



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

# Posteriori exata e aproximada da Confiabilidade via Aproximação de Laplace das distribuições Gama Exponenciada e Weibull

Luís Fernando Jorge

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio Moala

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, Junho de 2019



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Posteriori exata e aproximada da  
Confiabilidade via Aproximação de Laplace das  
distribuições Gama Exponenciada e Weibull**

Luís Fernando Jorge

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antônio Moala

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Junho de 2019

J82p	<p>Jorge, Luís Fernando</p> <p>Posteriori exata e aproximada da Confiabilidade via Aproximação de Laplace das distribuições Gama Exponenciada e Weibull / Luís Fernando Jorge. -- Presidente Prudente, 2019</p> <p>90 p. : il., tabs.</p> <p>Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente</p> <p>Orientador: Fernando Antônio Moala</p> <p>1. Análise de Confiabilidade. 2. Distribuição Log-Gama Negativa. 3. Inferência Bayesiana. 4. Aproximação de Laplace. 5. MCMC. I. Título.</p>
------	---

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

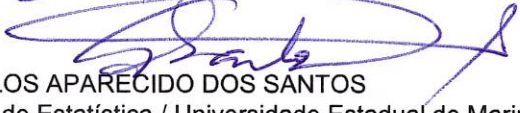
**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Posteriori exata e aproximada da confiabilidade via Aproximação de Laplace das distribuições Gama Exponenciada e Weibull

**AUTOR: LUÍS FERNANDO JORGE**

**ORIENTADOR: FERNANDO ANTONIO MOALA**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. FERNANDO ANTONIO MOALA  
Departamento de Estatística / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

  
Prof. Dr. CARLOS APARECIDO DOS SANTOS  
Departamento de Estatística / Universidade Estadual de Maringá

  
Prof. Dr. MANOEL IVANILDO SILVESTRE BEZERRA  
Departamento de Estatística / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Presidente Prudente, 19 de junho de 2019

*Aos meus pais, **Mauro, Nair Solange,**  
as minhas irmãs, **Marcia, Ana Paula,**  
aos meus cunhados, **Bruno, Gabriel,**  
a minha sobrinha, **Valentina,**  
ao meu orientador, **Fernando,**  
e aos meus amigos,  
dedico!*

---

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por todas as obras grandiosas que realiza nela diariamente.

Queria agradecer a minha mãe, Nair Solange, não só pela vida, mas sim por todo apoio, atenção, carinho e amor. Esta caminhada não seria igual sem suas longas ligações e grandes conselhos. Meu pai Mauro, também tem grande parcela neste sonho, essa base familiar forte foram a grande motivação para seguir em frente em meio a todas adversidades da vida.

Para complementar essa base, tenho duas irmãs, professoras e amigas, Márcia e Ana Paula. Vocês sempre estiveram presentes em todos momentos ao meu lado, me dando força e incentivo para seguir em frente. Além dos meus dois cunhados, Bruno e Gabriel, que só vieram para somar em nossa família. Valeu irmãos! Sem se esquecer da nossa pequena Valentina que nasceu em 2017 e desde de então vive fazendo a alegria da família.

Como todo grande profissional não chega algum lugar sozinho, não posso deixar agradecer todos meus professores que me ajudaram em minha caminhada, cada conhecimento transmitido por vocês tem uma parcela nesta conquista. Em especial ao meu orientador Fernando por todo apoio e parceria.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Queria agradecer também, o Laboratório de Simulação Numérica da FCT/UNESP, onde foi desenvolvida a pesquisa utilizando recursos computacionais oferecidos pelo mesmo. Além de alguns funcionários que contribuíram muito nesta fase, sendo eles: Cinthia e Fernando Pacanelli.

Para finalizar, não podia deixar de agradecer meu grande amigo e primo, Renato. Além dos meus parceiros de república, da pós-graduação em Matemática Aplicada e Computacional, do Mestrado e Doutorado da Eng. Cartográfica, da academia Set Fit, de todos os cursos da UNESP em geral, dos amigos extra faculdade e de trabalho.

*Você pode dizer que sou um sonhador  
Mas eu não sou o único  
Eu espero que algum dia você junte-se a nós  
E o mundo viverá como um só!*  
**John Lennon**

# Resumo

---

A Análise de Confiabilidade é uma área bem consolidada da estatística. Antes do surgimento dos métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC), a aproximação de Laplace era muito utilizada para estimação dos parâmetros, porém após isso o MCMC passou a ser mais usado. Ao afinal deste trabalho, deseja-se realizar a comparação entre ambos os métodos de estimação buscando assim um método que produza bons resultados e com excelentes propriedades. Uma característica importante fornecida pela aproximação de Laplace é fato de obter uma forma fechada para distribuição a posteriori da confiabilidade, tanto no caso da Weibull como para Gama Exponenciada (GE). Também foi desenvolvido prioris conjugadas para o parâmetro  $\theta$  e a confiabilidade para ambas distribuições. Esta propriedade facilita a obtenção dos momentos amostrais assim como o cálculo de intervalos. A distribuição Weibull é muito utilizada na análise de confiabilidade e outras áreas, assim como: climatologia, medicina, entre outras. A distribuição GE não é tão utilizada, mas apresenta diferentes comportamentos para o risco, além de possuir apenas um parâmetro para ser estimado.

Palavras-Chave: *Análise de Confiabilidade, Distribuição Log-Gama Negativa, Inferência Bayesiana, Aproximação de Laplace, MCMC.*



# Abstract

---

Reliability Analysis is a well-established area of statistics. Before the method Monte Carlo via Markov Chain (MCMC), the Laplace approximation was widely used for parameter estimation, but after that the MCMC became more used. At the end of this work, it is desired to carry out the comparison between both estimation methods, thus seeking a method that produces good results and excellent properties. An important feature provided by the Laplace approximation is that it obtains a closed form for posterior distribution of reliability, both in the case of Weibull and the Exponential Gamma (EG). We also developed conjugated priori for the parameter  $\theta$  and the reliability for both distributions. This property makes it easier to obtain sample moments as well as the calculation of intervals. The Weibull distribution is widely used in the analysis of reliability and other areas, as well as: climatology, medicine, among others. The EG distribution is not so widely used, but presents different risk behaviors, besides having only one parameter to be estimated.

Keywords: *Reliability Analysis, Negative Log-Gamma Distribution, Bayesian Inference, Laplace Approximation, MCMC.*



# Lista de Figuras

---

3.1	Gráficos das funções de densidade e sobrevivência da distribuição Gama Exponenciada para diferentes valores de $\theta$ . . . . .	24
3.2	Gráficos das função de risco da distribuição Gama Exponenciada para diferentes valores de $\theta$ . . . . .	25
3.3	Gráfico do viés versus tamanho da amostra para estimação de $\theta$ . . . . .	43
3.4	Gráfico do EQM versus tamanho da amostra para estimação de $\theta$ . . . . .	44
3.5	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho da amostra para estimação de $\theta$ . . . . .	44
3.6	Gráfico do viés versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 0.5$ . . . . .	45
3.7	Gráfico do viés versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 1.5$ . . . . .	46
3.8	Gráfico do EQM versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 0.5$ . . . . .	46
3.9	Gráfico do EQM versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 1.5$ . . . . .	47
3.10	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 0.5$ . . . . .	47
3.11	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 1.5$ . . . . .	48
3.12	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos HPD de 95% versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 0.5$ . . . . .	48
3.13	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos HPD de 95% versus tamanho da amostra para estimação de $R$ considerando $t = 1.5$ . . . . .	49
3.14	Gráfico do viés versus tamanho da amostra $n$ para estimativa de $R$ considerando $\theta = 0.2$ . . . . .	50
3.15	Gráfico do viés versus tamanho da amostra $n$ para estimativa de $R$ considerando $\theta = 2.0$ . . . . .	51
3.16	Gráfico do EQM versus tamanho da amostra $n$ para estimativa de $R$ considerando $\theta = 0.2$ . . . . .	51
3.17	Gráfico do EQM versus tamanho da amostra $n$ para estimativa de $R$ considerando $\theta = 2.0$ . . . . .	52
3.18	Densidades à posteriori do parâmetro $\theta$ para os dados. . . . .	53
3.19	Funções de confiabilidade empírica e estimada. . . . .	55
4.1	Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros $\alpha = 2.0$ e $\beta = 0.5, 1.0$ e $1.5$ versus tamanho amostral no tempo $t = 0.3$ para estimação das confiabilidades $R = 0.6789, 0.8607$ e $0.9436$ , respectivamente. . . . .	67

4.2	Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros $\alpha = 2.0$ e $\beta = 0.5, 1.0$ e $1.5$ versus tamanho amostral no tempo $t = 2.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.3679, 0.3679$ e $0.3679$ , respectivamente. . . . .	67
4.3	Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros $\alpha = 2.0$ e $\beta = 0.5, 1.0$ e $1.5$ versus tamanho amostral no tempo $t = 4.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.2431, 0.1353$ e $0.0591$ , respectivamente. . . . .	68
4.4	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo $t = 0.3$ para estimação das confiabilidades $R = 0.6789, 0.8607$ e $0.9436$ . . . . .	68
4.5	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo $t = 2.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.3679, 0.3679$ e $0.3679$ . . . . .	69
4.6	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo $t = 4.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.2431, 0.1353$ e $0.0591$ . . . . .	69
4.7	Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros $\alpha = 2.0$ e $\beta = 0.5, 1.0$ e $1.5$ versus tamanho amostral no tempo $t = 0.3$ para estimação das confiabilidades $R = 0.6789, 0.8607$ e $0.9436$ , respectivamente. . . . .	71
4.8	Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros $\alpha = 2.0$ e $\beta = 0.5, 1.0$ e $1.5$ versus tamanho amostral no tempo $t = 2.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.3679, 0.3679$ e $0.3679$ , respectivamente. . . . .	71
4.9	Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros $\alpha = 2.0$ e $\beta = 0.5, 1.0$ e $1.5$ versus tamanho amostral no tempo $t = 4.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.2431, 0.1353$ e $0.0591$ , respectivamente. . . . .	72
4.10	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo $t = 0.3$ para estimação das confiabilidades $R = 0.6789, 0.8607$ e $0.9436$ . . . . .	72
4.11	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo $t = 2.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.3679, 0.3679$ e $0.3679$ . . . . .	73
4.12	Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo $t = 4.0$ para estimação das confiabilidades $R = 0.2431, 0.1353$ e $0.0591$ . . . . .	73
4.13	Funções de confiabilidade empírica e estimada. . . . .	75
4.14	Distribuições a posteriori para $R$ utilizando a priori de Jeffreys para os diferentes tempos $t$ . . . . .	76
4.15	Distribuições a posteriori para $R$ utilizando a priori Log-Gama para os diferentes tempos $t$ . . . . .	76

## Lista de Tabelas

---

3.1	Estimadores e variâncias do parâmetro $\theta$ para cada método de estimação. .	27
3.2	Estimadores e variâncias do parâmetro $R$ para cada priori. . . . .	33
3.3	Média, desvio-padrão e intervalo de confiança de 95% para o parâmetro $\theta$ segundo cada método de estimação. . . . .	53
3.4	Média e desvio-padrão para a confiabilidade $R$ para diferentes tempos $t$ . . .	54
3.5	Intervalos de confiança e HPD de 95% para a confiabilidade $R$ para diferentes tempos $t$ . . . . .	54
4.1	Média para a confiabilidade $R$ para diferentes tempos $t$ . . . . .	74
4.2	Intervalos de credibilidade de 95% para a confiabilidade $R$ para diferentes tempos $t$ . . . . .	75



---

## Lista de Siglas

EQM: Erro quadrático médio.

fda: Função de distribuição acumulada.

fdp: Função densidade de probabilidade.

GE: Gama Exponenciada.

HPD: Intervalo de Maior de Densidade a Posteriori, do inglês *Highest Posterior Density Interval*.

MCMC: Monte Carlo via Cadeia de Markov.

MLE: Estimador de Máxima Verossimilhança, do inglês *Maximum Likelihood Estimator*.

NLG: Log-Gama Negativa, do inglês *Negative Log-Gamma*.



# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>7</b>
<b>Abstract</b>	<b>9</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>10</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>12</b>
<b>Lista de Siglas</b>	<b>15</b>
<b>Capítulos</b>	
<b>1 Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2 Prioris não-informativas objetivas para os parâmetros</b>	<b>21</b>
2.1 Priori de Jeffreys . . . . .	21
2.2 Priori de Tibshirani . . . . .	22
<b>3 Análise Bayesiana para distribuição Gama Exponenciada sobre diferentes prioris para estimação da confiabilidade</b>	<b>23</b>
3.1 Distribuição Gama Exponenciada . . . . .	24
3.2 Estimação do parâmetro $\theta$ . . . . .	25
3.3 Estimação da Confiabilidade $R = R(t_0)$ . . . . .	27
3.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança . . . . .	27
3.3.2 Posteriori para $R = R(t_0)$ sob distribuições a priori para $\theta$ . . . . .	28
3.3.3 Posteriori para $R = R(t_0)$ sob distribuições a priori para $W = F(t_0)$ . . . . .	31
3.4 Priori Empírica para $\theta$ e $W$ . . . . .	34
3.4.1 Distribuição a priori Gama para $\theta$ . . . . .	34
3.4.2 Distribuição a priori Log Gama Negativa para $W$ . . . . .	35
3.5 Elicitação de Prioris Informativas para $\theta$ e $W$ . . . . .	37
3.5.1 Distribuição a priori Gama para $\theta$ . . . . .	37
3.5.2 Distribuição a priori Log-Gama Negativa para $W$ . . . . .	38
3.6 Funções preditivas de uma observação futura . . . . .	39
3.6.1 Distribuição a posteriori Gama para $\theta$ . . . . .	39
3.6.2 Distribuição a posteriori Log-Gama Negativa para $W$ . . . . .	41
3.7 Estudo de Simulação . . . . .	42
3.7.1 Estimação do parâmetro $\theta$ e da confiabilidade $R$ . . . . .	43
3.7.2 Estimação do parâmetro $R = R(t_0)$ por meio de prioris elicítadas . . . . .	50
3.8 Aplicação para dados reais . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Posterioris para confiabilidade <math>R</math> da distribuição Weibull</b>	<b>57</b>
4.1	Priori de Jeffreys . . . . .	58
4.2	Priori de Tibshirani . . . . .	62
4.3	Priori Log-Gama Negativa para $R$ . . . . .	63
4.4	Estudo de Simulação . . . . .	66
4.5	Aplicação para dados reais . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>77</b>
	<b>Referências</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Conceitos Teóricos, Métodos e Códigos</b>	<b>81</b>
A.1	Análise de Confiabilidade . . . . .	81
	A.1.1 Função de Confiabilidade . . . . .	81
	A.1.2 Função de Risco . . . . .	82
A.2	Inferência Bayesiana . . . . .	82
A.3	Aproximação de Laplace . . . . .	83
A.4	Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) - Algoritmo de Metrópolis-Hastings . . . . .	83
A.5	Distribuição Log-Gama Negativa . . . . .	85
A.6	Códigos em R para geração e estatísticas da distribuição Gama Exponenciada	86
	A.6.1 Geração de amostras . . . . .	86
	A.6.2 Calculando a constante $c$ para cada amostra . . . . .	87
	A.6.3 Calculando os estimadores de $\hat{\theta}$ para cada amostra . . . . .	87
	A.6.4 Calculando os estimadores de $\hat{R}$ para cada amostra . . . . .	87

# Introdução

A análise de confiabilidade (ou sobrevivência) é uma importante área da estatística. O estudo do tempo de vida de algum produto, segundo certas condições é uma ferramenta usada pelas indústrias tanto para obterem produtos com maior qualidade, como para diminuir os custos. Por exemplo, suponha um produto que fornecesse muitos defeitos, os fabricantes não só iriam ter um prejuízo, como ainda iriam perder a credibilidade no mercado.

Tal análise é um conjunto de técnicas estatísticas que tem como principal objetivo estudar o tempo de vida  $t$  de objetos ou indivíduos, até que certo evento de interesse aconteça. Este pode ser, a falha do componente em estudo ou até mesmo a morte de um paciente com certa doença. Na teoria, a função de confiabilidade (ou sobrevivência) nos fornece a probabilidade de uma observação  $i$  não falhar até o instante  $t_i$  (Colosimo; Giolo [4]).

Para realização da modelagem dos dados são usados distribuições de probabilidade e alguns métodos estatísticos, buscando um modelo que melhor se adeque ao conjunto de observações, para facilitar o estudo do comportamento dos dados. Na literatura, existem diversas distribuições de probabilidade que são utilizadas na análise de confiabilidade entretanto, pode-se destacar as mais conhecidas, como: distribuição Weibull, Gama, Log-Normal, Gumbel, entre outras (Colosimo; Giolo [4]).

No presente trabalho será utilizado dois métodos inferenciais: Clássico e Bayesiano. O primeiro faz uso apenas dos dados para realização das suas análises. O segundo, além de usar as informações do conjunto de observações ele pode acrescentar a informação de um especialista ou de estudos passados na análise, buscando uma melhor precisão para os resultados.

Na Inferência Bayesiana, combina-se a informação oriunda dos dados e a fornecida geralmente por um especialista, chamada priori. Esta combinação leva o nome de distribuição a posteriori (Box; Tiao [2]). Em alguns casos, essa posteriori não resulta em uma distribuição de probabilidade conhecida, se tornando assim um problema para estimação dos parâmetros. Para contornar isto, são usados os métodos de aproximação ou simulação, por exemplo, aproximação de Laplace e Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC).

Moala [14] utiliza tal aproximação para a função de confiabilidade a posteriori obtendo uma distribuição Log-Gama Negativa. O algoritmo MCMC é um método de simulação estocástica que busca aproximar uma distribuição de interesse por uma amostra extraída da posteriori (Gamerman; Lopes [7]). No passado, utilizava-se a aproximação de Laplace, porém havia grande dificuldade quando o modelo apresentava diversos parâmetros, com o surgimento do MCMC este problema foi resolvido.

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo de simulações para função de confiabilidade a posteriori por meio de dois métodos de aproximação (Laplace e MCMC), visando comparar ambos os resultados e verificar qual deles é o melhor. Será levado em conta nesta escolha o esforço computacional e outros ganhos que tal método pode fornecer aos usuários, como a obtenção de uma forma fechada para a distribuição a posteriori. O estudo de simulação para distribuição Gama Exponenciada (GE), levando em conta diferentes prioris é outro tópico trabalhado no presente trabalho, este nos apresenta resultados exatos e não necessita de métodos de aproximação para a obtenção das suas estimativas a posteriori; ao final deseja-se concluir qual das prioris obteve melhores resultados, tanto para estimação de  $\theta$  como para confiabilidade  $R$ . Diferente da GE, a distribuição Weibull necessita de métodos de aproximação para obtenção das estimativas a posteriori, essa distribuição é muito comum para modelagem de dados, também será usada neste trabalho, mas com enfoque diferente da Gama Exponenciada.

O presente trabalho está organizado na forma de capítulos, onde o primeiro deles traz uma breve introdução. No segundo capítulo, são apresentadas prioris não-informativas objetivas para os parâmetros, onde é ilustrado a teoria para obtenção das prioris de Jeffreys e Tibshirani. No terceiro, é exposta toda teoria para distribuição Gama Exponenciada, além dos resultados da distribuição a posteriori para o parâmetro e confiabilidade  $R$ , assim como o estudo de simulação e um exemplo prático. No quarto capítulo, apresenta-se a posteriori da confiabilidade  $R$  da distribuição Weibull para as prioris de Jeffreys, Tibshirani e Log-Gama Negativa obtidas pelo o método de aproximação de Laplace, além de ser realizado um estudo de simulação para comparação destes resultados com o método MCMC, também sendo apresentado um exemplo para dados reais. Por fim, no quinto, são expostos a conclusão deste trabalho e as propostas para trabalhos futuros.

# Prioris não-informativas objetivas para os parâmetros

Existem muitas aplicações práticas para a abordagem Bayesiana, particularmente ao lidar com amostras pequenas. No entanto, quando trabalha-se a abordagem Bayesiana você é obrigado a especificar uma distribuição a priori que descreva o conhecimento prévio sobre os parâmetros.

Nesta seção, um conjunto mais completo de importantes prioris não-informativas é examinado. O foco está na comparação da priori de Jeffreys, MDIP e priori de Tibshirani. A motivação para este trabalho é em parte a importância do uso de prioris não-informativas como MDIP e Tibshirani na Inferência Bayesiana, o que não tem sido frequentemente considerado na literatura e parte da necessidade de considerar ambos os parâmetros igualmente de interesse. Além disso, este estudo comparativo será realizado para diferentes tamanhos de amostra.

Como forma de comparar as prioris não-informativas propostas, examina-se as probabilidades de cobertura frequentista dos intervalos de credibilidade. A cobertura frequencialista é uma abordagem importantes para a escolha de uma priori não-informativa. Assim como vícios e erros médios quadráticos, que serão levados em conta para escolha da priori.

## 2.1 Priori de Jeffreys

Uma das mais conhecidas prioris não-informativas foi proposta por Jeffreys [9]. Se a variável  $X$  tem distribuição densidade dada por  $f(x|\boldsymbol{\theta})$ , onde  $\boldsymbol{\theta}$  é parâmetro desconhecido (escalar ou vetor), então a priori de Jeffreys, denotada por  $\pi_J(\boldsymbol{\theta})$ , é proporcional à raiz quadrada do determinante da Informação de Fisher  $I(\boldsymbol{\theta})$ , isto é,

$$\pi_J(\boldsymbol{\theta}) \propto \sqrt{I(\boldsymbol{\theta})} \quad (2.1)$$

e ainda, tem-se que

$$I_{ij}(\boldsymbol{\theta}) = -E \left( \frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right). \quad (2.2)$$

Box e Tiao [2] explicam a obtenção da priori não-informativa de Jeffreys em termos da verossimilhança.

A priori de Jeffreys é amplamente utilizada devido à sua propriedade de invariância sob transformações um-para-um de  $\boldsymbol{\theta}$  (veja, Box e Tiao [2] para mais detalhes).

## 2.2 Priori de Tibshirani

Um método alternativo para obter prioris não-informativas foi proposto por Tibshirani [22] usando a informação que  $\phi$  é o parâmetro de interesse. Esta priori requer que os intervalos Bayesianos tenham suas probabilidades de cobertura independente de  $\phi$ . Para obter isto, Tibshirani propôs reparametrizar o modelo em termos dos parâmetros ortogonais  $(\sigma, \lambda)$  (veja em Cox e Reid [6]) onde  $\sigma$  é o parâmetro de interesse e  $\lambda$  é o de perturbação ortogonal. Assim, o método especifica a priori não-informativa da seguinte forma

$$\pi(\sigma, \lambda) = g(\lambda) \sqrt{I_{11}(\sigma, \lambda)} \quad (2.3)$$

onde  $g(\lambda) > 0$  é uma função arbitrária e  $I_{11}(\sigma, \lambda)$  o primeiro elemento da matriz de Informação de Fisher com os parâmetros ortogonais.

Para a distribuição  $f(x|\alpha, \beta)$ , será proposto uma reparametrização ortogonal  $(\sigma, \lambda)$ , sendo  $\sigma = \alpha$  o parâmetro de interesse e  $\lambda$  o parâmetro ortogonal. O parâmetro ortogonal  $\lambda$  é obtido resolvendo-se a equação diferencial

$$i_{\beta\beta}^* \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = -i_{\alpha\beta}^*, \quad (2.4)$$

sendo  $i_{\beta\beta}^* = I_{22}(\alpha, \beta)$  e  $i_{\alpha\beta}^* = I_{12}(\alpha, \beta)$  elementos da matriz de Fisher (para mais informações, veja em Tibshirani [22]).

# Análise Bayesiana para distribuição Gama Exponenciada sobre diferentes prioris

Gupta, Gupta e Gupta [8] introduziu a distribuição Gama Exponenciada (GE), usada em problemas envolvendo análise de sobrevivência. Tal distribuição tem a vantagem de ser uniparamétrica, além de sua função de risco, possuir as formas crescente e de banheira, sendo assim uma alternativa às distribuições Gama e Weibull. Para mais detalhes sobre esta distribuição, veja Shawky e Bakoban ([19], [21], [20], [18]).

Muitos trabalhos foram propostos na literatura com a distribuição Gama Exponenciada, eles geralmente abordam problemas para dados censurados. Shawky e Bakoban [17] apresentam estimadores Bayesianos e Não-Bayesianos para as funções do parâmetro, confiabilidade e risco da distribuição GE no caso de dados censurados completos e tipo II.

Neste capítulo, uma análise totalmente Bayesiana será desenvolvida sob prioris não-informativas e informativas, como Jeffreys [9] e Uniforme, bem como distribuição Gama com hiperparâmetros conhecidos para estimação do parâmetro  $\theta$ , além das funções acumulada e de confiabilidade, para um valor fixo do tempo de vida da distribuição GE. Será demonstrado três classes de prioris que levam a uma distribuição a posteriori Gama para o parâmetro e uma distribuição Log-Gama Negativa para a função acumulada, portanto, a distribuição a posteriori da função de confiabilidade também é apresentada em expressões explícitas. Desta forma, será mostrado que a família de distribuições Gama fornece uma distribuição a priori conjugada para o parâmetro  $\theta$  da distribuição GE.

Além disso, apresenta estimativas Bayesianas exatas como esperança a posteriori, variância, intervalo de credibilidade e HPD também são explicitamente obtidos para o parâmetro  $\theta$ , das funções acumuladas e de confiabilidade para um dado tempo de vida  $t$ , mostrando que a Inferência Bayesiana é um bom método estatístico para dados análise sob a distribuição Gama Exponenciada.

Será mostrado também que a priori Jeffreys e a Máxima Verossimilhança fornecem a mesma estimativa para  $\theta$ , então a Máxima Verossimilhança pode ser usado como informação para computar os hiperparâmetros da distribuição Gama e então para obter uma priori Gama empírica.

Um estudo de simulação também foi realizado para determinar qual priori fornece menos informações, principalmente para um tamanho da amostra pequeno. Mostra-se que o uso das prioris Jeffreys e Gama produz melhores resultados que a Uniforme para o

parâmetro de GE. Por outro lado, não há diferença significativa entre eles para a estimativa da função de confiabilidade.

### 3.1 Distribuição Gama Exponenciada

A distribuição Gama Exponenciada com o parâmetro  $\theta$ , denotado por GE, tem densidade dada por

$$f(t) = \theta t e^{-t} [1 - e^{-t}(t + 1)]^{\theta-1}, \tag{3.1}$$

para todo  $t > 0$  e  $\theta > 0$  é o parâmetro de forma.

A função acumulada correspondente é dada por,

$$F(t) = [1 - e^{-t}(t + 1)]^\theta. \tag{3.2}$$

Como a função acumulada (3.2) não pode ser explicitamente invertida, então os quantis podem ser obtidos resolvendo-se numericamente para a raiz da equação dada por

$$e^{-t}(t + 1) + u^{\frac{1}{\theta}} - 1 = 0, \tag{3.3}$$

onde  $u$  é um valor aleatório de uma *Uniforme*[0, 1].

As funções de sobrevivência e risco associados a (3.1) são dadas, respectivamente, por

$$R(t) = 1 - [1 - e^{-t}(t + 1)]^\theta, \tag{3.4}$$

e

$$r(t) = \frac{\theta t e^{-t} [1 - e^{-t}(t + 1)]^{\theta-1}}{1 - [1 - e^{-t}(t + 1)]^\theta}. \tag{3.5}$$

As Figuras (3.1) e (3.2) apresentam os gráficos das funções de densidade, sobrevivência e risco da distribuição Gama Exponenciada para diferentes valores de  $\theta$ , respectivamente. Observe que a função de risco  $r(t)$  é crescente quando  $\theta > \frac{1}{2}$  e tem forma de banheira para  $\theta < \frac{1}{2}$ .

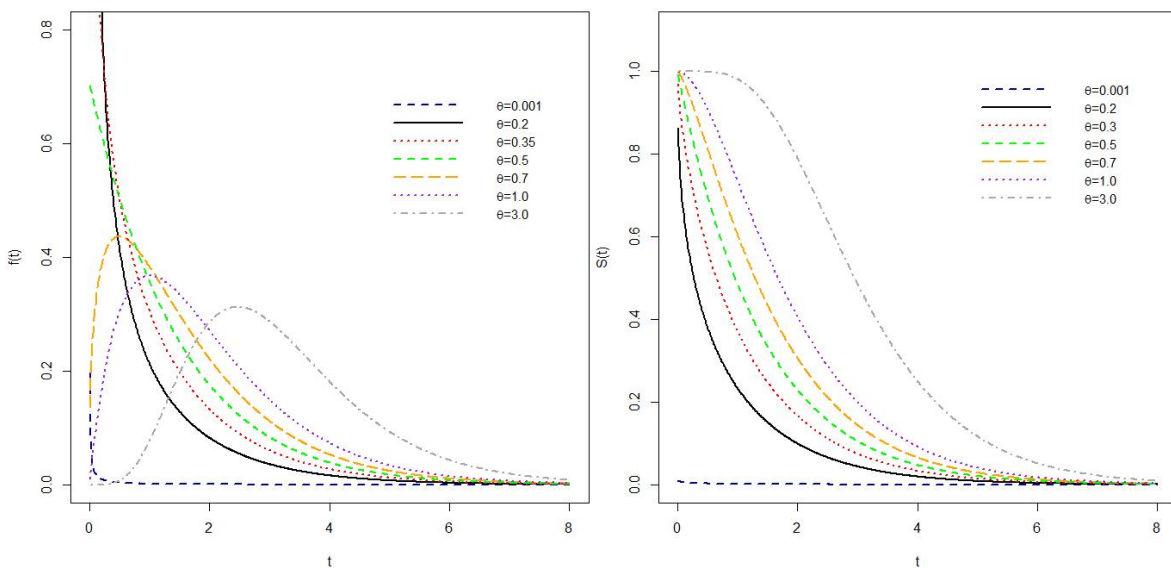


Figura 3.1: Gráficos das funções de densidade e sobrevivência da distribuição Gama Exponenciada para diferentes valores de  $\theta$ .

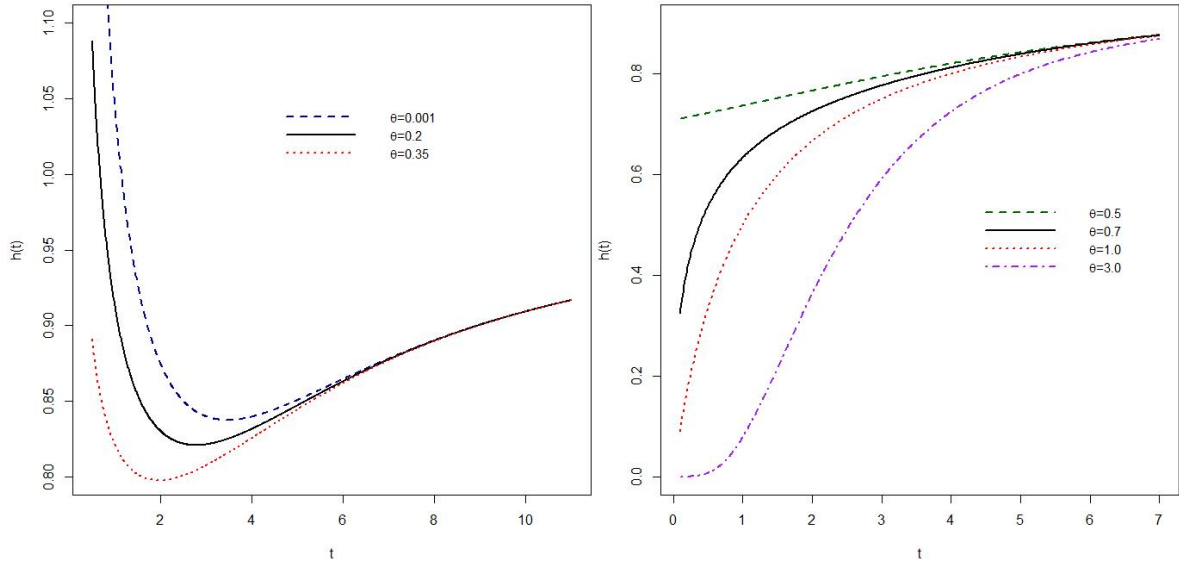


Figura 3.2: Gráficos das função de risco da distribuição Gama Exponenciada para diferentes valores de  $\theta$ .

### 3.2 Estimação do parâmetro $\theta$

Agora, suponha  $T_1, \dots, T_n$  uma amostra aleatória para tempos de vida independentes e identicamente distribuídos oriundos da distribuição Gama Exponenciada (3.1), então a função de verossimilhança é dada por

$$L(\theta) \propto \theta^n \prod_{i=1}^n [1 - e^{-t_i}(t_i + 1)]^{\theta-1}. \tag{3.6}$$

**Proposição 1** O estimador de máxima verossimilhança (MLE) para  $\theta$  é dado por

$$\hat{\theta} = \frac{n}{\ln\left(\frac{1}{c}\right)}, \tag{3.7}$$

onde  $c = \prod_{i=1}^n [1 - e^{-t_i}(t_i + 1)] < 1$ .

**Demonstração.** O estimador de máxima verossimilhança para  $\theta$  é obtido através da resolução da equação  $\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(L(\theta)) = 0$ . A função log da verossimilhança é dada por

$$n \ln(\theta) + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln[1 - e^{-t_i}(t_i + 1)] = 0.$$

Então, o MLE é a solução da equação

$$\frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln[1 - e^{-t_i}(t_i + 1)] = 0.$$

■

A Informação de Fisher para  $\theta$  obtida por  $I(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln(L(\theta))\right)$  e é dada por

$$I(\theta) = \frac{n}{\theta^2}. \quad (3.8)$$

Sobre a condição de regularidade tem-se que, para  $n$  grande, um intervalo de confiança  $100(1 - \gamma)\%$  aproximado para  $\theta$  é dado por

$$P \left( \frac{\hat{\theta}}{1 + \frac{z_{\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}} \leq \theta \leq \frac{\hat{\theta}}{1 - \frac{z_{\frac{\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}} \right) = 1 - \gamma, \quad (3.9)$$

onde  $z_{\frac{\gamma}{2}}$  é um valor da normal padrão correspondente a um nível de significância  $\frac{\gamma}{2}$ .

Para as análises Bayesianas da distribuição GE, assumi-se três distribuições a priori para  $\theta$  representando uma situação com pequena informação a priori disponível sobre o parâmetro, tais como a priori Uniforme, Gama e de Jeffreys.

Uma priori não-informativa bem conhecida foi proposta por Jeffreys [9]. Tal priori é obtida pela Informação de Fisher dada em (3.8) como

$$\pi_J(\theta) = \sqrt{I(\theta)}. \quad (3.10)$$

A priori de Jeffreys é bastante usada devido sua propriedade de invariância um para um sobre a transformação dos parâmetros. Para explicar a priori não-informativa de Jeffreys, veja em Box e Tiao [2].

De (3.8) e (3.10) a priori de Jeffreys para  $\theta$  é dada por

$$\pi_J(\theta) \propto \frac{1}{\theta}. \quad (3.11)$$

**Proposição 2 (a)** *Sob a priori de Jeffreys (3.11) para o parâmetro  $\theta$ , a posteriori correspondente é uma distribuição Gama com parâmetros  $\alpha^* = n$  e  $\beta^* = \ln \left( \frac{1}{c} \right)$ .*

**(b)** *Se a priori para  $\theta$  é uma distribuição Gama( $\alpha, \beta$ ) ( $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ ) com densidade*

$$\pi_G(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \forall \theta > 0, \quad (3.12)$$

*então a posteriori correspondente é uma distribuição Gama com os parâmetros  $\alpha^* = n + \alpha$  e  $\beta^* = \beta + \ln \left( \frac{1}{c} \right)$ .*

**(c)** *Assumindo uma priori Uniforme para  $\theta$ , então a posteriori é uma distribuição Gama com parâmetros  $\alpha^* = n + 1$  e  $\beta^* = \ln \left( \frac{1}{c} \right)$ .*

**Demonstração.** Imediato, apenas use  $p(\theta|\mathbf{t}) \propto L(\theta)\pi(\theta)$ . Suponha que a priori de Jeffreys (3.11) combinada com função de verossimilhança (3.6), então a densidade a posteriori para  $\theta$  é obtida como

$$p(\theta|\mathbf{t}) \propto \frac{1}{\theta} \theta^n \prod_{i=1}^n [1 - e^{-t_i(t_i + 1)}]^{\theta-1} = \theta^{n-1} e^{-\theta \ln \left( \frac{1}{c} \right)},$$

que é,

$$p(\theta|\mathbf{t}) = \frac{[\ln \left( \frac{1}{c} \right)]^n}{\Gamma(n)} \theta^{n-1} e^{-\theta \ln \left( \frac{1}{c} \right)}.$$

As demonstrações de **(b)** e **(c)** são similares. ■

Note que o estimador de máxima verossimilhança obtido em (3.7) é igual ao estimador Bayesiano obtido sob a priori Jeffreys e com a mesma variância.

A partir da Proposição (2), observa-se que a distribuição a posteriori para o parâmetro  $\theta$  da GE para diferentes formulações a priori é distribuição Gama. Além disso, quando os hiperparâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  tendem a zero, então as distribuições a posteriori são as mesmas usando a priori de Jeffreys e, portanto, os estimadores Bayesianos em ambas prioris são os mesmos que MLE.

Pode-se observar que a posteriori sob a priori  $Gama(\alpha, \beta)$  é igual a posteriori sob a priori Uniforme se  $\alpha = 1$  e  $\beta = 0$ .

As médias e variâncias a posteriori em cada priori são obtidas da distribuição  $Gama(\alpha^*, \beta^*)$  com

$$E(\theta|\mathbf{t}) = \frac{\alpha^*}{\beta^*}; Var(\theta|\mathbf{t}) = \frac{\alpha^*}{(\beta^*)^2}, \tag{3.13}$$

e um intervalo de credibilidade  $100(1 - \gamma)\%$  para  $\theta$  é dado por  $(\theta_L, \theta_U)$  onde

$$\theta_L = qgamma\left(\frac{\gamma}{2}, \alpha^*, \beta^*\right); \theta_U = qgamma\left(1 - \frac{\gamma}{2}, \alpha^*, \beta^*\right). \tag{3.14}$$

A Tabela (3.1) mostra as prioris juntamente com as correspondentes médias e variâncias a posteriori e resumos de MLE.

Tabela 3.1: Estimadores e variâncias do parâmetro  $\theta$  para cada método de estimação.

Método	Priori	Estimador $\hat{\theta}$	Variância
<i>MLE</i>	---	$\frac{n}{\ln(\frac{1}{c})}$	$\frac{n}{[\ln(c)]^2}$
<i>Priori Uniforme</i>	$\pi_U \propto 1$	$\frac{n+1}{\ln(\frac{1}{c})}$	$\frac{n+1}{[\ln(c)]^2}$
<i>Priori Gama</i>	$\pi_G \propto \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$	$\frac{n+\alpha}{\beta + \ln(\frac{1}{c})}$	$\frac{n+\alpha}{[\beta + \ln(c)]^2}$
<i>Priori de Jeffreys</i>	$\pi_J \propto \frac{1}{\theta}$	$\frac{n}{\ln(\frac{1}{c})}$	$\frac{n}{[\ln(c)]^2}$

### 3.3 Estimação da Confiabilidade $R = R(t_0)$

Nesta Seção, as abordagens de máxima verossimilhança e Bayesiana são aplicadas para estimar a confiabilidade  $R = R(t_0)$  da distribuição GE para algum  $t_0$ .

#### 3.3.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

Como o estimador de máxima verossimilhança é invariante sob transformação, então o MLE da confiabilidade  $R$  é dado por

$$\hat{R} = 1 - [1 - e^{-t_0}(t_0 + 1)]^{\hat{\theta}}, \tag{3.15}$$

onde  $\hat{\theta} = \frac{n}{\ln(\frac{1}{c})}$  é o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro  $\theta$ .

Para obter o intervalo de credibilidade  $100(1 - \gamma)\%$  para  $R$  considere a seguinte aproximação assintótica

$$(\hat{R} - R) \sim N \left( 0, \frac{[g'(\hat{\theta})]^2}{I_F(\theta)} \right), \quad (3.16)$$

para  $n \rightarrow \infty$ , onde  $g'(\theta) = -[1 - e^{-t_0}(t_0 + 1)]^\theta \ln[1 - e^{-t_0}(t_0 + 1)]$ .

Desta forma, o intervalo de credibilidade  $100(1 - \gamma)\%$  estimado para  $R$  é dado por

$$P \left( \hat{R} - z_{\frac{\gamma}{2}} \frac{g'(\hat{\theta})}{\sqrt{I_F(\theta)}} \leq R \leq \hat{R} + z_{\frac{\gamma}{2}} \frac{g'(\hat{\theta})}{\sqrt{I_F(\theta)}} \right) = 1 - \gamma. \quad (3.17)$$

### 3.3.2 Posteriori para $R = R(t_0)$ sob distribuições a priori para $\theta$

Os estimadores de Bayes podem ser obtidos para a mesma classe de prioris discutidas na Seção (3.2). As distribuições a posteriori para o parâmetro de confiabilidade são obtidas através da reparametrização dada pela função acumulada  $W = F(t_0) = [1 - e^{-t_0}(t_0 + 1)]^\theta$  para um específico valor de  $t_0$ , que é, das distribuições a posteriori  $p(W|\mathbf{t})$ .

A função acumulada  $W = F(t_0) = [1 - e^{-t_0}(t_0 + 1)]^\theta$  é uma função monotonicamente crescente para  $\theta$ , então há uma transformação de um para um entre  $W$  e  $\theta$ . Portanto, o único inverso é  $\theta = -v \left[ \ln \left( \frac{1}{W} \right) \right]$  para que a distribuição de  $W$  possa ser determinada a partir da distribuição de  $\theta$  como

$$p(W|\mathbf{t}) = \left( -v \left[ \ln \left( \frac{1}{W} \right) \right] \middle| \mathbf{t} \right) \left| \frac{dW}{d\theta} \right| = p \left( -v \left[ \ln \left( \frac{1}{W} \right) \right] \middle| \mathbf{t} \right) \left( \frac{-v}{w} \right), \quad (3.18)$$

onde  $v = \frac{1}{\ln[1 - e^{-t_0}(t_0 + 1)]}$  é uma constante negativa.

**Proposição 3 (a)** *Ao considerar a priori de Jeffreys (3.11) para  $\theta$  então a posteriori para o parâmetro  $W$  é uma distribuição Log-Gama Negativa, denotada por  $NLG(k, \lambda)$ , com parâmetro  $\lambda = v \ln(c)$  e  $k = n$ , e densidade dada por*

$$p(w|\mathbf{t}) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \left[ \ln \left( \frac{1}{w} \right) \right]^{k-1} w^{\lambda-1}, 0 < w < 1, \quad (3.19)$$

onde  $v = \frac{1}{\ln[1 - e^{-t_0}(t_0 + 1)]}$  e  $t_0$  é um valor fixo.

**(b)** *Ao considerar a priori Uniforme para  $\theta$  então a posteriori para o parâmetro  $W$  é uma  $NLG(k, \lambda)$ , com parâmetro  $\lambda = v \ln(c)$  e  $k = n + 1$ .*

**(c)** *Ao considerar a priori Gama( $\alpha, \beta$ ) (3.12) para  $\theta$  então a posteriori para o parâmetro  $W$  é uma  $NLG(k, \lambda)$ , com parâmetro  $\lambda = v[\ln(c) - \beta]$  e  $k = n + \alpha$ .*

**Demonstração.** Lembrando que a priori de Jeffreys é invariante sob transformação e usando a equação (3.18) então depois de algumas manipulações algébricas obtêm-se a distribuição à posteriori.

Locks [11] fornece uma discussão sobre a distribuição de Log-Gama Negativa. É particularmente útil usá-la para modelar dados sem informações a priori na análise de confiabilidade, porque o domínio consiste em valores no intervalo  $[0, 1]$ , conforme necessário

para um valor de variável de confiabilidade.

Note que as distribuições a posteriori, sob prioris Uniforme e de Jeffreys são casos especiais da posteriori sob priori Gama com parâmetros  $(\alpha, \beta) = (1, 0)$  e  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ , respectivamente. ■

**Lema 1** *Se  $X$  é uma variável aleatória com distribuição Log-Gama Negativa com parâmetros  $\lambda$  e  $k$ , então a variável aleatória  $Z = 2\lambda \ln\left(\frac{1}{X}\right)$  tem uma distribuição  $\chi^2$  com  $2k$  graus de liberdade.*

**Demonstração.** Seja a variável aleatória  $NLG(k, \alpha)$  com densidade dada por

$$f_X(x) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \left( \ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{k-1} x^{\lambda-1}, 0 < x < 1. \quad (3.20)$$

Se  $Z = 2\lambda \ln\left(\frac{1}{X}\right)$  então  $X = e^{-\frac{Z}{2\lambda}}$  e  $\frac{dx}{dz} = \frac{-1}{2\lambda} e^{-\frac{Z}{2\lambda}}$ . Consequentemente, a densidade de  $Z$  é obtida da seguinte forma

$$f_Z(z) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dz} \right| = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \left( \ln\left(e^{\frac{z}{2\lambda}}\right) \right)^{k-1} \left( e^{-\frac{z}{2\lambda}} \right)^{\lambda-1} \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{z}{2\lambda}}. \quad (3.21)$$

Depois de algumas manipulações algébricas, têm-se a densidade de  $Z$

$$f_Z(z) = \frac{1}{2^{\frac{2k}{2}} \Gamma\left(\frac{2k}{2}\right)} z^{\frac{2k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2\lambda}}. \quad (3.22)$$

■

Assim, a média e variância a posteriori, intervalos credibilidade e HPD para a função de confiabilidade  $R = R(t_0)$  são dados na Proposição (4).

**Proposição 4** *Como a distribuição a posteriori para  $W$  é uma  $NLG(k, \lambda)$  dada na Proposição (3) então:*

(a) *A distribuição a posteriori para a função de confiabilidade  $R = R(t_0)$  em cada tempo  $t_0$ , sob a consideração das prioris para  $\theta$  da Proposição (2), é dada por*

$$p(R|\mathbf{t}) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \left[ \ln\left(\frac{1}{1-R}\right) \right]^{k-1} (1-R)^{\lambda-1}, 0 < R < 1. \quad (3.23)$$

(b) *A média e variância a posteriori para  $R = R(t_0)$  são dadas por*

$$E(R|\mathbf{t}) = 1 - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-k}; \text{Var}(R|\mathbf{t}) = \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-k} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-2k}, \quad (3.24)$$

*respectivamente, onde  $\lambda$  e  $k$  são os correspondentes parâmetros das posterioris para cada priori proposta.*

(c) *O intervalo de credibilidade  $100(1 - \gamma)\%$  para  $R$  denotado por  $(R_L, R_U)$  é dado por*

$$R_L = 1 - \exp\left\{-\frac{\chi_{\frac{\gamma}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\}; R_U = 1 - \exp\left\{-\frac{\chi_{1-\frac{\gamma}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\}. \quad (3.25)$$

(d) O intervalo HPD  $100(1 - \gamma)\%$  para  $R$  é obtido pela solução do sistema de equações dado por

$$1 - \gamma = Q\left(2\lambda \ln\left(\frac{1}{1 - H_L}\right)\right) - Q\left(2\lambda \ln\left(\frac{1}{1 - H_U}\right)\right) \quad (3.26)$$

e

$$\left(\frac{\ln(1 - H_L)}{\ln(1 - H_U)}\right)^{k-1} \left(\frac{1 - H_L}{1 - H_U}\right)^{\lambda-1} - 1 = 0. \quad (3.27)$$

### Demonstração.

(a) Trivial.

(b) A esperança e variância de uma variável aleatória com distribuição Log-Gama Negativa com parâmetros  $(k, \lambda)$  são dadas por

$$E(X) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-k}; \text{Var}(X) = \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-k} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-2k}. \quad (3.28)$$

Como  $R(t_0) = 1 - W(t_0)$  e da Proposição (3), os resultados são provados.

(c) Se  $W$  tem uma distribuição de Log-Gama Negativa com parâmetros  $k$  e  $\lambda$  então a variável aleatória  $2\lambda \ln\left(\frac{1}{W}\right)$  tem uma distribuição  $\chi^2$  com  $2k$  graus de liberdade.

Desta distribuição pode-se construir um intervalo de credibilidade  $100(1 - \gamma)\%$   $(W_L, W_U)$  para  $W$  resolvendo o seguinte sistema de equações

$$\int_0^{W_L} p(w|\mathbf{t})dw = \frac{\gamma}{2}; \int_{W_U}^{\infty} p(w|\mathbf{t})dw = \frac{\gamma}{2},$$

para os limites  $W_L$  e  $W_U$ , qual solução é dada por

$$W_L = \exp\left\{-\frac{\chi_{1-\frac{\gamma}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\}; W_U = \exp\left\{-\frac{\chi_{\frac{\gamma}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\}. \quad (3.29)$$

onde  $\chi_{\gamma}^2(2k)$  denota o  $\gamma^{th}$  percentil de uma distribuição Qui-Quadrado.

(d) O intervalo HPD  $100(1 - \gamma)\%$  para  $R$  é obtido a partir da solução simultânea das seguintes equações:

$$P(H_L \leq R \leq H_U) = \int_{H_L}^{H_U} p(R|\mathbf{t})dR = 1 - \gamma \quad (3.30)$$

e

$$p(H_L|\mathbf{t}) = p(H_U|\mathbf{t}) \quad (3.31)$$

Agora, desde que  $2\lambda \ln\left(\frac{1}{W}\right)$  tem uma distribuição  $\chi^2(2k)$  então, após algumas álgebras,

$$\begin{aligned} 1-\gamma &= P(H_L \leq R \leq H_U) = P\left(2\lambda \ln\left(\frac{1}{1-H_U}\right) \leq 2\lambda \ln\left(\frac{1}{W}\right) \leq 2\lambda \ln\left(\frac{1}{1-H_L}\right)\right) \\ &= Q\left(2\lambda \ln\left(\frac{1}{1-H_U}\right)\right) - Q\left(2\lambda \ln\left(\frac{1}{1-H_L}\right)\right), \end{aligned}$$

onde  $Q(z)$  é a função acumulada da distribuição  $\chi^2(2k)$ .

■

### 3.3.3 Posteriores para $R = R(t_0)$ sob distribuições a priori para $W = F(t_0)$

O objetivo agora é apresentar uma análise Bayesiana alternativa que permita usar uma distribuição a priori para o parâmetro  $W = F(t_0)$ , com valor fixo  $t_0$ . A ideia é considerar a função de verossimilhança (3.6) dependendo do parâmetro  $W$  e assumindo diferentes distribuições a priori para  $W$ .

Considerando a função de verossimilhança (3.6) com parâmetro  $\theta$  substituído por  $\theta = v \ln(W)$ , então a verossimilhança pode ser escrita em função de  $W$  e é dada por

$$L(W) \propto (v \ln(W))^n e^{v \ln(W)}.$$

Como  $v < 0$  e  $\ln(W) < 0$  pode-se escrever  $L(W) \propto (-v)^n (-\ln(W))^n e^{v \ln(W)}$  e  $v$  é uma constante então

$$L(W) \propto \left(\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)^n e^{v \ln(W)}.$$

Note que  $e^{v \ln(W)} = w^{v \ln(c)}$  então a função de verossimilhança para o parâmetro  $W$  é dada por

$$L(W) \propto \left(\ln\left(\frac{1}{w}\right)\right)^n w^{v \ln(c)}. \quad (3.32)$$

Embora a posteriori para  $W$  sob a priori de Jeffreys para o parâmetro  $\theta$  foi obtida da Proposição (3) através da transformação, temos:

**Proposição 5** *A priori de Jeffreys para  $W = F(T_0)$ , com valor fixo  $t_0$ , é dada por*

$$\pi(W) \propto \frac{1}{W \ln\left(\frac{1}{W}\right)}, 0 < W < 1. \quad (3.33)$$

**Demonstração.** Da função de verossimilhança (3.32) temos as derivadas de primeira e segunda ordem da função log da verossimilhança, que são dadas respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial W} \ln L(W) = \frac{n}{W \ln(W)} + \frac{\lambda}{W}$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial W^2} \ln L(W) = -\frac{n(\ln(W) + 1)}{W^2 (\ln(W))^2} - \frac{\lambda}{W^2}.$$

A Informação de Fisher para  $W$  é obtida como  $I(W) = E\left(-\frac{\partial^2 \ln(L(W))}{\partial W^2}\right)$  e dada por

$$I(W) = \frac{n(\ln(W) + 1)}{W^2(\ln(W))^2} + \frac{vE(\ln(c))}{W^2}, \quad (3.34)$$

onde  $c = \prod_{i=1}^n [1 - e^{-t_i}(t_i + 1)]$ .

Após manipulações algébricas obtêm-se

$$E(\ln(c)) = \sum_{i=1}^n E(\ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))) = n\theta \int_0^1 (\ln(u))u^{\theta-1}du = -\frac{n}{\theta} - \frac{n}{v\ln(W)}. \quad (3.35)$$

Portanto,

$$I(W) = \frac{n(\ln(W) + 1)}{W^2(\ln(W))^2} + \frac{nv}{vW^2\ln(W)} = \frac{n}{W^2 \left(\ln\left(\frac{1}{W}\right)\right)^2}. \quad (3.36)$$

A priori de Jeffreys é obtida da Informação de Fisher como  $\pi_J(W) = \sqrt{I(W)}$  resultando em (3.33). ■

De acordo com [12], a distribuição Log-Gama Negativa representa um procedimento alternativo na seleção de distribuições a priori quando o profissional está mais bem informado sobre as propriedades de confiabilidade do que apenas as características de taxa de falha do item em estudo. Além disso, outra especificação a priori para a função de confiabilidade consiste em atribuir uma *Uniforme*(0, 1).

**Proposição 6 (a)** *Ao considerar a priori Uniforme, definida no intervalo (0,1), para o parâmetro W, então a posteriori é uma distribuição NLG(k, λ) com parâmetros λ = vln(c) + 1 e k = n + 1.*

**(b)** *Ao considerar a distribuição NLG(a, b) como priori para o parâmetro W com densidade dada por*

$$\pi(W) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left( \ln\left(\frac{1}{W}\right) \right)^{a-1} W^{b-1}, 0 < W < 1, \quad (3.37)$$

*então a posteriori correspondente é uma distribuição NLG(k, λ) com parâmetros λ = vln(c) + b e k = n + a.*

**Demonstração.**

**(a)** A posteriori é obtida da equação (3.32).

**(b)** A posteriori é obtida multiplicando a verossimilhança (3.32) e a priori  $\pi(W)$  dada em (3.37) resultando

$$p(W|\mathbf{t}) \propto \left( \ln\left(\frac{1}{w}\right) \right)^n w^{v\ln(c)}\pi(W), \quad (3.38)$$

que tem a forma da NLG para as duas prioris: Uniforme e NLG.

■

**Observação 1** *A NLG pode ser usada como uma distribuição a "priori conjugada" para confiabilidade no modelo Gama Exponenciada.*

**Observação 2** Há alguns casos particulares usando a priori NLG para  $W$  como é apresentado a seguir:

- (I) Para  $a = 1$  e  $b = 1$  tem-se alguma posteriori sob uma priori Uniforme para  $W$ .
- (II) Para  $a = 1$  e  $b = 0$  então resulta uma posteriori para  $W$  obtida a partir da posteriori para o parâmetro  $\theta$  sob priori Uniforme e transformação.
- (III) Para  $a = 0$  e  $b = 0$  então resulta alguma posteriori para  $W$  obtida a partir da posteriori para o parâmetro  $\theta$  sob priori de Jeffreys.

**Observação 3** Note que a posteriori sob priori Uniforme para  $W$  é diferente da posteriori sob priori Uniforme para o parâmetro  $\theta$  devido ao fato desta não ser uma priori invariante.

A média a posteriori, variância e intervalos para  $R$  são obtidos da mesma forma como indicado na Seção (3.4.2). A Tabela (3.2) fornece as médias e variâncias à posteriori sob essas duas priors

Tabela 3.2: Estimadores e variâncias do parâmetro  $R$  para cada priori.

Priori	Estimador	Variância
Uniforme para $\theta$	$1 - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)}\right)^{-(n+1)}$	$\left(1 + \frac{2}{v \ln(c)}\right)^{-(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)}\right)^{-2(n+1)}$
Gama para $\theta$	$1 - \left(1 + \frac{1}{v[\ln(c)+\beta]}\right)^{-(n+\alpha)}$	$\left(1 + \frac{2}{v[\ln(c)+\beta]}\right)^{-(n+\alpha)} - \left(1 + \frac{1}{v[\ln(c)+\beta]}\right)^{-2(n+\alpha)}$
Jeffreys para $F(t_0)$	$1 - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)}\right)^{-n}$	$\left(1 + \frac{2}{v \ln(c)}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)}\right)^{-2n}$
Uniforme para $F(t_0)$	$1 - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)+1}\right)^{-(n+1)}$	$\left(1 + \frac{2}{v \ln(c)+1}\right)^{-(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)+1}\right)^{-2(n+1)}$
NLG para $F(t_0)$	$1 - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)+b}\right)^{-(n+a)}$	$\left(1 + \frac{2}{v \ln(c)+b}\right)^{-(n+a)} - \left(1 + \frac{1}{v \ln(c)+b}\right)^{-2(n+a)}$

### 3.4 Priori Empírica para $\theta$ e $W$

Nesta seção, será discutido as questões associadas à geração de uma priori empírica considerando a priori  $\Gamma(\alpha, \beta)$  para o parâmetro  $\theta$  e  $NGL(\alpha, \beta)$  para  $W$ .

Na ausência de conhecimento preciso da distribuição a priori, o procedimento de estimativa empírica de Bayes pode ser utilizado.

Os métodos empíricos de Bayes são procedimentos para inferência estatística em que a distribuição a priori é estimada a partir dos dados.

No método empírico de Bayes, os hiperparâmetros são estimados pelo método clássico, tal como estimação de máxima verossimilhança. Pode-se então construir a "verossimilhança" relacionando os dados com os hiperparâmetros.

#### 3.4.1 Distribuição a priori Gama para $\theta$

**Proposição 7** *Suponha que a priori  $\pi(\theta; \alpha, \beta)$  dada pela distribuição gama com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e função densidade  $f(t|\theta)$  da variável aleatória  $T$  dada em (3.1), então a função densidade dos hiperparâmetros  $(\alpha, \beta)$  é dada por*

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\alpha\beta^\alpha t e^{-t}}{[1 - e^{-t}(t+1)] [\beta - \ln(1 - e^{-t}(t+1))]^{\alpha+1}}. \quad (3.39)$$

**Demonstração.** Suponha que a priori  $\pi(\theta; \alpha, \beta)$  é dada, então a função densidade (3.1) em  $(\alpha, \beta)$  é dada por

$$f(t; \alpha, \beta) = \int_0^\infty f(t|\theta)\pi(\theta; \alpha, \beta)d\theta. \quad (3.40)$$

Considerando a função de densidade (3.1) e assumindo a priori gama (3.12), a integral em (3.40) torna-se

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t e^{-t}}{\Gamma(\alpha)[1 - e^{-t}(t+1)]} \int_0^\infty \theta [1 - e^{-t}(t+1)]^\theta \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta. \quad (3.41)$$

Seja  $d = 1 - e^{-t}(t+1)$ , então o integrando em (3.41) assume a forma da gama resultando em

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t e^{-t}}{\Gamma(\alpha)[1 - e^{-t}(t+1)]} \int_0^\infty \theta^{(\alpha+1)-1} e^{-(\beta - \ln(d))\theta} d\theta, \quad (3.42)$$

com  $\ln(d) < 0$  e completando com a constante normalizadora, a prova é finalizada. ■

Suponha que  $T_1, T_2, \dots, T_n$  seja uma amostra aleatória da distribuição Gama Exponenciada (3.1). O objetivo é estimar  $(\alpha, \beta)$ , então a função de verossimilhança para os hiperparâmetros  $(\alpha, \beta)$  determinado pela densidade  $f(t; \alpha, \beta)$  dada em (3.39) é expressa como

$$L(\alpha, \beta) \propto \frac{\alpha^n \beta^{n\alpha}}{\prod_{i=1}^n [\beta - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))]^{\alpha+1}}. \quad (3.43)$$

O log da função (3.43) é dada por

$$l(\alpha, \beta) = \ln(L(\alpha, \beta)) = n[\ln(\alpha)] + n\alpha[\ln(\beta)] - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln [\beta - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))]. \quad (3.44)$$

O MLE  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  para  $(\alpha, \beta)$  é obtido por meio das derivadas parciais da equação (3.44) igualando-as a zero, e resolvendo para ambos os parâmetros. Os MLEs resultantes são:

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln [\hat{\beta} - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))] - n(\ln(\hat{\beta}))}, \quad (3.45)$$

e

$$\frac{n^2}{\beta - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1)) - n\beta \ln(\beta)} - \frac{n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))}}{\sum_{i=1}^n \ln [\beta - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))] - n(\ln(\beta))} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))} = 0. \quad (3.46)$$

Agora será considerado a priori gama  $\pi(\theta, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$  dada em (3.12) com hiperparâmetros  $(\hat{\alpha}; \hat{\beta})$  como a distribuição priori empírica para  $\theta$  e a posteriori correspondente é dada pela distribuição gama com parâmetros  $\alpha^* = n + \hat{\alpha}$  e  $\beta^* = \hat{\beta} + \ln(\frac{1}{c})$ . Conseqüentemente o estimador Bayesiano empírico para  $\theta$  é dado por  $\hat{\theta} = E(\theta|\mathbf{t}) \frac{n+\hat{\alpha}}{\hat{\beta}+\ln(\frac{1}{c})}$ .

### 3.4.2 Distribuição a priori Log Gama Negativa para $W$

O objetivo desta seção é obter uma priori empírica e um estimador empírico de Bayes para o parâmetro  $W$ .

**Proposição 8** *Suponha que a priori  $\pi(\theta; \alpha, \beta)$  dada pela distribuição Log Gama Negativa com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e função densidade  $f(t|\theta)$  da variável aleatória  $T$  dada em (3.1), então a função densidade dos hiperparâmetros  $(\alpha, \beta)$  é dada por*

$$f(t; \alpha, \beta) = - \frac{\nu \alpha \beta^\alpha t e^{-t}}{[1 - e^{-t}(t + 1)] \left( \beta + \frac{\ln(1 - e^{-t}(t+1))}{\ln(1 - e^{-t_0}(t_0+1))} \right)^{\alpha+1}}. \quad (3.47)$$

**Demonstração.** Para começar o desenvolvimento, substituímos o parâmetro  $\theta$  por  $\theta = \nu \ln(W)$  na função densidade (3.1). Com essa mudança, a densidade de interesse torna-se

$$f(t|W) = \nu(\ln(W)) t e^{-t} [1 - e^{-t}(t + 1)]^{\nu \ln(W)}. \quad (3.48)$$

Agora, seguindo o caminho semelhante ao procedimento dado na seção anterior, temos a função de densidade nos hiperparâmetros  $(\alpha, \beta)$  é dada por

$$f(t; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} f(t|W)\pi(W; \alpha, \beta)dW. \quad (3.49)$$

Considerando a função densidade (3.48) e assumindo uma distribuição a priori Log Gama Negativa NGL( $\alpha, \beta$ ) para o parâmetro  $W$  com densidade (3.19), a integral (3.49) torna-se

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t e^{-t}}{\Gamma(\alpha)[1 - e^{-t}(t + 1)]} \int_0^1 \theta [1 - e^{-t}(t + 1)]^{\nu \ln(W)} \left( \ln \left( \frac{1}{W} \right) \right)^{\alpha-1} W^{\beta-1} dW. \quad (3.50)$$

Seja  $d = 1 - e^{-t}(t + 1)$ , então o integrando em (3.50) assume a forma da NGL( $\alpha, \beta$ ) resultando em

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t e^{-t}}{\Gamma(\alpha)[1 - e^{-t}(t + 1)]} \int_0^1 \left( \ln \left( \frac{1}{W} \right) \right)^{(\alpha+1)-1} W^{[\beta + \nu \ln(d)]-1} dW, \quad (3.51)$$

com  $\nu \ln(d) > 0$  e completando com a constante normalizadora, a prova é finalizada. ■

Os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser estimados pelo método MLE. Portanto, suponha que tenhamos tempos de vida independentes e identicamente distribuídos  $T_1, \dots, T_n$  da Gama Exponenciada (3.1), então a função de verossimilhança para os hiperparâmetros ( $\alpha, \beta$ ) é dada por

$$L(\alpha, \beta) = \frac{\alpha^n \beta^{n\alpha}}{\prod_{i=1}^n [\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))]^{\alpha+1}}, \quad (3.52)$$

e o log da função de verossimilhança dada na Equação (3.52) é expressa por

$$l(\alpha, \beta) = \ln(L(\alpha, \beta)) = n[\ln(\alpha)] + n\alpha[\ln(\beta)] - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln [\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))]. \quad (3.53)$$

Tomando as derivadas parciais de primeira ordem de  $l(\alpha, \beta)$  em relação a  $\alpha$  e  $\beta$ , e igualando-os a zero, temos

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\alpha, \beta) = \frac{n}{\alpha} + n[\ln(\beta)] - \sum_{i=1}^n \ln [\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))] = 0, \quad (3.54)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \beta} l(\alpha, \beta) = \frac{n\alpha}{\beta} - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))} = 0. \quad (3.55)$$

Então, o estimador de máxima verossimilhança de  $\alpha$  é dado por

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln [\hat{\beta} + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))] - n[\ln(\hat{\beta})]}, \quad (3.56)$$

onde  $\hat{\beta}$ , é o MLE de  $\beta$  obtido da solução de

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1)) - n\beta \ln(\beta)} - \frac{n \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))}}{\sum_{i=1}^n \ln [\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))] - n(\ln(\beta))} \\ - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\beta + \nu \ln(1 - e^{-t_i}(t_i + 1))} = 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

### 3.5 Elicitação de Prioris Informativas para $\theta$ e $W$

Elicitação é o processo de incorporar formalmente o conhecimento de um especialista em Análise Bayesiana. Suponha que, em vez de uma priori não informativa para o parâmetro e a confiabilidade, do interesse seja de uma distribuição a priori mais informativa.

Nesta seção, será fornecido uma metodologia que permite que os especialistas usem seus conhecimentos sobre a confiabilidade de um item por meio de declarações dos percentis. Esse método requer a derivação da distribuição preditiva à priori para elicitação.

Uma Análise Bayesiana específica requer que os valores sejam atribuídos aos parâmetros anteriores,  $a$  e  $b$ . O objetivo desta seção é apresentar dois métodos pelos quais as experiências, julgamentos e crenças de engenharia podem ser usados para atribuir valores  $a$  e  $b$ . Um método baseia-se na perícia e no conhecimento sobre a taxa de falha. Enquanto a outra técnica assume informações sobre a confiabilidade,  $R(t) = 1 - F(t)$ . Ambos os métodos exigem que um engenheiro forneça dois valores de percentil que são usados para resolver as equações simultâneas para determinar os valores de  $a$  e  $b$ .

#### 3.5.1 Distribuição a priori Gama para $\theta$

Primeiramente, considere a priori  $\pi(\theta)$  com distribuição Gama e os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , que são os hiperparâmetros precisam ser elicitados.

**Proposição 9** *Supondo que a priori  $\pi(\theta; \alpha, \beta)$  dada pela distribuição Gama com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  e a função de distribuição  $F(t|\theta)$  da variável aleatória  $T$  dada em (3.2), então a função distribuição preditiva a priori é dada por*

$$F(t; \alpha, \beta) = \left( \frac{\beta}{\beta - \ln(1 - e^{-t}(t + 1))} \right)^\alpha. \quad (3.58)$$

**Demonstração.** Suponha que a priori  $\pi(\theta; \alpha, \beta)$  é dada, então a função distribuição baseada na distribuição preditiva a priori é dada por

$$F(t; \alpha, \beta) = P(T \leq t) = \int_0^\infty F(t|\theta)\pi(\theta; \alpha, \beta)d\theta. \quad (3.59)$$

Assumindo a função acumulada em (3.2) e priori Gama em (3.12), a integral (3.59) torna-se

$$F(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty [1 - e^{-t}(t+1)]^\theta \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta} d\theta. \quad (3.60)$$

Seja  $d = 1 - e^{-t}(t+1)$ , então a integral em (3.59) assume a forma gama, resultando em

$$F(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-(\beta - \ln(d))\theta} d\theta, \quad (3.61)$$

com  $\ln(d) < 0$  e completando com a constante de normalização, a prova é finalizada. ■

Supondo que um indivíduo tenha um entendimento básico de probabilidade, ele pode estar disposto a especificar percentis, por exemplo, declarar um valor  $p$  tal que  $p = F(t_p)$ , dado em (3.58).

Na prática, existe um conjunto de valores para os hiperparâmetros que satisfaz (3.58) com qualquer valor de  $t_p$ . Algumas evidências empíricas sugerem que a obtenção de três percentis dá resultados mais confiáveis.

Uma vez os três percentis  $t_{p_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , são fornecidos, podemos configurar uma função  $\zeta(\alpha, \beta)$  de tal forma que os hiperparâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  devem ser escolhidos minimizando essa função

$$\zeta(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 \left[ p_i - \left( \frac{\beta}{\beta - \ln(1 - e^{-t_i}(t_i+1))} \right)^\alpha \right]^2. \quad (3.62)$$

Como os especialistas geralmente são capazes de fornecer um "melhor palpite" com um intervalo de confiança, é sensato perguntar ao especialista os valores correspondentes aos percentis (digamos, 25, 50, 75, 90 e 95%).

### 3.5.2 Distribuição a priori Log-Gama Negativa para $W$

Será apresentado uma abordagem semelhante para selecionar uma priori  $NLG(\alpha, \beta)$  usando percentis da função de confiabilidade. Contudo, para análise, é conveniente reparametrizar a função acumulada (3.2) como dependente do parâmetro  $W$  ao invés de  $\theta$ .

Será usado o mesmo procedimento de elicitacão da Seção 3.5.1, usando a distribuição a priori preditiva que elicitamos os hiperparâmetros da distribuição a priori NLG.

**Proposição 10** *Suponha a priori  $\pi(W)$  dada pela distribuição a priori Log-Gama Negativa com parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  com densidade (3.37) e função distribuição  $F(t|\theta)$  de uma variável aleatória  $T$  dada em (3.2), então distribuição à priori da função preditiva é dada por*

$$F(t; \alpha, \beta) = \left( \frac{\beta}{\beta + vd} \right)^\alpha = \left( \frac{\beta}{\beta + \frac{\ln(1 - e^{-t}(t+1))}{\ln(1 - e^{-t_0}(t_0+1))}} \right)^\alpha. \quad (3.63)$$

**Demonstração.** Para começar o desenvolvimento, transforma-se o parâmetro  $\theta$  para  $\theta = v \ln(W)$  na função distribuição (3.2). Com esta mudança, a distribuição de interesse torna-se

$$F(t|W) = \ln(1 - e^{-t}(t+1))^{v \ln(W)}. \quad (3.64)$$

Agora, o caminho similar ao procedimento dado na Seção 3.4.1, temos distribuição à priori da função preditiva dada por

$$F(t; \alpha, \beta) = \int_0^{\infty} F(t|W)\pi(W)dW. \quad (3.65)$$

Considerando a função acumulada (3.63) e assumindo uma distribuição priori Log-Gama Negativa  $NLG(\alpha, \beta)$  para  $W$  com densidade (3.37), a integral (3.65) torna-se

$$F(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \ln(1 - e^{-t}(t+1))^{v \ln(W)} \left( \ln \left( \frac{1}{W} \right) \right)^{\alpha-1} W^{\beta-1} dW. \quad (3.66)$$

Seja  $d = 1 - e^{-y}(y+1)$ , então a integral em (3.66) toma a forma de uma  $NLG(\alpha, \beta)$  resultando em

$$F(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left( \ln \left( \frac{1}{W} \right) \right)^{\alpha-1} W^{(\beta+v \ln(d))-1} dW, \quad (3.67)$$

com  $v \ln(d) > 0$  e completando com a constante normalizadora, a prova é finalizada. ■

Assumindo que um especialista pode resumir seu conhecimento da confiabilidade de um item através de declarações de percentis  $t_p$  os valores desejados de  $(\alpha, \beta)$  são então obtidos minimizando

$$\zeta(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^3 [p_i - F(t_{p_i}; \alpha, \beta)]^2. \quad (3.68)$$

Note que  $F(t_{p_i}; \alpha, \beta)$  representa a função distribuição preditiva a priori dada em (3.68) aplicada para os percentis  $t_{p_i}$ .

## 3.6 Funções preditivas de uma observação futura

A previsão Bayesiana desempenha um papel importante em diferentes áreas da estatística aplicada. Considere ainda a estimativa da densidade preditiva a posteriori de uma observação futura, com base nos dados atuais.

### 3.6.1 Distribuição a posteriori Gama para $\theta$

Suponha que os dados observados  $T_1, \dots, T_n$  com densidade GE  $f(t|\theta)$  dada em (3.1). Seja  $p(\theta|\mathbf{t})$  a função densidade a posteriori do parâmetro  $\theta$ , então a função densidade preditiva a posteriori de uma observação futura  $y$  dado os dados observados é definida como

$$f(y|\mathbf{t}) = \int_{\Theta} \mathbf{f}(y|\theta)\mathbf{p}(\theta|\mathbf{t})d\theta. \quad (3.69)$$

**Proposição 11** *Se a função de densidade posteriori do parâmetro  $\theta$  é uma distribuição Gama dada na Proposição (2) então a função densidade preditiva a posteriori de uma observação futura y dado os dados observados é definida como*

$$f(y|\mathbf{t}) = \frac{\alpha^*(\beta^*)^{\alpha^*}}{(\beta^* - \ln(\mathbf{1} - e^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1})))^{\alpha^*+1}} \frac{\mathbf{y}e^{-y}}{(\mathbf{1} - e^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1}))}, \quad (3.70)$$

onde  $\alpha^*$  e  $\beta^*$  são parâmetros dados de acordo com a distribuição a priori usada.

**Demonstração.** Da Proposição (2), a densidade a posteriori para  $\theta$  sobre as três prioris propostas é uma distribuição  $Gama(\alpha^*, \beta^*)$  com densidade dada por

$$p(\theta|\mathbf{t}) = \frac{(\beta^*)^{\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} \theta^{\alpha^*-1} e^{-\theta\beta^*}. \quad (3.71)$$

Agora, de (3.69) e (3.71), a função densidade preditiva a posteriori de uma observação futura  $y$  é obtida como

$$f(y|\mathbf{t}) = \int_0^{\infty} \theta \mathbf{y} e^{-y} [\mathbf{1} - e^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1})]^{\theta-1} \frac{(\beta^*)^{\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} \theta^{\alpha^*-1} e^{-\theta\beta^*} d\theta = \frac{(\beta^*)^{\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} \mathbf{y} e^{-y} \int_0^{\infty} d^{\theta-1} \theta^{\alpha^*} e^{-\theta\beta^*} d\theta, \quad (3.72)$$

onde  $d = 1 - e^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1})$ .

Pode-se escrever  $d^{\theta-1} = \frac{1}{d} e^{\theta \ln(d)}$  então a preditiva torna-se

$$f(y|\mathbf{t}) = \frac{(\beta^*)^{\alpha^*}}{(d)\Gamma(\alpha^*)} \mathbf{y} e^{-y} \int_0^{\infty} \theta^{\alpha^*} e^{-\theta[\beta^* - \ln(d)]} d\theta. \quad (3.73)$$

Note que a integral em (3.73) consiste em uma densidade de uma distribuição Gama com parâmetros  $\alpha^* + 1$  e  $\beta^* - \ln(d)$ . Portanto, completando o integrando em (3.73) com a constante normalizadora  $\frac{(\beta^* - \ln(d))^{\alpha^*+1}}{\Gamma(\alpha^*+1)}$  provando assim essa Proposição. Note que  $-\ln(d) > 0$  devido a  $d < 1$ . ■

A função de distribuição preditiva de uma observação futura  $y$  também pode ser obtida.

**Proposição 12** *Se a função de densidade a posteriori do parâmetro  $\theta$  é uma distribuição Gama dada na Proposição (2) então a função distribuição preditiva a posteriori de uma observação futura  $y$  dado os dados observados é definida como*

$$F(y|\mathbf{t}) = \left( \frac{\beta^*}{\beta^* - \ln(\mathbf{1} - e^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1}))} \right)^{\alpha^*}, \quad (3.74)$$

onde  $\alpha^*$  e  $\beta^*$  são parâmetros dados de acordo com a distribuição a priori usada.

**Demonstração.** A demonstração é similar a Proposição (11), mas apenas calculando a função

$$F(y|\mathbf{t}) = \mathbf{P}(\mathbf{T} \leq y|\mathbf{t}) = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(\mathbf{T} \leq y|\theta) \mathbf{p}(\theta|\mathbf{t}) d\theta. \quad (3.75)$$

De (3.2) e (3.71) têm-se

$$F(y|\mathbf{t}) = \int_0^{\infty} [\mathbf{1} - e^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1})]^{\theta} \frac{(\beta^*)^{\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} \theta^{\alpha^*-1} e^{-\theta\beta^*} d\theta = \frac{(\beta^*)^{\alpha^*}}{\Gamma(\alpha^*)} \int_0^{\infty} \theta^{\alpha^*-1} e^{-\theta[\beta^* - \ln(d)]} d\theta. \quad (3.76)$$

Depois de resolver a integral da distribuição gama, a prova está completa. ■

Outro problema importante é construir um intervalo preditivo bilateral da observação futura  $y$ , dado os dados observados.

Portanto, pode-se obter intervalo de predição bilateral  $100(1 - \gamma)\%$   $[y_L, y_U]$  para  $y$  pela solução das duas equações

$$P(Y < y_L|\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{y}_L|\mathbf{t}) = \frac{\gamma}{2} \text{ e } P(\mathbf{Y} < \mathbf{y}_U|\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{y}_U|\mathbf{t}) = 1 - \frac{\gamma}{2}. \quad (3.77)$$

Não é possível obter as soluções analiticamente, então necessário aplicar técnicas numéricas adequadas para resolver um sistema de integrais.

### 3.6.2 Distribuição a posteriori Log-Gama Negativa para $W$

Pode-se também derivar a densidade preditiva de uma única resposta futura  $y$  com base na densidade a posteriori para o parâmetro  $W = F(t_0)$  sobre as prioris Uniforme, Gama e Log-Gama Negativa dadas na Seção (3.3).

Seja  $p(w|\mathbf{t})$  a função de densidade a posteriori do parâmetro  $W$ , então a densidade preditiva a posteriori de uma observação futura  $y$  dado os dados observados é definida como

$$f(y|\mathbf{t}) = \int_0^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{y}|\mathbf{w})\mathbf{p}(\mathbf{w}|\mathbf{t})d\mathbf{w}. \quad (3.78)$$

**Proposição 13** *Suponha que os dados observados  $T_1, T_2, \dots, T_n$  com densidade GE  $f(t|\theta)$  dada em (3.1) e  $W = F(t_0)$  é a função acumulada para um específico  $t_0$ . Se a densidade a posteriori  $p(w|\mathbf{t})$  do parâmetro  $W$  é a distribuição Log-Gama Negativa dada nas Proposições (3) e (6), então a densidade preditiva a posteriori de uma observação futura  $y$  sob os dados observados é dado por*

$$f(y|\mathbf{t}) = -\frac{\mathbf{y}v\mathbf{k}\lambda^{\mathbf{k}}}{(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1})) [\lambda + v\ln(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-y}(\mathbf{y} + \mathbf{1}))]^{\mathbf{k}+1}}, \quad (3.79)$$

onde  $\lambda$  e  $k$  são parâmetros dados de acordo com a distribuição a priori usada.

**Demonstração.** A partir das Proposições (3) e (6), a densidade a posteori para  $W$  assumindo que uma das três prioris propostas é uma distribuição Log-Gama Negativa  $NLG(\lambda, k)$  com densidade dada por

$$p(w|\mathbf{t}) = \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{\Gamma(\mathbf{k})} \left[ \ln \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{w}} \right) \right]^{\mathbf{k}-1} \mathbf{w}^{\lambda-1}, \mathbf{0} < \mathbf{w} < \mathbf{1}. \quad (3.80)$$

A densidade (3.1) na parametrização  $W$  com  $\theta = v\ln(W)$  é dada por

$$p(y|W) = -\frac{yv}{d} \left[ \ln \left( \frac{\mathbf{1}}{w} \right) \right] w^{v\ln(d)}, \quad (3.81)$$

onde  $d = 1 - e^{-y}(y + 1)$ .

Agora, de (3.78), (3.80) e (3.81), a função densidade preditiva de uma observação futura  $y$  é obtida como

$$\begin{aligned}
 f(y|\mathbf{t}) &= - \int_0^1 \frac{\mathbf{y}\mathbf{v}}{\mathbf{d}} \left[ \ln \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{w}} \right) \right] \mathbf{w}^{\mathbf{v}\ln(\mathbf{d})} \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{\Gamma(\mathbf{k})} \left[ \ln \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{w}} \right) \right]^{\mathbf{k}-1} \mathbf{w}^{\lambda-1} \mathbf{d}\mathbf{w} = \\
 &= - \frac{\mathbf{y}\mathbf{v}\lambda^{\mathbf{k}}}{\mathbf{d}\Gamma(\mathbf{k})} \int_0^1 \mathbf{w}^{(\mathbf{v}\ln(\mathbf{d})+\mathbf{k})-1} \left[ \ln \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{w}} \right) \right]^{(\mathbf{k}+1)-1} \mathbf{d}\mathbf{w}. \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

Note que a integral em (3.82) envolve a densidade de uma distribuição *NGL* com parâmetros  $k+1$  e  $v\ln(d)+\lambda$ . Assim, completando o integrando em (3.82) com a constante normalizadora  $\frac{[\mathbf{v}\ln(\mathbf{d})+\lambda]^{\mathbf{k}+1}}{\Gamma(\mathbf{k}+1)}$ , têm-se a demonstração. ■

O sinal negativo na densidade (3.79) é explicado pelo fato de que  $v$  é negativo.

A função distribuição preditiva de uma observação futura  $y$  pode ser obtida.

**Proposição 14** *Sob condições da Proposição (13) então a função distribuição preditiva a posteriori de uma observação futura  $y$  dado os dados observados é dada por*

$$F(y|\mathbf{t}) = \left[ \frac{\lambda}{\lambda + \mathbf{v}\ln(\mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\mathbf{y}}(\mathbf{y} + \mathbf{1}))} \right]^{\mathbf{k}}, \tag{3.83}$$

onde  $\lambda$  e  $k$  são parâmetros dados de acordo com a distribuição a priori usada para  $W$ .

**Demonstração.** A prova é semelhante à Proposição (13), mas apenas avaliando a função

$$F(y|\mathbf{t}) = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{y}|\mathbf{w})\mathbf{p}(\mathbf{w}|\mathbf{t})\mathbf{d}\mathbf{w}.$$

De (3.2) e (3.80) têm-se que

$$\begin{aligned}
 F(y|\mathbf{t}) &= \int_0^1 [1 - \mathbf{e}^{-\mathbf{y}}(\mathbf{y} + \mathbf{1})]^{\mathbf{v}\ln(\mathbf{w})} \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{\Gamma(\mathbf{k})} \left[ \ln \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{w}} \right) \right]^{\mathbf{k}-1} \mathbf{w}^{\lambda-1} \mathbf{d}\mathbf{w} = \\
 &= \frac{\lambda^{\mathbf{k}}}{\Gamma(\mathbf{k})} \int_0^1 \left[ \ln \left( \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{w}} \right) \right]^{\mathbf{k}-1} \mathbf{w}^{(\lambda+\mathbf{v}\ln(\mathbf{w}))} \mathbf{d}\mathbf{w}.
 \end{aligned}$$

Ao resolver a integral, a prova se completa. ■

### 3.7 Estudo de Simulação

O foco nesta seção é realizar uma simulação de Monte Carlo, a fim de escolher as prioris mais informativas para a confiabilidade  $R$ , considerando valores diferentes para um valor específico fixo de  $t_0$ . Para isso, usamos o viés da média e o erro quadrático médio (EQM) para diferentes tamanhos de amostra e valores de parâmetro.

A simulação é baseada em 1000 amostras considerando os seguintes tamanhos de amostra  $n = 5, 15, 50$  e  $100$  e valores diferentes para o parâmetro representando ambas as formas, banheira e crescente, da função de risco da distribuição GE, respectivamente.

### 3.7.1 Estimação do parâmetro $\theta$ e da confiabilidade $R$

Nesta seção foi realizada uma simulação de Monte Carlo para comparar o desempenho de todos os estimadores propostos nas seções anteriores e escolher uma priori que melhor represente uma situação de informação fraca sobre o parâmetro  $\theta$  e a confiabilidade  $R$ . Os valores verdadeiros para o parâmetro foram considerados como  $\theta = 0.2, 0.7, 2.0$  e  $7.0$ .

O foco deste é o viés, o erro quadrático médio (EQM) e a probabilidade de cobertura de intervalos de 95% para diferentes tamanhos amostrais e valores de parâmetro.

Os valores do viés, EMQ e as probabilidades de cobertura dos intervalos de credibilidade para são apresentados nas Figuras (3.3) á (3.5).

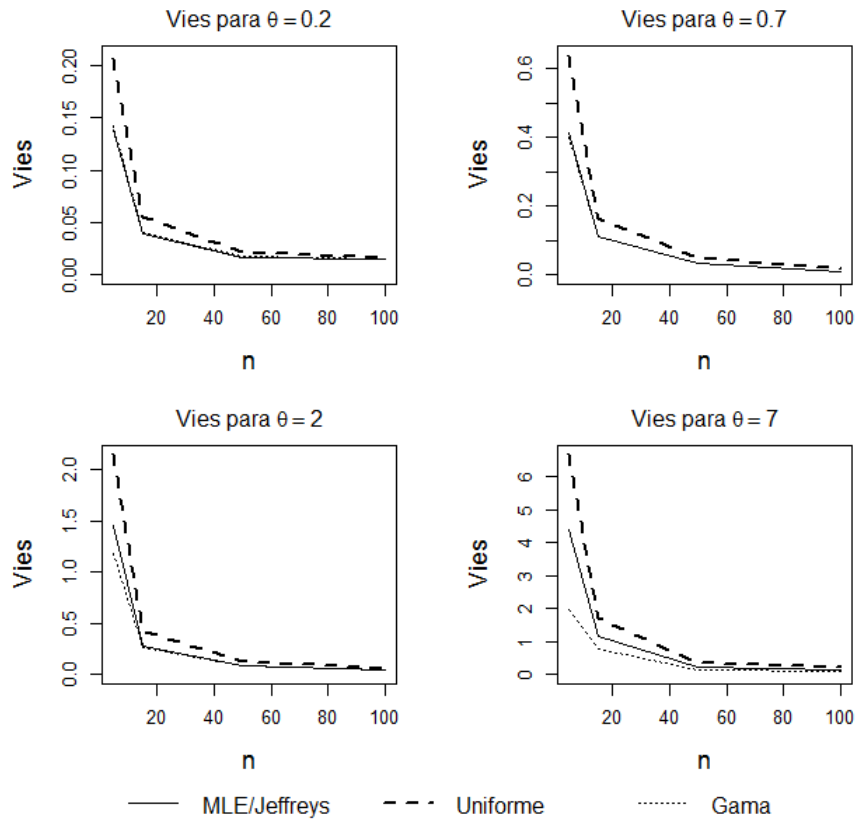


Figura 3.3: Gráfico do viés versus tamanho da amostra para estimação de  $\theta$ .

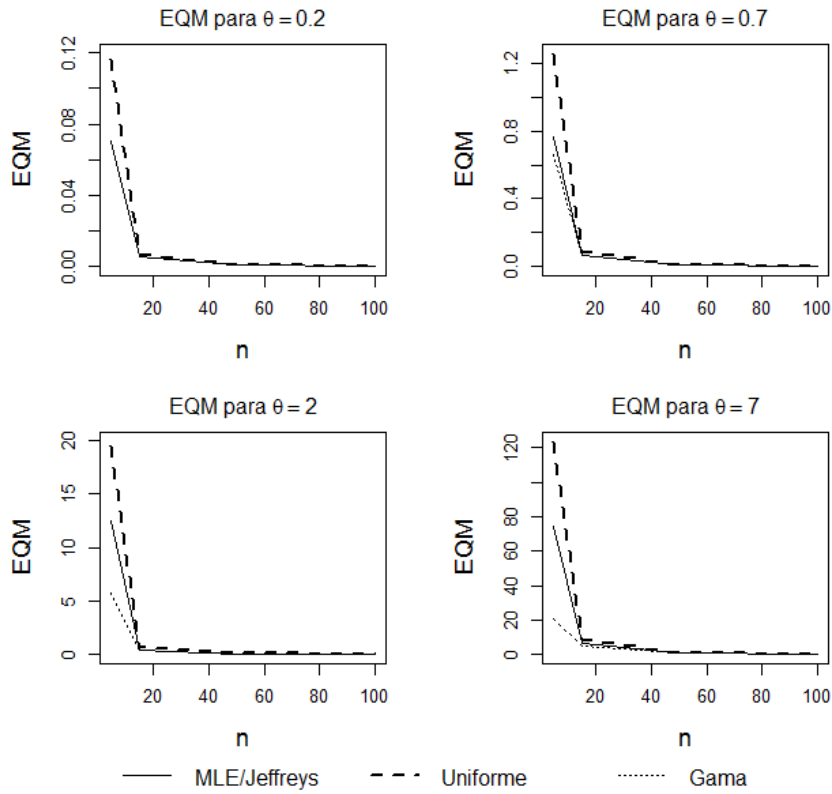


Figura 3.4: Gráfico do EQM versus tamanho da amostra para estimação de  $\theta$ .

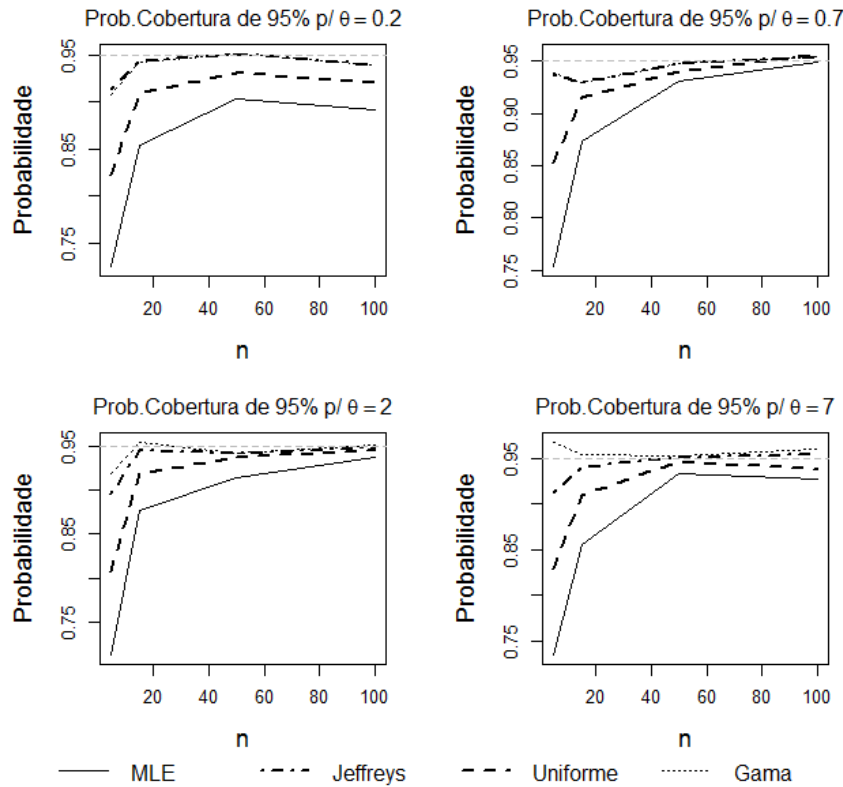


Figura 3.5: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho da amostra para estimação de  $\theta$ .

Nas Figuras (3.3) e (3.4), fica claro que tanto o viés quanto o EQM de todos os estimadores diminuem quando o tamanho da amostra aumenta, como era de se esperar. Os vícios e EQM de todos os estimadores tendem a zero para  $n$  maior que 20 e são diferentes quando  $n = 5$  e  $\theta \geq 2$ . A priori Uniforme não é recomendada quando o tamanho da amostra é pequeno. Não há praticamente nenhuma diferença entre as medidas quando o tamanho da amostra é maior que 50 para todas abordagens propostas.

Na Figura (3.5), observa-se que as probabilidades de cobertura para o parâmetro  $\theta$  estão mais próximas do nível nominal correspondente para o tamanho da amostra  $n \geq 50$ , enquanto há grande diferença entre os valores para  $n > 50$ , exceto entre as prioris de Jeffreys e Gama cujo desempenho pode ser considerado o mesmo. No entanto, quando o tamanho da amostra aumenta, as probabilidades de cobertura para a MLE continuam ruins se comparado aos outros casos, enquanto no caso da priori Uniforme é apenas razoável.

No geral, a priori Gama tem uma performance um pouco melhor do que a priori de Jeffreys.

Será apresentado também simulações de Monte Carlo realizadas para comparar o desempenho das abordagens Bayesiana e MLE com relação à estimativa da função de confiabilidade para valores fixos de tempo de falha.

Nas Figuras (3.6)-(3.13), as estatísticas de desempenho do MLE, Bayes sob as prioris propostas descritas neste documento para a estimativa da função de confiabilidade são exibidas para várias combinações de parâmetros em tamanhos de amostra,  $n = 5, 15, 50$  e  $100$ , e  $t = 0.5$  e  $1.5$ .

Os valores dos vícios, EQM, probabilidade de cobertura e intervalos HPD são apresentados nestas figuras.

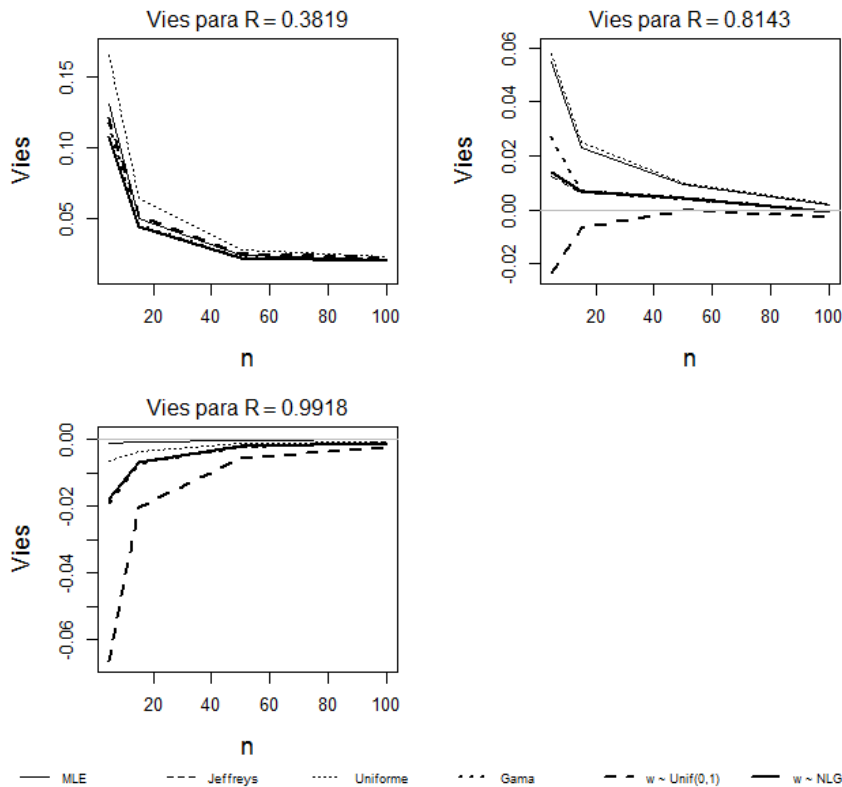


Figura 3.6: Gráfico do viés versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 0.5$ .

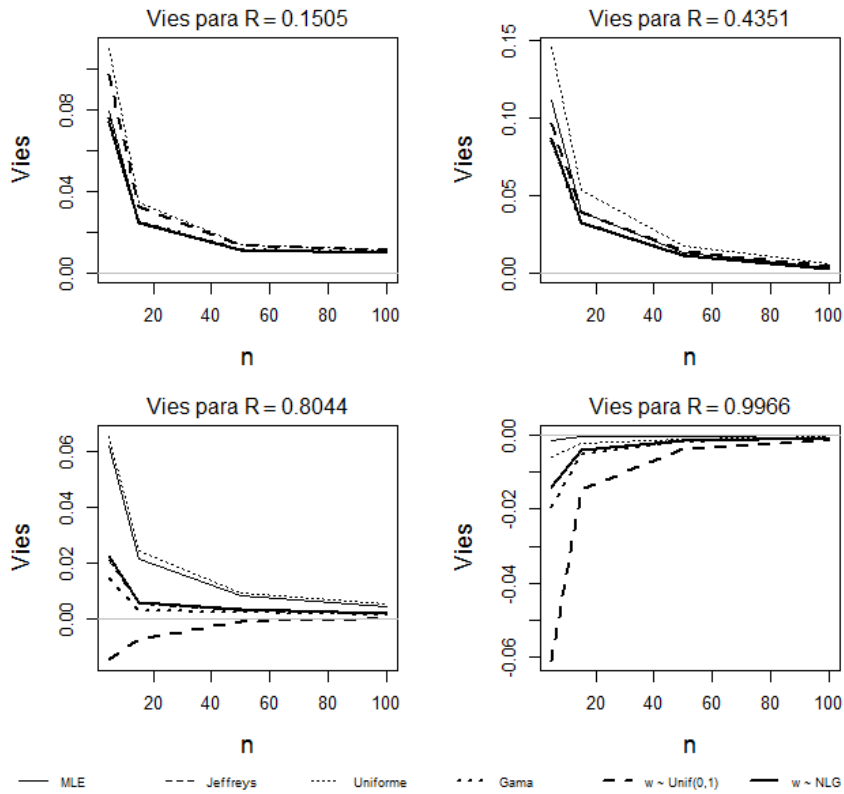


Figura 3.7: Gráfico do viés versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 1.5$ .

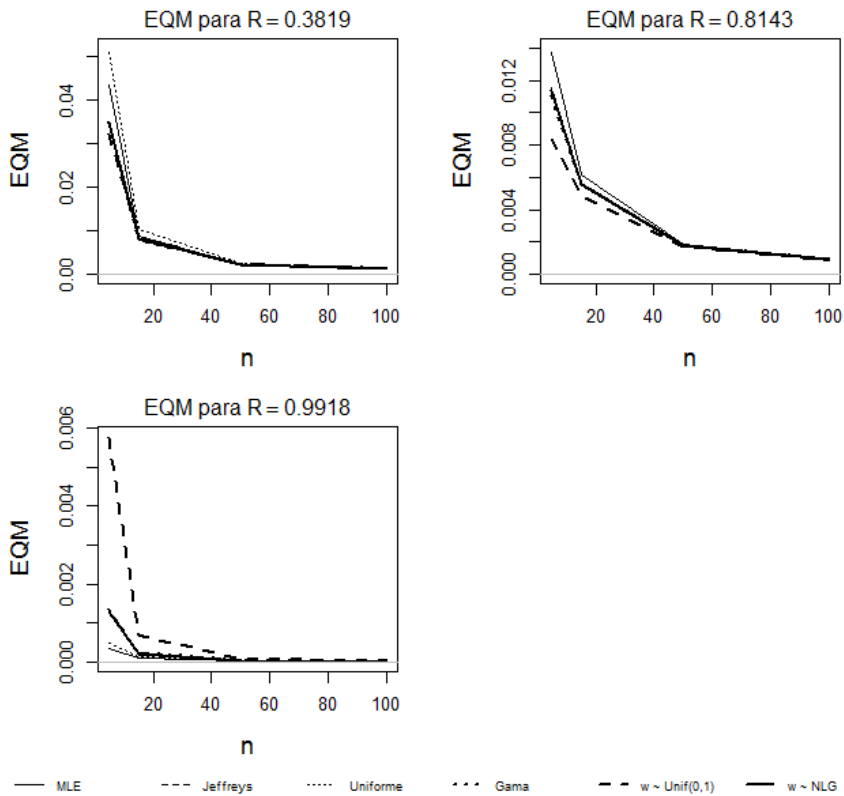


Figura 3.8: Gráfico do EQM versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 0.5$ .

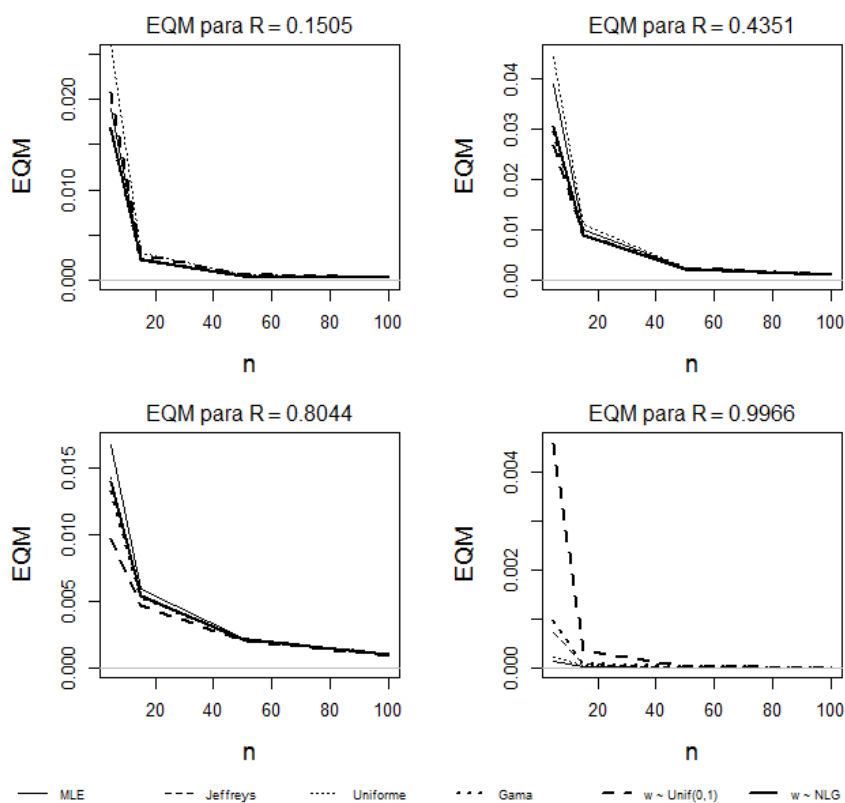


Figura 3.9: Gráfico do EQM versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 1.5$ .

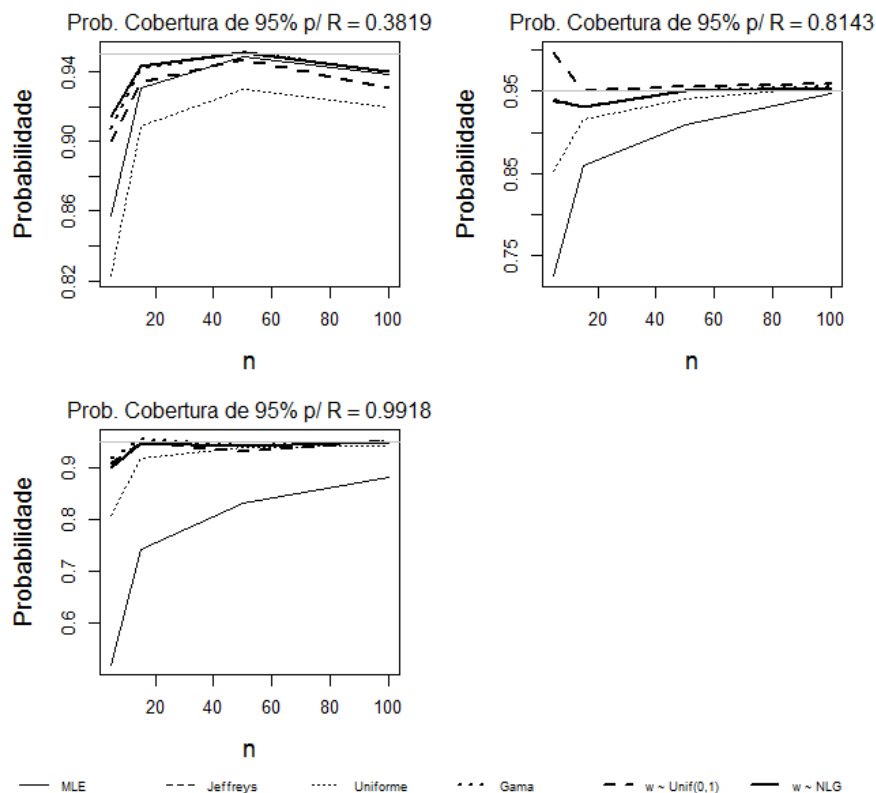


Figura 3.10: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 0.5$ .

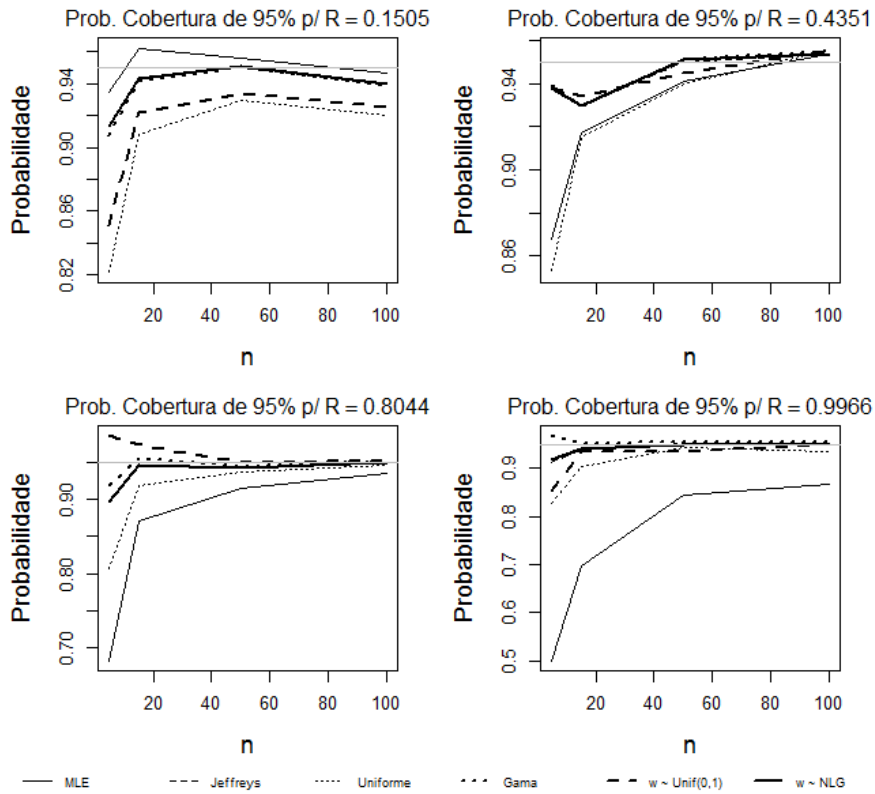


Figura 3.11: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 1.5$ .

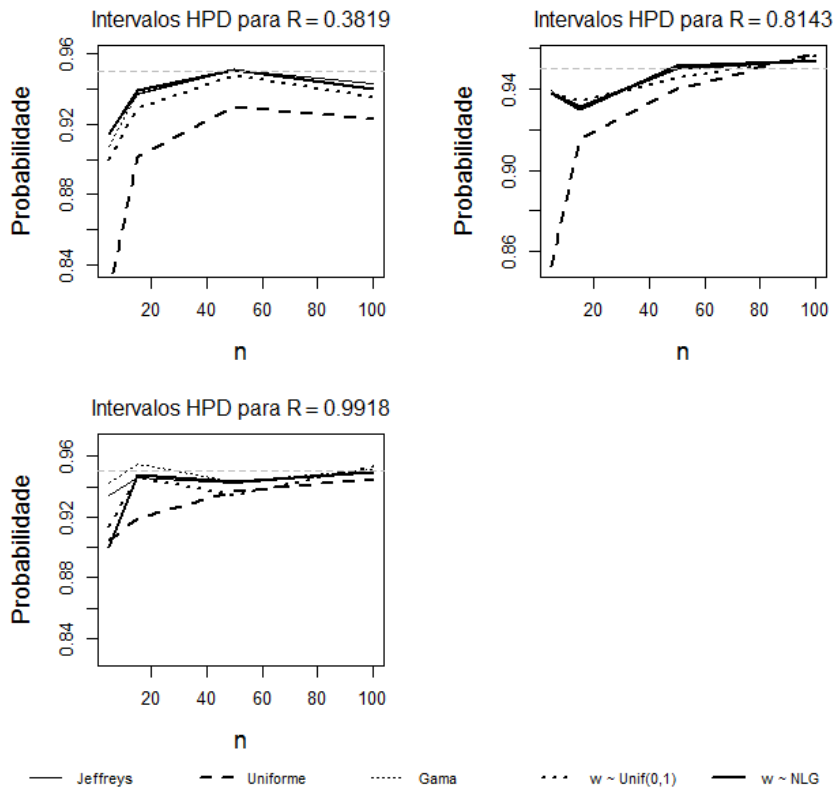


Figura 3.12: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos HPD de 95% versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 0.5$ .

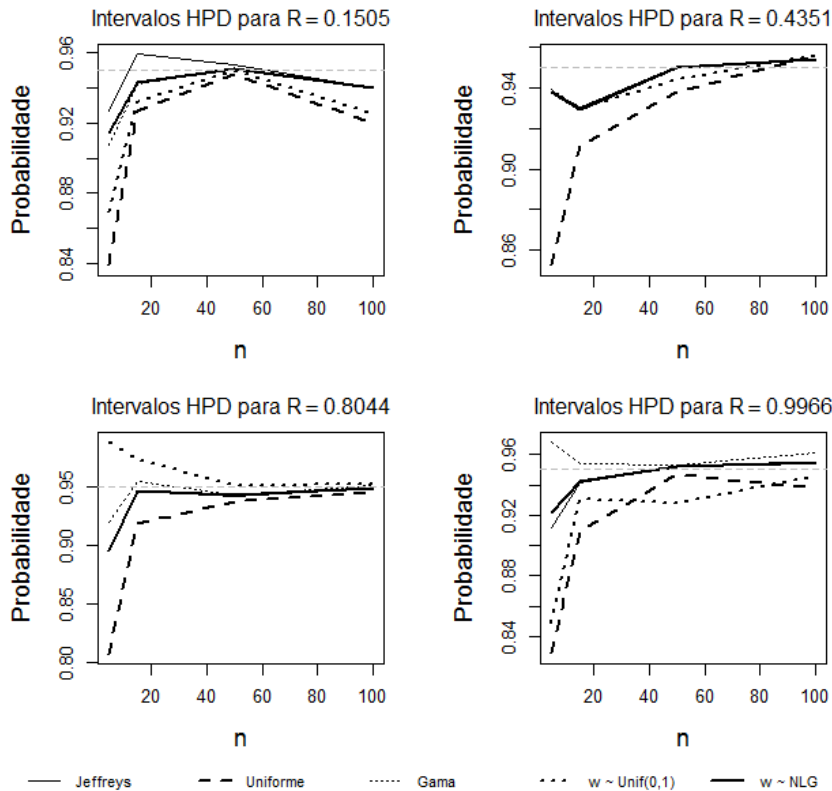


Figura 3.13: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos HPD de 95% versus tamanho da amostra para estimação de  $R$  considerando  $t = 1.5$ .

Analisando os gráficos para ambos os tempos  $t$ , nota-se que a priori Uniforme para  $W$ , tanto nos vícios como para os EQM, produz um dos melhores resultados para  $0.15 < R < 0.90$ , porém para confiabilidade próxima de 0 ou de 1 produz um dos piores resultados. Ainda sobre o viés e EQM, a priori Uniforme para  $\theta$  tem o pior desempenho se comparado as outras em estudo. Além de que, para  $n \geq 50$  tanto o MLE como todas as prioris produzem bons resultados.

Na probabilidade de cobertura para os intervalos de credibilidade de 95% de confiança, nota-se que no geral, o MLE e a priori Uniforme para  $\theta$  produzem os resultados não tão satisfatórios como o restante, principalmente para  $n$  pequeno, porém para  $n \geq 50$  no geral quase todos produzem boas probabilidades de cobertura, com exceção do MLE para confiabilidade próxima de 1 e a priori Uniforme para  $\theta$  levando em conta confiabilidade próxima de 0. Na cobertura para os intervalos HPD de 95% de confiança, observa-se que a priori Uniforme para  $\theta$  continua produzindo os piores resultados, e a Uniforme para  $W$  quando a confiabilidade é próxima de 0 ou de 1, também não produz resultados satisfatórios com o restante das prioris.

Observem que, no geral, as prioris de Jeffreys, Gama e NLG para  $W$  apresentam-se mais adequadas, tanto para todos  $n$  como para qualquer valor assumido pela confiabilidade  $R(t)$ , principalmente para os casos em que a confiabilidade  $R > 0.8$ . Afinal quando estuda-se o tempo de vida de um objeto ou individuo o maior interesse é estudar as confiabilidades maiores que 0.8.

### 3.7.2 Estimação do parâmetro $R = R(t_0)$ por meio de prioris elicitadas

Nesta seção, precisamos escolher uma distribuição a priori apropriada para a confiabilidade da GE, especialmente nas situações em que não temos opinião de especialistas para construir nossa priori.

Desta forma, apresentamos simulações de Monte Carlo realizadas para comparar o desempenho do Bayesiano sob abordagens de prioris não-informativas e MLE com relação à estimativa da função de confiabilidade para valores de tempo de falha fixos.

Nas Figuras (3.14)-(3.17), as estatísticas de desempenho do MLE, Bayes sob as prioris propostas neste documento para a estimativa da função de confiabilidade são exibidas para várias combinações de parâmetros e tamanhos de amostra,  $n = 5, 15, 50, 100$  e  $150$ , com  $\theta = 0.2$  e  $\theta = 2$ , representando formas de banheira e crescente da função de risco, respectivamente.

Como a confiabilidade é uma função do tempo  $t$ , diferentes valores para  $t$  foram considerados na simulação para também avaliar o comportamento das estimativas quando o valor da confiabilidade aumenta.

Os valores dos vícios e EQMs são apresentados nestas figuras.

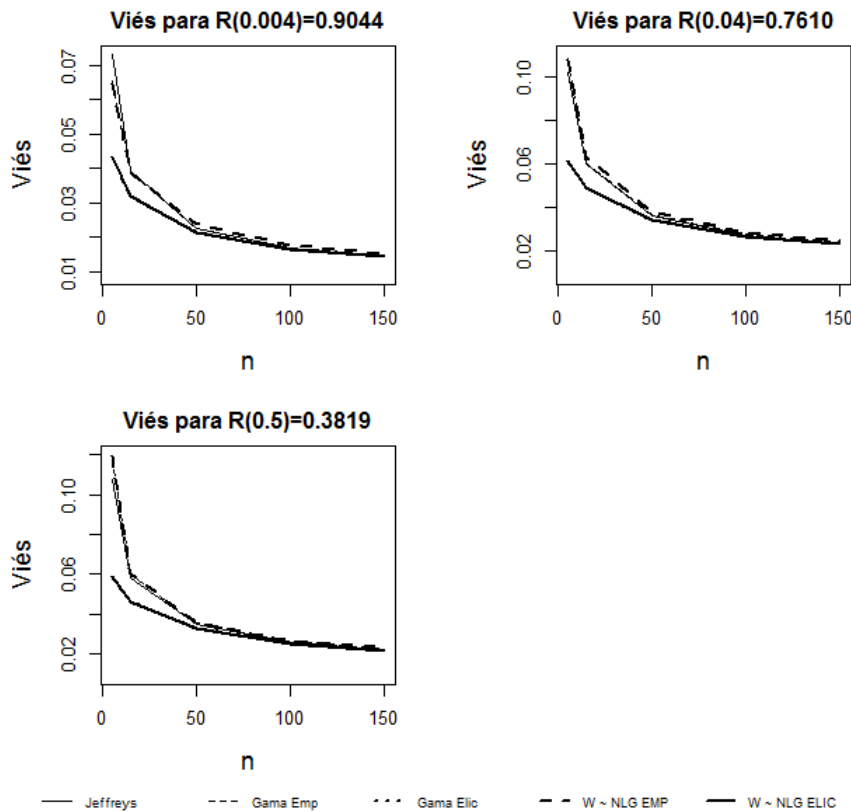


Figura 3.14: Gráfico do viés versus tamanho da amostra  $n$  para estimativa de  $R$  considerando  $\theta = 0.2$ .

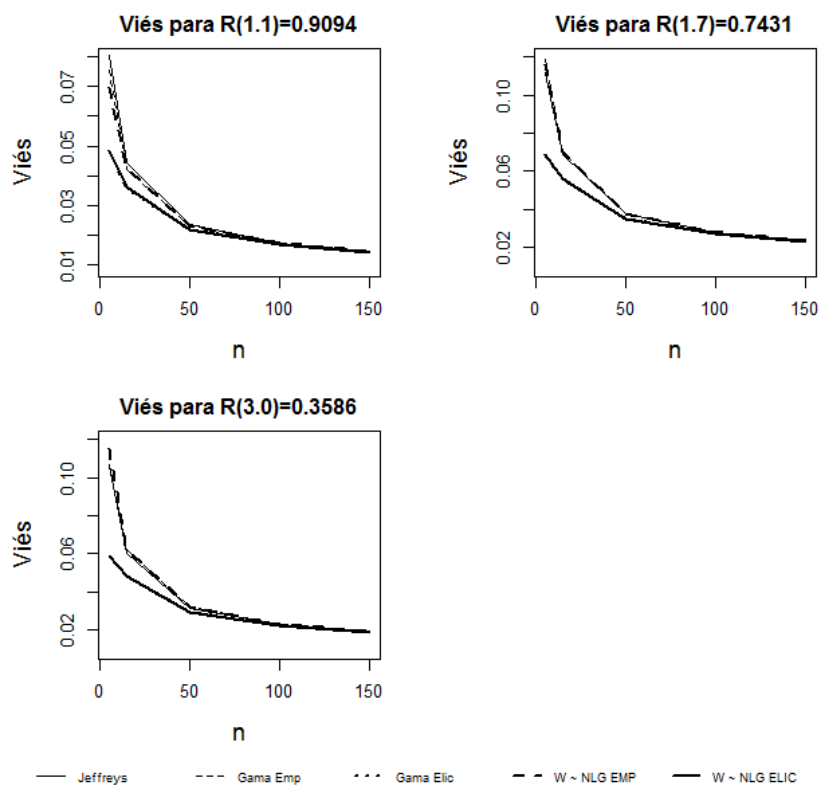


Figura 3.15: Gráfico do viés versus tamanho da amostra  $n$  para estimativa de  $R$  considerando  $\theta = 2.0$ .

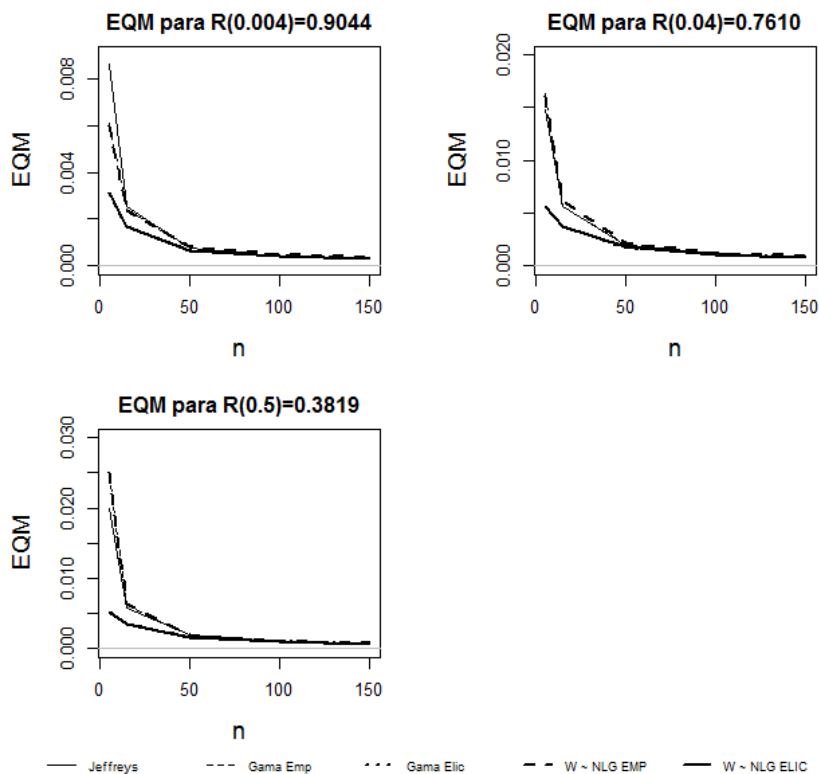


Figura 3.16: Gráfico do EQM versus tamanho da amostra  $n$  para estimativa de  $R$  considerando  $\theta = 0.2$ .

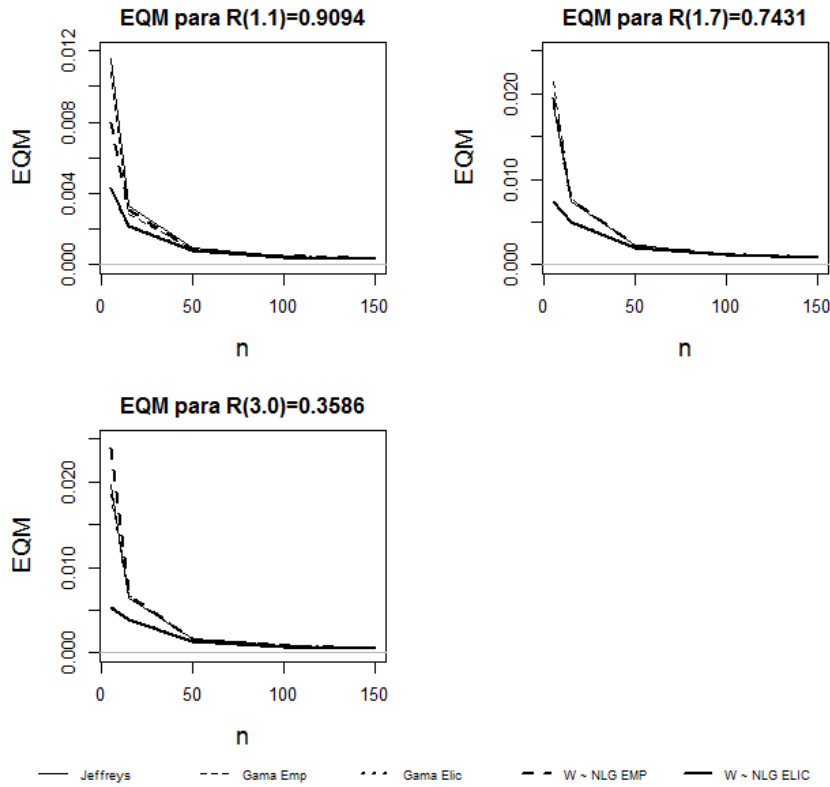


Figura 3.17: Gráfico do EQM versus tamanho da amostra  $n$  para estimativa de  $R$  considerando  $\theta = 2.0$ .

Analisando os gráficos para ambos os parâmetros  $\theta$ , nota-se que a priori elicitada NLG para  $W$ , tanto nos vícios como para os EQMs, produz o melhor resultado para a confiabilidade  $R$ . Tal resultado é esperado, afinal acrescentando o conhecimento do especialista, isso gera assim melhores resultados, diferente das outras prioris onde não temos nenhuma informação.

### 3.8 Aplicação para dados reais

Nesta seção, para fins de ilustração, analisou-se dados obtidos em [10] que representam os tempos de falha de 59 condutores para um teste de vida acelerado. Os tempos de falha estão em horas e não há observações censuradas. O conjunto é dado a seguir:

6.545	9.289	7.543	6.956	6.492	5.459	8.120	4.706	8.687	5.997	9.591
6.129	11.038	5.381	6.958	4.288	6.522	4.137	7.459	7.495	6.573	6.538
5.589	6.087	5.807	6.725	8.532	9.663	6.369	7.024	8.336	9.218	7.945
6.869	6.352	4.700	6.948	9.254	5.009	7.489	7.398	6.033	10.092	7.496
4.531	7.794	8.799	7.683	7.224	7.365	6.923	5.604	5.434	7.937	6.515
6.476	6.071	10.491	5.923							

Para verificar o bom ajuste da distribuição Gama Exponenciada aos dados, realizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov. O resultado foi um p-valor de 0.4288, indicando que a distribuição de Gama Exponenciada pode ser usada para analisar esses dados.

A Tabela (3.3) apresenta a média a posteriori junto com o desvio-padrão e o intervalo de credibilidade de 95% para o parâmetro  $\theta$  considerando o estimador de máxima verossimilhança (MLE) e a abordagem Bayesiana para cada uma das prioris consideradas neste trabalho. A partir desta tabela, observa-se que os resultados estão de acordo com o estudo de simulação, ou seja, não há diferença tão significativa entre as três abordagens, MLE e Bayesiana com base na priori de Jeffreys e Gama. No entanto, a abordagem Bayesiana sob priori Uniforme fornece resultados pouco diferentes, como observado também nos resultados obtidos pela simulação apresentado anteriormente.

Tabela 3.3: Média, desvio-padrão e intervalo de confiança de 95% para o parâmetro  $\theta$  segundo cada método de estimação.

Método de estimação	Estimação pontual	Desvio-padrão	Intervalo de Confiança
MLE	68.9359	8.9747	[51.34, 86.52]
Priori de Jeffreys	68.9359	8.9747	[52.47, 87.60]
Priori Gama	68.1513	8.8718	[51.88, 86.60]
Priori Uniforme	70.1043	9.0504	[53.49, 88.92]

Para comparação das prioris propostas neste exemplo, as posteriores do parâmetro  $\theta$  estão representados na Figura (3.18). Esta figura mostra as diferenças entre as prioris usadas para as estimativas pontuais e intervalares.

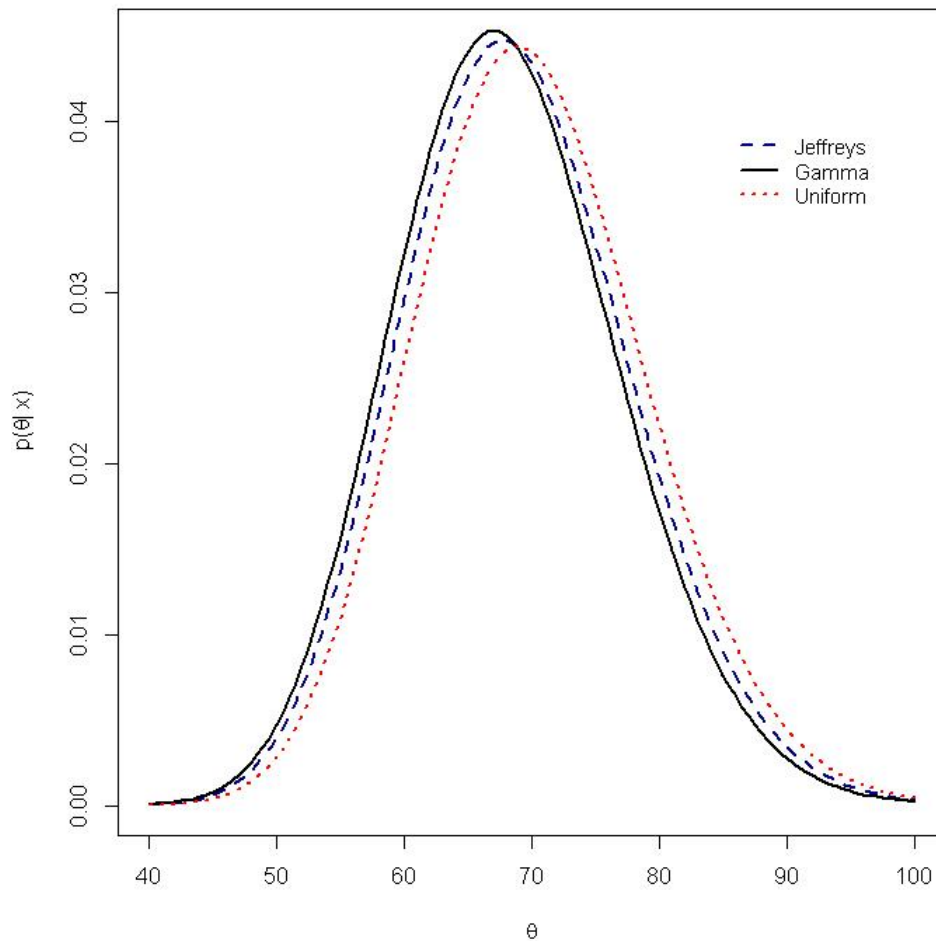


Figura 3.18: Densidades à posteriori do parâmetro  $\theta$  para os dados.

O objetivo agora é obter os estimadores à posteriori da função de confiabilidade  $R(t)$  apresentados na Seção (3.3).

As estatísticas a posteriori e intervalos de credibilidade para a função de confiabilidade considerando o MLE, priori de Jeffreys, Uniforme e Gama são apresentadas nas Tabelas (3.4) e (3.5). Diferentemente da estimação do parâmetro  $\theta$ , observa-se que o MLE e as prioris adotadas para estimar a confiabilidade  $R(t)$  neste problema produziram resultados semelhantes.

Tabela 3.4: Média e desvio-padrão para a confiabilidade  $R$  para diferentes tempos  $t$ .

Método de estimação	t = 6	t = 7	t = 8	t = 9
MLE	0.7007 (0.0470)	0.3963 (0.0396)	0.1881 (0.0220)	0.0816 (0.0101)
Jeffreys	0.6971 (0.0469)	0.3950 (0.0394)	0.1878 (0.0219)	0.0815 (0.0101)
Gama	0.6930 (0.0470)	0.3915 (0.0392)	0.1859 (0.0217)	0.0806 (0.0100)
Uniforme	0.7032 (0.0463)	0.4001 (0.0394)	0.1907 (0.0220)	0.0828 (0.0102)
$W \sim Uniforme(0, 1)$	0.6960 (0.0465)	0.3976 (0.0393)	0.1901 (0.0220)	0.0828 (0.0102)
$W \sim NLG(a, b)$	0.6973 (0.0469)	0.3951 (0.0395)	0.1879 (0.0220)	0.0816 (0.0102)

\*Desvio-padrão entre parênteses.

Tabela 3.5: Intervalos de confiança e HPD de 95% para a confiabilidade  $R$  para diferentes tempos  $t$ .

Método	t = 6	t = 7	t = 8	t = 9
MLE	[0.6086, 0.7929]	[0.3185, 0.4740]	[0.1449, 0.2313]	[0.0616, 0.1015]
Jeffreys	[0.6008, 0.7842] [0.6043, 0.7871]	[0.3190, 0.4734] [0.3181, 0.4725]	[0.1467, 0.2327] [0.1454, 0.2313]	[0.0627, 0.1025] [0.0620, 0.1017]
Gama	[0.5967, 0.7803] [0.6050, 0.7897]	[0.3160, 0.4695] [0.3196, 0.4743]	[0.1451, 0.2303] [0.1464, 0.2321]	[0.0620, 0.1014] [0.0624, 0.1020]
Uniforme	[0.6079, 0.7891] [0.6114, 0.7921]	[0.3240, 0.4785] [0.3233, 0.4776]	[0.1493, 0.2357] [0.1481, 0.2343]	[0.0639, 0.1039] [0.0632, 0.1031]
$W \sim Uniforme(0, 1)$	[0.6005, 0.7824] [0.6039, 0.7853]	[0.4756, 0.3218] [0.3210, 0.4748]	[0.2350, 0.1489] [0.2337, 0.1476]	[0.0638, 0.1039] [0.0631, 0.1030]
$W \sim NLG(a, b)$	[0.6009, 0.7842] [0.6043, 0.7872]	[0.3190, 0.4735] [0.3182, 0.4726]	[0.2327, 0.1467] [0.1455, 0.2313]	[0.0628, 0.1025] [0.0620, 0.1017]

\*Intervalo HPD é dado abaixo do intervalo de credibilidade.

De acordo com os resultados mostrados na Tabela (3.4), também pode-se concluir, por exemplo, que a probabilidade de o tempo de falha de um condutor ser maior que 6 é de 0.70.

A função de confiabilidade empírica e estimativa usando o MLE e as prioris são mostradas na Figura (3.19).

A Figura (3.19) mostra que as funções de confiabilidade estimadas não são sensíveis à escolha da priori, ao considerar os dados deste exemplo.

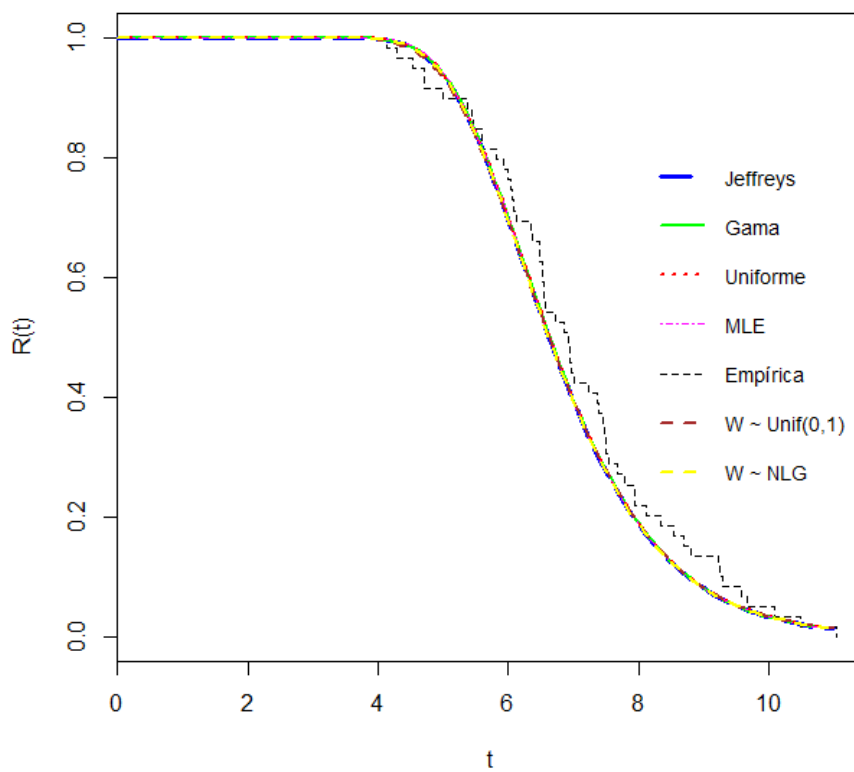


Figura 3.19: Funções de confiabilidade empírica e estimada.



## Posterioris para confiabilidade $R$ da distribuição Weibull

Representando o tempo de vida de um componente eletrônico  $X$  com uma distribuição Weibull, denotada por  $W(\alpha, \beta)$  e com densidade dada por

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \forall x > 0, \quad (4.1)$$

com parâmetros de escala e forma  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , respectivamente (para mais detalhes, veja Colosimo [4]).

Em muitas aplicações, concentra-se o interesse na função de confiabilidade  $R(t)$  de um processo, definindo  $R(t) = P(X > t)$  para  $t > 0$ . A função de confiabilidade representa o tempo de vida de um dado componente eletrônico considerando seu funcionamento até a falha dada no tempo  $t$ .

Para a distribuição de Weibull definida em (4.1), a função de confiabilidade é dada por

$$R(t) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right\}. \quad (4.2)$$

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma amostra aleatória de tamanho  $n$  com observações independentes de  $X$ . Então, a função de verossimilhança para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , baseado em  $\mathbf{x}$ , é dada por

$$L(\alpha, \beta|\mathbf{x}) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n \prod_{i=0}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\sum_{i=0}^n \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\beta\right\}, \forall x > 0, \quad (4.3)$$

Para obter a posteriori da confiabilidade, primeiro transforma-se  $(\alpha, \beta)$  em  $(R, W)$  onde  $W = \beta$  e  $R = \exp\left\{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right\}$ . Então, a partir de (4.3), a função de verossimilhança para os novos parâmetros  $(R, W)$  é dada por

$$L(R, W|\mathbf{x}) = W^n \left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right]^n \prod_{i=0}^n y_i^{W-1} R^{\sum_{i=0}^n y_i^W}, \quad (4.4)$$

onde  $y_i = \frac{x_i}{t}$ .

Moala, Rodrigues e Tomazella [16] obtêm a matriz de informação esperada para os parâmetros  $(R, W)$ , como

$$I(R, W) = \begin{bmatrix} \frac{1}{R^2 [\ln(\frac{1}{R})]^2} & \frac{\psi(2) - \ln[\ln(\frac{1}{R})]}{RW \ln(\frac{1}{R})} \\ \frac{\psi(2) - \ln[\ln(\frac{1}{R})]}{RW \ln(\frac{1}{R})} & \frac{1}{W^2} \{ \ln^2 [\ln(\frac{1}{R})] - 2\psi(2) \ln [\ln(\frac{1}{R})] + d \} \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

onde  $d = \psi'(2) + \psi(2)^2 + 1$ .

## 4.1 Priori de Jeffreys

Dentre as diversas prioris não-informativas, nesta seção será discutido sobre uma delas, priori de Jeffreys. Tal possui toda uma metodologia para ser obtida, além de possuir alguns particularidades e/ou propriedades.

**Resultado 1** De (4.5) e (2.1), a priori de Jeffreys para os parâmetros  $R$  e  $W$  é dada por:

$$\pi_J(R, W) \propto \frac{1}{RW \ln(\frac{1}{R})}. \quad (4.6)$$

Agora, combinando (4.4) e (4.6) tem-se então que a distribuição a posteriori conjunta para  $R$  e  $W$  é dada por:

$$p(R, W | \mathbf{x}) \propto \left[ \ln\left(\frac{1}{R}\right) \right]^{n-1} W^{n-1} \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{W-1} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{W-1}}, \quad (4.7)$$

onde  $y_i = \frac{x_i}{t}$ ,  $0 < R < 1$  e  $W > 0$ .

Embora a priori (4.6) seja imprópria, a posteriori correspondente é própria. Assim, integrando (4.7) em relação a  $W$  obtemos a densidade marginal a posteriori de  $R$  dada por:

$$p(R | \mathbf{x}) \propto \left[ \ln\left(\frac{1}{R}\right) \right]^{n-1} \int_0^\infty W^{n-1} \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{W-1} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{W-1}} dW, \quad 0 < R < 1. \quad (4.8)$$

Claramente, (4.7) é de difícil integração dos parâmetros  $R$  e  $W$ , e para realizar as inferências sobre o parâmetro  $R$  em (4.8) é necessário recorrer à procedimentos numéricos para obter características da distribuição marginal a posteriori, como o estimador de Bayes, moda e intervalos de credibilidade.

Moala, Rodrigues e Tomazella [16], calculam a densidade a posteriori resolvendo esta integral por meio do MCMC. Moala, Rodrigues e Penha [15] usam o algoritmo MCMC para obter uma amostra de valores de  $R$  e  $W$  por meio da posteriori conjunta (veja por exemplo, Chib e Grenberg [3]).

A proposta neste trabalho é calcular uma expressão para a posteriori e não um valor numérico para confiabilidade. Assim, na próxima seção será aplicado a aproximação via método de Laplace (Tierney, Kass e Kadane [25]).

**Proposição 15** Assumindo que a priori de Jeffreys para  $(R, W)$  dado em (4.6) então a distribuição da confiabilidade a posteriori  $R = R(t_0)$ , para um  $t_0$  fixo, é uma Log-Gama Negativa com parâmetros de escala  $n$  e de forma  $\sum_{i=1}^n y_i^{\widehat{W}}$ , e densidade dada por:

$$p(R|\mathbf{x}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i^{\widehat{W}}\right)^n}{\Gamma(n)} \left[ \ln\left(\frac{1}{R}\right) \right]^{n-1} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{\widehat{W}-1}}, \quad 0 < R < 1. \quad (4.9)$$

onde  $\widehat{W}$  é raiz da equação

$$\frac{n-1}{W} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - n \frac{\sum_{i=1}^n y_i^W \ln(y_i)}{\sum_{i=1}^n y_i^W} = 0. \quad (4.10)$$

**Demonstração.** Inicialmente, deriva-se a densidade marginal a posteriori de  $W$  que é obtido em (4.7) como

$$p(W|\mathbf{x}) \propto W^{n-1} \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{W-1} \int_0^\infty \left[ \ln\left(\frac{1}{R}\right) \right]^{n-1} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{W-1}} dR.$$

Tem-se que  $\int_0^\infty \left(\ln\frac{1}{R}\right)^{n-1} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{W-1}} dR = \left(\sum_{i=1}^n y_i^W\right)^{-n} \Gamma(n)$ , então a densidade marginal a posteriori de  $W$  é dada por

$$p(W|\mathbf{x}) = c_1 \frac{W^{n-1} \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{W-1}}{\left( \sum_{i=1}^n y_i^W \right)^n}, \quad (4.11)$$

onde " $c_1$ " é a constante normalizadora. A moda de  $\widehat{W}$  da posteriori é a raiz da equação não-linear

$$\frac{n-1}{W} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - n \frac{\sum_{i=1}^n y_i^W \ln(y_i)}{\sum_{i=1}^n y_i^W} = 0.$$

Agora, calcula-se a densidade marginal a posteriori de  $R$  dado em (4.8) ao qual pode ser escrito como

$$p(R|\mathbf{x}) \propto \left[ \ln\left(\frac{1}{R}\right) \right]^{n-1} \int_0^\infty W^{n-1} \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{W-1} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{W-1}} dW, \quad (4.12)$$

e obtêm-se usando aproximação de Laplace que,  $\int_0^\infty f(W) e^{-nh(w)} dw \simeq \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}} f(\hat{w}) e^{-nh(\hat{w})}$ .

Introduzindo o termo  $\left(\sum_{i=1}^n y_i^W\right)^n$  para a integral em (4.12) então têm-se que

$$\int_0^{\infty} f(W)e^{-nh(w)}dw = \int_0^{\infty} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{W-1}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^W\right)^n W^{n-1} \frac{\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{W-1}}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^W\right)^n} dW, \quad (4.13)$$

onde  $f(W) = R^{\sum_{i=1}^n y_i^{W-1}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^W\right)^n$  e  $h(W) = -\frac{n-1}{n}\ln(W) - \frac{W-1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(y_i) + \ln\left(\sum_{i=1}^n y_i^W\right)$ .

Note que  $e^{-nh(w)} = \frac{W^{n-1} \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{W-1}}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^W\right)^n}$  é a posteriori  $p(W|\mathbf{x})$  dada em (4.11) o qual a moda de  $\hat{W}$  é raiz da equação (4.10).

Portanto, a integral (4.13) pode ser aproximada fazendo uso da aproximação de Laplace

$$\int_0^{\infty} f(W)e^{-nh(w)}dw \simeq \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{\hat{W}}} \hat{W}^{n-1} \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{\hat{W}-1}, \quad (4.14)$$

onde  $\sigma^2 = \frac{1}{h^2(\hat{W})}$ .

Finalmente, substituindo (4.14) na equação (4.12) e considerando os termos dependendo de  $\hat{W}$  como constante então a densidade marginal a posteriori de  $R$  é dada por

$$p(R|\mathbf{x}) \propto \left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right]^{n-1} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{\hat{W}-1}}, \quad 0 < R < 1, \quad (4.15)$$

que é a distribuição Log Gama Negativa com constante de normalização  $\left(\sum_{i=0}^n y_i^{\hat{W}}\right)^{-n} \Gamma(n)$ .

■

Neste caso, não resolve-se somente o problema para obter uma forma fechada para a posteriori de  $R$ , assim como obtêm-se uma distribuição conhecida para tal.

**Corolário 1** A média e a variância a posteriori para  $R = R(t_0)$  são dadas, respectivamente, por

$$E(R|\mathbf{x}) = \left(1 + \frac{1}{\sum_{i=0}^n y_i^{\hat{W}}}\right)^{-n}; \quad Var(R|\mathbf{x}) = \left(1 + \frac{2}{\sum_{i=0}^n y_i^{\hat{W}}}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{\sum_{i=0}^n y_i^{\hat{W}}}\right)^{-2n}, \quad (4.16)$$

e o intervalo de credibilidade  $(R_L, R_U)$  de  $100(1 - \alpha)\%$  para  $R$  é dado por

$$R_L = \exp\left\{-\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}{2\sum_{i=0}^n y_i^{\hat{W}}}\right\}; \quad R_U = \exp\left\{-\frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}{2\sum_{i=0}^n y_i^{\hat{W}}}\right\}. \quad (4.17)$$

**Demonstração.** A esperança e variância de uma variável aleatória  $X$  com distribuição Log Gama Negativa com parâmetros  $(k, \lambda)$  são dadas por

$$E(X) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-k}; \text{Var}(X) = \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-k} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-2k}. \quad (4.18)$$

Logo, fazendo  $k = n$  e  $\lambda = \sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}}$ , obtêm-se (4.16).

Se  $R$  tem uma distribuição de Log Gama Negativa com parâmetros  $k$  e  $\lambda$  então a variável aleatória  $2\lambda n \left(\frac{1}{W}\right)$  tem uma distribuição  $\chi^2$  com  $2k$  graus de liberdade.

Desta distribuição pode-se construir um intervalo de credibilidade  $100(1 - \gamma)\%$  ( $R_L, R_U$ ) para  $R$  resolvendo o seguinte as equações

$$\int_0^{R_L} p(r|\mathbf{x})dw = \frac{\gamma}{2}; \int_{R_U}^{\infty} p(r|\mathbf{x})dw = \frac{\gamma}{2},$$

para os limites  $R_L$  e  $R_U$ , qual solução é dada por

$$R_L = \exp\left\{-\frac{\chi_{1-\frac{\gamma}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\}; R_U = \exp\left\{-\frac{\chi_{\frac{\gamma}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\}. \quad (4.19)$$

onde  $\chi_{\gamma}^2(2k)$  denota o  $\gamma^{th}$  percentil de uma distribuição Qui-Quadrado  $\chi^2$ . Portanto, fazendo  $k = n$  e  $\lambda = \sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}}$  obtêm-se o intervalo de credibilidade  $100(1 - \gamma)\%$  para  $R$  que é dado em (4.17). ■

**Corolário 2** *O intervalo de maior densidade a posteriori (HPD) para  $R = R(t_0)$  denotado por  $(H_L, H_U)$  é obtido pela solução do sistema de equações dado por*

$$1 - \alpha = Q\left(2\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} \ln\left(\frac{1}{H_L}\right)\right) - Q\left(2\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} \ln\left(\frac{1}{H_U}\right)\right) \quad (4.20)$$

e

$$\left(\frac{\ln(H_L)}{\ln(H_U)}\right)^{n-1} \left(\frac{H_L}{H_U}\right)^{\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} - 1} = 0, \quad (4.21)$$

onde  $Q(z)$  é a função acumulada da distribuição  $\chi^2(2n)$ .

**Demonstração.** O maior intervalo de densidade a posteriori para  $R = R(t_0)$  pode ser obtido a partir do solução simultânea das seguintes equações:

$$P(H_L \leq R \leq H_U) = 1 - \alpha \quad (4.22)$$

e

$$p(H_L|\mathbf{x}) = p(H_U|\mathbf{x}). \quad (4.23)$$

Desde que  $2\lambda n \left(\frac{1}{R}\right)$  siga uma distribuição  $\chi^2(2k)$  então após algumas operações, tem-se que,

$$1 - \alpha = P(H_L \leq R \leq H_U) = P\left(2\lambda \ln\left(\frac{1}{H_U}\right) \leq 2\lambda \ln\left(\frac{1}{R}\right) \leq 2\lambda \ln\left(\frac{1}{H_L}\right)\right) =$$

$$Q\left(2\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} \ln\left(\frac{1}{H_L}\right)\right) - Q\left(2\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} \ln\left(\frac{1}{H_U}\right)\right).$$

■

## 4.2 Priori de Tibshirani

A priori não-informativa de Tibshirani não é frequente utilizada em trabalhos em geral por ser de difícil obtenção da mesma, além do desconhecimento de grande parte dos pesquisadores.

**Resultado 2** A priori expressa em termos da parametrização  $(R, W)$  é dada por

$$\pi(R, W) \propto \frac{1}{RW \ln\left(\frac{1}{R}\right)}. \quad (4.24)$$

**Demonstração.** Têm-se que  $R$  é o parâmetro de interesse e  $W$  o de perturbação. Para obter a priori, obtêm-se a parametrização ortogonal  $(\sigma, \lambda)$  da forma discutida por [6], que é, o parâmetro  $\lambda$  é a solução para a equação diferencial

$$i_{WW}^* \frac{\partial W}{\partial R} = -i_{RW}^*, \quad (4.25)$$

onde  $\sigma = R$ .

Usando (4.5), têm-se que

$$\frac{1}{W} \partial W = \frac{\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] - \psi(2)}{R \left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right) \left\{\ln^2\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] - 2\psi(2)\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] + \psi^2(2) + 1 + \psi'(2)\right\}} \partial R. \quad (4.26)$$

Integrando (4.26) resulta em

$$\int \frac{1}{W} \partial W = \int \frac{\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] - \psi(2)}{R \left(\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right) \left\{\ln^2\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] - 2\psi(2)\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] + \psi^2(2) + 1 + \psi'(2)\right\}} \partial R + a(\lambda), \quad (4.27)$$

e escolhendo  $a(\lambda) = \ln(\ln(\lambda))$  têm-se que a solução da equação (4.27) é dada por

$$\lambda = W \sqrt{\ln^2\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] - 2\psi(2)\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] + \psi^2(2) + 1 + \psi'(2)}. \quad (4.28)$$

A matriz de Informação de Fisher para os parâmetros ortogonais é

$$I(\sigma, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1+\psi'(2)-\psi^2(2)}{\sigma^2 \left[\ln\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda^2} \left\{\ln^2\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] - 2\psi(2)\ln\left[\ln\left(\frac{1}{R}\right)\right] + \psi^2(2) + 1 + \psi'(2)\right\} \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

De (4.29), a priori correspondente para  $(\sigma, \lambda)$  é dada por

$$\pi(\sigma, \lambda) \propto g_1(\lambda) \frac{1}{\sigma \left[ \ln \left( \frac{1}{\sigma} \right) \right]}, \quad (4.30)$$

onde  $g_1(\lambda) > 0$  é arbitrário.

Devido à falta de exclusividade na escolha da parametrização ortogonal então a classe de parâmetros ortogonais é da forma  $g(\lambda)$ , onde  $g(\cdot)$  é alguma reparametrização. Essa não-unicidade é refletida pela função  $g$ . Uma possibilidade, no caso do parâmetro de perturbação, é exigir que  $\pi(\sigma, \lambda)$  satisfaça a condição de Stein também para  $\lambda$  com  $R$  adotado como o parâmetro de perturbação. Sob essa condição, obtêm-se

$$\pi(\sigma, \lambda) \propto g_2(\sigma) \frac{1}{\lambda}. \quad (4.31)$$

Assumindo que

$$g_1(\lambda) \frac{1}{\sigma \left[ \ln \left( \frac{1}{\sigma} \right) \right]} = g_2(\sigma) \frac{1}{\lambda}, \quad (4.32)$$

têm-se que

$$\pi(\sigma, \lambda) \propto \frac{1}{\lambda \sigma \left[ \ln \left( \frac{1}{\sigma} \right) \right]}. \quad (4.33)$$

Desta forma, de (4.33), a priori expressa em termos da parametrização  $(R, W)$  é dada por

$$\pi(R, W) \propto \frac{1}{RW \left[ \ln \left( \frac{1}{R} \right) \right]}. \quad (4.34)$$

■

É interessante observar que a priori obtida acima corresponde com a obtida na priori de Jeffreys em (4.6).

### 4.3 Priori Log-Gama Negativa para $R$

Uma priori alternativa para se obter a distribuição a posteriori da função de confiabilidade pode ser a distribuição Log-Gama Negativa, denotada por  $NLG(k, \lambda)$ , para  $R$  com densidade dada por

$$\pi(R) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \left( \ln \frac{1}{R} \right)^{k-1} R^{\lambda-1}, 0 < R < 1, \quad (4.35)$$

e uma priori  $Gama(a, b)$  para  $W$ . Agora, assumindo independência entre os parâmetros resulta na densidade a priori conjunta dada por

$$\pi(R, W) \propto \left( \ln \frac{1}{R} \right)^{k-1} R^{\lambda-1} W^{a-1} e^{-bW}, 0 \leq R \leq 1, W > 0, \quad (4.36)$$

com hiperparâmetros conhecidos  $k > 0, \lambda > 0, a > 0$  e  $b > 0$ .

Note que para  $a = b = k = \lambda = 0$  a priori conjunta é igual as prioris de Jeffreys e Tibshirani.

De (4.4) e (4.36) a distribuição a posteriori conjunta para os parâmetros  $R$  e  $W$  é dado por

$$p(R, W|\mathbf{x}) \propto \left(\ln \frac{1}{R}\right)^{(n+k)-1} W^{(n+a)-1} (\prod y_i)^{W-1} R^{(\sum y_i^W + \lambda)-1} e^{-bW}. \quad (4.37)$$

Agora, integrando (4.37) em relação a  $W$  produz a posteriori marginal de  $R$  como

$$p(R|\mathbf{x}) \propto \left(\ln \frac{1}{R}\right)^{(n+k)-1} R^{\lambda-1} \int_0^{\infty} W^{(n+a)-1} (\prod y_i)^{W-1} R^{\sum y_i^W} e^{-bW} dW, 0 < R < 1. \quad (4.38)$$

**Proposição 16** *Assumindo que a priori de Log-Gama Negativa para  $R$  e Gama para  $W$  como é dado em (4.36) então a distribuição da confiabilidade a posteriori  $R = R(t_0)$ , para um  $t_0$  fixo, é uma Log-Gama Negativa com parâmetros de escala  $n + k$  e de forma  $\sum_{i=1}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda$ , e densidade dada por:*

$$p(R|\mathbf{x}) = \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda\right)^{n+k}}{\Gamma(n+k)} \left[\ln \left(\frac{1}{R}\right)\right]^{(n+k)-1} R^{\left(\sum_{i=1}^n y_i^{\widehat{W} + \lambda} - 1\right)}, 0 < R < 1. \quad (4.39)$$

onde  $\widehat{W}$  é raiz da equação

$$\frac{n+a-1}{W} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - b - (n+k) \frac{\sum_{i=1}^n y_i^W \ln(y_i)}{\sum_{i=1}^n y_i^W + \lambda} = 0. \quad (4.40)$$

**Demonstração.** Similarmente a demonstração da Proposição 15, obtêm-se que a distribuição a posteriori marginal de  $W$  resulta em

$$p(W|\mathbf{x}) = c_3 \frac{W^{n+a-1} \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{W-1} e^{-bW}}{\left(\sum_{i=1}^n y_i^W + \lambda\right)^{n+k}}, \quad (4.41)$$

onde " $c_3$ " é a constante normalizadora. A moda de  $\widehat{W}$  da posteriori é a raiz da equação não-linear

$$\frac{n+a-1}{W} + \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - b - (n+k) \frac{\sum_{i=1}^n y_i^W \ln(y_i)}{\sum_{i=1}^n y_i^W + \lambda} = 0.$$

Introduzindo o termo  $\left(\sum_{i=1}^n y_i^W + \lambda\right)^n$  para a integral em (4.38) então têm-se que

$$p(R|\mathbf{x}) \propto \left(\ln \frac{1}{R}\right)^{(n+k)-1} R^{\lambda-1} \int_0^{\infty} f(W) e^{-nh(w)} dw, \quad (4.42)$$

onde  $f(W) = R^{\sum_{i=1}^n y_i^W} \left( \sum_{i=1}^n y_i^W + \lambda \right)^{n+k}$  e  $h(W) = -\frac{n+a-1}{n} \ln(W) - \frac{W-1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(y_i) + \left(\frac{b}{n}\right) W + \left(\frac{n+k}{n}\right) \ln \left( \sum_{i=1}^n y_i^W + \lambda \right)$ .

Aplicando a aproximação de Laplace para a integral (4.42) obtêm-se

$$\int_0^{\infty} f(W) e^{-nh(W)} dW \simeq \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}} R^{\sum_{i=1}^n y_i^{\widehat{W}}} \widehat{W}^{n+a-1} \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{\widehat{W}-1} e^{-b\widehat{W}}, \quad (4.43)$$

onde  $\sigma^2 = \frac{1}{h^{(2)}(\widehat{W})}$ .

Substituindo (4.43) na equação (4.42) então a densidade a posteriori marginal para  $R$  é obtida.

■

Note que para  $a = b = k = \lambda = 0$  na equação (4.36) priori conjunta é igual as prioris de Jeffreys e Tibshirani para  $(R, W)$ .

Além disso, pode-se considerar a NLG como uma priori conjugada da confiabilidade sob a distribuição Weibull.

**Corolário 3** *A média e a variância a posteriori para  $R = R(t_0)$  são dadas, respectivamente, por*

$$E(R|\mathbf{x}) = \left( 1 + \frac{1}{\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda} \right)^{-(n+k)} ;$$

$$Var(R|\mathbf{x}) = \left( 1 + \frac{2}{\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda} \right)^{-(n+k)} - \left( 1 + \frac{1}{\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda} \right)^{-2(n+k)}, \quad (4.44)$$

e o intervalo de credibilidade  $(R_L, R_U)$  de  $100(1 - \alpha)\%$  para  $R$  é dado por

$$R_L = \exp \left\{ -\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2(n+k))}{2 \left( \sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda \right)} \right\}; R_U = \exp \left\{ -\frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2(n+k))}{2 \left( \sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda \right)} \right\}. \quad (4.45)$$

**Demonstração.** Similar a demonstração do Corolário (1). ■

**Corolário 4** *O intervalo de maior densidade a posteriori (HPD) para  $R = R(t_0)$  denotado por  $(H_L, H_U)$  é obtido pela solução do sistema de equações dado por*

$$1 - \alpha = Q \left( 2 \left( \sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda \right) \ln \left( \frac{1}{H_L} \right) \right) - Q \left( 2 \left( \sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda \right) \ln \left( \frac{1}{H_U} \right) \right) \quad (4.46)$$

e

$$\left(\frac{\ln(H_L)}{\ln(H_U)}\right)^{(n+k)-1} \left(\frac{H_L}{H_U}\right)^{\left(\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda\right)^{-1}} - 1 = 0, \quad (4.47)$$

onde  $Q(z)$  é a função acumulada da distribuição  $\chi^2(2(n+k))$ .

**Demonstração.** O maior intervalo de densidade a posteriori para  $R = R(t_0)$  pode ser obtido a partir do solução simultânea das seguintes equações:

$$P(H_L \leq R \leq H_U) = 1 - \alpha \quad (4.48)$$

e

$$p(H_L|\mathbf{x}) = p(H_U|\mathbf{x}). \quad (4.49)$$

Desde que  $2\lambda^* \ln\left(\frac{1}{R}\right)$  siga uma distribuição  $\chi^2(2k^*)$  então após algumas operações, tem-se que,

$$1 - \alpha = P(H_L \leq R \leq H_U) = P\left(2\lambda^* \ln\left(\frac{1}{H_U}\right) \leq 2\lambda^* \ln\left(\frac{1}{R}\right) \leq 2\lambda \ln\left(\frac{1}{H_L}\right)\right) =$$

$$Q\left(2\left(\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda\right) \ln\left(\frac{1}{H_L}\right)\right) - Q\left(\left(\sum_{i=0}^n y_i^{\widehat{W}} + \lambda\right) \ln\left(\frac{1}{H_U}\right)\right).$$

■

## 4.4 Estudo de Simulação

Nesta seção, um estudo de simulação foi realizado para comparar o desempenho de todos os estimadores propostos nas seções anteriores e escolher o melhor método para realizar as simulações da confiabilidade  $R$  fazendo uso das prioris de Jeffreys/Tibshirani.

O foco deste é o viés, o erro quadrático médio (EQM) e a probabilidade de cobertura de intervalos de 95% para diferentes tamanhos amostrais e valores de parâmetro.

A simulação é baseada em 1000 amostras considerando:  $\alpha = 2.0$ ;  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$ ;  $t = 0.3, 2.0$  e  $4.0$ ;  $n = 5, 10, 20$  e  $50$ .

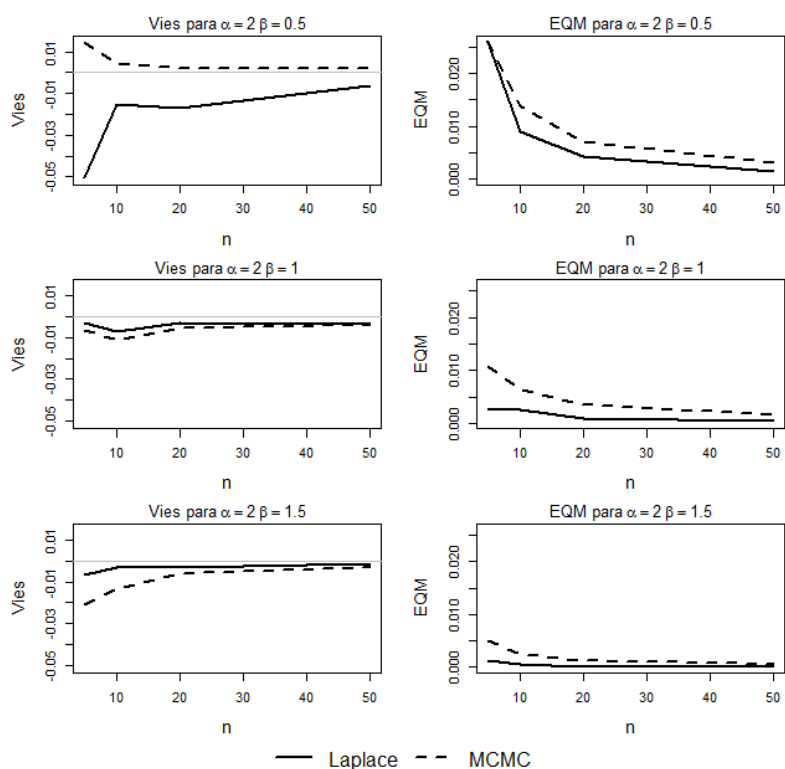


Figura 4.1: Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  versus tamanho amostral no tempo  $t = 0.3$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.6789, 0.8607$  e  $0.9436$ , respectivamente.

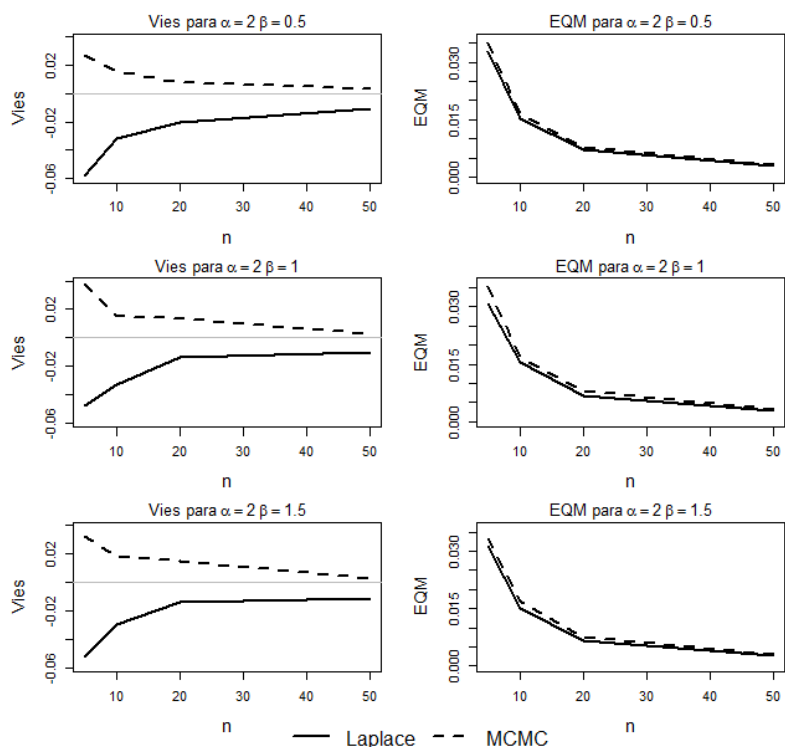


Figura 4.2: Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  versus tamanho amostral no tempo  $t = 2.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.3679, 0.3679$  e  $0.3679$ , respectivamente.

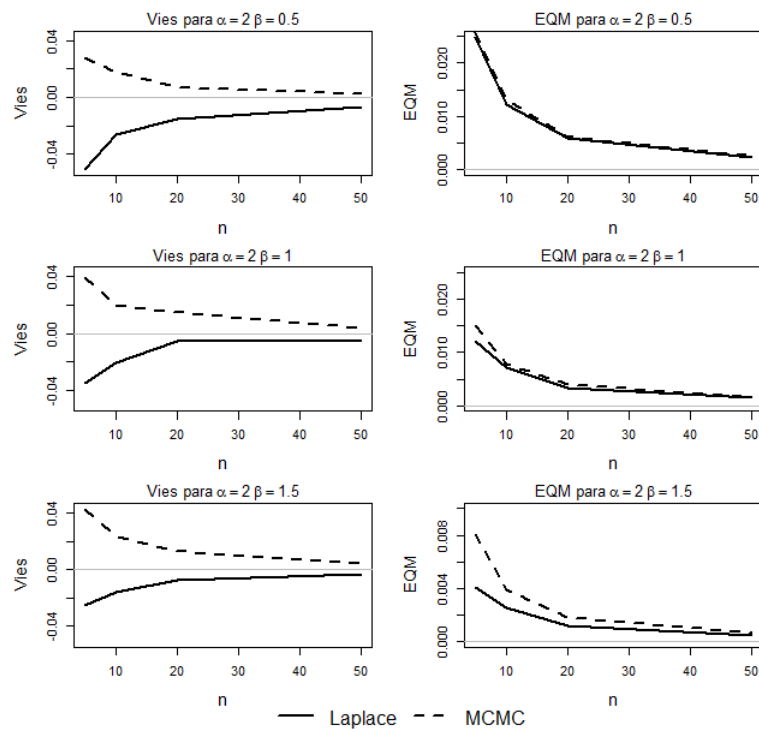


Figura 4.3: Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  versus tamanho amostral no tempo  $t = 4.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.2431, 0.1353$  e  $0.0591$ , respectivamente.

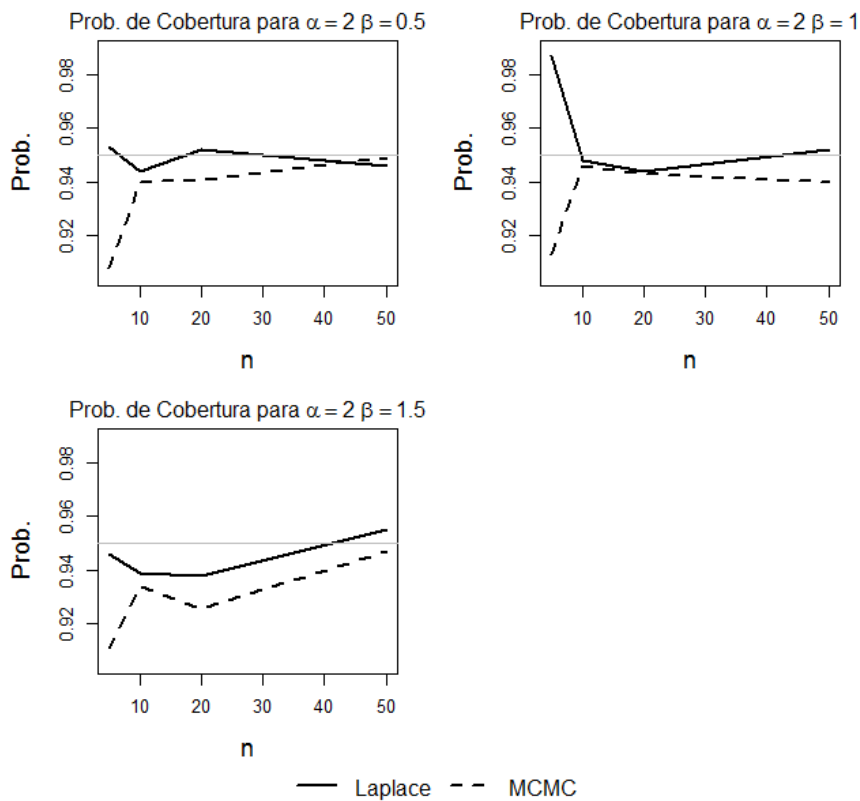


Figura 4.4: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo  $t = 0.3$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.6789, 0.8607$  e  $0.9436$ .

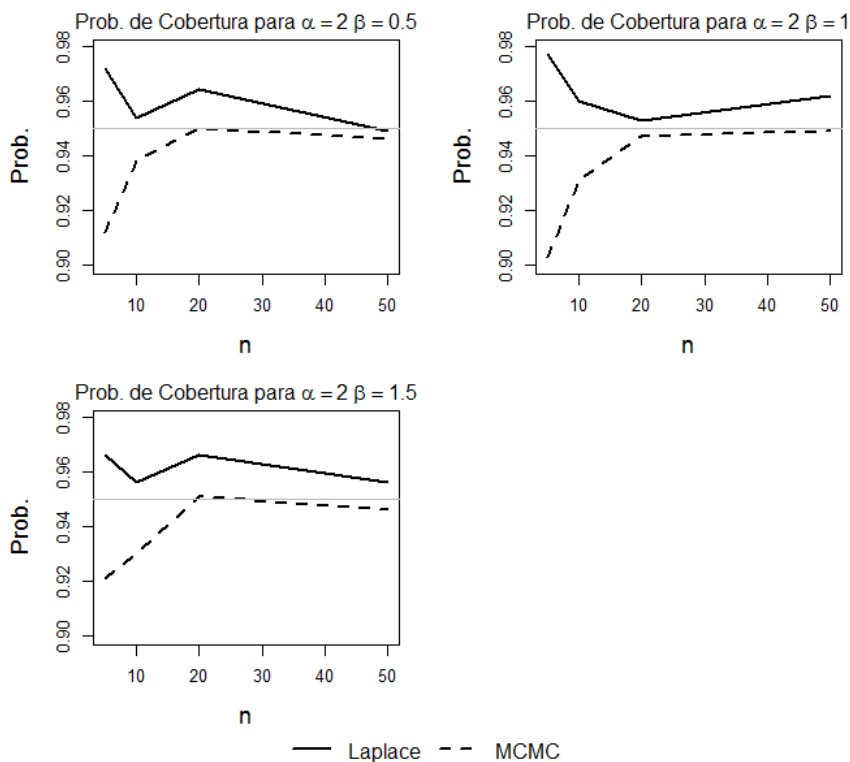


Figura 4.5: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo  $t = 2.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.3679$ ,  $0.3679$  e  $0.3679$ .

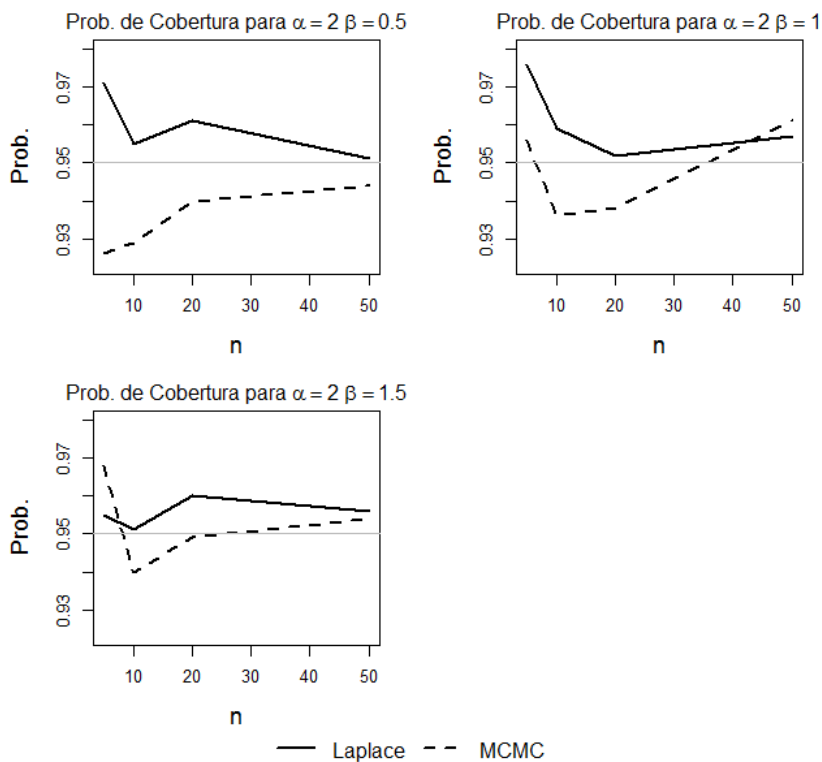


Figura 4.6: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo  $t = 4.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.2431$ ,  $0.1353$  e  $0.0591$ .

Nas Figuras (4.1) e (4.4), têm-se os gráficos para estimadores do tempo  $t = 0.3$ . As confiabilidades para este tempo  $t$  com os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  são, respectivamente: 0.6789, 0.8607 e 0.9436. Observe que para  $\beta = 1.0$  e  $1.5$ , os vícios foram menores para a aproximação de Laplace se comparada ao MCMC, assim como o EQM. Já para  $\beta = 0.5$ , os vícios para o MCMC foram menores que os obtidos pelo método de Laplace, porém para o EQM, os valores do MCMC foram maiores. Na probabilidade de cobertura, nota-se que o método de Laplace produziu melhores resultados para todos  $n$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .

Nas Figuras (4.2) e (4.5), têm-se os gráficos para os estimadores do tempo  $t = 2.0$ . Note que, a confiabilidade para este tempo  $t$  é 0.3679 para qualquer  $\beta$ . Observa-se que os vícios produzidos pelo MCMC são menores, já o EQM e probabilidade de cobertura são obtidos melhores resultados para a aproximação de Laplace.

Nas Figuras (4.3) e (4.6), têm-se os gráficos para os estimadores do tempo  $t = 4.0$ . As confiabilidades para este tempo  $t$  com os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  são, respectivamente: 0.2431, 0.1353 e 0.0591. Observa-se que os vícios produzidos pelo MCMC são menores na maioria das vezes, já o EQM são obtidos melhores resultados para a aproximação de Laplace. Em relação a probabilidade de cobertura, o método de Laplace se destacou em comparação ao MCMC.

Logo, para as prioris de Jeffreys/Tibshirani, nota-se que a aproximação de Laplace produziu melhores resultados que o método MCMC.

Um estudo de simulação foi realizado também para comparar o desempenho de todos os estimadores propostos nas seções anteriores e escolher o melhor método para realizar as simulações da confiabilidade  $R$  fazendo uso da priori de Log-Gama Negativa para  $R$ .

Manteve-se o foco em analisar o viés, o erro quadrático médio (EQM) e a probabilidade de cobertura de intervalos de 95% para diferentes tamanhos amostrais e valores de parâmetro.

A simulação neste caso também foi baseada em 1000 amostras considerando:  $\alpha = 2.0$ ;  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$ ;  $t = 0.3, 2.0$  e  $4.0$ ;  $n = 5, 10, 20$  e  $50$ .

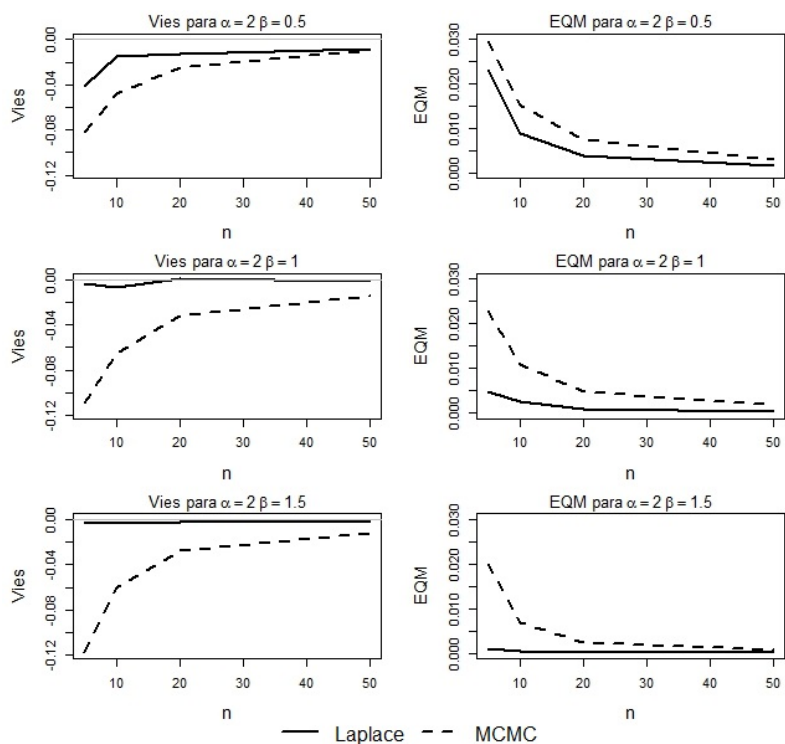


Figura 4.7: Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  versus tamanho amostral no tempo  $t = 0.3$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.6789, 0.8607$  e  $0.9436$ , respectivamente.

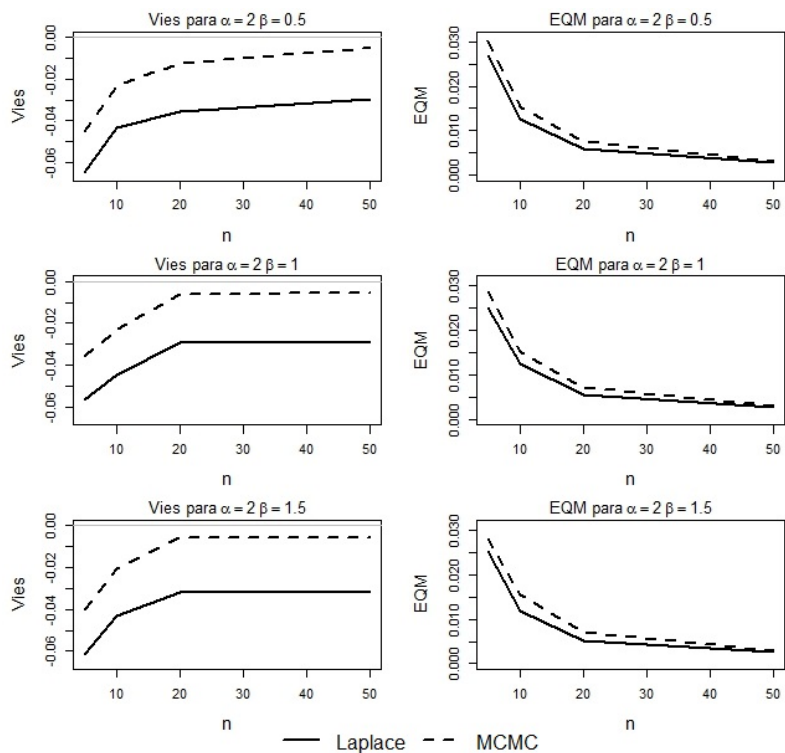


Figura 4.8: Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  versus tamanho amostral no tempo  $t = 2.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.3679, 0.3679$  e  $0.3679$ , respectivamente.

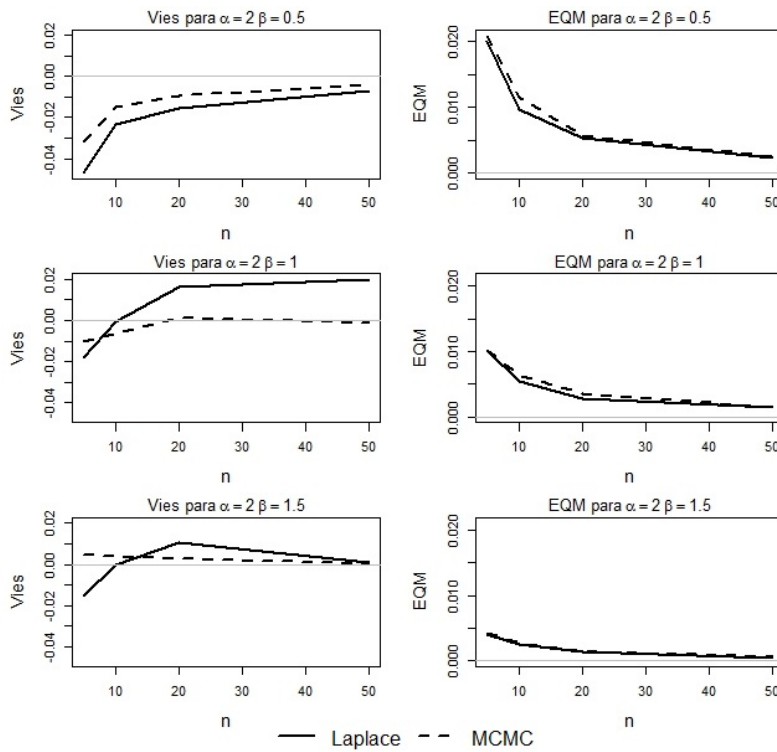


Figura 4.9: Gráficos do viés e do EQM para os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  versus tamanho amostral no tempo  $t = 4.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.2431, 0.1353$  e  $0.0591$ , respectivamente.

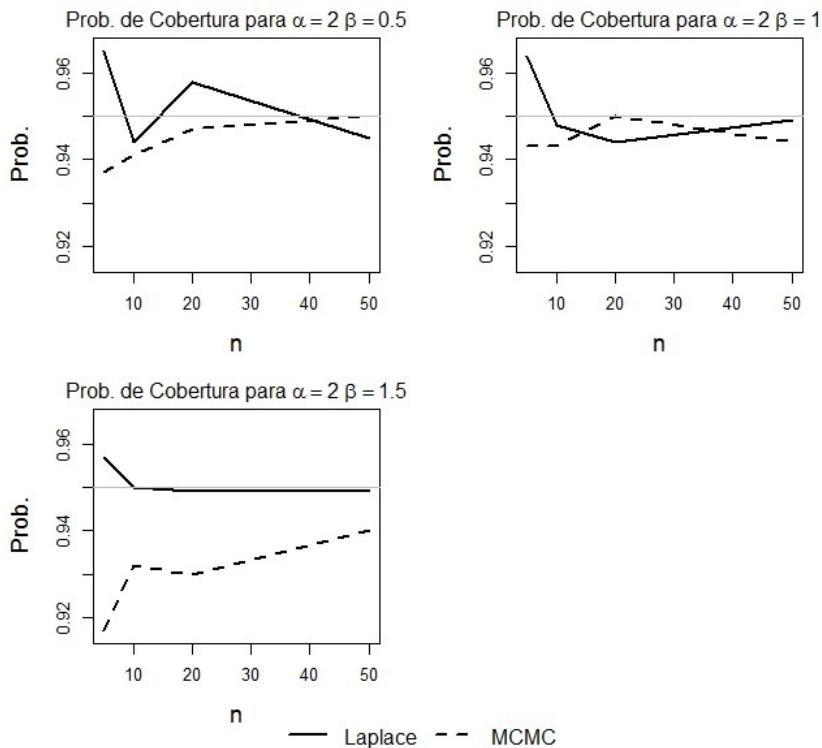


Figura 4.10: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo  $t = 0.3$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.6789, 0.8607$  e  $0.9436$ .

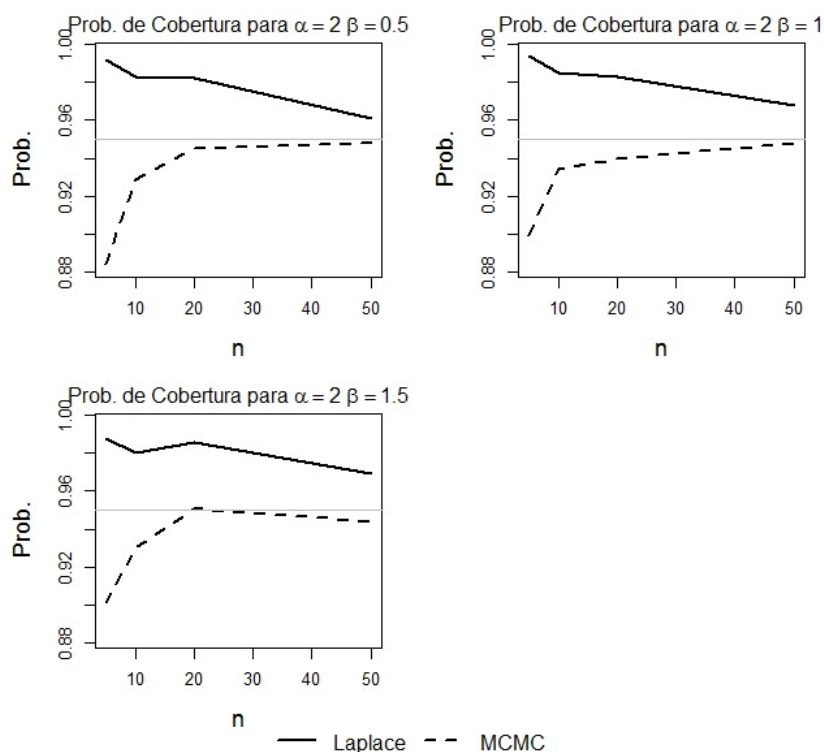


Figura 4.11: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo  $t = 2.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.3679, 0.3679$  e  $0.3679$ .

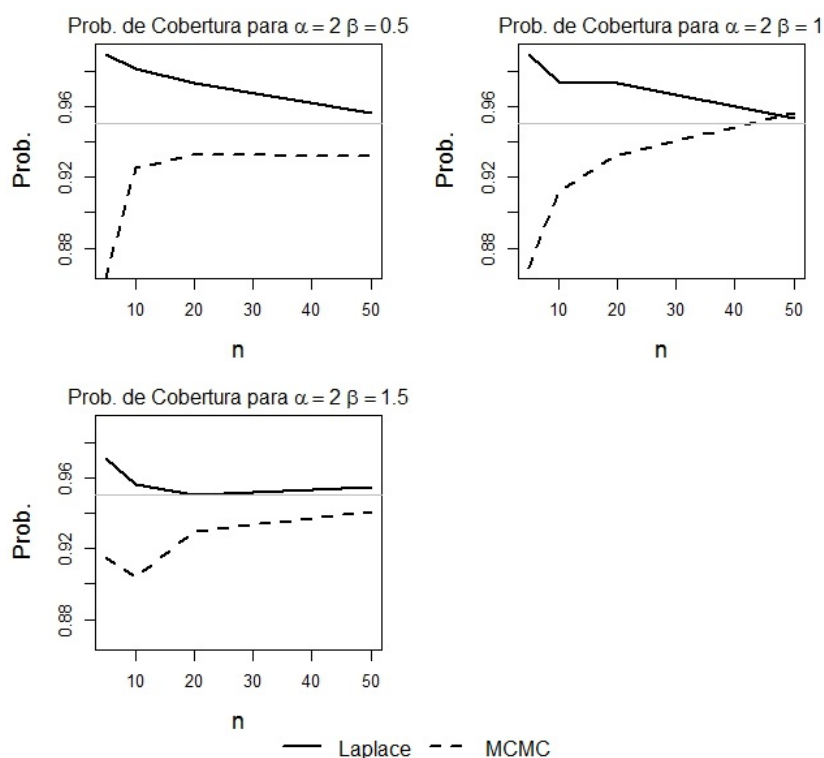


Figura 4.12: Gráfico da probabilidade de cobertura para intervalos de credibilidade de 95% versus tamanho amostral no tempo  $t = 4.0$  para estimação das confiabilidades  $R = 0.2431, 0.1353$  e  $0.0591$ .

Nas Figuras (4.7) e (4.10), têm-se os gráficos para estimadores do tempo  $t = 0.3$ . As confiabilidades para este tempo  $t$  com os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  são, respectivamente: 0.6789, 0.8607 e 0.9436. Observe que para todos os  $\beta$ 's, os vícios foram menores para a aproximação de Laplace se comparada ao MCMC, assim como o EQM. Na probabilidade de cobertura, nota-se que o método de Laplace produziu melhores resultados, no geral, para todos  $n$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .

Nas Figuras (4.8) e (4.11), têm-se os gráficos para os estimadores do tempo  $t = 2.0$ . A confiabilidade para este tempo  $t$  é 0.3679 para qualquer  $\beta$ . Nota-se que os vícios produzidos pelo método MCMC são menores, já o erro quadrático médio (EQM) e probabilidade de cobertura obtidos para a aproximação de Laplace produziram melhores resultados.

Nas Figuras (4.9) e (4.12), têm-se os gráficos para os estimadores do tempo  $t = 4.0$ . As confiabilidades para este tempo  $t$  com os parâmetros  $\alpha = 2.0$  e  $\beta = 0.5, 1.0$  e  $1.5$  são, respectivamente: 0.2431, 0.1353 e 0.0591. Percebe-se que os vícios produzidos pelo método MCMC são menores na maioria das vezes, entretanto para o EQM são obtidos melhores resultados para a aproximação de Laplace. Em relação a probabilidade de cobertura, o método de Laplace se destacou em comparação ao MCMC.

Portanto, para a priori de Log Gama Negativa, nota-se que a aproximação de Laplace também produziu melhores resultados que o método MCMC.

## 4.5 Aplicação para dados reais

Nesta seção, para fins de ilustração, analisou-se dados obtidos em [5] que representam os tempos de falha do sistema de arrefecimento de 20 veículos com motor a diesel, de mesma marca e modelo. Os tempos de falha não possuem observações censuradas. O conjunto é dado a seguir:

1276 720 1135 1854 1687 2570 2440 2547 1100 2117 1876  
1633 2646 1556 2470 1250 1895 2607 896 401

Para verificar o bom ajuste da distribuição Weibull aos dados, realizou-se o teste de Kolmogorov-Smirnov. O resultado foi um p-valor de 0.8298, indicando que a distribuição Weibull pode ser usada para analisar esses dados.

As estatísticas a posteriori e intervalos de credibilidade para a função de confiabilidade considerando a priori de Jeffreys e Log-Gama Negativa são apresentadas nas Tabelas (4.1) e (4.2).

Tabela 4.1: Média para a confiabilidade  $R$  para diferentes tempos  $t$ .

Método de estimação	t = 1650	t = 2000	t = 2300
Jeffreys(Laplace)	0.5347	0.3335	0.1883
Jeffreys(MCMC)	0.5410	0.3547	0.2139
Log-Gama(Laplace)	0.5345	0.3334	0.1884
Log-Gama(MCMC)	0.5178	0.3309	0.1941

Tabela 4.2: Intervalos de credibilidade de 95% para a confiabilidade  $R$  para diferentes tempos  $t$ .

Método de estimação	$t = 1650$	$t = 2000$	$t = 2300$
Jeffreys(Laplace)	[0.3881, 0.6773]	[0.1977, 0.5130]	[0.0910, 0.3727]
Jeffreys(MCMC)	[0.3674, 0.7100]	[0.2013, 0.5287]	[0.0951, 0.3688]
Log-Gama(Laplace)	[0.3880, 0.6772]	[0.1978, 0.5131]	[0.0912, 0.3730]
Log-Gama(MCMC)	[0.3374, 0.6891]	[0.1854, 0.4961]	[0.0787, 0.3372]

De acordo com os resultados mostrados na Tabela (4.1), nota-se que a probabilidade do tempo de falha do sistema de arrefecimento ser maior que 1650 é de 0.53, aproximadamente. Além disso, na Tabela (4.2) nota-se para ambas as prioris, o método MCMC possui intervalos de credibilidade com amplitude maior.

A Figura (4.13) mostra que as funções de confiabilidade estimadas para as prioris Jeffreys/Tibshirani e Log-Gama Negativa para cada uma dos dois métodos.

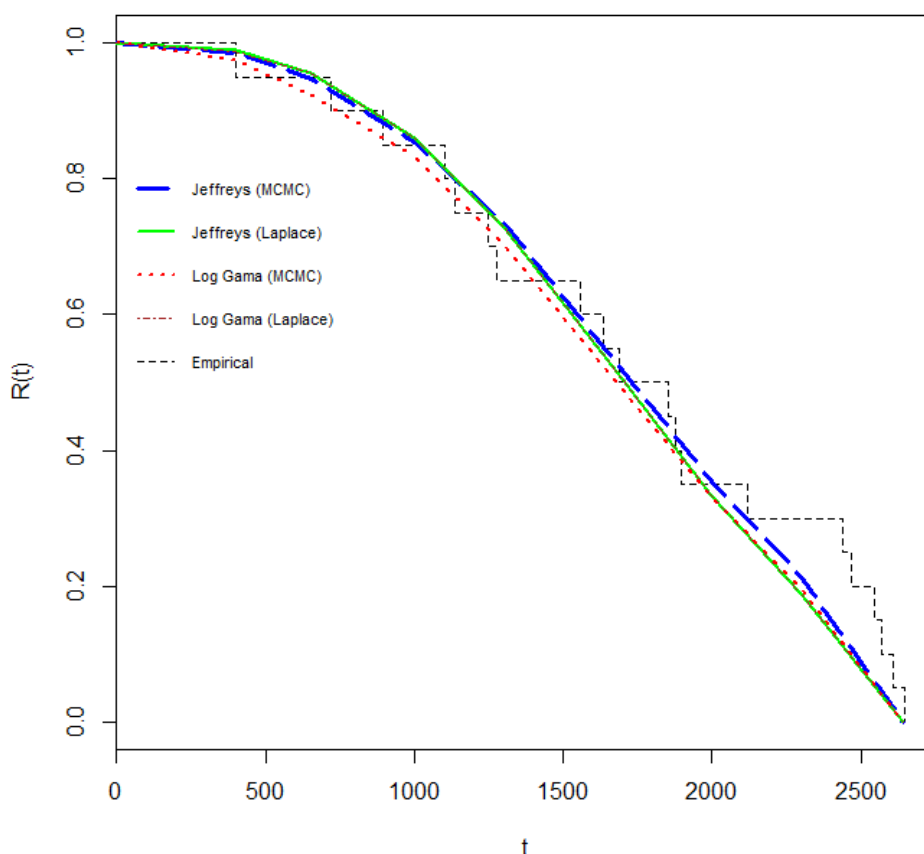


Figura 4.13: Funções de confiabilidade empírica e estimada.

Note que apenas a curva do MCMC para priori Log-Gama Negativa que descola um pouco das outras curvas, porém as outras estão na bem 'coladas', principalmente ambas prioris para o método de Laplace.

As Figuras (4.14) e(4.15) mostram as distribuições a posteriori para  $R$  para cada um dos tempos  $t$ . Nota-se que distribuição a posteriori não é sensível a escolha do método e temos assim curvas bem parecidas.

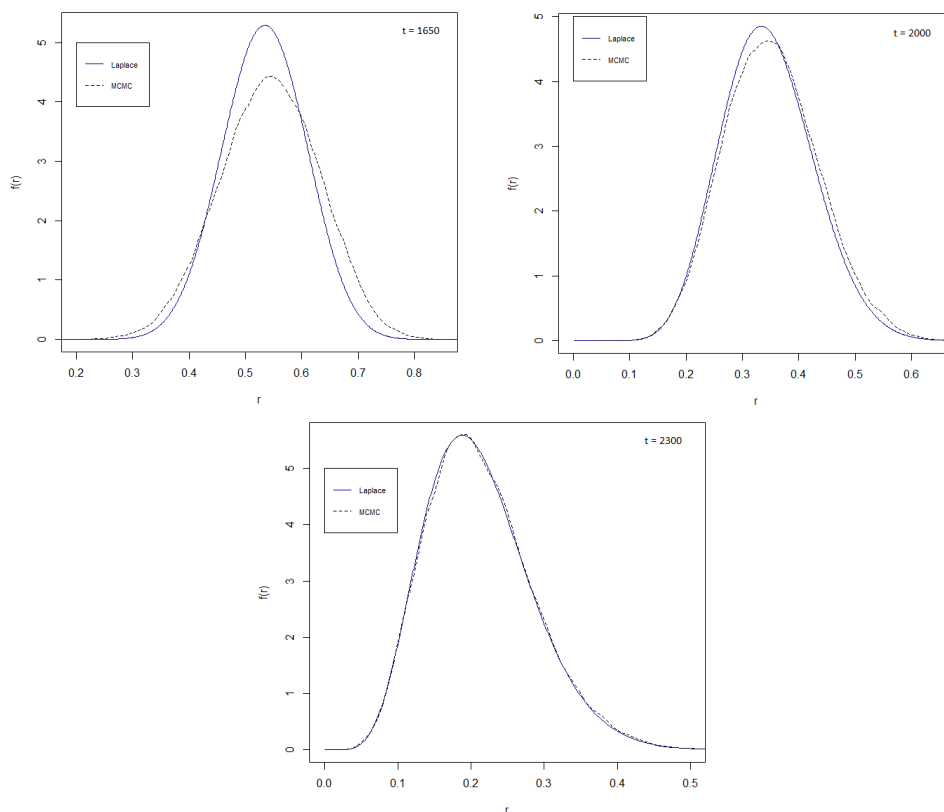


Figura 4.14: Distribuições a posteriori para  $R$  utilizando a priori de Jeffreys para os diferentes tempos  $t$ .

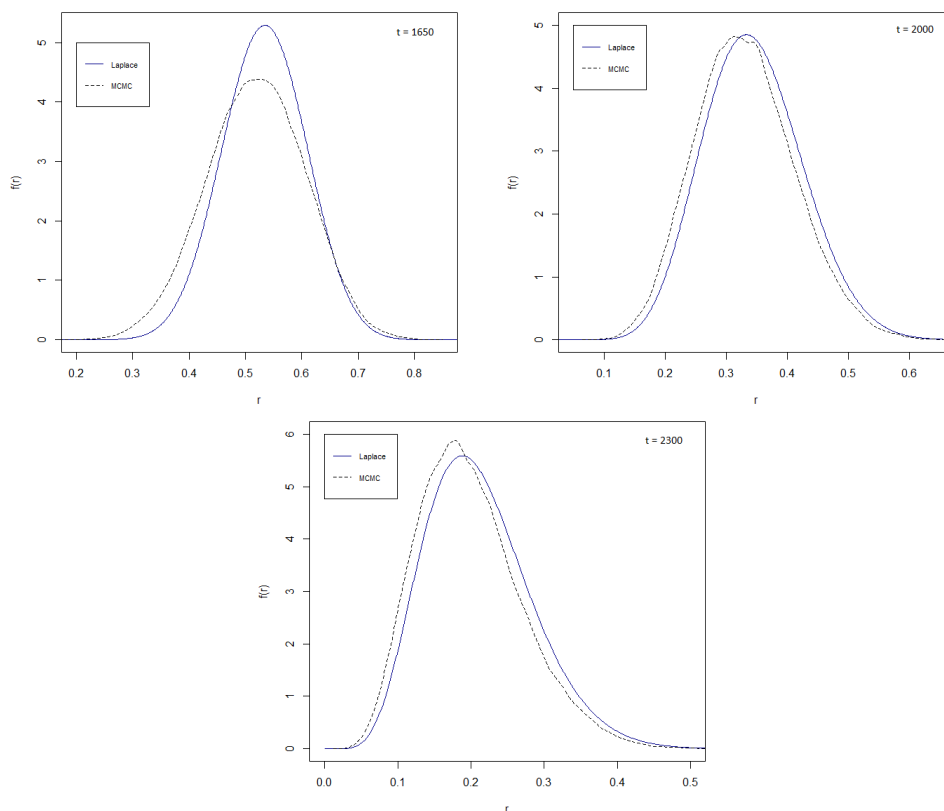


Figura 4.15: Distribuições a posteriori para  $R$  utilizando a priori Log-Gama para os diferentes tempos  $t$ .

## Conclusão

A distribuição Gama Exponenciada pode ser uma boa alternativa às distribuições padrão da vida útil existentes como Weibull, distribuição Exponencial Generalizada e Gama para análise de dados de sobrevivência, pois tem apenas um parâmetro e pode ter formas crescentes e de banheira da função de risco.

A partir dos resultados deste trabalho, conclui-se que diferentes formulações a priori levam às distribuições a posteriori Gamma e Log-Gama Negativa para o parâmetro e função acumulada, respectivamente, da GE. Desta forma, uma posteriori explícita para a função de confiabilidade  $R(t)$  é dada, gerando esperança, variância, intervalos de credibilidade e HPD, todos estimadores exatos.

Nesse sentido, a obtenção de formas analíticas conhecidas para os posterioris é de suma importância, pois facilita a inferência estatística e não há necessidade do uso da Cadeias de Markov via Monte Carlo (MCMC) e métodos de aproximação, como Laplace.

Além disso, comparando o desempenho das prioris propostas através de simulações de Monte Carlo, dos quais conclui-se que as prioris de Jeffreys e Gama são as mais apropriadas para o parâmetro  $\theta$  em comparação com a priori Uniforme e que continuou apresentando diferença entre as prioris para estimação do função de confiabilidade  $R(t)$ , para a vida útil pré-fixada  $t$ . A priori Uniforme para  $W$  apresentou bons resultados em alguns casos, porém para confiabilidades próximas de 0 ou de 1, apresentou resultados ruins. Logo, a priori de Jeffreys, Gama e NGL para  $W$  se apresentaram mais apropriadas para a estimação da confiabilidade  $R(t)$ .

Portanto, um pesquisador pode selecionar uma das prioris: Jeffreys ou Gama ou NGL convenientemente para conduzir uma análise de confiabilidade Bayesiana, sob distribuição GE. Jeffreys é conhecida como uma priori objetiva que representa um estado de falta de informação, enquanto a Gama e NGL pode-se incorporar informações de um especialista, bem como dos dados empíricos.

A aplicabilidade da análise Bayesiana foi demonstrada em um conjunto de dados reais.

Para a comparação entre os métodos de aproximação de Laplace e o MCMC utilizados na confiabilidade  $R(t)$  de dados oriundos de uma distribuição Weibull, nota-se que no geral, para a priori de Jeffreys/Tibshirani como para Log-Gama Negativa, a aproximação de Laplace produziu melhores resultados.

O desempenho da aproximação de Laplace para os estimadores propostos não é o único ponto que se destaca. A propriedade de se obter uma forma fechada para a distribuição a posteriori da confiabilidade é uma importante resultado, já que esta facilita a obtenção dos momentos amostrais e intervalos de credibilidade a posteriori.

---

Além disso, um ponto que se deve ser abordado é o fato da aproximação de Laplace exige um esforço computacional muito menor se comparado ao MCMC, sendo assim outra característica muito importante e que deve ser destacada.

A proposta para continuação do trabalho, é realizar um estudo de simulação para comparação entre ambos os métodos de aproximação: Laplace e MCMC para outras priors, como a priori de Zellner.

## Referências

---

- [1] F. Allella; E. Chiodo; D. Lauria; M. Pagano. Negative log-gamma distribution for data uncertainty modelling in reliability analysis of complex systems-methodology and robustness. *International Journal of Quality & Reliability Management*, 18(3):307–323, 2001.
- [2] G.E.P. Box; G.C. Tiao. *Bayesian inference in statistical analysis*, volume 40. John Wiley & Sons, 2011.
- [3] S. Chib; E. Grenberg. Understanding the metropolis-hastings algorithm. *The american statistician*, 49(4):327–335, 1995.
- [4] E.A. Colosimo; S.R. Giolo. *Análise de sobrevivência aplicada*. Edgard Blucher, 2006.
- [5] D.R. Dolas; M.D. Jaybhaye; S.D. Deshmukh. Estimation the system realibility using weibull distribution. *International Proceedings of Economics Development and Research*, 75:144, 2014.
- [6] Cox; N. Reid D.R. Parameter orthogonality and approximate conditional inference. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, pages 1–39, 1987.
- [7] D. Gamerman; H.F. Lopes. *Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. Chapman e Hall/CRC, 2006.
- [8] R.C. Gupta; P.L. Gupta; R.D. Gupta. Modeling failure time data by lehman alternatives. *Communications in Statistics-Theory and methods*, 27(4):887–904, 1998.
- [9] S.H. Jeffreys. *Theory of Probability*. Clarendon Press, 3d edition edition, 1967.
- [10] J.F. Lawless. *Statistical models and methods for lifetime data*, volume 362. John Wiley & Sons, 2nd edition edition, 2003.
- [11] M.O. Locks. Reliability, maintainability and availability assessment. 1973.
- [12] H.F. Martz; R.A. Waller. Bayesian reliability analysis. 1982.
- [13] D.V. Mastran. Incorporating component and system test data into the same assessment: a bayesian approach. *Operations Research*, 24(3):491–499, 1976.
- [14] F.A. Moala; J. Rodrigues. Bayesian inference of the weibull reliability function via laplace approximation. *Revista de matematica e estatistica*, (17):167–174, 1999.
- [15] F.A. Moala; J. Rodrigues; D.L. Penha. Elicitation methods for beta prior distribution. *REVISTA BRASILEIRA DE BIOMETRIA*, 34(1):49–62, 2016.

- 
- [16] F.A. Moala; J. Rodrigues; V.L.D. Tomazella. A note on the prior distributions of weibull parameters for the reliability function. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 38(7):1041–1054, 2009.
- [17] A.I. Shawky; R.A. Bakoban. Bayesian and non-bayesian estimations on the exponentiated gamma distribution. *Applied Mathematical Sciences*, 2(51):2521–2530, 2008.
- [18] A.I. Shawky; R.A. Bakoban. Certain characterizations of the exponentiated gamma distribution. in *JATA*, 2008.
- [19] A.I. Shawky; R.A. Bakoban. Characterization from exponentiated gamma distribution based on record values. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 7(3), 2008.
- [20] A.I. Shawky; R.A. Bakoban. Conditional expectation of certain distributions of record values. *International Journal of Mathematical Analysis*, 3(17):829–838, 2009.
- [21] A.I. Shawky; R.A. Bakoban. Order statistics from exponentiated gamma distribution and associated inference. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4(2):71–91, 2009.
- [22] R. Tibshirani. Noninformative priors for one parameter of many. *Biometrika*, 76(3):604–608, 1989.
- [23] L. Tierney; J.B. Kadane. Accurate approximations for posterior moments and marginal densities. *Journal of the american statistical association*, 81(393):82–86, 1986.
- [24] L. Tierney; R.E. Kass; J.B. Kadane. Approximation of posterior expectations and variances using laplace’s method. *Tech-nical Report*, 385, 1986.
- [25] L. Tierney; R.E. Kass; J.B. Kadane. Fully exponential laplace approximations to expectations and variances of nonpositive functions. *Journal of the American Statistical Association*, 84(407):710–716, 1989.

# Conceitos Teóricos, Métodos e Códigos

## A.1 Análise de Confiabilidade

Na análise de confiabilidade a variável resposta é o tempo de vida  $t$  até que o fenômeno de interesse aconteça (este pode ser, a falha do componente em estudo), chamado em grande parte das vezes de **tempo de falha** ou **vida** (Colosimo e Giolo [4]).

O comportamento deste tipo de dados são os mais diferentes possíveis, por isso, utiliza-se diversas distribuições para modelar a função de risco. Afinal, quando o interesse é buscar uma distribuição que possa representar os dados procura-se então qual delas obtêm-se o melhor ajustamento(ou adequação). Um exemplo de formato muito importante da função de risco é a forma de banheira, pois grande parte dos conjuntos estudados possuem este comportamento.

Várias técnicas estatísticas nos auxiliam a estudar estes tipos de dados, se tornando peças importantes para na predição do tempo de vida. Dentre muitas, pode-se destacar a *função de confiabilidade* e *função de risco*, ambas são funções importantes para realização deste tipo de análise.

### A.1.1 Função de Confiabilidade

Seja  $T$  uma variável aleatória contínua representando o tempo de vida de algum objeto ou indivíduo de interesse. Com  $f(t)$  a função densidade de probabilidade (fdp),  $F(t)$  a função de distribuição acumulada (fda) e  $R(t)$  a função de confiabilidade (Colosimo e Giolo [4]).

A função de confiabilidade  $R(t)$  é definida como a probabilidade de um objeto ou sistema desempenhar sua função por um dado período de tempo  $t$ , ou seja:

$$R(t) = P(T > t), t > 0. \quad (\text{A.1})$$

A Equação (A.1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = 1 - F(t). \quad (\text{A.2})$$

Além disso, essa função possui algumas propriedades:

- 

$$\lim_{t \rightarrow 0} R(t) = 1;$$

•

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0;$$

• É monótona decrescente e contínua.

Tal função é extremamente importante para o estudo da confiabilidade dos dados, sendo observado assim a probabilidade desse objeto ou componente funcionar corretamente até o tempo  $t$  (para mais informações, veja em Colosimo e Giolo [4]).

### A.1.2 Função de Risco

Outra função muito importante na Análise de Confiabilidade é a função de risco, pois ela nos fornece o risco associado a uma unidade no tempo  $t$ . Esta função fornece a taxa de falha condicional, ou seja, ela nos informa a taxa de falha naquele intervalo, dado que o objeto em estudo não tenha apresentado defeito até o início deste período (Colosimo e Giolo [4]).

Suponha um intervalo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ , a taxa de falha é probabilidade de um observação falhar neste período, dado que ela não falhou até o tempo  $t$ , dividido pelo comprimento deste intervalo  $\Delta t$ , quando  $\Delta t \rightarrow 0$ . Logo, essa função é dada por:

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t \geq T \geq t + \Delta t | T \leq t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.3})$$

Aplicando o limite na equação (A.3), temos que:

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \quad (\text{A.4})$$

$r(t) \geq 0$  e possui a seguinte propriedade:

$$\int_0^{\infty} r(t) dt = \infty.$$

Ela é geralmente utilizada para determinar a distribuição tomada pelos dados (para mais informações, veja em Colosimo e Giolo [4]). Esta função não será usada neste trabalho.

## A.2 Inferência Bayesiana

Em alguns casos, quando realiza-se um estudo, nos deparamos com informações iniciais sobre aquele fenômeno, seja ela fornecida por um especialista da área ou decorrente de estudos passados. Ela fornece um conhecimento sobre o(s) parâmetro(s) de interesse que o profissional busca estimar, no qual denomina-se de *Informação a Priori*. Ao final, só resta a seguinte questão: como atribuir a *Distribuição a Priori* nas análises estatísticas?

Por meio do teorema de Bayes, combina-se a informação a priori com a informação obtida dos dados, no qual irá resultar na *Distribuição a Posteriori*, dada por:

$$p(\theta | t_1, \dots, t_n) \propto L(\theta | t_1, \dots, t_n) \pi(\theta), \quad (\text{A.5})$$

onde  $L(\theta | t_1, \dots, t_n)$  é a função de verossimilhança e  $\pi(\theta)$  é a distribuição a priori. A função de verossimilhança é obtida da seguinte forma: suponha uma amostra aleatória  $T_1, \dots, T_n$  oriunda de uma distribuição qualquer,  $f(t|\theta)$ , com  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$ . Logo,

$$L(\theta|t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(t_i|\theta), \theta \in \Theta. \quad (\text{A.6})$$

A distribuição a posteriori nada mais que a combinação da entre a função de verossimilhança e a distribuição a priori, ou seja, é que a distribuição atualizada dos parâmetros por meio do Teorema de Bayes (Box e Tiao [2]). Através dessa, é possível não só visualizar o comportamento da distribuição, assim como realizar estatísticas mais elaboradas para os parâmetros, sendo elas: intervalos de credibilidade, estimativas, entre outras.

Ao trabalhar com a Inferência Bayesiana podemos nos deparar com um problema muito comum que é não possuímos informações a priori. Neste caso, utiliza-se então com as prioris não-informativas, existem diversas que podem ser usadas, porém as que serão utilizadas neste trabalho são: Jeffreys e Tibshirani.

### A.3 Aproximação de Laplace

A Aproximação de Laplace é um método analítico para aproximar integrais usando máximos globais. Tal aproximação é muito utilizado atualmente na Inferência Bayesiana para o cálculo de momentos a posteriori, densidade preditiva e densidade a posteriori marginal (Tierney e Kadane [23]). Este método será utilizado neste trabalho para o cálculo aproximado da posteriori da confiabilidade utilizando a distribuição Weibull e algumas prioris que já foram citadas acima.

Seja  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $\phi$  com  $-h$  tendo uma única moda  $\hat{\phi}$ . O método de Laplace proposto por Tierney, Kass e Kadane [24] oferece uma aproximação para a integral da forma,

$$I = \int_0^{\infty} f(\phi)e^{-nh(\phi)}d\phi, \quad (\text{A.7})$$

usando uma expansão de Taylor de  $h$  e  $f$  em  $\hat{\phi}$ .

A função  $f(\phi)$  é escolhida de modo que  $\hat{\phi}$  é obtida de uma forma explícita e não depende de  $n$ . A aproximação de Laplace para integrais proposta por Tierney, Kass e Kadane [24] é dada por,

$$\int_0^{\infty} f(\phi)e^{-nh(\phi)}d\phi = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{n}}e^{-nh(\hat{\phi})} \left\{ \hat{f} + \frac{1}{2n} \left( \sigma^2 \hat{f}^{(2)} - \sigma^4 \hat{f}^{(1)} \hat{h}^{(3)} + \frac{5}{12} \hat{f} (\hat{h}^{(3)})^2 \sigma^6 - \frac{1}{4} \hat{f} \hat{h}^{(4)} \sigma^4 \right) \right\} + \mathbf{O}(n^{-2}), \quad (\text{A.8})$$

onde  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{h^{(2)}(\hat{\phi})}}$  e o acento circunflexo em  $f$ ,  $h$  e suas funções derivadas indicam os valores para  $\hat{\phi}$ , a moda de  $-h(\phi)$  (para mais informações, veja em Tierney e Kadane [23]).

### A.4 Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) - Algoritmo de Metrópolis-Hastings

Os métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) apresentam uma classe de algoritmos usados para obter amostras a partir de distribuições de probabilidade, fazendo uso de simulação estocástica. Estes métodos se tornaram extremamente importantes na estatística, principalmente na Inferência Bayesiana, pois eles auxiliam na estimação da distribuição a posteriori. Tais métodos tem como ideia central aproximar a distribuição de interesse, mesmo sem conhecê-la, por meio de uma amostra desta.

Constrói-se uma cadeia de Markov que tem a distribuição de interesse como distribuição de equilíbrio, supondo assim, que as cadeias irão convergir para um certo número de etapas realizadas, mesmo escolhendo qualquer valores iniciais. Além de que, quanto maior o número de cadeias houver, mais perto a aproximação será da distribuição de interesse (Gamerman e Lopes [7]).

No passado, o MCMC não era um método tão viável por possuir um esforço computacional pouco maior que outros métodos de aproximação. Porém, com o avanço das tecnologias tal prática se tornou mais utilizada, sem contar que o quanto a Inferência Bayesiana cresceu, principalmente na estimação de modelos hierárquicos com centenas de parâmetros desconhecidos.

Existem diversos métodos de MCMC, porém pode-se se destacar especialmente o algoritmo de Metrópolis-Hastings, afinal ele será utilizado neste trabalho. Tal consiste em um algoritmo de aceitação-rejeição, este gera um valor de uma distribuição auxiliar e este número gerado será aceito ou não com dada probabilidade (Gamerman e Lopes [7]).

O algoritmo de Metrópolis-Hastings pode ser construído por etapas, inicialmente escolhe-se a distribuição de equilíbrio (em nosso caso, a distribuição à posteriori,  $p(r, w)$ ). Como iremos estimar a confiabilidade da distribuição Weibull, teremos o  $r$  que será o interesse e uma variável  $w$  auxiliar. Então iremos buscar as marginais a posteriori de  $r$  e  $w$ , seguindo os seguintes passos:

1. Inicie os contadores das interações  $j = 0$  e  $k = 0$ , e atribua valores para  $w^{(0)}$  e  $r^{(0)}$ ;
2. Gere um novo valor para  $r^*$  da distribuição  $q_1(\cdot|r)$  (distribuição arbitrária);
3. Calcule a probabilidade de aceitação  $\alpha_1(r, r^*) = \min(1, \frac{p(r^*, w)q_1(r|r^*)}{p(r, w)q_1(r^*|r)})$  e gere  $u_1$  tal que  $U_1 \sim U(0, 1)$ ;
4. Se  $u_1 \leq \alpha_1$  aceite o novo valor e faça  $r^{(j+1)} = r^*$ , caso contrário, rejeite e faça  $r^{(j+1)} = r$ ;
5. Incremente o contador  $j$  para  $j + 1$ ;
6. Gere um novo valor para  $w^*$  da distribuição  $q_2(\cdot|w)$  (distribuição arbitrária);
7. Calcule a probabilidade de aceitação  $\alpha_2(w, w^*) = \min(1, \frac{p(r^{(j+1)}, w^*)q_2(w|w^*)}{p(r^{(j+1)}, w)q_2(w^*|w)})$  e gere  $u_2$  tal que  $U_2 \sim U(0, 1)$ ;
8. Se  $u_2 \leq \alpha_2$  aceite o novo valor e faça  $w^{(k+1)} = w^*$ , caso contrário, rejeite e faça  $w^{(k+1)} = w$ ;
9. Incremente o contador  $k$  para  $k + 1$ ;
10. Volte ao passo 2.

Ao final, encontra-se valores  $r$  para esta respectiva amostra, é possível então visualizar o comportamento da posteriori, estimar a estimativa pontual, calcular intervalo de credibilidade e outras estatísticas.

## A.5 Distribuição Log-Gama Negativa

A distribuição Log-Gama Negativa tem sido muito utilizada em análise de confiabilidade de sistemas por Mastran [13], Martaz e Waller [12], entre outros, como distribuição *á priori*.

A variável aleatória  $X$  tem distribuição Log-Gama Negativa com parâmetros  $k$  e  $\lambda$ , se  $Y = \ln\left(\frac{1}{X}\right)$  tem distribuição Gama, que denotamos por  $Y \sim \Gamma(k, \lambda)$ , cuja função de densidade é dada por

$$f(y|\lambda, k) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-y\lambda}. \quad (\text{A.9})$$

Por outro lado, a função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $X = e^{-y}$  é dada por,

$$f(x|\lambda, k) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{k-1} x^{\lambda-1}, 0 < x < 1, \quad (\text{A.10})$$

e denotada por  $NLG(k, \lambda)$ .

As seguintes medidas descritivas relacionadas a v.a.  $X$  são dadas abaixo,

(I) Média =  $E(X) = \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-k}$  ;

(II) Variância =  $V(X) = \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)^{-k} - \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-2k}$  ;

(III) Moda =  $M_o = e^{-\frac{k-1}{\lambda-1}}$ .

Suponhamos que a Função de Confiabilidade  $R$  tenha distribuição a posteriori,  $P(R|x)$ , Log-Gama Negativa com parâmetros  $k$  e  $\lambda$ , então o intervalo a posteriori  $100(1 - \alpha)\%$ ,  $(R_L, R_U)$ , para  $R$  pode ser obtido usando-se a distribuição  $\chi^2$ . De fato, o intervalo a posteriori  $(R_L, R_U)$  é definido por

$$P(R_L \leq R \leq R_U|x) = 1 - \alpha.$$

Daí,

$$P\left(2\lambda \ln\left(\frac{1}{R_U}\right) \leq 2\lambda \ln\left(\frac{1}{R}\right) \leq 2\lambda \ln\left(\frac{1}{R_L}\right) \middle| x\right) = 1 - \alpha.$$

Mas como  $2\lambda \ln\left(\frac{1}{R}\right)$  segue uma distribuição  $\chi^2(2k)$ , então o intervalo desejado tem limite inferior e superior,

$$R_L = \exp\left\{-\frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\}; R_U = \exp\left\{-\frac{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2k)}{2\lambda}\right\},$$

respectivamente (para mais informações, veja em Allella et al. [1]).

## A.6 Códigos em R para geração e estatísticas da distribuição Gama Exponenciada

### A.6.1 Geração de amostras

```

1  rm(list=ls(all=TRUE))
2  /* Programa que gera valores para distribuição Gama Exponenciada.*/
3  /* n = sample size */
4  n<-5
5  /* verdadeiros parâmetros */
6  theta<-0.2
7  /* numero de amostras */
8  N=1000
9  /* conjunto de amostras geradas na simulação */
10 m_5_0.2<-matrix(0,nrow=N,ncol=n)
11 precisoes1<-matrix(0,nrow=N,ncol=n)
12 precisoes2<-matrix(0,nrow=N,ncol=n)
13 runif1<-matrix(0,nrow=N,ncol=n)
14 runif2<-matrix(0,nrow=N,ncol=n)
15
16 for (i in 1:N) {
17
18   precisao1<-rep(0,n)
19   precisao2<-rep(0,n)
20   ru1<-rep(0,n)
21   ru2<-rep(0,n)
22
23   amostra<-length(n)
24
25
26   for (j in 1:n) {
27
28     ru1[j]<-runif(1)
29     eq1<-function(x) ru1[j]-(1-exp(-x)*(x+1))^theta
30     amostra[j]<-uniroot(eq1,c(0,15))$root
31     precisao1[j]<-abs(eq1(amostra[j]))
32
33     if((precisao1[j]>0.000001 & precisao1[j]<0.0000000001) | (amostra[j]==0))
34       {
35         ru2[j]<-runif(1)
36         eq2<-function(x) ru2[j]-(1-exp(-x)*(x+1))^theta
37         amostra[j]<-uniroot(eq2,c(0,15))$root
38         precisao2[j]<-abs(eq2(amostra[j]))
39
40         while((precisao2[j]>0.000001 & precisao2[j]<0.0000000001) | (amostra[j]
41           ==0)){ ru2[j]<-runif(1)
42           eq2<-function(x) ru2[j]-(1-exp(-x)*(x+1))^theta
43           amostra[j]<-uniroot(eq2,c(0,15))$root
44           precisao2[j]<-abs(eq2(amostra[j]))
45         }
46       }
47
48     m_5_0.2[i,]<-amostra
49     precisoes1[i,]<-precisao1
50     precisoes2[i,]<-precisao2
51     runif1[i,]<-ru1
52     runif2[i,]<-ru2
53   }

```

```

53 write.csv(m_5_0.2, "D:/Documentos/Mestrado – Matemática Aplicada e
    Computacional/Projeto/Estudo dirigido/Artigo/Amostra 5/Amostra_tam_5_p
    _0.2.txt")
54 /* samples */

```

Listing A.1: Geração de 1000 amostras de tamanho  $n = 5$  e  $\theta = 0.2$ .

### A.6.2 Calculando a constante $c$ para cada amostra

```

1 /* Constante c para amostra de tamanho 5 e param 0.2 */
2 m_5_0.2=read.csv("D:/Documentos/Mestrado – Matemática Aplicada e
    Computacional/Projeto/Estudo dirigido/Artigo/Amostra 5/Amostra_tam_5_p
    _0.2.txt", sep=',')
3 N=1000
4 a1=5
5 vec_c_5_param_0.2=c()
6 t=c()
7 for (i in 1:N) {
8   aux=1
9   for (j in 2:a1+1) {
10    t[j] = m_5_0.2[i, j]
11    aux=aux*(1-(exp(-t[j])*(t[j]+1)))
12   }
13   vec_c_5_param_0.2[i]=aux
14 }

```

Listing A.2: Calculando a constante  $c$  para cada amostra de tamanho  $n = 5$  e  $\theta = 0.2$ .

### A.6.3 Calculando os estimadores de $\hat{\theta}$ para cada amostra

```

1 /* Estimador de Max. Ver. para n=5 e theta=0.2 */
2 n=5
3 max_ver_amost_5_param_0.2=n/log(1/vec_c_5_param_0.2)
4 /* Estimador para priori uniforme para n=5 e theta=0.2 */
5 uniform_amost_5_param_0.2=(n+1)/log(1/vec_c_5_param_0.2)
6 /* Estimador para priori gama(alpha, beta) para n=5 e theta=0.2 */
7 alpha=0.1
8 beta=0.1
9 gama_amost_5_param_0.2=(n+alpha)/(beta + log(1/vec_c_5_param_0.2))

```

Listing A.3: Calculando os estimadores de  $\hat{\theta}$  para cada amostra de tamanho  $n = 5$  e  $\theta = 0.2$ .

### A.6.4 Calculando os estimadores de $\hat{R}$ para cada amostra

```

1 /* Estimation of the reliability R */
2 vec_c = read.csv("D:/Documentos/Mestrado – Matemática Aplicada e
    Computacional/Projeto/Estudo dirigido/Artigo/Amostra 5/Vetor_c_amostra_
    5.txt", sep = ',')
3 c = vec_c$vec_c_5_param_0.2
4 t_p=0.5
5 n=5
6 v=1/(log(1 - exp(-t_p)*(t_p+1)))
7 verdad_r=0.3819
8
9 /* MLE */

```

```
10 theta_hat=n/(log(1/c))
11 estimado_MLE = 1 - ((1 - exp(-t_p)*(t_p+1))^theta_hat)
12
13 /* Uniform for theta */
14 estimado_unif= 1 - ((1 + (1/(v*log(c))))^(-n-1))
15
16 /* Gamma */
17 Beta = 0.1
18 Alpha = 0.1
19 estimado_gamma = 1 - ((1 + (1/(v*(log(c) - Beta))))^(-n - Alpha))
20
21 /* Jeffreys */
22 estimado_jef= 1 - ((1 + (1/(v*log(c))))^(-n))
23
24 /* Uniform for F0 */
25 estimado_unif= 1 - ((1 + (1/(v*log(c) + 1)))^(-n - 1))
26
27 /* NLG for F0 */
28 b = 0.01
29 a = 0.01
30 estimado_nlg = 1 - ((1 + (1/(v*log(c) - b)))^(-n - a))
```

Listing A.4: Calculando os estimadores de  $\hat{R}_p$  para cada amostra de tamanho  $n = 5$ ,  $t = 0.5$  e  $\theta = 0.2$ .