

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

André Machado Cespedes

**TERMODINÂMICA DO MODELO BOUNCER - UM GÁS UNIDIMENSIONAL
SIMPLIFICADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física, área de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Rio Claro-SP

2015

536.7 Céspedes, André Machado
C421t Termodinâmica do Modelo Bouncer : um gás
unidimensional simplificado / André Machado Céspedes. -
Rio Claro, 2015
50 f. : il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Edson Denis Leonel

1. Termodinâmica. 2. Caos. 3. Leis de escala. 4.
Aceleração de Fermi. 5. Expoentes críticos. 6. Mapeamentos
discretos. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

André Machado Cespedes

**TERMODINÂMICA DO MODELO BOUNCER - UM GÁS UNIDIMENSIONAL
SIMPLIFICADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas do Câmpus de Rio Claro, da
Universidade Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Física, área de Física Aplicada.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Prof. Dr. Paulo César Rech

Prof. Dr. Dario Antonio Donatti

Rio Claro-SP, 15 de maio de 2015.

Resultado: APROVADO

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha esposa Alessandra, por me proporcionar tantos momentos felizes, pelo carinho, compreensão e apoio nas horas difíceis.

A minha filha Alícia pela alegria e sorriso cativante que me faz deixar todas as dificuldades de lado e seguir além.

Ao meu filho Henrique, ainda que distante, um grande companheiro.

Aos meus pais Antonio e Analha pelo carinho e aos meus demais familiares: Rosa, Adriana, Ricardo, Aline, André, Gisele e Livia, pelos infinitos momentos de descontração, pelo carinho e pelos incentivos a seguir nos estudos.

Ao meu orientador, o professor Edson Denis Leonel, pela boa vontade e entusiasmo contagiante. Por estar sempre disposto a ajudar com dicas preciosas. Por ter se tornado um amigo, exemplo de pessoa e profissional a ser seguido.

Ao professor Dario, por ter me proporcionado um primeiro contato com a pós graduação, aos professores Juliano e Paulo Rech, pelas dicas quanto à elaboração e formatação do texto, bem como a todos aqueles outros professores, inúmeros, que contribuíram com minha formação.

Aos colegas de laboratório, pelo companheirismo e pelas dicas durante a elaboração desta dissertação.

Aos funcionários e técnicos do Departamento de Física, pelo auxílio prestado.

E a todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho investigamos algumas propriedades dinâmicas para um ensemble de partículas no modelo *bouncer* dissipativo. O modelo consiste de uma partícula clássica (ou um ensemble delas), sob ação de um campo gravitacional constante, colidindo contra uma parede que oscila no tempo. As equações que descrevem o modelo completo abrangem dois tipos de colisões: (i) diretas e; (ii) as indiretas. Existe ainda uma versão simplificada do modelo que é equivalente ao Mapa Padrão de Chirikov. Este por sua vez exibe uma transição de caos local para caos global quando o parâmetro ε atinge um valor crítico. O modelo conservativo preserva área no espaço de fases e pode exibir crescimento ilimitado de energia, fenômeno conhecido como Aceleração de Fermi. O fenômeno é suprimido através da introdução de dissipação via colisões inelásticas. A transição entre crescimento ilimitado e limitado de energia é descrita através de hipóteses de escala. Estas conduzem a uma função homogênea generalizada que fornece duas leis de escala, validadas através dos expoentes críticos. A expressão analítica da velocidade quadrática média das partículas nos leva ao cálculo dos mesmos expoentes da transição, obtidos de forma independente das simulações. Uma sobreposição de curvas V_{rms} vs. n valida os expoentes críticos obtidos. A conexão do modelo *bouncer* com a Termodinâmica é obtida através do desenvolvimento de uma expressão para a Entropia, em concordância com o 3º Postulado da Termodinâmica.

Palavras Chaves: Caos, Leis de escala, Aceleração de Fermi, Expoentes críticos, Mapeamentos discretos.

Abstract

In this work we investigate some dynamical properties for an ensemble of particles in a dissipative bouncer model. The model consists of a classical particle (or an ensemble of them) colliding against a wall that oscillates as function of the time, under the action of a constant gravitational field. The equations that describe the complete model include two types of collisions: (i) direct and; (ii) indirect. There is a simplified version of the model which is equivalent to Chirikov's standard map. The map shows a transition from local to global chaos when the parameter ε reaches a critical value. The conservative model preserves the phase space area and, depending on the initial conditions as well as control parameter, can show unlimited growth of energy, a phenomenon known as Fermi acceleration. The phenomenon is suppressed by introducing dissipation via inelastic collisions. The transition between unlimited and limited growth of energy is described by scaling hypothesis. Such scaling leads to a generalized homogeneous function that provides two scaling laws, validated by well defined critical exponents. The analytical expression of the mean square velocity of particles leads to the calculation of these exponents of the transition, obtained independently of the simulations. An overlap of the curves V_{rms} vs. n validates the critical exponents obtained. The connection of the bouncer model with Thermodynamics is obtained by developing an expression for the Entropy, in agreement with the 3rd Postulate of Thermodynamics.

Key Words: Chaos, Scaling laws, Fermi acceleration, Critical exponents, Discrete mappings.

SUMÁRIO

1	Introdução	9
2	O modelo <i>bouncer</i>	14
2.1	Resumo	14
2.2	A construção do mapeamento	14
2.2.1	A construção do mapeamento para colisões diretas	15
2.2.2	Coefficiente de Restituição e Tipos de Choques	15
2.2.3	Cálculo da Velocidade da Partícula	16
2.2.4	Colisões indiretas	18
2.3	Pontos fixos	21
2.4	Matriz Jacobiana	21
2.5	Espaço de Fases	22
2.6	Expoentes de Lyapunov	25
2.6.1	Expoentes de Lyapunov do Modelo Simplificado	28
2.7	Conclusões Parciais	30
3	Modelo <i>bouncer</i> dissipativo: um estudo fenomenológico	32
3.1	Resumo	32
3.2	Conexão com o Mapa Padrão	32
3.3	Hipóteses de Escala	33
3.4	Função homogênea generalizada	34
3.5	Resultados numéricos e expoentes críticos	36
3.6	Conclusões Parciais	39
4	Modelo <i>bouncer</i> dissipativo: uma descrição analítica	40
4.1	Resumo	40
4.2	Desenvolvimento da expressão analítica	40
4.3	Conexões com a Termodinâmica	44
4.4	Conclusões Parciais	45
5	Conclusões e Perspectivas	46

Lista de Figuras

2.1	<i>Mostra o referencial inercial (partícula) e o referencial não inercial (parede) considerados e utilizados na obtenção das equações do mapeamento.</i>	16
2.2	<i>Espaço de fases para o modelo bouncer simplificado não dissipativo. Os parâmetros de controle usados estão ilustrados nas figuras.</i>	23
2.3	<i>Espaço de fases para o modelo bouncer completo não dissipativo. Os parâmetros de controle usados estão ilustrados nas figuras.</i>	24
2.4	<i>Gráfico do expoente de Lyapunov positivo $\lambda \times n$ para 5 condições iniciais distintas. Os parâmetros de controle utilizados estão indicados na figura. . . .</i>	28
2.5	<i>Gráfico de $\lambda \times \varepsilon$, obtidos para conjuntos de 5 condições iniciais. Foi usada escala logarítmica no eixo horizontal. Os valores médios de λ foram obtidos na saturação, o que veio a ocorrer após cerca de 80.000 iterações.</i>	29
2.6	<i>Gráfico de $\lambda \times (1 - \gamma)$. Na escala horizontal foi utilizada escala logarítmica. Nota-se que um aumento em $(1 - \gamma)$ ocasiona uma diminuição em λ, e vice versa. . . .</i>	30
3.1	<i>Gráfico de $V_{rms} \times n$. As curvas mostram que para tempo suficientemente longos a aceleração de Fermi é suprimida. O valor de saturação varia com os parâmetros γ e ε indicados na figura.</i>	34
3.2	<i>Gráfico de $V_{sat} \times (1 - \gamma)$. A curva permite, através de lei de potência obter o expoente crítico $\alpha_1 \simeq -0,5$</i>	36
3.3	<i>Gráfico de $V_{sat} \times \varepsilon$. A curva permite, através do ajuste feito, obter o expoente crítico $\alpha_2 \simeq 1$.</i>	37
3.4	<i>Gráfico de $n_x \times (1 - \gamma)$. A curva permite, através do ajuste feito, obter o expoente crítico $z_1 \simeq -1$</i>	37
3.5	<i>Gráfico de $n_x \times \varepsilon$. A curva permite, através do ajuste feito, obter o expoente crítico $z_2 \simeq 0$</i>	38
3.6	<i>Sobreposição das curvas mostradas na fig. (3.1) em um única curva universal. . . .</i>	38

Capítulo 1

Introdução

Um sistema pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto [1]. Um sistema é dito dinâmico quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Também pode se entender que um sistema é dito dinâmico quando a resposta num dado instante depende do conhecimento de estados anteriores.

Através dos tempos, a teoria de Sistemas Dinâmicos foi amplamente discutida, tendo em vista que a mesma possibilita modelar matematicamente fenômenos naturais, muitas vezes através de equações diferenciais. Possui aplicação em diversos ramos do conhecimento, tais como a Física, a Biologia, a Astronomia, a Economia e a Meteorologia, entre outros.

Entender como e porque as coisas se movem foi uma questão que intrigou o ser humano desde os tempos mais remotos. Historicamente, os sistemas dinâmicos foram primeiro estudados de maneira rudimentar por sábios gregos, que buscavam um modelo para explicar o movimento da Terra e dos corpos celestes.

Aristóteles (384-322 a.C.), propôs que o Universo seria “finito e esférico” [1]. Desenvolveu um modelo qualitativo de mecânica celeste, baseado nas ideias das “esferas celestes”, movidas pelo “motor primário”, sendo a esfera mais externa a que possuía as estrelas fixas. Dividia o universo em dois mundos: o “mundo lunar” e o “mundo sub lunar”[2, 3]. Acreditava que no “mundo lunar” tudo era perfeito e imutável, diferentemente do que ocorria no mundo “sub lunar”. Tal distinção seria necessária, tendo em vista que, pelo que se sabia na época, tudo que estava acima da lua possuía movimentos circulares perfeitos e perpétuos, e, portanto, estavam de acordo com sua premissa de perfeição. Assim, neste mundo, os movimentos perfeitos eram os naturais. Aristóteles não via necessidade de nenhum agente produzindo alguma força para explicar o movimento ou as órbitas dos astros em torno de um astro central. Tal visão, como sabemos dos estudos de História, influenciou profundamente o pensamento da Igreja, o que, em parte, prejudicou o desenvolvimento da Ciência durante a Idade Média, tendo em vista que aqueles que ousassem contestar tal pensamento eram duramente perseguidos pela Inquisição.

Embora bastante incompleta por possuir caráter meramente qualitativo, as ideias de Aristóteles

serviram de base para C. Ptolomeu (aproximadamente 85-165 d.C.) propor um modelo geocêntrico. Segundo Ptolomeu, a Terra ocuparia o centro do Universo, fixa, estando os demais astros dispostos na seguinte ordem: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno e Estrelas Fixas, os quais possuíam movimentos naturais. Neste modelo, cada planeta descreveria uma órbita circular - epiciclo - centrada em um ponto que gira em movimento circular e uniforme ao redor da Terra [1, 3, 4].

O sistema geocêntrico perdurou por vários séculos, tendo sido questionado a partir de diversas observações, entre elas o movimento retrógrado de Mercúrio e a necessidade da grande quantidade de epiciclos para se determinar as órbitas de alguns corpos celestes. Surge o sistema heliocêntrico de Nicolau Copérnico (1473-1543). Neste modelo, o Sol ocupa o centro das órbitas circulares e a Terra era apenas mais um planeta do Sistema Solar [1, 3]. Tycho Brahe (1546-1601) durante grande parte de sua vida realizou observações precisas do céu, efetuando correções em registros astronômicos existentes. Os dados de Brahe ajudaram a consolidar o movimento de Copérnico [1, 3].

Johannes Kepler (1571-1630) foi assistente de Brahe e utilizando-se de seus dados, apoiando-se também no modelo de Copérnico e afastando-se da influência aristotélica de explicar a cinemática celeste em torno de movimentos circulares e uniformes, adotou a ideia de que os planetas executavam trajetórias elípticas ao redor do Sol, este ocupando um de seus focos. Esse conceito atualmente é conhecido como a Primeira Lei de Kepler, a qual veio acompanhada de duas outras, uma delas indicando ser a velocidade do planeta variável ao longo de um ciclo completo em torno do sol e a última delas estabelecendo a razão entre o quadrado do período de revolução do planeta em torno do sol e o cubo de seu raio de órbita, cujo valor é constante para todos os planetas do Sistema Solar. Com isso, o Sistema Solar foi considerado o protótipo da ordem. As ideias de Kepler podem ser consideradas como as últimas que abordaram a Mecânica Celeste de uma forma puramente cinemática, sem levar em conta as forças que governam os movimentos [1, 3].

Galileu Galilei (1564-1642) viveu na mesma época que Kepler e foi pioneiro no uso do telescópio para estudos sobre corpos celestes. Visualizou irregularidades na superfície da Lua, rotação de manchas solares, fases de Vênus, estrelas invisíveis a olho nu e satélites em Júpiter [1, 5, 6]. Além das observações, Galileu se destacou por adotar um método experimental para medir grandezas relacionadas a corpos em movimento. Realizou experiências com pêndulos simples, projéteis lançados obliquamente e corpos deslizando sobre planos inclinados. Introduziu conceitos de Dinâmica, antecipando a Lei da Inércia e notando que a distância percorrida por um corpo acelerado é proporcional ao quadrado do tempo. Lançou a noção de que corpos, no vácuo, sujeitos à ação da gravidade caem da mesma altura ao mesmo tempo, independentemente de sua massa. Esta última suposição foi verificada pelo astronauta D.R. Scott, em 1971, participante da missão Apollo XV. Scott abandonou, de uma mesma altura, em um mesmo instante uma pena de falcão e um martelo na superfície lunar, na ausência de resistência do ar e verificou que tocavam o solo simultaneamente [1].

Isaac Newton (1642-1727) nasceu no ano da morte de Galileu. Teve contribuição fundamental no desenvolvimento dos sistemas dinâmicos: formulou as três leis do movimento, demonstrou que, se a curva descrita por um planeta fosse inversamente proporcional ao quadrado da distância com relação ao Sol, sua forma seria uma elipse. Considerou que a gravidade atua não somente no mundo sublunar, como defendiam os Aristotélicos, mas por todo o espaço [1, 6]. Talvez esta última tenha sido uma das maiores contribuições de Newton: relacionar a gravitação com o comportamento dinâmico do Sistema Solar. Os cálculos de órbitas de diversos corpos celestes, incluindo cometas, mostraram a validade das hipóteses de Newton. Como consequência das ideias de Newton, pode-se entender a existência das marés como influência da atração gravitacional da Lua, entre outros fenômenos antes inexplicados. Outra marcante contribuição de Newton é o Cálculo Diferencial Integral, cuja paternidade gerou controvérsia entre ele e G.W. Leibniz (1646-1716) [7].

Pierre Simon Laplace (1749-1827) desenvolveu estudos importantes da estabilidade do Sistema Solar e afirmou que se alguma “inteligência” pudesse conhecer a posição $\vec{x}$ e a velocidade $\vec{v}$ de cada partícula constituinte do universo, num dado instante t , assim como a massa m e a força $\vec{F}$ que age sobre cada partícula, poderia se determinar o futuro do universo para o resto do tempo [1]. Para Laplace, o determinismo expresso nas equações implicava previsibilidade, e os fenômenos da natureza são consequências matemáticas de algumas leis imutáveis.

Com a Física conhecida até então, resolvia-se completamente o problema de dois corpos interagentes. Assim, a priori, com as ideias de Newton, sabia-se como obter modelos matemáticos para descrever sistemas dinâmicos que são essencialmente consequências de um conjunto de leis. Esperava-se que os modelos pudessem prever o comportamento de qualquer sistema complexo, identificando suas partes individuais e suas interações.

Entretanto, o problema de três corpos interagentes mostrou-se insolúvel, no sentido de que não se consegue resolver analiticamente, e de forma exata, as equações que regem os movimentos. Assim, não se podem obter equações que descrevam a trajetória exata dos corpos interagentes. Discutia-se, nos meios científicos, a estabilidade do Sistema Solar, regida pelo problema de n corpos interagentes.

As contribuições de Laplace, Lagrange (1736-1813) e Poisson (1781-1849) sobre a estabilidade do sistema solar foram anuladas pelos trabalhos de Haret (1851-1912), onde o mesmo demonstrou a presença de termos seculares¹ para uma aproximação em terceira ordem em relação as massas dos planetas [1]. A presença destes termos, embora não indique instabilidade, sugerem que as órbitas poderiam, no mínimo, mudar de forma.

Lyapunov (1857-1918) criou uma teoria geral sobre a estabilidade, onde definiu estabilidade para uma solução de uma equação diferencial ordinária [1]. De maneira geral, Lyapunov define que, uma solução $x(t)$ é estável se outras soluções, cujos valores no instante $t = t_0$ estão próximas de $x(t_0)$, permanecem próximas de $x(t)$ durante o passar do tempo. Assim, com

¹Termos seculares são termos cujos valores crescem proporcionalmente (ou mais rápido) com o tempo. Assim, uma solução em série que contém termos seculares pode não ser limitada [1].

os trabalhos de Lyapunov, questões envolvendo estabilidade foram desvinculadas dos estudos relativos ao Sistema Solar e passaram a constar no estudo das Equações Diferenciais.

As ideias deterministas pregadas por Laplace sofreram duro golpe no final do século XIX e início do século XX por duas razões: (i) a elaboração da Mecânica Quântica, que revelou que não se pode medir grandezas com precisão infinita e, (ii) o aprofundamento nos estudos das equações diferenciais não lineares, este último com a observação da evolução temporal de uma grandeza com condições iniciais ligeiramente imprecisas [1].

Poincaré (1854-1912) conquistou um prêmio oferecido pelo rei Oscar II da Suécia, onde se discutia a estabilidade do sistema solar [8]. Embora a resposta à questão proposta não tenha sido definitiva, Poincaré, ao contrário da abordagem inicial da época a um problema de três corpos, que consistia em encontrar fórmulas para integrar analiticamente as equações, vislumbrou um método qualitativo das soluções de uma equação diferencial, levando a descrição dessas soluções para o espaço de fase. Encontrou órbitas periódicas considerando apenas os pontos de intersecção dessas órbitas com uma seção do espaço de fases. Analisando a vizinhança das órbitas periódicas, notou que duas órbitas, com condições iniciais ligeiramente diferentes entre si podiam se afastar ligeiramente entre si. Assim, Poincaré descobriu órbitas irregulares com dependência sensível nas condições iniciais e reconheceu pela primeira vez a complexidade dinâmica no problema de três corpos, que mais tarde viria a ser chamada caos.

A resposta de Poincaré não foi definitiva. O trabalho combinado de Kolmogorov (1903-1987) [9], Arnold (1937-2010) [10] e Moser (1928-1999) [11] mostrou que, a partir de certas condições iniciais, séries temporais encontradas em problemas celestes e outros sistemas dinâmicos divergem, como discutiu Poincaré. Mas, para outras condições iniciais, elas convergem [1]. Assim, em um sistema com três ou mais corpos, o movimento pode ser regular ou caótico.

Lorenz (1917-2008) foi o responsável por estudos relacionados a fenômenos atmosféricos. Analisou um sistema de três dimensões que exibia comportamento caótico; o mesmo comportamento previsto por Poincaré na análise do problema de três corpos [1, 12].

O desenvolvimento da ciência da computação marcou uma linha divisória no estudo de sistemas dinâmicos. Com o computador, pode-se realizar rápidas simulações, partindo de certas condições iniciais e parâmetros desejados e calcular suas soluções. Os resultados numéricos obtidos permitem desenvolver uma intuição sobre os possíveis comportamentos representados pelas equações.

Neste trabalho descrevemos o modelo *bouncer*, que tem origem ligada às ideias do físico italiano Enrico Fermi, quando o mesmo tentou explicar a aceleração dos raios cósmicos a partir de um sistema dinâmico que incluía campos magnéticos oscilantes [13]. Stanislaw Ulam modelou as ideias de Fermi, desenvolvendo um modelo que ficou conhecido como modelo de Fermi-Ulam [14]. No modelo FUM (*Fermi-Ulam Model*) uma parede móvel que oscila periodicamente colide com partículas, transferindo-lhes momento e energia. O mecanismo de retorno é garantido por uma parede fixa, paralela à primeira, que faz com que a partícula retorne em

direção à parede móvel, sofrendo outra colisão, e assim sucessivamente.

No modelo *bouncer*, inicialmente proposto por Pustyl'nikov [15], troca-se o mecanismo de retorno, realizado pela parede fixa no modelo FUM, pela presença do campo gravitacional. As partículas são abandonadas acima de uma plataforma que oscila verticalmente e lhes fornece energia. As partículas sobem e retornam devido ao campo gravitacional. A dinâmica do modelo será descrita em termos de um mapeamento discreto das variáveis velocidade e tempo. Na ausência de dissipação, a velocidade das partículas pode crescer indefinidamente, fenômeno conhecido como aceleração de Fermi [13]. Pode-se introduzir dissipação no modelo, através de colisões inelásticas. Tal dissipação provocará a supressão da aceleração de Fermi.

Esta dissertação foi organizada da seguinte maneira:

No Capítulo 2 descreveremos detalhadamente todos os passos necessários para se obter as equações do modelo *bouncer*, para as colisões diretas e indiretas. Determinaremos os elementos da Matriz Jacobiana e calcularemos a expressão de seu determinante para o modelo simplificado. Mostraremos os espaços de fase obtidos para os modelos completo e simplificado. Introduziremos o conceito de Expoente de Lyapunov e obteremos, através de simulações numéricas, gráficos que permitirão verificar algumas de suas propriedades dinâmicas como perda de previsibilidade de condições iniciais.

No capítulo 3 realizaremos um estudo fenomenológico do modelo, partindo da conexão do modelo *bouncer* conservativo com o mapa padrão, onde se verificará que ambos apresentam uma transição de fase envolvendo um parâmetro crítico. Proporemos hipóteses de escala e através de uma função homogênea generalizada obteremos duas leis de escala que relacionarão os expoentes críticos na região da criticalidade. Realizaremos simulações numéricas que nos permitirão obter os valores dos expoentes críticos e verificar as leis de escala obtidas, o que também será feito pela superposição das curvas do gráfico de $V_{rms} \times n$.

No capítulo 4 desenvolveremos a expressão da velocidade média a partir das equações do modelo simplificado. Obteremos analiticamente os expoentes críticos. Compararemos os resultados obtidos experimentalmente (simulações) e analiticamente. Discutiremos também uma possível conexão do modelo com a Termodinâmica.

No capítulo 5 teremos as conclusões do trabalho e ainda, perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

O modelo *bouncer*

2.1 Resumo

Inicialmente partiremos dos princípios dinâmicos relacionados ao modelo *bouncer* e discutiremos todas as etapas necessárias para a construção do seu mapeamento, tanto para as colisões diretas quanto para as indiretas. Mostraremos também como fica o mapeamento para a versão simplificada do modelo. Em seguida, apresentaremos os conceitos de ponto fixo e estabilidade e deduziremos expressões para pontos fixos do modelo. Obteremos uma expressão para o determinante da Matriz Jacobiana do modelo e mostraremos sua relação com o coeficiente de restituição da colisão. Apresentaremos o conceito de espaço de fases. Construiremos espaços de fase para a versão conservativa do modelo e efetuaremos uma comparação entre o modelo completo e o simplificado para parâmetros semelhantes. Deduziremos uma expressão para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em um mapeamento bidimensional. Finalmente exibiremos os resultados das simulações realizadas para se obter os expoentes de Lyapunov, através dos gráficos de $\lambda \times n$, $\lambda \times \varepsilon$ e $\lambda \times (1 - \gamma)$.

2.2 A construção do mapeamento

O modelo *bouncer* consiste em uma variação do modelo de Fermi [13], onde uma partícula (ou um ensemble de partículas) de massa m , não interagentes, se movem sob a ação de um campo gravitacional g , suposto constante, vindo a colidir com uma plataforma móvel que possui amplitude ε' e frequência angular ω .

A posição da plataforma móvel é dada pela equação $x_\omega = \varepsilon' \cos(\omega t)$. A dinâmica do problema é descrita por um mapeamento discreto nas variáveis (V, ϕ) , sendo V a velocidade da partícula e ϕ o instante de tempo. São observadas duas situações distintas. A primeira delas, onde as colisões são chamadas diretas, as partículas ficam confinadas na zona de colisão (região por onde se move a plataforma), sofrendo sucessivas colisões antes de abandonar a plataforma. A segunda delas, denominadas colisões indiretas ou não sucessivas, as partículas,

após se chocarem com a parede móvel, abandonam a zona de colisão.

2.2.1 A construção do mapeamento para colisões diretas

Para que ocorra uma colisão, as posições da partícula $X_p(t)$ e da plataforma $X_w(t)$ devem coincidir em um certo instante de tempo, ou seja

$$X_p(t) = X_w(t). \quad (2.1)$$

A função horária da posição da partícula é a de uma partícula em queda, sujeita a ação do campo gravitacional, dada por

$$X_p(t) = \varepsilon' \cos(\omega t_n) + v_n t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2.2)$$

Já a função horária da parede é uma função periódica, dada por

$$X_w(t) = \varepsilon' \cos(\omega(t_n + t)). \quad (2.3)$$

Com isso, temos

$$\varepsilon' \cos(\omega t_n) + v_n t - \frac{1}{2} g t^2 = \varepsilon' \cos(\omega(t_n + t)). \quad (2.4)$$

Podemos definir a função $g(t)$, dada por

$$g(t) = X_w(t) - X_p(t), \quad (2.5)$$

o que nos leva a

$$g(t) = \varepsilon' \cos(\omega(t_n + t)) - \varepsilon' \cos(\omega t_n) - v_n t + \frac{1}{2} g t^2. \quad (2.6)$$

Se $g(t) = 0$, para $t \in (0, \frac{2\pi}{\omega}]$, concluímos que houve uma colisão, no instante de tempo $t_{n+1} = t_n + t_c$, onde t_c é obtido da solução de $g(t_c) = 0$.

2.2.2 Coeficiente de Restituição e Tipos de Choques

Define-se o parâmetro γ , com $0 < \gamma \leq 1$, como sendo o *coeficiente de restituição da colisão*, dado por

$$\gamma = \frac{v'_{n+1}}{v'_n}. \quad (2.7)$$

Este parâmetro nos informa se a colisão é elástica ou inelástica. No primeiro caso, $\gamma = 1$ e não ocorre perda fracional de energia após a colisão. Nesse caso, teremos uma colisão *elástica*.

Por outro lado, se $\gamma < 1$, haverá perda fracional de energia e a colisão será dita *inelástica*.

2.2.3 Cálculo da Velocidade da Partícula

Consideremos uma partícula sob a ação do campo gravitacional constante no instante imediatamente após a colisão com a plataforma móvel que oscila com amplitude ε' . Devemos calcular sua velocidade no instante imediatamente após o choque. Rearranjando a equação (2.7), temos

$$v'_{n+1} = -\gamma v'_n. \quad (2.8)$$

O termo v'_{n+1} se refere à velocidade da partícula em um instante imediatamente após a colisão e o termo v'_n se refere à velocidade em um instante imediatamente antes da colisão. O sinal negativo indica que houve troca no sentido das velocidades antes e após a colisão.

A figura (2.1) mostra os referenciais da partícula e da parede.

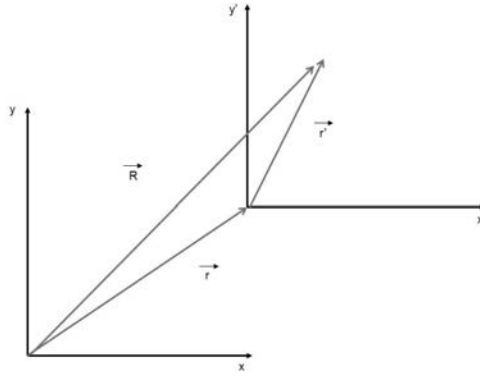


Figura 2.1: Mostra o referencial inercial (partícula) e o referencial não inercial (parede) considerados e utilizados na obtenção das equações do mapeamento.

Da equação (2.8), e da transformação de referenciais vista na figura (2.1) temos

$$v_{n+1} - v_\omega(t_{n+1}) = -\gamma(v_n - gt_c - v_\omega(t_{n+1})). \quad (2.9)$$

Assim, obtemos

$$v_{n+1} = -\gamma v_n + \gamma gt_c + v_\omega(1 + \gamma). \quad (2.10)$$

A velocidade da parede, v_ω pode ser dada por

$$v_\omega(t) = \frac{dX_\omega(t)}{dt}, \quad (2.11)$$

$$v_\omega(t) = \frac{d}{dt}(\varepsilon' \cos(\omega t)), \quad (2.12)$$

$$v_\omega(t) = -\varepsilon' \omega \sin(\omega t). \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.13) na equação (2.10), e, após alguma álgebra, obtemos

$$v_{n+1} = -\gamma v_n + \gamma g t_c - (1 + \gamma) \varepsilon' \omega \sin(\omega t_{n+1}). \quad (2.14)$$

Assim, o mapeamento fica

$$T : \begin{cases} v_{n+1} = -\gamma v_n + \gamma g t - (1 + \gamma) \varepsilon' \omega \sin(\omega t_{n+1}) \\ t_{n+1} = t_n + t_c \end{cases}. \quad (2.15)$$

O mapeamento obtido está descrito em termos de variáveis dimensionais. Podemos, a partir de algumas substituições de variáveis, obtê-lo em variáveis adimensionais. Da segunda equação do mapeamento

$$t_{n+1} = t_n + t_c. \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os termos da equação (2.16) por ω , temos

$$\omega t_{n+1} = \omega t_n + \omega t_c. \quad (2.17)$$

Definindo $\phi = \omega t$, e substituindo na equação (2.17) vem

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \phi_c. \quad (2.18)$$

Multiplicando os termos da primeira equação do mapeamento definida pela equação (2.15) por $\frac{\omega}{g}$, e definindo

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' \omega^2}{g}, \quad (2.19)$$

$$V = \frac{v \omega}{g}, \quad (2.20)$$

obtemos

$$V_{n+1} = -\gamma V_n + \gamma t_c \omega - (1 + \gamma) \varepsilon \sin(\omega t_{n+1}). \quad (2.21)$$

Como $\phi = \omega t$, temos

$$V_{n+1} = -\gamma V_n + \gamma \phi_c - (1 + \gamma) \varepsilon \sin(\phi_{n+1}). \quad (2.22)$$

O termo ϕ_c vem da solução de $G(\phi_c) = 0$, a qual, por sua vez, é obtida substituindo-se as

equações (2.17) e (2.20) na equação (2.6), o que, após alguns ajustes, resulta em

$$G(\phi_c) = \varepsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \varepsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c + \frac{1}{2} \phi_c^2. \quad (2.23)$$

Assim, obtemos o mapeamento do modelo *bouncer* para colisões diretas

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = -\gamma V_n + \gamma \phi_c - (1 + \gamma) \varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \phi_c] \end{cases}. \quad (2.24)$$

2.2.4 Colisões indiretas

Nas colisões indiretas, as partículas oscilantes abandonam a zona de colisão. Com isso, torna-se necessário calcular o tempo de subida da partícula após a colisão, bem como o correspondente tempo de descida e após, inseri-los nas equações correspondentes. O tempo de subida pode ser obtido da equação de velocidade para o movimento com aceleração constante

$$v_p = v_n - gt. \quad (2.25)$$

No ponto mais alto, devemos ter $v_p = 0$. Resolvendo a equação (2.25) obtemos o tempo de subida (t_s), que é dado por

$$t_s = \frac{v_n}{g}. \quad (2.26)$$

A altura máxima h atingida pela partícula, após uma colisão, pode ser determinada através da função horária dos espaços do movimento com velocidade constante, dada por

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2.27)$$

Substituindo a equação (2.26) na equação (2.27) obtemos

$$h = \varepsilon' \cos(\omega t_n) + \frac{1}{2} \frac{v_n^2}{g}. \quad (2.28)$$

Conhecendo-se a altura máxima h atingida pela partícula, dada pela equação (2.28), a amplitude do movimento ε' e a distância y' percorrida pela partícula até o próximo choque, dada por $y' = -\frac{1}{2} g t_d^2$, podemos escrever que

$$\varepsilon' = h - y'. \quad (2.29)$$

Substituindo a expressão de h dado pela equação (2.28) e a expressão de y' acima definida, e após alguma álgebra, obtemos o tempo de descida t_d

$$t_d = \sqrt{\frac{v_n^2}{g^2} + \frac{2}{g} (\varepsilon' \cos(\omega t_n) - \varepsilon')}. \quad (2.30)$$

Para determinarmos t_c , que é o intervalo de tempo que se inicia no instante em que a partícula em queda penetra na região de colisão e que se encerra no momento em que a partícula sofre a colisão, usamos a equação (2.1) e escrevemos

$$\varepsilon' \cos(\omega(t_n + t_s + t_d + t_c)) = \varepsilon' + v_e t_c - \frac{1}{2} g t_c^2. \quad (2.31)$$

Onde v_e é a velocidade da partícula na entrada da zona de colisão, que pode ser determinada a partir da equação da velocidade para o movimento com aceleração gravitacional constante,

$$v(t) = v_0 - g t. \quad (2.32)$$

Após impormos $v(t) = v_e$, $v_0 = 0$ e $t = t_d$, a expressão

$$v_e = -g t_d. \quad (2.33)$$

Logo, o instante do choque será $t_{n+1} = t_n + t_s + t_d + t_c$, com t_c sendo obtido a partir da solução de $f(t_c) = 0$, onde

$$f(t_c) = X_\omega(t_c) - X_p(t_c). \quad (2.34)$$

o que conduz a

$$f(t_c) = \varepsilon' \cos[\omega(t_n + t_s + t_d + t_c)] - \varepsilon' + g \left[\frac{v_n^2}{g^2} + \frac{2}{g} (\varepsilon' \cos(\omega t_n) - \varepsilon') + \frac{1}{2} g t_c^2 \right], t_c \in (0, \frac{2\pi}{\omega}]. \quad (2.35)$$

Voltando à equação (2.6), podemos escrever a expressão da velocidade

$$v_{n+1} = -\gamma v_{pn} + (1 + \gamma) v_\omega t_{n+1}, \quad (2.36)$$

onde v_{pn} é a velocidade da partícula exatamente antes da colisão, a qual pode ser calculada a partir da equação (2.25), onde obtemos

$$v_{pn} = -g t_d - g t_c. \quad (2.37)$$

Assim, a expressão da velocidade dada pela equação (2.36) será

$$v_{n+1} = \gamma g t_d + \gamma g t_c + (1 + \gamma) v_\omega t_{n+1}, \quad (2.38)$$

Como

$$v_\omega t_{n+1} = -\varepsilon' \sin[\omega(t_{n+1})] \omega, \quad (2.39)$$

temos

$$v_{n+1} = \gamma g t_d + \gamma g t_c - (1 + \gamma) [\varepsilon' \omega \sin[\omega(t_{n+1})]]. \quad (2.40)$$

Multiplicando a equação (2.40) por $\frac{\omega}{g}$ e utilizando as definições dadas pelas eqs. (2.19) e (2.20), obtemos a expressão para o modelo completo do mapeamento em variáveis adimensionais

$$T_{CI} : \begin{cases} V_{n+1} = \gamma\phi_d + \phi_c - (1 + \gamma)\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \phi_s + \phi_d + \phi_c], \text{mod}(2\pi) \end{cases} \quad (2.41)$$

Resta determinar os parâmetros ϕ_s , ϕ_d e $F(\phi_c)$.

Para obtermos ϕ_s , multiplicamos, membro a membro a equação (2.26) por ω , e usamos as relações $\omega t_s = \phi_s$ e $\frac{\omega v_n}{g} = V$, para obtermos que

$$\phi_s = V_n. \quad (2.42)$$

Para obtermos ϕ_d , multiplicamos, membro a membro a equação (2.30) por $\sqrt{\omega^2}$, e, após alguma álgebra, obtemos que

$$\phi_d = \sqrt{V_n^2 + 2\varepsilon[\cos(\phi_n) - 1]}. \quad (2.43)$$

A expressão da $F(\phi_c)$ vem da equação (2.35), onde, após alguma álgebra que consiste em colocar o termo g em evidência e multiplicar numerador e denominador por ω^2 , o que resulta em

$$F(\phi_c) = \varepsilon \cos(\phi_n + \phi_s + \phi_d + \phi_c) - \varepsilon - V_e \phi_c + \frac{1}{2} \phi_c^2. \quad (2.44)$$

Pode-se, finalmente, determinar V_e , multiplicando-se a ambos os termos da equação (2.33) por ω , concluindo-se que

$$V_e = -\phi_d. \quad (2.45)$$

A partir do modelo completo descrito na equação (2.24), podemos obter o chamado modelo simplificado. Proposto por Lichtenberg e Lieberman [16], a versão simplificada consiste na suposição de que a parede que produz as colisões esteja fixa, porém, após cada colisão, ela deve transferir momento para a partícula, como se estivesse em movimento. No modelo simplificado, as partículas não podem visitar a região inferior da plataforma, onde as velocidades são negativas, o que matematicamente é obtido através da inserção da função módulo na expressão da velocidade. Tal transformação não retira a não-linearidade do problema [17]. Esta é uma aproximação bastante utilizada que garante maior velocidade nas simulações numéricas, tendo em vista que equações transcendental¹ não necessitam ser resolvidas, ao contrário do que ocorre no modelo completo [17, 18, 19].

¹Uma equação transcendental é uma equação que contém alguma função que não é redutível a uma fração entre polinômios, e cuja solução não pode ser expressa através de funções elementares. De modo geral, uma equação transcendental não possui uma solução exata expressa através de funções conhecidas, sendo necessário recorrer ao cálculo numérico para obter uma solução.

$$T_s : \begin{cases} V_{n+1} = |\gamma V_n - (1 + \gamma)\varepsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = (\phi_n + 2V_n), \text{mod}(2\pi) \end{cases} . \quad (2.46)$$

Tal modelo será bastante utilizado nesta dissertação, conforme veremos adiante.

2.3 Pontos fixos

Um ponto fixo é um ponto no espaço de fase que é idêntico à sua imagem. Assim, um ponto x é um ponto fixo do mapa f se e somente se $f(x) = x$. Consideremos o modelo *bouncer* simplificado dissipativo definido pela equação (2.46). Aplicando as condições $\phi_{n+1} = \phi_n = \phi$ e $V_{n+1} = V_n = V$, nas equações do mapeamento, obtemos as seguintes expressões para V^* e ϕ^*

$$V^* = m\pi, \quad (2.47)$$

$$\phi^* = \arcsin \frac{m\pi(\gamma - 1)}{\varepsilon(1 + \gamma)}. \quad (2.48)$$

No intervalo de 0 a 2π , a solução

$$\phi^* = \pi - \arcsin \frac{m\pi(\gamma - 1)}{\varepsilon(1 + \gamma)}, \quad (2.49)$$

também é válida. Portanto, os pontos fixos para o modelo simplificado, no intervalo $(0, 2\pi]$ são

$$(V^*, \phi^*) = (m\pi, \arcsin \frac{m\pi(\gamma - 1)}{\varepsilon(1 + \gamma)}), \quad (2.50)$$

que são pontos fixos elípticos ² para $\gamma = 1$ e *sinks* ³ para $\gamma < 1$ e

$$(V^*, \phi^*) = (m\pi, \pi - \arcsin \frac{m\pi(\gamma - 1)}{\varepsilon(1 + \gamma)}). \quad (2.51)$$

que são pontos de sela ⁴. Uma discussão sobre as estabilidades dos pontos fixos pode ser obtido em [16].

²Um ponto fixo é dito elíptico, não hiperbólico ou degenerado quando a parte real dos autovalores da matriz Jacobiana aplicada naquele ponto é igual a zero [23].

³Um ponto fixo é dito *sink* ou nó hiperbólico quando o produto dos seus autovalores é positivo e os autovalores são, ambos, negativos.

⁴Um ponto fixo é dito ponto de sela hiperbólico quando os autovalores da matriz Jacobiana são reais e o produto entre eles é negativo.

2.4 Matriz Jacobiana

A Matriz Jacobiana do mapeamento é definida por

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{bmatrix}.$$

Da equação do mapeamento expressa na equação (2.46), obtemos as derivadas parciais

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} = \text{sign}[\gamma - 2(1 + \gamma)\varepsilon \cos \phi_{n+1}], \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} = \text{sign}[(1 + \gamma)\varepsilon \cos \phi_{n+1}], \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} = 2, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} = 1, \quad (2.55)$$

onde $\text{sign}[z] = 1$ se $x > 0$ e -1 se $x < 0$. Assim,

$$\det J = \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} - \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}, \quad (2.56)$$

o que conduz a

$$\det J = \gamma \quad (2.57)$$

Vimos que se as colisões forem elásticas, $\gamma = 1$, então, da equação (2.57) teremos que $\det J = 1$. Para colisões inelásticas, ou seja, na presença de dissipação, temos que $0 \leq \gamma \leq 1$. Com isso, a equação (2.57) fornece que $\det J \leq 1$. Concluimos que se as colisões são elásticas, o mapeamento é não dissipativo. De acordo com o Teorema de Liouville [21], neste caso há preservação da área do espaço de fases. Por outro lado, se as colisões são inelásticas, o mapeamento será dissipativo, havendo, portanto, contração de área do espaço de fases.

2.5 Espaço de Fases

O espaço de fases é um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são $x_1, x_2, \dots, x_n$ que representam variáveis dinâmicas relevantes ao sistema estudado, como, por exemplo, a posição e a velocidade. Cada estado no espaço de fases pode ser representado por um ponto, de coordenadas $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ nesse espaço. Uma evolução temporal corresponde a movimentação deste ponto no espaço, constituindo uma órbita. A evolução da órbita é determinada pelas n equações que representam o movimento. Assim, o espaço de fases será o conjunto

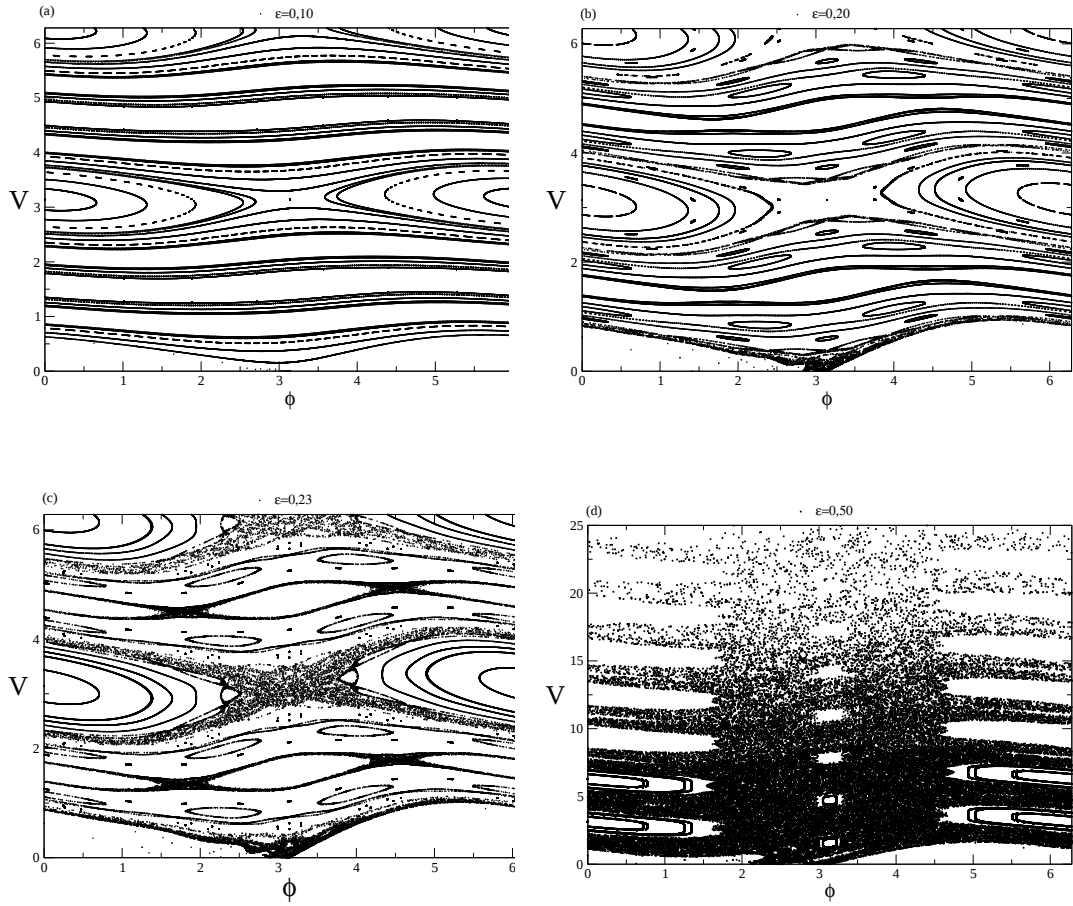


Figura 2.2: Espaço de fases para o modelo *bouncer* simplificado não dissipativo. Os parâmetros de controle usados estão ilustrados nas figuras.

de todos os estados acessíveis. O espaço de fases é extremamente útil para visualizar se o sistema apresenta, em uma região definida do espaço, dinâmica regular, caótica ou mista, a partir da análise de alguns elementos presentes, tais como curvas invariantes, ilhas de estabilidade, etc. Um sistema dinâmico que apresenta comportamento caótico possui um atrator estranho⁵ no seu espaço de fases. Construímos os espaços de fase para o modelo *bouncer* simplificado não dissipativo, descrito na equação (2.46), para diversos valores de ε , conforme ilustrados na figura (2.2). Notamos que, para $\varepsilon = 0, 1$ temos regiões de regularidade, existindo ilhas de periodicidade e curvas invariantes do tipo *spanning*, prevalecendo portanto, estruturas regulares. Para $\varepsilon = 0, 2$, notamos a presença de caos, com a diminuição do número de curvas invariantes, existindo ainda ilhas de periodicidade. Para $\varepsilon = 0, 23$ notamos que as curvas invariantes são destruídas, com predomínio de regiões caóticas. Para valores maiores, como por exemplo, $\varepsilon = 0, 5$ notamos que o caos se dissemina ao longo de todo o espaço de fases, não existindo

⁵Um atrator [23] é constituído por um ponto, ou conjunto de pontos para os quais as órbitas convergem no espaço de fases para tempos suficientemente longos. Atrator estranho [1] é aquele que apresenta detalhes em escalas infinitesimalmente pequenas.

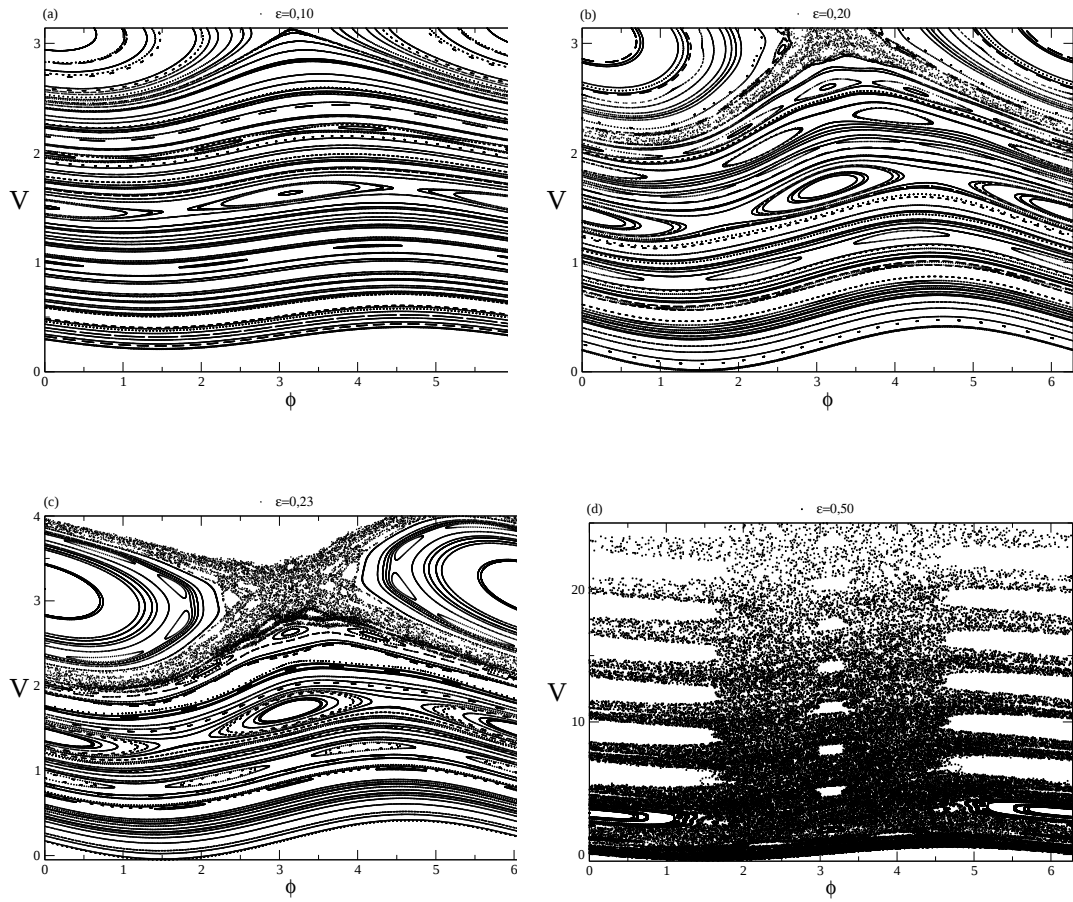


Figura 2.3: Espaço de fases para o modelo *bouncer* completo não dissipativo. Os parâmetros de controle usados estão ilustrados nas figuras.

curvas invariantes, restando poucas ilhas de periodicidade. Portanto, temos uma transição de fase de caos local para caos global para o parâmetro crítico $\varepsilon = 0,23$.

Com os mesmos parâmetros construímos os espaços de fase para a versão completa do modelo, na ausência de dissipação, conforme são mostrados na figura(2.3).

Para $\varepsilon = 0,50$ as partículas descritas no modelo estão em regime de altas velocidades. Neste caso, se observa o predomínio de regiões caóticas. Comparando-se os espaços de fase neste regime para os modelos completo e simplificado, nota-se coincidências na morfologia entre os mesmos. Em ambos há o caos global, sem a presença de ilhas de regularidade ou curvas invariantes *spanning*⁶. Assim, concluímos que no regime de altas velocidades, sem perda de generalidades, poderemos substituir o modelo completo pelo modelo simplificado. Especialmente nas simulações realizadas, as mesmas possibilitam a economia de tempo computacional e levam a resultados semelhantes ao que seria obtido com as simulações a partir do modelo completo.

⁶As curvas invariantes *spanning* são aquelas que atravessam todo o espaço de fase, sendo invariantes por iterações.

Além disso, o uso do modelo simplificado permite que se realize o estudo da expressão analítica da velocidade, permitindo que se obtenha analiticamente os expoentes críticos em regiões de transição de fase, o que seria uma tarefa muito mais complexa com o uso do modelo completo.

2.6 Expoentes de Lyapunov

Para se medir a taxa de divergência de trajetórias e quantificar a dependência sensível às condições iniciais utilizam-se os expoentes característicos de Lyapunov, ou simplesmente, os números de Lyapunov. Tais expoentes, denotados por λ podem ser determinados para os mapas unidimensionais ou multidimensionais, sendo que para estes últimos, existe maior complexidade do ponto de vista numérico [23, 24].

Considere um mapeamento unidimensional, dado por

$$X_{n+1} = F(X_n) \quad (2.58)$$

com $F(x_n)$ sendo uma função não linear. Para determinarmos o expoente de Lyapunov, devemos medir a distância d entre as condições iniciais x_0 e $x_0 + \varepsilon$ após n iteradas. Logo,

$$d = |F^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(x_0)|. \quad (2.59)$$

Podemos definir a distância relativa, dividindo-se a equação (2.59) por ε . Assim

$$\frac{d}{\varepsilon} = \frac{|F^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon}. \quad (2.60)$$

Tomando o limite para ε tendendo a zero, temos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|F^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} = |F'^{(n)}(x_0)|. \quad (2.61)$$

Podemos definir

$$|F'^{(n)}(x_0)| = e^{\lambda n}. \quad (2.62)$$

Se $\lambda \leq 0$, as órbitas serão regulares e se $\lambda > 0$, teremos uma órbita caótica. Tomando $\ln$ e aplicando propriedades de logaritmos na equação (2.62), obtemos

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |F'(x_i)|, \quad (2.63)$$

onde

$$F'(x) = \frac{dF}{dx}. \quad (2.64)$$

Assim, podemos escrever a equação geral para a determinação do Expoente de Lyapunov

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{n} \frac{|F^{(n)}(x_0 + \varepsilon) - F^{(n)}(x_0)|}{\varepsilon} = |F'^{(n)}(x_0)|. \quad (2.65)$$

Para um mapeamento bidimensional, devemos considerar um sistema de equações do tipo

$$X_{n+1} = F(X_n, Y_n), \quad (2.66)$$

$$Y_{n+1} = G(X_n, Y_n), \quad (2.67)$$

onde F e G são funções quaisquer de suas variáveis. Os expoentes de Lyapunov para o caso bidimensional são dados por

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln |\wedge_j^{(n)}|, j = 1, 2. \quad (2.68)$$

O termo $\wedge$ identifica os autovalores da Matriz Jacobiana,

$$M = \prod_{i=0}^n J_i(x_i, y_i), \quad (2.69)$$

que pode ser reescrito como

$$M = J_n J_{n-1} \dots J_3 J_2 J_1 J_0. \quad (2.70)$$

Podemos reescrever a matriz J como o produto de uma matriz triangular T e uma ortogonal Θ , onde

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix},$$

e

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Com isso, $J = \Theta T$ Uma matriz é dita ortogonal quando sua inversa é igual à transposta, ou seja

$$\Theta^{-1} = \Theta^T. \quad (2.71)$$

Da expressão de M , dada pela equação (2.70), temos que

$$M = J_n J_{n-1} \dots J_1 \Theta \Theta^1 J_0. \quad (2.72)$$

onde

$$J' = J_1 \Theta, \quad (2.73)$$

e

$$\Theta^{-1} J_0 = T_0. \quad (2.74)$$

Desenvolvendo o produto $T_0 = \Theta^{-1} J_0$, temos

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

.

Da igualdade das matrizes, escrevemos as equações

$$T_{11} = J_{11} \cos \theta + J_{21} \sin \theta, \quad (2.75)$$

$$T_{12} = J_{12} \cos \theta + J_{22} \sin \theta, \quad (2.76)$$

$$0 = -J_{11} \sin \theta + J_{21} \cos \theta, \quad (2.77)$$

$$T_{22} = -J_{12} \sin \theta + J_{22} \cos \theta. \quad (2.78)$$

Da equação (2.75), temos

$$J_{11} \sin \theta = J_{21} \cos \theta. \quad (2.79)$$

Lembrando que

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad (2.80)$$

Rearranjando a equação (2.79) em função da equação (2.80) e, após alguma álgebra, obtemos

$$\theta = \arctan \frac{J_{21}}{J_{11}}. \quad (2.81)$$

Através de relações trigonométricas obtemos os valores de $\sin \theta$ e $\cos \theta$

$$\sin \theta = \frac{J_{21}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}, \quad (2.82)$$

e

$$\cos \theta = \frac{J_{11}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}. \quad (2.83)$$

Conhecendo $\sin \theta$ e $\cos \theta$ a partir das equações (2.82) e (2.83) temos que os auto valores T_{11} e T_{22} são

$$T_{11} = \frac{J_{11}^2}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}} + \frac{J_{21}^2}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}, \quad (2.84)$$

e

$$T_{22} = -\frac{J_{12}J_{21}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}} + \frac{J_{21}J_{11}}{\sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2}}. \quad (2.85)$$

Com isso, os expoentes de Lyapunov serão dados por

$$\lambda_j = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \ln |T_{jj}^{(i)}|, \quad (2.86)$$

sendo $j=1,2$.

2.6.1 Expoentes de Lyapunov do Modelo Simplificado

Para compreendermos o comportamento dos expoentes de Lyapunov para o modelo *bouncer* simplificado faremos, a partir de simulações numéricas, três análises.

Na primeira delas, construiremos os gráficos do expoente de Lyapunov em função do número de iterações, mantendo ε constante e igual a 0,5. O espaço de fases da situação descrita foi exibido na figura (2.2)(d). Assim, obteve-se, para diferentes condições iniciais de V e ϕ , o gráfico ilustrado na figura (2.4). Notou-se, em todas as situações e após algumas iterações, que os valores dos expoentes de Lyapunov convergem para valores próximos a 0,5. Tal valor, positivo, indica a existência, para as condições iniciais consideradas, de dinâmica caótica. Verificou-se ainda que as curvas para $V = 5, 0$, $\phi=4, 0$ e $V=2, 5$, $\phi=5, 0$ sofrem um decréscimo em relação à média, durante algum tempo, para depois retornarem para o valor médio aproximadamente comum a todas as curvas. Tal decréscimo pode ser explicado em virtude da ocorrência de um possível aprisionamento de trajetória nas proximidades de uma ilha de regularidade, fenômeno conhecido como *stickiness*⁷. A segunda análise consistiu na obtenção do gráfico do expoente de Lyapunov *versus* ε . Nesta etapa, para uma certa condição inicial de V e ϕ , mantido ε constante, traçou-se gráficos de λ x n e calculou-se a média do valor de saturação, o que, geralmente ocorreu após 80.000 iterações. Trocou-se as condições iniciais para se repetir o procedimento. Assim, obteve-se, para um conjunto de cinco condições iniciais, para cada valor de ε , o valor de saturação médio do expoente de Lyapunov. Usando escala logarítmica no eixo das abscissas, obteve-se o gráfico exibido na figura (2.5). Da análise da figura verificou-se um comportamento praticamente linear, mostrando que, quando o parâmetro ε é aumentado, ocorre um aumento no valor do expoente de Lyapunov médio. Tal fato pode ser compreendido se entendermos que, com o aumento da amplitude de oscilação, teremos um aumento da energia transferida às partículas, o que lhes confere maiores valores de velocidade. Com isso, a partícula pode visitar uma maior região do espaço de fases do sistema, o que implica em maior divergência exponencial das trajetórias a partir de condições iniciais ligeiramente diferentes. Conforme

⁷O fenômeno de *stickiness* acontece quando algumas trajetórias se aproximam de ilhas de regularidades [25] e passam um tempo considerável da sua evolução nessas regiões. Isso faz com que o sistema fique mais próximo da regularidade nessas trajetórias. Uma evidência disto é o fato de que o expoente de Lyapunov dessas trajetórias diminui [26].

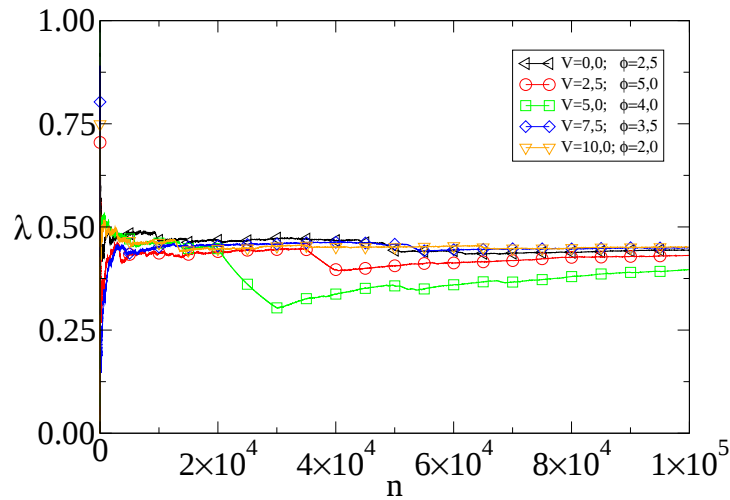


Figura 2.4: Gráfico do expoente de Lyapunov positivo $\lambda \times n$ para 5 condições iniciais distintas. Os parâmetros de controle utilizados estão indicados na figura.

vimos, o expoente de Lyapunov está relacionado a tal divergência. Portanto, aumentando a taxa de divergência, o valor do expoente de Lyapunov também aumenta. Obtivemos o ajuste $\lambda = 0,709(3) + 0,992(2) \ln \varepsilon$.

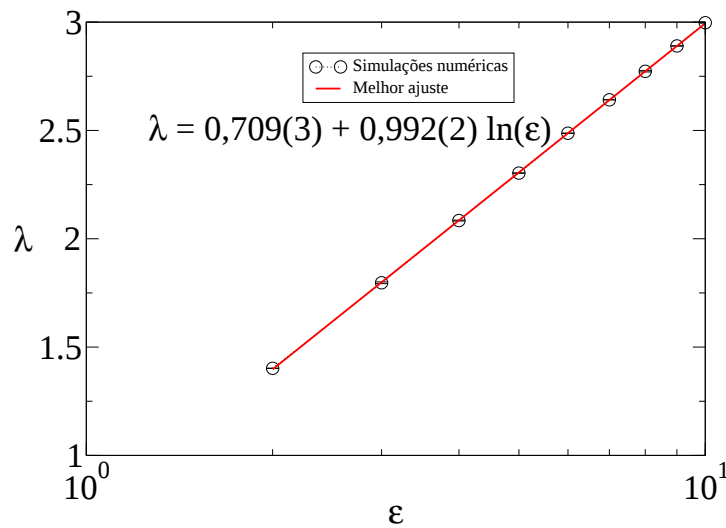


Figura 2.5: Gráfico de $\lambda \times \varepsilon$, obtidos para conjuntos de 5 condições iniciais. Foi usada escala logarítmica no eixo horizontal. Os valores médios de λ foram obtidos na saturação, o que veio a ocorrer após cerca de 80.000 iterações.

A terceira análise foi feita a partir da construção do gráfico do expoente de Lyapunov em função da grandeza $(1 - \gamma)$, como se vê na figura (2.6). Manteve-se fixo $\varepsilon = 100$. No eixo das abscissas foi utilizada escala logarítmica. Notou-se um comportamento de saturação de λ

com o aumento de γ e consequente diminuição do valor de $(1 - \gamma)$. Tal comportamento pode ser explicado da seguinte forma: quando o valor de $(1 - \gamma)$ aumenta, implica em que o valor de γ diminui, ou seja, na região à direita do gráfico há maior dissipação e na região a esquerda, menor dissipação. A maior dissipação produz uma maior contração de volume no espaço de fases. Quanto menor o volume do espaço de fases que ocupam as diferentes órbitas, menor será a taxa de divergência exponencial de trajetórias, o que implica em menores valores para os expoentes de Lyapunov. De forma análoga, na região de menor dissipação, ocorre uma menor contração do volume do espaço de fases, o que permite uma taxa de divergência exponencial de trajetórias maior.

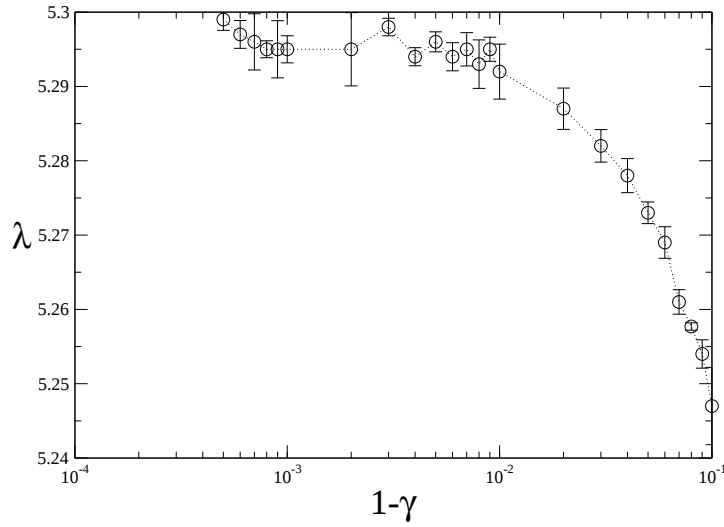


Figura 2.6: Gráfico de $\lambda \times (1 - \gamma)$. Na escala horizontal foi utilizada escala logarítmica. Nota-se que um aumento em $(1 - \gamma)$ ocasiona uma diminuição em λ , e vice versa.

2.7 Conclusões Parciais

Neste capítulo vimos que as equações que definem o mapeamento são descritas em termos das variáveis discretas V e ϕ e que o mapeamento pode contemplar colisões diretas e indiretas, sendo possível ainda, através de uma restrição de ordem física, obtermos o modelo simplificado. Mostramos, a partir do cálculo do determinante da Matriz Jacobiana que se as colisões forem inelásticas, haverá contração de área no espaço de fases e o mapeamento será do tipo dissipativo. Por outro lado, vimos também que se as colisões forem elásticas haverá preservação de área no espaço de fases e o mapeamento será do tipo não dissipativo. Vimos ainda que, para o modelo conservativo, no regime de altas velocidades, os espaços de fase são semelhantes, indicando a possibilidade de utilizarmos o modelo simplificado nas simulações, sem perda de generalidade. Analisamos o comportamento dos expoentes de Lyapunov através de simulações e interpretações dos gráficos de: $\lambda \times n$, onde vimos que os valores dos expoentes de Lyapunov em diferentes condições iniciais convergem para tempos suficientemente longos; $\lambda \times \varepsilon$ onde

observamos que o expoente de Lyapunov é crescente com um correspondente aumento da amplitude de oscilação ε e, de $\lambda \times (1 - \gamma)$, onde vimos que o expoente de Lyapunov diminui com o aumento de dissipação e aumenta com a diminuição da dissipação, podendo ser feita uma relação entre tal variação nos expoentes com o valor do determinante da Matriz Jacobiana do modelo, esta diretamente relacionada ao tipo de colisão.

Capítulo 3

Modelo *bouncer* dissipativo: um estudo fenomenológico

3.1 Resumo

Neste capítulo realizaremos o estudo fenomenológico do modelo *bouncer*. Iniciaremos mostrando sua conexão com o mapa padrão [20], através da condição de existência das curvas invariantes *spanning*. Verificaremos as condições de difusão de $\overline{V^2}$ para obtermos o valor do expoente crítico β . Hipóteses de escala serão utilizadas para construir uma função homogênea generalizada e a seguir, obteremos as duas leis de escala. Através de simulações, obteremos os quatro expoentes críticos que serão utilizados para a verificação da validade das leis de escala, o que será também verificado através de uma superposição de curvas obtidas com parâmetros diferentes.

3.2 Conexão com o Mapa Padrão

Nesta seção procuraremos obter uma relação entre o modelo *bouncer* e o mapa Padrão [20], que é descrito pelo seguinte conjunto de equações

$$T_{SM} : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K \sin(\theta_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = (\theta_n + I_n) \bmod(2\pi) \end{cases}, \quad (3.1)$$

onde K é um parâmetro de não linearidade. Se $K = 0$, o sistema é dito integrável. Se $K \neq 0$, o sistema é não integrável. Se $K < 0,9716$ observa-se a existência de caos local, confinado por curvas invariantes e se $K > 0,9716$ observa-se a existência de caos global. Se $K = K_c = 0,9716$ ocorre uma transição no mapa padrão de caos local para caos global. Isto implica que todas as curvas invariantes *spanning* são destruídas. Consequentemente, o caos pode se difundir sem limites no espaço de fases. A conexão do Mapa Padrão com o modelo *bouncer* se dá próximo a última curva invariante *spanning*.

Considere as equações do modelo *bouncer* simplificado, com $\gamma = 1$, dado por

$$\begin{cases} V_{n+1} = V_n - 2\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = (\phi_n + 2V_n) \bmod(2\pi) \end{cases} \quad (3.2)$$

Multiplicando-se a primeira equação do mapeamento por 2, e simultaneamente, adicionando o termo π em ambos os membros da segunda equação do mapeamento, teremos

$$2(V_{n+1}) = 2(V_n) - 4(\varepsilon \sin \phi_{n+1}) \quad (3.3)$$

$$(\phi_{n+1} + \pi) = (\phi_n + \pi + 2(V_n)) \quad (3.4)$$

Chamando $\theta_{n+1} = \phi_{n+1} + \pi$, $I_n = 2V_n$, $k = 4\varepsilon$ e substituindo nas equações (3.3) e (3.4), obtemos:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + 4\varepsilon \sin(\theta_{n+1}) \\ \theta_{n+1} = (\theta_n + I_n) \bmod(2\pi) \end{cases} \quad (3.5)$$

Na transição de caos local para caos global, temos que $4\varepsilon = K_c = 0,9716$. Logo, $\varepsilon_c = \frac{0,9716}{4} \cong 0,24$. Não existem mais curvas invariantes *spanning* e o caos pode difundir sem limites. Nosso objetivo é estudar os efeitos da dissipação nas propriedades do comportamento de $\bar{V}^2$ em função de ε , γ e n .

3.3 Hipóteses de Escala

Considerando o modelo *bouncer* conservativo ($\gamma = 1$), podemos mostrar que existe aceleração de Fermi (difusão ilimitada na velocidade) para $\varepsilon > \varepsilon_c$. Esta difusão está relacionada à perda de correlação entre ϕ_{n+1} e ϕ_n para V suficientemente grande. Esta difusão é suprimida na presença de choques inelásticos. A figura 3.1 mostra a supressão da difusão da velocidade, para diferentes parâmetros.

Para o modelo, podemos propor as seguintes hipóteses de escala:

1^a) Para $n \ll n_x$, temos:

$$V \sim (n\varepsilon^2)^\beta, n \ll n_x, \quad (3.6)$$

2^a) Para $n \gg n_x$, temos:

$$V_{sat} \sim (1 - \gamma)^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2}, n \gg n_x, \quad (3.7)$$

3^a) Finalmente, o número de iterações de crossover é

$$n_x \sim (1 - \gamma)^{z_1} \varepsilon^{z_2}, \quad (3.8)$$

onde β , α_1 , α_2 , z_1 e z_2 são os expoentes críticos. A hipótese definida em (3.6) vale para o

regime de velocidade antes da saturação, ou seja, $n \ll n_x$ e a hipótese (3.7) para o regime de velocidade após a saturação, ou seja, $n \gg n_x$. O termo n_x é a iteração a partir da qual ocorre saturação da velocidade, chamado *crossover*. Os valores numéricos para α_1 , α_2 , z_1 e z_2 podem ser obtidos a partir de gráficos específicos como será discutido mais adiante.

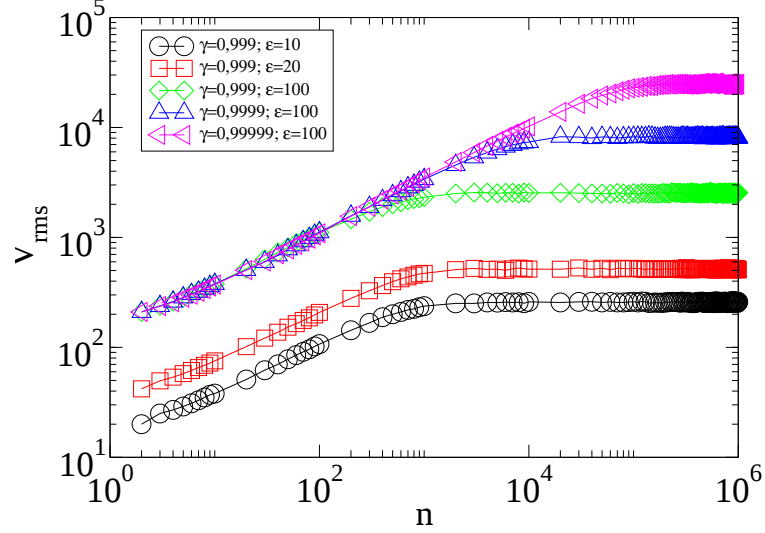


Figura 3.1: Gráfico de $V_{rms} \times n$. As curvas mostram que para tempo suficientemente longos a aceleração de Fermi é suprimida. O valor de saturação varia com os parâmetros γ e ε indicados na figura.

3.4 Função homogênea generalizada

Uma função homogênea generalizada [21, 22] é utilizada, em Física Estatística, para descrever observáveis próximo à uma transição de fase. Para obtermos os expoentes críticos, definimos a seguinte função homogênea generalizada:

$$\bar{V}(n\varepsilon^2, \varepsilon, (1 - \gamma)) = l\bar{V}(l^a n\varepsilon^2, l^b \varepsilon, l^c (1 - \gamma)), \quad (3.9)$$

onde l é um fator de escala e a , b e c são expoentes característicos. Como l é uma constante, podemos fazer a 1ª escolha:

$$l^a n\varepsilon^2 = 1, \quad (3.10)$$

o que nos leva a

$$l = (n\varepsilon^2)^{-1/a}. \quad (3.11)$$

Levando a equação (3.11) na hipótese dada pela (3.9), temos:

$$\bar{V}(n\varepsilon^2, \varepsilon, (1 - \gamma)) = (n\varepsilon^2)^{-1/a} \bar{V}(1, (n\varepsilon^2)^{-b/a} \varepsilon, (n\varepsilon^2)^{-c/a} (1 - \gamma)). \quad (3.12)$$

Para $n \ll n_x$, o termo $\bar{V}(1, (n\varepsilon^2)^{-b/a\varepsilon}, (n\varepsilon^2)^{-c/a(1-\gamma)})$ é assumido ser constante. Comparando a (3.12) com a (3.6), obtemos que $\beta = -1/a$. Nossas simulações confirmam que β é da ordem de $1/2$. Portanto, obtemos que $a = -2$.

Fazendo a 2ª escolha:

$$l^b \varepsilon = 1, \quad (3.13)$$

chegamos a

$$l = \varepsilon^{-1/b}. \quad (3.14)$$

Levando a equação (3.14) na (3.9), temos:

$$\bar{V} = \varepsilon^{-1/b} \bar{V}(\varepsilon^{-a/b} n \varepsilon^2, 1, \varepsilon^{-c/b} (1 - \gamma)), \quad (3.15)$$

onde o termo $\bar{V}(\varepsilon^{-a/b} n \varepsilon^2, 1, \varepsilon^{-c/b} (1 - \gamma))$ é assumido ser constante para $n \gg n_x$. Comparando a equação (3.15) com a equação (3.9), obtemos que $\alpha_2 = -\frac{1}{b}$.

Podemos finalmente fazer a 3ª escolha:

$$l^c (1 - \gamma) = 1, \quad (3.16)$$

o que nos conduz a

$$l = (1 - \gamma)^{-1/c}. \quad (3.17)$$

Substituindo a equação (3.17) na equação (3.7) obtemos

$$V \sim (1 - \gamma^{-\frac{1}{c}}) \bar{V}([(1 - \gamma)^{-\frac{1}{c}}] n \varepsilon^2, (1 - \gamma)^{-b/c} \varepsilon, 1), \quad (3.18)$$

onde $\bar{V}([(1 - \gamma)^{-\frac{1}{c}}] n \varepsilon^2, (1 - \gamma)^{-b/c} \varepsilon, 1)$ é assumido ser constante.

Agora, podemos comparar as expressões obtidas para l da 1ª e da 2ª escolha, o que conduz a

$$(n \varepsilon^2)^\beta = \varepsilon^{\alpha_2}. \quad (3.19)$$

Concluimos que

$$n_x = \varepsilon^{\frac{\alpha_2}{\beta} - 2} \quad (3.20)$$

Comparando a equação (3.20) com a equação (3.8), obtemos que

$$z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} - 2. \quad (3.21)$$

Esta é uma lei de escala.

Comparando agora as expressões de l da primeira e da terceira escolha, temos:

$$(n \varepsilon^2)^\beta = (1 - \gamma)^{\alpha_1}. \quad (3.22)$$

Comparando a equação (3.22) com a equação (3.8) obtemos:

$$n_x \sim (1 - \gamma)^{\alpha_1/\beta}. \quad (3.23)$$

Finalmente, comparando a equação (3.23) com a equação (3.8), obtemos que

$$z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}, \quad (3.24)$$

fornecendo assim a segunda Lei de Escala.

3.5 Resultados numéricos e expoentes críticos

Nesta seção obteremos os expoentes α_1 , α_2 , z_1 e z_2 por simulação numérica. Em todas as nossas simulações consideraremos um ensemble de 5×10^3 condições iniciais diferentes utilizando V_0 fixo e $\phi_0 \in [0, 2\pi)$. A evolução dinâmica das órbitas permite que o observável

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n V_{i,j}^2} \quad (3.25)$$

possa ser avaliado. Cada órbita é evoluída até $n = 10^6$ colisões. Discutiremos primeiramente os expoentes α_1 e α_2 e logo em sequência os expoentes z_1 e z_2 .

Para obtermos o expoente α_1 , mantemos fixo o parâmetro ε e variamos γ . O valor assintótico de saturação é então obtido ao final de 10^6 colisões. O comportamento de $V_{sat} \times (1 - \gamma)$ é mostrado na figura (3.2). O expoente obtido numericamente foi $\alpha_1 = -0.4999(7)$.

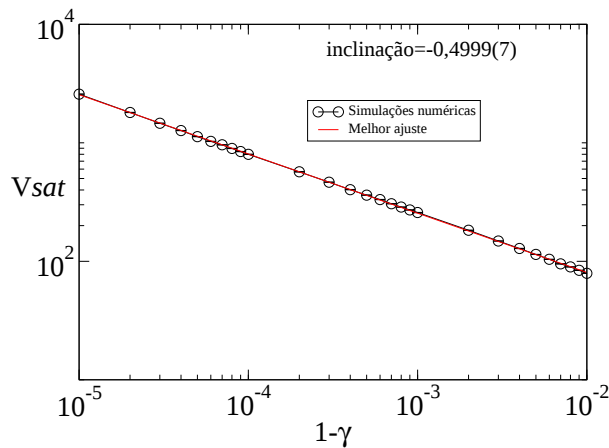


Figura 3.2: Gráfico de $V_{sat} \times (1 - \gamma)$. A curva permite, através de lei de potência obter o expoente crítico $\alpha_1 \simeq -0,5$

Por outro lado o expoente α_2 é obtido a partir do comportamento de $V_{sat} \times \varepsilon$ considerando

γ fixo. O esboço de $V_{sat} \times \varepsilon$ é mostrado na figura (3.3). Um ajuste numérico fornece $\alpha_2 = 1,006(9)$.

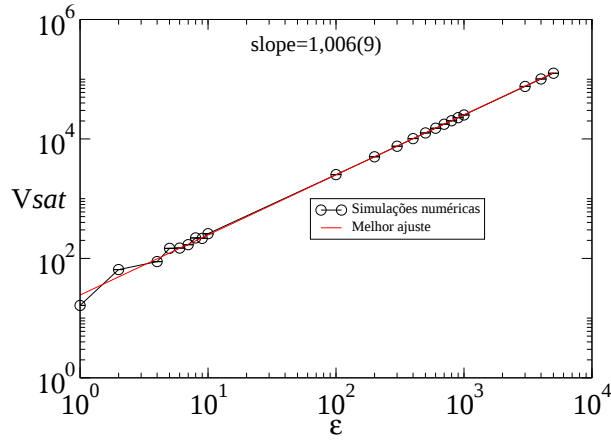


Figura 3.3: Gráfico de $V_{sat} \times \varepsilon$. A curva permite, através do ajuste feito, obter o expoente crítico $\alpha_2 \simeq 1$.

Vamos agora discutir a obtenção dos expoentes z_1 e z_2 . Eles são obtidos a partir do comportamento de $n_x \times (1 - \gamma)$ e $n_x \times \varepsilon$, respectivamente. Podemos perceber pela figura (3.1) que um aumento em γ acarreta em um aumento em n_x , portanto, um esboço de $n_x \times (1 - \gamma)$ deve produzir um comportamento decrescente. Essa observação é de fato confirmada a partir da figura (3.4), que mostra $n_x \times (1 - \gamma)$. Um ajuste em lei de potência fornece $z_1 = -0,951(5)$.

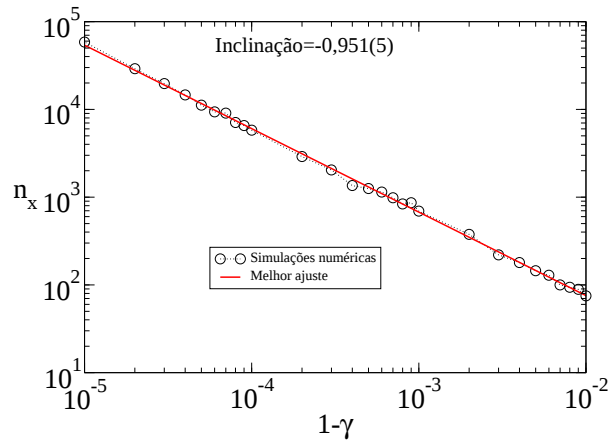


Figura 3.4: Gráfico de $n_x \times (1 - \gamma)$. A curva permite, através do ajuste feito, obter o expoente crítico $z_1 \simeq -1$

Agora obteremos o expoente z_2 . De fato uma análise mais minuciosa da figura (3.1) mostra que a variação de ε não causa, aparentemente, nenhuma mudança em n_x . Em primeira análise, ε

não deve ser uma variável relevante para a caracterização de n_x , levando a um possível expoente $z_2 = 0$. Essa discussão é totalmente confirmada pela figura (3.5) que mostra o comportamento de $n_x \times \varepsilon$. Um ajuste em lei de potência fornece $z_2 = 0,00(1)$, confirmando nossa observação acima.

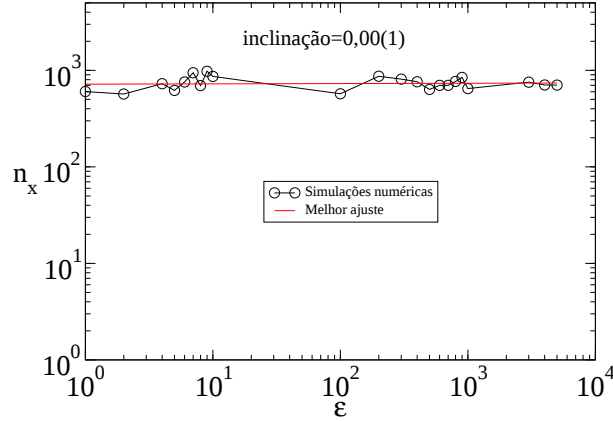


Figura 3.5: Gráfico de $n_x \times \varepsilon$. A curva permite, através do ajuste feito, obter o expoente crítico $z_2 \simeq 0$

Por fim o expoente β foi obtido como $\beta \simeq 0,5$, em todas as simulações. O conhecimento dos valores numéricos de α_1 , α_2 , z_1 , z_2 e β permite testar as leis de escala. Uma substituição dos pares de expoentes (α_1, β) e (α_2, β) permite obter z_1 e z_2 , respectivamente, confirmando assim a validade das leis de escala. Uma outra maneira de verificar a validade das leis de escala é reescalar os eixos da figura (3.1) utilizando as seguintes transformações $V \rightarrow \frac{V}{\varepsilon^{\alpha_2}(1-\gamma)^{\alpha_1}}$ e $n \rightarrow \frac{n}{(1-\gamma)^{z_1}\varepsilon^{z_2}}$. Se as escalas estiverem corretas assim como os expoentes críticos devidamente obtidos, todas as curvas da figura (3.1) devem se sobrepor em uma curva universal. Esta sobreposição de curvas é confirmada na figura (3.6).

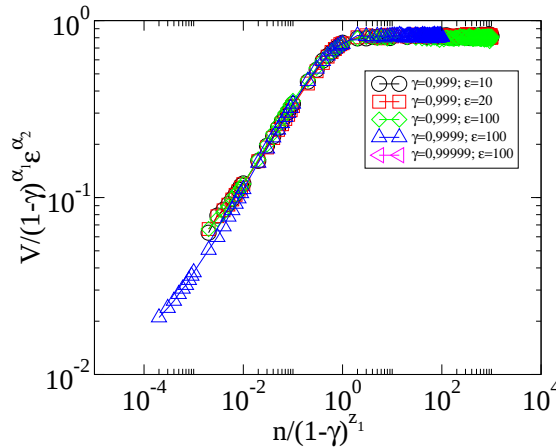


Figura 3.6: Sobreposição das curvas mostradas na fig. (3.1) em um única curva universal.

3.6 Conclusões Parciais

Neste capítulo inicialmente mostramos a conexão do modelo *bouncer* com o mapa padrão, ambos exibindo uma transição de fase de caos local para caos global para um parâmetro crítico equivalente. Hipóteses de escala foram utilizadas para construir uma função homogênea generalizada e foram obtidas duas leis de escala. Através de simulações numéricas obtivemos os expoentes críticos. As leis de escala foram validadas a partir da substituição de pares de expoentes críticos (α_1, β) e (α_2, β) , o que permitiu obter z_1 e z_2 , respectivamente. Também foi obtida a curva universal de $v \times n$ com as transformações $V \rightarrow \frac{V}{\varepsilon^{\alpha_2}(1-\gamma)^{\alpha_1}}$ e $n \rightarrow \frac{n}{(1-\gamma)^{z_1}\varepsilon^{z_2}}$, de onde se obteve uma curva universal, corroborando assim, a validade das hipóteses de escala.

Capítulo 4

Modelo *bouncer* dissipativo: uma descrição analítica

4.1 Resumo

Neste capítulo desenvolveremos a expressão analítica da velocidade quadrática média para o mapeamento do modelo *bouncer*. Descreveremos detalhadamente todas as passagens matemáticas que serão utilizadas para se obter a expressão final. Obteremos os expoentes α_1 , α_2 , z_1 e z_2 através da expressão analítica, relacionando-a com as hipóteses de escala propostas no capítulo anterior. Esta é a nossa contribuição original para este modelo. Ainda neste capítulo realizaremos uma conexão do modelo *bouncer* com a Termodinâmica, através da obtenção de uma expressão para a entropia.

4.2 Desenvolvimento da expressão analítica

A equação do modelo simplificado, dada por

$$\begin{cases} V_{n+1} = |\gamma V_n - (1 + \gamma)\varepsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = (\phi_n + 2V_n), \text{ mod}(2\pi) \end{cases}, \quad (4.1)$$

pode ser desenvolvida para obtermos a expressão de $V_{rms} \times n$.

Considere a primeira equação do mapeamento, dada por

$$V_{n+1} = |\gamma V_n - (1 + \gamma)\varepsilon \sin(\phi_{n+1})|. \quad (4.2)$$

Elevando ambos os lados da equação ao quadrado, obtemos

$$V_{n+1}^2 = \gamma^2 V_n^2 - 2\gamma V_n (1 + \gamma)\varepsilon \sin(\phi_{n+1}) + (1 + \gamma)^2 \varepsilon^2 \sin^2(\phi_{n+1}). \quad (4.3)$$

Tomando a média de cada um dos termos, temos

$$\overline{V^2}_{n+1} = \gamma^2 \overline{V^2}_n - 2\gamma \overline{V}_n (1 + \gamma) \overline{\varepsilon \sin(\phi_{n+1})} + (1 + \gamma)^2 \overline{\varepsilon^2 \sin^2(\phi_{n+1})}, \quad (4.4)$$

o que conduz a

$$\overline{V^2}_{n+1} = \gamma^2 \overline{V^2}_n + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2. \quad (4.5)$$

Subtraindo o termo $\overline{V^2}_n$ em cada um dos membros, temos

$$\overline{V^2}_{n+1} - \overline{V^2}_n = \gamma^2 \overline{V^2}_n - \overline{V^2}_n + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2. \quad (4.6)$$

Dividindo o primeiro membro da equação por $((n + 1) - (n))$, temos

$$\frac{\overline{V^2}_{n+1} - \overline{V^2}_n}{((n + 1) - (n))} = \gamma^2 \overline{V^2}_n - \overline{V^2}_n + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2. \quad (4.7)$$

Da definição de derivada

$$\frac{\overline{V^2}_{n+1} - \overline{V^2}_n}{((n + 1) - (n))} \cong \frac{d\overline{V^2}}{dn}, \quad (4.8)$$

Podemos escrever que

$$\frac{d\overline{V^2}}{dn} = \gamma^2 \overline{V^2} - \overline{V^2} + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2. \quad (4.9)$$

Rearranjando, temos

$$\frac{d\overline{V^2}}{\gamma^2 \overline{V^2} - \overline{V^2} + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2} = dn. \quad (4.10)$$

Integrando nos limites adequados

$$\int_{V_0}^V \frac{d\overline{V^2}}{\gamma^2 \overline{V^2} - \overline{V^2} + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2} = \int_0^n dn. \quad (4.11)$$

Lembrando que o termo V^2 está associado a energia de uma partícula, podemos substituir o termo $\overline{V^2}$ por E , o que facilitará o processo de integração:

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{\gamma^2 E - E + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2} = \int_0^n dn \quad (4.12)$$

Rearranjando

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{E(\gamma^2 - 1) + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2} = \int_0^n dn \quad (4.13)$$

Podemos utilizar a seguinte mudança de variável:

$$E(\gamma^2 - 1) + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2 = u. \quad (4.14)$$

Com isso,

$$\frac{du}{dE} = (\gamma^2 - 1), \quad (4.15)$$

o que nos leva a

$$dE = \frac{du}{\gamma^2 - 1}. \quad (4.16)$$

Assim,

$$\int_{U_0}^U \frac{du}{(\gamma^2 - 1)u} = \int_0^n dn. \quad (4.17)$$

Rearranjando:

$$\int_{U_0}^U \frac{du}{u} = (\gamma^2 - 1) \int_0^n dn. \quad (4.18)$$

Integrando, obtemos:

$$\ln \frac{U}{U_0} = (\gamma^2 - 1)n. \quad (4.19)$$

Então,

$$\ln \left[\frac{E(\gamma^2 - 1) + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2}{E_0(\gamma^2 - 1) + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2} \right] = (\gamma^2 - 1)n. \quad (4.20)$$

Utilizando a definição de logaritmo, temos

$$\frac{E(\gamma^2 - 1) + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2}{E_0(\gamma^2 - 1) + \frac{1}{2}(1 + \gamma)^2 \varepsilon^2} = e^{(\gamma^2 - 1)n}. \quad (4.21)$$

Rearranjando para isolar E, obtemos:

$$E = E_0 e^{(\gamma^2 - 1)n} + \frac{(1 + \gamma)\varepsilon^2}{2(1 - \gamma)} (1 - e^{(\gamma^2 - 1)n}). \quad (4.22)$$

Lembrando que $E = \bar{V}^2$, e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros e ainda, lembrando que $V_{rms} = \sqrt{\bar{V}^2}$, obtemos a expressão para V_{rms} :

$$V_{rms} = \sqrt{E_0^2 e^{(\gamma^2 - 1)n} + \frac{(1 + \gamma)\varepsilon^2}{2(1 - \gamma)} (1 - e^{(\gamma^2 - 1)n})}. \quad (4.23)$$

No limite em que n tende a infinito, teremos o regime de saturação de velocidade. Aplicando tal limite na expressão (4.23) verificamos que os termos que envolvem as exponenciais vão a zero. Assim:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(1 + \gamma)\varepsilon^2}{2(1 - \gamma)}}. \quad (4.24)$$

Rearranjando:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(1 + \gamma)\varepsilon^2}{2} (1 - \gamma)^{-1}}. \quad (4.25)$$

Assim,

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{(1+\gamma)}{2}}(1-\gamma)^{-1/2}\varepsilon. \quad (4.26)$$

O termo $\sqrt{\frac{(1+\gamma)}{2}}$ é constante para γ fixo. Assim podemos escrever a seguinte relação de proporcionalidade:

$$V_{rms} \sim (1-\gamma)^{-1/2}\varepsilon^1 \quad (4.27)$$

Comparando com a 2ª hipótese de escala, dada pela equação (4.7), obtemos os expoentes críticos $\alpha_1 = -1/2$ e $\alpha_2 = 1$:

Esses resultados confirmam os expoentes obtidos via simulação numérica.

Podemos expandir a (4.23) em série de Taylor, onde a expansão de primeira ordem é $e^{ax} = 1 + ax$. Assim, escrevemos:

$$e^{(\gamma^2-1)n} = 1 + (\gamma^2 - 1)n. \quad (4.28)$$

Assim,

$$V_{rms} = \sqrt{\overline{V_0}^2[1 + (\gamma^2 - 1)n] + \frac{(1+\gamma)\varepsilon^2}{2(1-\gamma)}(1 - [1 + (\gamma^2 - 1)n])} \quad (4.29)$$

Se fizermos a aproximação $\gamma \simeq 1$, obtemos:

$$V_{rms} = \sqrt{\overline{V_0}^2 + 2\varepsilon^2 n}. \quad (4.30)$$

Tomando $V_0 \simeq 0$, vemos que $V_{rms} \simeq \sqrt{2\varepsilon}n^{1/2}$, confirmando que $\beta = \frac{1}{2}$, conforme obtido numericamente. Considerando a aproximação da saturação da velocidade média na região da criticalidade, ou seja quando $n = n_x$, podemos escrever:

$$V_{rms} = \sqrt{2\varepsilon^2 n} = V_{sat}, \quad (4.31)$$

o que resulta em

$$\sqrt{2\varepsilon^2 n_x} = \sqrt{\frac{(1+\gamma)}{2}}\varepsilon(1-\gamma)^{-1/2}. \quad (4.32)$$

Elevando ao quadrado, temos:

$$2\varepsilon^2 n_x = \frac{(1+\gamma)}{2}\varepsilon^2(1-\gamma)^{-1}. \quad (4.33)$$

O que resulta em:

$$n_x = \frac{(1+\gamma)}{4}(1-\gamma)^{-1}. \quad (4.34)$$

O termo $\frac{(1+\gamma)}{4}$ é constante. Assim podemos escrever:

$$n_x \sim (1-\gamma)^{-1}\varepsilon^0. \quad (4.35)$$

Comparando com a terceira hipótese de escala definida em (3.8), temos:

$$n_x \sim (1 - \gamma)^{z_1} \varepsilon^{z_2}. \quad (4.36)$$

Com isso, obtemos que $z_1 = -1$ e $z_2 = 0$.

Esses resultados estão em total acordo com nossas simulações numéricas. Eles são também resultados originais para este modelo.

4.3 Conexões com a Termodinâmica

Podemos realizar a conexão das equações do modelo *bouncer* com a Termodinâmica, através da obtenção de uma expressão da entropia (S).

A velocidade v está diretamente relacionada com a energia cinética K , através da expressão

$$K = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.37)$$

Pelo Teorema da Equipartição da Energia [21], cada termo quadrático na expressão da energia fornece $\frac{1}{2}K_B T$ na expressão da energia total, onde K_B é a constante de Boltzmann.

Como a energia do sistema está diretamente relacionada à temperatura, podemos assumir que a expressão da energia interna será

$$U = \frac{1}{2}K_B T. \quad (4.38)$$

Então,

$$T = 2\frac{U}{K_B}. \quad (4.39)$$

Da Termodinâmica [21], temos que

$$dU = TdS. \quad (4.40)$$

Substituindo a expressão de T , temos:

$$dU = 2\frac{U}{K_B}dS. \quad (4.41)$$

Então,

$$\int \frac{dU}{U} = \int \frac{2}{K_B}dS. \quad (4.42)$$

Resolvendo a integral, obtemos que

$$S = \frac{K_B}{2} \ln U + C, \quad (4.43)$$

onde C é uma constante arbitrária.

Este resultado mostra que a entropia S é uma função crescente da energia U , o que está em concordância com o 3º Postulado da Termodinâmica [21].

4.4 Conclusões Parciais

Neste capítulo utilizamos a equação do modelo *bouncer* simplificado para obtermos uma expressão analítica para a velocidade média quadrática. Aplicando limites apropriados obtemos os expoentes $\alpha_1 = -1/2$ e $\alpha_2 = 1$. Uma expansão em série de Taylor foi realizada na expressão da velocidade quadrática média, de onde se pode obter por comparação com as hipóteses de escala que $\beta = 1/2$, que $z_1 = -1$ e que $z_2 = 0$, o que está inteiramente de acordo com as simulações realizadas. Finalmente foi realizada uma conexão do modelo *bouncer* com a Termodinâmica, onde obtivemos uma expressão para a entropia.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação estudamos o modelo *bouncer*. Inicialmente vimos que as equações que o constituem são apresentadas em termos de variáveis discretas V e ϕ , havendo três conjuntos de equações possíveis para se descrever o modelo: a que envolve as colisões diretas, as colisões indiretas e por fim o modelo simplificado, onde se despreza o movimento da plataforma oscilante. Mostramos todos os passos necessários para a construção dos mapeamentos. Construímos espaços de fase para o modelo não dissipativo, onde notamos grandes semelhanças entre os espaços de fase nas regiões de altas energias, para os modelos completo e simplificado. Mostramos que o determinante da Matriz Jacobiana do mapeamento do modelo simplificado será igual a 1 na ausência de dissipação e menor que 1 na presença de dissipação, via colisões inelásticas. Analisamos, por simulação e posterior interpretação gráfica, algumas propriedades dos expoentes de Lyapunov para o modelo simplificado, onde vimos que o expoente de Lyapunov é crescente com um correspondente aumento da amplitude de oscilação ε e ainda que o expoente de Lyapunov diminui com o aumento de dissipação e aumenta com a diminuição da dissipação.

Fizemos o estudo fenomenológico do modelo, onde verificamos a correspondência entre o modelo *bouncer* conservativo simplificado e o mapa padrão, onde se observou, no modelo *bouncer*, a transição de fase de caos local para caos global para $\varepsilon \cong 0,24$. Construímos hipóteses de escala, utilizamos uma função homogênea generalizada e obtivemos as duas leis de escala $z_2 = \frac{\alpha_2}{\beta} - 2$ e $z_1 = \frac{\alpha_1}{\beta}$. Estudamos as propriedades de escala na região da transição de fase, obtendo os expoentes críticos através de simulações numéricas e análise dos gráficos obtidos, a saber: $\alpha_1 = -0,4999(7)$, $\alpha_2 = 1,006(9)$, $z_1 = -0,951(5)$, $z_2 = 0,00(1)$.

Com o estudo analítico, realizamos a maior contribuição desta dissertação para o modelo em estudo, onde desenvolvemos a expressão da velocidade quadrática média e obtivemos, analiticamente os expoentes críticos: $\alpha_1 = -0,5$, $\alpha_2 = 1,0$, $z_1 = -1,0$, $z_2 = 0,0$. Comparando o conjunto de expoentes obtidos numericamente com o conjunto obtido analiticamente, verificamos o bom acordo entre os mesmos, validando assim a teoria discutida. Finalmente realizamos uma conexão do modelo com a Termodinâmica, através da obtenção analítica de uma expressão para a Entropia do sistema, o que se apresenta em concordância com o 3º Postulado da Termo-

dinâmica.

Como perspectivas deste trabalho pretendemos estender o formalismo desenvolvido para a investigação da dinâmica de um ensemble de partículas no interior de um bilhar bidimensional com fronteira oscilante e com escape de partículas, sujeito à ação de um campo gravitacional constante.

Referências Bibliográficas

- [1] Monteiro, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. Editora Livraria da Física, 2011.
- [2] Lang, H. S. *The order of nature in Aristotle's physics: place and the elements*. Cambridge University Press, 2007.
- [3] Boczek, R. *Conceitos de Astronomia*, Editora Edgard Blucher Ltda., 1984.
- [4] Couper, H., Nigel H. *Historia de la astronomia*. Editorial Paidós, 2008.
- [5] Videira, A. A. P. *As descobertas astronômicas de Galileu Galilei*. Rio de Janeiro: Vieira Lent (2009).
- [6] Nussenzveig, H. M. *Curso de Física Básica*, Vol. 1 Mecânica.”(2011).
- [7] Nobre, S. *Leitura Crítica da História: reflexões sobre a História da Matemática*. Ciência e Educação 10.3 (2004): 531-543.
- [8] Poincaré, H. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, vol. 1 (Gauthier Villars, Paris, 1892)(English translation by DL Goroff, New Methods in Celestial Mechanics.”(1993).
- [9] Arnold, V. I., *Uspekhi Math. Nauk.*, v. 18, p. 13, (1963).
- [10] Moser, J., *Nach. Akad. Wiss. Gottingen II Math. Phys.*, v. 1, p. 1, (1962).
- [11] Kolmogorov, A. N., *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, v. 98, p. 527, (1954).
- [12] Lorenz, E. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the atmospheric sciences, v. 20, n. 2, p. 130141, 1963.
- [13] Fermi, E. *On the origin of the cosmic radiation*. Physical Review, APS, v. 75, n. 8, p. 1169, 1949.
- [14] Ulam, S. *On some statistical properties of dynamical systems*. In: Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. [S.l.: s.n.], 1961. v. 3, p. 315320.
- [15] Pustynnikov, L. D. *Trans. Moscow Math. Society* 2, 1 (1978).

- [16] Lieberman, M.A., Lichtenberg, A.J.. *Phys. Rev. Lett.* 70 (1983)1093.
- [17] Leonel, E.D. , Livorati, A.L.P. *J. Phys. A* 387 (2008) 1155-1160.
- [18] Leonel, E.D., da Silva, J.K.L., Kamphorst, S.O. *Physica A* 331 (2004) 435.
- [19] Leonel, E.D. McClintock, P.V.E. *J. Phys. A* 38 (2005) 823; *J. Phys. A* 38 (2005) L425.
- [20] Lichtenberg, A. J., Lieberman, M.A. *Regular and Chaotic Dynamics*. Appl. Math. Sci. 38, Springer Verlag, New York, 1992.
- [21] Salinas, S. R. (1997). *Introdução a Física Estatística*. Vol. 09. Edusp.
- [22] Leonel, E.D.. *Fundamentos da Física Estatística*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 2015.
- [23] Fiedler-Ferrara, N., Prado, C. P. C. *Caos - Uma Introdução*. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1994.
- [24] Eckmann, J. P., Ruelle, D. (1985). *Ergodic theory of chaos and strange attractors. Reviews of modern physics*, 57(3), 617.
- [25] Altmann, E. G., Adilson E. M., and Holger, K.. *Stickiness in mushroom billiards. Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 15.3 (2005).
- [26] Oliveira, H. A., C. Manchein, and M. W. Beims. *Soft wall effects on interacting particles in billiards*. *Physical Review E* 78.4 (2008).