

IFT - UNESP
INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.07/2024

Emaranhamento entre Bósons Compostos Idênticos

Luiz Eduardo Torres Sato

Orientador

Gastão Krein

Agosto de 2024

S253e Sato, Luiz Eduardo Torres
Emaranhamento entre bósons compostos idênticos / Luiz Eduardo
Torres Sato. – São Paulo, 2024
73 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo
Orientador: Gastão Krein

1. Teoria quântica. 2. Informação quântica. 3. Entropia quântica. I. Título

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca
do Instituto de Física Teórica (IFT), São Paulo. Dados fornecidos pelo
autor(a).

**EMARANHAMENTO ENTRE BÓSONS
COMPOSTOS IDÊNTICOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física Teórica do Câmpus de São Paulo, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título Mestre em Ciências, área Física.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. GASTÃO INÁCIO KREIN (Orientador)
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. THIAGO RAFAEL FERNANDEZ PEREZ TOMEI
Instituto de Física Teórica/UNESP

Prof. Dr. SIDNEY DOS SANTOS AVANCINI
Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC

Conceito: Aprovado

São Paulo, 14 de agosto de 2024.

Dedico esta tese à minha companheira Deborah Lookin.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Gastão Krein, pelo auxílio, pela paciência e pelo voto de confiança.

Agradeço também à minha família que sempre me incentivou a continuar esse trabalho apesar de todas as dificuldades.

Agradeço ao CNPq pelo auxílio e pelo impulso, que sem eles não teria conseguido finalizar este trabalho.

“Todos os homens, por natureza, tendem ao saber.”

Aristóteles, *Metafísica A*

Resumo

Este trabalho lida com o problema do emaranhamento de partículas idênticas. O modo usual em mecânica quântica de tratar partículas idênticas é o de usar o postulado da simetrização. Porém, esse tratamento usual apresenta problemas tanto conceituais quanto técnicos. Primeiramente, é necessário utilizar rótulos artificiais e, portanto, não físicos, para identificar as partículas. Um outro problema é que ao se utilizar o postulado da simetrização, as partículas podem tornar-se automaticamente emaranhadas, mesmo sem nunca terem interagido umas com as outras. Dentre as várias propostas existentes na literatura para lidar com esses problemas, destaca-se a de Lo Franco e Campagno que define estados de muitas partículas idênticas sem usar rótulos artificiais para as partículas, estados esses chamados de estados globais holísticos. Essa concepção de estado global permite calcular emaranhamento entre partículas idênticas utilizando as noções usuais da teoria de informação quântica, como a entropia de von Neumann. Nesta dissertação estendemos a noção de estado global para tratar emaranhamento entre bósons compostos idênticos usando o método da segunda quantização. O assunto é de interesse no estudo de estados emaranhados em condensados atômicos e matéria nuclear a densidades supranucleares. Para descrever os graus de liberdade internos das partículas compostas, empregamos operadores de criação e aniquilação de partículas compostas que obedecem uma álgebra de quons, que é uma álgebra de Heisenberg deformada. Álgebras de quons têm sido empregadas para tratar sistemas de muitos corpos de partículas compostas em diferentes áreas da física e, como mostramos nesta dissertação, são também eficientes para tratar emaranhamento entre bósons compostos idênticos.

Palavras Chaves: Emaranhamento; Partículas Idênticas; Bósons Compostos.

Áreas do conhecimento: Física; Mecânica Quântica; Informação Quântica.

Abstract

This work deals with the problem of entanglement of identical particles. The usual way in quantum mechanics to treat identical particles is to use the symmetrization postulate. However, this usual treatment presents both conceptual and technical problems. Firstly, it is necessary to use artificial and, therefore, non-physical labels to identify the particles. Another problem is that when using the symmetrization postulate, the particles automatically might become entangled, even without having ever interacted with each other. Among the various proposals in the literature to deal with these problems, the one by Lo Franco and Campagno stands out, which defines states of many identical particles without using artificial labels for the particles, states called holistic global states. This concept of global state allows us to calculate entanglement between identical particles using the usual concepts of quantum information theory, such as von Neumann entropy. In this dissertation we extend the notion of global state to treat entanglement between identical composite bosons using the second quantization method. The subject is of interest in the study of entangled states in atomic condensates and nuclear matter at supranuclear densities. To describe the internal degrees of freedom of composite particles, we employ composite particle creation and annihilation operators that obey a quon algebra, which is a deformed Heisenberg algebra. Quon algebras have been used to treat many-body systems of composite particles in different areas of physics and, as we show in this dissertation, they are also efficient for dealing with entanglement between identical composite bosons.

Keywords: Entanglement; Identical Particles; Composite Bosons.

Areas of knowledge: Physics; Quantum Mechanics; Quantum Information.

Índice

1	Introdução	1
2	Formalismo de várias partículas	7
2.1	Vetores de estado	7
2.2	Operadores de Estado	10
2.3	Partículas Idênticas	13
3	Emaranhamento	18
3.1	Tratamento via vetor de estado	18
3.2	Tratamento via operador de estado	20
3.3	Entropia de von Neumann	22
4	Emaranhamento de partículas idênticas	26
4.1	Estado Holístico	27
4.2	Emaranhamento e Operador de Estado Reduzido Localizado	32
4.3	Partículas Idênticas em um Poço Assimétrico	33
5	Emaranhamento de bósons compostos idênticos	40
5.1	Emaranhamento no formalismo de segunda quantização	40
5.2	Bósons compostos e quons	42
5.3	Emaranhamento de bósons compostos	47
6	Conclusões e perspectivas	54
A	Propriedades do operador de estado	58
B	Operador de estado reduzido Localizado - estado holístico	60
C	Operador de estado reduzido localizado - segunda quantização	63
D	Operador de estado reduzido localizado - bóson composto	68
	Referências	72

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho consideramos o problema de quantificar o emaranhamento entre partículas idênticas, mais especificamente entre partículas idênticas compostas. A princípio, a existência deste problema não é óbvia, afinal o tratamento do emaranhamento é muito bem conhecido, assim como a descrição de partículas idênticas. Contudo, o tratamento usual de partículas idênticas e seu emaranhamento apresentam problemas: a) os estados de partículas idênticas requerem o postulado de simetrização que introduzem rótulos artificiais, não físicos, para descrever esses sistemas, b) também pelo postulado de simetrização as partículas idênticas podem se tornar emaranhadas, mesmo que na sua preparação não houve interação entre elas, c) a quantificação do emaranhamento entre essas partículas, usualmente dada pela entropia de von Neumann, utiliza o traço parcial sobre os graus de liberdade de uma ou mais partículas do sistema, porém essa operação é artificial uma vez que para partículas idênticas não é possível saber sobre qual partícula está realizando-se esse traço. Essa questão fica exacerbada no caso em que a estrutura interna das “partículas” idênticas não pode ser desprezada, isto é, quando as partículas são compostas por outras. Exemplos abundam em várias áreas da física envolvendo moléculas, átomos, núcleos atômicos e núcleons; em cada caso, as “partículas” são compostas por outras que, dependendo das circunstâncias, podem ter suas estruturas internas desprezadas ou não.

As partículas idênticas são classificadas em bósons e férmions. Bósons são partículas de spin inteiro e férmions são partículas de spin semi inteiro. Pelo postulado da simetrização da mecânica quântica, os estados acessíveis a partículas bosônicas são estados simétricos com a troca das partículas e os estados acessíveis a partículas fermiônicas são estados antissimétricos. Por exemplo, seja $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ a função de onda que descreve o estado de dois bósons ou férmions idênticos. Sejam $\varphi(\mathbf{r})$ e $\chi(\mathbf{r})$ as funções de onda que descrevem os estados de cada uma das partículas idênticas. Pelo postulado da simetrização, a função de onda das duas

partículas deve ser da seguinte forma:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi(\mathbf{r}_1)\chi(\mathbf{r}_2) \pm \chi(\mathbf{r}_1)\varphi(\mathbf{r}_2)] \quad (1.1)$$

onde o sinal positivo fornece um estado simétrico, portanto bosônico e o sinal negativo fornece um estado antissimétrico, portanto fermiônico. Os vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 referem-se às posições de partículas identificadas (rotuladas) como 1 e 2. Porém como este é um estado de partículas idênticas, não somos capazes de rotular exatamente qual seria a partícula chamada de 1 e qual a partícula chamada de 2. Isso pode soar estranho a primeira vista, pois poderia-se argumentar que bastaria “acompanhar” cada uma das partículas e assim seríamos capazes de manter esse rótulo nela. Classicamente, isso seria em princípio possível, já que acompanhar cada uma significaria saber posição e momentum quando conhecidos os valores iniciais dessas quantidades. Porém, na mecânica quântica, o estado das partículas é dado por uma função de onda, que é justamente um objeto que implica numa indeterminação tanto na localização espacial quanto no momentum e, assim, não é possível “acompanhá-la”. Ainda mais, ao lidarmos com muitas partículas idênticas, uma vez que as suas funções de onda em geral se sobrepõem, é impossível separar qual partícula é qual. Dizemos, então, que essas partículas são indistinguíveis. Assim, utilizar rótulos é um processo artificial e, portanto, não físico. Logo, uma descrição de sistemas de partículas idênticas que não levem rótulos parece ser conceitualmente melhor do que o paradigma padrão.

Em relação ao emaranhamento, duas partículas estão emaranhadas quando é impossível atribuir estados separados para cada uma delas. Ou seja, não existe o estado de uma partícula independentemente do estado da outra. Por exemplo, imaginemos a situação em que duas partículas de spin meio, não idênticas, sejam preparadas com o seguinte estado (os graus de liberdade espaciais não são relevantes para essa discussão):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow_1 \otimes \downarrow_2\rangle - |\downarrow_1 \otimes \uparrow_2\rangle] \quad (1.2)$$

Este estado representa um sistema de duas partículas com probabilidade meio da primeira partícula estar com spin “para baixo” e a segunda estar com spin “para cima” e com probabilidade meio da primeira partícula estar com spin “para baixo” e a segunda estar com spin “para cima”. Neste caso é impossível separar o estado da primeira partícula do estado da segunda partícula: se uma medida

(do spin) é feita sobre primeira partícula e se encontre como resultado que ela está com spin “para cima” ($|\uparrow_1\rangle$), sabemos imediatamente (mesmo que a segunda partícula esteja a anos luz de distância) que a segunda partícula estará com spin “para baixo” ($|\downarrow_2\rangle$). Agora considere a situação que ambas as partículas sejam idênticas. Pelo postulado da simetrização, este estado deve ser um estado antissimétrico (estamos lidando com spins $1/2$), ou seja, como o da Eq. (1.2). Logo, elas estarão emaranhadas, mesmo que os seus estados tenham sido preparados independentemente, sem nunca terem interagido entre si.

Para ilustrar o problema envolvido nessa caracterização de emaranhamento, consideremos a situação a seguir, apresentado na Ref. [1], em que um estado de duas partículas idênticas é preparado sem que nunca tenham interagido entre si. Suponhamos um átomo de hélio neutro na Terra em um estado $|\text{He}'_T\rangle$ e um átomo de hélio ionizado ${}^4\text{He}^+$ e um elétron na galáxia Andrômeda, com estados $|\text{He}^+_A\rangle$ e $|e_A\rangle$ respectivamente. Os subíndices T e A identificam as localizações espaciais na Terra e em Andrômeda, respectivamente. Essas partículas (supondo que a estrutura interna dos átomos envolvidos possa ser desprezada), claramente, não são idênticas. Portanto o estado global, em um instante de tempo (universal) $t = 0^-$, é dado pelo produto tensorial de seus estados individuais:

$$|\Psi(t = 0^-)\rangle = |\text{He}'_T\rangle \otimes |\text{He}^+_A\rangle \otimes |e_A\rangle = |\text{He}'_T\rangle \otimes |\text{He}^+_A, e_A\rangle \quad (1.3)$$

Suponhamos agora que no instante de tempo universal $t = 0$, o átomo de hélio na Terra sofra um espalhamento e se transforme num átomo de hélio neutro ${}^4\text{He}$, e o átomo ionizado em Andrômeda absorva o elétron transformando-se também num átomo de hélio neutro ${}^4\text{He}$. Portanto, em $t = 0^+$ dois bósons idênticos aparecem. Consequentemente, pela abordagem tradicional da mecânica quântica, o estado global desses bósons deve obedecer o postulado da simetrização e, assim, “surge” o rótulo (artificial) de “partícula 1” e “partícula 2”, de maneira que o estado global será dado por:

$$|\Psi(t = 0^+)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|\text{He}_E^{(1)}\rangle \otimes |\text{He}_A^{(2)}\rangle + |\text{He}_A^{(1)}\rangle \otimes |\text{He}_E^{(2)}\rangle \right] \quad (1.4)$$

Portanto, enquanto inicialmente cada partícula estava separadamente localizada na Terra e em Andrômeda, após os processos de espalhamento e absorção eletrônica em um dos átomos, o estado da Eq. (1.4) implica na situação esdrúxula que os átomos ${}^4\text{He}$ ocupam simultaneamente estados localizados na Terra e em

Andrômeda. Ou seja, devido aos rótulos artificiais, esses átomos aparentam estar emaranhados mesmo que tenham sido preparados independentemente em regiões separadas espacialmente e nunca terem interagido entre si. Assim, a abordagem tradicional da mecânica quântica para partículas idênticas gera potenciais dificuldades em separar as correlações devidas a rótulos físicos e não físicos.

Da mesma forma, a quantificação do quanto os estados são emaranhados é obtida através da entropia de von Neumann [2], o que gera potenciais dificuldades com a introdução de rótulos artificiais. Por exemplo, para um estado de duas partículas $|\Psi(1,2)\rangle$, define-se o operador estado reduzido $\rho^{(1)}$ correspondente à partícula 1 como sendo traço parcial sobre a partícula 2 do operador de estado $\rho^{(1,2)} = |\Psi(1,2)\rangle\langle\Psi(1,2)|$:

$$\rho^{(1)} = \text{Tr}_2(\rho) \quad (1.5)$$

com a entropia de von Neumann dada por:

$$E = -\text{Tr} \left(\rho^{(1)} \log(\rho^{(1)}) \right) \quad (1.6)$$

Porém, essa operação de traço parcial realizado sobre uma das partículas é um processo feito sobre rótulos artificiais, uma vez que não é possível determinar, para partículas idênticas, qual partícula é qual. Portanto o operador de estado reduzido obtido não possui significado físico, como tem sido argumentado por vários autores [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Um método para lidar com estes problemas foi proposta por Lo Franco e Campagno na Ref. [11]. O método desses autores não utiliza rótulos artificiais e está apoiado na ideia de que um sistema de muitas partículas deve ser descrito “como um todo” através de estados globais (ou integrais), “holísticos”, caracterizados por um conjunto completo de observáveis comutantes. Para quantificar o emaranhamento físico entre partículas idênticas, Lo Franco e Campagno [11] introduziram o “operador de estado reduzido localizado”, o qual permite utilizar as noções de traço parcial e entropia de von Neumann, porém baseadas em operações de medidas localizadas. O emaranhamento seria então entre modos que caracterizam localização espacial. Esse formalismo baseado nos estados holísticos, quando aplicado a partículas não idênticas, reproduz os resultados obtidos com o tratamento usual que emprega rótulos identificando as partículas.

Como mencionado acima, essa dificuldade de caracterizar estados emaranhados de partículas idênticas é exacerbada no caso em que a estrutura interna das partículas não pode ser desprezada. Este problema se apresenta em estudos com

átomos frios, como condensados de Bose-Einstein, e em estudos sobre a estrutura interna de estrelas de nêutrons, ambos assuntos de grande interesse atual. Fica exacerbada porque a função de onda de uma partícula composta não depende somente de uma variável espacial, além da coordenada referente ao centro de massa, há também coordenadas relativas descrevendo a distribuição espacial das partículas constituintes. No caso em que não há superposição espacial entre os constituintes de duas ou mais partículas compostas, somente a coordenada do centro de massa é importante, como é o caso de gases rarefeitos [12, 13, 14, 15] e núcleos atômicos [16, 17].

O método baseado em estados globais holísticos da Ref. [11] é um dentre vários propostos ao longo dos anos—a Ref. [18] é um artigo de revisão dos vários métodos e apresenta uma longa lista de referências sobre o assunto. Apesar da grande variedade de métodos, não há ainda consenso em como tratar o problema do emaranhamento entre partículas idênticas. Nessa dissertação não resolvemos essa questão nem oferecemos um novo método para tratar o problema; nosso objetivo nessa dissertação é estender o formalismo da Ref. [11] para partículas compostas. A razão para a escolha desse método dentre os vários existentes é que ele pode ser reformulado [19] para a linguagem de segunda quantização. O formalismo de segunda quantização é a linguagem mais apropriada para tratar problemas de muitas partículas idênticas [20, 21], pois não utiliza rótulos de identificação das partículas e usa operadores de criação e aniquilação referentes a “modos” de ocupação, como modos de momentum, de energia, etc. Ainda mais, os estados de partículas compostas também podem ser descritos em termos de operadores de criação e aniquilação. No entanto, esses operadores não satisfazem relações de comutação (bósons compostos) ou anticomutação canônicas (férmions compostos). A não canonicidade dessas relações de comutação/anticomutação complica a descrição de sistemas de muitas partículas compostas. Apesar dessa complicação, essa descrição pode ser facilitada através do emprego de operadores de criação/aniquilação para as partículas compostas, sem levar em conta explicitamente os graus de liberdade associados às partículas constituintes, mas que obedecem relações de comutação/anticomutação deformadas, uma q -Heisenberg álgebra, ou álgebra de *quons* [22]. O parâmetro de deformação da álgebra fornece uma medida efetiva dos efeitos dos graus de liberdade da partículas constituintes [12, 13].

A apresentação dessa dissertação está assim distribuída. No próximo capítulo, apresentamos um breve resumo sobre o formalismo tradicional da mecânica quântica para sistema de dois ou mais corpos, tanto na abordagem de estados quanto

na abordagem por operador de estado. Encerramos esse capítulo, revisando o conceito de partículas idênticas e a simetrização dos estados. No Capítulo 3, fazemos uma revisão sobre emaranhamento, sua definição e quantificação através da entropia de von Neumann. Em seguida, no Capítulo 4, discutimos em algum detalhe o desenvolvimento do formalismo baseado em estados holísticos proposto na Ref. [11]. A parte original da dissertação está no Capítulo 5. As duas primeiras seções tratam da re-obtenção dos resultados dos resultados da Ref. [11], e a que segue essas duas trata do formalismo de quons para tratar partículas compostas desenvolvido na Ref. [19]. A seguir, apresentamos nossos resultados analíticos e numéricos. Nossas conclusões e perspectivas aparecem no Capítulo 6. A dissertação ainda apresenta quatro apêndices, nos quais coletamos alguns fatos sobre o operador de estado e derivações mais detalhadas de resultados citados ao longo dos diferentes capítulos.

Capítulo 2

Formalismo de várias partículas

Neste capítulo iremos revisar de maneira sucinta a descrição quântica usual de sistemas de várias partículas. Nossa revisão vai focar naqueles pontos essenciais para o desenvolvimento dessa dissertação. Vamos discutir a descrição via vetores de estado, adequada para estados puros, e via operadores de estado (ou matriz densidade), a qual é mais adequada para estados mistos e emaranhados. A seguir, vamos revisar o método tradicional de se tratar estados de muitas partículas idênticas. Vamos seguir a lógica de apresentação do livro da Ref. [2].

2.1 Vetores de estado

A completa descrição dos possíveis estados de um sistema quântico de uma partícula é dada em um espaço vetorial (de dimensão finita ou infinita) sobre os números complexos, munido com um produto escalar, i.e. um espaço de Hilbert complexo. O espaço do Hilbert e um vetor deste espaço são denotados, respectivamente, por \mathcal{H} e $|\varphi\rangle$. O produto escalar definido neste espaço é denotado por $\langle\phi|\varphi\rangle$, satisfazendo a condição de linearidade

$$\langle\phi|(\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2)\rangle = \alpha\langle\phi|\varphi_1\rangle + \beta\langle\phi|\varphi_2\rangle \quad (2.1)$$

onde α e β são números complexos. O produto escalar também satisfaz a propriedade de conjugação complexa, i.e.

$$\langle\phi|\varphi\rangle = \langle\varphi|\phi\rangle^* \quad (2.2)$$

Consideremos agora duas partículas (a extrapolação para um número arbitrário de partículas é direta). É intuitivo supormos a necessidade de dois espaços de Hilbert distintos, \mathcal{H}_1 , de dimensão N , e \mathcal{H}_2 , de dimensão M . Porém, o espaço de Hilbert de duas partículas não é a simples “junção” dos dois espaços, é necessário definirmos o chamado produto tensorial de dois espaços e de dois vetores para

compreendermos o estado de um sistema quântico de duas partículas.

Sejam os conjuntos $\{|n\rangle\}$ e $\{|m\rangle\}$ bases ortonormais dos espaços \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente. Podemos gerar um novo espaço de Hilbert de dimensão $N \times M$, a partir do produto tensorial entre os espaços de Hilbert, denotado por $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Este espaço possui como base ortonormal o conjunto de todos os pares ordenados $\{(|n\rangle, |m\rangle)\}$, um elemento desta base é denotado por $|n, m\rangle$. A ortonormalidade é obtida pela relação

$$\langle i, j | n, m \rangle = \delta_{in} \delta_{jm} \quad (2.3)$$

Sejam os vetores

$$|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^N a_n |n\rangle \quad \text{e} \quad |\chi\rangle = \sum_{m=1}^M b_m |m\rangle \quad (2.4)$$

O produto tensorial entre eles é definido por:

$$|\varphi \otimes \chi\rangle \doteq |\varphi, \chi\rangle = \sum_{n,m} a_n b_m |n, m\rangle \quad (2.5)$$

Note que o produto tensorial entre dois vetores é “separável”, ou seja, podemos separar, multiplicativamente, as constantes a_n , provenientes do estado $|\varphi\rangle$ do espaço de Hilbert \mathcal{H}_1 , das constantes b_m , provenientes do estado $|\chi\rangle$ do espaço de Hilbert \mathcal{H}_2 . Assim, dado um estado proveniente de um produto tensorial de outros dois, é sempre possível reconstituir os estados individuais que deram origem a ele.

Contudo, nem todo vetor (estado) do espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ pode ser escrito em termos de um produto tensorial entre dois vetores (estados). O estado mais geral possível será dado por:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |n, m\rangle \quad (2.6)$$

com as amplitudes de probabilidade c_{nm} satisfazendo

$$\sum_{n,m} |c_{nm}|^2 = 1 \quad (2.7)$$

Os números complexos c_{nm} não necessariamente podem ser escritos como produtos de outros dois números complexos. Claro que todo número complexo, individualmente, pode ser fatorado como o produto de outros dois, porém, não

necessariamente um desses números complexos multiplica um vetor de uma base em \mathcal{H}_1 e o outro por um vetor de uma base em \mathcal{H}_2 .

Um ponto importante do estado de duas partículas é que identificamos nele todos os possíveis estados de cada partícula, com suas respectivas probabilidades. Por exemplo, seja a amplitude de probabilidade c_{nm} não nula, logo sabemos que existe uma probabilidade $|c_{nm}|^2$ de encontrarmos a partícula um (1) (proveniente de \mathcal{H}_1) no estado $|n\rangle$ e a partícula dois (2) (proveniente de \mathcal{H}_2) no estado $|m\rangle$. Pelo fato do estado de duas partículas ser descrito por meio da base $\{|n, m\rangle\}$, fica implícito que estamos atribuindo um estado para a partícula 1 e outro estado para a partícula 2. Isto, em geral, não causa problemas, pois, afinal, não é estranho pensarmos que tendo duas partículas, uma delas pode estar de “um certo jeito”, enquanto a outra estará de outro. Porém, isso apresentará um problema quando as duas partículas forem idênticas, ou indistinguíveis, a saber: ao rotularmos uma delas como sendo “a partícula 1” e a outra como sendo “a partícula 2”, estamos, de certa forma, violando o pressuposto que elas são “indistinguíveis”. Esta questão de rotulamento de partículas idênticas é central na definição do que significa emaranhamento entre partículas idênticas, como discutiremos mais adiante nesta dissertação.

É necessário agora definir a atuação de operadores nestes estados. Em geral, um operador C atuando em um estado no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ gera um novo estado no mesmo espaço. Este operador tem como elemento de matriz

$$\langle i, j | C | n, m \rangle = C_{ij, nm} \quad (2.8)$$

Desta relação, vemos que um operador geral não atuará separadamente em cada partícula. Porém, é possível construir operadores atuando em cada uma delas (como é esperado, pois é possível construir sistemas onde as partículas não interagem, assim como medir propriedades que concernem a apenas uma delas). Seja A um operador atuando no espaço \mathcal{H}_1 e B outro operador atuando no espaço \mathcal{H}_2 , podemos definir o produto tensorial $A \otimes B$ entre eles através de sua atuação no estado $|\psi\rangle = |\varphi, \chi\rangle$, em que $|\varphi\rangle$ e $|\chi\rangle$ são os estados definidos na Eq. (2.4), da seguinte forma:

$$A \otimes B |\varphi, \chi\rangle = |A\varphi, B\chi\rangle \quad (2.9)$$

Ou seja, o operador A atua apenas no estado da partícula um e o operador B atua apenas no estado da partícula dois. O elemento de matriz deste operador será

dado por:

$$\langle i, j | A \otimes B | n, m \rangle = A_{in} B_{jm} \quad (2.10)$$

onde $A_{in} = \langle i | A | n \rangle$ e $B_{jm} = \langle j | B | m \rangle$. Logo, o produto tensorial entre os operadores é “separável”, em um sentido similar ao da separabilidade dos vetores obtidos a partir de produtos tensoriais.

2.2 Operadores de Estado

O formalismo por meio de operadores de estado, ou como também é conhecido matrizes densidade, é uma ferramenta poderosa para estudar sistemas cujos estados quânticos não são, ou não podem ser, completamente determinados, como misturas estatísticas. Em particular, os operadores de estado são muito úteis para estudar propriedades de emaranhamento entre partículas. Vamos fazer uma breve revisão sobre esse formalismo a seguir.

Seja um certo sistema quântico composto por uma ou mais partículas. Caso tenhamos informação completa sobre este sistema fornecida por um vetor de estado, denominamos esse estado “estado puro”. Porém, se não for possível ter informação completa sobre o estado do sistema, não podemos atribuir um vetor de estado a esse sistema. Uma situação típica em que isso ocorre é quando o sistema de interesse é parte de um sistema maior mas o sistema menor não está isolado dentro do maior, ou seja, há interações entre os constituintes das duas partes—diz-se que as duas partes estão emaranhadas (como será visto no próximo capítulo). Mesmo que o estado do sistema como um todo seja um estado puro, ao focarmos somente nas variáveis referentes ao sistema menor, não temos informação completa sobre ele, perdemos informação e, portanto, o estado do sistema menor não pode ser dado por um estado puro. Numa situação dessas, muitas vezes podemos ter acesso somente à probabilidade p_α que o sistema de interesse seja encontrado em um dado estado $|\phi_\alpha\rangle$; dizemos que o estado desse sistema é uma mistura estatística. O estado de mistura, apesar de não fornecer informação completa sobre o estado, não significa que temos conhecimento zero sobre ele, ainda podemos extrair informação relevante como, por exemplo, valores médios de variáveis dinâmicas. O estado quântico do sistema é, então, descrito por um operador de estado ρ , definido por:

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \langle \phi_{\alpha}| \quad (2.11)$$

com as probabilidades p_α satisfazendo as propriedades:

$$p_\alpha > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{\alpha} p_\alpha = 1 \quad (2.12)$$

A probabilidade p_χ de encontrar o sistema no estado $|\chi\rangle$ é dada por $\text{Tr}(\rho |\chi\rangle \langle\chi|)$. Quando o estado for puro sabemos exatamente o estado no qual o sistema se encontra: $p_i = 1$ e $p_j = 0; \forall j \neq i$. Deste modo o operador de estado reduz-se a

$$\rho = |\phi\rangle \langle\phi| \quad (2.13)$$

sendo $|\phi_i\rangle = |\phi\rangle$.

É importante notar que as probabilidades p_α da mistura estatística na Eq. (2.11) são de natureza distinta das probabilidades, por exemplo, $|c_{nm}|^2$ na decomposição de um estado vetor de estado numa base $\{|n, m\rangle\}$. Enquanto as probabilidades p_α refletem a falta de informação detalhada sobre o sistema, as probabilidades $|c_{nm}|^2$ refletem informações precisas sobre o estado, no sentido que ao se saber todos os valores dos c_{nm} , tem-se informação completa sobre o estado do sistema através do vetor de estado. Por outro lado, mesmo sabendo todos os valores de p_α , ainda não temos informação completa que somente um vetor de estado poderia fornecer.

De posse do operador de estado, é possível calcular os valores esperados de qualquer operador representando uma variável dinâmica. Seja $\langle A \rangle_\alpha$ o valor esperador do operador A no estado $|\phi_\alpha\rangle$ e $\{|n\rangle\}$ uma base ortonormal (assim, $\sum_n |n\rangle \langle n| = \mathbb{1}$). Então, o valor esperado (valor médio) $\langle A \rangle$ será dado por:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle A \rangle_{\alpha} = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | A | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | A \times \mathbb{1} | \phi_{\alpha} \rangle \\ &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | A \left(\sum_m |m\rangle \langle m| \right) | \phi_{\alpha} \rangle = \sum_{\alpha} \sum_m p_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | A | m \rangle \langle m | \phi_{\alpha} \rangle \\ &= \sum_m \langle m | \left(\sum_{\alpha} | \phi_{\alpha} \rangle p_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | \right) A | m \rangle = \sum_m \langle m | \rho A | m \rangle \quad \therefore \langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (2.14) \end{aligned}$$

Portanto, o valor médio de qualquer operador A poderá ser obtido a partir do traço do operador ρA . Esse traço pode ser calculado explicitamente em qualquer base, já que o traço é invariante sob uma transformação de base.

O operador de estado possui algumas propriedades importantes:

1. O operador de estado é Hermitiano

2. Possui traço unitário
3. É um operador positivo
4. Descreve um estado puro, se e somente se, $\rho^2 = \rho$

Essas propriedades são provadas no Apêndice A. A evolução temporal do operador de estado de um sistema quântico fechado é dada por

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)] \quad (2.15)$$

Introduzido o operador de estado podemos, agora, discutir como utilizá-lo no contexto de um sistema de muitos corpos. Como feito anteriormente, iremos descrever um sistema de duas partículas, pois a generalização para um sistema de três ou mais é direta.

A descrição que fizemos até agora foi geral, o operador de estado pode descrever um sistema de um ou vários corpos. Mas podemos nos perguntar, se é possível construir um operador de estado para apenas uma das partículas, a partir do operador geral.

Suponhamos um sistema de dois corpos e imaginemos que queremos medir alguma propriedade física de apenas uma das partículas (digamos uma partícula com subíndice 1) e que dependa apenas dela. Portanto deverá existir um operador C que atuará no espaço $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, contudo como ele age apenas em uma das partículas ele deverá ser descrito como o produto tensorial de outros dois operadores, como visto anteriormente. Em particular ele deverá ter a seguinte forma:

$$C = A \otimes I_2 \quad (2.16)$$

onde I_2 representa o operador identidade atuando na partícula dois, pois medir a propriedade A na partícula um não deverá afetar a partícula dois, pois por construção esta propriedade depende apenas da primeira. Se existir um operador de estado $\rho^{(1)}$ associado à partícula um, ele deverá satisfazer, necessariamente, a seguinte relação (por ser um operador de estado):

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\rho^{(1)} A] \quad (2.17)$$

Assim, sendo $\{|n\rangle\}$ uma base ortonormal do espaço \mathcal{H}_1 e $\{|m\rangle\}$ uma base orto-

normal do espaço \mathcal{H}_2 :

$$\begin{aligned}
 \langle A \otimes I_2 \rangle &= \text{Tr} [(A \otimes I_2)\rho] \\
 &= \sum_{n,m} \langle n, m | [A \otimes I_2]\rho | n, m \rangle = \sum_n \langle n | A \left[\sum_m \langle m | I_2 \rho | m \rangle \right] | n \rangle \\
 &= \sum_n \langle n | A \left[\sum_m \langle m | \rho | m \rangle \right] | n \rangle = \sum_n \langle n | A \rho^{(1)} | n \rangle = \text{Tr}_1(\rho^{(1)} A) \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

onde Tr_1 representa o traço sobre os graus de liberdade da partícula um, chamado de traço parcial. Portanto, o operador de estado para a partícula um, chamado operador de estado reduzido, que satisfaz a relação dada na Eq. (2.17), é dado por:

$$\rho^{(1)} = \text{Tr}_2(\rho) \quad (2.19)$$

onde Tr_2 representa o traço sobre os graus de liberdade da partícula dois. Caso o sistema tivesse mais duas partículas, o operador de estado reduzido da partícula um seria dado calculando o traço parcial sobre todas as outras partículas. Note que realizar o traço parcial no operador de estado equivale a realizar uma série de medidas projetivas no sistema.

Os resultados mostrados nesta seção serão fundamentais para descrevermos o emaranhamento entre partículas que discutiremos nos próximos capítulos.

2.3 Partículas Idênticas

Duas ou mais partículas são idênticas quando todas as suas propriedades intrínsecas são as mesmas, como a sua carga, sua massa e seu spin. Dois elétrons, por exemplo, são idênticos por este motivo. Porém estes podem ser distinguíveis, ou indistinguíveis, por exemplo, podemos ter um elétron na Terra e outro em Andrômeda, eles são idênticos, porém distinguíveis por suas posições, conseguimos atribuir um rótulo de posição a cada uma delas em cada instante de tempo. Porém a distinguibilidade não é uma característica intrínseca de uma partícula, apesar de muitas vezes se usar “idêntico” e “indistinguível” como significando fisicamente a mesma coisa. Ao aproximarmos duas partículas idênticas que eram distinguíveis por estarem em regiões espaciais diferentes, perdemos a capacidade de rotulá-las individualmente; em termos mais técnicos, superpomos as suas funções de onda.

Imaginemos que coloquemos essas duas partículas para interagirem através de

um experimento de espalhamento. Antes da interação se fazer sentir, quando elas estão afastadas, somos capazes de determinar exatamente qual partícula é qual e seus respectivos estados, caso contrário seria impossível realizar a experiência. Após o espalhamento, medimos o estado final de cada uma das partículas. Sabemos que possuímos duas partículas com seus respectivos estados, porém somos incapazes de determinar qual delas era qual antes do espalhamento. Não conseguimos atribuir um rótulo para cada uma que nos permita fazer essa identificação. Vejamos a seguir como é o tratamento usual da mecânica quântica para lidar com esse problema. Vamos novamente seguir a lógica de apresentação do livro da Ref. [2].

Sejam duas partículas idênticas indistinguíveis, uma no estado $|a\rangle$ e a outra no estado $|b\rangle$. Devido à indistinguibilidade, não é possível atribuir qual partícula específica está em qual estado. Tradicionalmente, como vimos anteriormente, o estado deste sistema seria dado pelo produto tensorial $|a \otimes b\rangle$ dos estados individuais, no qual uma das partículas rotuladas de 1 estaria no estado $|a\rangle$, enquanto a outra rotulada de 2 estaria no estado $|b\rangle$. Contudo, estes rótulos são artificiais, uma vez que não somos capazes de atribuir um estado específico para uma partícula específica. Portanto, o estado $|a \otimes b\rangle$ deve ser fisicamente indistinguível do estado $|b \otimes a\rangle$, pois cada uma das partículas poderia estar tanto em um estado quanto no outro. Desta forma, devemos encontrar quais tipos de estados são compatíveis com essa indistinguibilidade.

Como $|a \otimes b\rangle$ e $|b \otimes a\rangle$ devem representar o mesmo estado físico, então eles podem diferenciar-se a menos de uma fase global. Assim:

$$|a \otimes b\rangle = e^{i\theta_{ab}} |b \otimes a\rangle \quad (2.20)$$

$$|b \otimes a\rangle = e^{i\theta_{ba}} |a \otimes b\rangle \quad (2.21)$$

Juntando as expressões obtemos

$$|a \otimes b\rangle = e^{i\theta_{ab}} e^{i\theta_{ba}} |a \otimes b\rangle \quad (2.22)$$

Portanto

$$e^{i(\theta_{ab} + \theta_{ba})} = 1 \quad (2.23)$$

Como uma fase global não altera o estado físico, podemos escrever dois novos

estados $|a \otimes b\rangle'$ e $|b \otimes a\rangle'$, dados por:

$$|a \otimes b\rangle' = e^{-i\theta_{ab}/2} |a \otimes b\rangle \quad (2.24)$$

$$|b \otimes a\rangle' = e^{-i\theta_{ba}/2} |b \otimes a\rangle \quad (2.25)$$

Assim, usando inicialmente a Eq. (2.21) na segunda equação acima e a seguir a Eq. (2.24), obtemos

$$\begin{aligned} |b \otimes a\rangle' &= e^{-i\theta_{ba}/2} |b \otimes a\rangle = e^{-i\theta_{ba}/2} e^{i\theta_{ba}} |a \otimes b\rangle = e^{i\theta_{ba}/2} |a \otimes b\rangle \\ &= e^{i\theta_{ba}/2} e^{i\theta_{ab}/2} |a \otimes b\rangle' = e^{i(\theta_{ab}+\theta_{ba})/2} |a \otimes b\rangle' \\ \therefore |b \otimes a\rangle' &= \pm |a \otimes b\rangle' \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde, na última linha, usamos o fato que

$$e^{i(\theta_{ab}+\theta_{ba})/2} = \pm 1 \quad (2.27)$$

devido ao resultado da Eq. (2.23).

Esta expressão nos mostra que é sempre possível escolher uma fase no qual os estados são simétricos ($|a \otimes b\rangle = +|b \otimes a\rangle$) ou antissimétricos ($|a \otimes b\rangle = -|b \otimes a\rangle$) sob a troca das partículas. O mesmo pode ser dito da amplitude de probabilidade de um estado geral de duas partículas $\langle a \otimes b | \Psi \rangle$:

$$\langle a \otimes b | \Psi \rangle = + \langle b \otimes a | \Psi \rangle \text{ (Simétrica)} \quad (2.28)$$

$$\langle a \otimes b | \Psi \rangle = - \langle b \otimes a | \Psi \rangle \text{ (Antissimétrica)} \quad (2.29)$$

A propriedade de simetria ou antissimetria não é uma característica dos estados $|\Psi\rangle$ ou de $|a \otimes b\rangle$, mas sim do par de partículas tratadas. Para ver isso, vamos assumir que o mesmo par de partículas poderia assumir tanto uma troca simétrica ou Antissimétrica, dependendo do estado no qual se encontram. Seja $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle$ o estado no qual a troca resultará em uma amplitude de probabilidade simétrica e $|\Psi\rangle = |\Gamma\rangle$ o estado no qual a amplitude de probabilidade será antissimétrica com a troca. Desta forma, um estado geral $|\Lambda\rangle$ pode ser dado como uma combinação linear dos estados simétricos ou antissimétricos (assumindo $\langle \Phi | \Gamma \rangle = 0$):

$$|\Lambda\rangle = \langle \Phi | \Lambda \rangle |\Phi\rangle + \langle \Gamma | \Lambda \rangle |\Gamma\rangle \quad (2.30)$$

Assim, podemos calcular a amplitude de probabilidade deste estado:

$$\langle a \otimes b | \Lambda \rangle = \langle \Phi | \Lambda \rangle \langle a \otimes b | \Phi \rangle + \langle \Gamma | \Lambda \rangle \langle a \otimes b | \Gamma \rangle \quad (2.31)$$

Agora calculando a amplitude de probabilidade com a troca:

$$\begin{aligned} \langle b \otimes a | \Lambda \rangle &= \langle \Phi | \Lambda \rangle \langle b \otimes a | \Phi \rangle + \langle \Gamma | \Lambda \rangle \langle b \otimes a | \Gamma \rangle \\ &= \langle \Phi | \Lambda \rangle \langle a \otimes b | \Phi \rangle - \langle \Gamma | \Lambda \rangle \langle a \otimes b | \Gamma \rangle \end{aligned} \quad (2.32)$$

Esta amplitude de probabilidade não é nem simétrica, nem antissimétrica, a menos de dois casos particulares, quando $\langle \Phi | \Lambda \rangle = 0$ ou $\langle \Gamma | \Lambda \rangle = 0$, para qualquer estado $|\Lambda\rangle$. O primeiro caso seria quando apenas estados antissimétricos são permitidos. O segundo caso seria quando apenas estados simétricos são permitidos.

Portanto, existem dois tipos de partículas, aquelas nas quais a amplitude de probabilidade é simétrica, chamados de bósons e aquelas nas quais a amplitude de probabilidade é antissimétrica, chamados de férmions.

Os estados que descrevem essas partículas idênticas indistinguíveis, devem portanto ser simétricos ou antissimétricos. Um método útil (e canonicamente utilizado) para descrever estes estados é utilizar estados rotulados, ou seja, estados de duas partículas que explicitamente atribuam estados individuais a partir de rótulos, respeitando a simetria ou a antissimetria.

Seja $|a_1, b_2\rangle$ um estado de duas partículas que representa uma partícula rotulada de 1 no estado $|a\rangle$ e uma partícula rotulada de 2 no estado $|b\rangle$, $|a_2, b_1\rangle$ um estado de duas partículas que representa a mesma partícula rotulada de 1 no estado $|b\rangle$ e a outra partícula rotulada de 2 no estado $|a\rangle$. O estado dessas duas partículas idênticas será dado por:

$$|a, b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a_1, b_2\rangle \pm |a_2, b_1\rangle) \quad (2.33)$$

onde o sinal positivo será utilizado para bósons, enquanto o sinal negativo para férmions.

É importante ressaltar que esses rótulos não são físicos, pois é impossível atribuir exatamente qual partícula está exatamente em qual estado. Uma consequência importante desse rotulamento está no fato de que estes estados representam estado de mistura, não puro, dizemos então que eles estão “automaticamente” emaranhados. Seja $\{|n_2\rangle\}$ uma base ortonormal da partícula rotulada como 2. Assim, $\langle n_2 | a_1, b_2 \rangle = d_n$ e $\langle n_2 | a_2, b_1 \rangle = c_n$, onde d_n e c_n são números complexos que satis-

fazem: $\sum_n |d_n|^2 = 1$ e $\sum_n |c_n|^2 = 1$. Então, o operador de estado reduzido $\rho^{(1)}$ será dado por:

$$\begin{aligned}\rho^{(1)} &= \sum_n \langle n_2 | \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1, b_2\rangle \pm |a_2, b_1\rangle) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\langle a_1, b_2| \pm \langle a_2, b_1|) \right] |n_2\rangle \\ &= 1 \pm \frac{1}{2} \left[\sum_n (d_n c_n^*) |a_1\rangle \langle b_1| + \sum_n (c_n d_n^*) |b_1\rangle \langle a_1| \right]\end{aligned}\quad (2.34)$$

Calculando $(\rho^{(1)})^2$:

$$\begin{aligned}(\rho^{(1)})^2 &= 1 \pm \sum_n d_n c_n^* |a_1\rangle \langle b_1| \pm \sum_n c_n d_n^* |b_1\rangle \langle a_1| \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{nm} d_m^* d_n c_n^* c_m [|a_1\rangle \langle a_1| + |b_1\rangle \langle b_1|] \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{nm} d_m^* d_n c_n^* c_m [\langle b_1 | a_1 \rangle |a_1\rangle \langle b_1| + \langle a_1 | b_1 \rangle |b_1\rangle \langle a_1|] \\ \therefore (\rho^{(1)})^2 &\neq \rho^{(1)}\end{aligned}\quad (2.35)$$

Como $(\rho^{(1)})^2 \neq \rho^{(1)}$, o estado é de mistura, como havíamos dito. Este emaranhamento é o resultado da simetrização (antissemetrização) das partículas, ou seja, ao tratarmos partículas idênticas do modo usual, obtemos um emaranhamento mesmo se essas partículas não interagirem entre si.

Capítulo 3

Emaranhamento

Neste capítulo iremos tratar sobre o emaranhamento entre partículas. O intuito não será expor os desenvolvimentos históricos do emaranhamento (por mais interessantes que sejam), nem realizar uma análise profunda sobre a teoria do assunto, ou suas aplicações, mas sim discutir, em linhas gerais, o que se entende por emaranhamento e como ele aparece tanto na abordagem de vetores de estado quanto na abordagem por operadores de estado.

O emaranhamento entre duas partículas ocorre quando o estado de uma das partículas está vinculada à outra, ou seja, não é possível saber como uma delas está, sem levar a outra em consideração. Em outras palavras, não é possível atribuir um estado (ou um operador de estado puro) específico para cada partícula.

3.1 Tratamento via vetor de estado

Vimos que o estado mais geral para um sistema de duas partículas é descrito por:

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} c_{nm} |n, m\rangle \quad (3.1)$$

e que um estado descrito pelo produto tensorial dos estados de duas partículas pode ser descrito por:

$$|\varphi, \chi\rangle = \sum_{n,m} a_n b_m |n, m\rangle. \quad (3.2)$$

Dizemos que o estado das duas partículas está emaranhado quando ele não pode ser descrito como um produto tensorial. O estado é emaranhado quando não é possível atribuir um estado específico para cada partícula, pois sendo um produto tensorial poderíamos descrever o estado anterior como:

$$|\varphi, \chi\rangle = \left(\sum_n a_n |n\rangle \right) \otimes \left(\sum_m b_m |m\rangle \right)$$

ou seja, seria possível atribuir o estado $|\varphi\rangle = \sum_n a_n |n\rangle$ para uma partícula e o estado $|\chi\rangle = \sum_m b_m |m\rangle$ para a outra.

Uma consequência importante de um sistema não emaranhado é que se for aplicado um operador atuando em apenas uma das partículas, do tipo $C = A \otimes I_2$, então ele modificará apenas o estado daquela que ele atua, o que não ocorre em um estado emaranhado, pois a atuação do operador afeta o estado globalmente (não podemos nem dizer que afeta o estado da outra partícula, pois o seu estado não está definido individualmente).

Se o estado é emaranhado, ao realizar uma medição em uma das partículas (mas não na outra), ocorrerá o colapso da função de onda desta, logo poderemos atribuir um estado para ela. Consequentemente irá ocorrer também um colapso da função de onda da outra partícula. Mesmo que nenhuma medição seja feita diretamente nesta, seu "estado" será afetado pela medição da outra.

Para compreendermos melhor o que foi dito vamos analisar dois exemplos descritos por um sistema de dois níveis com base ortonormal $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

1. Seja $|\phi\rangle$ um estado de duas partículas dado por:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{2} (|\uparrow, \uparrow\rangle - |\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle - |\downarrow, \downarrow\rangle) \quad (3.3)$$

Este estado pode ser reescrito como:

$$|\phi\rangle = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 + |\downarrow\rangle_1) \right] \otimes \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_2) \right] \quad (3.4)$$

onde os subíndices 1 e 2 remetem-se a estados de uma partícula chamada aqui de 1 e a outra de 2. Note que aqui é possível dizer a qual estado cada uma das partículas se encontra, pois, seja $|\psi_1\rangle$ o estado da partícula 1 e $|\psi_2\rangle$ o estado da partícula 2. Então:

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad \text{e} \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \quad (3.5)$$

Portanto o estado $|\phi\rangle$ não é um estado emaranhado. Note que a partícula 1 tem uma probabilidade meio de estar no estado $|\uparrow\rangle$ e uma probabilidade meio de estar no estado $|\downarrow\rangle$, o mesmo pode ser dito sobre a partícula 2. Caso fizermos uma medição em uma das partículas, isto em nada afeta o estado outra, independentemente do valor obtido.

2. Seja $|\chi\rangle$ o estado dado por:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle) \quad (3.6)$$

É impossível escrevermos este estado como separável. Para mostrar isto, vamos supor que ele poderia ser escrito como:

$$|\chi\rangle = (a|\uparrow\rangle_1 + b|\downarrow\rangle_1) \otimes (c|\uparrow\rangle_2 + d|\downarrow\rangle_2) \quad (3.7)$$

Portanto, teríamos que satisfazer o seguinte sistema de equações:

$$ac = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad ad = 0, \quad bc = 0, \quad bd = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.8)$$

Porém, este sistema não possui solução. Logo, o estado $|\chi\rangle$ é inseparável, portanto emaranhado. Assim, não existe estado da partícula 1, desvinculado da partícula 2. Considere que uma medida foi feita apenas na partícula 1 e foi obtido como resultado, por exemplo, $|\uparrow\rangle$. Consequentemente de acordo o estado $|\chi\rangle$ da Eq. (3.6), a segunda partícula irá colapsar para o estado $|\downarrow\rangle$.

3.2 Tratamento via operador de estado

Podemos, também, tratar o emaranhamento por meio do operador de estado. Seja um sistema de duas partículas, completamente conhecido, ou seja, um estado puro. Portanto, haverá um operador de estado para o sistema dado pela Eq. (2.13). Se quisermos saber o operador de estado de uma das partículas, basta calcularmos o traço parcial, ou seja, encontrar o operador de estado reduzido. Caso ele não represente um estado puro, o sistema será emaranhado, o que é evidente, pois estando emaranhadas não é possível atribuir um estado determinado para uma partícula individualmente. Caso represente um estado puro, então as partículas não estão emaranhadas, pois é possível estabelecer um estado determinado para cada uma delas.

Para mostrar o que foi dito, vamos primeiro calcular o operador de estado reduzido para um sistema não emaranhado. Seja o estado

$$|\psi\rangle = |\varphi, \chi\rangle = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1} b_{n_2} |n_1, n_2\rangle \quad (3.9)$$

O operador de estado correspondente será dado por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \left(\sum_{n_1, n_2} a_{n_1} b_{n_2} |n_1, n_2\rangle \right) \left(\sum_{m_1, m_2} a_{m_1}^* b_{m_2}^* \langle m_1, m_2| \right) \quad (3.10)$$

O operador de estado reduzido correspondente à partícula 1 é obtido tomando o traço sobre a partícula 2:

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \text{Tr}_2(\rho) = \sum_{k_2} \langle k_2| \left(\sum_{n_1, n_2} a_{n_1} b_{n_2} |n_1, n_2\rangle \right) \left(\sum_{m_1, m_2} a_{m_1}^* b_{m_2}^* \langle m_1, m_2| \right) |k_2\rangle \\ &= \left(\sum_{k_2} |b_{k_2}|^2 \right) \left(\sum_{n_1} a_{n_1} |n_1\rangle \right) \left(\sum_{m_1} a_{m_1}^* \langle m_1| \right) = |\varphi\rangle\langle\varphi| \end{aligned} \quad (3.11)$$

Claramente, este operador representa um estado puro da primeira partícula. O mesmo poderia ser obtido realizando o traço parcial sobre a primeira.

Vamos agora calcular o operador de estado reduzido para o caso geral. O estado puro mais geral para um sistema de duas partículas pode ser escrito como:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_1, n_2} c_{n_1 n_2} |n_1, n_2\rangle \quad (3.12)$$

O operador de estado correspondente a este vetor de estado é dado por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \left(\sum_{n_1, n_2} c_{n_1 n_2} |n_1, n_2\rangle \right) \left(\sum_{m_1, m_2} c_{m_1 m_2}^* \langle m_1, m_2| \right) \quad (3.13)$$

O operador de estado reduzido correspondente à partícula 1 é obtido tomando o traço sobre a partícula 2:

$$\begin{aligned} \rho^{(1)} &= \text{Tr}_2(\rho) = \sum_{k_2} \langle k_2| \left(\sum_{n_1, n_2} c_{n_1 n_2} |n_1, n_2\rangle \right) \left(\sum_{m_1, m_2} c_{m_1 m_2}^* \langle m_1, m_2| \right) |k_2\rangle \\ &= \sum_{k_2} \sum_{n_1, m_1} c_{n_1 k_2} c_{m_1 k_2}^* |n_1\rangle \langle m_1| \end{aligned} \quad (3.14)$$

Claramente, este operador de estado não representa um estado puro.

Para compreendermos melhor isso vamos analisar dois exemplos, similares aos que tratamos anteriormente neste capítulo.

1. Seja o estado $|\phi\rangle$ dado na Eq. (3.3). O operador de estado será dado por:

$$\rho = \frac{1}{4} \left(|\uparrow, \uparrow\rangle - |\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle - |\downarrow, \downarrow\rangle \right) \left(\langle\uparrow, \uparrow| - \langle\uparrow, \downarrow| + \langle\downarrow, \uparrow| - \langle\downarrow, \downarrow| \right) \quad (3.15)$$

Calculando o traço parcial sobre a segunda partícula, obtemos:

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2} \left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle \right) \left(\langle\uparrow| + \langle\downarrow| \right) = |\psi_1\rangle \langle\psi_1| \quad (3.16)$$

o que representa um estado puro.

2. Seja o estado $|\chi\rangle$ dado na Eq. (3.6). O correspondente operador de estado é dado por:

$$\begin{aligned} \rho &= |\chi\rangle \langle\chi| = \frac{1}{2} \left(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle \right) \left(\langle\uparrow, \downarrow| + \langle\downarrow, \uparrow| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(|\uparrow, \downarrow\rangle \langle\uparrow, \downarrow| + |\uparrow, \downarrow\rangle \langle\downarrow, \uparrow| + |\downarrow, \uparrow\rangle \langle\uparrow, \downarrow| + |\downarrow, \uparrow\rangle \langle\downarrow, \uparrow| \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Calculando o traço parcial sobre a segunda partícula, obtemos:

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + \frac{1}{2} |\downarrow\rangle \langle\downarrow| \quad (3.18)$$

o que caracteriza o operador de estado de uma mistura estatística. Neste caso, o estado da partícula é constituído pela superposição de um estado spin “pra cima” com probabilidade 1/2 e de spin “pra baixo” com probabilidade 1/2. Vale aqui lembrar, conforme discussão no parágrafo logo abaixo da Eq. (2.13), que essa probabilidade 1/2 na mistura estatística não é da mesma natureza que a probabilidade 1/2 de encontrarmos “spin pra cima” no estado $|\psi_1\rangle$ da Eq. (3.5). Neste caso, a mistura estatística reflete nossa ignorância sobre o spin da partícula 1 porque ela estava emaranhada com a partícula 2.

3.3 Entropia de von Neumann

Uma maneira de quantificar o emaranhamento entre duas (ou mais) partículas é através da entropia de von Neumann:

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho) \quad (3.19)$$

onde ρ é o operador de estado do sistema e “log” é o logarítmo na base dois, i.e. $\log = \log_2$ —é comum também tomar o log como sendo o logaritmo neperiano (ou natural) $\ln = \log_e$; nesta dissertação vamos empregar a base dois.

Se λ_i são auto valores do operador de estado, então a entropia de von Neumann é dada pela soma (estamos lidando com espaços de Hilbert de dimensão finita):

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (3.20)$$

Como vimos no capítulo anterior, ρ é um operador positivo; portanto, seus autovalores são positivos:

$$\lambda_i \geq 0 \quad (3.21)$$

Também vimos que $\text{Tr } \rho = 1$; então:

$$\sum_i \lambda_i = 1 \quad (3.22)$$

Tomando esses dois resultados juntos, temos que

$$0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad (3.23)$$

Portanto, a entropia de von Neumann nunca é negativa.

Todo estado puro tem a entropia de von Neumann nula. Para provar isto vamos encontrar os autovalores do operador de estado puro. Sejam β_i e $|i\rangle$ autovalores e autovetores do operador de estado puro:

$$\rho |i\rangle = \beta_i |i\rangle \quad (3.24)$$

Então, usando o fato que para um estado puro $\rho^2 = \rho$, temos que:

$$\rho^2 |i\rangle = \beta_i \rho |i\rangle = \beta_i^2 |i\rangle \quad \therefore \beta_i = \beta_i^2 \quad (3.25)$$

Assim, os autovalores do operador de estado puro devem ser iguais a um ou zero, $\beta_i = 0, 1$. Logo, todos os termos na soma que define a entropia de von Neumann na Eq. (3.20) são nulos: $1 \log 1 = 0$ e $0 \log 0 = 0$. Portanto, quando temos informação completa sobre o estado de um sistema (estado puro), a entropia de von Neumann é nula.

Suponhamos um vetor de estado com todos os p_α iguais, $p_\alpha = p$. Neste caso, temos informação mínima sobre o sistema, já que o sistema pode ser encontrado

em qualquer estado $|\phi_\alpha\rangle$ com igual probabilidade. Neste caso:

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle\langle\phi_{\alpha}| = p \sum_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle\langle\phi_{\alpha}| = p I_{N \times N} \quad (3.26)$$

$$\text{Tr } \rho = 1 \Rightarrow p N = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{N} \quad (3.27)$$

$$\rho = \frac{I_{N \times N}}{N} \quad (3.28)$$

e a entropia de von Neumann é dada por:

$$S(\rho) = \log N \quad (3.29)$$

Portanto, informação mínima sobre um estado de mistura leva a entropia máxima.

Em suma, a entropia de von Neumann quantifica o conteúdo de informação de uma mistura estatística. Em particular, ela pode ser empregada para quantificar o emaranhamento entre duas partes de um sistema descrito por um estado puro. Suponhamos que particionamos um sistema num estado puro em uma “parte 1” e uma “parte 2”. Definimos a *entropia de emaranhamento*, ou simplesmente *emaranhamento* E entre uma parte e outra como sendo a entropia de von Neumann correspondente ao operador de estado reduzido de uma das partes. Mais precisamente:

$$E = -\text{Tr} \left(\rho^{(1)} \log \rho^{(1)} \right) \quad \text{com} \quad \rho^{(1)} = \text{Tr}_2 \rho \quad (3.30)$$

onde ρ é o operador de estado do sistema completo. A entropia de emaranhamento entre partes de sistema descritos por misturas estatísticas também pode ser definido [23]; como não vamos tratar sistemas deste tipo, não vamos discutir esses casos.

Um exemplo elementar da quantificação do emaranhamento entre duas partes de um estado puro é o de dois spins em que o operador de estado reduzido é dado pela Eq. (3.18), o qual foi obtido traçando sobre um dos spins do operador de estado puro correspondente ao vetor de estado da Eq. (3.6). Escrito em sua forma matricial na base de spins $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, aquele operador de estado reduzido é dado por:

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Esta matriz tem como autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. Portanto, o emaranhamento

deste sistema será dado por:

$$E = - \sum_{i=1}^2 \lambda_i \log \lambda_i = - \left(\frac{1}{2} \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \right) = \log 2 = 1$$

Esse sistema é máximamente emaranhado, o que era de se esperar, uma vez que todos os estados da mistura eram equiprováveis.

Um outro exemplo, ainda elementar mas bastante instrutivo, envolve o seguinte estado de dois spins [24]:

$$|\chi_\theta\rangle = \cos \theta |\uparrow, \downarrow\rangle + \sin \theta |\downarrow, \uparrow\rangle \quad \text{com} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.32)$$

Traçando sobre um dos spins, obtemos para a entropia de emaranhamento

$$E_\theta = - \cos^2 \theta \log (\cos^2 \theta) - \sin^2 \theta \log (\sin^2 \theta) \quad (3.33)$$

Claramente, para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, o emaranhamento é nulo; neste caso o estado $|\chi_\theta\rangle$ é um estado produto o correspondente operador de estado reduzido representa um estado puro. O estado maximamente emaranhado, para o qual $dE_\theta/d\theta = 0$, corresponde a $\theta = \pi/4$. Para este valor de θ , temos o caso do exemplo anterior.

Capítulo 4

Emaranhamento de partículas idênticas

No capítulo anterior vimos que utilizar o postulado da simetrização dos estados para partículas idênticas resulta automaticamente em um estado emaranhado. Como mencionado lá, a primeira vista isso pode não parecer um problema, pois o emaranhamento é uma medida da “incerteza” do nosso sistema e uma vez que estamos lidando com partículas idênticas, temos uma incerteza intrínseca à natureza das partículas. Contudo, a incerteza nesses casos não é diretamente associada à identidade das partículas, mas sim a sua indistinguibilidade. Ora, uma vez separadas as partículas (em termos técnicos não ocorrer sobreposição de suas funções de onda), somos capazes de distingui-las. Portanto aquela incerteza do meu sistema não existe mais, conseqüentemente não teríamos mais esse tipo de emaranhamento.

Se tomarmos, portanto, o caminho tradicional da simetrização, uma vez que essas partículas sobrepuseram as suas funções de onda, necessariamente os estados que descrevem essas partículas devem ser simétricos, portanto emaranhados. E mesmo que suas funções de onda deixem de se sobrepor o estado que descreve essas partículas continuará sendo emaranhado devido a simetrização.

Outro problema associado à simetrização dos estados é a necessidade de utilizar rótulos não físicos. Um típico estado simétrico seria da forma $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1, b_2\rangle + |b_1, a_2\rangle)$ que representa a partícula “1” no estado $|a\rangle$ ou $|b\rangle$, o mesmo para a partícula “2”. Contudo não é possível determinar esse rótulo de “1” e “2” para as partículas uma vez que elas são indistinguíveis. Portanto a descrição do sistema de partículas compostas lança mão de um artifício não físico para descrever as partículas.

Para resolver esses problemas foi desenvolvido na Ref. [11] um método que lida com partículas indistinguíveis sem a necessidade de rótulos artificiais e que propõem um novo modo para investigar o emaranhamento de partículas idênticas,

contudo sem diferir muito das técnicas tradicionais expostas anteriormente neste trabalho, ou seja, ainda utilizam as noções padrões de operador de estado e da entropia de von Neumann.

Iremos no restante de capítulo discutir, com algum detalhe, esse novo método.

4.1 Estado Holístico

Seja $|\phi, \psi\rangle$ um estado “holístico” de duas partículas idênticas que representa uma partícula no estado normalizado $|\phi\rangle$ e outra em $|\psi\rangle$, contudo não podemos determinar qual delas está em qual estado, pois, sendo idênticas, é impossível atribuir um “rótulo” (label) para elas.

Queremos calcular produtos internos (amplitudes de probabilidade) destes estados holísticos a partir de produtos internos de estados de uma partícula (como usualmente é feito em estados de duas partículas convencionais). Assim, definimos este produto interno como sendo:

$$\langle \varphi, \zeta | \phi, \psi \rangle = \langle \varphi | \phi \rangle \langle \zeta | \psi \rangle + \eta \langle \varphi | \psi \rangle \langle \zeta | \phi \rangle \quad (4.1)$$

onde $\eta^2 = 1$. Como este estado holístico não possui rótulos, então trocar a ordem dos estados da nossa notação não pode mudá-lo fisicamente. Por isso, é necessário descrever o estado $|\psi, \phi\rangle$ em termos de $|\phi, \psi\rangle$. Assim:

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \zeta | \psi, \phi \rangle &= \langle \varphi | \psi \rangle \langle \zeta | \phi \rangle + \eta \langle \varphi | \phi \rangle \langle \zeta | \psi \rangle \\ &= \eta (\langle \varphi | \phi \rangle \langle \zeta | \psi \rangle + \eta \langle \varphi | \psi \rangle \langle \zeta | \phi \rangle) \\ &= \eta \langle \varphi, \zeta | \phi, \psi \rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

e, portanto:

$$|\phi, \psi\rangle = \eta |\psi, \phi\rangle \quad (4.3)$$

Apesar da inversão não nos fornecer estados idênticos, como $\eta^2 = 1$, então o termo η funciona de modo similar a uma fase global, ou seja, sem alterar o significado físico do sistema.

Existem dois tipos de partículas idênticas, os bósons e os férmions. A probabilidade de encontrar dois férmions no mesmo estado físico é nula, por outro lado, a probabilidade de encontrar dois bósons no mesmo estado é máxima. Isso nos

motiva a calcular o produto interno $\langle \varphi, \varphi | \psi, \phi \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \varphi | \psi, \phi \rangle &= \langle \varphi | \psi \rangle \langle \varphi | \phi \rangle + \eta \langle \varphi | \phi \rangle \langle \varphi | \psi \rangle \\ &= (1 + \eta) \langle \varphi | \psi \rangle \langle \varphi | \phi \rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

Assim, se $\eta = -1$, $\langle \varphi, \varphi | \psi, \phi \rangle = 0$: o que corresponde aos férmions. Por outro lado, se $\eta = 1$, $\langle \varphi, \varphi | \psi, \phi \rangle = 2 \langle \varphi | \psi \rangle \langle \varphi | \phi \rangle$: o que corresponde aos bósons.

Pelo resultado bosônico acima, se nota que o estado holístico definido anteriormente (em conjunto com seu produto interno) não é normalizado, portanto precisamos encontrar um estado normalizado, a partir do meu estado original. Este procedimento também é comum ao método usual de tratamento de partículas idênticas, por simetrização ou antissimetrização dos estados.

Seja $|\Phi\rangle$ um estado holístico normalizado, então: $\langle \Phi | \Phi \rangle = 1$. Seja também N uma constante de normalização, assim $|\Phi\rangle = N |\phi, \psi\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \Phi | \Phi \rangle &= N^2 \langle \phi, \psi | \phi, \psi \rangle = N^2 (\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle + \eta \langle \phi | \psi \rangle \langle \psi | \phi \rangle) \\ &= N^2 (1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2) \quad \therefore N = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Portanto o estado holístico normalizado de duas partículas será dado por:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2}} |\phi, \psi\rangle \quad (4.6)$$

Vamos definir um operador de uma partícula atuando em um estado holístico. Esta atuação não é trivial, pois sendo indistinguíveis não sabemos em qual partícula exatamente que estamos atuando o operador, assim não podemos defini-lo a partir de um produto tensorial (como usualmente é feito). De qualquer modo, é intuitivo imaginar que um operador irá atuar em uma partícula ou em outra. De maneira um pouco mais técnica, ele irá atuar em um estado ou em outro estado. Assim definimos o operador $A^{(1)}$ atuando em $|\phi, \psi\rangle$ como sendo:

$$A^{(1)} |\phi, \psi\rangle = |A^{(1)} \phi, \psi\rangle + |\phi, A^{(1)} \psi\rangle \quad (4.7)$$

Podemos escrever o operador $A^{(1)}$ a partir de estados de uma partícula, como:

$$A^{(1)} = \sum_{j,k} a_{j,k} |\varphi_j\rangle \langle \varphi_k| \quad (4.8)$$

onde $\{|\varphi_k\rangle\}$ representa uma base ortonormal do estado de uma partícula. Assim:

$$\begin{aligned}
A^{(1)}|\phi, \psi\rangle &= \left[\sum_{j,k} a_{j,k} |\varphi_j\rangle \langle \varphi_k| \right] |\phi, \psi\rangle \\
&= \left[\sum_{j,k} a_{j,k} \langle \varphi_k|\phi\rangle \right] |\varphi_j, \psi\rangle + \left[\sum_{j,k} a_{j,k} \langle \varphi_k|\psi\rangle \right] |\phi, \varphi_j\rangle \\
&= \sum_{j,k} a_{j,k} |\varphi_j, \langle \varphi_k|\phi\rangle |\psi\rangle + \eta \langle \varphi_k|\psi\rangle |\phi\rangle
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Esse resultado nos motiva a analisar o operador de projeção de uma partícula $|\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$ sobre um estado holístico:

$$[|\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|] |\phi, \psi\rangle = |\varphi_k, \langle \varphi_k|\phi\rangle |\psi\rangle + \eta \langle \varphi_k|\psi\rangle |\phi\rangle \tag{4.10}$$

A atuação do operador de projeção sobre um estado holístico gera uma partícula no estado projetado $|\varphi_k\rangle$ e outra partícula no estado superposto $\langle \varphi_k|\phi\rangle |\psi\rangle + \eta \langle \varphi_k|\psi\rangle |\phi\rangle$. Portanto, podemos definir um produto interno para espaços de diferentes dimensões.

$$\langle \varphi_k | \bullet | \phi, \psi \rangle = \langle \varphi_k | \phi \rangle |\psi\rangle + \eta \langle \varphi_k | \psi \rangle |\phi\rangle \tag{4.11}$$

Esse produto interno será útil a seguir, pois queremos calcular operadores de estados reduzidos, que, em geral, são obtidos por produtos internos dessa natureza.

Seja $|\tilde{\chi}_k\rangle = \langle \varphi_k | \bullet | \Phi \rangle$, um estado de uma partícula projetado. Queremos encontrar um estado normalizado, $|\chi_k\rangle$, a partir dele:

$$\langle \tilde{\chi}_k | \tilde{\chi}_k \rangle = \langle \Phi | \bullet | \varphi_k \rangle \langle \varphi_k | \bullet | \Phi \rangle = \langle |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k| \rangle_{\Phi} = \langle \Pi_k^{(1)} \rangle_{\Phi} \tag{4.12}$$

onde $\Pi_k^{(1)} = |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$ é o operador de projeção de uma partícula. Portanto o estado normalizado $|\chi_k\rangle$ será dado por:

$$|\chi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle \Pi_k^{(1)} \rangle_{\Phi}}} \langle \varphi_k | \bullet | \Phi \rangle \tag{4.13}$$

Queremos calcular a probabilidade (p_k) de encontrar uma partícula no estado $|\chi_k\rangle$ após projeção $\Pi_k^{(1)}$ no estado $|\Phi\rangle$. Para isso, será útil calcular primeiro o valor esperado do operador identidade de uma partícula, $I^{(1)} = \sum_k |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$, em relação

ao estado holístico normalizado, $|\Phi\rangle$:

$$\begin{aligned} I^{(1)} |\Phi\rangle &= I^{(1)} \frac{1}{\sqrt{1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2}} |\phi, \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2}} [|I^{(1)} \phi, \psi\rangle + |\phi, I^{(1)} \psi\rangle] \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2}} [|\phi, \psi\rangle + |\phi, \psi\rangle] = 2 |\Phi\rangle \end{aligned} \quad (4.14)$$

Assim, o valor esperado $\langle I^{(1)} \rangle_{\Phi}$, será dado por:

$$\langle I^{(1)} \rangle_{\Phi} = 2 \quad (4.15)$$

Note que a aplicação do operador identidade de uma partícula atuando em um estado holístico funciona de modo similar a um "operador número". Isso ocorre devido ao modo como ocorre a atuação do operador de uma partícula em um estado holístico.

Usualmente em Mecânica Quântica, ao calcularmos a norma da projeção em um estado obtemos a probabilidade de encontrar o meu estado original no estado projetado. Portanto, ao somarmos as probabilidades das projeções de todos os estados de uma base ortonormal devemos encontrar o valor um. Ou seja, é impossível encontrar (após uma medida) o nosso estado original em algum estado fora da base. Por isso, vamos calcular a soma das normas das projeções, $\langle \Pi_k^{(1)} \rangle_{\Phi}$.

$$\sum_k \langle \Pi_k^{(1)} \rangle_{\Phi} = \langle I^{(1)} \rangle_{\Phi} = 2 \quad (4.16)$$

Portanto, de modo a manter a interpretação probabilística de norma unitária, a probabilidade p_k de encontrar uma partícula no estado $|\chi_k\rangle$ será dada por:

$$p_k = \frac{\langle \Pi_k^{(1)} \rangle_{\Phi}}{2} \quad (4.17)$$

Como $\{|\chi_k\rangle\}$ é um conjunto de estados possíveis de encontrar uma partícula, com probabilidade p_k , então pela definição do operador de estado, podemos encontrar o Operador de Estado reduzido pela expressão:

$$\rho^{(1)} = \sum_k |\chi_k\rangle p_k \langle \chi_k| \quad (4.18)$$

Vamos mostrar que este operador de estado reduzido é concordante com o

traço parcial, comumente utilizado:

$$\begin{aligned}
 \rho^{(1)} &= \sum_k |\chi_k\rangle p_k \langle \chi_k| \\
 &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{\langle \Pi_k^{(1)} \rangle_\Phi}} \langle \varphi_k | \bullet | \Phi \rangle \left[\frac{\langle \Pi_k^{(1)} \rangle_\Phi}{2} \right] \frac{1}{\sqrt{\langle \Pi_k^{(1)} \rangle_\Phi}} \langle \Phi | \bullet | \varphi_k \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_k \langle \varphi_k | \bullet | \Phi \rangle \langle \Phi | \bullet | \varphi_k \rangle = \frac{1}{2} \sum_k \langle \varphi_k | \bullet \rho \bullet | \varphi_k \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr}^{(1)} \rho \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

onde $\rho = |\Phi\rangle \langle \Phi|$ é o operador de estado puro original. O operador de estado reduzido difere do tradicional pelo fator $\frac{1}{2}$, responsável pela normalização do operador. Para provar a normalização é necessário mostrar que $\text{Tr} \rho^{(1)} = 1$. Para isso, é útil, primeiramente, explicitarmos o operador de estado reduzido em termos do estado holístico original

$$\begin{aligned}
 \rho^{(1)} &= \frac{1}{2} \text{Tr}^{(1)} \rho = \frac{1}{2} \sum_k \langle \varphi_k | \bullet | \Phi \rangle \langle \Phi | \bullet | \varphi_k \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \sum_k \langle \varphi_k | \bullet \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2}} |\phi, \psi\rangle \right] \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2}} \langle \phi, \psi | \right] \bullet | \varphi_k \rangle \\
 &= \frac{1}{N} \sum_k [\langle \varphi_k | \phi \rangle | \psi \rangle + \eta \langle \varphi_k | \psi \rangle | \phi \rangle] [\langle \psi | \langle \phi | \varphi_k \rangle + \eta \langle \phi | \langle \psi | \varphi_k \rangle] \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Para facilitar a notação, tomamos $N = 2(1 + \eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2)$. A prova da unitariedade do traço do operador de estado reduzido é a seguinte:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \rho^{(1)} &= \sum_n \langle \varphi_n | \rho^{(1)} | \varphi_n \rangle \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{nk} \langle \varphi_n | [\langle \varphi_k | \phi \rangle | \psi \rangle + \eta \langle \varphi_k | \psi \rangle | \phi \rangle] [\langle \psi | \langle \phi | \varphi_k \rangle + \eta \langle \phi | \langle \psi | \varphi_k \rangle] | \varphi_n \rangle \\
 &= \frac{1}{N} [\langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle + \eta \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle + \eta \langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle + \langle \phi | \phi \rangle \langle \psi | \psi \rangle] \\
 &= \frac{1}{N} [2 + 2\eta |\langle \phi | \psi \rangle|^2] \quad \therefore \text{Tr} \rho^{(1)} = 1 \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Com isso, fica construído um formalismo para partículas idênticas que não requer o uso de rótulos artificiais e também não utiliza o postulado da simetrização dos estados. Ele lança mão apenas de um estado holístico que me diz os possíveis estados das partículas mas sem dizer qual está em qual. Foi definido para este

estado holístico um produto interno diferente do usual, e atuação de um operador de uma partícula.

Por fim, foi descrito como o formalismo de Campagno e Lo Franco realiza a projeção desse estado no estado de uma partícula e como encontrar o operador de estado reduzido fazendo o traço parcial sobre todos os graus de liberdade de uma partícula. Importante ressaltar aqui que o traço parcial foi realizado sobre uma partícula mas não foi necessário especificar sobre qual partícula foi "integrada", uma vez que a especificação da partícula seria algo artificial devido a sua indistinguibilidade.

4.2 Emaranhamento e Operador de Estado Reduzido Localizado

O traço parcial equivale a realizar medidas projetivas em uma partícula sobre o sistema composto, logo está relacionado com operações de fato físicas, não apenas "matemáticas", isso corresponde a medir uma partícula sem registrar o resultado [11]. Acontece que em um sistema de partículas não idênticas sabemos, sem ambiguidade, em qual partícula estamos realizando estas medidas. Contudo, ao lidarmos com partículas idênticas nunca sabemos em quem exatamente estamos realizando estas medidas. Além disso, emaranhamento é um fenômeno fortemente influenciado pela medida realizada, por exemplo o seu local [11]. Por isso, o traço parcial realizado sobre todos os graus de liberdade de uma partícula não pode representar o estado de uma partícula idêntica. Em vista disso, Lo Franco e Compagno [11] criaram uma definição da medida sobre uma partícula que leva em conta a localidade, assim como um novo modo de calcular um "traço parcial" para encontrar o real emaranhamento entre as partículas a partir de medições locais distintas.

Definição 1 *Uma medida local de uma partícula para sistemas de partículas idênticas é a medida de uma propriedade de uma partícula realizada em uma região localizada do espaço M (sítio ou modo espacial) onde a partícula possui uma probabilidade não nula de ser encontrada.*

Assim o emaranhamento E de um estado puro de duas partículas idênticas será quantificado com a entropia de von Neumann (como usualmente é feito), a partir da matriz de estado reduzida obtida por um traço parcial localizado em

uma região do espaço M . Ou seja, o operador de estado reduzido não mais será obtido pelo traço parcial sobre todos os graus de liberdade de uma partícula, mas os graus de liberdade espaciais serão limitados a uma região na qual poderá ser realizada uma medida sobre uma única partícula. Mais formalmente, seja $B_M^{(1)}$ um subespaço de estados de uma partícula localizada em uma região M , seja também o estado puro de duas partículas $|\Phi\rangle$, não necessariamente normalizado. O operador de estado reduzido localizado na região M , $\rho_M^{(1)}$, será dado por:

$$\rho_M^{(1)} = \frac{1}{M} \text{Tr}^{(1)} |\Phi\rangle \langle\Phi| \quad (4.22)$$

onde M é uma constante de normalização obtida pela condição: $\text{Tr}^{(1)} \rho_M^{(1)} = 1$, sendo $\text{Tr}^{(1)}$ o traço feito sobre a base completa $B^{(1)}$. Assim, o emaranhamento encontrado na região M será obtido pela entropia de von Neumann dada por:

$$E_M = -\text{Tr} \left(\rho_M^{(1)} \log_2 \rho_M^{(1)} \right) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (4.23)$$

onde λ_i são os autovalores do operador de estado reduzido localizado.

Para compreender melhor o uso e a vantagem desta abordagem vamos estudar a aplicação feita por Campagno e Lo Franco na Ref. [1].

4.3 Partículas Idênticas em um Poço Assimétrico

Campagno e Lo Franco consideram o caso de duas partículas idênticas, podendo ser bosônicas ou fermiônicas, em um poço de potencial assimétrico, no qual uma delas está localizada em um determinado poço do potencial, chamado de esquerda (Left), enquanto a outra está em um outro poço, chamado de direita (Right), com a diferença de que pode acontecer o tunelamento do poço da direita para a esquerda. Além disso, essas partículas também possuem graus de liberdade “internos”, ou “pseudo-spin”, que denotamos \pm . Escolhemos essa notação ao invés das tradicionais setas \uparrow e \downarrow pois não estamos falando de spin, mas sim de graus de liberdade de dois níveis, como por exemplo isospin, sabor, ou qualquer outro grau de liberdade interno.

A partícula localizada no poço da esquerda possui estado, sem levar em conta o seu pseudo-spin, $|L\rangle$, que representa o estado da região do poço da esquerda. O estado do poço da direita é dado por $|R\rangle$, com $\langle L|R\rangle = 0$. A outra partícula (podendo tunelar entre os poços), possui o estado, sem levar em conta o seu

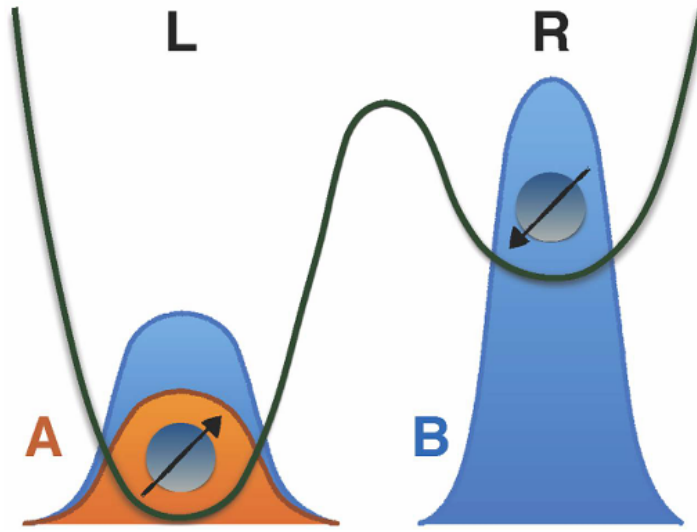


Figura 4.1: Poço assimétrico representando uma partícula no estado fundamental (laranja) $|L\rangle$ do poço da esquerda e uma partícula em um estado (azul) $|B\rangle$ em uma combinação do estado $|L\rangle$ e estado localizado no poço da direita $|R\rangle$. Imagem retirada da Ref. [11]

pseudo-spin, $|B\rangle = \chi |L\rangle + \sqrt{1 - \chi^2} |R\rangle$, onde $\chi = \langle L|R\rangle \in [0, 1]$ é a amplitude de probabilidade, considerada aqui real, de ocorrer o tunelamento entre os poços. É interessante também estudar o caso no qual emaranhamento não ocorre apenas nos graus de liberdade espaciais, mas também de graus de liberdade \pm . Assim o estado holístico $|\Psi\rangle$ das duas partículas será dado por:

$$|\Psi\rangle = a |L+, B-\rangle + be^{i\theta} |L-, B+\rangle \quad (4.24)$$

onde a é um número real positivo e $b = \sqrt{1 - a^2}$. Podemos rescrever este estado a partir dos estados dos poços da direita e da esquerda (uma vez que queremos realizar traços parciais localizados), obtendo assim:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & \chi(a + \eta be^{i\theta}) |L+, L-\rangle + a\sqrt{1 - \chi^2} |L+, R-\rangle \\ & + be^{i\theta}\sqrt{1 - \chi^2} |L-, R+\rangle \end{aligned} \quad (4.25)$$

Primeiramente, vamos analisar o emaranhamento dessas duas partículas, se uma medição for realizada no poço da esquerda. Para isso devemos realizar o traço parcial localizado no poço esquerdo. Assim, o operador de estado reduzido

localizado na esquerda, ρ_L , é dado por:

$$\rho_L = \frac{1}{M} [\langle L+ | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L+ \rangle + \langle L- | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L- \rangle] \quad (4.26)$$

onde M é uma constante de normalização. Escrito na forma matricial, ρ_L é dado por:

$$\rho_L = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_5 \\ c_4^* & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_5^* & 0 & c_3 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde

$$\begin{aligned} c_1 &= \chi^2(1 + 2\eta ab \cos \theta) \\ c_2 &= b^2(1 - \chi^2) \\ c_3 &= a^2(1 - \chi^2) \\ c_4 &= \eta\chi\sqrt{1 - \chi^2}(a + \eta be^{i\theta})be^{-i\theta} \\ c_5 &= \chi\sqrt{1 - \chi^2}(a + \eta be^{i\theta})a \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$M = 2c_1 + c_2 + c_3 \quad (4.29)$$

Os cálculos deste resultado foram explicitados no Apêndice B. Este operador possui dois autovalores não nulos

$$\lambda_1 = \frac{a^2 + \chi^2(b^2 + 2\eta ab \cos \theta)}{1 + \chi^2(1 + 4\eta ab \cos \theta)}, \quad \lambda_2 = 1 - \lambda_1 \quad (4.30)$$

A quantificação do emaranhamento é, então, dada pela entropia de von Neumann, definida pela Eq. (4.23).

Na figura 4.2 plotamos o emaranhamento em função de a^2 para $\chi^2 = 0, 3$ e $\theta = 0$. Note que para este estado o parâmetro χ representa a amplitude de probabilidade de tunelamento da partícula no poço da direita, portanto ele representa o “grau de sobreposição” da função de onda das duas partícula. A medida que separamos esses poços, a sobreposição diminui, assim como o valor de χ . O que se espera é que quando $\chi = 0$ as partículas estão tão espaçadas que passam a se comportar como partículas distinguíveis. Este fato é corroborado pois os autovalores se reduzem a $\lambda_1 = a^2$ e $\lambda_2 = 1 - a^2$. Assim o emaranhamento entre as

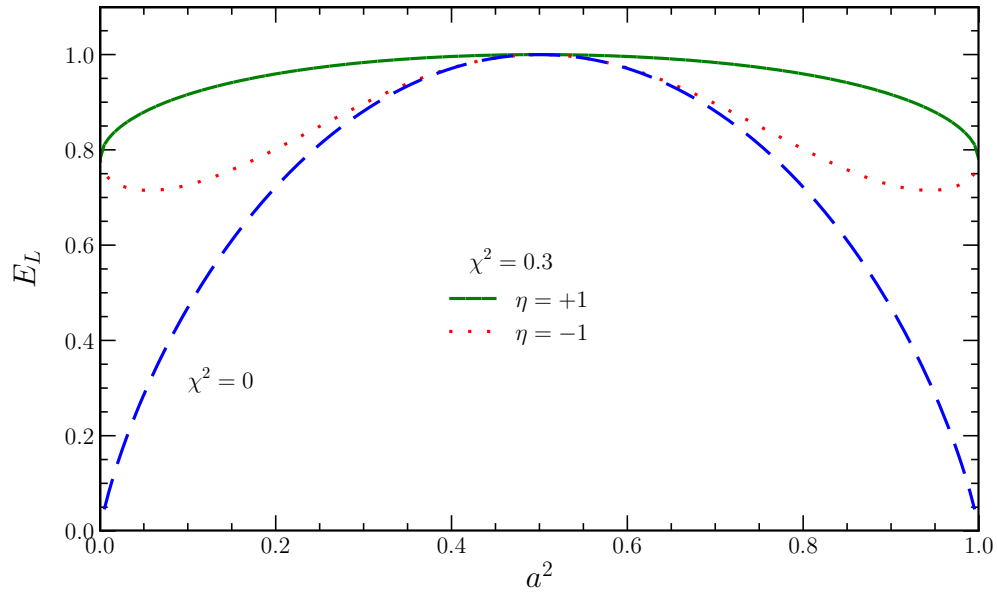


Figura 4.2: Emaranhamento E_L como função de a^2 , para $\theta = 0$ e $\chi^2 = 0,3$ para bósons (linha verde) e fêrmions (linha laranja), comparados com o emaranhamento quando não ocorre sobreposição das funções de onda ($\chi = 0$) e as partículas comportam-se como não idênticas e seu emaranhamento é devido apenas os graus de liberdade \pm (linha azul).

partículas torna-se

$$E_{\chi=0} = -a^2 \log_2 a^2 - (1 - a^2) \log_2 1 - a^2 \quad (4.31)$$

Este é exatamente o resultado obtido para o emaranhamento de partículas não idênticas quando não ocorre sobreposição de suas funções de onda. O que não é difícil de ver pois ao eliminar o tunelamento, temos uma partícula confinada no poço da esquerda, enquanto a outra está confinada no poço da direita, assim o estado das partículas não idênticas se reduz a:

$$|\Psi\rangle_{ni} = a |+\rangle_L \otimes |-\rangle_B + b e^{i\theta} |-\rangle_L \otimes |+\rangle_B \quad (4.32)$$

Os operadores de estados reduzidos na partícula da esquerda $\rho_L^{(1)}$ e na partícula

da direita $\rho_R^{(1)}$ são dados por

$$\rho_L^{(1)} = a^2 |-\rangle_R \langle -|_R + (1 - a^2) |+\rangle_R \langle +|_R \quad (4.33)$$

$$\rho_R^{(1)} = a^2 |+\rangle_L \langle +|_L + (1 - a^2) |-\rangle_L \langle -|_L \quad (4.34)$$

Ambos fornecem o emaranhamento $E_{ni} = -a^2 \log_2 a^2 - (1 - a^2) \log_2 1 - a^2$. Isso corrobora o fato de que com distanciamento espacial o emaranhamento de partículas idênticas é o mesmo de partículas não idênticas.

Consideremos agora o caso específico $\chi = 0$ e $a = 1$ ($b = 0$). Neste caso obtemos, a partir da Eq. (4.31), que o emaranhamento será nulo. É interessante comparar com o emaranhamento se calculado do “modo tradicional”, ou seja, realizando o traço parcial sobre todos os graus de liberdade. Neste caso o estado reduz-se a $|L+, R-\rangle$, uma partícula localizada no poço da esquerda, estado $+$, e outra localizada no poço da direita, estado $-$. É de se esperar que as partículas comportem-se como não idênticas, nesta situação sem emaranhamento. Porém o operador de estado reduzido $\rho^{(1)}$ tomado sobre todos os graus de liberdade fornece:

$$\rho^{(1)} = \frac{1}{2} [|R-\rangle \langle R-| + |L+\rangle \langle L+|] \quad (4.35)$$

Este estado não é puro, uma vez que $(\rho^{(1)})^2 \neq \rho^{(1)}$. Ademais, o seu emaranhamento é máximo, uma vez que $E = 1$. Este resultado é o mesmo que o obtido pelo postulado da simetrização, reforçando assim a pertinência e a validade do traço parcial localizado para partículas idênticas.

Para aprofundar o emaranhamento devido apenas aos graus de liberdade espaciais, tomemos $a = 1$, então o estado da Eq. (4.25) reduz-se a $|\Psi\rangle_{a=1} = \chi |L+, L-\rangle + \sqrt{1 - \chi^2} |L+, R-\rangle$. Note que se as partículas fossem não idênticas, teríamos um estado separável $|L+\rangle \otimes |B-\rangle$, logo teríamos um estado de emaranhamento nulo. Por outro lado, para partículas idênticas os autovalores dados pela Eq. (4.30) se reduzem a

$$\lambda_1 = \frac{1}{1 + \chi^2}, \quad \lambda_2 = 1 - \lambda_1 \quad (4.36)$$

obtendo o emaranhamento

$$E_L[a = 1] = \log_2(1 + \chi^2) - \frac{\chi^2}{1 + \chi^2} \log_2 \chi^2 \quad (4.37)$$

A figura 4.3 mostra o emaranhamento em função de χ . O emaranhamento é

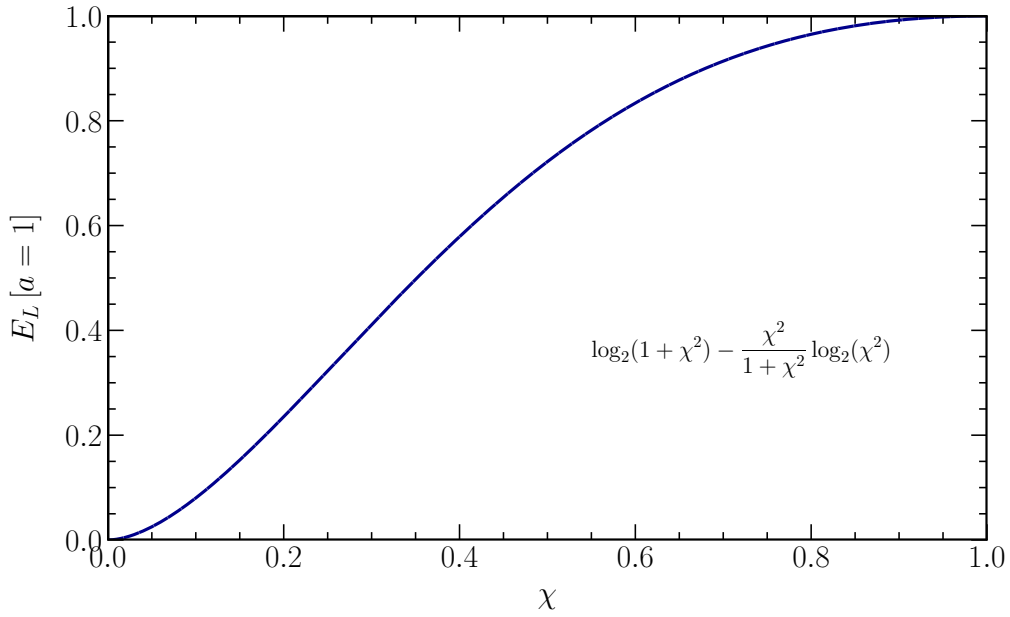


Figura 4.3: Emaranhamento para $E_L[a = 1]$ como função de χ .

crecente quanto maior for a probabilidade da partícula no poço da direita tunelar para a esquerda, ou seja, quanto maior for a superposição de suas funções de onda. Quando $\chi = 0$ temos emaranhamento nulo, como já discutido. Como caso limite, temos que quando $\chi = 1$, ou seja, ambas partículas estão localizadas no poço da esquerda, o emaranhamento é igual a um ($E_L[a = 1] = 1$), portanto máximo. Este resultado faz sentido pois uma vez que ambas as partículas estão localizadas no mesmo local, sendo idênticas, não temos nenhuma informação sobre as partículas individualmente, por isso, a nossa entropia (emaranhamento) deve ser máxima.

Vamos agora calcular o emaranhamento do sistema tomando o traço parcial localizado no poço da direita (ρ_R). Precisamos então calcular:

$$\rho_R = \frac{1}{M} [\langle R+ | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | R+ \rangle + \langle R- | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | R- \rangle] \quad (4.38)$$

onde $|\Psi\rangle$ é o estado dado pela Eq. (4.25), de maneira que:

$$\langle R+ | \bullet | \Psi \rangle = \eta b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} |L-\rangle \quad (4.39)$$

$$\langle R- | \bullet | \Psi \rangle = \eta a \sqrt{1 - \chi^2} |L+\rangle \quad (4.40)$$

Portanto,

$$\rho_R = \frac{1}{M} \left[a^2(1 - \chi^2) |L+\rangle \langle L+| + b^2(1 - \chi^2) |L-\rangle \langle L-| \right] \quad (4.41)$$

Agora, a normalização $\text{Tr} \rho_R = 1$ leva a $M = 1 - \chi^2$, e ρ_R fica dada por:

$$\rho_R = a^2 |L+\rangle \langle L+| + b^2 |L-\rangle \langle L-| \quad (4.42)$$

Este operador fornece o emaranhamento no poço da direita como sendo $E_R = -a^2 \log_2 a^2 - (1 - a^2) \log_2 (1 - a^2) = E_{\chi=0}$.

Obtemos, assim, o mesmo emaranhamento para o caso quando medimos uma partícula no poço da esquerda, porém quando temos uma probabilidade nula de tunelamento da partícula da direita. Isso nos mostra dois fatos: 1) para partículas idênticas, o local no qual uma medição é feita afeta o emaranhamento entre elas, 2) a sobreposição dos modos espaciais das partículas influencia no emaranhamento apenas quando uma medida é realizada em um local no qual ambas possuem uma probabilidade não nula de serem encontradas. Assim, um emaranhamento “intrínseco” entre partículas idênticas só existe quando elas estão espacialmente separadas.

Outra característica importante que pode ser explorado por esse método é o emaranhamento produzido por uma medida em partículas idênticas. Ou seja, um estado de partículas idênticas pode ser originalmente não emaranhado e por meio de uma medida, torná-lo emaranhado. Como exemplo, considere o estado $|L+, R-\rangle$. Como dito anteriormente, este estado não é emaranhado, considere agora uma medida em uma partícula, não local, em particular uma medida feita na base $\{|O_{\pm+}\rangle, |O_{\pm-}\rangle\}$, onde $|O_{\pm}\rangle = \frac{|L\rangle \pm |R\rangle}{\sqrt{2}}$. Os termos do operador de estado reduzido localizado serão:

$$\begin{aligned} \langle O_{++}| \bullet |L+, R-\rangle &= \frac{|R-\rangle}{\sqrt{2}} & \langle O_{+-}| \bullet |L+, R-\rangle &= \frac{\eta |L+\rangle}{\sqrt{2}} \\ \langle O_{-+}| \bullet |L+, R-\rangle &= \frac{|R-\rangle}{\sqrt{2}} & \langle O_{--}| \bullet |L+, R-\rangle &= -\frac{\eta |L+\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

obtendo, assim, o operador de estado reduzido localizado

$$\rho_O = \frac{1}{2} [|L+\rangle \langle L+| + |R-\rangle \langle R-|]. \quad (4.44)$$

que fornece um emaranhamento $E_O = 1$.

Capítulo 5

Emaranhamento de bósons compostos idênticos

Para lidar com o problema do emaranhamento de bósons idênticos compostos, é conveniente usar o formalismo de segunda quantização. É mais conveniente porque tanto a definição quanto o cálculo de produtos internos fica bastante automatizado empregando esse formalismo. Na próxima seção vamos rederivar os resultados obtidos na Ref. [11] empregando o formalismo de segunda quantização.

5.1 Emaranhamento no formalismo de segunda quantização

No artigo da Ref [19], foi mostrado que o formalismo de partículas idênticas proposto por Lo Franco e Campagno [11] é equivalente, em termos de seus resultados ao calcular o operador de estado reduzido, ao formalismo da segunda quantização. Este fato será útil para este trabalho pois lidaremos com partículas compostas a partir deste último.

Sejam a_n^\dagger e a_n operadores de criação e destruição, respectivamente, de partículas puntiformes, ou seja, não compostas, bosônicas ou fermiônicas. Os sub-índices n representam os números quânticos dessas partículas, como momento, spin, entre outras. Dessa forma, as relações de comutação, ou anti-comutação, canônicas são dadas por:

$$[a_n^\dagger, a_m^\dagger]_\eta = [a_n, a_m]_\eta = 0 \quad (5.1)$$

$$[a_n, a_m^\dagger]_\eta = \delta_{nm} \quad (5.2)$$

onde o índice η representa comutação para bósons ($\eta = 1$) e anti-comutação para férmions ($\eta = -1$). Seja $|0\rangle$ o estado de vácuo, então a atuação do operador de

destruição neste estado é dado por:

$$a_n |0\rangle = 0 \quad (5.3)$$

Para mostrar a equivalência entre os formalismos, seguiremos o artigo [19]. Seguindo a abordagem de Lo Franco e Compagno, o estado holístico puro $|\Psi\rangle$ mais geral possível é dado por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha, \beta, i, j} C_{\beta j}^{\alpha i} |\alpha i, \beta j\rangle \quad (5.4)$$

onde $C_{\beta j}^{\alpha i}$ são números complexos e os índices com alfabeto grego representam graus de liberdade espaciais, enquanto os índices do alfabeto latino representam outros graus de liberdade, como spin, por exemplo. Todos os estados dados por esses índices são ortonormais, ou seja:

$$\langle \alpha i | \beta j \rangle = \delta_{\alpha, \beta} \delta_{i, j} \quad (5.5)$$

O operador de estado ρ é dado por:

$$\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi| = \sum_{\alpha, \beta, i, j} \sum_{\gamma, \mu, k, l} C_{\beta j}^{\alpha i} C_{\mu l}^{\gamma k*} |\alpha i, \beta j\rangle \langle \gamma k, \mu l| \quad (5.6)$$

Seja $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_s\}$ uma base para os graus de liberdade espaciais e $\{z_1, z_2, \dots, z_t\}$ uma base para os outros graus de liberdade. O operador de estado reduzido localizado em $\epsilon_1, \tilde{\rho}_M^{(1)}$, não normalizado, é dado por:

$$\tilde{\rho}_M^{(1)} = \sum_{m=z_1}^{z_t} \langle \epsilon_1 m | \rho | \epsilon_1 m \rangle \quad (5.7)$$

assim o operador de estado reduzido localizado pelo formalismo de estado holístico é dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_M^{(1)} &= \sum_{m=z_1}^{z_t} \sum_{\alpha, \beta, i, j} \sum_{\gamma, \mu, k, l} C_{\beta j}^{\alpha i} C_{\mu l}^{\gamma k*} \langle \epsilon_1 m | \bullet | \alpha i, \beta j \rangle \langle \gamma k, \mu l | \bullet | \epsilon_1 m \rangle \\ &= \sum_{m=z_1}^{z_t} \left(\sum_{\beta, j} \sum_{\gamma, k} C_{\beta j}^{\epsilon_1 m} C_{\epsilon_1 m}^{\gamma k*} |\beta j\rangle \langle \gamma k| + \eta \sum_{\beta, j} \sum_{\mu, l} C_{\beta j}^{\epsilon_1 m} C_{\mu l}^{\epsilon_1 m*} |\beta j\rangle \langle \mu l| + \right. \\ &\quad \left. + \eta \sum_{\alpha, i} \sum_{\gamma, k} C_{\epsilon_1 m}^{\alpha i} C_{\epsilon_1 m}^{\gamma k*} |\alpha i\rangle \langle \gamma k| + \sum_{\alpha, i} \sum_{\mu, l} C_{\epsilon_1 m}^{\alpha i} C_{\mu l}^{\epsilon_1 m*} |\alpha i\rangle \langle \mu l| \right) \quad (5.8) \end{aligned}$$

Vamos agora obter o operador de estado reduzido localizado utilizando o formalismo da segunda quantização. O estado mais geral de duas partículas $|\Psi\rangle$ é dado por:

$$|\Psi\rangle = \sum_{\alpha,\beta,i,j} C_{\beta j}^{\alpha i} a_{\alpha i}^{\dagger} a_{\beta j}^{\dagger} |0\rangle \quad (5.9)$$

em que os índices seguem a mesma lógica do caso anterior. O operador de estado é dado por:

$$\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi| = \sum_{\alpha,\beta,i,j} \sum_{\gamma,\mu,k,l} C_{\beta j}^{\alpha i} C_{\mu l}^{\gamma k*} a_{\alpha i}^{\dagger} a_{\beta j}^{\dagger} |0\rangle \langle 0| a_{\gamma k} a_{\mu l} \quad (5.10)$$

Para realizar o traço parcial localizado devemos realizar a seguinte operação (em concordância com o caso anterior):

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_M^{(1)} &= \sum_{m=z_1}^{z_t} \langle 0| a_{\epsilon_1 m} \rho a_{\epsilon_1 m}^{\dagger} |0\rangle \\ &= \sum_{m=z_1}^{z_t} \sum_{\alpha,\beta,i,j} \sum_{\gamma,\mu,k,l} C_{\beta j}^{\alpha i} C_{\mu l}^{\gamma k*} \langle 0| a_{\epsilon_1 m} a_{\alpha i}^{\dagger} a_{\beta j}^{\dagger} |0\rangle \langle 0| a_{\gamma k} a_{\mu l} a_{\epsilon_1 m}^{\dagger} |0\rangle \\ &= \sum_{m=z_1}^{z_t} \sum_{\alpha,\beta,i,j} \sum_{\gamma,\mu,k,l} C_{\beta j}^{\alpha i} C_{\mu l}^{\gamma k*} \left(\delta_{\epsilon_1 \alpha} \delta_{mi} a_{\beta j}^{\dagger} |0\rangle + \eta \delta_{\epsilon_1 \beta} \delta_{mj} a_{\alpha i}^{\dagger} |0\rangle \right) \\ &\quad \times \left(\delta_{\epsilon_1 \mu} \delta_{ml} \langle 0| a_{\gamma k} + \eta \delta_{\epsilon_1 \gamma} \delta_{mk} \langle 0| a_{\mu l} \right) \\ &= \sum_{m=z_1}^{z_t} \left(\sum_{\beta,j} \sum_{\gamma,k} C_{\beta j}^{\epsilon_1 m} C_{\epsilon_1 m}^{\gamma k*} a_{\beta j}^{\dagger} |0\rangle \langle 0| a_{\gamma k} + \eta \sum_{\beta,j} \sum_{\mu,l} C_{\beta j}^{\epsilon_1 m} C_{\mu l}^{\epsilon_1 m*} a_{\beta j}^{\dagger} |0\rangle \langle 0| a_{\mu l} + \right. \\ &\quad \left. + \eta \sum_{\alpha,i} \sum_{\gamma,k} C_{\epsilon_1 m}^{\alpha i} C_{\epsilon_1 m}^{\gamma k*} a_{\alpha i}^{\dagger} |0\rangle \langle 0| a_{\gamma k} + \sum_{\alpha,i} \sum_{\mu,l} C_{\epsilon_1 m}^{\alpha i} C_{\mu l}^{\epsilon_1 m*} a_{\alpha i}^{\dagger} |0\rangle \langle 0| a_{\mu l} \right) \quad (5.11) \end{aligned}$$

Compendo os operadores de estado reduzido localizados dados nas Eqs. (5.8) e (5.11), obtemos exatamente o mesmo operador em dois formalismos distintos. Portanto, eles terão os mesmos auto-valores e, conseqüentemente, terão o mesmo emaranhamento.

5.2 Bósons compostos e quons

Vamos considerar agora, de modo geral, uma partícula bosônica composta por dois férmions não idênticos. Sejam a_{μ}^{\dagger} e b_{ν}^{\dagger} operadores de criação dos férmions, em que os subíndices μ e ν representam seus números quânticos tanto espaciais quanto

internos. Os correspondentes operadores de aniquilação a_μ e b_ν aniquilam o estado sem partículas (estado de vácuo) $|0\rangle$, isto é: $a_\mu |0\rangle = b_\nu |0\rangle = 0$. Esses operadores de criação e aniquilação satisfazem relações de anti-comutação canônicas:

$$\{a_\mu, a_\nu\} = \{a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger\} = 0 \quad \{a_\mu, a_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu,\nu} \quad (5.12)$$

$$\{b_\mu, b_\nu\} = \{b_\mu^\dagger, b_\nu^\dagger\} = 0 \quad \{b_\mu, b_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu,\nu} \quad (5.13)$$

$$\{a_\mu, b_\nu\} = \{a_\mu^\dagger, b_\nu^\dagger\} = 0 \quad \{a_\mu, b_\nu^\dagger\} = \{b_\mu, a_\nu^\dagger\} = 0 \quad (5.14)$$

O estado de uma partícula composta é criado por um operador de criação A_α^\dagger dado por

$$A_\alpha^\dagger |0\rangle = \sum_{\mu,\nu} \Phi_\alpha^{\mu,\nu} a_\mu^\dagger b_\nu^\dagger |0\rangle \quad (5.15)$$

onde $\Phi_\alpha^{\mu,\nu}$ representa a função de onda de estado ligado com número quântico α , em que α representa os graus de liberdade do centro de massa, a energia interna, spin e possíveis outros graus de liberdade da partícula composta.

Em vista das relações de anti-comutação das Eqs. (5.12), (5.13) e (5.14), os estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ que representam estados normalizados de uma partícula composta bosônica com graus de liberdade α e β , respectivamente, satisfazem:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta} \quad (5.16)$$

desde que as amplitudes estejam normalizadas como:

$$\sum_{\mu,\nu} \Phi_\alpha^{\mu,\nu*} \Phi_\beta^{\mu,\nu} = \delta_{\alpha,\beta} \quad (5.17)$$

Isto pode ser mostrado de maneira muito simples:

$$\begin{aligned} \langle\alpha|\beta\rangle &= \langle 0 | A_\alpha A_\beta^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | \left[\sum_{\mu,\nu} \Phi_\alpha^{\mu,\nu*} b_\nu a_\mu \right] \left[\sum_{\epsilon,\gamma} \Phi_\beta^{\epsilon,\gamma} a_\epsilon^\dagger b_\gamma^\dagger \right] | 0 \rangle \\ &= \sum_{\mu,\nu} \sum_{\epsilon,\gamma} \Phi_\alpha^{\mu,\nu*} \Phi_\beta^{\epsilon,\gamma} \langle 0 | b_\nu a_\mu a_\epsilon^\dagger b_\gamma^\dagger | 0 \rangle = \sum_{\mu,\nu} \Phi_\alpha^{\mu,\nu*} \Phi_\beta^{\mu,\nu} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Queremos calcular o comutador $[A_\alpha, A_\beta^\dagger]$, pois ele irá nos dizer o quão ele difere do correspondente comutador de partículas puntiformes. Caso $[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha,\beta}$ o composto se comportará identicamente a uma partícula pontual bosônica. Primeiramente, vamos calcular os comutadores $[a_\mu, A_\alpha^\dagger]$ e $[b_\nu, A_\alpha^\dagger]$, pois eles serão

úteis para calcularmos o comutador do bóson composto. Para $[a_\mu, A_\alpha^\dagger]$ obtemos:

$$\begin{aligned}
[a_\mu, A_\alpha^\dagger] &= a_\mu A_\alpha^\dagger - A_\alpha^\dagger a_\mu = a_\mu \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger - \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger a_\mu \\
&= \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} [a_\mu a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger + a_{\mu'}^\dagger a_\mu b_{\nu'}^\dagger] = \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} \{a_\mu, a_{\mu'}^\dagger\} b_{\nu'}^\dagger \\
\therefore [a_\mu, A_\alpha^\dagger] &= \sum_{\nu'} \Phi_\alpha^{\mu, \nu'} b_{\nu'}^\dagger
\end{aligned} \tag{5.19}$$

e para $[b_\nu, A_\alpha^\dagger]$:

$$\begin{aligned}
[b_\nu, A_\alpha^\dagger] &= b_\nu A_\alpha^\dagger - A_\alpha^\dagger b_\nu = b_\nu \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger - \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger b_\nu \\
&= - \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} [a_{\mu'}^\dagger b_\nu b_{\nu'}^\dagger + a_{\mu'}^\dagger b_{\nu'}^\dagger b_\nu] = - \sum_{\mu', \nu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu'} a_{\mu'}^\dagger \{b_\nu, b_{\nu'}^\dagger\} \\
\therefore [b_\nu, A_\alpha^\dagger] &= - \sum_{\mu'} \Phi_\alpha^{\mu', \nu} a_{\mu'}^\dagger
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Com estes resultados, podemos agora calcular o comutador desejado:

$$\begin{aligned}
[A_\alpha, A_\beta^\dagger] &= \sum_{\mu, \nu} \Phi_\alpha^{* \mu, \nu} [b_\nu a_\mu, A_\beta^\dagger] = \sum_{\mu, \nu} \Phi_\alpha^{* \mu, \nu} (b_\nu [a_\mu, A_\beta^\dagger] + [b_\nu, A_\beta^\dagger] a_\mu) \\
&= \sum_{\mu, \nu} \Phi_\alpha^{* \mu, \nu} \left(\sum_{\nu'} \Phi_\beta^{\mu, \nu'} b_\nu b_{\nu'}^\dagger - \sum_{\mu'} \Phi_\beta^{\mu', \nu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu \right) \\
&= \delta_{\alpha, \beta} - \sum_{\mu, \nu} \Phi_\alpha^{* \mu, \nu} \left(\sum_{\mu'} \Phi_\beta^{\mu', \nu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu + \sum_{\nu'} \Phi_\beta^{\mu, \nu'} b_{\nu'}^\dagger b_\nu \right)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha, \beta} - \Delta_{\alpha\beta} \tag{5.21}$$

onde $\Delta_{\alpha\beta}$ é dado por

$$\Delta_{\alpha\beta} = \sum_{\mu, \nu} \Phi_\alpha^{* \mu, \nu} \left(\sum_{\mu'} \Phi_\beta^{\mu', \nu} a_{\mu'}^\dagger a_\mu + \sum_{\nu'} \Phi_\beta^{\mu, \nu'} b_{\nu'}^\dagger b_\nu \right) \tag{5.22}$$

Claramente, o operador A_α^\dagger não é estritamente bosônico, uma vez que o termo $\Delta_{\alpha\beta}$ “deforma” a sua álgebra. Uma expressão explícita para $\Delta_{\alpha\beta}$ em geral é complexa, depende das características das interações entre os constituintes. Essa complexidade pode ser evitada e ainda obter informações qualitativas sobre o emaran-

nhamento de partículas compostas que são genéricas, independentemente de os bósons serem átomos ou moléculas, empregando álgebras de quons [22, 12, 25, 13]. A álgebra de quon é definida pela seguinte álgebra de Heisenberg “deformada” para operadores de aniquilação A_α e criação A_β^\dagger :

$$A_\alpha A_\beta^\dagger - q A_\beta^\dagger A_\alpha = \delta_{\alpha,\beta} \quad (5.23)$$

onde q é um parâmetro que pode variar entre $q = -1$ (puro férmion) e $q = 1$ (puro bóson). Reescrevendo q como $q = 1 - x$, temos que x pode variar entre $x = 0$ (puro bóson) e $x = 2$ (puro férmion). Em termos de x , a Eq. (5.23) torna-se:

$$\left[A_\alpha, A_\beta^\dagger \right] = \delta_{\alpha,\beta} - x A_\beta^\dagger A_\alpha \quad (5.24)$$

Note que $x A_\beta^\dagger A_\alpha$ têm um papel similar ao termo $\Delta_{\alpha\beta}$ obtido na Eq. (5.21). Como tal, temos que os termos $a_{\mu'}^\dagger, a_\mu$ e $b_{\nu'}^\dagger, b_\nu$ em conjunto com as amplitudes Φ são efetivamente representados pelo termo extra $x A_\beta^\dagger A_\alpha$. O valor de x , portanto, deve se alterar dependendo da situação física específica sendo tratada, dependendo da extensão da partícula composta e a densidade do sistema de muitas partículas compostas.

Para ilustrar este fato, tomemos o caso desenvolvido nos artigos [12] e [13]. Considere um sistema de N bósons compostos idênticos, não interagentes, em uma caixa de volume V à temperatura zero. Caso os bósons fossem puntiformes, o estado fundamental seria dado por todos eles com momento nulo. Contudo, isso não é esperado para o caso de bósons compostos por férmions, uma vez que o Princípio de Exclusão de Pauli proíbe a ocupação de dois férmions em um mesmo estado. Neste caso o estado fundamental (não normalizado), análogo ao das partículas puntiformes será dado por

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (A_0^\dagger)^N |0\rangle \quad (5.25)$$

onde A_0^\dagger representa o operador de criação do composto bosônico no estado fundamental, ou seja, a função de onda $\Phi_\alpha^{\mu,\nu}$ em seu estado fundamental e com zero momento em seu centro de massa, satisfazendo a Eq. (5.15). Sendo $A_0^\dagger A_0$ o operador número deste estado, podemos obter o valor médio do número de ocupação deste estado por

$$N_0 = \frac{\langle N | A_0^\dagger A_0 | N \rangle}{\langle N | N \rangle} \quad (5.26)$$

Para calcular esse número, a Ref. [12] considerou um bóson de spin zero, com a função de onda Φ dada por uma gaussiana de raio quadrático médio r_0^2 . Em uma aproximação de ordem mais baixa na densidade $n = N/V$ do sistema de bósons compostos, N_0 é dado por [12]:

$$N_0 = N \left(1 - \frac{4}{\pi^{3/2}} nr_0^3 \right) \quad (5.27)$$

Ou seja, o número de ocupação do estado fundamental dos bósons compostos diferem do caso dos bósons puntiformes por um fator da ordem de nr_0^3 . Essa diminuição da ocupação do estado fundamental é devida ao termo $\Delta_{\alpha\beta}$ presente na álgebra do composto. No limite de $r_0 \rightarrow 0$, obtemos a ocupação total deste estado, como era esperado.

Note que este resultado foi obtido sem a utilização da álgebra deformada de quon, agora para nos auxiliar na interpretação da deformação q na álgebra, reobteremos esse resultado, a partir da Eq. (5.24). Similarmente ao estado da Eq. (5.25), o estado fundamental na álgebra q será dado por

$$|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{[N]!}} (A_0^\dagger)^N |0\rangle \quad (5.28)$$

onde $[N]! = [N][N-1]\dots 1$ é o q -fatorial, dado por

$$[N] = \frac{1 - q^N}{1 - q} \quad (5.29)$$

Este termo aparece no estado pois ao calcular o seu produto interno, obtemos uma progressão geométrica de razão q . Calculando o número de ocupação N_0 do estado fundamental, utilizando a Eq. (5.27) agora com a álgebra deformada de quon, obtemos em aproximação de primeira ordem de q

$$N_0 = \frac{1}{x} [1 - (1 - x)^N] \simeq N \left(1 - \frac{1}{2} Nx \right) \quad (5.30)$$

onde utilizamos $q = 1 - x$.

Comparando este resultado com o dado pela Eq. (5.26), obtemos claramente que $Nx \sim N \frac{r_0^3}{V}$. Obtemos, portanto, que o parâmetro de deformação da álgebra x é diretamente proporcional à razão do volume ocupado pelo bósons compostos. Este resultado nos mostra que uma vez que tenhamos uma razão pequena, ou seja o "tamanho" do bóson é negligenciável perto do volume no qual ele está contido e

que a densidade dos bósons também seja baixa, nosso composto se comportará como bósons puntiformes, assim como esperado.

Uma outra possibilidade seria considerar o composto bosônico constituído também de partículas bosônicas. A diferença procedimental seria considerar relações de comutação, ao invés de anticomutação. Que neste caso seriam:

$$[a_\mu, a_\nu] = [a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger] = 0 \quad [a_\mu, a_\nu^\dagger] = \delta_{\mu,\nu} \quad (5.31)$$

$$[b_\mu, b_\nu] = [b_\mu^\dagger, b_\nu^\dagger] = 0 \quad [b_\mu, b_\nu^\dagger] = \delta_{\mu,\nu} \quad (5.32)$$

$$[a_\mu, b_\nu] = [a_\mu^\dagger, b_\nu^\dagger] = 0 \quad [a_\mu, b_\nu^\dagger] = [b_\mu, a_\nu^\dagger] = 0 \quad (5.33)$$

Podemos agora realizar o mesmo procedimento que empregamos para constituintes fermiônicos. Ou seja, calcular o comutador $[A_\alpha, A_\beta^\dagger]$, levando em conta que ele é composto por partículas bosônicas, para sabermos o quanto o composto se “afasta” do caráter de partícula puntiforme; a saber:

$$[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha,\beta} + \Delta_{\alpha\beta} \quad (5.34)$$

onde o termo $\Delta_{\alpha\beta}$ é “idêntico” (estruturalmente) ao obtido na Eq. (5.22). A diferença entre a Eq. (5.21) e a Eq. (5.34) consiste no sinal obtido na deformação.

De posse desse resultado podemos também aplicar a álgebra de quons para o caso de bósons compostos por outros bósons. A diferença é que para este caso o parâmetro q precisa tomar valores maiores do que a unidade, ou seja $q > 1$. Desta maneira podemos fazer a substituição $q = 1 + x$, sendo x um parâmetro positivo, e escrever:

$$[A_\alpha, A_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha,\beta} + x A_\beta^\dagger A_\alpha \quad (5.35)$$

obtendo assim uma relação semelhante à Eq. (5.34).

Desta maneira, podemos estudar o emaranhamento de bósons compostos, tanto no caso dos constituintes serem bósons quanto férmions, utilizando a álgebra de quons com valores apropriados para o parâmetro q em cada um dos casos.

5.3 Emaranhamento de bósons compostos

Para estudar o emaranhamento entre os bósons compostos idênticos, vamos retornar ao exemplo do poço assimétrico. Porém, agora, as partículas nos poços da direita e da esquerda não serão mais partículas puntiformes, mas sim bósons compostos de dois férmions (os cálculos para que as partículas constituintes

sejam bósons são idênticos), descritos pelos operadores de criação e destruição obedecendo a álgebra “deformada” de quon.

Note que ao utilizarmos a álgebra “deformada” de quon continuamos com os operadores de criação e destruição do composto, portanto, ao utilizar esse modelo investigamos apenas o emaranhamento do composto como um todo e perdemos informações específicas sobre o que ocorre com as partículas puntiforme, constituintes do composto.

Vamos seguir os mesmos procedimentos realizados anteriormente, escrever o estado em segunda quantização, após isso calcular o operador de estado reduzido localizado e o emaranhamento do sistema será obtido a partir dos auto-valores deste operador. O estado dessas partículas é dado por (lembrando que $\eta = 1$ uma vez que estamos tratando de partículas compostas bosônicas):

$$\begin{aligned}
 |\Psi\rangle = & \chi(a + be^{i\theta})A_{L+}^\dagger A_{L-}^\dagger |0\rangle + a\sqrt{1 - \chi^2}A_{L+}^\dagger A_{R-}^\dagger |0\rangle \\
 & + be^{i\theta}\sqrt{1 - \chi^2}A_{L-}^\dagger A_{R+}^\dagger |0\rangle
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

Aqui, a notação escolhida por $+$ e $-$ é fundamental, pois neste caso esses graus de liberdade não representam o spin do composto (uma vez que ele é um bóson), mas sim graus de liberdade internos.

O operador de estado reduzido no poço da esquerda, escrito na forma matricial será dado por:

$$\rho_L = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} q^2 c_1 & 0 & q c_4 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & c_5 \\ q c_4^* & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_5^* & 0 & c_3 \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

Os detalhes da obtenção desse resultado estão no Apêndice D.

O emaranhamento E_{Lq} deste estado pode ser calculado usando a Eq. (4.23), calculando os auto-valores do operador de estado reduzido. Este operador possui dois auto-valores não nulos (λ_1 e λ_2), dados por:

$$\lambda_1 = \frac{(1 - a^2)(1 - \chi^2) + q^2 \chi^2 (1 + 2ab \cos \theta)}{(1 - \chi^2) + \chi^2 (1 + 2ab \cos \theta)(1 + q^2)} \tag{5.38}$$

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1 \tag{5.39}$$

Ao fazermos $q \rightarrow 1$, estamos no limite no qual a álgebra de quon coincide com a álgebra canônica de bósons, ou seja, a partícula composta comporta-se exatamente

como um bóson puntiforme. Calculando os auto-valores nesse limite encontramos:

$$\lambda_2 = \frac{a^2 + \chi^2(b^2 + 2ab \cos \theta)}{1 + \chi^2(1 + 4ab \cos \theta)} \quad (5.40)$$

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 \quad (5.41)$$

exatamente os mesmos auto-valores do caso de partículas puntiformes, encontrados na Eq. (4.30), como era de se esperar.

O emaranhamento E_{Lq} para alguns valores de q está expresso no gráfico mostrado na Fig. 5.1. Note que, de acordo com a Eq. (5.1), o comportamento qualitativo do emaranhamento é similar para diversos valores de q , incluindo o caso $q = 1$ que coincide com o emaranhamento bosônico apresentado na Fig. 4.2. Podemos perceber também que quanto menor for o valor de q , portanto mais distante do comportamento pontual o meu composto está, maior é o seu emaranhamento para valores baixos de a^2 e menor para valores altos.

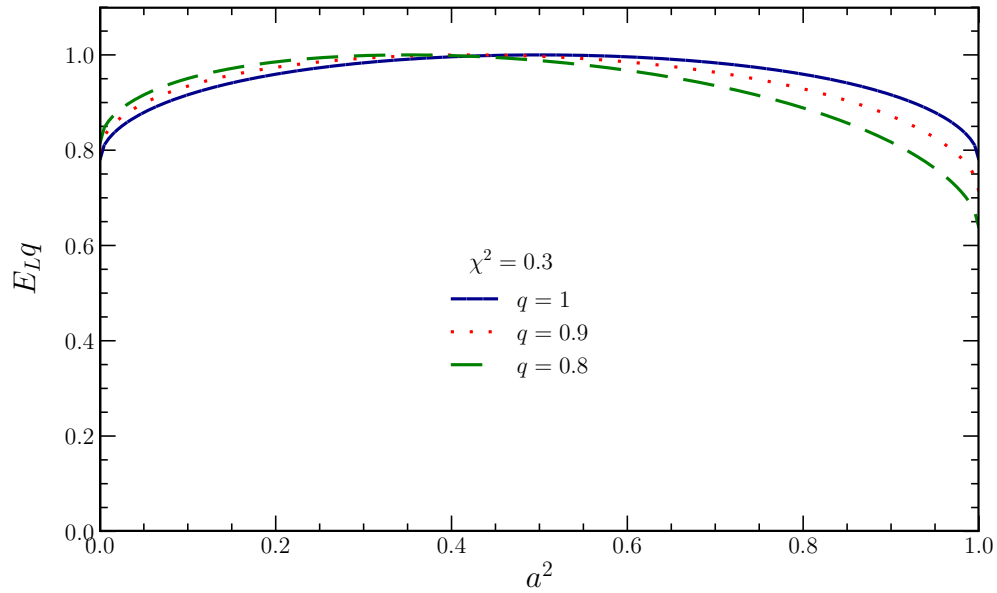


Figura 5.1: Comparação do emaranhamento para E_{Lq} como função de a^2 , para $\theta = 0$ e $\chi^2 = 0,3$ para diversos valores de q ; $q = 1$ (linha azul) temos o caso coincidente com as partículas puntiformes bosônicas, $q = 0,9$ (linha pontilhada vermelha), $q = 0,8$ (linha tracejada verde)

É importante ressaltar que o gráfico acima apresenta a variação do emara-

nhamento em relação às probabilidades dos valores de pseudo-spin para um determinado grau de superposição de suas funções de onda espaciais ($\chi^2 = 0,3$), que foi escolhido como modo de comparação em relação ao caso das partículas puntiformes feitas anteriormente.

Ao fazermos $\chi \rightarrow 0$ obtemos os auto-valores $\lambda_1 = 1 - a^2$ e $\lambda_2 = a^2$, exatamente os mesmos valores que no caso de partículas puntiformes. O que faz sentido, pois ao realizarmos esse limite estamos no caso no qual a partícula composta no poço da direita não consegue tunelar para a esquerda, assim não ocorrerá emaranhamento devido a indistinguibilidade das partículas, mas apenas à indeterminação dos graus de liberdade internos. Portanto o caráter composto do bóson não é algo relevante neste contexto.

Ao fazermos $a \rightarrow 1$ ($b \rightarrow 0$), caso no qual o emaranhamento deve-se apenas aos graus de liberdade espaciais (e ao fato das partículas serem idênticas) obtemos os auto-valores

$$\lambda_1 = \frac{q^2\chi^2}{1 + q^2\chi^2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{1}{1 + q^2\chi^2} \quad (5.42)$$

os quais fornecem a entropia de emaranhamento:

$$E_{Lq}[a = 1] = \log_2(1 + (q\chi)^2) - \frac{(q\chi)^2}{1 + (q\chi)^2} \log_2(q\chi)^2 \quad (5.43)$$

Esta entropia de emaranhamento é muito similar ao encontrado em na Eq. (4.37), com a diferença de que todos os termos χ estão multiplicados por q .

A figura 5.2 ilustra o emaranhamento como função de χ para diversos valores de q . Como esperado, o comportamento qualitativo do emaranhamento é similar. Ao fazermos $\chi \rightarrow 0$ o emaranhamento tende a zero, uma vez que as partículas não estarão emaranhadas nem em seu pseudo-spin, nem as suas funções de ondas estarão sobrepostas para o emaranhamento devido as suas identidades ser relevante. O emaranhamento aumenta a medida que χ aumenta, pois as suas funções de ondas tornam-se sobrepostas. O emaranhamento tende a ser menor quanto maior for o desvio do caso de partículas puntiformes. O que pode ser visto pelo fato de que quanto mais distante da unidade for o parâmetro q , maior será o volume ocupado pelos compostos, assim mais importante torna-se o efeito da partícula ser composta. Note que para $\chi = 1$ e $q \neq 1$ o emaranhamento é menor do que 1.

Obtemos um emaranhamento em geral menor para as partículas compostas do que para as puntiformes, pois neste caso estamos tratando compostos nos quais os seus constituintes são férmions e, pelo princípio de exclusão de Pauli, é de

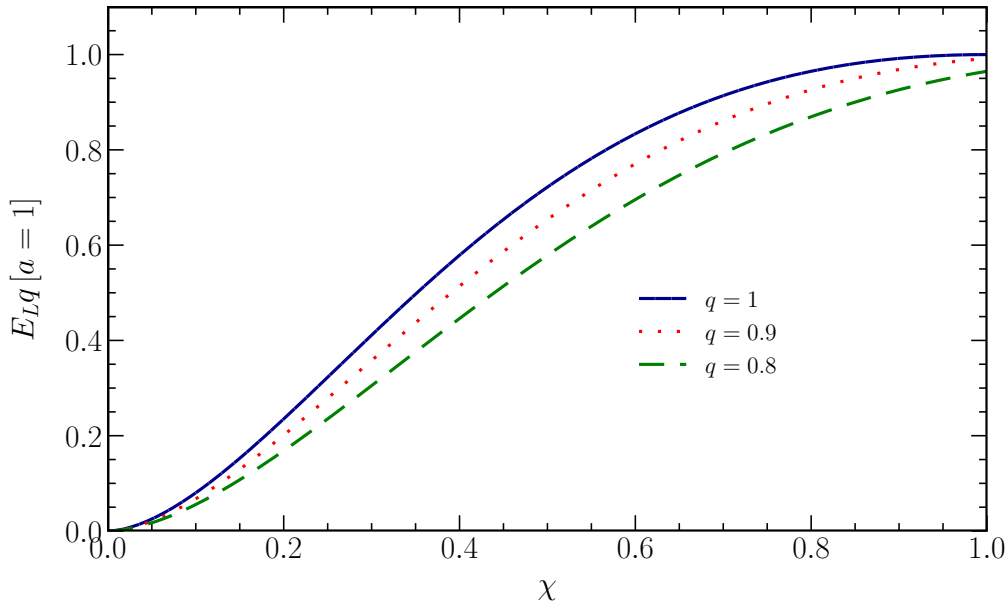


Figura 5.2: Emaranhamento para $E_{Lq}[a=1]$ como função de χ , para diversos valores de q ; $q=1$ (linha azul) temos o caso coincidente com as partículas puntiformes bosônicas, $q=0,9$ (linha pontilhada vermelha), $q=0,8$ (linha tracejada verde).

se esperar que os constituintes possuem uma tendência a não ocuparem estados similares, como se houvesse uma "repulsão" entre elas, diminuindo assim o seu emaranhamento.

Como forma de corroborar este fato, podemos analisar este mesmo emaranhamento para o caso no qual os constituintes dos bósons compostos também são bósons. Lembrando que para esta situação, basta utilizar a exatamente a mesma álgebra de quons, porém com o nosso parâmetro q obtemos valores maiores do que um. Assim as funções de emaranhamento são exatamente as mesmas em estrutura. Assim utilizando o mesmo emaranhamento obtido na Eq. (5.43), porém com valores apropriados do parâmetro, obtemos o gráfico abaixo.

A figura 5.3 nos mostra o emaranhamento em função de χ para o caso sem o emaranhamento dos pseudo-spin, quando os nossos constituintes são bosônicos. Neste caso, obtemos uma entropia de emaranhamento em geral maior do que o caso de partículas puntiformes e conseqüentemente maior do que quando os nossos constituintes são fermiônicos.

Uma entropia maior para o caso de constituintes bosônicos pode ser explicada pelo fato de que bósons possuem uma tendência maior de ocuparem os mesmos

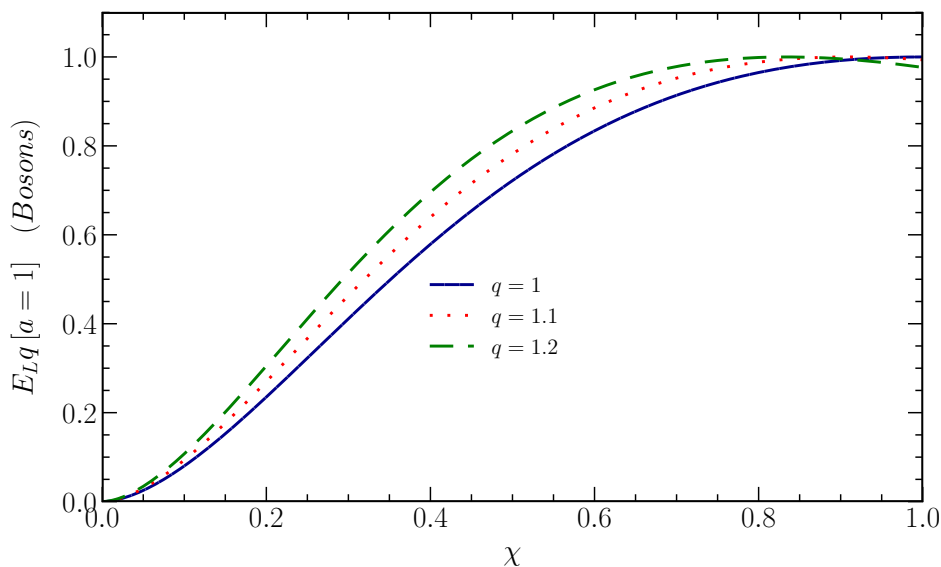


Figura 5.3: Emaranhamento para $E_{Lq}[a = 1]$ para constituintes bosônicos como função de χ , para diversos valores de q ; $q = 1$ (linha azul) temos o caso coincidente com as partículas puntiformes bosônicas, $q = 1, 1$ (linha pontilhada vermelha), $q = 1, 2$ (linha tracejada verde).

estados, ao contrário dos férmions, justamente por isso os seus comportamentos antagônicos.

Podemos observar, aqui também, o fato de que quanto mais o parâmetro q se afasta da unidade, maior será a diferença de emaranhamento entre as partículas compostas e as puntiformes.

Para exemplificar ainda mais a diferença de emaranhamento entre os compostos constituídos de bósons e de férmions, consideremos a Fig. 5.4. Essa figura ilustra o comportamento do emaranhamento das partículas compostas nesta situação para o caso específico de $\chi^2 = 0.3$. Para diversos valores do parâmetro q . Podemos observar aqui que para valores de parâmetro menores do que um, o emaranhamento obtido diminui e obtemos valores cada vez menores quanto mais nos afastamos da unidade. Da mesma forma, para valores do parâmetro maiores do que um obtemos um emaranhamento maior, que aumenta à medida que o parâmetro aumenta.

Como análise final, podemos calcular o operador de estado reduzido no poço

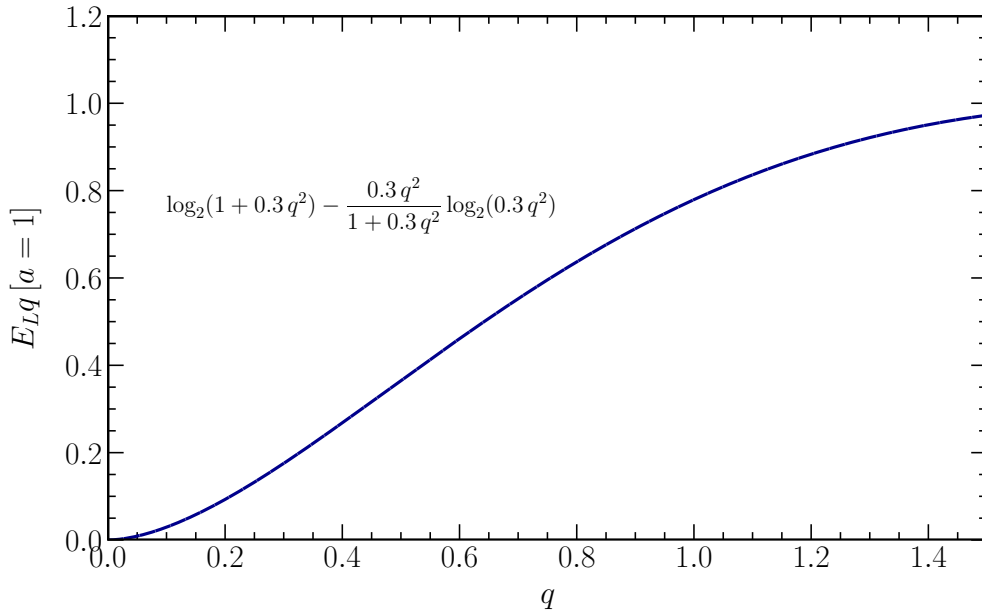


Figura 5.4: Emaranhamento para $\chi^2 = 0.3$ em função do parâmetro q .

da direita. Realizando o traço parcial localizado na Eq. (5.36), obtemos:

$$\rho_R = a^2 |L+\rangle \langle L+| + b^2 |L-\rangle \langle L-| \quad (5.44)$$

Este operador de estado reduzido localizado no poço da direita é exatamente o mesmo de no caso de partículas puntiformes, que como discutimos antes, também é o mesmo do caso de partículas não idênticas. Isso se deve ao fato analisado anteriormente de que o emaranhamento de partículas idênticas é fortemente influenciado pelo local no qual é feita a medição, e no caso do poço da direita temos a probabilidade de encontrar apenas uma das partículas, portanto o seu emaranhamento deve ser somente devido ao pseudo-spin. Além disso, neste poço, como temos apenas uma das partículas é de se esperar que o caráter composto da partícula não seja relevante, pois naquele local não ocorre interação entre os constituintes dos dois compostos.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Tradicionalmente, partículas idênticas são tratadas na mecânica quântica com o postulado da simetrização dos estados. Este postulado consiste em atribuir rótulos de identificação para as partículas e simetrizar os estados de bósons e antisimetrizar os de férmions frente a troca destes rótulos. Em outras palavras, para um sistema de duas partículas idênticas, por exemplo, teríamos uma das partículas identificada como “partícula 1” e a outra identificada como “partícula 2”, e o estado que representa esse sistema teria que ser indistinguível, a menos de um sinal global, do estado em que os índices “1” e “2” sejam intercambiados. Temos pelo menos dois problemas com esta abordagem. O primeiro é um problema conceitual, pois introduzir rótulos seria justamente um modo de distinguir partículas que a princípio são indistinguíveis. O outro problema é que ao se simetrizar os estados, automaticamente as partículas podem se tornar emaranhadas, mesmo que espacialmente separadas e que nunca tenham interagido entre si, justamente devido a esses rótulos artificiais.

Existem várias propostas na literatura para tratar desses problemas sem, no entanto, ter-se alcançado um consenso até o momento [18]. Uma dessas propostas, a que consideramos nessa dissertação, é a proposta de Lo Franco e Compagno [11]. Essa lida com partículas indistinguíveis sem utilizar rótulos artificiais através da introdução do conceito de estado global holístico em conjunto com um novo produto interno. Este estado global considera que o estado do sistema consiste de duas (ou mais) partículas, uma em um determinado estado $|\varphi\rangle$, por exemplo, e outra em um estado $|\psi\rangle$, mas sem identificar qual partícula estaria em qual estado, uma vez que elas são indistinguíveis. Para calcular observáveis, é necessário definir um novo produto interno para este estado holístico. Este novo produto escalar realiza uma espécie de propriedade “distributiva” nos produtos internos de uma partícula, pois os valores esperados dos estados globais devem levar em conta o fato da indistinguibilidade das partículas. A quantificação do emaranhamento de partículas idênticas continua sendo possível por meio de noções comumente utilizadas para partículas não idênticas, como a entropia de von Neumann. O

emaranhamento entre partículas idênticas é uma grandeza fortemente dependente do local no qual uma medição é realizada, pois, se existe um região do espaço no qual temos uma probabilidade não nula de encontrar ambas as partículas, e outra região no qual temos a probabilidade de encontrar apenas uma delas, a informação que obtemos ao fazermos uma medida em uma das regiões não é a mesma ao fazer na outra. Essa “informação obtida” é justamente dada pela entropia de von Neumann. Pelo fato das partículas serem indistinguíveis, a quantidade de informação obtida aumenta se fizermos uma medição em uma região no qual podemos encontrar as duas, devido ao fato que “descobriremos” qual partícula medimos naquele local específico, que não seria o caso para partículas não idênticas, pois já saberíamos qual partícula estaríamos medindo. Assim, o traço parcial do operador de estado reduzido não deve ser feito sobre todos os graus de liberdade espaciais de uma partícula, mas apenas sobre o local no qual queremos analisar o emaranhamento (local onde uma medida seria feita). Esse operador foi chamado de operador de estado reduzido localizado. Caso o traço parcial seja feito em um local no qual apenas uma das partículas possa estar, então o emaranhamento obtido será o mesmo de partículas distinguíveis. Como o caráter do emaranhamento é fortemente influenciado pelo fato das partículas serem idênticas, somente é possível obter um emaranhamento intrínseco no caso das partículas estarem espacialmente separadas, uma vez que elas perdem o seu caráter de indistinguibilidade, pois passam a ser distinguíveis espacialmente.

Nossa contribuição original nessa dissertação foi estender o formalismo de Lo Franco e Campagno [11] para partículas compostas. Consideramos essa proposta dentre as várias existentes porque ela permite tratar naturalmente partículas compostas idênticas através do método de segunda quantização. O método da segunda quantização permite definir o estado global e, ao invés de utilizar o novo produto interno empregando estados do formalismo da primeira quantização, utilizam-se as relações de comutação ou anticomutação dos operadores de criação e aniquilação. Os operadores de criação e aniquilação de bósons compostos seguem uma álgebra similar aos operadores de partículas não compostas, a menos de um termo que “deforma” a sua álgebra, termo que contém informações acerca das partículas constituintes dos compostos.

Para obtermos intuições qualitativas sobre a diferença entre o emaranhamento de partículas compostas idênticas do emaranhamento entre partículas sem estrutura interna, nos baseamos no formalismo de álgebras deformadas, mais especificamente álgebra de quons. Essa álgebra facilita enormemente o tratamento de

sistemas de muitas partículas compostas, pois evita o emprego de modelos específicos para as funções de onda que descrevem a estrutura interna das partículas compostas. O parâmetro de deformação q associado a essa álgebra pode ser interpretado como uma medida da razão do volume ocupado pelos bósons compostos e o volume do sistema, ou seja, quanto menor for o “tamanho” ocupado pelo bóson composto, mais próximo será o seu comportamento de bósons pontuais. Deve ficar claro que uma descrição de um sistema de partículas compostas por quons é uma descrição efetiva que serve para ampliar nossa intuição sobre um problema complexo, mas que não substitui uma descrição em que são considerados explicitamente os graus de liberdade internos das partículas compostas.

Especificamente, aplicamos a álgebra de quons para a mesma situação que foi empregada para partículas sem estrutura interna, o poço assimétrico. Empregando a mesma situação nos permitiu estudar as mudanças no emaranhamento em comparação ao caso de partículas puntiformes. Obtivemos que a estrutura geral do emaranhamento entre partículas compostas, medido através da entropia de von Neumann, é qualitativamente similar ao de partículas puntiformes. Quantitativamente, essa entropia depende do parâmetro de deformação q . Quanto mais o parâmetro da álgebra de quon se afasta da unidade, i.e., o composto torna-se menos puntiforme, maior é a diferença entre as entropias. Mais ainda, obtivemos um emaranhamento mais baixo do que o caso das partículas puntiformes quando os constituintes dos bósons compostos são férmions. Fisicamente, esse efeito é devido ao princípio de exclusão de Pauli, já que os constituintes tendem a “se repelir” quando são trazidos em contato, diminuindo assim a probabilidade deles ocuparem os mesmos modos espaciais. Por outro lado, se os constituintes são bosônicos, obtivemos como tendência um emaranhamento maior, pois em geral bósons possuem uma maior probabilidade de estarem em estados similares.

Como trabalho futuro, antevemos a possibilidade de descrever o emaranhamento entre férmions compostos. Neste caso, teríamos que empregar uma álgebra de quons fermiônica. Por outro lado, o formalismo de estado global holístico pode ser estendido para tratar partículas compostas sem o emprego da álgebra de quons. Para tal, como visto no Capítulo 5, é necessário definir operadores de criação de partículas compostas usando explicitamente os operadores de criação das partículas constituintes. Com isso, é possível investigar o emaranhamento entre os constituintes dos compostos de maneira explícita e não efetiva como faz a álgebra de quons. Certamente a complexidade do problema aumenta consideravelmente, pois estaríamos lidando com um problema de muitos corpos em que

graus de liberdades de partículas compostas e de partículas puntiformes estariam simultaneamente presentes no sistema. Para tratar problemas dessa natureza, uma possibilidade é empregar o formalismo Fock-Tani, desenvolvido originalmente para tratar problemas de física atômica [26, 27] e posteriormente estendido para física hadrônica [28, 29].

Apêndice A

Propriedades do operador de estado

Vamos provar agora algumas importantes propriedades do operador de estado ρ .

1. ρ é Hermitiano ($\rho = \rho^\dagger$):

$$\rho^\dagger = \left(\sum_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}| \right)^\dagger = \sum_{\alpha} p_{\alpha} (|\phi_{\alpha}\rangle \langle\phi_{\alpha}|)^\dagger = \sum_{\alpha} p_{\alpha} (|\phi_{\alpha}\rangle \langle\phi_{\alpha}|) = \rho \quad (\text{A.1})$$

2. $\text{Tr} \rho = 1$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho) &= \sum_n \langle n | \rho | n \rangle = \sum_n \langle n | \left(\sum_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}| \right) | n \rangle = \sum_n \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle n | \phi_{\alpha}\rangle \langle\phi_{\alpha} | n \rangle \\ &= \sum_n \sum_{\alpha} p_{\alpha} a_n^* a_n = \sum_n \sum_{\alpha} p_{\alpha} |a_n|^2 = \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} \right) \left(\sum_n |a_n|^2 \right) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

3. ρ é um operador positivo ($\langle \chi | \rho | \chi \rangle \geq 0, \forall |\chi\rangle$):

$$\begin{aligned} \langle \chi | \rho | \chi \rangle &= \langle \chi | \left(\sum_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}| \right) | \chi \rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle \chi | \phi_{\alpha}\rangle \langle\phi_{\alpha} | \chi \rangle \\ &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\langle \phi_{\alpha} | \chi \rangle|^2 \quad \therefore \langle \chi | \rho | \chi \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

4. ρ descreve um estado puro se, e somente se, $\rho^2 = \rho$:

$$\text{Se } \rho = |\phi\rangle \langle\phi|$$

$$\rho^2 = (|\phi\rangle \langle\phi|) (|\phi\rangle \langle\phi|) = |\phi\rangle \langle\phi|\phi\rangle \langle\phi| = |\phi\rangle \langle\phi| = \rho \quad (\text{A.4})$$

Se $\rho^2 = \rho$: como $\rho^\dagger = \rho$, ρ é um projetor. Como $\text{Tr} \rho = 1$, a dimensão do espaço vetorial obtido pelo operador de projeção tem dimensão 1, e ρ tem a forma $|\varphi\rangle \langle\varphi|$ [2].

5. A probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\chi\rangle$ é dada por $\text{Tr}(\rho |\chi\rangle \langle\chi|)$:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\rho |\chi\rangle \langle\chi|) &= \text{Tr}\left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \langle\phi_{\alpha}|\chi\rangle \langle\chi|\right) = \sum_m \langle m| \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \langle\phi_{\alpha}|\chi\rangle \langle\chi|\right) |m\rangle \\
 &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}|\chi\rangle \sum_m \langle m|\phi_{\alpha}\rangle \langle\chi|m\rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}|\chi\rangle \sum_m \langle\chi|m\rangle \langle m|\phi_{\alpha}\rangle \\
 &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}|\chi\rangle \langle\chi| \left(\sum_m |m\rangle \langle m|\right) |\phi_{\alpha}\rangle = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \langle\phi_{\alpha}|\chi\rangle \langle\chi| \mathbb{1} |\phi_{\alpha}\rangle \\
 &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} |\langle\phi_{\alpha}|\chi\rangle|^2
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

6. $i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)]$:

Como $i\hbar \frac{d|\phi(t)\rangle}{dt} = H(t) |\phi(t)\rangle$, temos que:

$$\begin{aligned}
 i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} &= i\hbar \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} p_{\alpha} |\phi_{\alpha}(t)\rangle \langle\phi_{\alpha}(t)| \right) = \sum_{\alpha} p_{\alpha} i\hbar \frac{d}{dt} (|\phi_{\alpha}(t)\rangle \langle\phi_{\alpha}(t)|) \\
 &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} i\hbar \left(\frac{d|\phi_{\alpha}(t)\rangle}{dt} \langle\phi_{\alpha}(t)| + |\phi_{\alpha}(t)\rangle \frac{d\langle\phi_{\alpha}(t)|}{dt} \right) \\
 &= \sum_{\alpha} p_{\alpha} (H(t) |\phi_{\alpha}(t)\rangle \langle\phi_{\alpha}(t)| - |\phi_{\alpha}(t)\rangle \langle\phi_{\alpha}(t)| H) \\
 &= H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t) = [H(t), \rho(t)]
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Apêndice B

Operador de estado reduzido Localizado - estado holístico

Vamos obter o operador de estado reduzido localizado no poço da esquerda, ou seja, vamos calcular:

$$\rho_L = \frac{1}{M} [\langle L+ | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L+ \rangle + \langle L- | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L- \rangle] \quad (\text{B.1})$$

Para obter $\langle L+ | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L+ \rangle$, é necessário, primeiro, calcular $\langle L+ | \bullet | \Psi \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle L+ | \bullet | \Psi \rangle &= \langle L+ | \bullet \left[\chi(a + \eta b e^{i\theta}) |L+, L-\rangle + a\sqrt{1 - \chi^2} |L+, R-\rangle \right. \\ &\quad \left. + b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} |L-, R+\rangle \right] \\ &= \chi(a + \eta b e^{i\theta}) \langle L- | + a\sqrt{1 - \chi^2} \langle R- | + 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Da mesma forma:

$$\langle \Psi | \bullet | L+ \rangle = \chi(a + \eta b e^{-i\theta}) \langle L- | + a\sqrt{1 - \chi^2} \langle R- | \quad (\text{B.3})$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle L+ | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L+ \rangle &= \left[\chi(a + \eta b e^{i\theta}) \langle L- | + a\sqrt{1 - \chi^2} \langle R- | \right] \\ &\quad \times \left[\chi(a + \eta b e^{-i\theta}) \langle L- | + a\sqrt{1 - \chi^2} \langle R- | \right] \\ &= \chi^2 (1 + 2\eta a b \cos \theta) \langle L- | \langle L- | + \\ &\quad + \chi \sqrt{1 - \chi^2} a (a + \eta b e^{i\theta}) \langle L- | \langle R- | + \\ &\quad + \chi \sqrt{1 - \chi^2} a (a + \eta b e^{-i\theta}) \langle R- | \langle L- | + \\ &\quad + a^2 (1 - \chi^2) \langle R- | \langle R- | \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Vamos, agora, calcular o termo $\langle L- | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L- \rangle$, para isso é necessário calcularmos primeiramente: $\langle L- | \bullet | \Psi \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle L- | \bullet | \Psi \rangle &= \langle L- | \bullet \left[\chi(a + \eta b e^{i\theta}) |L+, L-\rangle + a \sqrt{1 - \chi^2} |L+, R-\rangle \right. \\ &\quad \left. + b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} |L-, R+\rangle \right] \\ &= \eta \chi (a + \eta b e^{i\theta}) |L+\rangle + 0 + b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} |R+\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Da mesma forma:

$$\langle \Psi | \bullet | L- \rangle = \eta \chi (a + \eta b e^{-i\theta}) \langle L+ | + b e^{-i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} \langle R+ | \quad (\text{B.6})$$

o que nos leva a:

$$\begin{aligned} \langle L- | \bullet | \Psi \rangle \langle \Psi | \bullet | L- \rangle &= \left[\eta \chi (a + \eta b e^{i\theta}) |L+\rangle + b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} |R+\rangle \right] \cdot \\ &\quad \cdot \left[\eta \chi (a + \eta b e^{-i\theta}) \langle L+ | + b e^{-i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} \langle R+ | \right] \\ &= \chi^2 (1 + 2\eta ab \cos \theta) |L+\rangle \langle L+ | + \\ &\quad + \eta \chi b e^{-i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} (a + \eta b e^{i\theta}) |L+\rangle \langle R+ | + \\ &\quad + \eta \chi b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} (a + \eta b e^{-i\theta}) |R+\rangle \langle L+ | + \\ &\quad + b^2 (1 - \chi^2) |R+\rangle \langle R+ | \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Por fim, o operador de estado reduzido localizado no poço da esquerda ρ_L será dado por:

$$\begin{aligned} \rho_L &= \left(\frac{1}{M} \right) [c_1 |L+\rangle \langle L+ | + c_4 |L+\rangle \langle R+ | + c_1 |L-\rangle \langle L- | + \\ &\quad + c_5 |L-\rangle \langle R- | + c_4^* |R+\rangle \langle L+ | + c_2 |R+\rangle \langle R+ | + \\ &\quad + c_5^* |R-\rangle \langle L- | + c_3 |R-\rangle \langle R- |] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \chi^2(1 + 2\eta ab \cos \theta) \\
 c_2 &= b^2(1 - \chi^2) \\
 c_3 &= a^2(1 - \chi^2) \\
 c_3 &= a^2(1 - \chi^2) \\
 c_4 &= \eta\chi\sqrt{1 - \chi^2}(a + \eta be^{i\theta})be^{-i\theta} \\
 c_5 &= \chi\sqrt{1 - \chi^2}(a + \eta be^{i\theta})a \\
 M &= 2c_1 + c_2 + c_3
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Para obter a constante M foi utilizado que $\text{Tr}(\rho_L) = 1$.

Apêndice C

Operador de estado reduzido localizado - segunda quantização

Apesar de já termos demonstrado a equivalência entre as duas abordagens, por motivos didáticos e para elucidar melhor a dinâmica dos operadores de criação e destruição nesse contexto, vamos recalculer os operadores de estado reduzidos localizados para o estado:

$$|\Psi\rangle = \chi(a + \eta be^{i\theta}) |L+, L-\rangle + a\sqrt{1 - \chi^2} |L+, R-\rangle + be^{i\theta}\sqrt{1 - \chi^2} |L-, R+\rangle \quad (\text{C.1})$$

Este estado corresponde a duas partículas num poço de potencial assimétrico, contendo uma partícula no poço da esquerda (L) e outra, idêntica, no poço da direita (R) que pode tunelar para o outro lado. Essas partículas também possuem graus de liberdade de pseudo-spin (representados por $+$ e $-$). Neste estado em particular, não sabemos exatamente a “polarização” no qual cada partícula se encontra, sabemos apenas que elas se encontram em “polarização” opostas.

Em segunda quantização este estado será dado por:

$$|\Psi\rangle = \chi(a + \eta be^{i\theta}) a_{L+}^\dagger a_{L-}^\dagger |0\rangle + a\sqrt{1 - \chi^2} a_{L+}^\dagger a_{R-}^\dagger |0\rangle + be^{i\theta}\sqrt{1 - \chi^2} a_{L-}^\dagger a_{R+}^\dagger |0\rangle \quad (\text{C.2})$$

É importante frisar que partimos de um estado da mesma forma do estado holístico, não utilizamos o postulado da simetrização e antissimetização. Da mesma forma quando demonstramos a equivalência entre os dois formalismos.

Vamos, primeiramente, calcular o operador de estado reduzido localizado na esquerda ρ_L :

$$\rho_L = \frac{1}{M} \left[\langle 0 | a_{L+} \rho a_{L+}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | a_{L-} \rho a_{L-}^\dagger | 0 \rangle \right] \quad (\text{C.3})$$

onde M é uma constante de normalização.

Vamos desenvolver o termo $\langle 0 | a_{L+} \rho a_{L+}^\dagger | 0 \rangle$. Para isso será útil calcularmos as expressões: $\langle 0 | a_{L+} a_{L+}^\dagger a_{L-}^\dagger | 0 \rangle$, $\langle 0 | a_{L+} a_{L+}^\dagger a_{R-}^\dagger | 0 \rangle$, $\langle 0 | a_{L+} a_{L-}^\dagger a_{R+}^\dagger | 0 \rangle$, $\langle 0 | a_{L-} a_{L+} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle$, $\langle 0 | a_{R-} a_{L+} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle$ e $\langle 0 | a_{R+} a_{L-} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{L+} a_{L+}^\dagger a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | \left([a_{L+}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{L+} \right) a_{L-}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 1 \cdot a_{L-}^\dagger | 0 \rangle + \eta \langle 0 | a_{L+}^\dagger \left([a_{L+}, a_{L-}^\dagger]_\eta + \eta a_{L-}^\dagger a_{L+} \right) | 0 \rangle \\ &= a_{L-}^\dagger | 0 \rangle + \eta \langle 0 | a_{L+}^\dagger \cdot 0 | 0 \rangle + \eta^2 \langle 0 | a_{L+}^\dagger a_{L-}^\dagger a_{L+} | 0 \rangle \\ \therefore \langle 0 | a_{L+} a_{L+}^\dagger a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= a_{L-}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{L+} a_{L+}^\dagger a_{R-}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | \left([a_{L+}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{L+} \right) a_{R-}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 1 \cdot a_{R-}^\dagger | 0 \rangle + \eta \langle 0 | a_{L+}^\dagger \left([a_{L+}, a_{R-}^\dagger]_\eta + \eta a_{R-}^\dagger a_{L+} \right) | 0 \rangle \\ &= a_{R-}^\dagger | 0 \rangle + \eta \langle 0 | a_{L+}^\dagger \cdot 0 | 0 \rangle + \eta^2 \langle 0 | a_{L+}^\dagger a_{R-}^\dagger a_{L+} | 0 \rangle \\ \therefore \langle 0 | a_{L+} a_{L+}^\dagger a_{R-}^\dagger | 0 \rangle &= a_{R-}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{L+} a_{L-}^\dagger a_{R+}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | \left([a_{L+}, a_{L-}^\dagger]_\eta + \eta a_{L-}^\dagger a_{L+} \right) a_{R+}^\dagger | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | 0 \cdot a_{R+}^\dagger | 0 \rangle + \eta \langle 0 | a_{L-}^\dagger \left([a_{L+}, a_{R+}^\dagger]_\eta + \eta a_{R+}^\dagger a_{L+} \right) | 0 \rangle \\ &= 0 + \eta \langle 0 | a_{L-}^\dagger \cdot 0 | 0 \rangle + \eta^2 \langle 0 | a_{L-}^\dagger a_{R+}^\dagger a_{L+} | 0 \rangle \\ \therefore \langle 0 | a_{L+} a_{L-}^\dagger a_{R+}^\dagger | 0 \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | a_{L-} a_{L+} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{L-} \left([a_{L+}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{L+} \right) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_{L-} \cdot 1 | 0 \rangle + \eta \langle 0 | \left([a_{L-}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{L-} \right) a_{L+} | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a_{L-} | 0 \rangle + \eta \langle 0 | 0 \cdot a_{L+} | 0 \rangle + \eta^2 \langle 0 | a_{L+}^\dagger a_{L-} a_{L+} | 0 \rangle \\ \therefore \langle 0 | a_{L-} a_{L+} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{L-} | 0 \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{R-} a_{L+} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{R-} \left([a_{L+}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{L+} \right) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | a_{R-} \cdot 1 | 0 \rangle + \eta \langle 0 | \left([a_{R-}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{R-} \right) a_{L+} | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | a_{R-} + \eta \langle 0 | 0 \cdot a_{L+} | 0 \rangle + \eta^2 \langle 0 | a_{L+}^\dagger a_{R-} a_{L+} | 0 \rangle \\
 \therefore \langle 0 | a_{L-} a_{L+} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{R-}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{R+} a_{L-} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{R+} \left([a_{L-}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{L-} \right) | 0 \rangle \\
 &= \langle 0 | a_{R+} \cdot 0 | 0 \rangle + \eta \langle 0 | \left([a_{R+}, a_{L+}^\dagger]_\eta + \eta a_{L+}^\dagger a_{R+} \right) a_{L-} | 0 \rangle \\
 &= 0 + \eta \langle 0 | 0 \cdot a_{L-} | 0 \rangle + \eta^2 \langle 0 | a_{L+}^\dagger a_{R+} a_{L-} | 0 \rangle \\
 \therefore \langle 0 | a_{R+} a_{L-} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto o termo $\langle 0 | a_{L+} \rho a_{L+}^\dagger | 0 \rangle$ é dado por:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{L+} \rho a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \left[\chi(a + \eta b e^{i\theta}) a_{L-}^\dagger | 0 \rangle + a \sqrt{1 - \chi^2} a_{R-}^\dagger | 0 \rangle \right] \cdot \\
 &\quad \cdot \left[\chi(a + \eta b e^{-i\theta}) \langle 0 | a_{L-} + a \sqrt{1 - \chi^2} \langle 0 | a_{R-} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{L+} \rho a_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \chi^2 (1 + 2\eta ab \cos \theta) a_{L-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L-} + \\
 &\quad + \chi \sqrt{1 - \chi^2} a (a + \eta b e^{i\theta}) a_{L-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R-} + \\
 &\quad + \chi \sqrt{1 - \chi^2} a (a + \eta b e^{-i\theta}) a_{R-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L-} + \\
 &\quad + a^2 (1 - \chi^2) a_{R-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R-}
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Comparando B.4 e C.4 vimos que, como esperado, obtemos termos idênticos.

É necessário, agora calcular o termo $\langle 0 | a_{L-} \rho a_{L-}^\dagger | 0 \rangle$ do traço parcial localizado na esquerda. De modo similar é necessário calcular expressões auxiliares que darão:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{L-} a_{L+}^\dagger a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= \eta a_{L+}^\dagger | 0 \rangle \\
 \langle 0 | a_{L-} a_{L+}^\dagger a_{R-}^\dagger | 0 \rangle &= 0 \\
 \langle 0 | a_{L-} a_{L-}^\dagger a_{R+}^\dagger | 0 \rangle &= a_{R+}^\dagger | 0 \rangle \\
 \langle 0 | a_{L-} a_{L+} a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= \eta \langle 0 | a_{L+} \\
 \langle 0 | a_{R-} a_{L+} a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= 0 \\
 \langle 0 | a_{R+} a_{L-} a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | a_{R+}
 \end{aligned}$$

Como o procedimento é quase idêntico ao feito anteriormente, omitimos os cálculos. Portanto o termo $\langle 0 | a_{L-} \rho a_{L-}^\dagger | 0 \rangle$ é dado por:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{L-} \rho a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= \left[\eta \chi (a + \eta b e^{i\theta}) a_{L+}^\dagger | 0 \rangle + b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} a_{R+}^\dagger | 0 \rangle \right] \\
 &\cdot \left[\eta \chi (a + \eta b e^{-i\theta}) \langle 0 | a_{L+} + b e^{-i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} \langle 0 | a_{R+} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | a_{L-} \rho a_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= \chi^2 (1 + 2\eta ab \cos \theta) a_{L+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L+} + \\
 &+ \eta \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + \eta b e^{i\theta}) b^{-i\theta} a_{L+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R+} + \\
 &+ \eta \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + \eta b e^{-i\theta}) b^{i\theta} a_{R+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L+} + \\
 &+ b^2 (1 - \chi^2) a_{R+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R+}
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

Assim a partir de C.4 e C.5, obtemos o operador de estado reduzido localiza na esquerda

$$\begin{aligned}
 \rho_L &= \frac{1}{M} [c_1 a_{L+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L+} + c_4 a_{L+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R+} + c_1 a_{L-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L-} + \\
 &+ c_5 a_{L-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R-} + c_4^* a_{R+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L+} + c_2 a_{R+}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R+} + \\
 &+ c_5^* a_{R-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{L-} + c_3 a_{R-}^\dagger | 0 \rangle \langle 0 | a_{R-}]
 \end{aligned} \tag{C.6}$$

onde

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \chi^2(1 + 2\eta ab \cos \theta) \\
 c_2 &= b^2(1 - \chi^2) \\
 c_3 &= a^2(1 - \chi^2) \\
 c_4 &= \eta\chi\sqrt{1 - \chi^2}(a + \eta be^{i\theta})be^{-i\theta} \\
 c_5 &= \chi\sqrt{1 - \chi^2}(a + \eta be^{i\theta})a \\
 M &= 2c_1 + c_2 + c_3
 \end{aligned}$$

Escrito na forma matricial:

$$\rho_L = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} c_1 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_5 \\ c_4^* & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_5^* & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

O operador de estado reduzido localizado na esquerda [C.6](#) calculado no formalismo de segunda quantização é idêntico ao [B.9](#) calculado pelo formalismo de estado holístico.

Apêndice D

Operador de estado reduzido localizado - bóson composto

Seguindo a modelagem da álgebra deformada de Quon vamos calcular o operador de estado reduzido localizado no poço da esquerda para bósons compostos idênticos.

Calculando o operador de estado reduzido localizado no poço da esquerda (ρ_L):

$$\rho_L = \frac{1}{M} \left[\langle 0 | A_{L+} | \Psi \rangle \langle \Psi | A_{L+}^\dagger | 0 \rangle + \langle 0 | A_{L-} | \Psi \rangle \langle \Psi | A_{L-}^\dagger | 0 \rangle \right] \quad (\text{D.1})$$

Vamos calcular os termos 1) $\langle 0 | A_{L+} | \Psi \rangle$ e 2) $\langle 0 | A_{L-} | \Psi \rangle$ separadamente.

$$\begin{aligned} 1) \langle 0 | A_{L+} | \Psi \rangle &= (a + be^{i\theta})\chi \langle 0 | A_{L+} A_{L+}^\dagger A_{L-}^\dagger | 0 \rangle + \\ &a\sqrt{1 - \chi^2} \langle 0 | A_{L+} A_{L+}^\dagger A_{R-}^\dagger | 0 \rangle + be^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} \langle 0 | A_{L+} A_{L-}^\dagger A_{R+}^\dagger | 0 \rangle \end{aligned}$$

Para calcularmos 1) é então necessário calcularmos outros três termos: $\langle 0 | A_{L+} A_{L+}^\dagger A_{L-}^\dagger | 0 \rangle$, $\langle 0 | A_{L+} A_{L+}^\dagger A_{R-}^\dagger | 0 \rangle$ e $\langle 0 | A_{L+} A_{L-}^\dagger A_{R+}^\dagger | 0 \rangle$.

Assim:

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_{L+} A_{L+}^\dagger A_{L-}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | \left(1 + q A_{L+}^\dagger A_{L+} \right) A_{L-}^\dagger | 0 \rangle \\ &= |L-\rangle + q \langle 0 | A_{L+}^\dagger \left(0 + q A_{L-}^\dagger A_{L+} \right) | 0 \rangle = |L-\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_{L+} A_{L+}^\dagger A_{R-}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | \left(1 + q A_{L+}^\dagger A_{L+} \right) A_{R-}^\dagger | 0 \rangle \\ &= |R-\rangle + q \langle 0 | A_{L+}^\dagger \left(0 + q A_{R-}^\dagger A_{L+} \right) | 0 \rangle = |R-\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 0 | A_{L+} A_{L-}^\dagger A_{R+}^\dagger | 0 \rangle &= \langle 0 | \left(0 + q A_{L-}^\dagger A_{L+} \right) A_{R+}^\dagger | 0 \rangle \\ &= q \langle 0 | A_{L-}^\dagger \left(0 + q A_{R+}^\dagger A_{L+} \right) | 0 \rangle = 0\end{aligned}$$

Logo

$$1) \langle 0 | A_{L+} | \Psi \rangle = (a + b e^{i\theta}) \chi |L-\rangle + a \sqrt{1 - \chi^2} |R-\rangle. \quad (\text{D.2})$$

Assim:

$$\begin{aligned}\langle 0 | A_{L+} | \Psi \rangle \langle \Psi | A_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \left((a + b e^{i\theta}) \chi |L-\rangle + a \sqrt{1 - \chi^2} |R-\rangle \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left((a + b e^{i\theta}) \chi \langle L-| + a \sqrt{1 - \chi^2} \langle R-| \right)\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}\langle 0 | A_{L+} | \Psi \rangle \langle \Psi | A_{L+}^\dagger | 0 \rangle &= \chi^2 (1 + 2ab \cos \theta) |L-\rangle \langle L-| + \\ &\quad a \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + b e^{i\theta}) |L-\rangle \langle R-| + \\ &\quad a \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + b e^{-i\theta}) |R-\rangle \langle L-| + \\ &\quad a^2 (1 - \chi^2) |R-\rangle \langle R-|. \quad (\text{D.3})\end{aligned}$$

Calculando o próximo termo:

$$\begin{aligned}2) \langle 0 | A_{L-} | \Psi \rangle &= (a + b e^{i\theta}) \chi \langle 0 | A_{L-} A_{L+}^\dagger A_{L-}^\dagger | 0 \rangle + \\ &\quad a \sqrt{1 - \chi^2} \langle 0 | A_{L-} A_{L+}^\dagger A_{R-}^\dagger | 0 \rangle + b e^{i\theta} \sqrt{1 - \chi^2} \langle 0 | A_{L-} A_{L-}^\dagger A_{R+}^\dagger | 0 \rangle \quad (\text{D.4})\end{aligned}$$

Para calcularmos 2) é então necessário calcularmos outros três termos:

$$\langle 0 | A_{L-} A_{L+}^\dagger A_{L-}^\dagger | 0 \rangle, \langle 0 | A_{L-} A_{L+}^\dagger A_{R-}^\dagger | 0 \rangle \text{ e } \langle 0 | A_{L-} A_{L-}^\dagger A_{R+}^\dagger | 0 \rangle.$$

Assim:

$$\begin{aligned}\langle 0| A_{L-} A_{L+}^\dagger A_{L-}^\dagger |0\rangle &= \langle 0| \left(0 + q A_{L+}^\dagger A_{L-}\right) A_{L-}^\dagger |0\rangle \\ &= q \langle 0| A_{L+}^\dagger \left(1 + q A_{L-}^\dagger A_{L-}\right) |0\rangle = q |L+\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 0| A_{L-} A_{L+}^\dagger A_{R-}^\dagger |0\rangle &= \langle 0| \left(0 + q A_{L+}^\dagger A_{L-}\right) A_{R-}^\dagger |0\rangle \\ &= q \langle 0| A_{L+}^\dagger \left(0 + q A_{R-}^\dagger A_{L-}\right) |0\rangle = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle 0| A_{L-} A_{L-}^\dagger A_{R+}^\dagger |0\rangle &= \langle 0| \left(1 + q A_{L-}^\dagger A_{L-}\right) A_{R+}^\dagger |0\rangle \\ &= |R+\rangle + q \langle 0| A_{L-}^\dagger \left(0 + q A_{R+}^\dagger A_{L-}\right) |0\rangle = |R+\rangle\end{aligned}$$

Logo

$$2) \langle 0| A_{L-} |\Psi\rangle = (a + be^{i\theta})\chi q |L+\rangle + be^{i\theta}\sqrt{1 - \chi^2} |R+\rangle. \quad (\text{D.5})$$

Assim:

$$\begin{aligned}\langle 0| A_{L-} |\Psi\rangle \langle \Psi| A_{L-}^\dagger |0\rangle &= \left((a + be^{i\theta})\chi q |L+\rangle + be^{i\theta}\sqrt{1 - \chi^2} |R+\rangle \right) \\ &\quad \cdot \left((a + be^{-i\theta})\chi q \langle L+| + be^{-i\theta}\sqrt{1 - \chi^2} \langle R+| \right)\end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}\langle 0| A_{L-} |\Psi\rangle \langle \Psi| A_{L-}^\dagger |0\rangle &= q^2 \chi^2 (1 + 2ab \cos \theta) |L+\rangle \langle L+| + \\ &\quad qbe^{-i\theta} \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + be^{i\theta}) |L+\rangle \langle R+| + \\ &\quad qb^{i\theta} \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + be^{-i\theta}) |R+\rangle \langle L+| + \\ &\quad b^2 (1 - \chi^2) |R+\rangle \langle R+|. \quad (\text{D.6})\end{aligned}$$

Portanto o operador de estado reduzido localizado no poço da esquerda [D.1](#) é obtido a partir de [D.3](#) e [D.6](#) como:

$$\begin{aligned}
 \rho_L = \frac{1}{M} [& q^2 c_1 A_{L+}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{L+} + q c_4 A_{L+}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{R+} + c_1 A_{L-}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{L-} + \\
 & + c_5 A_{L-}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{R-} + q c_4^* A_{R+}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{L+} + c_2 A_{R+}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{R+} + \\
 & + c_5^* A_{R-}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{L-} + c_3 A_{R-}^\dagger |0\rangle \langle 0| A_{R-}] \quad (D.7)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \chi^2 (1 + 2ab \cos \theta) \\
 c_2 &= b^2 (1 - \chi^2) \\
 c_3 &= a^2 (1 - \chi^2) \\
 c_4 &= \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + b e^{i\theta}) b e^{-i\theta} \\
 c_5 &= \chi \sqrt{1 - \chi^2} (a + b e^{i\theta}) a \\
 M &= c_1 (1 + q^2) + c_2 + c_3
 \end{aligned}$$

Note que as expressões de c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5 são as mesmas que encontradas em [B.9](#).

Escrito na forma matricial:

$$\rho_L = \frac{1}{M} \begin{bmatrix} q^2 c_1 & 0 & q c_4 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_5 \\ q c_4^* & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & c_5^* & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

Referências

- [1] G. Compagno, A. Castellini, and R. Lo Franco, “Dealing with indistinguishable particles and their entanglement,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, vol. 376, p. 20170317, July 2018.
- [2] M. Le Bellac, *Quantum physics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
- [3] A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods*. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [4] K. Eckert, J. Schliemann, D. Bruß, and M. Lewenstein, “Quantum correlations in systems of indistinguishable particles,” *Annals of Physics*, vol. 299, no. 1, pp. 88–127, 2002.
- [5] G. Ghirardi, L. Marinatto, and T. Weber, “Entanglement and properties of composite quantum systems: A conceptual and mathematical analysis,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 108, pp. 49–122, Jul 2002.
- [6] G. Ghirardi and L. Marinatto, “General criterion for the entanglement of two indistinguishable particles,” *Phys. Rev. A*, vol. 70, p. 012109, Jul 2004.
- [7] M. C. Tichy, F. Mintert, and A. Buchleitner, “Essential entanglement for atomic and molecular physics,” *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 44, p. 192001, sep 2011.
- [8] M. Tichy, F. de Melo, M. Kuś, F. Mintert, and A. Buchleitner, “Entanglement of identical particles and the detection process,” *Fortschritte der Physik*, vol. 61, no. 2-3, pp. 225–237, 2013.
- [9] B. J. Dalton, J. Goold, B. M. Garraway, and M. D. Reid, “Quantum entanglement for systems of identical bosons: I. general features,” *Physica Scripta*, vol. 92, p. 023004, jan 2017.
- [10] B. J. Dalton, J. Goold, B. M. Garraway, and M. D. Reid, “Quantum entanglement for systems of identical bosons: Ii. spin squeezing and other entanglement tests,” *Physica Scripta*, vol. 92, p. 023005, jan 2017.

-
- [11] R. Lo Franco and G. Compagno, “Quantum entanglement of identical particles by standard information-theoretic notions,” *Scientific Reports*, vol. 6, p. 20603, Feb 2016.
- [12] S. S. Avancini and G. Krein, “Many body problems with composite particles and q Heisenberg algebras,” *J. Phys. A*, vol. 28, pp. 685–692, 1995.
- [13] S. S. Avancini, J. R. Marinelli, and G. Krein, “Compositeness effects in the Bose-Einstein condensation,” *J. Phys. A*, vol. 36, pp. 9045–9052, 2003.
- [14] C. K. Law, “Quantum entanglement as an interpretation of bosonic character in composite two-particle systems,” *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 034306, Mar 2005.
- [15] C. Chudzicki, O. Oke, and W. K. Wootters, “Entanglement and composite bosons,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 104, p. 070402, Feb 2010.
- [16] M. Betz, G. Krein, and T. A. J. Maris, “Bags in the shell model,” *Nucl. Phys. A*, vol. 437, pp. 509–518, 1985.
- [17] G. Krein and T. A. J. Maris, “Compatibility of the nuclear shell and nucleon bag models,” *Phys. Rev. C*, vol. 36, pp. 365–371, 1987.
- [18] F. Benatti, R. Floreanini, F. Franchini, and U. Marzolino, “Entanglement in indistinguishable particle systems,” *Phys. Rept.*, vol. 878, pp. 1–27, 2020.
- [19] A. C. Lourenço, T. Debarba, and E. I. Duzzioni, “Entanglement of indistinguishable particles: A comparative study,” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 012341, Jan 2019.
- [20] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. Boston: McGraw-Hill, 1971.
- [21] J. W. Negele and H. Orland, *Quantum Many-particle Systems*. Westview Press, Nov. 1998.
- [22] O. W. Greenberg, “Quon statistics,” *Phys. Rev. D*, vol. 43, pp. 4111–4120, 1991.
- [23] Y. B. B. Band and Y. Avishai, *Quantum Mechanics with Applications to Nanotechnology and Information Science*. Amsterdam: Elsevier, 2012.
- [24] T. Nishioka, “Entanglement entropy: holography and renormalization group,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 90, no. 3, p. 035007, 2018.

-
- [25] O. W. Greenberg and R. C. Hilborn, "Quon statistics for composite systems and a limit on the violation of the Pauli principle for nucleons and quarks," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, p. 4460, 1999.
- [26] M. D. Girardeau, "Second-quantization representation for systems of atoms, nuclei, and electrons," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 27, pp. 1416–1419, Nov 1971.
- [27] M. D. Girardeau, "Second-quantization representation for a nonrelativistic system of composite particles. I. Generalized Tani transformation and its iterative evaluation," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 16, pp. 1901–1919, 09 1975.
- [28] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel, and J. S. da Veiga, "Second quantization approach to composite hadron interactions in quark models," *Phys. Lett. B*, vol. 367, pp. 317–322, 1996.
- [29] D. Hadjimichef, G. Krein, S. Szpigel, and J. S. da Veiga, "Mapping of composite hadrons into elementary hadrons and effective hadronic Hamiltonians," *Annals Phys.*, vol. 268, pp. 105–148, 1998.