial \cdot A]. \quad (1)$$

5.1.1.1 Decomposição em helicidades

Seguindo a decomposição em helicidades (19), podemos reescrever a lagrangiana como:

$$\mathcal{L}_{SV}^m = \frac{1}{2m^2} [(-\dot{\psi} + \nabla^2 u)(\square - m^2)(-\dot{\psi} + \nabla^2 u)]. \quad (2)$$

Podemos redefinir u para eliminar a derivada temporal de ψ , como $\tilde{u} = u - \frac{\dot{\psi}}{\nabla^2}$. Dessa forma:

$$\mathcal{L}_{SV}^m = \frac{\nabla^2 \tilde{u} (\square - m^2) \nabla^2 \tilde{u}}{2m^2}. \quad (3)$$

A lagrangiana propaga um grau de liberdade massivo. A equação de movimento de (3) leva à equação de Klein-Gordon:

$$\nabla^4(\square - m^2)\tilde{u} = 0 \Rightarrow (\square - m^2)\tilde{u} = 0. \quad (4)$$

Como a simetria local é a mesma do exemplo anterior ($\delta A_\mu = \epsilon_\mu$ com $\partial^\mu \epsilon_\mu = 0$) temos o mesmo invariante $I = \partial^\mu A_\mu$ e a lagrangiana fica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2m^2} I(\square - m^2)I. \quad (5)$$

Temos, então, 1 invariante propagante na teoria e efetivamente uma teoria de segunda ordem para o invariante de calibre. Como $I = \partial^\mu A_\mu = \nabla^2 u - \dot{\psi}$, a mudança de variáveis de u para I tem jacobiano não nulo, pois $\nabla^2 \neq 0$ com as condições de contorno que trabalhamos. Assim temos a equação de movimento invariante de calibre e de segunda ordem em derivadas se tratarmos I como um campo independente:

$$(\square - m^2)I = 0. \quad (6)$$

Dessa forma, confirmamos que a teoria propaga um grau de liberdade massivo.

5.1.2 Lagrangiana de Maxwell (via tensor simétrico)

Teorias recentes (vide (Dalmazi; Santos, 2013)) mostram a possibilidade de representar a teoria de Maxwell como uma teoria de quarta ordem em derivadas¹, com o tensor eletromagnético escrito em termos de um campo tensorial simétrico $W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}$. Assim, temos a lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{MW} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 [\partial \cdot W], \quad (7)$$

onde $F_{\mu\nu}[\partial \cdot W] = \partial_\mu(\partial^\alpha W_{\nu\alpha}) - \partial_\nu(\partial^\alpha W_{\mu\alpha})$, com $\mu, \nu = 0, 1, \dots, D-1$ e $j, k = 1, 2, \dots, D-1$. Começaremos trabalhando com $F_{\mu\nu}[A_\mu]$, para depois trocar os campos A_μ por $\partial^\nu W_{\mu\nu}$. Sabemos que:

$$F_{\mu\nu}^2[A_\mu] = -2(\partial_0 A_j - \partial_j A_0)^2 + F_{kj}^2. \quad (8)$$

Logo, em termos do tensor simétrico:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MW} = & \frac{1}{2} [\partial_0(\partial^0 W_{0j} + \partial^k W_{kj}) - \partial_j(\partial^0 W_{00} + \partial^k W_{0k})]^2 + \\ & - \frac{1}{4} [\partial_k(\partial^0 W_{0j} + \partial^k W_{kj}) - \partial_j(\partial^0 W_{0k} + \partial^j W_{kj})]^2. \end{aligned} \quad (9)$$

¹ Essa formulação pode permitir uma conexão com o modelo conhecido como “New Massive Gravity”, de (Bergshoeff; Hohm; Townsend, 2009), no limite de massa zero.

Devido à presença de duplas derivadas no tempo, o formalismo hamiltoniano de Dirac se torna trabalhoso, e vamos passar diretamente para o uso de variáveis de helicidade.

5.1.2.1 Decomposição em helicidades

Com a decomposição (74), reescrevemos a lagrangiana como:

$$\mathcal{L}_{MW} = \frac{1}{2} \left[\partial_0(-\dot{\gamma}_j^T - \partial_j \dot{\Gamma} + \nabla^2 \psi_j^T + \nabla^2 \partial_j \tilde{\psi}) - \partial_j(-\dot{\rho} + \nabla^2 \Gamma) \right]^2 + \frac{1}{4} \left[\partial_k(-\dot{\gamma}_j^T - \partial_j \dot{\Gamma} + \nabla^2 \psi_h^T + \nabla^2 \partial_j \tilde{\psi}) - \partial_j(-\dot{\gamma}_k^T - \partial_k \dot{\Gamma} + \nabla^2 \psi_k^T + \nabla^2 \partial_k \tilde{\psi}) \right]^2. \quad (10)$$

Para baixar a ordem das derivadas temporais, faremos inicialmente as mesmas redefinições da subseção 4.3.2 que nos levará à lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{MW} = \frac{1}{2} \left[\nabla^2 \dot{\tilde{\psi}}_j^T + \nabla^2 \partial_j \ddot{\tilde{\psi}} - \nabla^2 \partial_j \ddot{\tilde{\Gamma}} \right]^2 - \frac{1}{4} \left[\nabla^2 \partial_k \tilde{\psi}_j^T - \nabla^2 \partial_j \tilde{\psi}_k^T \right]^2. \quad (11)$$

Podemos eliminar a derivada temporal em $\ddot{\tilde{\psi}}$, redefinindo:

$$\ddot{\tilde{\Gamma}} = \ddot{\tilde{\Gamma}} - \ddot{\tilde{\psi}}. \quad (12)$$

Dessa forma, temos a lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{MW} = \frac{1}{2} \left[\nabla^2 \dot{\tilde{\psi}}_j^T + \nabla^2 \partial_j \ddot{\tilde{\Gamma}} \right]^2 + \frac{1}{2} \nabla^4 (\tilde{\psi}_j^T \nabla^2 \tilde{\psi}_j^T). \quad (13)$$

E, finalmente, chegamos a uma teoria de forma semelhante à encontrada em 4.1:

$$\mathcal{L}_{MW} = \left[\frac{\tilde{\psi}_j^T \nabla^2 \square \tilde{\psi}_j^T}{2} - \frac{\ddot{\tilde{\Gamma}} \nabla^6 \ddot{\tilde{\Gamma}}}{2} \right]. \quad (14)$$

De fato, compare com (33), é esperado que a teoria se assemelhe à teoria usual de Maxwell, uma vez que é uma teoria de quarta ordem construída para ser equivalente (dual) à teoria de segunda ordem de Maxwell.

5.1.2.2 Invariantes de calibre

A teoria é invariante sob a transformação:

$$\delta \partial^\mu W_{\mu\nu} = \partial_\nu \phi, \quad (15)$$

quando $\delta W_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \phi$. Assim, podemos escrever os invariantes levando em conta o que já foi

feito para a teoria de Maxwell de segunda ordem, simplesmente substituindo A_μ por $\partial^\alpha W_{\alpha\mu}$,

$$I_j = (\partial \cdot W)_j - \partial_j \frac{\partial_k (\partial \cdot W)_k}{\nabla^2}, \quad (16a)$$

$$I_0 = (\partial \cdot W)_0 - \partial_0 \frac{\partial_k (\partial \cdot W)_k}{\nabla^2}. \quad (16b)$$

Logo, podemos escrever a lagrangiana em termos dos invariantes de calibre:

$$\mathcal{L}_{MW} = \frac{I_j \square I_j}{2} + \frac{I_0 (-\nabla^2) I_0}{2}. \quad (17)$$

Temos, como esperado, $D - 2$ invariantes propagantes de I_j e 1 invariante não-propagante de I_0 , levando ao total de $D - 1$ invariantes, e confirmamos que a teoria de Maxwell em ordem superior é dual à teoria de Maxwell usual, apresentando o mesmo conteúdo físico e invariantes.

6 CONCLUSÃO

no decorrer deste trabalho, revisitamos o formalismo hamiltoniano para sistemas vinculados em vários contextos. Iniciamos tratando de um modelo clássico, considerando uma lagrangiana $L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$, onde demonstramos como o algoritmo de Dirac-Bergmann se comporta em sistemas vinculados. Então, partimos para a generalização dessa sistematização em teorias de campos, com um número infinito e contínuo de graus de liberdade, para estabelecer uma descrição lagrangiana da decomposição dos campos em helicidades e invariantes de calibre.

O conteúdo físico de teorias de gauge usuais pode ser, para teorias de segunda ordem, obtido pelo algoritmo de Dirac, onde determinamos os momentos canônicos, vínculos e hamiltoniana das teorias, para enfim calcular a evolução temporal dos vínculos, de modo a determinar o número de graus de liberdade e positividade da hamiltoniana no espaço de fase reduzido. Demonstramos com sucesso o uso do formalismo hamiltoniano de Dirac e a decomposição em helicidades e invariantes de calibre, para a teoria de Maxwell para o eletromagnetismo em segunda ordem, e para as teorias que chamamos de trivial vetorial e trivial tensorial. Nesses exemplos, mostramos a equivalência do algoritmo de Dirac com o uso das variáveis de helicidade para análise do conteúdo físico dos modelos. Embora a invariância de Lorentz deixe de ser explícita, ganhamos em simplicidade com um formalismo puramente Lagrangiano.

Apesar de o algoritmo de Dirac ser bastante eficaz no estudo de teorias de segunda ordem, quando partimos para teorias de ordem superior em derivadas temporais, ainda não há na literatura uma maneira de estabelecer, de forma sistemática, um formalismo hamiltoniano simples.

Porém, mesmo nas teorias de Maxwell de quarta ordem e do campo escalar massivo, de ordem superior em derivadas, onde o formalismo hamiltoniano se torna complexo, levando potencialmente ao aparecimento do fantasma de Ostrogradski (vide (Woodard, 2015) e (Ostrogradsky, 1850)), conseguimos aplicar com sucesso o método das variáveis de helicidade. A partir das transformações de gauge obtivemos os invariantes de calibre de forma construtivista e pudemos escrever em todos os casos a Lagrangiana como uma forma quadrática dos invariantes.

De certa forma, podemos notar que, mesmo para teorias de segunda ordem, onde a sistematização hamiltoniana já é bem estabelecida, é interessante analisar o conteúdo físico por um formalismo lagrangiano, a depender do objetivo principal do problema, uma vez que dependemos apenas da teoria lagrangiana e sua invariância de calibre. Além disso, escrever uma lagrangiana em termos dos invariantes propagantes e não-propagantes faz com que consideremos apenas quantidades físicas que contribuem para a dinâmica de uma teoria, eliminando quantidades redundantes.

Para futuros estudos, esperamos demonstrar por que, a depender dos campos escolhidos para baixar a ordem de derivadas em teorias de ordem superior (para que o algoritmo de Dirac

seja válido), os vínculos primários de primeira classe não geram um número equivalente de transformações de calibre, como ocorre em teorias usuais.

REFERÊNCIAS

- BANERJEE, R.; MUKHERJEE, P.; PAUL, B. Gauge symmetry and w -algebra in higher derivative systems. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science and Business Media LLC, Trieste, v. 2011, n. 8, ago. 2011. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08\(2011\)085](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP08(2011)085). Acesso em: 05 ago. 2024.
- BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Nova Iorque, v. 22, p. 1882–1905, Oct 1980. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.22.1882>. Acesso em: 23 out. 2024.
- BERGSHOEFF, E. A.; HOHM, O.; TOWNSEND, P. K. Massive gravity in three dimensions. **Phys. Rev. Lett.**, American Physical Society, Nova Iorque, v. 102, p. 201301, May 2009. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.201301>. Acesso em: 08 nov. 2024.
- DALMAZI, D.; SANTOS, A. L. R. dos. Higher spin analogs of linearized topologically massive gravity and linearized new massive gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Nova Iorque, v. 104, p. 085023, Oct 2021. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.104.085023>. Acesso em: 04 out. 2024.
- DALMAZI, D.; SANTOS, R. C. Note on linearized “new massive gravity” in arbitrary dimensions. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), Nova Iorque, v. 87, n. 8, abr. 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.87.085021>. Acesso em: 10 nov. 2024.
- DESER, S.; JACKIW, R.; TEMPLETON, S. Topologically massive gauge theories. **Annals of Physics**, Academic Press, Nova Iorque, v. 140, n. 2, p. 372–411, 1982. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491682901646>. Acesso em: 20 out. 2024.
- DIRAC, P. **Lectures on quantum mechanics**. Nova Iorque: Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964. (Belfer Graduate School of Science. Monographs series).
- DUTRA, A. de S.; NATIVIDADE, C. P. Consistent higher derivative quantum field theory: a model without tachyons and ghosts. **Modern Physics Letters A**, Singapore, v. 11, n. 10, p. 775–783, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0217732396000783>. Acesso em: 05 dez. 2024.
- DUTRA, A. de S.; NATIVIDADE, C. P. Class of self-dual models in three dimensions. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Nova Iorque, v. 61, p. 027701, Dec 1999. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.61.027701>. Acesso em: 05 dez. 2024.
- GERLACH, U. H.; SENGUPTA, U. K. Gauge-invariant perturbations on most general spherically symmetric space-times. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Nova Iorque, v. 19, p. 2268–2272, Apr 1979. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.19.2268>. Acesso em: 16 set. 2024.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of gauge systems**. Princeton University Press, 1992. (Princeton paperbacks). Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=2FAuAKEKFyYC>. Acesso em: 03 mar. 2024.

JACCARD, M.; MAGGIORE, M.; MITSOU, E. Bardeen variables and hidden gauge symmetries in linearized massive gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Nova Iorque, v. 87, p. 044017, Feb 2013. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.87.044017>. Acesso em: 15 fev. 2024.

LEMOS, N. **Mecânica analítica**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

MENEZES, G. Leading singularities in higher-derivative Yang–Mills theory and quadratic gravity. **Universe**, MDPI, Basel, v. 8, n. 6, p. 326, 2022.

MOTOHASHI, H.; SUYAMA, T. Third order equations of motion and the ostrogradsky instability. **Physical Review D**, American Physical Society (APS), Nova Iorque, v. 91, n. 8, abr. 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.91.085009>. Acesso em: 07 jun. 2024.

OSTROGRADSKY, M. Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. **Mem. Acad. St. Petersburg**, [S.n.], São Petersburgo, v. 6, n. 4, p. 385–517, 1850.

RHAM, C. de; GABADADZE, G.; TOLLEY, A. J. Helicity decomposition of ghost-free massive gravity. **Journal of High Energy Physics**, Springer Science and Business Media LLC, Trieste, v. 2011, n. 11, nov. 2011. Disponível em: [http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11\(2011\)093](http://dx.doi.org/10.1007/JHEP11(2011)093). Acesso em: 10 jan. 2024.

SANTOS, A. L. R. dos. **Sistemas vinculados e o método de Dirac**. 2018.

STELLE, K. S. Renormalization of higher-derivative quantum gravity. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, Nova Iorque, v. 16, p. 953–969, Aug 1977. Disponível em: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.953>. Acesso em: 07 dez. 2024.

SUNDERMEYER, K. **Constrained dynamics with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model**. Nova Iorque: Springer-Verlag, 1982.

WOODARD, R. P. Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. **Scholarpedia**, v. 10, n. 8, p. 32243, 2015.