

**MIGUEL ÁNGEL ESPINOZA CRUZ**

**REPRESENTAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO BIFÁSICAS: UM  
MODELO A PARÂMETROS DISCRETOS, DESENVOLVIDO  
DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DAS FASES, QUE LEVA EM CONTA O  
EFEITO DA FREQUÊNCIA SOBRE OS PARÂMETROS  
LONGITUDINAIS**

**Ilha Solteira**

**2018**

**MIGUEL ÁNGEL ESPINOZA CRUZ**

**REPRESENTAÇÃO DE LINHAS DE TRANSMISSÃO BIFÁSICAS: UM  
MODELO A PARÂMETROS DISCRETOS, DESENVOLVIDO  
DIRETAMENTE NO DOMÍNIO DAS FASES, QUE LEVA EM CONTA O  
EFEITO DA FREQUÊNCIA SOBRE OS PARÂMETROS  
LONGITUDINAIS**

Dissertação apresentada no Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Estadual Paulista-UNESP-Campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área do Conhecimento: Automação.

PROF. Dr. SÉRGIO KUROKAWA

Orientador

**Ilha Solteira**

**2018**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

E776r Espinoza Cruz, Miguel Ángel.  
Representação de linhas de transmissão bifásicas: um modelo a parâmetros discretos, desenvolvido diretamente no domínio das fases, que leva em conta o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais / Miguel Ángel Espinoza Cruz. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018  
153 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2018

Orientador: Sérgio Kurokawa  
Inclui bibliografia

1. Modelos de linha. 2. Transitórios eletromagnéticos. 3. Linhas bifásicas. 4. Parâmetros longitudinais. 5. Sintetização do efeito da frequência. 6. Circuitos  $\pi$ .

  
Raiane da Silva Santos

Supervisora Técnica de Seção  
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação  
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação  
CR3/8 - 9999

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

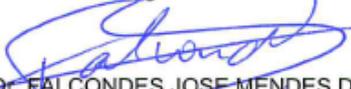
**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Representação de linhas de transmissão bifásicas: um modelo a parâmetros discretos, desenvolvido diretamente no domínio das fases, que leva em conta o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais

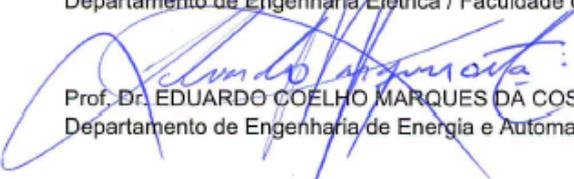
**AUTOR: MIGUEL ANGEL ESPINOZA CRUZ**

**ORIENTADOR: SERGIO KUROKAWA**

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: AUTOMAÇÃO pela Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. SERGIO KUROKAWA  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. FALCONDES JOSE MENDES DE SEIXAS  
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

  
Prof. Dr. EDUARDO COELHO MARQUES DA COSTA  
Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétrica / Escola Politécnica da USP

Ilha Solteira, 02 de fevereiro de 2018

## **DEDICO**

Aos meus pais, Wenceslao e Fidencia, aos meus irmãos, Juan Carlos, Carmen Rosa, Gladys e a todos os amigos que acreditaram e estiveram comigo durante a realização deste trabalho.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, Wenceslao Inocente Espinoza Ramos e Fidencia Cruz Alvarado, pelo apoio incondicional durante todo este tempo. A meus irmãos, Juan Carlos Espinoza Cruz, Carmen Rosa Espinoza Cruz e Gladys Espinoza Cruz, por acreditarem em mi.

Ao Anderson Ricardo Justo de Araújo, pelo apoio e disposição em ajudar.

Ao Prof. Dr. Sérgio Kurokawa pela orientação para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores da banca pela disponibilidade e pelas sugestões para a melhoria deste trabalho.

Por fim, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio econômico.

## RESUMO

Sabe-se que existe um modelo de linha bifásica a parâmetros discretos e constantes, desenvolvido diretamente no domínio do tempo. Porém, o fato de considerar os parâmetros longitudinais para uma frequência fixa, faz com que as respostas de corrente e de tensão apresentem um comportamento aproximado. Para melhorar a qualidade das formas de onda, deve-se levar em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. Nesta dissertação foi desenvolvido um modelo de linha de transmissão bifásica a parâmetros discretos, diretamente no domínio do tempo, que leva em consideração o efeito da frequência. A sintetização do mesmo, tanto para as fases quanto para o acoplamento magnético, é representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores, onde a quantidade de blocos RL deve ser a necessária para obter o melhor ajuste da resposta em frequência dos parâmetros longitudinais próprios e mútuos. No modelo proposto, as quedas de tensão nas fases produzidas pelo acoplamento magnético, foram calculadas por meio de uma extensão do modelo de Schulze. As equações de corrente e de tensão ao longo da cascata de circuitos  $\pi$  da linha bifásica foram escritas na forma de equação de estado. Tal equação é resolvida utilizando o método de Heun. No processo de validação do modelo proposto, o modelo clássico modal foi utilizado como modelo de referência, tanto para linhas bifásicas que possuem plano de simetria vertical quanto para linhas bifásicas que não possuem plano de simetria vertical.

**Palavras-Chave:** Modelos de linha. Transitórios eletromagnéticos. Linhas bifásicas. Parâmetros longitudinais. Sintetização do efeito da frequência. Circuitos  $\pi$ . Modelo de Schulze. Equação de estado. Método de Heun. Modelo clássico modal.

## ABSTRACT

It is known that there exist a lumped and constant parameters two-phase line model, developed directly in time domain. However, the fact to consider the longitudinal parameters for a fixed frequency, it does what current and voltage responses present an approximated behavior. To improve the quality of the waveforms must be taken into consideration the frequency effect on the longitudinal parameters. In this dissertation was developed a lumped parameters two-phase transmission line model, directly in time domain, that takes into consideration the frequency effect. The synthesis of the same, both for the phases and for the magnetic coupling, is represented by a series and parallel association of resistors and inductors, where the quantity of RL-blocks must be the necessary to obtain the best adjustment of the frequency response of the own and mutual longitudinal parameters. In the proposed model, the voltage drops in the phases produced by the magnetic coupling, were calculated by an extension of Schulze's Model. Current and voltage equations along the cascade of  $\pi$ -circuits of the two-phase line were written in the form of state equation. Such equation is solved using Heun's Method. In the validation process of the proposed model, the classical modal model was used as reference model, both for two-phase lines that possess vertical symmetry plane and for two-phase lines that do not possess vertical symmetry plane.

**Keywords:** Line models. Electromagnetic transients. Two-phase lines. Longitudinal parameters. Synthesis of the frequency effect.  $\pi$ -circuits. Schulze's Model. State equation. Heun's Method. Classical modal model.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Validação do modelo proposto para uma linha de transmissão bifásica que possui plano de simetria vertical: Modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (a) e modelo proposto (b).....	18
Figura 2 – Validação do modelo proposto para uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical: Modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (a) e modelo proposto (b).....	19
Figura 3 – Condutores $i$ e $k$ , sobre o solo, e as suas respectivas imagens $i'$ e $k'$ .....	21
Figura 4 – Condutores $i$ e $k$ , sobre o solo, e as suas respectivas imagens $i'$ e $k'$ .....	29
Figura 5 – Capacitância entre os condutores, e entre cada um deles e o solo. ....	31
Figura 6 – Linha monofásica representada por meio de uma cascata de circuitos $\pi$ .....	34
Figura 7 – Linha monofásica representada por meio de um circuito $\pi$ . ....	35
Figura 8 – Circuito $\pi$ que leva em consideração o efeito da frequência.....	40
Figura 9 – Representação das quedas de tensão em uma linha bifásica, devido aos parâmetros longitudinais mútuos. ....	49
Figura 10– Linha bifásica genérica. ....	50
Figura 11– Pequeno segmento de linha bifásica. ....	51
Figura 12 – Pequeno segmento de linha bifásica (circuito $\pi$ ) que leva em consideração o efeito da frequência.....	62
Figura 13 – Sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais mútuos: Acoplamento magnético. ....	62
Figura 14 – Pequeno segmento da linha bifásica genérica: Análise no domínio da frequência. ....	85

Figura 15– Linha bifásica representada por meio de 2 segmentos de linha: Análise no domínio da frequência.....	87
Figura 16– Vista frontal de uma linha de transmissão bifásica que possui plano de simetria vertical. ....	93
Figura 17– Circuito equivalente que representa a sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. ....	94
Figura 18 – Comportamento da resistência própria: Fases A e B .....	96
Figura 19 – Comportamento da indutância própria: Fases A e B .....	97
Figura 20 – Comportamento da “resistência mútua” .....	97
Figura 21 – Comportamento da indutância mútua .....	98
Figura 22 – Linha bifásica com os seus terminais receptores em aberto. ....	98
Figura 23 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).....	99
Figura 24 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).....	100
Figura 25 – Linha bifásica com os seus terminais receptores em curto-circuito.....	101
Figura 26 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).....	102
Figura 27 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).....	103

Figura 28– Vista frontal de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical. ....	105
Figura 29 – Comportamento da resistência própria: Fase A .....	109
Figura 30 – Comportamento da indutância própria: Fase A .....	109
Figura 31 – Comportamento da resistência própria: Fase B .....	110
Figura 32 – Comportamento da indutância própria: Fase B.....	110
Figura 33 – Comportamento da “resistência mútua”.....	111
Figura 34 – Comportamento da indutância mútua .....	111
Figura 35– Linha bifásica com os seus terminais receptores em aberto. ....	112
Figura 36 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal (curva preta).....	113
Figura 37 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva verde) e modelo clássico modal (curva preta).....	114
Figura 38 – Linha bifásica com os seus terminais receptores em curto-circuito.....	115
Figura 39 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva verde) e modelo clássico modal (curva preta).....	116
Figura 40 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase A: Modelo proposto desenvolvido diretamente no domínio do tempo.....	117
Figura 41 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva verde) e modelo clássico modal (curva preta).....	117
Figura 42 – Circuito equivalente relativo à aproximação racional de $Z(\omega)$ .....	133
Figura 43 – Linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, no domínio das fases. ....	147

Figura 44 – Resposta em frequência dos elementos da matriz de transformação modal  $[T_I]$ .

..... 152

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Domínios de representação e de simulação .....	14
Tabela 2 – Valores de resistências e de indutâncias para as fases A e B .....	95
Tabela 3 – Valores de resistências e de indutâncias para o acoplamento magnético.....	95
Tabela 4 – Valores de resistências e de indutâncias para a fase A.....	107
Tabela 5 – Valores de resistências e de indutâncias para a fase B .....	107
Tabela 6 – Valores de resistências e de indutâncias para o acoplamento magnético.....	108
Tabela 7 – Valores conhecidos da função $f(s)$ .....	127

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>2</b>	<b>PARÂMETROS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO</b> .....	20
2.1	Introdução .....	20
2.2	Impedância longitudinal de uma linha de transmissão .....	20
2.3	Impedância externa de uma linha de transmissão .....	21
2.4	Impedância interna de uma linha de transmissão .....	23
2.5	Impedância devido ao efeito do solo .....	25
2.6	Admitância transversal de uma linha de transmissão .....	28
2.7	Considerações .....	32
<b>3</b>	<b>MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO A PARÂMETROS DISCRETOS</b> .....	33
3.1	Introdução .....	33
3.2	Representação de uma linha de transmissão monofásica por meio de elementos discretos de circuitos .....	33
3.2.1	Representação de uma linha de transmissão em aberto .....	35
3.3	Representação de uma linha de transmissão monofásica por meio de elementos discretos de circuitos, que leva em consideração o efeito da frequência .....	39
3.4	Modelo estudado para uma linha de transmissão bifásico, desenvolvido diretamente nos domínios das fases e do tempo .....	48
3.4.1	<i>Considerações com relação ao modelo</i> .....	48
3.4.2	<i>Representação de uma linha de transmissão bifásica por meio de elementos discretos de circuitos: Análise no domínio do tempo</i> .....	50
3.5	Considerações .....	58
<b>4</b>	<b>DESENVOLVIMENTO DO MODELO PROPOSTO</b> .....	60
4.1	Introdução .....	60
4.2	Desenvolvimento do modelo proposto: Análise no domínio do tempo .....	61
4.3	Desenvolvimento do modelo proposto: Análise no domínio da frequência .....	83

4.4	Considerações .....	91
<b>5</b>	<b>VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO .....</b>	<b>93</b>
5.1	Linhas bifásicas que possuem plano de simetria vertical.....	93
5.2	Linhas bifásicas que não possuem plano de simetria vertical.....	104
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES GERAIS .....</b>	<b>119</b>
6.1	Sugestões para trabalhos futuros .....	122
6.2	Trabalhos apresentados .....	122
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>123</b>
	<b>ANEXO A: APROXIMAÇÃO DOS PARÂMETROS LONGITUDINAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO POR MEIO DE FUNÇÕES RACIONAIS.....</b>	<b>126</b>
A.1	Vector Fitting .....	126
A.2	Aproximação racional de uma função $Z(\omega)$ que ajusta as impedâncias longitudinais de uma linha de transmissão.....	132
	<b>ANEXO B: CÁLCULO DE MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO MODAL ....</b>	<b>135</b>
B.1	Cálculo das matrizes de transformação modal ( $[T_I]$ e $[T_V]$ ) por meio do método numérico iterativo de Newton-Raphson.....	135
	<b>ANEXO C: REPRESENTAÇÃO DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO POLIFÁSICA .....</b>	<b>140</b>
C.1	Introdução.....	140
C.2	Equações diferenciais de uma linha polifásica.....	140
C.3	Decomposição modal de linhas de transmissão .....	142
C.4	Linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, no domínio modal.....	146

## 1 INTRODUÇÃO

As linhas de transmissão de energia elétrica são os componentes de maior importância dentro de um sistema elétrico de potência. Estas utilizam-se para ligar usinas elétricas com cargas industriais, além das grandes distâncias de separação entre elas. Em alguns casos é necessário interligar grandes subsistemas de energia elétrica. Entretanto, as tensões, as correntes, e os fluxos de potência nas linhas de transmissão são medidos nas subestações elétricas.

As equações diferenciais que descrevem o comportamento das tensões e correntes ao longo de uma linha de transmissão monofásica levam em consideração os efeitos do solo e pelicular sobre os parâmetros longitudinais. Neste contexto as equações diferenciais serão de difícil resolução analítica, mas as soluções obtidas serão precisas e confiáveis.

Desde 1960, diversos pesquisadores trabalham no desenvolvimento de modelos de linhas aéreas de transmissão de energia elétrica, para que sejam utilizados na análise de transitórios eletromagnéticos, resultantes das operações de manobras e de chaveamentos que ocorrem em um sistema de energia elétrica.

Vale ressaltar que os sistemas de energia elétrica sempre possuem elementos não lineares (transformadores de potência, dispositivos eletrônicos de potência, etc.). Para analisar os transitórios eletromagnéticos em tais tipos de sistemas, requer-se que os componentes nos mesmos estejam representados no domínio do tempo. Isto significa que os modelos de linhas de transmissão preferencialmente serão desenvolvidos no domínio do tempo.

Nos modelos de linhas de transmissão falam-se dos domínios de representação e de simulação das mesmas. Estes domínios estão fortemente vinculados, já que a representação de uma linha de transmissão depende do domínio de simulação. Na tabela 1, especificam-se os mesmos.

Tabela 1 – Domínios de representação e de simulação

Domínios de representação	Domínios de simulação
• Fases	• Tempo
• Modal	• Frequência

Fonte: Elaboração própria do autor.

Da tabela 1, pode-se concluir que existem 4 maneiras de analisar os transitórios eletromagnéticos; são elas:

- Domínios das fases e do tempo.
- Domínios das fases e da frequência.
- Domínios modal e do tempo.
- Domínios modal e da frequência.

Um dos primeiros modelos a parâmetros distribuídos que representa uma linha de transmissão diretamente no domínio do tempo, foi desenvolvido por H. W. Dommel. Este modelo consiste em combinar o método das características (ou método de Bergeron) com o método numérico de integração trapezoidal (ou método de Heun), resultando em um algoritmo que é capaz de simular transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia elétrica (DOMMEL et al., 1969). Este algoritmo sofreu sucessivas evoluções e atualmente é denominado *Eletromagnetic Transients Program*, ou simplesmente EMTP (DOMMEL, 1996).

Para estudar a propagação das ondas de tensão e de corrente em linhas monofásicas de transmissão de energia elétrica, durante os transitórios eletromagnéticos, deve-se levar em consideração que as linhas monofásicas são representadas por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$  (MAMIS et al., 2003).

O modelo a parâmetros discretos e constantes, isto é, invariáveis em relação à frequência, é de fácil utilização, mas não representa adequadamente uma linha de transmissão em toda a faixa de frequências na qual está presente os fenômenos de natureza transitória. Na maioria dos casos, este modelo aumenta a amplitude das harmônicas de ordem elevada, distorcendo as formas de onda e produzindo picos exagerados (MARTÍ et al., 1982; FARIA et al., 2002).

Para melhorar a qualidade do comportamento das tensões e correntes ao longo de uma linha de transmissão monofásica, neste trabalho será mostrado o desenvolvimento de um modelo de linha monofásica a parâmetros discretos que leva em consideração o efeito da frequência (influencia na constituição da equação de estado) sobre os parâmetros

longitudinais. Onde a integração da equação de estado será realizada por meio do método de Heun (método de integração trapezoidal) (YAMANAKA, 2009).

Existe um outro modelo a parâmetros distribuídos que foi desenvolvido para estudar os transitórios eletromagnéticos que ocorrem em um sistema de energia elétrica. Nesse modelo a solução das equações diferenciais de propagação são simples equações algébricas hiperbólicas, escritas no domínio da frequência. Tal modelo é denominado *Universal Line Model (ULM)*. A solução no domínio do tempo foi obtida por meio de um método de integração numérica, que calcula a Transformada Inversa de Laplace das equações algébricas hiperbólicas.

O modelo que representa uma linha de transmissão polifásica ( $n$  fases), consiste em decompor a linha nos seus  $n$  modos de propagação ( $n$  linhas monofásicas desacopladas). Cada linha monofásica modal, pode ser representada por meio dos modelos a parâmetros distribuídos (*Universal Line Model*) ou a parâmetros discretos (*Lumped Parameters Model*). Logo, calculadas as tensões e correntes de cada linha monofásica modal, utilizam-se as matrizes de transformação modal inversa para obter as tensões e correntes da linha de transmissão polifásica, no domínio das fases (TAVARES et al., 1999).

As linhas bifásicas que possuem plano de simetria vertical e as linhas trifásicas idealmente transpostas, podem ser decompostas nos seus modos de propagação a partir de matrizes de transformação modal, onde os elementos das matrizes são reais e invariáveis em relação à frequência.

Entretanto, no processo de decomposição modal de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical; as matrizes de transformação que decompõem a mesma nos seus dois modos de propagação, possuem elementos complexos que são variáveis em relação à frequência. Com a finalidade de omitir o cálculo de tais matrizes, foi desenvolvido um modelo de linha de transmissão bifásica a parâmetros discretos e constantes, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$ . As equações de corrente e de tensão dessa linha bifásica foram representadas na forma de equação de estado, diretamente no domínio do tempo. Essas equações foram resolvidas utilizando o método de integração trapezoidal (SILVA, 2012). Devido ao fato de que os

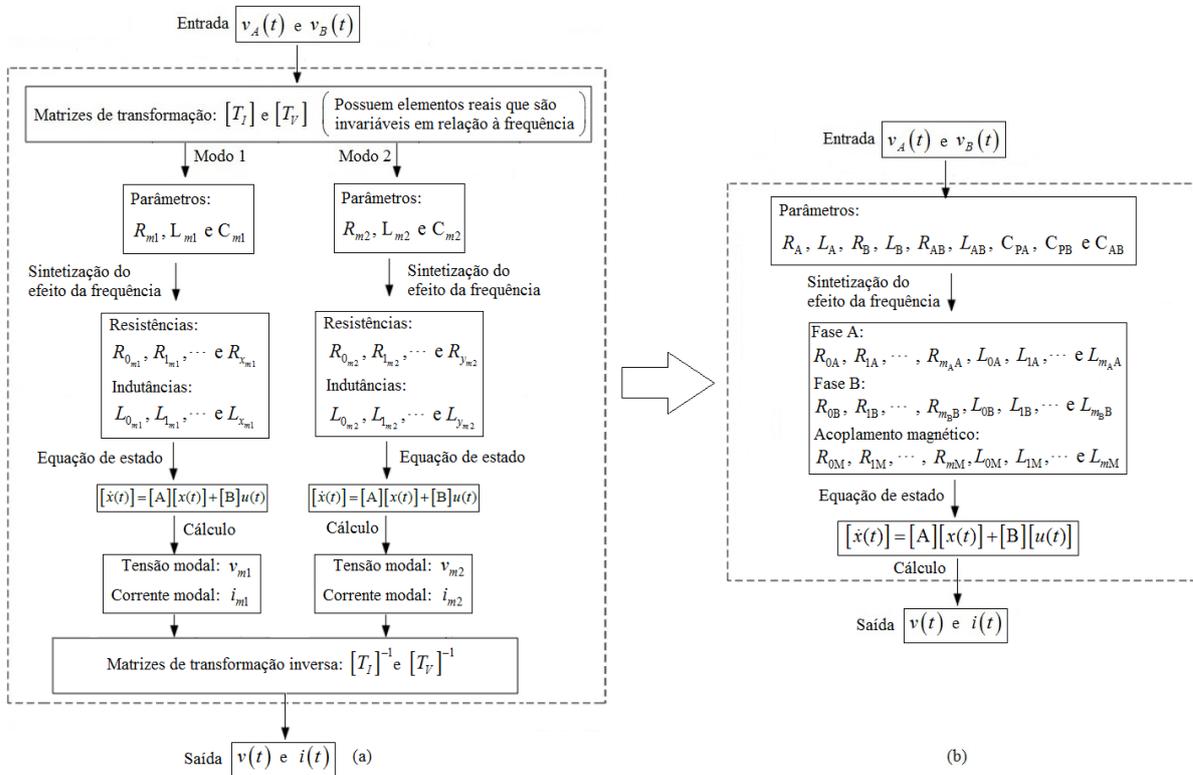
parâmetros longitudinais são variáveis em relação à frequência, as respostas obtidas naquele modelo são aproximadas.

Neste trabalho é proposto um modelo de linha de transmissão bifásica genérica, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  que leva em consideração o efeito da frequência. A sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais próprios e mútuos será representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores. Este modelo de linha bifásica é utilizado para calcular as correntes e tensões ao longo da mesma, diretamente no domínio do tempo. Portanto, a diferença deste modelo em relação ao modelo clássico modal, está baseada em contornar o cálculo de matrizes de transformação modal.

No processo de validação do modelo proposto, utilizar-se-á como referência o modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais.

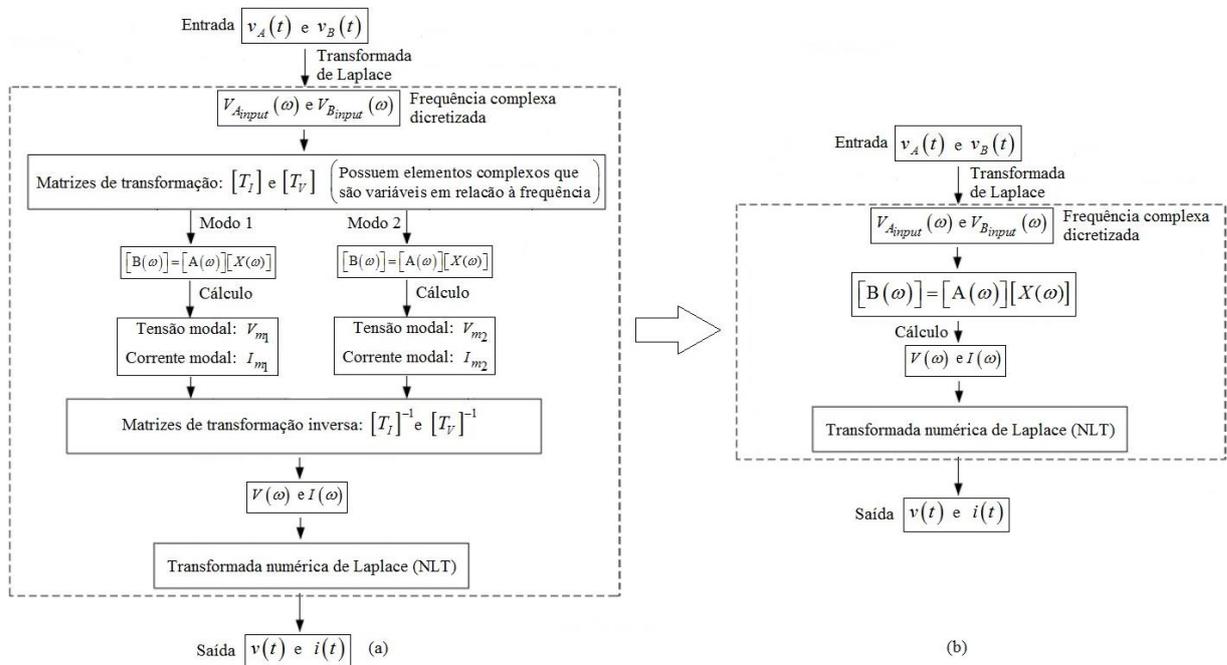
Nas Figuras 1 e 2, visualizam-se os diagramas de blocos do processo de validação do modelo proposto para linhas de transmissão bifásicas que possuem e não possuem plano de simetria vertical, respectivamente.

Figura 1 – Validação do modelo proposto para uma linha de transmissão bifásica que possui plano de simetria vertical: Modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (a) e modelo proposto (b).



Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 2 – Validação do modelo proposto para uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical: Modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (a) e modelo proposto (b).



Fonte: Elaboração própria do autor.

Uma vantagem do modelo proposto em relação ao modelo clássico modal é o fato de não ser necessário desacoplar as cargas ligadas aos terminais receptores, já que nem sempre as matrizes de transformação modal conseguem aquele.

O modelo de linha de transmissão bifásica, que é proposto, é o primeiro a parâmetros discretos que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. O *software* de simulação ATPDraw, muito utilizado para a análise de transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia elétrica, somente apresenta um modelo de linha bifásica a parâmetros discretos e constantes.

## 2 PARÂMETROS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO

### 2.1 Introdução

Neste capítulo são mostradas as expressões matemáticas que calculam os parâmetros longitudinais e transversais de uma linha de transmissão de energia elétrica. Os parâmetros longitudinais envolvem a resistência e a indutância; enquanto que os parâmetros transversais envolvem a condutância e a capacitância.

Os parâmetros de uma linha de transmissão de energia elétrica estão uniformemente distribuídos ao longo do seu comprimento, esta característica em conjunto com o fato de que os parâmetros longitudinais são variáveis em relação à frequência, devem ser levados em consideração para estudos de transitórios eletromagnéticos.

### 2.2 Impedância longitudinal das linhas de transmissão

As impedâncias próprias e mútuas inseridas nas equações de uma linha de transmissão de energia elétrica, podem ser obtidas a partir da solução das equações de Maxwell. Tal solução leva em consideração as condições de contorno de três materiais: O condutor propriamente dito, o ar (meio que envolve os condutores) e o solo. Considerando que estes três materiais estão caracterizados por uma resistência elétrica e por uma permeabilidade magnética, mostra-se que as impedâncias da linha são escritas em função das propriedades físicas do sistema (condutor, ar e solo) e da frequência (HOFMANN et al., 2003).

Os parâmetros longitudinais de uma linha de transmissão são variáveis em relação à frequência devido aos efeitos do solo (equações de Carson) e pelicular (equações com funções de Bessel) (KUROKAWA, 2003).

A impedância longitudinal de uma linha de transmissão, para fins de cálculo, é dividida em três componentes que são:

- $Z_{ext}(\omega)$ : Impedância externa, considerando o solo com condutividade infinita.
- $Z_{int}(\omega)$ : Impedância devido ao efeito pelicular.

- $Z_{solo}(\omega)$ : Impedância devido ao retorno da corrente através do solo.

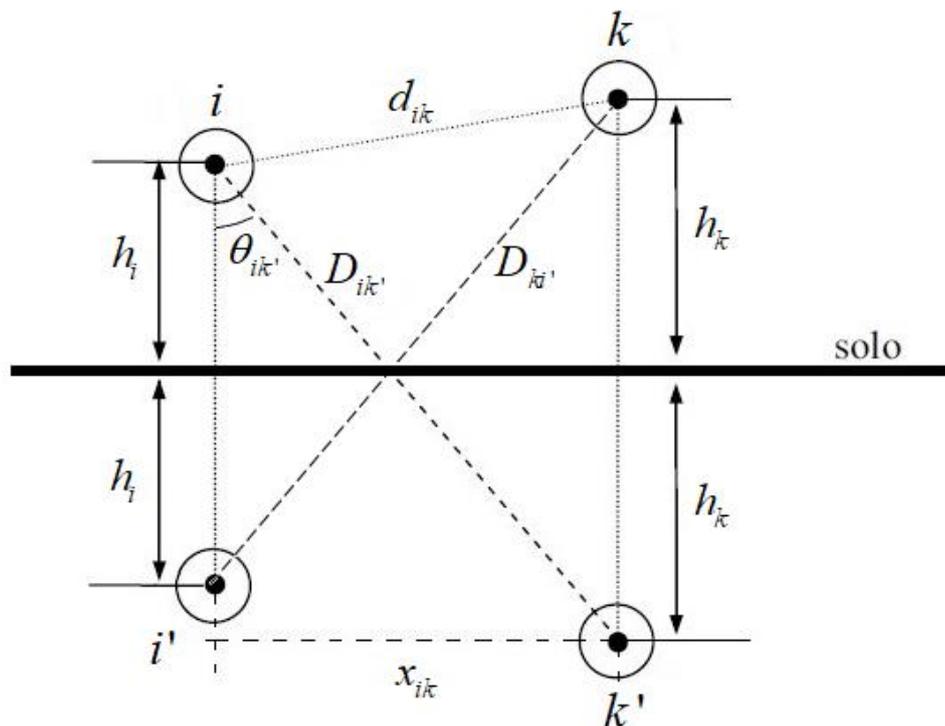
A matriz de impedâncias longitudinais  $[Z(\omega)]$  é escrita como sendo:

$$[Z(\omega)] = [Z_{ext}(\omega)] + [Z_{int}(\omega)] + [Z_{solo}(\omega)] \quad (1)$$

### 2.3 Impedância externa de uma linha de transmissão

Considere que os condutores  $i$  e  $k$  de uma linha de transmissão genérica estão sobre um solo ideal (plano equipotencial com condutividade infinita), conforme visualiza-se na Figura 3.

Figura 3 – Condutores  $i$  e  $k$ , sobre o solo, e as suas respectivas imagens  $i'$  e  $k'$  (FUCHS, 1979).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Esta impedância resulta do efeito do campo magnético externo presente no ar (meio que envolve os condutores). O campo magnético é produzido pelas correntes elétricas que percorrem a linha de transmissão genérica.

A impedância externa é representada como sendo:

$$Z_{ext}(\omega) = R_{ext} + j\omega L_{ext} \quad (2)$$

Considerando  $R_{ext} = 0$  (condutor ideal), a equação (2) torna-se:

$$Z_{ext}(\omega) = j\omega L_{ext} \quad (3)$$

As impedâncias externas próprias dos condutores  $i$  e  $k$  são descritas como sendo:

$$Z_{ext_{ii}}(\omega) = j\omega \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{2h_i}{r_i}\right) \quad (4)$$

$$Z_{ext_{kk}}(\omega) = j\omega \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{2h_k}{r_k}\right) \quad (5)$$

Nas equações (4) e (5);  $r_i$  e  $r_k$  são os raios dos condutores  $i$  e  $k$ , respectivamente. Considera-se que a permeabilidade magnética do ar é igual à permeabilidade magnética do vácuo ( $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ ).

As impedâncias externas mútuas entre os condutores  $i$  e  $k$  são descritas como sendo:

$$Z_{ext_{ik}}(\omega) = j\omega \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{D_{ik'}}{d_{ik}}\right) \quad (6)$$

$$Z_{ext_{ki}}(\omega) = j\omega \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{D_{ki'}}{d_{ik}}\right) \quad (7)$$

Introduzindo as características geométricas  $D_{ik'} = D_{ki'}$ , mostradas na Figura 3 às equações (6) e (7), pode-se concluir que  $Z_{ext_{ik}}(\omega) = Z_{ext_{ki}}(\omega)$ .

Considerando que a linha de transmissão genérica possui  $n$  fases, onde cada fase é constituída de um único condutor, a matriz de impedâncias externas  $[Z_{ext}(\omega)]$  pode-se escrever como sendo:

$$[Z_{ext}(\omega)] = j\omega \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r_1} & \ln \frac{D_{12}}{d_{12}} & \dots & \ln \frac{D_{1n}}{d_{1n}} \\ \ln \frac{D_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r_2} & \dots & \ln \frac{D_{2n}}{d_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \frac{D_{1n}}{d_{1n}} & \ln \frac{D_{2n}}{d_{2n}} & \dots & \ln \frac{2h_n}{r_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Das equações (3) e (8), pode-se concluir que a matriz de indutâncias externas  $[L_{ext}]$  é escrita como sendo:

$$[L_{ext}] = \frac{\mu}{2\pi} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r_1} & \ln \frac{D_{12}}{d_{12}} & \dots & \ln \frac{D_{1n}}{d_{1n}} \\ \ln \frac{D_{12}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r_2} & \dots & \ln \frac{D_{2n}}{d_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \frac{D_{1n}}{d_{1n}} & \ln \frac{D_{2n}}{d_{2n}} & \dots & \ln \frac{2h_n}{r_n} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Visualiza-se na equação (9), que a matriz de indutâncias externas da linha de transmissão (sistema de  $n$  condutores), somente depende das características geométricas da linha e da permeabilidade magnética do meio em que os condutores estão imersos.

## 2.4 Impedância interna das linhas de transmissão

A impedância interna complexa (ou devido ao efeito pelicular) está presente sempre que um condutor é percorrido longitudinalmente por uma corrente alternada. A mesma produz uma distribuição não uniforme de densidade de corrente elétrica através da seção transversal do condutor, onde a densidade de corrente na periferia do condutor é maior do que no interior do mesmo. Como consequência deste efeito, tem-se um aumento na resistência efetiva do condutor e uma diminuição na sua indutância interna, à medida que a frequência aumenta.

No cálculo da impedância interna complexa de um condutor cilíndrico, tubular e sólido, utilizam-se as funções de Bessel (ou as funções modificadas de Bessel) de primeira ordem. Deve-se considerar que a impedância interna é obtida como a razão entre a queda de tensão ao longo da superfície do condutor e a corrente total encerrada pela mesma superfície.

Logo, tal impedância pode ser expressa como sendo (FUCHS, 1979; MINGLI et al., 2004; GATOUS, 2005):

$$Z_{int_{ii}}(\omega) = \frac{j\omega\mu}{2\pi rm} \left[ \frac{ber(mr) + jbei(mr)}{ber'(mr) + jbei'(mr)} \right] \quad (10)$$

$$Z_{int_{ii}}(\omega) = R_{int_{ii}}(\omega) + j\omega L_{int_{ii}}(\omega) \quad (11)$$

Onde:

$$m = \sqrt{\omega\mu\sigma} \quad (12)$$

As funções modificadas de Bessel  $ber(mr)$  e  $bei(mr)$ , e as suas primeiras derivadas  $ber'(mr)$  e  $bei'(mr)$ , são descritas como sendo:

$$ber(mr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mr/2)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 1 - \frac{(mr)^4}{2^4(2!)^2} + \frac{(mr)^8}{2^8(4!)^2} - \dots \quad (13)$$

$$bei(mr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mr/2)^{2k}}{k!\Gamma(k+1)} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{(mr)^2}{2^2} + \frac{(mr)^6}{2^6(3!)^2} + \frac{(mr)^{10}}{2^{10}(5!)^2} - \dots \quad (14)$$

$$ber'(mr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(mr/2)^{2k-1}}{k!\Gamma(k+1)} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = -\frac{(mr)^3}{2^2(2!)^2} + \frac{(mr)^7}{2^5(4!)^2} - \frac{3(mr)^{11}}{2^{10}(6!)^2} \dots \quad (15)$$

$$bei'(mr) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(mr/2)^{2k-1}}{k!\Gamma(k+1)} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \frac{mr}{2} + \frac{3(mr)^5}{2^5(3!)^2} + \frac{5(mr)^9}{2^9(5!)^2} - \dots \quad (16)$$

Onde:

$$\Gamma(k) = (k-1)!; \forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad (17)$$

Das equações (10) a (16), pode-se concluir que a impedância interna depende somente da frequência, desde que sejam conhecidos o raio [m] do condutor, a condutividade  $[\Omega.m]^{-1}$  do material do condutor, e a permeabilidade magnética [H/m] do mesmo.

Para uma linha de transmissão genérica de  $n$  fases, onde cada fase está constituída de um único condutor, a matriz de impedâncias internas  $[Z_{int}(\omega)]$  pode-se escrever como sendo:

$$[Z_{int}(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{int_{11}}(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Z_{int_{22}}(\omega) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Z_{int_{mm}}(\omega) \end{bmatrix} \quad (18)$$

## 2.5 Impedância devido ao efeito do solo

Os efeitos do retorno da corrente através do solo nos parâmetros longitudinais de uma linha aérea de transmissão, podem ser calculados por meio das formulas de Carson e de Pollaczek. A diferença entre elas é que a fórmula de Pollaczek é generalizada, já que também pode ser usada para cabos subterrâneos (diretamente enterrados ou através de tubos) (DOMMEL,1986; KUROKAWA et al.,2007; KUROKAWA et al.,2008).

Considere que os condutores  $i$  e  $k$  de uma linha de transmissão genérica estão sobre o solo (homogêneo com distribuição não uniforme de densidades de corrente elétrica), conforme visualizou-se na Figura 3.

Carson considerou condutores paralelos ao solo, admitindo a resistividade do solo como uniforme e a sua extensão como infinita. Demonstrou que as impedâncias próprias e mútuas de circuitos com retorno pelo solo, são iguais às impedâncias para um circuito que envolve um solo ideal (no qual pode-se considerar um condutor-imagem à mesma profundidade que a altura do condutor sobre o solo), acrescida de um termo de correção que é aplicável para ambas as impedâncias (FUCHS, 1979; DOMMEL, 1986).

Os termos de correção de Carson representam a impedância devido ao retorno da corrente através do solo. As impedâncias próprias e mútuas devido a este efeito, são representadas de maneira geral, como sendo:

$$Z_{solo}(\omega) = \Delta R_{solo} + j\Delta X_{solo} \quad (19)$$

Na equação (19); os termos de correção  $\Delta R_{solo}$  e  $\Delta X_{solo}$ , dependem das características geométricas mostradas na Figura 3. Eles são funções de um ângulo  $\theta$  ( $\theta = 0$  para impedâncias próprias, e  $\theta = \theta_{ik}$  para impedâncias mútuas), e de um parâmetro  $a$ . Este último é definido como sendo (DOMMEL,1986):

$$a = 4\pi\sqrt{5} \times 10^{-4} D \sqrt{\frac{f}{\rho}} \quad (20)$$

Onde:

$D = 2h_i$  [m]; para a impedância própria  $Z_{ii}$

$D = 2h_k$  [m]; para a impedância própria  $Z_{kk}$

$D = D_{ik'} = D_{ki'}$  [m]; para a impedância mútuas  $Z_{ik}$  e  $Z_{ki}$

$f$  [Hz]; frequência

$\rho$  [ $\Omega$ .m]; resistividade do solo

Para  $a \leq 5$ , os termos de correção de Carson são séries infinitas, que podem-se escrever como sendo (DOMMEL, 1986):

$$\Delta R_{solo} = 4\omega \times 10^{-4} \left\{ \frac{\pi}{8} - b_1 a \cos \theta + b_2 [(c_2 - \ln a) a^2 \cos 2\theta + \theta a^2 \sin 2\theta] + b_3 a^3 \cos 3\theta \right. \\ \left. - d_4 a^4 \cos 4\theta - b_5 a^5 \cos 5\theta + b_6 [(c_6 - \ln a) a^6 \cos 2\theta + \theta a^6 \sin 6\theta] \right. \\ \left. + b_7 a^7 \cos 7\theta - d_8 a^8 \cos 8\theta - \dots \right\} \quad (21)$$

$$\Delta X_{solo} = 4\omega \times 10^{-4} \left\{ \frac{1}{2} (0,6159315 - \ln a) + b_1 a \cos \theta - d_2 a^2 \cos 2\theta + b_3 a^3 \cos 3\theta \right. \\ \left. - b_4 [(c_4 - \ln a) a^4 \cos 4\theta + \theta a^4 \sin 4\theta] + b_5 a^5 \cos 5\theta - d_6 a^6 \cos 6\theta \right. \\ \left. + b_7 a^7 \cos 7\theta - b_8 [(c_8 - \ln a) a^8 \cos 8\theta + \theta a^8 \sin 8\theta] + \dots \right\} \quad (22)$$

Nas equações (21) e (22), os coeficientes  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$ , são valores constantes que obtêm-se usando expressões de recorrência. Estas expressões são descritas como sendo:

$$b_i = |b_{i-2}| \frac{\text{sgn}}{i(i+2)} \quad (23)$$

$$c_i = c_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2} \quad (24)$$

$$d_i = \frac{\pi}{4} b_i \quad (25)$$

Nas equações (23) a (25), os valores de início são  $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{6}$ ,  $b_2 = \frac{1}{16}$  e  $c_2 = 1,3659315$

Na equação (23), a função  $\text{sgn} = \pm 1$  alterna de valor após quatro termos sucessivos ( $\text{sgn} = +1$  para  $i = 1, 2, 3, 4$ ;  $\text{sgn} = -1$  para  $i = 5, 6, 7, 8$ ;  $\text{sgn} = +1$  para  $i = 9, 10, 11, 12$ ; etc.).

Nas equações (21) e (22), as funções trigonométricas  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , dependem das características geométricas mostradas na Figura 3. Elas são escritas como sendo:

$$\sin \theta_{ik} = \frac{x_{ik}}{D_{ik}} \quad (26)$$

$$\cos \theta_{ik} = \frac{h_i + h_k}{D_{ik}} \quad (27)$$

Para  $a > 5$ , os termos de correção de Carson são séries finitas, que podem-se escrever como sendo (DOMMEL, 1986):

$$\Delta R_{solo} = \frac{4\omega \times 10^{-4}}{\sqrt{2}} \left( \frac{\cos \theta}{a} - \frac{\sqrt{2} \cos 2\theta}{a^2} + \frac{\cos 3\theta}{a^3} + \frac{3 \cos 5\theta}{a^5} - \frac{45 \cos 7\theta}{a^7} \right) \quad (28)$$

$$\Delta X_{solo} = \frac{4\omega \times 10^{-4}}{\sqrt{2}} \left( \frac{\cos \theta}{a} - \frac{\cos 3\theta}{a^3} + \frac{3 \cos 5\theta}{a^5} + \frac{45 \cos 7\theta}{a^7} \right) \quad (29)$$

Para uma linha de transmissão genérica de  $n$  fases, onde cada fase está constituída de um único condutor, a matriz de impedâncias devido ao efeito do solo  $[Z_{solo}(\omega)]$  pode-se escrever como sendo:

$$[Z_{solo}(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{solo_{11}}(\omega) & Z_{solo_{12}}(\omega) & \dots & Z_{solo_{1n}}(\omega) \\ Z_{solo_{21}}(\omega) & Z_{solo_{22}}(\omega) & \dots & Z_{solo_{2n}}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{solo_{n1}}(\omega) & Z_{solo_{n2}}(\omega) & \dots & Z_{solo_{nn}}(\omega) \end{bmatrix} \quad (30)$$

## 2.6 Admitância transversal de uma linha de transmissão

A admitância transversal de uma linha de transmissão monofásica de energia é representada como sendo:

$$Y(\omega) = G + j\omega C \quad (31)$$

Em linhas aéreas de transmissão monofásicas, a condutância transversal é muito pequena, portanto, o efeito da mesma é desprezado (MARTINEZ et al., 2005). A equação (31) torna-se:

$$Y(\omega) = j\omega C \quad (32)$$

O solo (plano equipotencial com distribuição não uniforme de cargas) afeta a capacitância de uma linha de transmissão, porque a sua presença altera o campo elétrico da mesma.

A capacitância entre dois condutores de uma linha de transmissão se define como a quantidade de carga que deve-se transferir entre os mesmos para mudar em uma unidade a diferença de potencial entre eles. Esta diferença de potencial depende da distância de separação entre eles, e entre cada um deles e o solo (STEVENSON, 1978).

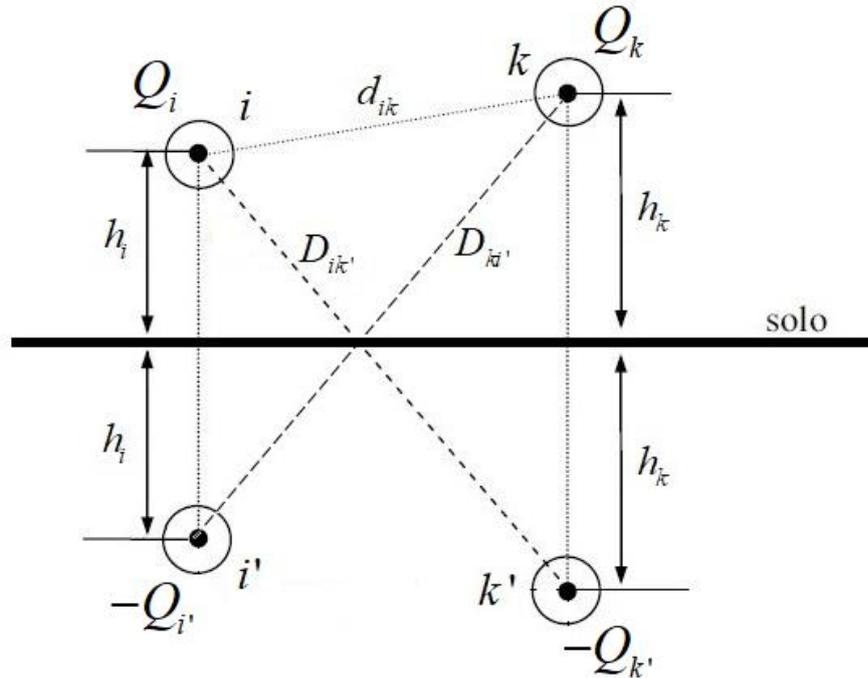
Considere que os condutores  $i$  e  $k$  de uma linha de transmissão genérica possuem cargas (na superfície)  $Q_i$  e  $Q_k$  respectivamente, conforme visualiza-se na Figura 4.

O potencial na superfície dos condutores  $i$  e  $k$ , com relação ao solo (potencial nulo), são descritos como sendo (FUCHS, 1979):

$$V_i = \frac{Q_i}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{2h_i}{r_i}\right) + \frac{Q_k}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{D_{ik'}}{d_{ik}}\right) \quad (33)$$

$$V_k = \frac{Q_k}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{2h_k}{r_k}\right) + \frac{Q_i}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{D_{ik'}}{d_{ik}}\right) \quad (34)$$

Figura 4 – Condutores  $i$  e  $k$ , sobre o solo, e as suas respetivas imagens  $i'$  e  $k'$  (FUCHS, 1979).



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas equações (33) e (34);  $r_i$  e  $r_k$  são os raios dos condutores  $i$  e  $k$ , respectivamente. Considera-se que a permissividade do ar (meio que envolve os condutores) é igual à permissividade do vácuo ( $\epsilon = \epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-9} \text{ F/km}$ ).

Considerando que a linha de transmissão genérica possui  $n$  fases, onde cada fase é constituída de um único condutor, o potencial na superfície de um deles com relação ao solo, é descrito como sendo:

$$V_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( Q_1 \ln\left(\frac{2h_1}{r_1}\right) + Q_2 \ln\left(\frac{D_{12'}}{d_{12}}\right) + \dots + Q_n \ln\left(\frac{D_{1n'}}{d_{1n}}\right) \right) \quad (35)$$

Na equação (35);  $Q_1, Q_2, \dots$  e  $Q_n$  representam as cargas no primeiro, segundo e  $n$ -ésimo condutor (equilíbrio eletrostático instantâneo). De forma análoga, as equações para os demais condutores do sistema são descritas como sendo:

$$V_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( Q_1 \ln \left( \frac{D_{21'}}{d_{21}} \right) + Q_2 \ln \left( \frac{2h_2}{r_2} \right) + \dots + Q_n \ln \left( \frac{D_{2n'}}{d_{2n}} \right) \right) \quad (36)$$

$$V_n = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left( Q_1 \ln \left( \frac{D_{n1'}}{d_{n1}} \right) + Q_2 \ln \left( \frac{D_{n2'}}{d_{n2}} \right) + \dots + Q_n \ln \left( \frac{2h_n}{r_n} \right) \right) \quad (37)$$

Introduzindo as características geométricas  $D_{ik'} = D_{ki'}$ , mostradas na Figura 4, às equações (35) a (37), a forma matricial dessas equações é escrita como sendo:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \begin{bmatrix} \ln \frac{2h_1}{r_1} & \ln \frac{D_{12'}}{d_{12}} & \dots & \ln \frac{D_{1n'}}{d_{1n}} \\ \ln \frac{D_{12'}}{d_{12}} & \ln \frac{2h_2}{r_2} & \dots & \ln \frac{D_{2n'}}{d_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ln \frac{D_{1n'}}{d_{1n}} & \ln \frac{D_{2n'}}{d_{2n}} & \dots & \ln \frac{2h_n}{r_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad (38)$$

A equação matricial (38) pode ser expressa como sendo:

$$[V] = [E][Q] \quad (39)$$

Na equação (39);  $[E]$  é denominada matriz de coeficientes de potencial, ou de coeficientes de campo elétrico de Maxwell (FUCHS, 1979).

A partir da definição de capacitância entre dois condutores paralelos, define-se a seguinte relação matricial (para uma linha de transmissão de  $n$  condutores):

$$[Q] = [C][V] \quad (40)$$

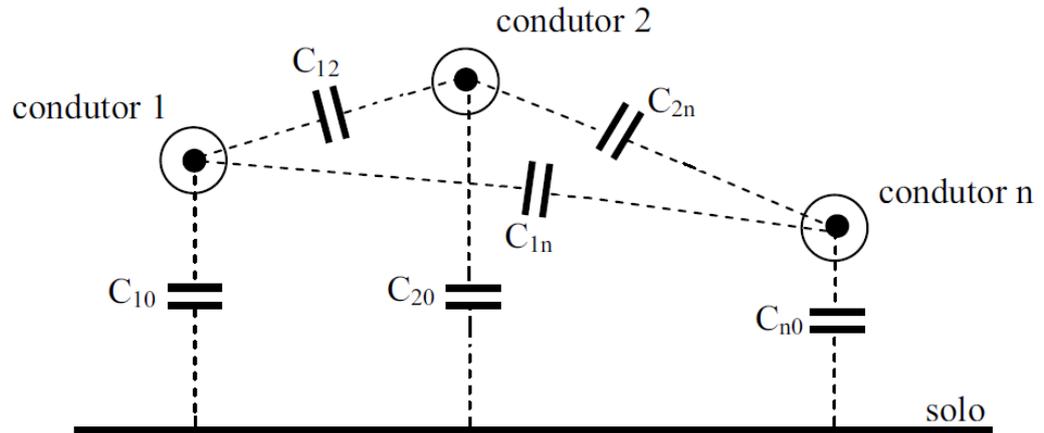
Na equação (40);  $[C]$  é a matriz de capacitâncias aparentes da linha de transmissão.

Das equações (39) e (40), obtém-se a seguinte relação matricial:

$$[C] = [E]^{-1}$$

Na Figura 5, visualiza-se as capacitâncias envolvidas (matriz  $[C]$ ) em uma linha de transmissão de  $n$  condutores.

Figura 5 – Capacitância entre os condutores, e entre cada um deles e o solo (FUCHS, 1979).



Fonte: Yamanaka, 2009

Considerando que as superfícies dos condutores da Figura 5 possuem potenciais  $V_1$ ,  $V_2$ , ... e  $V_n$ , com relação ao solo. As cargas elétricas armazenadas em cada uma delas são descritas como sendo (FUCHS, 1979):

$$Q_1 = C_{10}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) \cdots \cdots + C_{1n}(V_1 - V_n) \quad (41)$$

$$Q_2 = C_{20}V_2 + C_{21}(V_2 - V_1) + C_{23}(V_2 - V_3) \cdots \cdots + C_{2n}(V_2 - V_n) \quad (42)$$

$$Q_3 = C_{30}V_3 + C_{31}(V_3 - V_1) + C_{32}(V_3 - V_2) \cdots \cdots + C_{3n}(V_3 - V_n) \quad (43)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$Q_n = C_{n0}V_n + C_{n1}(V_n - V_1) + C_{n2}(V_n - V_2) \cdots \cdots + C_{n(n-1)}(V_n - V_{n-1}) \quad (44)$$

Considerando  $C_{ik} = C_{ki}$ , a forma matricial das equações (41) a (44) é escrita como sendo:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_{10} + C_{12} + \dots + C_{1n}) & -C_{12} & \dots & -C_{1n} \\ -C_{12} & (C_{20} + C_{12} + \dots + C_{2n}) & \dots & -C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{1n} & -C_{2n} & \dots & (C_{n0} + C_{1n} + C_{2n} + \dots + C_{n(n-1)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \quad (45)$$

De onde:

$$[C] = \begin{bmatrix} (C_{10} + C_{12} + \dots + C_{1n}) & -C_{12} & \dots & -C_{1n} \\ -C_{12} & (C_{20} + C_{12} + \dots + C_{2n}) & \dots & -C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_{1n} & -C_{2n} & \dots & (C_{n0} + C_{1n} + C_{2n} + \dots) \end{bmatrix}$$

Os elementos da matriz  $[C]$  são iguais aos elementos da inversa da matriz de coeficientes de campo elétrico  $[E]^{-1}$ . Comparando as equações (38) e (45), obtêm-se as capacitâncias parciais  $C_{i0}$  e  $C_{ik}$ .

Uma vez obtida a matriz  $[C]$ , pode-se escrever a matriz de admitâncias transversais  $[Y(\omega)]$  como sendo:

$$[Y(\omega)] = j\omega[C]$$

## 2.7 Considerações

Neste capítulo foi mostrada a maneira de calcular os parâmetros longitudinais e transversais de uma linha de transmissão de  $n$  condutores.

Os parâmetros longitudinais da linha de transmissão são variáveis em relação à frequência devido aos efeitos do solo e pelicular (*skin*); enquanto que os parâmetros transversais da linha somente dependem das características geométricas da mesma.

### **3 MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO A PARÂMETROS DISCRETOS**

#### **3.1 Introdução**

Uma linha de transmissão monofásica será representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$  (modelo a parâmetros discretos), onde as respectivas equações de corrente e de tensão são escritas na forma de equação de estado. No entanto, o comportamento das tensões e correntes ao longo da linha é influenciado pela quantidade de circuitos  $\pi$  (conectados em cascata), aumentando ou diminuindo a amplitude das harmônicas de ordem elevada, isto é, distorcendo as formas de onda. Para melhorar a qualidade do comportamento das tensões e correntes, neste capítulo também será mostrado o desenvolvimento de um modelo de linha a parâmetros discretos que leva em consideração o efeito da frequência (influencia na constituição da equação de estado) sobre os parâmetros longitudinais. A solução dos dois modelos a parâmetros discretos, anteriormente mencionados, será obtida por meio de qualquer método numérico de integração que seja desenvolvido diretamente no domínio do tempo.

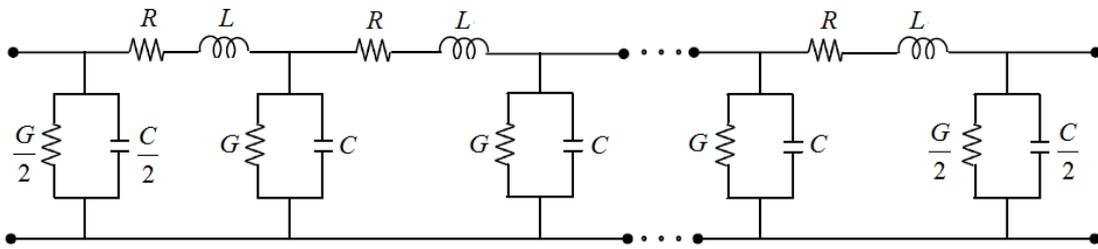
Entretanto; também será mostrado o desenvolvimento de um modelo de linha de transmissão bifásica, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  que leva em consideração o acoplamento entre as fases. Desse modo, considerar-se-á que uma linha de transmissão bifásica é representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$ , onde as respectivas equações de corrente e de tensão são escritas na forma de equação de estado, diretamente no domínio do tempo (SILVA, 2012).

#### **3.2 Representação de uma linha de transmissão monofásica por meio de elementos discretos de circuitos**

Para estudar a propagação de ondas de tensão e de corrente resultantes de operações de manobra e de chaveamentos que ocorrem em uma linha de transmissão de energia elétrica, deve-se levar em consideração que a linha monofásica é representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$ . Os parâmetros da linha estão distribuídos ao longo do seu comprimento e são invariáveis em relação à frequência (MAMIS et al., 2003).

Considere uma linha de transmissão monofásica de comprimento  $d$ , conforme visualiza-se na Figura 6.

Figura 6 – Linha monofásica representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$  (ARAÚJO, 2014)



Fonte: Yamanaka (2009).

Na Figura 6;  $R$ ,  $L$ ,  $G$  e  $C$  são a resistência, a indutância, a condutância e a capacitância de cada circuito  $\pi$ , respectivamente. Considerando que  $R'$ ,  $L'$ ,  $G'$  e  $C'$  são os parâmetros da linha por unidade de comprimento, têm-se as seguintes relações:

$$R = R' \frac{d}{n} \quad (46)$$

$$L = L' \frac{d}{n} \quad (47)$$

$$G = G' \frac{d}{n} \quad (48)$$

$$C = C' \frac{d}{n} \quad (49)$$

Onde:

$d$ , comprimento da linha

$n$ , quantidade de circuitos  $\pi$

Na linha monofásica da Figura 7, as correntes e tensões ao longo da cascata podem ser escritas na forma de equação de estado, ou seja:

$$[\dot{x}(t)] = [A][x(t)] + [B]u(t) \quad (50)$$

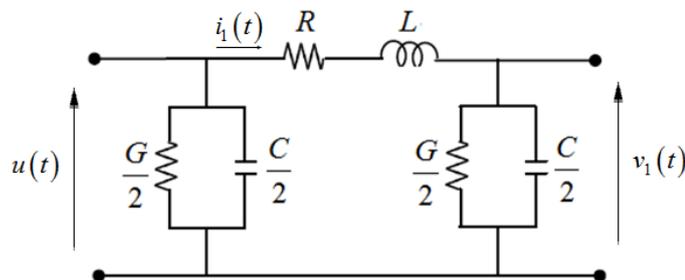
Na equação (50);  $[x(t)]$  é constituído pelas correntes longitudinais (aplicados ao indutor) e pelas tensões transversais (aplicados ao capacitor) de cada circuito  $\pi$  da linha.  $[A]$  e  $[B]$  são as matrizes de estado e de controle da linha, respectivamente.  $u(t)$  é a tensão aplicada no terminal emissor da linha, e  $[\dot{x}(t)]$  é a derivada de  $[x(t)]$  com relação ao tempo.

### 3.2.1 Representação de uma linha de transmissão monofásica em aberto

Para encontrar uma regra de formação das matrizes de estado e de controle de uma linha ( $[A]$  e  $[B]$ ), deve-se levar em consideração uma quantidade genérica de circuitos  $\pi$ . O desenvolvimento será feito inicialmente para um circuito  $\pi$ , depois para 2, 3, ... e  $n$  circuitos  $\pi$ ; até que seja possível montar  $[A]$  e  $[B]$  por inspeção.

Na Figura 7, visualiza-se uma linha representada por meio de um circuito  $\pi$ .

Figura 7 – Linha monofásica representada por meio de um circuito  $\pi$ .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Aplicando a 2ª lei de Kirchhoff (lei das tensões) na Figura 7, obtém-se:

$$u(t) - Ri_1(t) - L \frac{di_1(t)}{dt} - v_1(t) = 0 \quad (51)$$

Aplicando a 1ª lei de Kirchhoff (lei das correntes) na Figura 7, obtém-se:

$$i_1(t) = \frac{G}{2} v_1(t) + \frac{C}{2} \frac{dv_1(t)}{dt} \quad (52)$$

As derivadas podem apresentar a seguinte notação:

$$\dot{i}_1 = \frac{di_1(t)}{dt} \quad \text{e} \quad \dot{v}_1 = \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Aplicando a notação anteriormente descrita, e reescrevendo as equações (51) e (52), obtêm-se as seguintes relações:

$$\dot{i}_1 = -\frac{R}{L}i_1(t) - \frac{1}{L}v_1(t) + \frac{1}{L}u(t) \quad (53)$$

$$\dot{v}_1 = \frac{2}{C}i_1(t) - \frac{G}{C}v_1(t) \quad (54)$$

A forma matricial das equações (53) e (54) é escrita como sendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ v_1(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (55)$$

A equação (55) representa a linha mostrada na Figura 7, utilizando variáveis de estado.

Uma vez que a linha monofásica de comprimento  $d$  é representada por meio de uma cascata de  $n$  segmentos de linha, onde cada segmento é do tipo mostrado na Figura 7. A generalização da equação (55) é escrita como sendo:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \vdots \\ \dot{i}_n \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \vdots \\ \dot{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & \dots & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{R}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & \dots & 0 & -\frac{G}{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & \ddots & \vdots & 0 & -\frac{G}{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{1}{C} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{C} & 0 & 0 & \dots & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ \vdots \\ i_n(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (56)$$

De onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & \dots & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} & \dots & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{R}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & \dots & 0 & -\frac{G}{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & \ddots & \vdots & 0 & -\frac{G}{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{1}{C} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{2}{C} & 0 & 0 & \dots & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Logo, a matriz de estado  $[A]$  pode ser representado de maneira simplificada como sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] \end{bmatrix} \quad (58)$$

Na equação (58), a matriz de estado  $[A]$  é quadrada de dimensão  $2n$ . Esta matriz é constituída por 4 submatrizes quadradas de dimensão  $n$ , que obedecem às seguintes regras de formação:

**Submatrizes  $[A_{11}]$  e  $[A_{22}]$ :** Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pq}] = \begin{bmatrix} a_{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{pq} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Onde:

$$a_{pq} = -\frac{R}{L}; \text{ para } p = 1 \text{ e } q = 1$$

$$a_{pq} = -\frac{G}{C}; \text{ para } p = 2 \text{ e } q = 2$$

**Submatriz  $[A_{12}]$ :** Esta submatriz possui elementos não nulos na diagonal principal e na primeira subdiagonal. A mesma é descrita como sendo:

$$[A_{pq}] = \begin{bmatrix} a_{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{pq} & a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & -a_{pq} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{pq} & a_{pq} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Onde:

$$a_{pq} = -\frac{1}{L}; \text{ para } p = 1 \text{ e } q = 2$$

**Submatriz  $[A_{21}]$ :** Esta submatriz possui elementos não nulos na diagonal principal e na primeira superdiagonal. A mesma é descrita como sendo:

$$[A_{pq}] = \begin{bmatrix} a_{pq} & -a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pq} & -a_{pq} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pq} & -a_{pq} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2a_{pq} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Onde:

$$a_{pq} = \frac{1}{C}, \text{ para } p = 2 \text{ e } q = 1$$

Na equação (56), a matriz de controle  $[B]$  é retangular de ordem  $2n \times 1$ . A mesma é escrita como sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

A solução da equação (56), é obtida mediante a utilização de qualquer método numérico de integração. Geralmente, a integração da equação de estado é realizada por meio do método de Heun (método de integração trapezoidal), onde a implementação computacional da mesma pode ser realizada na plataforma do MATLAB®.

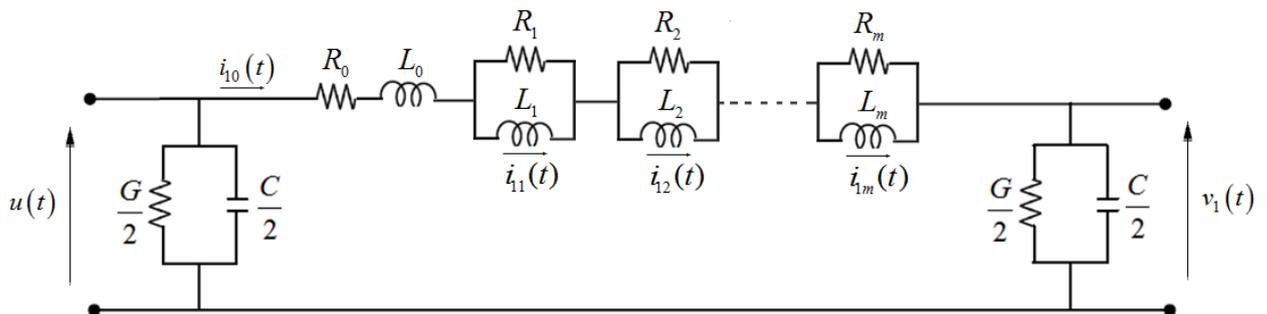
### 3.3 Representação de uma linha de transmissão monofásica por meio de elementos discretos de circuitos, que leva em consideração o efeito da frequência

O modelo desenvolvido na seção anterior, isto é, a parâmetros discretos e constantes (parâmetros longitudinais invariáveis em relação à frequência), é de fácil utilização, mas não representa adequadamente (em toda a faixa de frequências nas quais estão presentes os fenômenos de natureza transitória) uma linha de transmissão. Na maioria dos casos, esse modelo aumenta a amplitude das harmônicas de ordem elevada, distorcendo as formas de onda e produzindo picos exagerados (MARTÍ et al, 1982; FARIA et al., 2002). Além disso, o modelo geralmente é implementado em programas computacionais do tipo EMTP (*Eletrromagnetic Transients Program*), onde a quantidade de pequenos segmentos de linha (cascata de circuitos  $\pi$ ) que pode-se utilizar na representação do mesmo, é limitada.

Para melhorar a qualidade do comportamento das tensões e correntes ao longo de uma linha de transmissão monofásica, tem-se que levar em consideração o efeito da frequência (efeitos do solo e pelicular) sobre os parâmetros longitudinais da mesma. A resposta em frequência dos parâmetros longitudinais sintetizar-se-á em elementos discretos de circuitos.

A sintetização do efeito da frequência será representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores (mostrada no apêndice A.2). Nesta seção será desenvolvido um modelo de linhas de transmissão monofásicas a parâmetros discretos, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais, conforme visualiza-se na Figura 8.

Figura 8 – Circuito  $\pi$  que leva em consideração o efeito da frequência (MARTÍ et al., 1982; TAVARES et al., 1999)



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 8, os termos  $u(t)$  e  $v_1(t)$  representam as tensões nos terminais emissor e receptor do segmento da linha monofásica, respectivamente; enquanto que os termos  $i_{10}(t)$ ,  $i_{11}(t)$ ,  $i_{12}(t)$ , ... e  $i_{1m}(t)$  representam as correntes que percorrem os indutores  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ , ... e  $L_m$  do segmento de linha monofásica, respectivamente.

Na linha monofásica da Figura 8, visualiza-se que é necessária uma associação série de  $m$  blocos RL para representar a variação (por década) dos parâmetros em relação à frequência (faixa onde os parâmetros mudam rapidamente de valor). A faixa adequada de

frequências é de  $10^{-2}$  Hz a  $10^6$  Hz, pois os transitórios eletromagnéticos que ocorrem na linha de transmissão estão dentro desta faixa.

Entretanto, sabe-se que os resistores  $R_0, R_1, R_2, \dots$  e  $R_m$ , e que os indutores  $L_0, L_1, L_2, \dots$  e  $L_m$ , compõem a associação série e paralelo que representa a sintetização do efeito da frequência. Considerando que  $R'_0, R'_1, R'_2, \dots, R'_m, L'_0, L'_1, L'_2, \dots$  e  $L'_m$  são parâmetros por unidade de comprimento, tem-se as seguintes relações:

$$R_0 = R'_0 \frac{d}{n} \quad (62)$$

$$R_1 = R'_1 \frac{d}{n} \quad (63)$$

$$\vdots$$

$$R_m = R'_m \frac{d}{n} \quad (64)$$

$$L_0 = L'_0 \frac{d}{n} \quad (65)$$

$$L_1 = L'_1 \frac{d}{n} \quad (66)$$

$$\vdots$$

$$L_m = L'_m \frac{d}{n} \quad (67)$$

Logo, a partir da representação do pequeno segmento ( $n = 1$ ) de linha monofásica, mostrada na Figura 8, é possível obter as seguintes relações:

Aplicando a 2ª lei de Kirchhoff (lei das tensões) no circuito da Figura 8, obtêm-se:

$$u(t) - v_1(t) = R_0 i_{10}(t) + L_0 \frac{di_{10}(t)}{dt} + R_1 [i_{10}(t) - i_{11}(t)] + \dots + R_m [i_{10}(t) - i_{1m}(t)] \quad (68)$$

$$L_1 \frac{di_{11}(t)}{dt} = R_1 [i_{10}(t) - i_{11}(t)] \quad (69)$$

$$L_2 \frac{di_{12}(t)}{dt} = R_2 [i_{10}(t) - i_{12}(t)] \quad (70)$$

$$\vdots$$

$$L_m \frac{di_{1m}(t)}{dt} = R_m [i_{10}(t) - i_{1m}(t)] \quad (71)$$

Aplicando a 1ª lei de Kirchhoff (lei das correntes) no circuito da Figura 8, obtém-se:

$$i_{10}(t) = \frac{G}{2} v_1(t) + \frac{C}{2} \frac{dv_1(t)}{dt} \quad (72)$$

As equações (68) a (72) podem ser reescritas como sendo:

$$\frac{di_{10}(t)}{dt} = - \left( \frac{1}{L_0} \sum_{j=0}^m R_j \right) i_{10}(t) + \frac{1}{L_0} \sum_{j=1}^m [R_j i_{1j}(t)] - \frac{v_1(t)}{L_0} + \frac{u(t)}{L_0} \quad (73)$$

$$\frac{di_{11}(t)}{dt} = \frac{R_1}{L_1} i_{10}(t) - \frac{R_1}{L_1} i_{11}(t) \quad (74)$$

$$\frac{di_{12}(t)}{dt} = \frac{R_2}{L_2} i_{10}(t) - \frac{R_2}{L_2} i_{12}(t) \quad (75)$$

$$\vdots$$

$$\frac{di_{1m}(t)}{dt} = \frac{R_m}{L_m} i_{10}(t) - \frac{R_m}{L_m} i_{1m}(t) \quad (76)$$

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \frac{2}{C} i_{10}(t) - \frac{G}{C} v_1(t) \quad (77)$$

As equações (73) a (77) podem ser escritas na forma de equação de estado, ou seja:

$$[\dot{x}(t)] = [A][x(t)] + [B]u(t) \quad (78)$$

Onde:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_0} \cdot \sum_{j=0}^m R_j & \frac{R_1}{L_0} & \frac{R_2}{L_0} & \dots & \frac{R_m}{L_0} & -\frac{1}{L_0} \\ \frac{R_1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{R_2}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{R_m}{L_m} & 0 & \dots & 0 & \frac{R_m}{L_m} & 0 \\ \frac{2}{C} & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (79)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$[x(t)] = [i_{10}(t) \quad i_{11}(t) \quad i_{12}(t) \quad \dots \quad i_{1m}(t) \quad v_1(t)]^T \quad (81)$$

Na equação (78);  $u(t)$  é a tensão aplicada no terminal emissor da linha, e  $[\dot{x}(t)]$  é a derivada de  $[x(t)]$  com relação ao tempo.

Uma vez que a linha monofásica de comprimento  $d$  é representada por meio de uma cascata de  $n$  segmentos de linha, onde cada segmento é do tipo mostrado na Figura 9. A generalização das equações (79) a (81) é escrita como sendo:

$$[x(t)] = [i_{10}(t) \quad i_{20}(t) \quad \dots \quad i_{n0}(t) \quad i_{11}(t) \quad i_{21}(t) \quad \dots \quad i_{n1}(t) \quad \dots \quad i_{1m}(t) \quad i_{2m}(t) \quad \dots \quad i_{nm}(t) \quad v_1(t) \quad v_2(t) \quad \dots \quad v_n(t)]^T \quad (82)$$

Logo, o vetor de estado  $[x(t)]$  pode ser representado de maneira simplificada como sendo:

$$[x(t)] = \left[ [x_0(t)] \ [x_1(t)] \ [x_2(t)] \ \cdots \ [x_m(t)] \ [x_{m+1}(t)] \right]^T \quad (83)$$

Na equação (83), o vetor de estado  $[x(t)]$  é de ordem  $(m+2)n \times 1$ . Esta matriz é constituída por  $(m+2)$  subvetores de ordem  $n \times 1$ , que obedecem às seguintes regras de formação:

**Subvetores**  $[x_0(t)]$ ,  $[x_1(t)]$ , ... e  $[x_m(t)]$ : Estes subvetores são constituídos pelas correntes que percorrem os indutores do segmento de linha. Os mesmos são descritos como sendo:

$$[x_j(t)] = [i_{1j}(t) \ i_{2j}(t) \ i_{3j}(t) \ \cdots \ i_{nj}(t)]^T \quad (84)$$

A equação (84) é válida para  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ; onde  $i_{1j}(t), i_{2j}(t), i_{3j}(t), \dots$  e  $i_{nj}(t)$  são as correntes que percorrem os indutores  $L_j$ , do 1º, 2º, 3º, .... e  $n$ -ésimo circuito  $\pi$ , respectivamente.

**Subvetor**  $[x_{m+1}(t)]$ : Este subvetor é constituído pelas tensões transversais de fase. O mesmo é descrito como sendo:

$$[x_{m+1}(t)] = [v_1(t) \ v_2(t) \ \cdots \ v_j(t) \ \cdots \ v_n(t)]^T \quad (85)$$

Na equação (85), a grandeza  $v_j(t)$  corresponde à tensão transversal no  $j$ -ésimo segmento de linha.

Entretanto, a matriz de estado  $[A]$  pode ser representado de maneira simplificada como sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [S] & [N_1] & [N_2] & \cdots & [N_m] & [T] \\ [M_1] & -[M_1] & [P] & \cdots & [P] & [P] \\ [M_2] & [P] & -[M_2] & [P] & \cdots & [P] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ [M_m] & [P] & \cdots & [P] & -[M_m] & [P] \\ [U] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [V] \end{bmatrix} \quad (86)$$

Na equação (86), a matriz de estado  $[A]$  é quadrada de dimensão  $(m+2)n$ . Esta matriz é constituída por  $(m+2)^2$  submatrizes quadradas de dimensão  $n$ , que obedecem às seguintes regras de formação:

**Submatriz  $[S]$ :** Esta submatriz possui elementos não nulos somente na diagonal principal. A mesma é escrita como sendo:

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_0} \sum_{j=0}^m R_j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_0} \sum_{j=0}^m R_j & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{L_0} \sum_{j=0}^m R_j & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{L_0} \sum_{j=0}^m R_j \end{bmatrix} \quad (87)$$

**Submatriz  $[T]$ :** Esta submatriz possui elementos não nulos somente na diagonal principal e na primeira subdiagonal. A mesma é descrita como sendo:

$$[T] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{L_0} & -\frac{1}{L_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{L_0} & -\frac{1}{L_0} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{L_0} & -\frac{1}{L_0} \end{bmatrix} \quad (88)$$

**Submatriz  $[U]$ :** Esta submatriz possui elementos não nulos somente na diagonal principal e na primeira superdiagonal. A mesma é descrita como sendo:

$$[U] = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{2}{C} \end{bmatrix} \quad (89)$$

**Submatriz  $[V]$ :** Esta submatriz possui elementos não nulos somente na diagonal principal. A mesma é descrita como sendo:

$$[V] = \begin{bmatrix} -\frac{G}{C} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{G}{C} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{G}{C} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{G}{C} \end{bmatrix} \quad (90)$$

**Submatrizes  $[M_1]$ ,  $[M_2]$ , ... e  $[M_m]$ :** Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são escritas como sendo:

$$[M_j] = \begin{bmatrix} \frac{R_j}{L_j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{R_j}{L_j} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{R_j}{L_j} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{R_j}{L_j} \end{bmatrix} \quad (91)$$

A equação (91) é válida para  $j = 1, 2, \dots, m$

**Submatrizes**  $[N_1]$ ,  $[N_2]$ , ... e  $[N_m]$ : Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[N_j] = \begin{bmatrix} \frac{R_j}{L_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{R_j}{L_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{R_j}{L_0} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{R_j}{L_0} \end{bmatrix} \quad (92)$$

A equação (92) é válida para  $j = 1, 2, \dots, m$

**Submatriz**  $[P]$ : Esta submatriz é nula.

Entretanto, o vetor de controle  $[B]$  é de ordem  $(m+2)n \times 1$ . O mesmo é escrito como sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (93)$$

Logo, a equação (78) permite obter as correntes e tensões ao longo de uma linha bifásica genérica, considerando o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. A solução dessa equação é obtida mediante a utilização de qualquer método numérico de integração. Geralmente, a integração da equação de estado é realizada por meio do método de Heun (método de integração trapezoidal), onde a implementação computacional da mesma pode ser realizada na plataforma do MATLAB®.

### 3.4 Modelo estudado para uma linha de transmissão bifásica, desenvolvido diretamente nos domínios das fases e do tempo

No processo de decomposição modal de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical (mostrado no apêndice C.4), as matrizes de transformação que decompõem a mesma nos seus dois modos de propagação, possuem elementos complexos que são variáveis em relação à frequência. Para contornar o cálculo de tais matrizes ( $[T_I]$  e  $[T_V]$ ), foi desenvolvido um modelo de linha de transmissão bifásica a parâmetros discretos, diretamente no domínio do tempo.

#### 3.4.1 Considerações com relação ao modelo

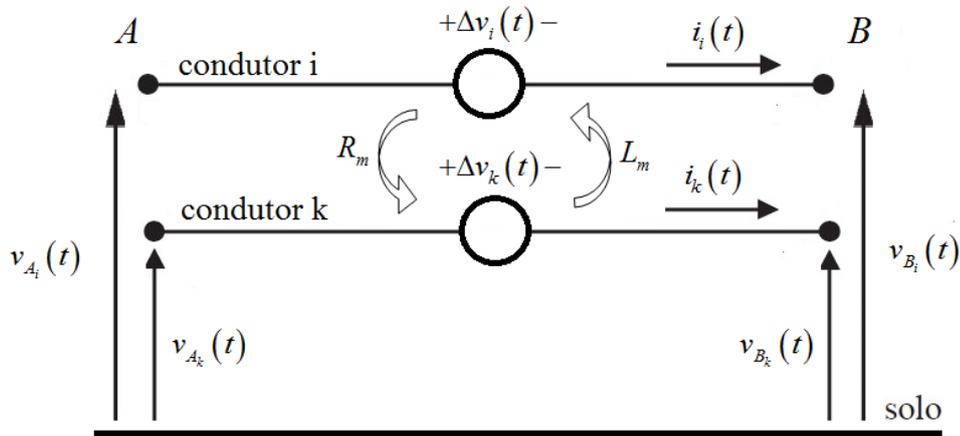
Os parâmetros longitudinais mútuos de uma linha de transmissão representam o acoplamento magnético entre as fases da mesma. Devido ao fato de que as linhas de transmissão são construídas sobre um solo que não é considerado ideal (homogêneo com distribuição não uniforme de densidades de corrente elétrica), pode-se afirmar que as impedâncias longitudinais mútuas devido ao efeito do solo, além de conter a influência das indutâncias mútuas, possuem uma componente real denominada “resistência mútua” (DOMMEL, 1986).

A indutância mútua entre dois condutores de uma linha de transmissão produz quedas de tensão em cada um dos condutores envolvidos. As características físicas e matemáticas daquelas quedas de tensão são descritas pela lei de Faraday-Neumann-Lenz (HAYT, 2013).

Entretanto, o efeito da “resistência mútua” nas fases de uma linha de transmissão pode-se entender por meio do modelo de Schulze (SCHULZE et al., 2010). Nesse modelo considera-se que a “resistência mútua” entre dois condutores  $i$  e  $k$  faz com que o condutor  $i$  apresente uma queda de tensão devido à corrente no condutor  $k$ , e que o condutor  $k$  apresente uma queda de tensão devido à corrente no condutor  $i$ . Essas quedas de tensão podem ser mensuradas por meio da lei de Ohm.

Na Figura 9, visualizam-se dois condutores  $i$  e  $k$  acoplados magneticamente por meio de uma indutância mútua ( $L_m$ ) e uma “resistência mútua” ( $R_m$ ).

Figura 9 – Representação das quedas de tensão em uma linha bifásica, devido aos parâmetros longitudinais mútuos.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 9;  $\Delta v_i(t)$  e  $\Delta v_k(t)$  são as quedas de tensão nos condutores  $i$  e  $k$ , respectivamente. Para calcular estas quedas de tensão utilizam-se as seguintes equações (SCHULZE et al., 2010):

$$\Delta v_i(t) = R_m i_k(t) + L_m \frac{\partial i_k(t)}{\partial t} \quad (94)$$

$$\Delta v_k(t) = R_m i_i(t) + L_m \frac{\partial i_i(t)}{\partial t} \quad (95)$$

Das equações (94) e (95), pode-se concluir que as quedas de tensão  $\Delta v_i(t)$  e  $\Delta v_k(t)$ , são funções das correntes  $i_k(t)$  e  $i_i(t)$ , respectivamente.

O modelo de Schulze descreve as equações de corrente e de tensão de uma linha trifásica curta (representada por meio de um único circuito  $\pi$ ). Este fato não permite visualizar a propagação das ondas de tensão e de corrente ao longo da linha (SCHULZE et al., 2010).

No entanto, neste capítulo o modelo de Schulze será aplicado para linhas bifásicas genéricas, isto é, para linhas que não possuem plano de simetria vertical. Estas linhas podem ser representadas por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$  que leva em consideração o

acoplamento entre as fases. Portanto, será mostrado o desenvolvimento de um modelo de linha bifásica genérica, onde visualiza-se a propagação das ondas de tensão e de corrente.

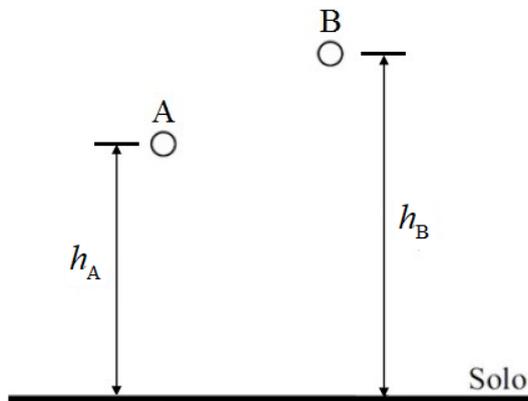
Entretanto, os componentes mútuos da matriz de admitâncias de uma linha de transmissão também contribuem com o acoplamento eletromagnético entre as fases.

Em linhas aéreas de transmissão, a condutância transversal é muito pequena, portanto, o efeito da mesma é desprezado (MARTINEZ et al., 2005). Isto significa que as capacitâncias transversais parciais entre as fases (e entre cada uma das fases e o solo) da linha, representam parte do acoplamento eletromagnético.

### 3.4.2 Representação de uma linha de transmissão bifásica por meio de elementos discretos de circuitos: Análise no domínio do tempo

Considere uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria, conforme visualiza-se na Figura 10.

Figura 10– Linha bifásica genérica.



Fonte: Elaboração própria do autor.

As matrizes que contêm os parâmetros da linha bifásica mostrada na Figura 10, por unidade de comprimento, são escritas como sendo:

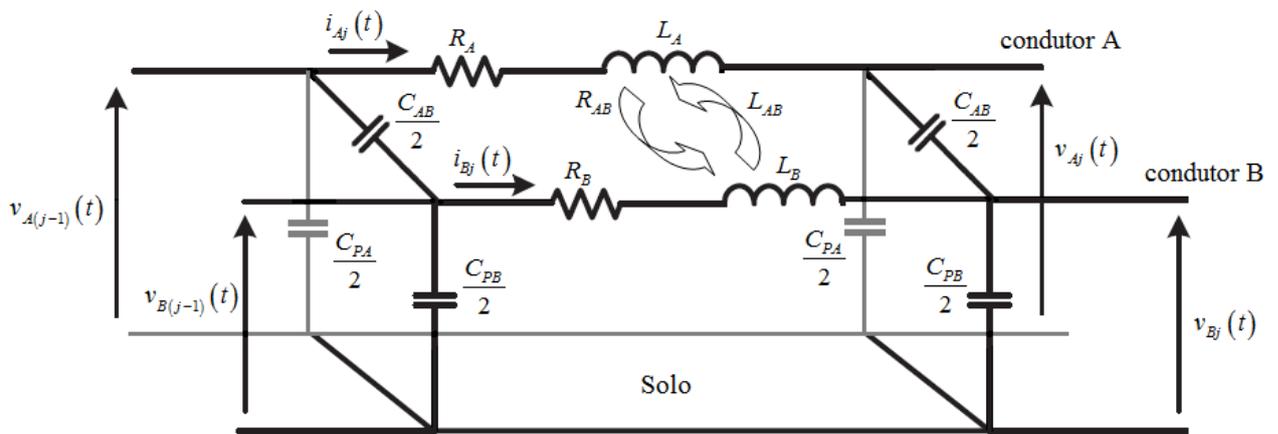
$$[R'] = \begin{bmatrix} R'_A & R'_{AB} \\ R'_{AB} & R'_B \end{bmatrix} \quad (\Omega/\text{km}) \quad (96)$$

$$[L'] = \begin{bmatrix} L'_A & L'_{AB} \\ L'_{AB} & L'_B \end{bmatrix} \quad (\text{H}/\text{km}) \quad (97)$$

$$[C'] = \begin{bmatrix} C'_{PA} + C'_{AB} & -C'_{AB} \\ -C'_{AB} & C'_{PB} + C'_{AB} \end{bmatrix} \text{ (F/km)} \quad (98)$$

O modelo estudado considera que um pequeno segmento da linha de transmissão bifásica mostrada na Figura 10, é representado por meio de um circuito  $\pi$  que leva em consideração o acoplamento eletromagnético entre as fases, conforme visualiza-se na Figura 11.

Figura 11– Pequeno segmento de linha bifásica.



Fonte: Silva (2012).

Na Figura 11, os termos  $v_{A(j-1)}(t)$  e  $v_{A_j}(t)$  representam as tensões nos extremos da fase A do segmento de linha bifásica; enquanto que os termos  $v_{B(j-1)}(t)$  e  $v_{B_j}(t)$  representam as tensões nos extremos da fase B do segmento da mesma. Considera-se que os termos  $i_{A_j}(t)$  e  $i_{B_j}(t)$  representam as correntes que percorrem as impedâncias próprias longitudinais das fases A e B, respectivamente, em cada segmento de linha bifásica.

As matrizes que contêm os parâmetros do segmento da linha bifásica mostrada na Figura 11; são escritas como sendo:

$$[R] = \begin{bmatrix} R_A & R_{AB} \\ R_{AB} & R_B \end{bmatrix} \text{ (}\Omega\text{)} \quad (99)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} L_A & L_{AB} \\ L_{AB} & L_B \end{bmatrix} \text{ (H)} \quad (100)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{PA} + C_{AB} & -C_{AB} \\ -C_{AB} & C_{PB} + C_{AB} \end{bmatrix} \quad (F) \quad (101)$$

Logo, a partir da representação do pequeno segmento ( $n = 1$ ) de linha bifásica, mostrada na Figura 11, é possível obter as seguintes relações:

Aplicando a 1ª lei de Kirchhoff (lei das correntes) no circuito da Figura 11, obtêm-se:

$$i_{A_j}(t) = \frac{C_{PA}}{2} \frac{dv_{A_j}(t)}{dt} + \frac{C_{AB}}{2} \left[ \frac{dv_{A_j}(t)}{dt} - \frac{dv_{B_j}(t)}{dt} \right] \quad (102)$$

$$i_{B_j}(t) = \frac{C_{PB}}{2} \frac{dv_{B_j}(t)}{dt} - \frac{C_{AB}}{2} \left[ \frac{dv_{A_j}(t)}{dt} - \frac{dv_{B_j}(t)}{dt} \right] \quad (103)$$

Relacionando as equações (102) a (103), obtêm-se as seguintes relações:

$$\frac{dv_{A_j}(t)}{dt} = \left[ \frac{2(C_{PB} + C_{AB})}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{A_j}(t) + \left[ \frac{2C_{AB}}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{B_j}(t) \quad (104)$$

$$\frac{dv_{B_j}(t)}{dt} = \left[ \frac{2C_{AB}}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{A_j}(t) + \left[ \frac{2(C_{PA} + C_{AB})}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{B_j}(t) \quad (105)$$

Aplicando a 2ª lei de Kirchhoff (lei das tensões) no circuito da Figura 11, e levando em consideração o descrito por Schulze, obtêm-se:

$$v_{A(j-1)}(t) = R_A i_{A_j}(t) + L_A \frac{di_{A_j}(t)}{dt} + R_{AB} i_{B_j}(t) + L_{AB} \frac{di_{B_j}(t)}{dt} + v_{A_j}(t) \quad (106)$$

$$v_{B(j-1)}(t) = R_B i_{B_j}(t) + L_B \frac{di_{B_j}(t)}{dt} + R_{AB} i_{A_j}(t) + L_{AB} \frac{di_{A_j}(t)}{dt} + v_{B_j}(t) \quad (107)$$

Relacionando as equações (106) a (107), obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{di_{Aj}(t)}{dt} = & \left\{ \left( \frac{R_{AB}L_{AB} - R_A L_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) i_{Aj}(t) + \left( \frac{R_B L_{AB} - R_{AB} L_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) i_{Bj}(t) - \left( \frac{L_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{Aj}(t) \right. \\ & \left. + \left( \frac{L_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{Bj}(t) + \left( \frac{L_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{A(j-1)}(t) - \left( \frac{L_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{B(j-1)}(t) \right\} \end{aligned} \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{Bj}(t)}{dt} = & \left\{ \left( \frac{R_A L_{AB} - L_A R_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) i_{Aj}(t) + \left( \frac{R_{AB} L_{AB} - L_A R_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) i_{Bj}(t) + \left( \frac{L_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{Aj}(t) \right. \\ & \left. - \left( \frac{L_A}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{Bj}(t) - \left( \frac{L_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{A(j-1)}(t) + \left( \frac{L_A}{L_A L_B - L_{AB}^2} \right) v_{B(j-1)}(t) \right\} \end{aligned} \quad (109)$$

As equações (104), (105), (108) e (109) podem ser representadas de maneira simplificada como sendo:

$$\frac{di_{Aj}(t)}{dt} = a_{11}i_{Aj}(t) + a_{13}i_{Bj}(t) + a_{12}v_{Aj}(t) + a_{14}v_{Bj}(t) - a_{12}v_{A(j-1)}(t) - a_{14}v_{B(j-1)}(t) \quad (110)$$

$$\frac{dv_{Aj}(t)}{dt} = a_{21}i_{Aj}(t) + a_{23}i_{Bj}(t) \quad (111)$$

$$\frac{di_{Bj}(t)}{dt} = a_{31}i_{Aj}(t) + a_{33}i_{Bj}(t) + a_{32}v_{Aj}(t) + a_{34}v_{Bj}(t) - a_{32}v_{A(j-1)}(t) - a_{34}v_{B(j-1)}(t) \quad (112)$$

$$\frac{dv_{Bj}(t)}{dt} = a_{41}i_{Aj}(t) + a_{43}i_{Bj}(t) \quad (113)$$

Onde:

$$a_{11} = \frac{R_{AB}L_{AB} - R_A L_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \quad (114)$$

$$a_{12} = \frac{-L_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \quad (115)$$

$$a_{13} = \frac{R_B L_{AB} - R_{AB} L_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \quad (116)$$

$$a_{14} = \frac{L_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} \quad (117)$$

$$a_{21} = \frac{2(C_{PB} + C_{AB})}{C_{PA} C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB}) C_{AB}} \quad (118)$$

$$a_{23} = \frac{2C_{AB}}{C_{PA} C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB}) C_{AB}} \quad (119)$$

$$a_{31} = \frac{R_A L_{AB} - L_A R_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} \quad (120)$$

$$a_{32} = \frac{L_{AB}}{L_A L_B - L_{AB}^2} = a_{14} \quad (121)$$

$$a_{33} = \frac{R_{AB} L_{AB} - L_A R_B}{L_A L_B - L_{AB}^2} \quad (122)$$

$$a_{34} = \frac{-L_A}{L_A L_B - L_{AB}^2} \quad (123)$$

$$a_{41} = \frac{2C_{AB}}{C_{PA} C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB}) C_{AB}} = a_{23} \quad (124)$$

$$a_{43} = \frac{2(C_{PA} + C_{AB})}{C_{PA} C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB}) C_{AB}} \quad (125)$$

As equações (110) a (113) podem ser escritas na forma de equação de estado, ou seja:

$$[\dot{x}(t)] = [A][x(t)] + [B][u(t)] \quad (126)$$

Onde:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{13} & \mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{31} & \mathbf{a}_{32} & \mathbf{a}_{33} & \mathbf{a}_{34} \\ \mathbf{a}_{41} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_{43} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (127)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} -\mathbf{a}_{12} & -\mathbf{a}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{a}_{32} & -\mathbf{a}_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (128)$$

$$[x(t)] = [i_{A_j}(t) \quad v_{A_j}(t) \quad i_{B_j}(t) \quad v_{B_j}(t)]^T \quad (129)$$

$$[u(t)] = [v_{A(j-1)}(t) \quad v_{B(j-1)}(t)]^T \quad (130)$$

Na equação (126);  $[\dot{x}(t)]$  é a derivada de  $[x(t)]$  com relação ao tempo.

Uma vez que a linha bifásica de comprimento  $d$  é representada por meio de uma cascata de  $n$  segmentos de linha, onde cada segmento é do tipo mostrado na Figura 11. A generalização das equações (127) a (130) é escrita como sendo:

$$[x(t)] = [i_{A1}(t) \cdots i_{A_j}(t) \cdots i_{An}(t) \quad v_{A1}(t) \cdots v_{A_j}(t) \cdots v_{An}(t) \\ i_{B1}(t) \cdots i_{B_j}(t) \cdots i_{Bn}(t) \quad v_{B1}(t) \cdots v_{B_j}(t) \cdots v_{Bn}(t)]^T \quad (131)$$

Na equação (131), o vetor  $[x(t)]$  é de ordem  $4n \times 1$ . Esta matriz é constituída pelas correntes longitudinais nas fases da linha, e pelas tensões transversais de fase. Deste modo, as grandezas  $i_{A_j}(t)$  e  $i_{B_j}(t)$  correspondem às correntes nas fases A e B, respectivamente, no  $j$ -ésimo segmento de linha. De forma análoga, as grandezas  $v_{A_j}(t)$  e  $v_{B_j}(t)$  correspondem às tensões das fases A e B, no  $j$ -ésimo segmento de linha.

Entretanto, a matriz de estado  $[\mathbf{A}]$  pode ser representada de maneira simplificada como sendo:

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] & [A_{13}] & [A_{14}] \\ [A_{21}] & [A_{22}] & [A_{23}] & [A_{24}] \\ [A_{31}] & [A_{32}] & [A_{33}] & [A_{34}] \\ [A_{41}] & [A_{42}] & [A_{43}] & [A_{44}] \end{bmatrix} \quad (132)$$

Na equação (132), a matriz de estado  $[A]$  é quadrada de dimensão  $4n$ . Esta matriz é constituída por 16 submatrizes quadradas de dimensão  $n$ , que obedecem às seguintes regras de formação:

**Submatrizes  $[A_{11}]$ ,  $[A_{13}]$ ,  $[A_{31}]$  e  $[A_{33}]$ :** Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pq}] = \begin{bmatrix} a_{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{pq} \end{bmatrix} \quad (133)$$

A equação (133) é válida para  $p = 1, 3$  e  $q = 1, 3$ ; onde o elemento  $a_{pq}$  é dado pelas equações (114), (116), (120) e (122).

**Submatrizes  $[A_{12}]$ ,  $[A_{14}]$ ,  $[A_{32}]$  e  $[A_{34}]$ :** Estas submatrizes possuem elementos não nulos na diagonal principal e na primeira subdiagonal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pq}] = \begin{bmatrix} a_{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{pq} & a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & -a_{pq} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{pq} & a_{pq} \end{bmatrix} \quad (134)$$

A equação (134) é válida para  $p = 1, 3$  e  $q = 2, 4$ ; onde o elemento  $a_{pq}$  é dado pelas equações (115), (117), (121) e (123).

**Submatriz**  $[A_{21}]$ ,  $[A_{23}]$ ,  $[A_{41}]$  e  $[A_{43}]$ : Estas submatrizes possuem elementos não nulos na diagonal principal e na primeira superdiagonal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pq}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{pq} & -a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pq} & -a_{pq} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pq} & -a_{pq} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2a_{pq} \end{bmatrix} \quad (135)$$

A equação (135) é válida para  $p = 2, 4$  e  $q = 1, 3$ ; onde o elemento  $a_{pq}$  é dado pelas equações (118), (119), (124) e (125).

**Submatrizes**  $[A_{22}]$ ,  $[A_{24}]$ ,  $[A_{42}]$  e  $[A_{44}]$ : Estas submatrizes são nulas.

Entretanto, a matriz de controle  $[B]$  é retangular de ordem  $4n \times 2$ . Esta matriz é descrita como sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ b_{(2n+1)1} & b_{(2n+1)2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (136)$$

Onde:

$$b_{11} = -a_{12} \quad (137)$$

$$b_{12} = -a_{14} \quad (138)$$

$$b_{(2n+1)1} = -a_{32} \quad (139)$$

$$b_{(2n+1)2} = -a_{34} \quad (140)$$

Os elementos  $a_{12}$ ,  $a_{14}$ ,  $a_{32}$  e  $a_{34}$  são dados pelas equações (115), (117), (121) e (123), respectivamente.

Entretanto, o vetor  $[u(t)]$  é escrito como sendo:

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} v_A(t) \\ v_B(t) \end{bmatrix} \quad (141)$$

Na equação (126), os elementos  $v_A(t)$  e  $v_B(t)$  representam as tensões no terminal emissor das fases A e B, respectivamente.

Logo, a equação (126) permite obter as correntes e tensões ao longo de uma linha bifásica genérica, diretamente no domínio do tempo. A solução desta equação é obtida mediante a utilização de qualquer método numérico de integração. Geralmente, a integração da equação de estado é realizada por meio do método de Heun (método de integração trapezoidal), onde a implementação computacional da mesma pode ser realizada na plataforma do MATLAB®.

### 3.5 Considerações

Para obter um modelo de linha de transmissão monofásica a parâmetros discretos e constantes, diretamente no domínio do tempo, considerou-se que a mesma pode ser representada de maneira aproximada, por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$ , sendo as respectivas equações de corrente e de tensão escritas na forma de equação de estado. Devido ao fato de que os parâmetros longitudinais são variáveis em relação à frequência, neste capítulo também foi mostrado o desenvolvimento do modelo de linha monofásica a parâmetros discretos, que leva em conta a influência da frequência. Tal influência visualiza-se na constituição da equação de estado. A solução dos dois modelos, anteriormente mencionados, foi obtida por meio do método numérico de integração trapezoidal (ou método de Heun).

Neste capítulo foi mostrado o desenvolvimento de um modelo de linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, diretamente no domínio do tempo. A resistência e a indutância mútua, são os parâmetros que representam o acoplamento magnético entre as fases da linha. Esses parâmetros produzem quedas de tensão nas fases da

mesma. O cálculo dessas quedas de tensão foi descrito no modelo de Schulze (SCHULZE et al., 2010).

Nos modelos a parâmetros discretos pôde-se visualizar que as matrizes de estado e de controle da linha de transmissão apresentam uma regra de formação. Essas regras de formação possibilitam que o modelo seja implementado computacionalmente na plataforma do MATLAB<sup>®</sup>. Todos esses modelos se desenvolveram diretamente nos domínios das fases e do tempo.

## 4 DESENVOLVIMENTO DO MODELO PROPOSTO

### 4.1 Introdução

O modelo estudado na seção 3.4, representou uma linha de transmissão bifásica por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$  (modelo a parâmetros discretos e constantes), onde as respectivas equações de corrente e de tensão são escritas na forma de equação de estado. Porém, devido ao fato de que os parâmetros longitudinais são variáveis em relação à frequência, as respostas obtidas naquele modelo são aproximadas. Para melhorar a qualidade do comportamento das tensões e correntes, será desenvolvido um modelo de linha de transmissão bifásica a parâmetros discretos, diretamente no domínio do tempo, que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais próprios e mútuos.

Neste capítulo será mostrado o desenvolvimento de um modelo de linha de transmissão bifásica, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  que leva em consideração o efeito da frequência. A sintetização do efeito da mesma em cada uma das fases e no acoplamento magnético, é representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores. Desse modo, considerar-se-á que uma linha de transmissão bifásica é representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$ , onde as respectivas equações de corrente e de tensão são escritas na forma de equação de estado, diretamente no domínio do tempo.

No processo de validação para linhas de transmissão bifásicas que possuem plano de simetria vertical, serão comparados os resultados obtidos por meio do modelo clássico modal, onde cada um dos modos de propagação leva em consideração o efeito da frequência (YAMANAKA, 2009), com os resultados obtidos por meio do modelo proposto. Estes modelos serão implementados computacionalmente na plataforma do MATLAB®.

Entretanto, no processo de validação do modelo proposto para linhas de transmissão que não possuem plano de simetria vertical, a linha será representada por meio de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  (análise no domínio da frequência) que leva em consideração o acoplamento entre as fases. Desse modo, considerar-se-á que uma linha de transmissão bifásica é representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$ , onde as respectivas equações de corrente e de tensão são escritas na forma matricial de um sistema

linear, diretamente no domínio da frequência. Portanto, para cada valor da faixa discretizada de frequências, a solução do sistema linear permite obter as correntes e tensões ao longo da linha. Logo, para converter as mesmas, do domínio da frequência para o domínio do tempo, é necessário utilizar a transformada numérica de Laplace (NLT) (MORENO et al., 2008).

#### 4.2 Desenvolvimento do modelo proposto: Análise no domínio do tempo

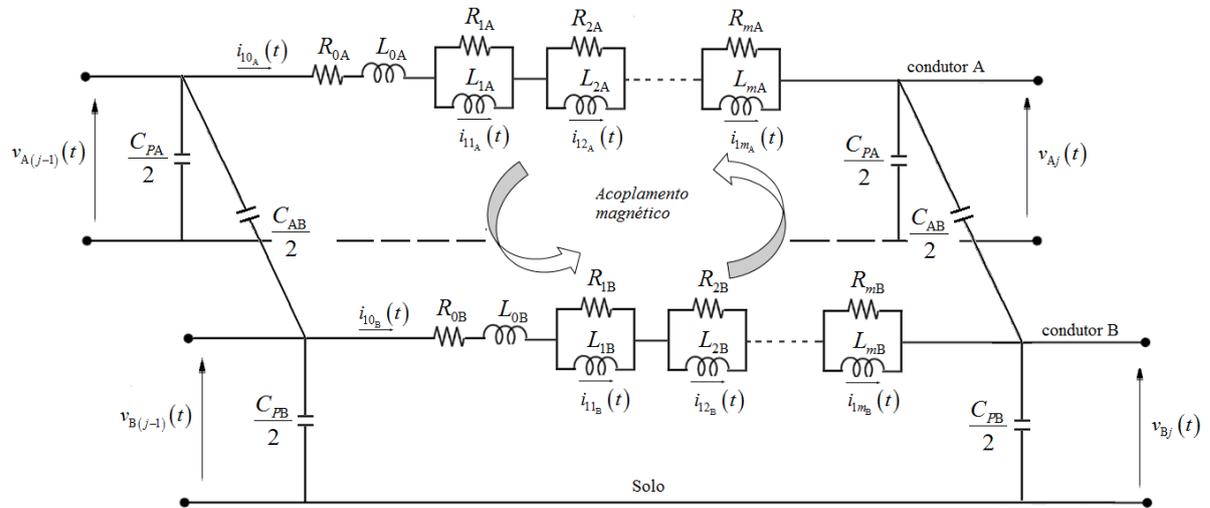
Do capítulo 2, sabe-se que os parâmetros longitudinais próprios e mútuos de uma linha de transmissão, são variáveis em relação à frequência. A resposta em frequência dos parâmetros longitudinais sintetizar-se-á em elementos discretos de circuitos. Tal sintetização é representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores (mostrada no apêndice A.2).

As impedâncias longitudinais de uma linha de transmissão são aproximadas por meio de funções racionais. Os polos e resíduos (valores que definem as resistências e indutâncias da sintetização) destas funções racionais são calculados por meio do procedimento denominado *vector fitting* (mostrado no apêndice A.1).

O modelo proposto considera que um pequeno segmento da linha de transmissão bifásica mostrada na seção 3.4, é representado por meio de um circuito  $\pi$ , conforme visualiza-se na Figura 12.

Na Figura 12, os termos  $v_{A(j-1)}(t)$  e  $v_{A_j}(t)$  representam as tensões nos extremos da fase A do segmento de linha bifásica, enquanto que os termos  $v_{B(j-1)}(t)$  e  $v_{B_j}(t)$  representam as tensões nos extremos da fase B do mesmo. Considera-se que os termos  $i_{10_A}(t)$ ,  $i_{11_A}(t)$ ,  $i_{12_A}(t)$ , ... e  $i_{1m_A}(t)$  representam as correntes que percorrem os indutores  $L_{0A}$ ,  $L_{1A}$ ,  $L_{2A}$ , ... e  $L_{mA}$  da fase A do segmento de linha bifásica, respectivamente; enquanto que os termos  $i_{10_B}(t)$ ,  $i_{11_B}(t)$ ,  $i_{12_B}(t)$ , ... e  $i_{1m_B}(t)$  representam as correntes que percorrem os indutores  $L_{0B}$ ,  $L_{1B}$ ,  $L_{2B}$ , ... e  $L_{mB}$  da fase B do mesmo, respectivamente.

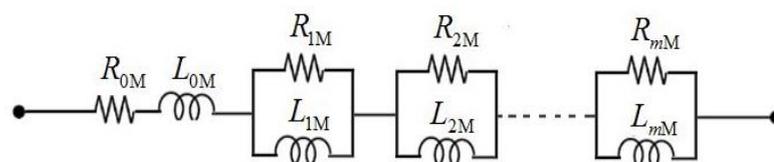
Figura 12 – Pequeno segmento de linha bifásica (circuito  $\pi$ ) que leva em consideração o efeito da frequência.



Fonte: Elaboração própria do autor.

O modelo proposto considera que o acoplamento magnético de um segmento de linha bifásica, pode ser representado por meio de elementos discretos de circuitos, conforme visualiza-se na Figura 13.

Figura 13 – Sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais mútuos: Acoplamento magnético.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Sabe-se que a sintetização do efeito da frequência no acoplamento magnético, mostrada na Figura 13, em conjunto com as correntes que percorrem os seus indutores  $L_{0M}$ ,  $L_{1M}$ ,  $L_{2M}$ , ... e  $L_{mM}$ , produzem quedas de tensão nas fases do segmento de linha bifásica. Considera-se que  $\Delta v_A(t)$  e  $\Delta v_B(t)$  são as quedas de tensão nas fases A e B, respectivamente. Para calcular tais quedas de tensão utilizam-se a lei de Faraday e a lei de Ohm.

Considerando o anteriormente mencionado, as quedas de tensão são descritas como sendo:

$$\Delta v_A(t) = L_{0M} \frac{di_{10_B}(t)}{dt} + \left( \sum_{j=0}^m R_{jM} \right) i_{10_B}(t) - \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1j_{BX}}(t)] \quad (142)$$

$$\Delta v_B(t) = L_{0M} \cdot \frac{di_{10_A}(t)}{dt} + \left( \sum_{j=0}^m R_{jM} \right) i_{10_A}(t) - \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1j_{AX}}(t)] \quad (143)$$

Neste modelo considera-se que para calcular  $\Delta v_A(t)$ ; os termos  $i_{10_B}(t)$ ,  $i_{11_{BX}}(t)$ ,  $i_{12_{BX}}(t)$ , ... e  $i_{1m_{BX}}(t)$  são as correntes que percorrem os indutores  $L_{0M}$ ,  $L_{1M}$ ,  $L_{2M}$ , ... e  $L_{mM}$ , respectivamente; enquanto que para calcular  $\Delta v_B(t)$  considera-se que os termos  $i_{10_A}(t)$ ,  $i_{11_{AX}}(t)$ ,  $i_{12_{AX}}(t)$ , ... e  $i_{1m_{AX}}(t)$  são as correntes que percorrem aqueles indutores  $L_{0M}$ ,  $L_{1M}$ ,  $L_{2M}$ , ... e  $L_{mM}$ , respectivamente.

Entretanto, sabe-se que os resistores  $R_{0A}$ ,  $R_{1A}$ ,  $R_{2A}$ , ... e  $R_{mA}$ , e que os indutores  $L_{0A}$ ,  $L_{1A}$ ,  $L_{2A}$ , ... e  $L_{mA}$ , compõem a associação série e paralela que representa a sintetização do efeito da frequência na fase A do segmento de linha. De forma análoga, os resistores  $R_{0B}$ ,  $R_{1B}$ ,  $R_{2B}$ , ... e  $R_{mB}$ , e os indutores  $L_{0B}$ ,  $L_{1B}$ ,  $L_{2B}$ , ... e  $L_{mB}$ , compõem a associação série e paralela que representa a sintetização do efeito da frequência na fase B do segmento de linha. Por fim, os resistores  $R_{0M}$ ,  $R_{1M}$ ,  $R_{2M}$ , ... e  $R_{mM}$ , e os indutores  $L_{0M}$ ,  $L_{1M}$ ,  $L_{2M}$ , ... e  $L_{mM}$ , compõem a associação série e paralela que representa a sintetização do efeito da frequência no acoplamento magnético do segmento de linha. Logo, considerando que  $R'_{0A}$ ,  $R'_{1A}$ ,  $R'_{2A}$ , ...,  $R'_{mA}$ ,  $R'_{0B}$ ,  $R'_{1B}$ ,  $R'_{2B}$ , ...,  $R'_{mB}$ ,  $R'_{0M}$ ,  $R'_{1M}$ ,  $R'_{2M}$ , ...,  $R'_{mM}$ ,  $L'_{0A}$ ,  $L'_{1A}$ ,  $L'_{2A}$ , ...,  $L'_{mA}$ ,  $L'_{0B}$ ,  $L'_{1B}$ ,  $L'_{2B}$ , ...,  $L'_{mB}$ ,  $L'_{0M}$ ,  $L'_{1M}$ ,  $L'_{2M}$ , ... e  $L'_{mM}$  são parâmetros por unidade de comprimento.

Logo, a partir da representação do pequeno segmento ( $n=1$ ) de linha bifásica, mostrada na Figura 12, é possível obter as seguintes relações:

Aplicando a 2ª lei de Kirchoff (lei das tensões) no circuito da Figura 12, e levando em conta as considerações sobre as quedas de tensão nas fases A e B, anteriormente mencionadas, obtêm-se:

$$v_{A(j-1)}(t) - v_{Aj}(t) = \left\{ L_{0A} \frac{di_{10_A}(t)}{dt} + \left( \sum_{j=0}^{m_A} R_{jA} \right) i_{10_A}(t) - \sum_{j=1}^{m_A} [R_{jA} i_{1j_A}(t)] \right. \\ \left. + L_{0M} \frac{di_{10_B}(t)}{dt} + \left( \sum_{j=0}^m R_{jM} \right) i_{10_B}(t) - \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1j_{BX}}(t)] \right\} \quad (144)$$

$$v_{B(j-1)}(t) - v_{Bj}(t) = \left\{ L_{0B} \frac{di_{10_B}(t)}{dt} + \left( \sum_{j=0}^{m_B} R_{jB} \right) i_{10_B}(t) - \sum_{j=1}^{m_B} [R_{jB} i_{1j_B}(t)] \right. \\ \left. + L_{0M} \frac{di_{10_A}(t)}{dt} + \left( \sum_{j=0}^m R_{jM} \right) i_{10_A}(t) - \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1j_{AX}}(t)] \right\} \quad (145)$$

$$L_{1A} \frac{di_{11_A}(t)}{dt} = R_{1A} [i_{10_A}(t) - i_{11_A}(t)] \quad (146)$$

$$L_{2A} \frac{di_{12_A}(t)}{dt} = R_{2A} [i_{10_A}(t) - i_{12_A}(t)] \quad (147)$$

$$\vdots$$

$$L_{m_A A} \frac{di_{1m_A A}(t)}{dt} = R_{m_A A} [i_{10_A}(t) - i_{1m_A A}(t)] \quad (148)$$

$$L_{1B} \frac{di_{11_B}(t)}{dt} = R_{1B} [i_{10_B}(t) - i_{11_B}(t)] \quad (149)$$

$$L_{2B} \frac{di_{12_B}(t)}{dt} = R_{2B} [i_{10_B}(t) - i_{12_B}(t)] \quad (150)$$

$$\vdots$$

$$L_{m_B B} \frac{di_{1m_B B}(t)}{dt} = R_{m_B B} [i_{10_B}(t) - i_{1m_B B}(t)] \quad (151)$$

$$L_{1M} \frac{di_{11_{BX}}(t)}{dt} = R_{1M} [i_{10_B}(t) - i_{11_{BX}}(t)] \quad (152)$$

$$L_{2M} \frac{di_{12_{BX}}(t)}{dt} = R_{2M} [i_{10_B}(t) - i_{12_{BX}}(t)] \quad (153)$$

$$\vdots$$

$$L_{mM} \frac{di_{1m_{BX}}(t)}{dt} = R_{mM} [i_{10_B}(t) - i_{1m_{BX}}(t)] \quad (154)$$

$$L_{1M} \frac{di_{11_{AX}}(t)}{dt} = R_{1M} [i_{10_A}(t) - i_{11_{AX}}(t)] \quad (155)$$

$$L_{2M} \frac{di_{12_{AX}}(t)}{dt} = R_{2M} [i_{10_A}(t) - i_{12_{AX}}(t)] \quad (156)$$

$$\vdots$$

$$L_{mM} \frac{di_{1m_{AX}}(t)}{dt} = R_{mM} [i_{10_A}(t) - i_{1m_{AX}}(t)] \quad (157)$$

Relacionando as equações (144) e (145), obtêm-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \frac{di_{10_A}(t)}{dt} = & \left\{ \left[ \left( \frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^{m_A} R_{jA} - \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^m R_{jM} \right] i_{10_A}(t) \right. \\ & + \left[ \left( \frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^m R_{jM} - \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^{m_B} R_{jB} \right] i_{10_B}(t) \\ & - \left( \frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^{m_A} [R_{jA} i_{1j_A}(t)] + \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^{m_B} [R_{jB} i_{1j_B}(t)] \\ & - \left( \frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1j_{BX}}(t)] + \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1j_{AX}}(t)] \\ & + \left( \frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{A_j}(t) - \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{B_j}(t) \\ & \left. - \left( \frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{A(j-1)}(t) + \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{B(j-1)}(t) \right\} \quad (158) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{di_{10_B}(t)}{dt} = & \left\{ \left[ \left( \frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^m R_{jM} - \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^{m_A} R_{jA} \right] i_{10_A}(t) \right. \\
& + \left[ \left( \frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^{m_B} R_{jB} - \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=0}^m R_{jM} \right] i_{10_B}(t) \\
& + \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^{m_A} [R_{jA} i_{1_{jA}}(t)] - \left( \frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^{m_B} [R_{jB} i_{1_{jB}}(t)] \\
& + \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1_{j_{BX}}}(t)] - \left( \frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) \sum_{j=1}^m [R_{jM} i_{1_{j_{AX}}}(t)] \\
& - \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{Aj}(t) + \left( \frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{Bj}(t) \\
& \left. + \left( \frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{A(j-1)}(t) - \left( \frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}} \right) v_{B(j-1)}(t) \right\} \quad (159)
\end{aligned}$$

Entretanto, as equações (146) a (157) podem ser reescritas como sendo:

$$\frac{di_{11_A}(t)}{dt} = \frac{R_{1A}}{L_{1A}} i_{10_A}(t) - \frac{R_{1A}}{L_{1A}} i_{11_A}(t) \quad (160)$$

$$\frac{di_{12_A}(t)}{dt} = \frac{R_{2A}}{L_{2A}} i_{10_A}(t) - \frac{R_{2A}}{L_{2A}} i_{12_A}(t) \quad (161)$$

⋮

$$\frac{di_{1m_{AA}}(t)}{dt} = \frac{R_{m_{AA}}}{L_{m_{AA}}} i_{10_A}(t) - \frac{R_{m_{AA}}}{L_{m_{AA}}} i_{1m_{AA}}(t) \quad (162)$$

$$\frac{di_{11_B}(t)}{dt} = \frac{R_{1B}}{L_{1B}} i_{10_B}(t) - \frac{R_{1B}}{L_{1B}} i_{11_B}(t) \quad (163)$$

$$\frac{di_{12_B}(t)}{dt} = \frac{R_{2B}}{L_{2B}} i_{10_B}(t) - \frac{R_{2B}}{L_{2B}} i_{12_B}(t) \quad (164)$$

⋮

$$\frac{di_{1m_{BB}}(t)}{dt} = \frac{R_{m_{BB}}}{L_{m_{BB}}} i_{10_B}(t) - \frac{R_{m_{BB}}}{L_{m_{BB}}} i_{1m_{BB}}(t) \quad (165)$$

$$\frac{di_{11_{BX}}(t)}{dt} = \frac{R_{1M}}{L_{1M}} i_{10_B}(t) - \frac{R_{1M}}{L_{1M}} i_{11_{BX}}(t) \quad (166)$$

$$\frac{di_{12_{BX}}(t)}{dt} = \frac{R_{2M}}{L_{2M}} i_{10_B}(t) - \frac{R_{2M}}{L_{2M}} i_{12_{BX}}(t) \quad (167)$$

$$\vdots$$

$$\frac{di_{1m_{BX}}(t)}{dt} = \frac{R_{mM}}{L_{mM}} i_{10_B}(t) - \frac{R_{mM}}{L_{mM}} i_{1m_{BX}}(t) \quad (168)$$

$$\frac{di_{11_{AX}}(t)}{dt} = \frac{R_{1M}}{L_{1M}} i_{10_A}(t) - \frac{R_{1M}}{L_{1M}} i_{11_{AX}}(t) \quad (169)$$

$$\frac{di_{12_{AX}}(t)}{dt} = \frac{R_{2M}}{L_{2M}} i_{10_A}(t) - \frac{R_{2M}}{L_{2M}} i_{12_{AX}}(t) \quad (170)$$

$$\vdots$$

$$\frac{di_{1m_{AX}}(t)}{dt} = \frac{R_{mM}}{L_{mM}} i_{10_A}(t) - \frac{R_{mM}}{L_{mM}} i_{1m_{AX}}(t) \quad (171)$$

Aplicando a 1ª lei de Kirchhoff (lei das correntes) no circuito da Figura 12, obtêm-se:

$$i_{10_A}(t) = \frac{C_{PA}}{2} \frac{dv_{Aj}(t)}{dt} + \frac{C_{AB}}{2} \left[ \frac{dv_{Aj}(t)}{dt} - \frac{dv_{Bj}(t)}{dt} \right] \quad (172)$$

$$i_{10_B}(t) = \frac{C_{PB}}{2} \frac{dv_{Bj}(t)}{dt} - \frac{C_{AB}}{2} \left[ \frac{dv_{Aj}(t)}{dt} - \frac{dv_{Bj}(t)}{dt} \right] \quad (173)$$

Relacionando as equações (172) a (173), obtêm-se as seguintes relações:

$$\frac{dv_{Aj}(t)}{dt} = \left[ \frac{2(C_{PB} + C_{AB})}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{10_A}(t) + \left[ \frac{2C_{AB}}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{10_B}(t) \quad (174)$$

$$\frac{dv_{Bj}(t)}{dt} = \left[ \frac{2C_{AB}}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{10_A}(t) + \left[ \frac{2(C_{PA} + C_{AB})}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \right] i_{10_B}(t) \quad (175)$$

As equações (158) a (171), (174) e (175) podem-se representar de maneira simplificada como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{di_{10_A}(t)}{dt} = & \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{a}_{11}i_{10_A}(t) + \mathbf{a}_{12}i_{10_B}(t) + \sum_{j=1}^{m_A} [\mathbf{a}_{13j}i_{1j_A}(t)] + \sum_{j=1}^{m_B} [\mathbf{a}_{14j}i_{1j_B}(t)] \\ & + \sum_{j=1}^m [\mathbf{a}_{15j}i_{1j_{BX}}(t)] + \sum_{j=1}^m [\mathbf{a}_{16j}i_{1j_{AX}}(t)] + \mathbf{a}_{17}v_{Aj}(t) \\ & + \mathbf{a}_{18}v_{Bj}(t) - \mathbf{a}_{17}v_{A(j-1)}(t) - \mathbf{a}_{18}v_{B(j-1)}(t) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (176)$$

$$\begin{aligned} \frac{di_{10_B}(t)}{dt} = & \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{a}_{21}i_{10_A}(t) + \mathbf{a}_{22}i_{10_B}(t) + \sum_{j=1}^{m_A} [\mathbf{a}_{23j}i_{1j_A}(t)] + \sum_{j=1}^{m_B} [\mathbf{a}_{24j}i_{1j_B}(t)] \\ & + \sum_{j=1}^m [\mathbf{a}_{25j}i_{1j_{BX}}(t)] + \sum_{j=1}^m [\mathbf{a}_{26j}i_{1j_{AX}}(t)] + \mathbf{a}_{27}v_{Aj}(t) \\ & + \mathbf{a}_{28}v_{Bj}(t) - \mathbf{a}_{27}v_{A(j-1)}(t) - \mathbf{a}_{28}v_{B(j-1)}(t) \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (177)$$

$$\frac{di_{11_A}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{31}i_{10_A}(t) - \mathbf{a}_{31}i_{11_A}(t) \quad (178)$$

$$\frac{di_{11_B}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{42}i_{10_B}(t) - \mathbf{a}_{42}i_{11_B}(t) \quad (179)$$

$$\frac{di_{12_A}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{51}i_{10_A}(t) - \mathbf{a}_{51}i_{12_A}(t) \quad (180)$$

$$\frac{di_{12_B}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{62}i_{10_B}(t) - \mathbf{a}_{62}i_{12_B}(t) \quad (181)$$

⋮

$$\frac{di_{1m_A A}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{(2m_A+1)1}i_{10_A}(t) - \mathbf{a}_{(2m_A+1)1}i_{1m_A A}(t) \quad (182)$$

$$\frac{di_{1m_B B}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{(2m_B+1)2}i_{10_B}(t) - \mathbf{a}_{(2m_B+1)2}i_{1m_B B}(t) \quad (183)$$

$$\frac{di_{11_{BX}}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{(m_A+m_B+3)2}i_{10_B}(t) - \mathbf{a}_{(m_A+m_B+3)2}i_{11_{BX}}(t) \quad (184)$$

$$\frac{di_{11_{AX}}(t)}{dt} = \mathbf{a}_{(m_A+m_B+4)1}i_{10_A}(t) - \mathbf{a}_{(m_A+m_B+4)1}i_{11_{AX}}(t) \quad (185)$$

$$\frac{di_{12_{\text{BX}}}(t)}{dt} = a_{(m_A+m_B+5)2} i_{10_{\text{B}}}(t) - a_{(m_A+m_B+5)2} i_{12_{\text{BX}}}(t) \quad (186)$$

$$\frac{di_{12_{\text{AX}}}(t)}{dt} = a_{(m_A+m_B+6)1} i_{10_{\text{A}}}(t) - a_{(m_A+m_B+6)1} i_{12_{\text{AX}}}(t) \quad (187)$$

⋮

$$\frac{di_{1m_{\text{BX}}}(t)}{dt} = a_{(m_A+m_B+2m+1)2} i_{10_{\text{B}}}(t) - a_{(m_A+m_B+2m+1)2} i_{1m_{\text{BX}}}(t) \quad (188)$$

$$\frac{di_{1m_{\text{AX}}}(t)}{dt} = a_{(m_A+m_B+2m+2)1} i_{10_{\text{A}}}(t) - a_{(m_A+m_B+2m+2)1} i_{1m_{\text{AX}}}(t) \quad (189)$$

$$\frac{dv_{A_j}(t)}{dt} = a_{(m_A+m_B+2m+3)1} i_{10_{\text{A}}}(t) + a_{(m_A+m_B+2m+3)2} i_{10_{\text{B}}}(t) \quad (190)$$

$$\frac{dv_{B_j}(t)}{dt} = a_{(m_A+m_B+2m+4)1} i_{10_{\text{A}}}(t) + a_{(m_A+m_B+2m+4)2} i_{10_{\text{B}}}(t) \quad (191)$$

Onde:

$$a_{11} = \left( \frac{L_{0\text{B}}}{L_{0\text{M}}^2 - L_{0\text{A}} L_{0\text{B}}} \right) \sum_{j=0}^{m_A} R_{j\text{A}} - \left( \frac{L_{0\text{M}}}{L_{0\text{M}}^2 - L_{0\text{A}} L_{0\text{B}}} \right) \sum_{j=0}^m R_{j\text{M}} \quad (192)$$

$$a_{12} = \left( \frac{L_{0\text{B}}}{L_{0\text{M}}^2 - L_{0\text{A}} L_{0\text{B}}} \right) \sum_{j=0}^m R_{j\text{M}} - \left( \frac{L_{0\text{M}}}{L_{0\text{M}}^2 - L_{0\text{A}} L_{0\text{B}}} \right) \sum_{j=0}^{m_B} R_{j\text{B}} \quad (193)$$

$$a_{13j} = - \left( \frac{L_{0\text{B}}}{L_{0\text{M}}^2 - L_{0\text{A}} L_{0\text{B}}} \right) R_{j\text{A}} \quad (194)$$

A equação (194) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_{\text{A}}}(t)$  que percorre o indutor  $L_{j_{\text{A}}}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m_A$

$$a_{14j} = \left( \frac{L_{0\text{M}}}{L_{0\text{M}}^2 - L_{0\text{A}} \cdot L_{0\text{B}}} \right) R_{j\text{B}} \quad (195)$$

A equação (195) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_B}(t)$  que percorre o indutor  $L_{jM}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m_B$

$$a_{15j} = -\left(\frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)R_{jM} \quad (196)$$

A equação (196) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_{BX}}(t)$  que percorre o indutor  $L_{jM}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m$

$$a_{16j} = \left(\frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)R_{jM} \quad (197)$$

A equação (197) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_{AX}}(t)$  que percorre o indutor  $L_{jM}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m$

$$a_{17} = \left(\frac{L_{0B}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right) \quad (198)$$

$$a_{18} = -\left(\frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right) \quad (199)$$

$$a_{21} = \left(\frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)\sum_{j=0}^m R_{jM} - \left(\frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)\sum_{j=0}^{m_A} R_{jA} \quad (200)$$

$$a_{22} = \left(\frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)\sum_{j=0}^{m_B} R_{jB} - \left(\frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)\sum_{j=0}^m R_{jM} \quad (201)$$

$$a_{23j} = \left(\frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)R_{jA} \quad (202)$$

A equação (202) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_A}(t)$  que percorre o indutor  $L_{jA}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m_A$

$$a_{24j} = -\left(\frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)R_{jB} \quad (203)$$

A equação (203) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_b}(t)$  que percorre o indutor  $L_{jM}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m_B$

$$a_{25j} = \left(\frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)R_{jM} = a_{16j} \quad (204)$$

A equação (204) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_{bX}}(t)$  que percorre o indutor  $L_{jM}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m$

$$a_{26j} = -\left(\frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right)R_{jM} \quad (205)$$

A equação (205) representa o termo geral associado à corrente  $i_{1j_{aX}}(t)$  que percorre o indutor  $L_{jM}$  do segmento de linha. Esta expressão matemática é válida para  $j = 1, 2, \dots, m$

$$a_{27} = -\left(\frac{L_{0M}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right) = a_{18} \quad (206)$$

$$a_{28} = \left(\frac{L_{0A}}{L_{0M}^2 - L_{0A}L_{0B}}\right) \quad (207)$$

$$a_{31} = \frac{R_{1A}}{L_{1A}} \quad (208)$$

$$a_{42} = \frac{R_{1B}}{L_{1B}} \quad (209)$$

$$a_{51} = \frac{R_{2A}}{L_{2A}} \quad (210)$$

$$\mathbf{a}_{62} = \frac{R_{2B}}{L_{2B}} \quad (211)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_{(2m_A+1)1} = \frac{R_{m_A A}}{L_{m_A A}} \quad (212)$$

$$\mathbf{a}_{(2m_B+1)2} = \frac{R_{m_B B}}{L_{m_B B}} \quad (213)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+3)2} = \frac{R_{1M}}{L_{1M}} \quad (214)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+4)1} = \frac{R_{1M}}{L_{1M}} \quad (215)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+5)2} = \frac{R_{2M}}{L_{2M}} \quad (216)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+6)1} = \frac{R_{2M}}{L_{2M}} \quad (217)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+2m+1)2} = \frac{R_{mM}}{L_{mM}} \quad (218)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+2m+2)1} = \frac{R_{mM}}{L_{mM}} \quad (219)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+2m+3)1} = \frac{2(C_{PB} + C_{AB})}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \quad (220)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+2m+3)2} = \frac{2C_{AB}}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \quad (221)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+2m+4)1} = \frac{2C_{AB}}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \quad (222)$$

$$\mathbf{a}_{(m_A+m_B+2m+4)2} = \frac{2(C_{PA} + C_{AB})}{C_{PA}C_{PB} + (C_{PA} + C_{PB})C_{AB}} \quad (223)$$

As equações (176) a (191) podem ser escritas na forma de equação de estado, ou seja:

$$[\dot{x}(t)] = [A][x(t)] + [B][u(t)] \quad (224)$$

Onde:

$$[x(t)] = \begin{bmatrix} i_{10_A}(t) & i_{10_B}(t) & i_{11_A}(t) & i_{11_B}(t) & i_{12_A}(t) & i_{12_B}(t) & \cdots & i_{1m_{AA}}(t) & i_{1m_{BB}}(t) \\ i_{11_{BX}}(t) & i_{11_{AX}}(t) & i_{12_{BX}}(t) & i_{12_{AX}}(t) & \cdots & i_{1m_{BX}}(t) & i_{1m_{AX}}(t) & v_{Aj}(t) & v_{Bj}(t) \end{bmatrix}^T \quad (225)$$

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} v_{A(j-1)}(t) \\ v_{B(j-1)}(t) \end{bmatrix} \quad (226)$$

Na equação (224),  $[\dot{x}(t)]$  é a derivada de  $[x(t)]$  com relação ao tempo.

$$[A] = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{131} & a_{141} \cdots & a_{13j} & a_{14j} \cdots & a_{13m_A} & a_{14m_B} & a_{151} & a_{161} \cdots & a_{15j} & a_{16j} \cdots & a_{15m} & a_{16m} & a_{17} & a_{18} \\
a_{21} & a_{22} & a_{231} & a_{241} \cdots & a_{23j} & a_{24j} \cdots & a_{23m_A} & a_{24m_B} & a_{251} & a_{261} \cdots & a_{25j} & a_{26j} \cdots & a_{25m} & a_{26m} & a_{27} & a_{28} \\
a_{31} & 0 & -a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{42} & 0 & -a_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
a_{(2m_A+1)1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{(2m_A+1)1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{(2m_B+1)2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{(2m_B+1)2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{(m_A+m_B+3)2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{(m_A+m_B+3)2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{(m_A+m_B+4)1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{(m_A+m_B+4)1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & a_{(m_A+m_B+2m+1)2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{(m_A+m_B+2m+1)2} & 0 & 0 & 0 \\
a_{(m_A+m_B+2m+2)1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{(m_A+m_B+2m+2)1} & 0 & 0 \\
a_{(m_A+m_B+2m+3)1} & a_{(m_A+m_B+2m+3)2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_{(m_A+m_B+2m+4)1} & a_{(m_A+m_B+2m+4)2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

(227)

$$[B] = \begin{bmatrix}
-a_{17} & -a_{18} \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0 \\
-a_{27} & -a_{28} \\
0 & 0 \\
\vdots & \vdots \\
0 & 0
\end{bmatrix}$$

(228)

Uma vez que a linha monofásica de comprimento  $d$  é representada por meio de uma cascata de  $n$  segmentos de linha, onde cada segmento é do tipo mostrado na Figura 12. A generalização das equações (225) a (228) é escrita como sendo:

$$\begin{aligned} [x(t)] = & \left[ \begin{array}{c} i_{10_A}(t) \cdots i_{n0_A}(t) \ i_{10_B}(t) \cdots i_{n0_B}(t) \ i_{11_A}(t) \cdots i_{n1_A}(t) \ i_{11_B}(t) \cdots i_{n1_B}(t) \cdots i_{m_{AA}}(t) \cdots i_{nm_{AA}}(t) \\ i_{1m_{BB}}(t) \cdots i_{nm_{BB}}(t) \ i_{11_{BX}}(t) \cdots i_{n1_{BX}}(t) \ i_{11_{AX}}(t) \cdots i_{n1_{AX}}(t) \cdots i_{1m_{BX}}(t) \cdots i_{nm_{BX}}(t) \\ i_{1m_{AX}}(t) \cdots i_{nm_{AX}}(t) \ v_{A1}(t) \cdots v_{Aj}(t) \cdots v_{An}(t) \ v_{B1}(t) \cdots v_{Bj}(t) \cdots v_{Bn}(t) \end{array} \right]^T \end{aligned} \quad (229)$$

Logo, o vetor de estado  $[x(t)]$  pode ser representado de maneira simplificada como sendo:

$$\begin{aligned} [x(t)] = & \left[ \begin{array}{c} [x_{0_A}(t)] [x_{0_B}(t)] [x_{1_A}(t)] [x_{1_B}(t)] \cdots [x_{m_{AA}}(t)] [x_{m_{BB}}(t)] \\ [x_{1_{BX}}(t)] [x_{1_{AX}}(t)] \cdots [x_{m_{BX}}(t)] [x_{m_{AX}}(t)] [x_A(t)] [x_B(t)] \end{array} \right]^T \end{aligned} \quad (230)$$

Na equação (230), o vetor de estado  $[x(t)]$  é de ordem  $(m_A + m_B + 2m + 4)n \times 1$ . Este vetor é constituído por  $(m_A + m_B + 2m + 4)$  subvetores de ordem  $n \times 1$ , que obedecem às seguintes regras de formação:

**Subvetores**  $[x_{0_A}(t)]$ ,  $[x_{0_B}(t)]$ ,  $[x_{1_A}(t)]$ ,  $[x_{1_B}(t)]$ , .....,  $[x_{m_{AA}}(t)]$  e  $[x_{m_{BB}}(t)]$ :

Estes subvetores são constituídos pelas correntes que percorrem os indutores das fases A e B do segmento de linha. Os mesmos são descritos como sendo:

$$[x_{k_A}(t)] = [i_{1k_A}(t) \ i_{2k_A}(t) \ i_{3k_A}(t) \ \cdots \ i_{jk_A}(t) \ \cdots \ i_{nk_A}(t)]^T \quad (231)$$

A equação (231) é válida para  $k = 0, 1, 2, \dots, m_A$ , onde  $i_{jk_A}(t)$  é a corrente que percorre o indutor  $L_{k_A}$  da fase A do  $j$ -ésimo segmento de linha.

$$[x_{k_B}(t)] = [i_{1k_B}(t) \ i_{2k_B}(t) \ i_{3k_B}(t) \ \cdots \ i_{jk_B}(t) \ \cdots \ i_{nk_B}(t)]^T \quad (232)$$

A equação (232) é válida para  $k = 0, 1, 2, \dots, m_B$ , onde  $i_{jk_B}(t)$  é a corrente que percorre o indutor  $L_{kB}$  da fase B do  $j$ -ésimo segmento de linha.

**Subvetores**  $\left[ x_{1_{BX}}(t) \right], \left[ x_{1_{AX}}(t) \right], \dots, \left[ x_{m_{BX}}(t) \right]$  e  $\left[ x_{m_{AX}}(t) \right]$ : Estes subvetores são constituídos pelas correntes que percorrem os indutores do acoplamento magnético do segmento de linha. Os mesmos são descritos como sendo:

$$\left[ x_{k_{BX}}(t) \right] = \left[ i_{1k_{BX}}(t) \ i_{2k_{BX}}(t) \ i_{3k_{BX}}(t) \ \dots \ i_{jk_{BX}}(t) \ \dots \ i_{nk_{BX}}(t) \right]^T \quad (233)$$

A equação (233) é válida para  $k = 1, 2, \dots, m$ , onde  $i_{jk_{BX}}(t)$  é a corrente que percorre (consideração para o cálculo das quedas de tensão) o indutor  $L_{k_{MX}}$  do acoplamento magnético do  $j$ -ésimo segmento de linha.

$$\left[ x_{k_{AX}}(t) \right] = \left[ i_{1k_{AX}}(t) \ i_{2k_{AX}}(t) \ i_{3k_{AX}}(t) \ \dots \ i_{jk_{AX}}(t) \ \dots \ i_{nk_{AX}}(t) \right]^T \quad (234)$$

A equação (234) é válida para  $k = 1, 2, \dots, m$ , onde  $i_{jk_{AX}}(t)$  é a corrente que percorre (consideração para o cálculo das quedas de tensão) o indutor  $L_{k_{MX}}$  do acoplamento magnético do  $j$ -ésimo segmento de linha.

**Subvetores**  $\left[ x_A(t) \right]$  e  $\left[ x_B(t) \right]$ : Estes subvetores são constituídos pelas tensões transversais de fase. Os mesmos são descritos como sendo:

$$\left[ x_A(t) \right] = \left[ v_{1_A}(t) \ v_{2_A}(t) \ \dots \ v_{j_A}(t) \ \dots \ v_{n_A}(t) \right]^T \quad (235)$$

Na equação (235), a grandeza  $v_{j_A}(t)$  corresponde à tensão transversal da fase A no  $j$ -ésimo segmento de linha.

$$\left[ x_B(t) \right] = \left[ v_{1_B}(t) \ v_{2_B}(t) \ \dots \ v_{j_B}(t) \ \dots \ v_{n_B}(t) \right]^T \quad (236)$$

$$[A] = \begin{bmatrix}
[A_{11}] & [A_{12}] & [A_{131}] & [A_{141}] & \cdots & [A_{13j}] & [A_{14j}] & \cdots & [A_{13m_A}] & [A_{14m_B}] & [A_{151}] & [A_{161}] & \cdots & [A_{15j}] & [A_{16j}] & \cdots & [A_{15m}] & [A_{16m}] & [A_{17}] & [A_{18}] \\
[A_{21}] & [A_{22}] & [A_{231}] & [A_{241}] & \cdots & [A_{23j}] & [A_{24j}] & \cdots & [A_{23m_A}] & [A_{24m_B}] & [A_{251}] & [A_{261}] & \cdots & [A_{25j}] & [A_{26j}] & \cdots & [A_{25m}] & [A_{26m}] & [A_{27}] & [A_{28}] \\
[M_1] & [P] & -[M_1] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] \\
[P] & [N_1] & [P] & -[N_1] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] \\
\vdots & \vdots \\
[M_{m_A}] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & -[M_{m_A}] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] \\
[P] & [N_{m_B}] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & -[N_{m_B}] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] \\
[P] & [S_1] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & -[S_1] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] \\
[S_1] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & -[S_1] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] \\
\vdots & \vdots \\
[P] & [S_m] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & -[S_m] & [P] & [P] & [P] \\
[S_m] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & -[S_m] & [P] & [P] \\
[A_{(m_A+m_B+2m+3)1}] & [A_{(m_A+m_B+2m+3)2}] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] \\
[A_{(m_A+m_B+2m+4)1}] & [A_{(m_A+m_B+2m+4)2}] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & \cdots & [P] & [P] & [P] & [P]
\end{bmatrix}$$

(237)

Na equação (236), a grandeza  $v_{jB}(t)$  corresponde à tensão transversal da fase B no  $j$ -ésimo segmento de linha.

Na equação (237), a matriz de estado  $[A]$  é quadrada de dimensão  $(m_A + m_B + 2m + 4)n$ . Esta matriz é constituída por  $(m_A + m_B + 2m + 4)^2$  submatrizes quadradas de dimensão  $n$ , que obedecem às seguintes regras de formação:

**Submatrizes  $[A_{11}]$ ,  $[A_{12}]$ ,  $[A_{21}]$  e  $[A_{22}]$ :** Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pq}] = \begin{bmatrix} a_{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{pq} \end{bmatrix} \quad (238)$$

A equação (238) é válida para  $p = 1, 2$  e  $q = 1, 2$ , onde o elemento  $a_{pq}$  é dado pelas equações (192), (193), (200) e (201).

**Submatrizes  $[A_{17}]$ ,  $[A_{18}]$ ,  $[A_{27}]$  e  $[A_{28}]$ :** Estas submatrizes possuem elementos não nulos na diagonal principal e na primeira subdiagonal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pq}] = \begin{bmatrix} a_{pq} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{pq} & a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & -a_{pq} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{pq} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{pq} & a_{pq} \end{bmatrix} \quad (239)$$

A equação (239) é válida para  $p = 1, 2$  e  $q = 7, 8$ , onde o elemento  $a_{pq}$  é dado pelas equações (198), (199), (206) e (207).

**Submatrizes**  $[A_{131}]$ ,  $[A_{231}]$ ,  $[A_{132}]$ ,  $[A_{232}]$ ,  $\dots$ ,  $[A_{13m_A}]$  e  $[A_{23m_A}]$ . Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pqj}] = \begin{bmatrix} a_{pqj} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pqj} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pqj} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{pqj} \end{bmatrix} \quad (240)$$

A equação (240) é válida para  $p = 1, 2$ ;  $q = 3$  e  $j = 1, 2, \dots, m_A$ , onde o elemento  $a_{pqj}$  é dado pelas equações (194) e (202).

**Submatrizes**  $[A_{141}]$ ,  $[A_{241}]$ ,  $[A_{142}]$ ,  $[A_{242}]$ ,  $\dots$ ,  $[A_{14m_B}]$  e  $[A_{24m_B}]$ . Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pqj}] = \begin{bmatrix} a_{pqj} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pqj} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pqj} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{pqj} \end{bmatrix} \quad (241)$$

A equação (241) é válida para  $p = 1, 2$ ;  $q = 4$  e  $j = 1, 2, \dots, m_B$ , onde o elemento  $a_{pqj}$  é dado pelas equações (195) e (203).

**Submatrizes**  $[A_{151}]$ ,  $[A_{161}]$ ,  $[A_{251}]$ ,  $[A_{261}]$ ,  $[A_{152}]$ ,  $[A_{162}]$ ,  $[A_{252}]$ ,  $[A_{262}]$ ,  $\dots$ ,  $[A_{15m}]$ ,  $[A_{16m}]$ ,  $[A_{25m}]$  e  $[A_{26m}]$ . Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[A_{pqj}] = \begin{bmatrix} a_{pqj} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pqj} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pqj} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{pqj} \end{bmatrix} \quad (242)$$

A equação (242) é válida para  $p = 1, 2$ ;  $q = 5, 6$  e  $j = 1, 2, \dots, m$ , onde o elemento  $a_{pqj}$  é dado pelas equações (196), (197), (204) e (205).

**Submatrizes**  $[M_1]$ ,  $[M_2]$ , ... e  $[M_{m_A}]$ : Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As submatrizes são escritas como sendo:

$$[M_j] = \begin{bmatrix} \frac{R_{jA}}{L_{jA}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{R_{jA}}{L_{jA}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{R_{jA}}{L_{jA}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{R_{jA}}{L_{jA}} \end{bmatrix} \quad (243)$$

A equação (243) é válida para  $j = 1, 2, \dots, m_A$

**Submatrizes**  $[N_1]$ ,  $[N_2]$ , ... e  $[N_{m_B}]$ : Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As submatrizes são descritas como sendo:

$$[\mathbf{N}_j] = \begin{bmatrix} \frac{R_{jB}}{L_{jB}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{R_{jB}}{L_{jB}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{R_{jB}}{L_{jB}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{R_{jB}}{L_{jB}} \end{bmatrix} \quad (244)$$

A equação (244) é válida para  $j = 1, 2, \dots, m_B$

**Submatrizes**  $[\mathbf{S}_1]$ ,  $[\mathbf{S}_2]$ , ... e  $[\mathbf{S}_m]$ : Estas submatrizes possuem elementos não nulos somente na diagonal principal. As submatrizes são descritas como sendo:

$$[\mathbf{S}_j] = \begin{bmatrix} \frac{R_{jM}}{L_{jM}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{R_{jM}}{L_{jM}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{R_{jM}}{L_{jM}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{R_{jM}}{L_{jM}} \end{bmatrix} \quad (245)$$

A equação (245) é válida para  $j = 1, 2, \dots, m$

**Submatriz**  $[\mathbf{A}_{(m_A+m_B+2m+3)1}]$ ,  $[\mathbf{A}_{(m_A+m_B+2m+3)2}]$ ,  $[\mathbf{A}_{(m_A+m_B+2m+4)1}]$  e  $[\mathbf{A}_{(m_A+m_B+2m+4)2}]$ :

Estas submatrizes possuem elementos não nulos na diagonal principal e na primeira superdiagonal. As mesmas são descritas como sendo:

$$[\mathbf{A}_{pq}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_{pq} & -a_{pq} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{pq} & -a_{pq} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{pq} & -a_{pq} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2a_{pq} \end{bmatrix} \quad (246)$$

A equação (246) é válida para  $p = (m_A + m_B + 2m + 3)$ ,  $(m_A + m_B + 2m + 4)$  e  $q = 1, 2$ , onde o elemento  $a_{pq}$  é dado pelas equações (220), (221), (222) e (223).

**Submatriz [P]:** Esta submatriz é nula.

Entretanto, a matriz de controle [B] é de ordem  $(m_A + m_B + 2m + 4)n \times 2$ . Esta matriz é descrita como sendo:

$$[B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ b_{(n+1)1} & b_{(n+1)2} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (247)$$

Onde:

$$b_{11} = -a_{17} \quad (248)$$

$$b_{12} = -a_{18} \quad (249)$$

$$b_{(n+1)1} = -a_{27} \quad (250)$$

$$b_{(n+1)2} = -a_{28} \quad (251)$$

Os elementos  $a_{17}$ ,  $a_{18}$ ,  $a_{27}$  e  $a_{28}$  são dados pelas equações (198), (199), (206) e (207).

Entretanto, o vetor  $[u(t)]$  é escrita como sendo:

$$[u(t)] = \begin{bmatrix} v_A(t) \\ v_B(t) \end{bmatrix} \quad (252)$$

Na equação (252), os elementos  $v_A(t)$  e  $v_B(t)$  representam as tensões no terminal emissor das fases A e B, respectivamente.

Logo, a equação (224) permite obter as correntes e tensões (considera-se o efeito da frequência) ao longo de uma linha bifásica genérica, diretamente no domínio do tempo. A solução dessa equação é obtida mediante a utilização de qualquer método numérico de integração. Geralmente, a integração da equação de estado é realizada por meio do método de Heun (método de integração trapezoidal), onde a implementação computacional da mesma pode ser realizada na plataforma do MATLAB®.

### 4.3 Desenvolvimento do modelo proposto: Análise no domínio da frequência

Devido ao fato de que as matrizes de transformação modal ( $[T_I]$  e  $[T_V]$ ) de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, possuem elementos complexos que são variáveis em relação à frequência (mostrado no apêndice C.4), no processo de validação do modelo proposto, a linha será representada por meio de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  (análise no domínio da frequência) que leva em consideração o acoplamento entre as fases. As equações de corrente e de tensão da linha bifásica serão escritas na forma matricial de um sistema linear, diretamente no domínio da frequência. Portanto, para cada valor da faixa discretizada de frequências, a solução do sistema linear permite obter as correntes e tensões ao longo da linha. Logo, para converter as mesmas, do domínio da frequência para o domínio do tempo, é necessário utilizar a transformada numérica de Laplace (NLT) (MORENO et al., 2008).

As matrizes  $[Z(\omega)]$  e  $[Y(\omega)]$  da linha bifásica mostrada na seção anterior, considerando  $s = coef + j\omega$  (MORENO et al., 2008), são descritas como sendo:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} Z'_A(\omega) & Z'_{AB}(\omega) \\ Z'_{AB}(\omega) & Z'_B(\omega) \end{bmatrix} (\Omega/\text{km}) \quad (253)$$

$$[Y(\omega)] = \begin{bmatrix} 2\{Y'_{PA}(\omega) + Y'_{AB}(\omega)\} & -2Y'_{AB}(\omega) \\ -2Y'_{AB}(\omega) & 2\{Y'_{PB}(\omega) + Y'_{AB}(\omega)\} \end{bmatrix} (\text{Siemens}/\text{km}) \quad (254)$$

Onde:

$coef = \frac{2\pi}{\text{Tempo de observação}}$ , é o coeficiente de amortecimento

$$Z'_A(\omega) = \{R'_A(\omega) + coef \cdot L'_A(\omega)\} + j\omega L'_A(\omega) \approx R_{0A} + j\omega L_{0A} + \sum_{m=1}^N \frac{j\omega R_{mA}}{j\omega + \frac{R_{mA}}{L_{mA}}} \quad (255)$$

$$Z'_B(\omega) = \{R'_B(\omega) + coef \cdot L'_B(\omega)\} + j\omega L'_B(\omega) \approx R_{0B} + j\omega L_{0B} + \sum_{m=1}^N \frac{j\omega R_{mB}}{j\omega + \frac{R_{mB}}{L_{mB}}} \quad (256)$$

$$Z'_{AB}(\omega) = \{R'_{AB}(\omega) + coef \cdot L'_{AB}(\omega)\} + j\omega L'_{AB}(\omega) \approx R_{0M} + j\omega L_{0M} + \sum_{m=1}^N \frac{j\omega R_{mM}}{j\omega + \frac{R_{mM}}{L_{mM}}} \quad (257)$$

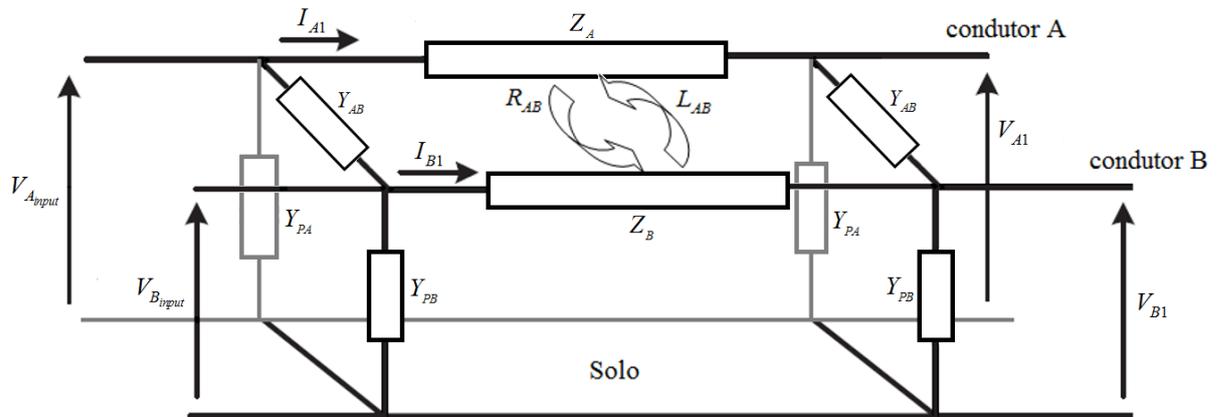
$$Y'_{PA}(\omega) = (coef + j\omega) \frac{C'_{PA}}{2} \quad (258)$$

$$Y'_{PB}(\omega) = (coef + j\omega) \frac{C'_{PB}}{2} \quad (259)$$

$$Y'_{AB}(\omega) = (coef + j\omega) \frac{C'_{AB}}{2} \quad (260)$$

O modelo proposto no domínio da frequência, considera que um pequeno segmento da linha de transmissão bifásica mostrada na seção anterior, pode ser representado por meio de um circuito  $\pi$ , conforme visualiza-se na Figura 14.

Figura 14 – Pequeno segmento da linha bifásica genérica: Análise no domínio da frequência.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 14, os termos  $V_{A_{input}}$  e  $V_{A1}$  representam as tensões nos extremos da fase A do segmento da linha bifásica, enquanto que os termos  $V_{B_{input}}$  e  $V_{B1}$  representam as tensões nos extremos da fase B do segmento da mesma. Considera-se que os termos  $I_{A1}$  e  $I_{B1}$  representam as correntes que percorrem as impedâncias próprias longitudinais da fase A e da fase B, respectivamente, em cada segmento da linha bifásica.

As impedâncias longitudinais e admitâncias transversais, do segmento de linha bifásica, são descritas como sendo:

$$Z_A(\omega) = Z'_A(\omega) \cdot \frac{d}{n} \quad (261)$$

$$Z_B(\omega) = Z'_B(\omega) \cdot \frac{d}{n} \quad (262)$$

$$Z_{AB}(\omega) = Z'_{AB}(\omega) \cdot \frac{d}{n} \quad (263)$$

$$Y_{PA}(\omega) = Y'_{PA}(\omega) \cdot \frac{d}{n} \quad (264)$$

$$Y_{PB}(\omega) = Y'_{PB}(\omega) \cdot \frac{d}{n} \quad (265)$$

$$Y_{AB}(\omega) = Y'_{AB}(\omega) \cdot \frac{d}{n} \quad (266)$$

Logo, a partir da representação do pequeno segmento ( $n = 1$ ) de linha bifásica, mostrada na Figura 14, é possível obter as seguintes relações:

Aplicando a 2ª lei de Kirchhoff (lei das tensões) no circuito da Figura 14, e levando em consideração o descrito por Schulze, obtêm-se:

$$V_{A_{input}} = Z_A \cdot I_{A1} + Z_{AB} \cdot I_{B1} + V_{A1} \quad (267)$$

$$V_{B_{input}} = Z_{AB} \cdot I_{A1} + Z_B \cdot I_{B1} + V_{B1} \quad (268)$$

Aplicando a 1ª lei de Kirchhoff (lei das correntes) no circuito da Figura 14, obtêm-se:

$$I_{A1} = Y_{PA} \cdot V_{A1} + Y_{AB} \cdot (V_{A1} - V_{B1}) \quad (269)$$

$$I_{B1} = Y_{PB} \cdot V_{B1} - Y_{AB} \cdot (V_{A1} - V_{B1}) \quad (270)$$

As equações (269) e (270) podem ser reescritas como sendo:

$$0 = -I_{A1} + (Y_{PA} + Y_{AB}) \cdot V_{A1} - Y_{AB} \cdot V_{B1} \quad (271)$$

$$0 = -I_{B1} - Y_{AB} \cdot V_{A1} + (Y_{PB} + Y_{AB}) \cdot V_{B1} \quad (272)$$

A forma matricial das equações lineares (267), (268), (271) e (272) é escrita como sendo:

$$[B(\omega)] = [A(\omega)][X(\omega)] \quad (273)$$

Onde:

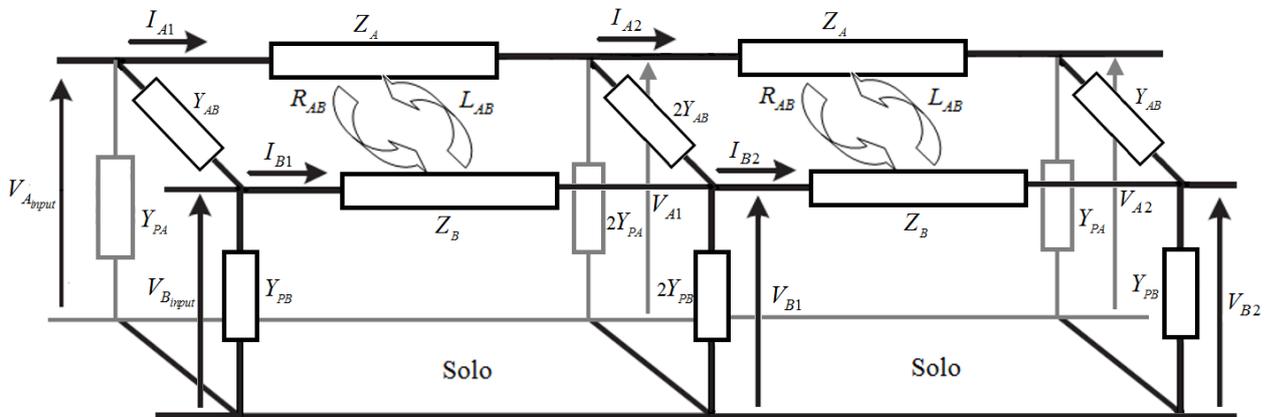
$$[A(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_A & Z_{AB} & 1 & 0 \\ Z_{AB} & Z_B & 0 & 1 \\ -1 & 0 & (Y_{PA} + Y_{AB}) & -Y_{AB} \\ 0 & -1 & -Y_{AB} & (Y_{PB} + Y_{AB}) \end{bmatrix} \quad (274)$$

$$[B(\omega)] = \begin{bmatrix} V_{A_{input}} \\ V_{B_{input}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (275)$$

$$[X(\omega)] = [I_{A1} \quad I_{B1} \quad V_{A1} \quad V_{B1}]^T \quad (276)$$

Na Figura 15, visualiza-se uma linha bifásica representada por meio de uma cascata de 2 segmentos de linha, onde cada segmento é do tipo mostrado na Figura 14.

Figura 15– Linha bifásica representada por meio de 2 segmentos de linha: Análise no domínio da frequência.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Aplicando a 2ª lei de Kirchhoff (lei das tensões) no circuito da Figura 15, e levando em consideração o descrito por Schulze, obtêm-se:

$$V_{A_{input}} = Z_A \cdot I_{A1} + Z_{AB} \cdot I_{B1} + V_{A1} \quad (277)$$

$$V_{B_{input}} = Z_{AB} \cdot I_{A1} + Z_B \cdot I_{B1} + V_{B1} \quad (278)$$

$$0 = Z_A \cdot I_{A2} + Z_{AB} \cdot I_{B2} - V_{A1} + V_{A2} \quad (279)$$

$$0 = Z_{AB} \cdot I_{A2} + Z_B \cdot I_{B2} - V_{B1} + V_{B2} \quad (280)$$

Aplicando a 1ª lei de Kirchhoff (lei das correntes) no circuito da Figura 15, obtêm-se:

$$0 = -I_{A2} + (Y_{PA} + Y_{AB}) \cdot V_{A2} - Y_{AB} \cdot V_{B2} \quad (281)$$

$$0 = -I_{B2} - Y_{AB} \cdot V_{A2} + (Y_{PB} + Y_{AB}) \cdot V_{B2} \quad (282)$$

$$0 = -I_{A1} + I_{A2} + 2(Y_{PA} + Y_{AB}) \cdot V_{A1} - 2Y_{AB} \cdot V_{B1} \quad (283)$$

$$0 = -I_{B1} + I_{B2} - 2Y_{AB} \cdot V_{A1} + 2(Y_{PB} + Y_{AB}) \cdot V_{B1} \quad (284)$$

A forma matricial das equações lineares (277) a (284) é escrita como sendo:

$$[B(\omega)] = [A(\omega)][X(\omega)] \quad (285)$$

Onde:

$$[A(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_A & Z_{AB} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ Z_{AB} & Z_B & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_A & Z_{AB} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_{AB} & Z_B & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & (Y_{PA} + Y_{AB}) & -Y_{AB} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -Y_{AB} & (Y_{PB} + Y_{AB}) \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2(Y_{PA} + Y_{AB}) & -2Y_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2Y_{AB} & 2(Y_{PB} + Y_{AB}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (286)$$

$$[X(\omega)] = [I_{A1} \quad I_{B1} \quad I_{A2} \quad I_{B2} \quad V_{A1} \quad V_{B1} \quad V_{A2} \quad V_{B2}]^T \quad (287)$$

$$[\mathbf{B}(\omega)] = \begin{bmatrix} V_{A_{input}} \\ V_{B_{input}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (288)$$

Uma vez que a linha bifásica de comprimento  $d$  é representada por meio de uma cascata de  $n$  segmentos de linha, onde cada segmento é do tipo mostrado na Figura 16. A generalização das equações (286) a (288) é escrita como sendo:

$$[X(\omega)] = [I_{A1} \ I_{B1} \ I_{A2} \ I_{B2} \ \cdots \ I_{Aj} \ I_{Bj} \ \cdots \ I_{An} \ I_{Bn} \ V_{A1} \ V_{B1} \ V_{A2} \ V_{B2} \ \cdots \ V_{Aj} \ V_{Bj} \ \cdots \ V_{An} \ V_{Bn}]^T \quad (289)$$

Na equação (289), a matriz  $[X(\omega)]$  é retangular de ordem  $4n \times 1$ . Esta matriz é constituída pelas correntes longitudinais nas fases da linha, e pelas tensões transversais de fase. Deste modo, as grandezas  $I_{Aj}$  e  $I_{Bj}$  correspondem às correntes nas fases A e B, respectivamente, no  $j$ -ésimo segmento de linha. De forma análoga, as grandezas  $V_{Aj}$  e  $V_{Bj}$  corresponde às tensões das fases A e B, no  $j$ -ésimo segmento de linha.

Logo, a matriz  $[A(\omega)]$  pode ser representada de maneira simplificada como sendo:

$$[A(\omega)] = \begin{bmatrix} [A_{11}(\omega)] & [A_{12}(\omega)] \\ [A_{21}(\omega)] & [A_{22}(\omega)] \end{bmatrix} \quad (290)$$

Na equação (290), a matriz  $[A(\omega)]$  é quadrada de dimensão  $4n$ . Esta matriz é constituída por 4 submatrizes quadradas de dimensão  $2n$ , que obedecem às seguintes regras de formação:

**Submatriz  $[A_{11}(\omega)]$ :** Esta submatriz possui elementos não nulos na diagonal principal, na primeira superdiagonal e na primeira subdiagonal. A submatriz é descrita como sendo:

$$[A_{11}(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_A & Z_{AB} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ Z_{AB} & Z_B & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_A & Z_{AB} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & Z_{AB} & Z_B & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & Z_A & Z_{AB} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & Z_{AB} & Z_B \end{bmatrix} \quad (291)$$

**Submatriz**  $[A_{12}(\omega)]$ : Esta submatriz possui elementos não nulos na diagonal principal e na segunda subdiagonal. A submatriz é descrita como sendo:

$$[A_{12}(\omega)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (292)$$

**Submatriz**  $[A_{21}(\omega)]$ : Esta submatriz possui elementos não nulos nas diagonais imediatamente adjacentes à diagonal secundária, e na terceira diagonal abaixo da diagonal secundária. A submatriz é descrita como sendo:

$$[A_{21}(\omega)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (293)$$

**Submatriz**  $[A_{22}(\omega)]$ : Esta submatriz possui elementos não nulos na diagonal secundária, e nas diagonais adjacentes acima e abaixo desta. A submatriz é descrita como sendo:

$$\left[ A_{22}(\omega) \right] = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (Y_{PA} + Y_{AB}) & -Y_{AB} \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -Y_{AB} & (Y_{PB} + Y_{AB}) \\
 \vdots & \vdots & \ddots & 2(Y_{PA} + Y_{AB}) & -2Y_{AB} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \ddots & -2Y_{AB} & 2(Y_{PB} + Y_{AB}) & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 2(Y_{PA} + Y_{AB}) & -2Y_{AB} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
 -2Y_{AB} & 2(Y_{PB} + Y_{AB}) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
 \end{bmatrix} \quad (294)$$

Entretanto, a matriz  $[B(\omega)]$  é retangular de ordem  $4n \times 1$ . Esta matriz é escrita como sendo:

$$[B(\omega)] = \left[ V_{A_{input}} \quad V_{B_{input}} \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (295)$$

Logo, para cada valor da faixa discretizada de frequências, a solução da equação (285) permite obter as correntes e tensões, diretamente nos domínios das fases e da frequência, ao longo de uma linha bifásica genérica. Isto significa que não é necessário utilizar matrizes de decomposição modal. A implementação computacional dessa equação pode ser realizada na plataforma do MATLAB®.

Para converter a solução da equação (285), do domínio da frequência para o domínio do tempo, é necessário utilizar a transformada numérica de Laplace (NLT) (MORENO et al., 2008). A implementação computacional da mesma pode ser realizada na plataforma do MATLAB®.

#### 4.4 Considerações

A sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais próprios e mútuos, foi representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores, onde a quantidade de blocos RL deve ser a necessária para obter o melhor ajuste, isto é, as curvas sintetizada e exata da resposta em frequência dos parâmetros longitudinais, não apresentem diferença alguma na faixa de frequências onde os parâmetros mudam rapidamente de valor. Considerou-se que tal faixa de frequências é de  $10^3$  Hz a  $10^5$  Hz. Os valores de

resistência e indutância são definidos por meio do procedimento denominado *vector fitting* (mostrado no apêndice A.1).

A resistência mútua e a indutância mútua, produzem quedas de tensão nas fases da linha bifásica. Tais quedas de tensão foram calculadas por meio de uma extensão do modelo de Schulze. As considerações feitas por Schulze foram muito importantes para o equacionamento do modelo proposto, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. No domínio do tempo as equações de corrente e de tensão foram escritas na forma matricial de um sistema de equações de estado, e no domínio da frequência as mesmas foram escritas na forma matricial de um sistema linear.

No modelo proposto, a matriz  $[A]$  da equação de estado apresentou uma regra de formação complexa, mesmo assim foi facilmente implementado na plataforma do MATLAB®. A equação de estado foi resolvida utilizando o método de Heun (baseado no método de integração trapezoidal).

No processo de validação do modelo proposto para linhas de transmissão que não possuem plano de simetria vertical, quando convertidas as respostas de corrente e de tensão do domínio da frequência para o domínio do tempo, é necessário utilizar a transformada numérica de Laplace (NLT) (MORENO et al., 2008). Às vezes tal transformada é a causa de deslocamentos no valor inicial de correntes e/ou de tensões.

## 5 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

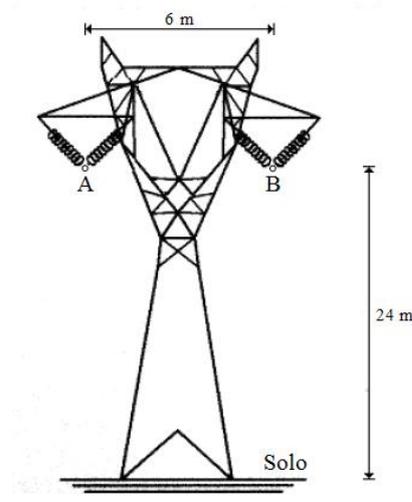
### 5.1 Linhas bifásicas que possuem plano de simetria vertical

No processo de validação, serão comparados os resultados obtidos por meio do modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (YAMANAKA, 2009), com os resultados obtidos por meio do modelo proposto. Estes modelos foram implementados computacionalmente na plataforma do MATLAB®.

O modelo clássico modal decompõe a linha de transmissão bifásica nos seus dois modos de propagação, os quais comportam-se como duas linhas monofásicas matematicamente desacopladas. Uma vez obtidas as linhas monofásicas modais, cada uma delas foi representada por meio de uma cascata de  $n$  circuitos  $\pi$ , onde em cada um destes circuitos encontra-se inserido a sintetização do efeito da frequência. Logo, calculadas as correntes e tensões de cada linha monofásica modal, utilizaram-se as matrizes de transformação modal inversa para obter as correntes e tensões da linha de transmissão bifásica, no domínio das fases.

Os modelos anteriormente descritos foram utilizados para representar uma hipotética linha de transmissão bifásica, cujo comprimento é igual a 100 km, conforme visualiza-se na Figura 16.

Figura 16– Vista frontal de uma linha de transmissão bifásica que possui plano de simetria vertical.



Fonte: Yamanaka (2009).

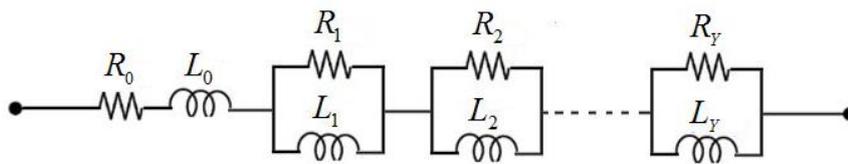
Na Figura 16, considera-se que cada uma das fases é constituída de um único condutor (tipo Grosbeak) de raio igual a 0,012573 m, e que a resistividade do solo é igual a 1000  $\Omega$ .m.

O cálculo dos parâmetros da linha por unidade de comprimento foi feito para a faixa de frequências  $10^{-2}$  Hz a  $10^6$  Hz, pois os transitórios eletromagnéticos que ocorrem na linha de transmissão estão dentro desta faixa. Esse cálculo se fez levando em consideração o efeito pelicular (ou efeito skin) e o efeito do solo, conforme o desenvolvido no capítulo 2.

Vale ressaltar que os efeitos do solo e pelicular (ou skin) são dependentes da frequência do sinal aplicado nos condutores, das características físicas dos condutores e das características geométricas espaciais sobre o posicionamento dos mesmos (distância de separação entre eles, e entre cada um deles e o solo).

Entretanto, da seção 4.2 sabe-se que o circuito equivalente da aproximação racional das impedâncias longitudinais (sintetização do efeito da frequência) de uma linha de transmissão, é representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores, conforme visualiza-se na Figura 17.

Figura 17– Circuito equivalente que representa a sintetização do efeito da frequência sobre os



parâmetros longitudinais.

Fonte: Elaboração própria do autor.

No circuito da Figura 17, os valores das resistências e indutâncias são definidos por meio do procedimento denominado *vector fitting* (mostrado no Apêndice A.1).

Nas figuras 18 a 21, o comportamento sintetizado (curva vermelha) melhora à medida que aumenta-se o número de blocos RL (utilizando 15 blocos RL as curvas exata e sintetizada não apresentam diferença alguma), porém, o esforço computacional que utiliza-se

para obter as respostas de corrente e de tensão ao longo da linha de transmissão, por meio do modelo proposto, é maior. Além disso, aquelas respostas não mudam.

Do anteriormente mencionado, pode-se concluir que 8 blocos RL (cada um deles contém um resistor e um indutor ligados em paralelo) são suficientes para representar a resposta em frequência dos parâmetros longitudinais próprios e mútuos

Nas tabelas 2 e 3, visualizam-se os valores utilizados na sintetização do efeito da frequência em cada uma das fases e no acoplamento magnético da linha de transmissão bifásica mostrada na Figura 16.

Tabela 2 – Valores de resistências e de indutâncias para as fases A e B

Resistência [ $\Omega$ /km]		Indutância [mH/km]	
$R_{0A} = R_{0B}$	0,083337	$L_{0A} = L_{0B}$	1,738100
$R_{1A} = R_{1B}$	87,56600	$L_{1A} = L_{1B}$	0,018868
$R_{2A} = R_{2B}$	7,784400	$L_{2A} = L_{2B}$	0,184290
$R_{3A} = R_{3B}$	1,209800	$L_{3A} = L_{3B}$	0,177310
$R_{4A} = R_{4B}$	0,243470	$L_{4A} = L_{4B}$	0,168670
$R_{5A} = R_{5B}$	0,045229	$L_{5A} = L_{5B}$	0,162050
$R_{6A} = R_{6B}$	0,008948	$L_{6A} = L_{6B}$	0,169830
$R_{7A} = R_{7B}$	0,001730	$L_{7A} = L_{7B}$	0,212100
$R_{8A} = R_{8B}$	0,201930	$L_{8A} = L_{8B}$	0,298560

Fonte: Elaboração própria do autor.

Tabela 3 – Valores de resistências e de indutâncias para o acoplamento magnético.

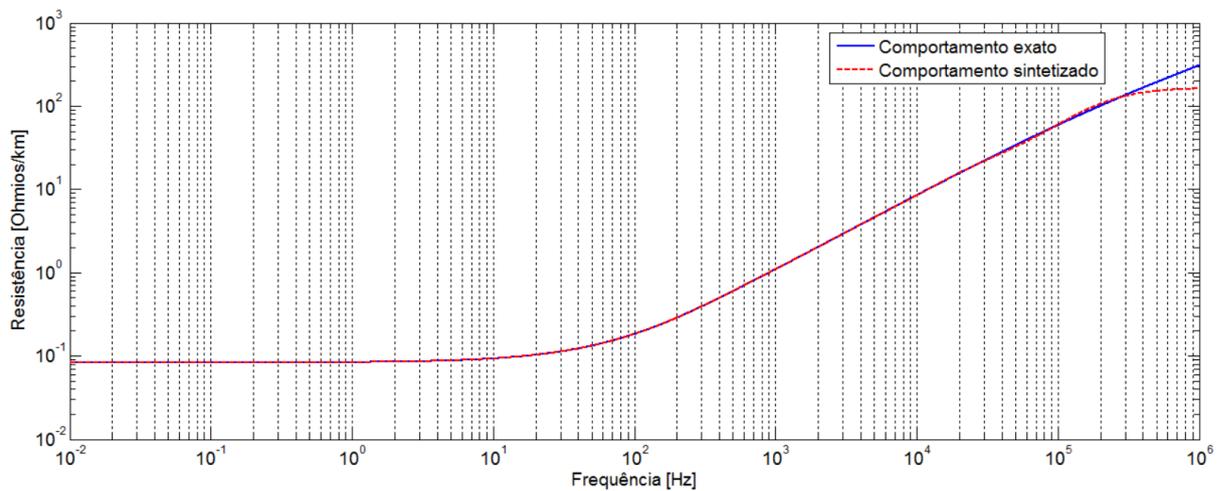
Resistência [ $\Omega$ /km]		Indutância [mH/km]	
$R_{0M}$	0,0000098671	$L_{0M}$	0,503470
$R_{1M}$	86,5130000	$L_{1M}$	0,018306
$R_{2M}$	7,55630000	$L_{2M}$	0,174700

$R_{3M}$	1,11210000	$L_{3M}$	0,158900
$R_{4M}$	0,24347000	$L_{4M}$	0,168670
$R_{5M}$	0,21199000	$L_{5M}$	0,156650
$R_{6M}$	0,00877250	$L_{6M}$	0,169130
$R_{7M}$	0,00170990	$L_{7M}$	0,211750
$R_{8M}$	0,00020024	$L_{8M}$	0,297980

Fonte: Elaboração própria do autor.

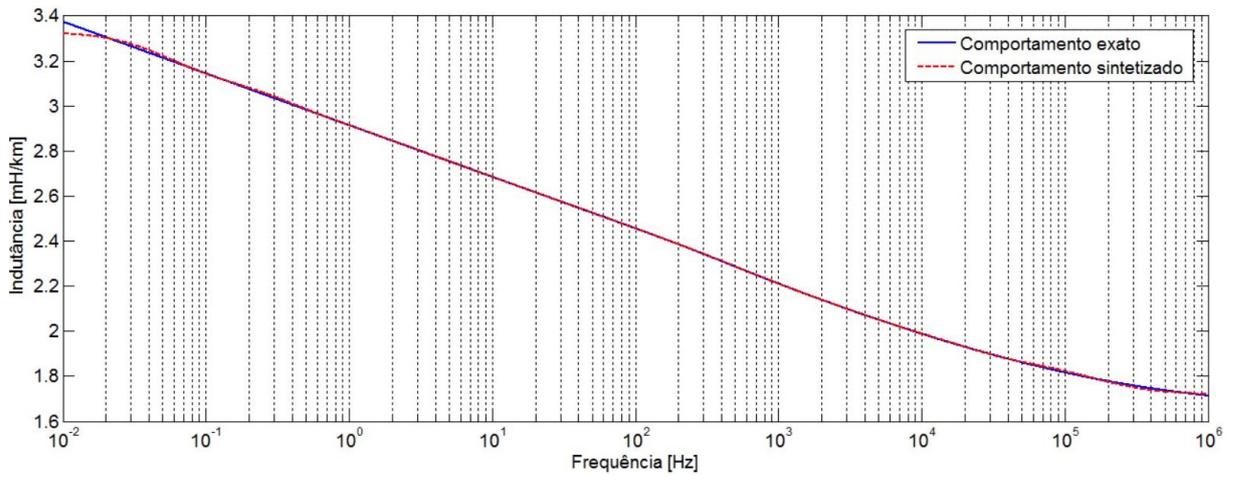
Portanto, a aproximação por meio de funções racionais dos parâmetros longitudinais já encontra-se definido. Por fim, o comportamento dos mesmos em relação à frequência será visualizado nas Figuras 18, 19, 20 e 21.

Figura 18 – Comportamento da resistência própria: Fases A e B



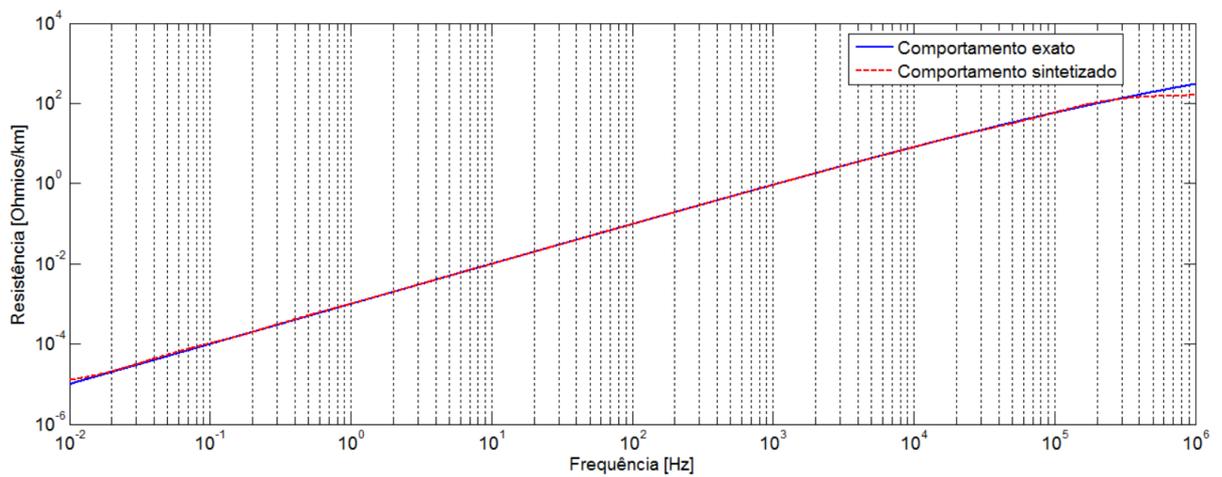
Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 19 – Comportamento da indutância própria: Fases A e B



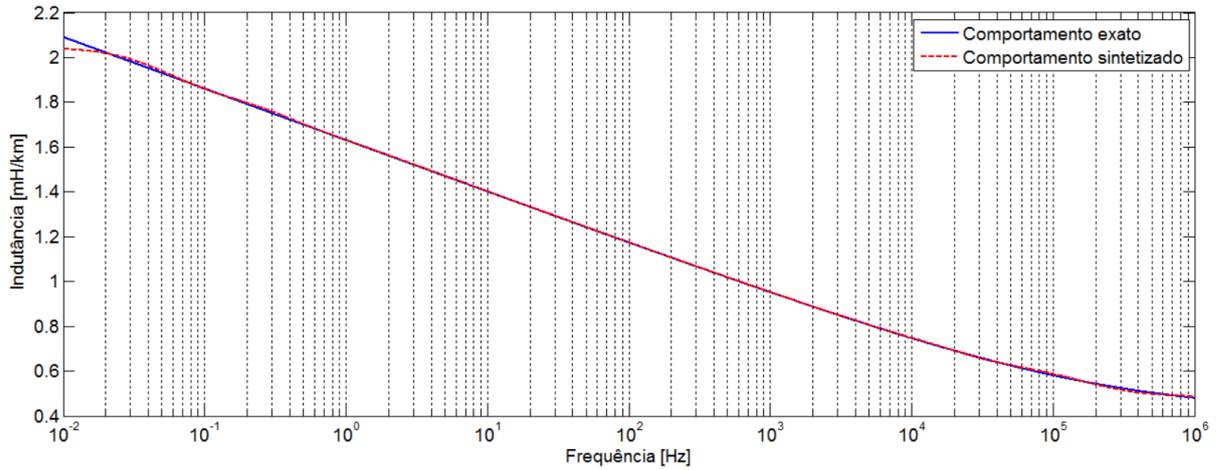
Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 20 – Comportamento da “resistência mútua”



Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 21 – Comportamento da indutância mútua



Fonte: Elaboração própria do autor.

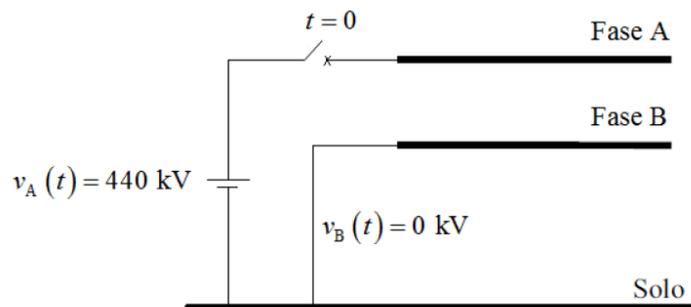
Entretanto, no modelo clássico modal, cada uma das linhas monofásicas modais será representada por meio de uma cascata de 100 circuitos  $\pi$  (YAMANAKA, 2009), onde cada um dos circuitos é do tipo mostrado na seção 3.3, e no modelo proposto, a linha bifásica será representada por meio de uma cascata de 100 segmentos de linha, onde cada um dos segmentos é do tipo mostrado na seção 4.2.

Para a validação do modelo proposto, serão apresentados os seguintes casos:

### Caso 1

Na Figura 22, visualiza-se como a linha de transmissão bifásica da Figura 16 será energizada.

Figura 22 – Linha bifásica com os seus terminais receptores em aberto.

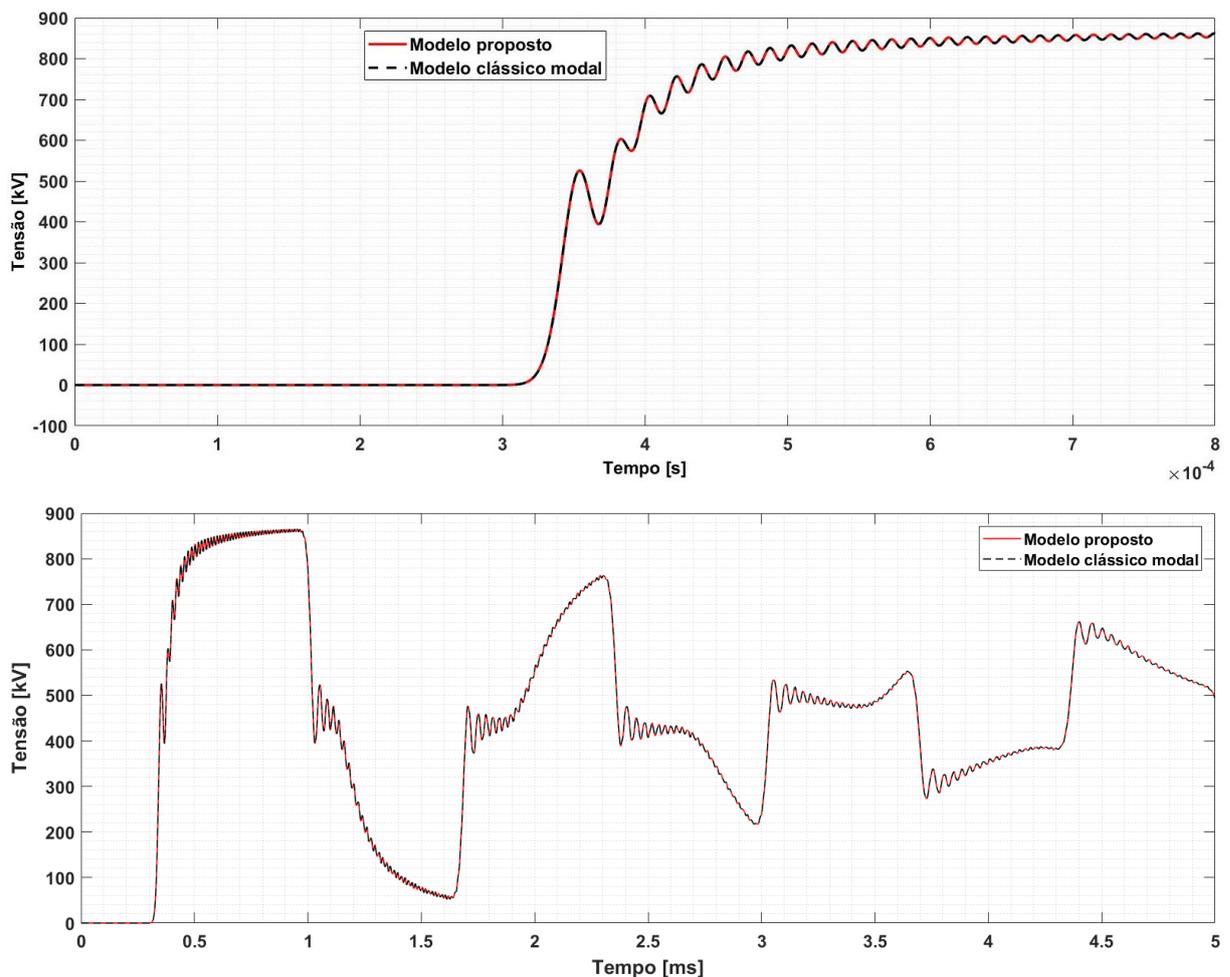


Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 22, o terminal emissor da fase A será energizado, no instante  $t=0$ , por uma fonte de tensão constante (sinal degrau) igual a 440 kV, enquanto que o terminal emissor da fase B está aterrado.

Nas Figuras 23 e 24, visualiza-se o comportamento da tensão no terminal receptor das fases A e B, respectivamente. As curvas vermelhas e as curvas pretas mostram os resultados obtidos com o modelo proposto e com o modelo clássico modal (que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais), respectivamente.

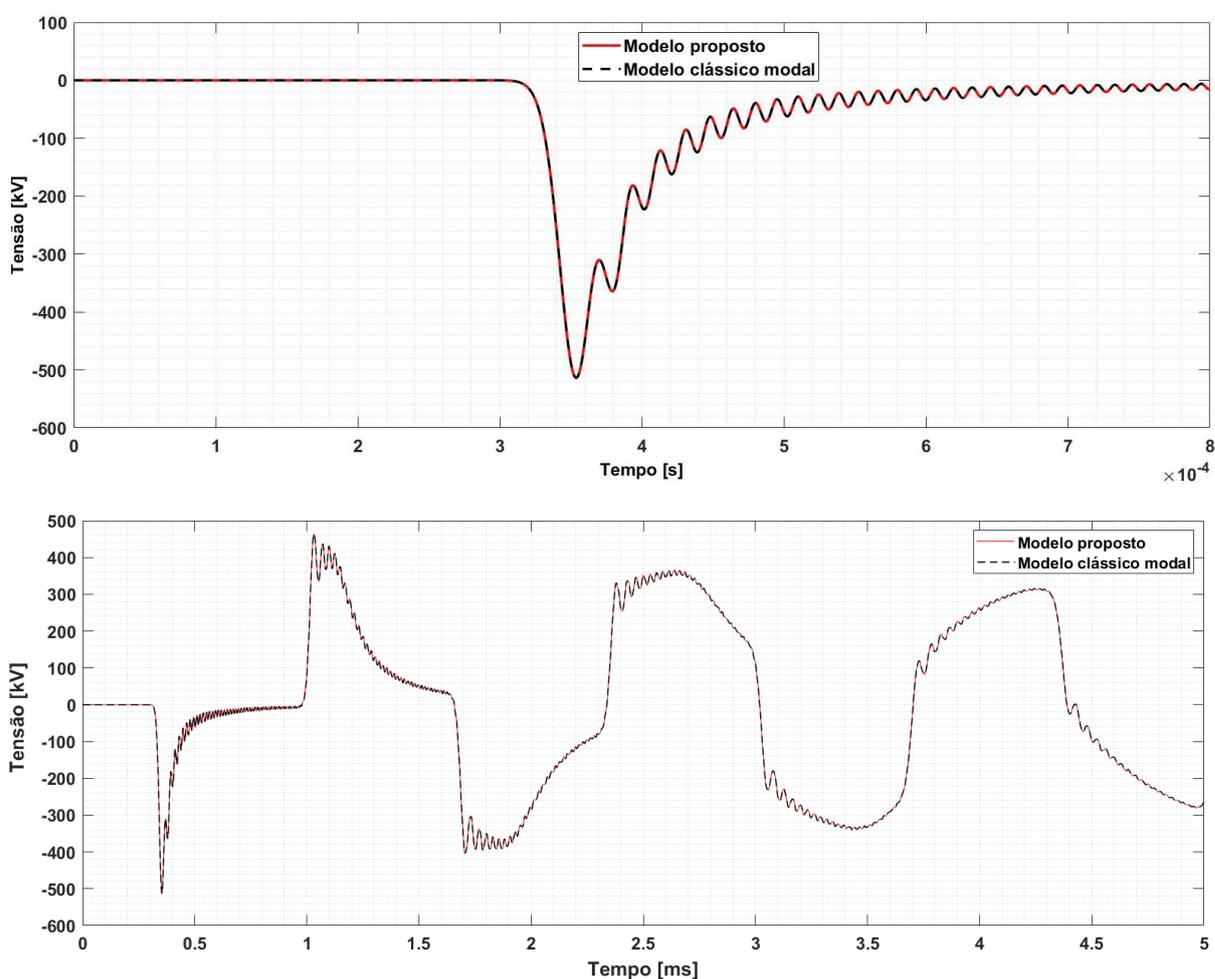
Figura 23 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 23, visualiza-se que a tensão no terminal receptor da fase A, aproximadamente no instante  $t=0,953$  ms, atinge um valor máximo igual a 865,3 kV. Este valor somente é atingido durante o transitório eletromagnético. Visualiza-se que as oscilações durante o mesmo, atingem valores próximos ao dobro do valor constante de tensão (fornecida pela fonte que energiza o terminal emissor).

Figura 24 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).



Fonte: Elaboração própria do autor.

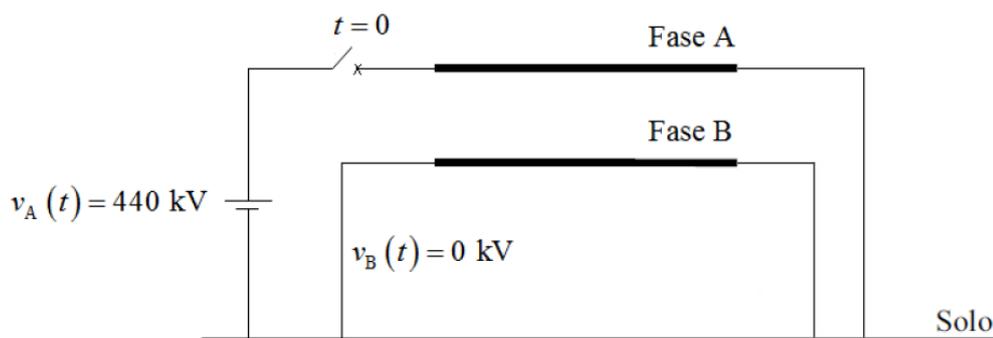
Na Figura 24, visualiza-se que a tensão no terminal receptor da fase B, atinge valores negativos. Isto deve-se à influência da energização da fase A sobre a fase B, isto é, à influência do acoplamento eletromagnético entre as fases.

As curvas das Figuras 23 e 24, mostram que não existe diferença alguma entre os resultados obtidos com os modelos clássico modal e proposto. Portanto, pode-se concluir que as considerações feitas durante o desenvolvimento do modelo proposto, diretamente no domínio do tempo, estiveram corretas.

## Caso 2

Na Figura 25, visualiza-se como a linha de transmissão bifásica da Figura 16 será energizada.

Figura 25 – Linha bifásica com os seus terminais receptores em curto-circuito.

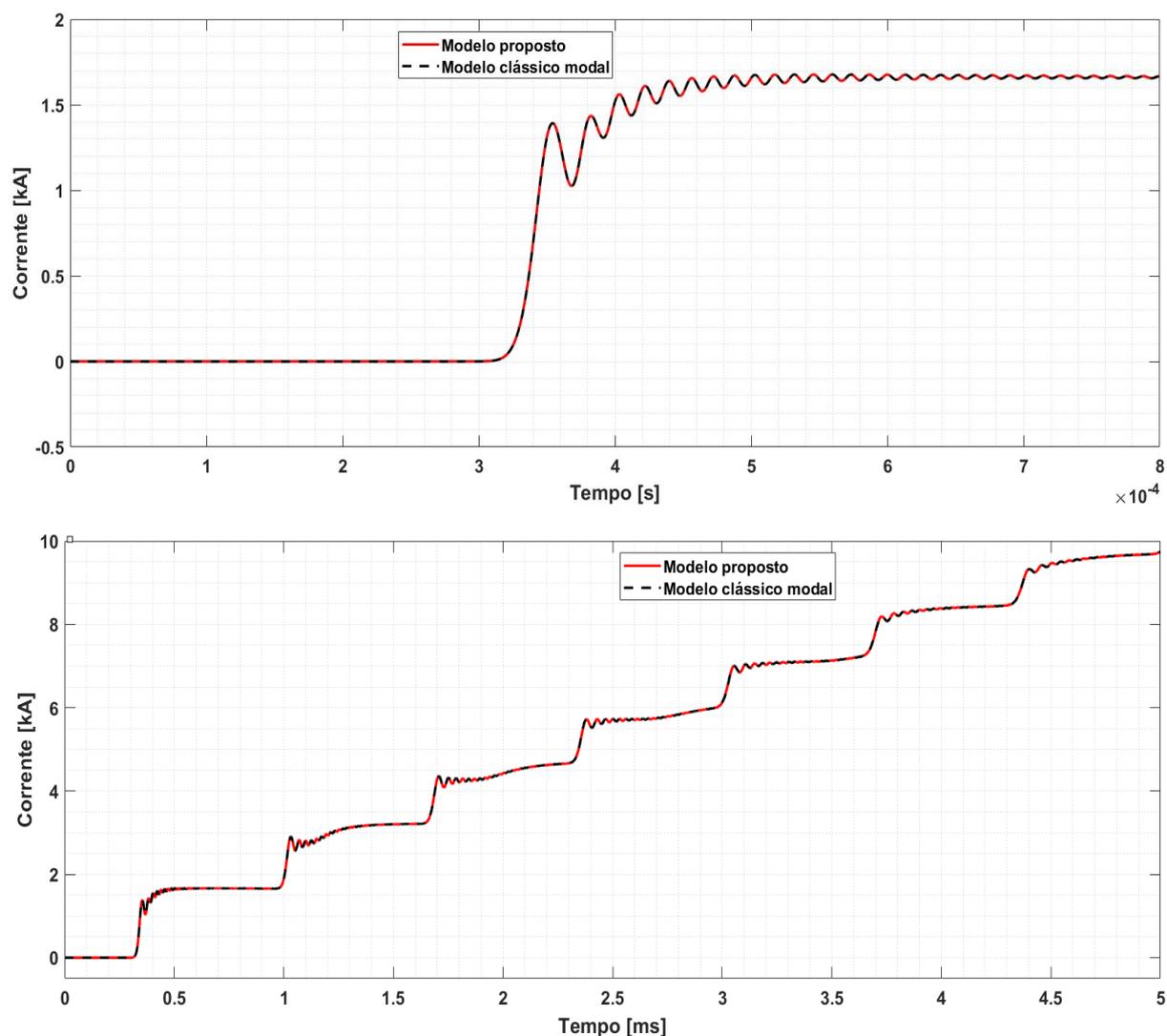


Fonte: Elaboração própria do autor

Na Figura 25, o terminal emissor da fase A será energizado, no instante  $t=0$ , por uma fonte de tensão constante (sinal degrau) igual a 440 kV, enquanto que o terminal emissor da fase B está aterrado.

Nas Figuras 26 e 27, visualiza-se o comportamento da corrente no terminal receptor das fases A e B, respectivamente. As curvas vermelhas e as curvas pretas mostram os resultados obtidos com o modelo proposto e com o modelo clássico modal (que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais), respectivamente.

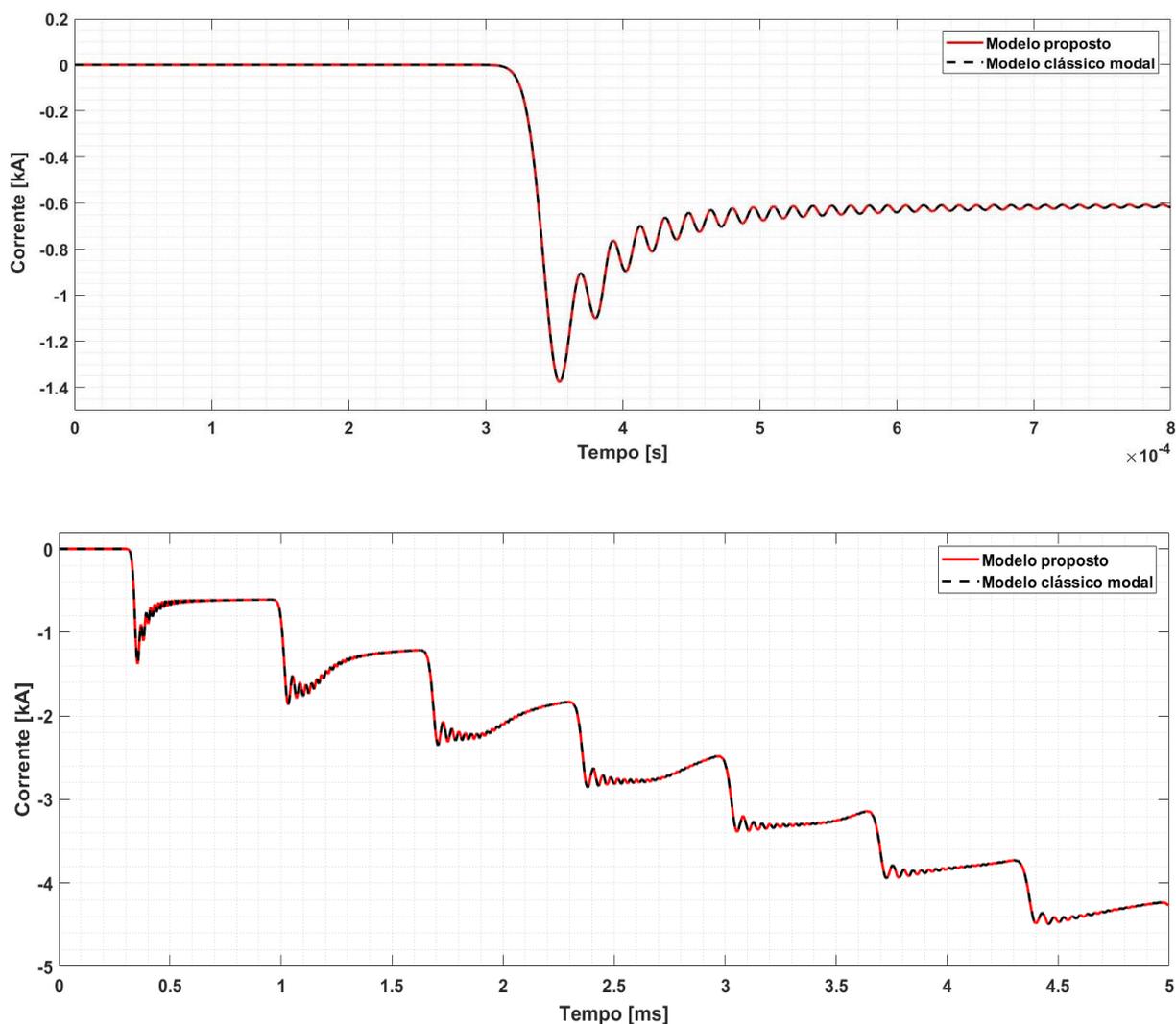
Figura 26 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 26, visualiza-se que a corrente no terminal receptor da fase A, com o passar do tempo, atinge valores muito altos. Esta corrente, aproximadamente no instante  $t=5$  ms, atinge um valor igual a 9,739 kA.

Figura 27 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais (curva preta).



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 27, visualiza-se que a corrente no terminal receptor da fase B, atinge valores negativos. Isto deve-se à influência da energização da fase A sobre a fase B, isto é, à influência do acoplamento eletromagnético entre as fases.

A corrente no terminal receptor da fase B, aproximadamente no instante  $t=5$  ms, atinge um valor igual a  $-4,269$  kA.

As curvas das Figuras 26 e 27, mostram que não existe diferença alguma entre os resultados obtidos com os modelos clássico modal e proposto. Portanto, pode-se concluir que as considerações feitas durante o desenvolvimento do modelo proposto, diretamente no domínio do tempo, estiveram corretas.

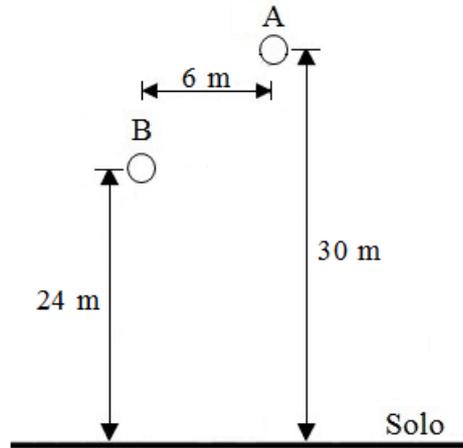
## **5.2 Linhas bifásicas que não possuem plano de simetria vertical**

No processo de validação, serão comparados os resultados obtidos por meio do modelo clássico modal (mostrado no apêndice C.4), com os resultados obtidos por meio do modelo proposto. Estes modelos foram implementados computacionalmente na plataforma do MATLAB®.

O modelo clássico modal decompõe a linha de transmissão bifásica nos seus dois modos de propagação, os quais comportam-se como duas linhas monofásicas matematicamente desacopladas. Uma vez obtidas as linhas monofásicas modais, cada uma delas foi representada por meio de uma cascata de  $n$  segmentos de linha (análise no domínio da frequência). Logo, calculadas as tensões e correntes de cada linha monofásica modal, para cada valor da faixa discretizada de frequências, utilizaram-se as matrizes de transformação modal inversa para obter as correntes e tensões da linha de transmissão bifásica, no domínio das fases. Por fim, para converter as tensões e correntes, do domínio da frequência para o domínio do tempo, é necessário utilizar a transformada numérica de Laplace (NLT) (MORENO et al., 2008).

Os modelos anteriormente descritos foram utilizados para representar uma hipotética linha de transmissão bifásica, cujo comprimento é igual a 100 km, conforme visualiza-se na Figura 28.

Figura 28– Vista frontal de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 28, considera-se que cada uma das fases é constituída de um único condutor (tipo Grosbeak) de raio igual a 0,012573 m, e que a resistividade do solo é igual a 1000  $\Omega$ .m.

O cálculo dos parâmetros da linha por unidade de comprimento foi feito aproximadamente para uma faixa de frequências 10 Hz a 10<sup>6</sup> Hz. Esse cálculo se fez levando em consideração o efeito pelicular (ou efeito skin) e o efeito do solo, conforme o desenvolvido no capítulo 2.

Vale ressaltar que os efeitos do solo e pelicular (ou skin) são dependentes da frequência do sinal aplicado nos condutores, das características físicas dos condutores e das características geométricas espaciais sobre o posicionamento dos mesmos (distância de separação entre eles, e entre cada um deles e o solo).

Portanto, as matrizes que contêm os parâmetros da linha bifásica mostrada na Figura 28, por unidade de comprimento, são escritas como sendo:

$$\left[ R'(\omega) \right] = \begin{bmatrix} R'_A(\omega) & R'_{AB}(\omega) \\ R'_{AB}(\omega) & R'_B(\omega) \end{bmatrix} (\Omega/\text{km}) \quad (296)$$

$$[L'(\omega)] = \begin{bmatrix} L'_A(\omega) & L'_{AB}(\omega) \\ L'_{AB}(\omega) & L'_B(\omega) \end{bmatrix} \text{ (H/km)} \quad (297)$$

$$[C'] = \begin{bmatrix} 6,9087 & -1,5553 \\ -1,5553 & 7,0956 \end{bmatrix} \text{ (\eta F/km)} \quad (298)$$

Da equação (298), as capacitâncias transversais parciais estão dadas por:

$$C_{PA} = 5,3533 \text{ \eta F/km} \quad (299)$$

$$C_{PB} = 5,5402 \text{ \eta F/km} \quad (300)$$

$$C_{AB} = 1,5553 \text{ \eta F/km} \quad (301)$$

Substituindo as equações (296) e (297) em (253), e (298) em (254), e considerando que o coeficiente de amortecimento é igual a 125,66 rad/s, obtêm-se as matrizes de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais, da linha bifásica mostrada na Figura 28:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} R'_A(\omega) & R'_{AB}(\omega) \\ R'_{AB}(\omega) & R'_B(\omega) \end{bmatrix} + 125,66 \begin{bmatrix} L'_A(\omega) & L'_{AB}(\omega) \\ L'_{AB}(\omega) & L'_B(\omega) \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} L'_A(\omega) & L'_{AB}(\omega) \\ L'_{AB}(\omega) & L'_B(\omega) \end{bmatrix} \text{ (\Omega/km)} \quad (302)$$

$$[Y(\omega)] = \begin{bmatrix} 868.18 & -195.46 \\ -195.46 & 891.66 \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} 6.9087 & -1.5553 \\ -1.5553 & 7.0956 \end{bmatrix} \text{ (\eta Siemens/km)} \quad (303)$$

Nas figuras 29 a 34, se for aumentado o numero de blocos RL quando sintetizados os parâmetros longitudinais (influenciados pelo coeficiente de amortecimento) da linha de transmissão bifásica, as curvas vermelhas e azuis apresentam diferenças muito grandes entre elas.

Do anteriormente mencionado, pode-se concluir que com 8 blocos RL (cada um deles contém um resistor e um indutor ligados em paralelo) obtêm-se o melhor ajuste da resposta em frequência dos parâmetros longitudinais próprios e mútuos

Nas tabelas 4, 5 e 6, visualizam-se os valores utilizados na sintetização do efeito da frequência em cada uma das fases e no acoplamento magnético da linha de transmissão bifásica mostrada na Figura 28.

Tabela 4 – Valores de resistências e de indutâncias para a fase A

Resistência [ $\Omega$ /km]		Indutância [mH/km]	
$R_{0A}$	0,400006	$L_{0A}$	1,715869
$R_{1A}$	329,7437	$L_{1A}$	0,037771
$R_{2A}$	92,32604	$L_{2A}$	0,044596
$R_{3A}$	37,03465	$L_{3A}$	0,053266
$R_{4A}$	18,28000	$L_{4A}$	0,072876
$R_{5A}$	7,515214	$L_{5A}$	0,089340
$R_{6A}$	3,491598	$L_{6A}$	0,164865
$R_{7A}$	0,647274	$L_{7A}$	0,274464
$R_{8A}$	0,018806	$L_{8A}$	0,173936

Fonte: Elaboração própria do autor.

Tabela 5 – Valores de resistências e de indutâncias para a fase B

Resistência [ $\Omega$ /km]		Indutância [mH/km]	
$R_{0B}$	0,399985	$L_{0B}$	1,676340
$R_{1B}$	408,2812	$L_{1B}$	0,045514
$R_{2B}$	110,3236	$L_{2B}$	0,051729
$R_{3B}$	42,47450	$L_{3B}$	0,059426
$R_{4B}$	20,10032	$L_{4B}$	0,078112
$R_{5B}$	8,078480	$L_{5B}$	0,093657
$R_{6B}$	3,645608	$L_{6B}$	0,167579
$R_{7B}$	0,676535	$L_{7B}$	0,278249

$R_{8B}$	0,018093	$L_{8B}$	0,180923
----------	----------	----------	----------

Fonte: Elaboração própria do autor.

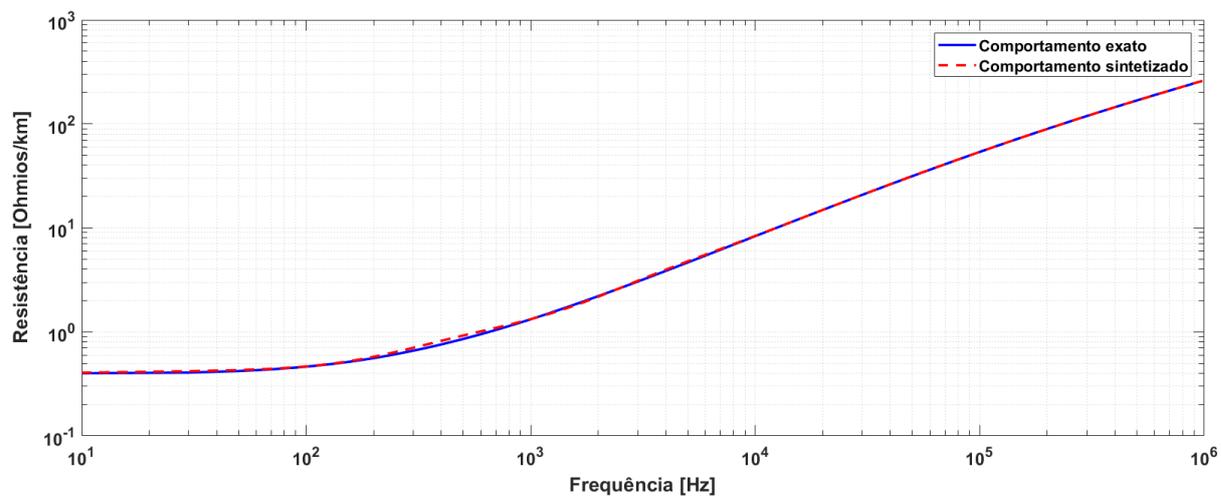
Tabela 6 – Valores de resistências e de indutâncias para o acoplamento magnético.

Resistência [ $\Omega$ /km]		Indutância [mH/km]	
$R_{0M}$	0,177213	$L_{0M}$	0,394889
$R_{1M}$	356,4449	$L_{1M}$	0,040237
$R_{2M}$	99,08185	$L_{2M}$	0,046978
$R_{3M}$	38,97396	$L_{3M}$	0,055043
$R_{4M}$	18,81324	$L_{4M}$	0,073656
$R_{5M}$	7,573690	$L_{5M}$	0,088292
$R_{6M}$	3,412875	$L_{6M}$	0,157525
$R_{7M}$	0,579896	$L_{7M}$	0,246244
$R_{8M}$	0,017586	$L_{8M}$	0,174433

Fonte: Elaboração própria do autor.

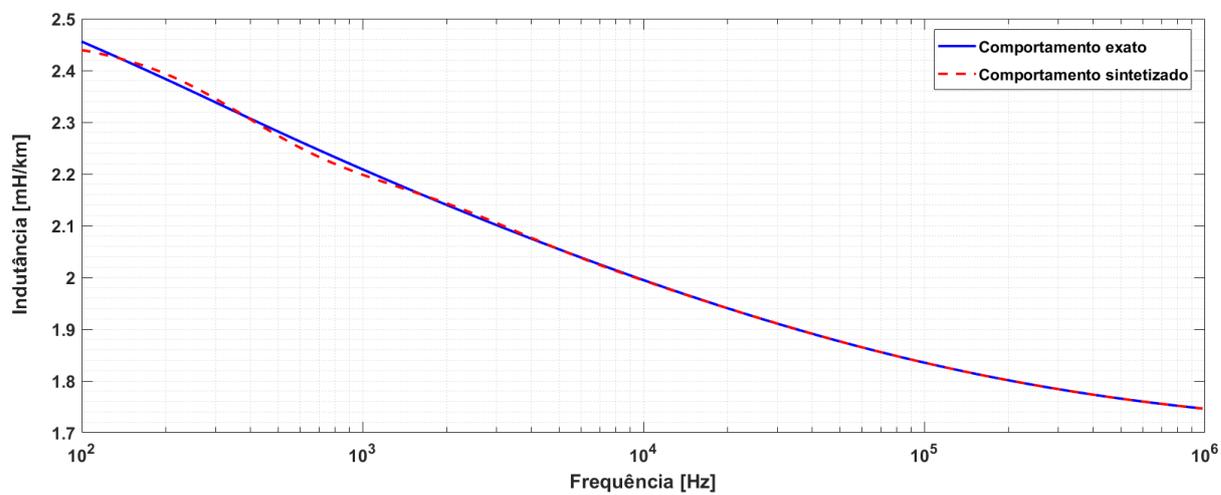
Portanto, a aproximação por meio de funções racionais dos parâmetros longitudinais já encontra-se definido. Por fim, o comportamento dos mesmos em relação à frequência será visualizado nas Figuras 29 a 34.

Figura 29 – Comportamento da resistência própria: Fase A



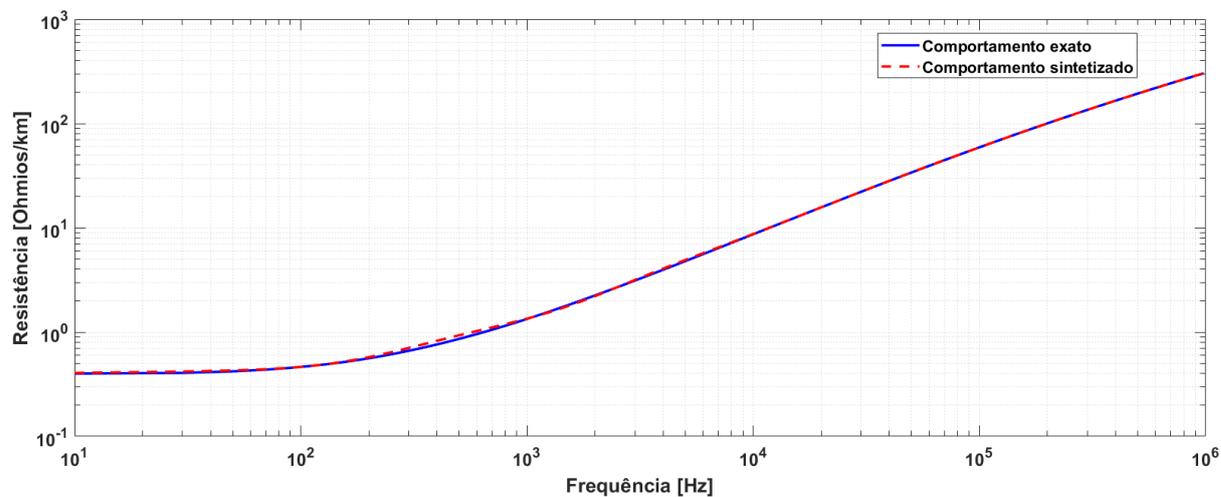
Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 30 – Comportamento da indutância própria: Fase A



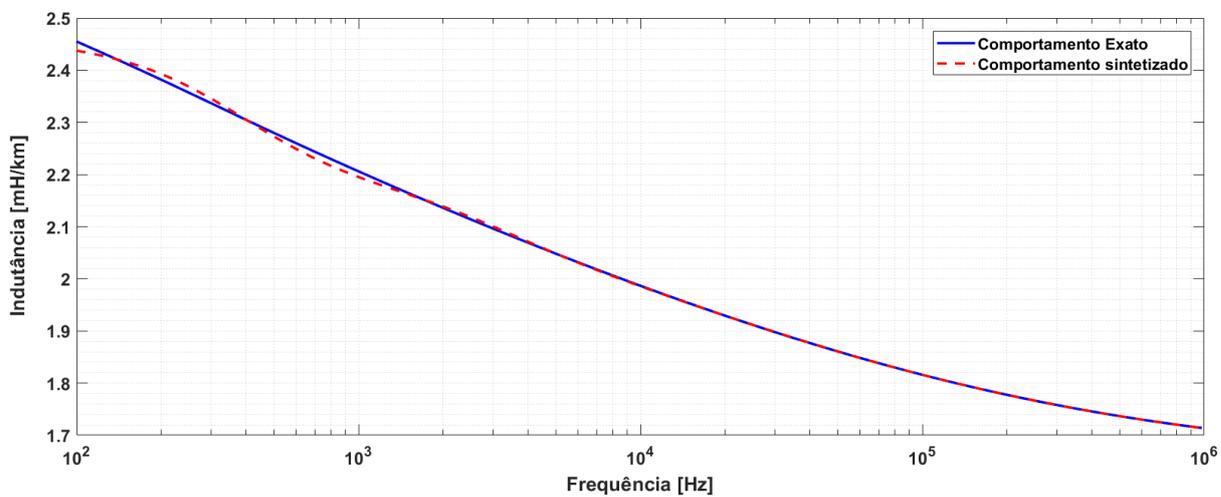
Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 31 – Comportamento da resistência própria: Fase B



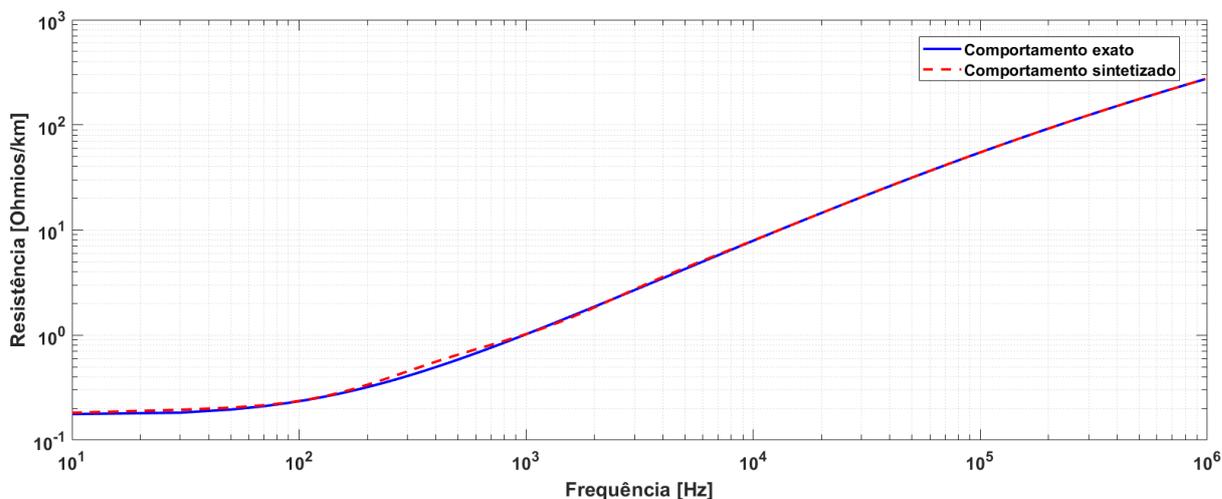
Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 32 – Comportamento da indutância própria: Fase B



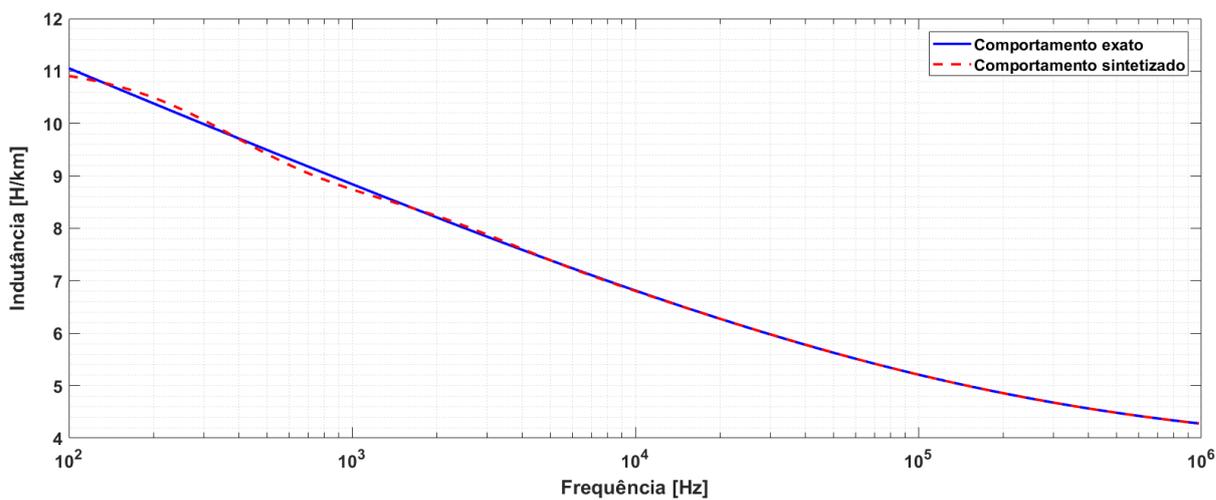
Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 33 – Comportamento da “resistência mútua”



Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 34 – Comportamento da indutância mútua



Fonte: Elaboração própria do autor.

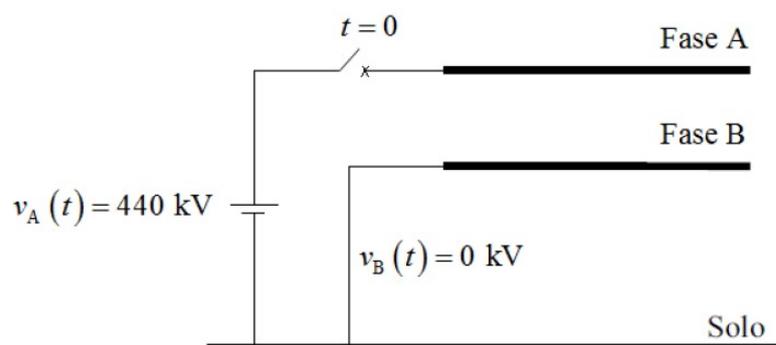
Entretanto, no modelo clássico modal, cada uma das linhas monofásicas modais será representada por meio de uma cascata de 100 circuitos  $\pi$  (análise no domínio da frequência). No modelo proposto, a linha bifásica será representada por meio de uma cascata de 100 segmentos de linha, onde cada um dos segmentos é do tipo mostrado na seção 4.3.

Para a validação do modelo proposto, serão apresentados os seguintes casos:

### Caso 1

Na Figura 35, visualiza-se como a linha de transmissão bifásica da Figura 28 será energizada.

Figura 35– Linha bifásica com os seus terminais receptores em aberto.

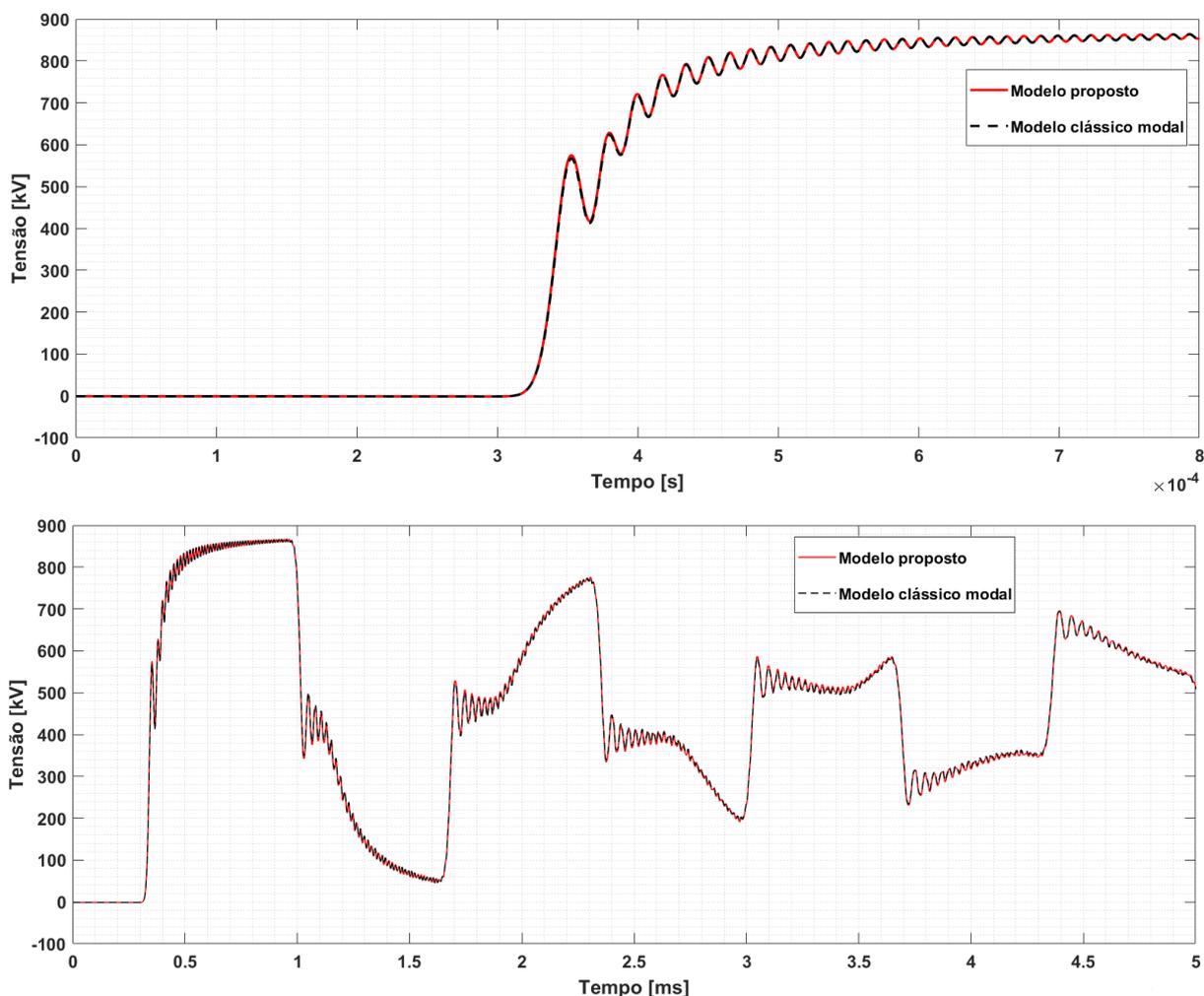


Fonte: Elaboração própria do autor

Na Figura 35, o terminal emissor da fase A será energizado, no instante  $t=0$ , por uma fonte de tensão constante (sinal degrau) igual a 440 Kv, enquanto que o terminal emissor da fase B está aterrado.

Nas Figuras 36 e 37, visualiza-se o comportamento da tensão no terminal receptor das fases A e B, respectivamente. As curvas vermelhas e as curvas pretas mostram os resultados obtidos com o modelo proposto (análise no domínio da frequência) e com o modelo clássico modal, respectivamente.

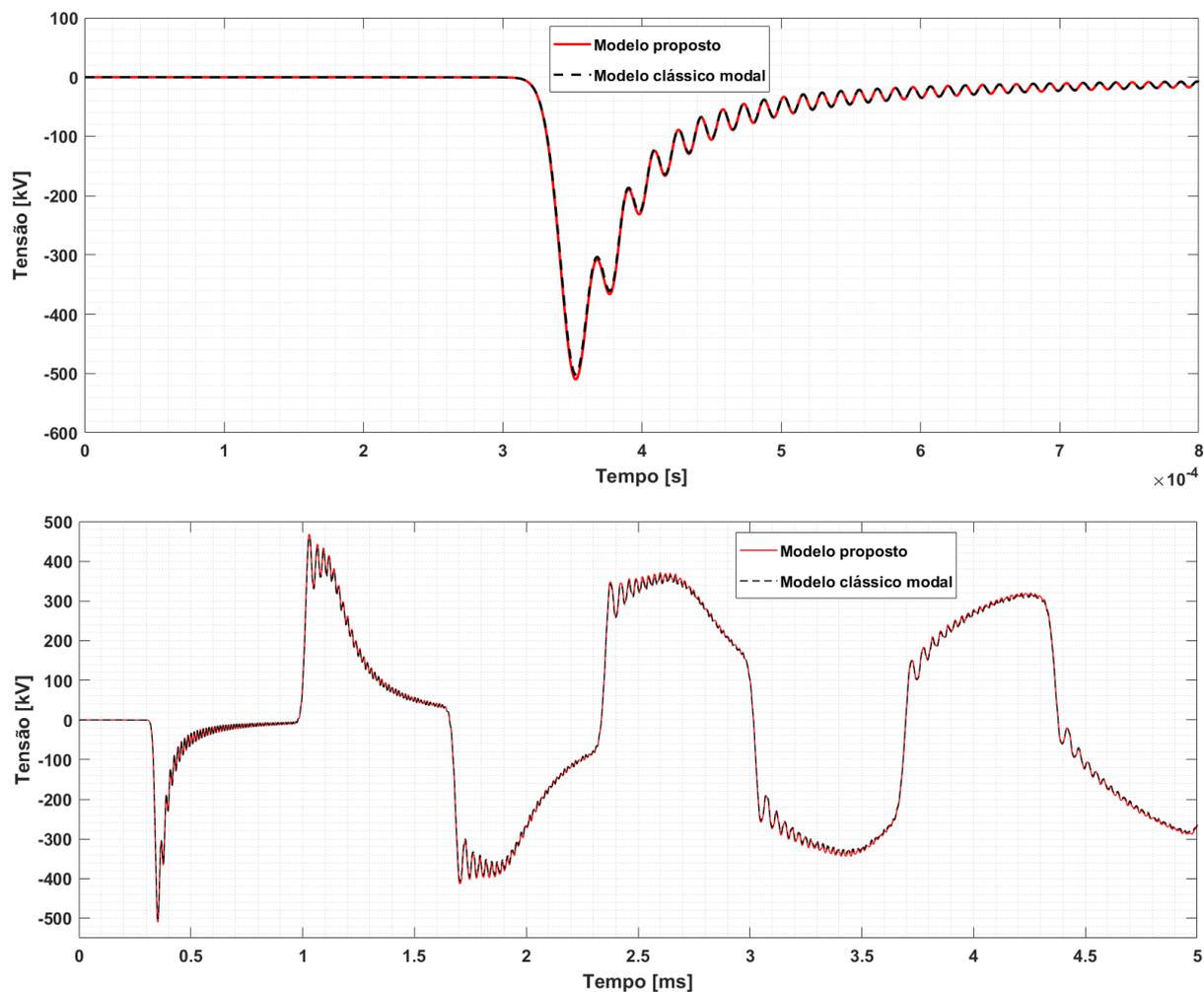
Figura 36 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal (curva preta).



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 36; visualiza-se que a tensão no terminal receptor da fase A, aproximadamente no instante  $t=0,792$  ms, atinge um valor máximo igual a 864,1 kV. Este valor somente é atingido durante o transitório eletromagnético. Visualiza-se que as oscilações durante o mesmo, atingem valores próximos ao dobro do valor constante de tensão (fornecida pela fonte que energiza o terminal emissor).

Figura 37 – Comportamento da tensão no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva vermelha) e modelo clássico modal (curva preta).



Fonte: Elaboração própria do autor.

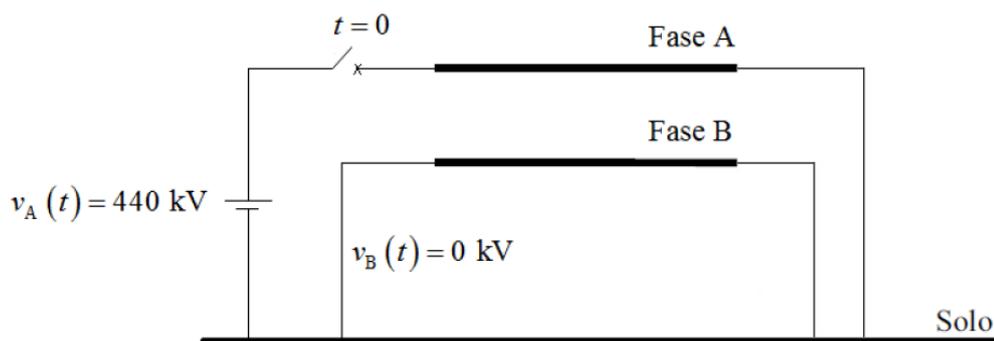
Na Figura 37, visualiza-se que a tensão no terminal receptor da fase B, atinge valores negativos. Isto deve-se à influência da energização da fase A sobre a fase B, isto é, à influência do acoplamento eletromagnético entre as fases.

As curvas das Figuras 36 e 37, mostram que existe uma diferença muito pequena entre os resultados obtidos com os modelos clássico modal e proposto. Portanto, pode-se concluir que as considerações feitas durante o desenvolvimento do modelo proposto, analisado no domínio da frequência, estiveram corretas.

## Caso 2

Na Figura 38, visualiza-se como a linha de transmissão bifásica da Figura 33 será energizada.

Figura 38 – Linha bifásica com os seus terminais receptores em curto-circuito.

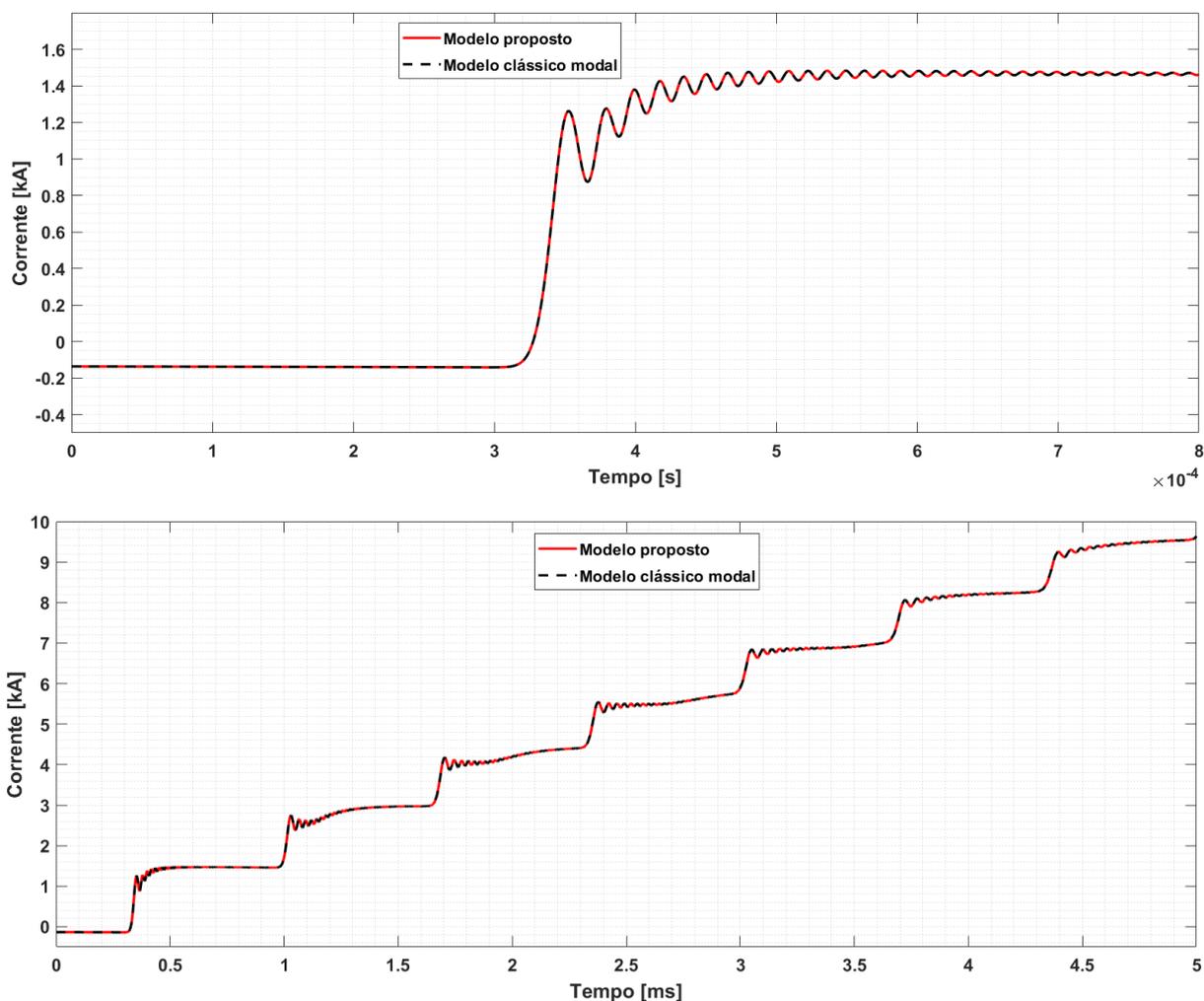


Fonte: Elaboração própria do autor

Na Figura 38, o terminal emissor da fase A será energizado, no instante  $t=0$ , por uma fonte de tensão constante (sinal degrau) igual a 440 kV, enquanto que o terminal emissor da fase B está aterrado.

Nas Figuras 39 e 41, visualiza-se o comportamento da corrente no terminal receptor das fases A e B, respectivamente. As curvas verdes e as curvas pretas mostram os resultados obtidos com o modelo proposto (análise no domínio da frequência) e com o modelo clássico modal, respectivamente.

Figura 39 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase A: Modelo proposto (curva verde) e modelo clássico modal (curva preta).



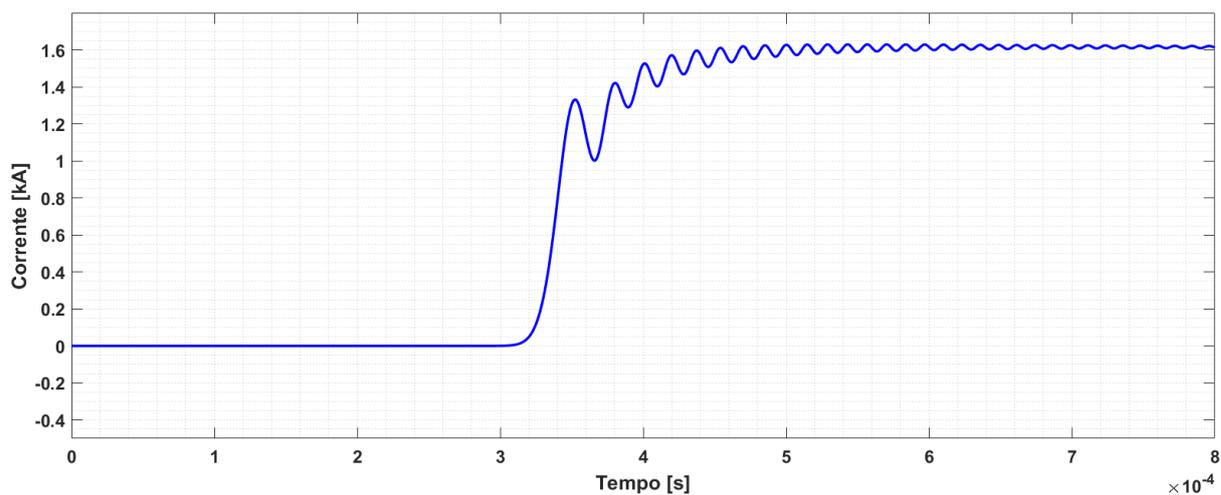
Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 39, visualiza-se que a corrente no terminal receptor da fase A, com o passar do tempo, atinge valores muito altos. Esta corrente, aproximadamente no instante  $t=5$  ms, atinge um valor igual a 9,63 kA.

O fato de que a corrente elétrica não comece no valor zero, não significa que o modelo proposto esteja errado, já que as curvas vermelha e preta não apresentam diferença alguma. Nos casos de simulação desta seção, para converter as respostas de corrente e de tensão do domínio da frequência para o domínio do tempo, foi utilizado a transformada numérica de Laplace. Tal transformada é a causa daquele deslocamento no valor inicial da corrente. A corrente elétrica no terminal receptor da fase A deveria começar no valor zero,

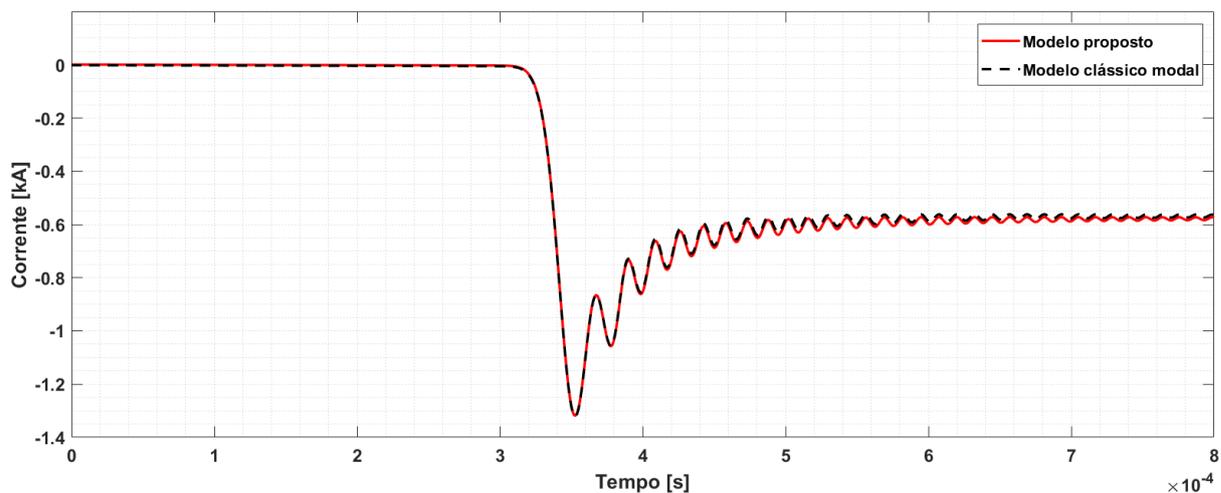
tanto é assim que quando executou-se o programa de simulação, desenvolvido diretamente no domínio do tempo, a corrente elétrica começa no valor zero (valor coerente), conforme visualiza-se na Figura 40.

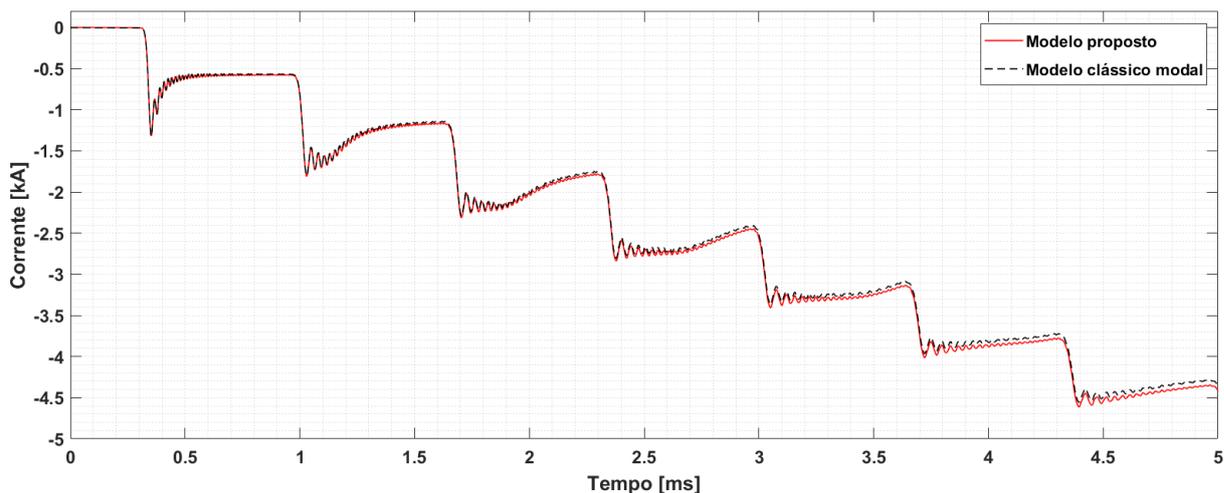
Figura 40 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase A: Modelo proposto desenvolvido diretamente no domínio do tempo.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Figura 41 – Comportamento da corrente no terminal receptor da fase B: Modelo proposto (curva verde) e modelo clássico modal (curva preta).





Fonte: Elaboração própria do autor.

Na figura 41, visualiza-se que a corrente no terminal receptor da fase B, atinge valores negativos. Isto deve-se à influência da energização da fase A sobre a fase B, isto é, à influência do acoplamento eletromagnético entre as fases.

A corrente no terminal receptor da fase B, aproximadamente no instante  $t=5$  ms, atinge um valor igual a -4,351 kA.

As curvas das Figuras 39 e 41, mostram que existe uma diferença muito pequena entre os resultados obtidos com os modelos clássico modal e proposto. Portanto, pode-se concluir que as considerações feitas durante o desenvolvimento do modelo proposto, analisado no domínio da frequência, estiveram corretas.

### 5.3 Considerações

O modelo proposto foi validado, a partir do modelo já existente para estudos de transitórios eletromagnéticos, denominado modelo clássico modal. Em todos os casos de simulação as respostas obtidas com os modelos de referencia e proposto apresentam diferenças muito pequenas.

O modelo de linha de transmissão bifásica, que foi proposto, é o primeiro a parâmetros discretos que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. O *software* de simulação ATPDraw, muito utilizado para a análise de transitórios eletromagnéticos em sistemas de energia elétrica, somente apresenta um modelo de linha bifásica a parâmetros discretos e constantes.

## 6 CONCLUSÕES GERAIS

Os parâmetros de uma linha de transmissão de energia elétrica estão uniformemente distribuídos ao longo do seu comprimento, esta característica em conjunto com o fato de que os parâmetros longitudinais são variáveis em relação à frequência (devido aos efeitos do solo e pelicular), devem ser levados em consideração para estudos de transitórios eletromagnéticos.

Neste trabalho, uma linha de transmissão monofásica foi representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$  (modelo a parâmetros discretos, ou *Lumped Parameters Model*), onde as respectivas equações de corrente e de tensão foram escritas na forma de equação de estado. Nas soluções obtidas sempre observam-se oscilações numéricas (independem do método numérico de integração utilizado para a resolução da equação de estado) que são denominadas *oscilações espúrias*. Estas oscilações ocorrem devido à representação de uma linha de transmissão monofásica por meio de elementos discretos de circuitos. Para melhorar a qualidade do comportamento (forma de onda distorcida) das tensões e correntes, foi mostrado o desenvolvimento de um modelo de linha a parâmetros discretos, diretamente no domínio do tempo, que leva em consideração o efeito da frequência (influencia na constituição da equação de estado). A integração de tal equação foi realizada por meio do método de Heun (método de integração trapezoidal).

A sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais de cada um dos modos de propagação de uma linha bifásica que possui plano de simetria vertical é representada como uma associação série e paralela de resistores e indutores. Considera-se que cada linha monofásica modal é representada como uma cascata de circuitos  $\pi$  que leva em consideração o efeito da frequência, por conseguinte, as correntes e tensões são calculadas facilmente no domínio modal. Logo, utilizam-se as matrizes de transformação modal inversa, onde os elementos das mesmas são reais e invariáveis em relação à frequência, para obter as correntes e tensões da linha de transmissão bifásica, diretamente nos domínios das fases e do tempo.

Entretanto, também foi mostrada a decomposição modal de uma linha bifásica que não possui plano de simetria vertical, isto é, as matrizes de transformação modal possuem elementos complexos que são variáveis em relação à frequência. Cada um dos modos de propagação (linha monofásica desacoplada) foi representado por meio de uma cascata de

circuitos  $\pi$  (análise no domínio da frequência). Logo, calculadas as correntes e tensões de cada linha monofásica modal, para cada valor da faixa discretizada de frequências, utilizaram-se as matrizes de transformação modal inversa para obter as correntes e tensões da linha de transmissão bifásica, no domínio das fases.

No processo de decomposição modal de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, as matrizes de transformação que decompõem a mesma nos seus dois modos de propagação, possuem elementos complexos que são variáveis em relação à frequência. Para contornar o cálculo (mediante o método numérico iterativo de Newton-Raphson) de tais matrizes de transformação modal ( $[T_I]$  e  $[T_V]$ ), foi desenvolvido um modelo de linha de transmissão bifásica a parâmetros discretos, diretamente no domínio do tempo.

Neste trabalho foi proposto um modelo de linha de transmissão bifásica genérica, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  que leva em consideração o efeito da frequência. A sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais próprios e mútuos foi representada por meio de uma associação série e paralela de resistores e indutores. Este modelo de linha bifásica é utilizado para calcular as correntes e tensões ao longo da linha, diretamente no domínio do tempo. Portanto, a diferença deste modelo em relação ao modelo clássico modal, está baseada em contornar o cálculo de matrizes de transformação modal.

No entanto, no processo de validação do modelo proposto para linhas de transmissão que não possuem plano de simetria vertical, a linha foi representada por meio de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais, onde cada pequeno segmento de linha é representado por meio de um circuito  $\pi$  (análise no domínio da frequência) que leva em consideração o acoplamento entre as fases. Desse modo, considerou-se que uma linha de transmissão bifásica é representada por meio de uma cascata de circuitos  $\pi$ , onde as respectivas equações de corrente e de tensão são escritas na forma matricial de um sistema linear, diretamente no domínio da frequência. Portanto, para cada valor da faixa discretizada de frequências, a solução do sistema linear permite obter as correntes e tensões ao longo da linha. Logo, para converter as mesmas, do domínio da frequência para o domínio do tempo, é necessário utilizar a transformada numérica de Laplace (NLT). Em tal processo de validação

utilizou-se como referência o modelo clássico modal que leva em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais.

Em todos os casos simulados para uma linha bifásica que possui plano de simetria vertical, obteve-se uma solução satisfatória, isto é, não existe diferença alguma entre os resultados obtidos com os modelos proposto e de referência. Entretanto, em todos os casos simulados para uma linha bifásica que não possui plano de simetria vertical, obteve-se uma solução aceitável, isto é, existe uma diferença muito pequena entre os resultados obtidos com os modelos proposto e de referência.

No primeiro caso de simulação para uma linha bifásica que não possui plano de simetria vertical observou-se que somente quando uma fase da linha bifásica é energizada, a fase aterrada sofre as consequências da energização, isto é, a fase que foi energizada induz uma tensão na fase aterrada (devido ao acoplamento eletromagnético entre as fases). Este fato fez com que a tensão no terminal receptor da fase que está aterrada atinja valores negativos; enquanto que a tensão no terminal receptor da fase que foi energizada, atinge um valor máximo igual a 864,1 kV. As oscilações durante o transitório eletromagnético atingem valores próximos ao dobro do valor constante de tensão (fornecida pela fonte que energiza o terminal emissor).

No segundo caso de simulação para uma linha bifásica que não possui plano de simetria vertical observou-se que a corrente elétrica no terminal receptor da fase A não começa no valor zero, isto não significa que o modelo proposto esteja errado, já que as curvas dos modelos proposto e clássico modal não apresentam diferença alguma. Para converter a resposta de corrente do domínio da frequência para o domínio do tempo, foi utilizada a transformada numérica de Laplace. Tal transformada é a causa daquele deslocamento no valor inicial da corrente. A corrente elétrica deveria começar no valor zero, tanto é assim que quando executou-se o programa de simulação, desenvolvido diretamente no domínio do tempo, a corrente elétrica começa no valor zero (valor coerente). O anteriormente mencionado justifica que o modelo proposto tenha sido desenvolvido diretamente no domínio do tempo.

O modelo proposto para uma linha de transmissão bifásica, possui muitas aplicações na análise de transitórios eletromagnéticos, resultantes de operações de manobra e de chaveamentos que ocorrem no sistema de energia elétrica. Este modelo tem como vantagem

que o seu custo de implementação computacional é relativamente baixo, dado que o número de pequenos segmentos de linha (cascata de circuitos  $\pi$  que leva em consideração o efeito da frequência) é ilimitada.

O modelo proposto também apresenta outras múltiplas vantagens, entre eles o fato de ser desenvolvido diretamente no domínio do tempo, já que os elementos não lineares de um sistema de energia elétrica são facilmente representados naquele domínio. Outra vantagem muito importante é o fato de não ser necessário determinar as condições iniciais de tensões e correntes quando ocorre uma mudança na configuração do sistema de energia. Uma terceira vantagem em relação ao modelo clássico modal é o fato de não ser necessário desacoplar as cargas ligadas aos terminais receptores, já que nem sempre as matrizes de transformação modal conseguem aquele.

### 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

- No modelo proposto, tratar de simplificar as regras de formação associadas à matriz de estado, já que as mesmas são complexas, para assim torná-lo mais atraente para uma futura publicação em revista.
- Desenvolver um modelo de linha trifásica genérica que inclua o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais, para calcular as correntes e tensões ao longo da linha, diretamente no domínio do tempo.

### 6.2 Trabalhos apresentados

CRUZ, M. A. E. “Estudo de um modelo de linha de transmissão bifásica, a parâmetros discretos, desenvolvido diretamente no domínio das fases”. **Estudo Especial I (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2016.**

CRUZ, M. A. E. “Validação de uma proposta de representação do acoplamento entre as fases de linhas de transmissão bifásicas sem plano de simetria vertical”. **Estudo Especial II (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2017.**

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, A. R. J. **Caracterização e redução das oscilações espúrias resultantes da representação de linhas de transmissão por meio de elementos discretos de circuitos**. 2014. 143 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2014.
- BUDNER, A. Introduction of frequency-dependent line parameters into an electromagnetic transients program. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, Piscataway, v. PAS-89, n. 1, p. 88-97, Jan. 1970.
- CHEN, C. T. **Linear system theory and desing**. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- CHIPMAN, R. A. **Teoria e problemas de linhas de transmissão**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1976. 276 p.
- DOMMEL, H. W. Digital computer of electromagnetic transients in single and multiphase networks. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, Piscataway, v. PAS-88, n. 4, p. 388-399, abr. 1969.
- DOMMEL, H. W. **Electromagnetic transients program**: reference manual. Portland: Bonneville Power Administration, 1986.
- DOMMEL, H. W. **EMTP theory book**. Microtran Power System Analysis Corporation. Vancouver: British Columbia, 1996.
- FARIA, A. B.; WASHINGTON, L. A.; ANTÔNIO, C. S. Modelos de linhas de transmissão no domínio das fases: estado da arte. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 14, 2002, Natal. **Anais...**, Natal: [S.n.], 2002. p. 801-806.
- FUCHS, R. D. **Transmissão de energia elétrica**: linhas aéreas: teoria das linhas em regime permanente. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora; Itajubá: Escola Federal de Engenharia, 1979. p. 281-448.
- GATOUS, O. M. O. **Uma nova implementação do efeito skin no modelo de linhas de transmissão**. 2005. 121 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005.
- GUSTAVSEN, B. ; SEMLYEN, A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. **IEEE Transactions on Power Delivery**, [S. l.], v. 14, n. 3, p. 1052-1061, Jul. 1999.
- HAYT, W. H.; BUCK, J. A. **Eletromagnetismo**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- HOFMANN, L. Series expansions for line series impedances considering diferent specific resistances, magnetic permeabilities and dielectric permittivities of conductors, air and ground. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Piscataway, v. 18, n. 2, p. 564-570, Apr. 2003.

KUROKAWA, S. **Parâmetros longitudinais e transversais de linhas de transmissão calculados a partir das correntes e tensões de fase**. 2003. 151 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

KUROKAWA, S. Representação de linhas de transmissão por meio de variáveis de estado levando em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. **SBA - Controle & Automação**, Campinas, v. 18, n. 3, p. 337-346, Jul./Aug./Sep. 2007.

KUROKAWA, S.; YAMANAKA, F. N. R.; PRADO, A. J.; PISSOLATO FILHO, J. Using state-space techniques to represent frequency dependent single-phase lines directly in time domain. In: **IEEE/PES TRANSMISSION AND DISTRIBUTION CONFERENCE AND EXPOSITION: Latin America, 2008**, Bogotá. **Proceedings...** Bogotá: [s. n.], 2008. p. 312-316.

MAMIS, M. S. Computation of electromagnetic transients on transmission lines with nonlinear components. **IEE Proceedings, Generation, Transmission and Distribution**, Stevenage, v. 150, n. 2, p. 200-204, Mar. 2003.

MARTÍ, J. R. Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, Piscataway, v. PAS-101, n. 1, p. 147-155, 1982.

MARTINEZ, J. A.; GUSTAVSEN, B.; DURBAK D. Parameter determination for modeling system transients - part I: overhead lines. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Piscataway, v. 20, n. 3, p. 2038-2044, Jul. 2005.

MINGLI, W; YU, F. Numerical calculations of internal impedance of solid and tubular cylindrical conductors under large parameters. **IEE Proceedings, Generation, Transmission and Distribution**, Stevenage, v. 151, n. 1, p. 67-72, Jan. 2004.

MORENO, P. et al. Implementation of the numerical Laplace transform: a review. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Piscataway, v. 23, n. 4, p.2599-2609, Oct. 2008.

NAIDU, S. R. **Transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência**. Campina Grande: Grafset, 1985.

RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1998. 406 p.

SARTO, M. S.; SCARLATTI, A.; HOLLOWAY, C. L. On the use of fitting models for the time-domain analysis on problems with frequency-dependent parameters. In: **IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ELECTROMAGNETIC COMPATIBILITY, 2001**, Montreal. **Proceeding...** Montreal: [s. n], 2001. p. 588-593.

SCHULZE, R.; SCHEGNER, P.; ZIVANOVIC, R. Parameter identification of unsymmetrical transmission lines using fault records obtained from protective relays. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Piscataway, v. 26, n. 2, p. 1265-1272, Dec. 2010.

SILVA, R. C. **Representação de linhas de transmissão, utilizando elementos discretos de circuitos, no domínio das fases**. 2012. 92 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2012.

SPIEGEL, M. R. **Transformadas de laplace**. São Paulo: Ed. McGraw-Hill, 1971. 344 p.

STEVENSON, W. D. J. **Elementos de análise de sistemas de potência**. São Paulo: McGraw-Hill Book do Brasil, 1978. 348 p.

SWOKOWSKI, E.W. **Cálculo com geometria analítica**. São Paulo: Ed. Makron do Brasil, 1994. v. 2. 792 p.

TAVARES, M. C.; PISSOLATO, J.; PORTELA, C.M. Mode domain multiphase transmission line model: use in transient studies. **IEEE Transactions on Power Delivery**, Piscataway, v. 14, n. 4, p. 1533-1544, Oct. 1999.

WEDEPOHL, L. M. Application of matrix methods to the solution of traveling-wave phenomena in polyphase systems. **Proc. IEE**, Piscataway, v. 110, n.12, p. 2200-2212, Dec. 1963.

WEDEPHOL, L. M.; NGUYEN, H. V.; IRWIN, G. D. “Frequency-dependent transformation matrices for untransposed transmission lines using Newton-Raphson Method”. **IEE Transactions on Power Systems**, Piscataway, v. 11, n. 3, p. 1538-1546, Aug. 1996.

YAMANAKA, F. N. R. **Inclusão do efeito da frequência nas equações de estado de linhas bifásicas: Análise no domínio do tempo**. 2009. 108 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia Elétrica de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

## APÊNDICE A: APROXIMAÇÃO DOS PARÂMETROS LONGITUDINAIS DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO POR MEIO DE FUNÇÕES RACIONAIS

### A.1 Vector Fitting

Do capítulo 2, sabe-se que os parâmetros longitudinais de uma linha de transmissão são variáveis em relação à frequência. Uma maneira de aproximar dita resposta em frequência é utilizando funções racionais; para definir estas funções é necessário calcular os seus polos e resíduos.

De maneira geral, a resposta em frequência de uma função  $f(s)$  pode ser aproximada por meio de uma função racional, expressa na forma de uma soma de frações parciais. Considerando que a função racional possui  $N$  polos, a mesma é descrita como sendo:

$$f(s) \approx \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{s - a_m} + d \quad (304)$$

Na equação (304);  $c_m$  e  $a_m$  são o  $m$ -ésimo resíduo e o  $m$ -ésimo polo da aproximação racional da função  $f(s)$ , respectivamente. Considera-se que o termo independente  $d$  e os resíduos são números reais positivos; enquanto que os polos são números reais negativos (KUROKAWA et al., 2007).

O cálculo do termo independente, dos resíduos e polos, que define a aproximação racional da função  $f(s)$ , é feito por meio do procedimento denominado **vector fitting**. Este procedimento está baseado no Método dos Mínimos Quadrados.

O **vector fitting** necessita de uma estimativa inicial para os  $N$  polos da aproximação racional da função  $f(s)$ . Considerando que  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots$  e  $\bar{a}_N$  são os polos iniciais da aproximação racional da mesma, é definida uma função  $\sigma(s)$ . A aproximação racional de  $\sigma(s)$  é descrita como sendo:

$$\sigma(s) \approx \sum_{m=1}^N \frac{\tilde{c}_m}{s - \bar{a}_m} + 1 \quad (305)$$

Na equação (305);  $\tilde{c}_m$  e  $\bar{a}_m$  são o  $m$ -ésimo resíduo e o  $m$ -ésimo polo da aproximação racional da função  $\sigma(s)$ , respectivamente. Visualiza-se que os  $N$  polos da aproximação racional da mesma, é a estimativa inicial para os polos da aproximação racional da função  $f(s)$ .

A partir do anteriormente mencionado, multiplique a função  $f(s)$  por  $\sigma(s)$ , levando em consideração que o limite da função  $\sigma(s)$  para frequências muito altas (quando  $s \rightarrow +j\infty$ ), aproxima-se à unidade. Deste modo, a aproximação racional da função  $f(s) \cdot \sigma(s)$  é escrita como sendo:

$$f(s) \cdot \sigma(s) \approx \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{s - \bar{a}_m} + d \quad (306)$$

Relacionando as equações (305) e (306), obtém-se a seguinte relação:

$$f(s) \cdot \left( \sum_{m=1}^N \frac{\tilde{c}_m}{s - \bar{a}_m} + 1 \right) \approx \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{s - \bar{a}_m} + d \quad (307)$$

A equação (307) pode ser reescrito como sendo (GUSTAVSEN et al., 1999):

$$f(s) \approx \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{s - \bar{a}_m} + d - f(s) \cdot \sum_{m=1}^N \frac{\tilde{c}_m}{s - \bar{a}_m} \quad (308)$$

Na tabela 7, visualiza-se os  $n$  valores tabulados da função  $f(s)$ .

Tabela 7 – Valores conhecidos da função  $f(s)$ .

$f(s)$	$s$
$f(s_1) = f_1$	$s_1$
$f(s_2) = f_2$	$s_2$
$\vdots$	$\vdots$
$f(s_n) = f_n$	$s_n$

Fonte: Elaboração própria do autor.

Aplicando os valores tabulados da função  $f(s)$  na equação (308), obtêm-se as seguintes relações:

$$f_1 \approx \frac{c_1}{s_1 - \bar{a}_1} + \frac{c_2}{s_1 - \bar{a}_2} + \dots + \frac{c_N}{s_1 - \bar{a}_N} + d - f_1 \cdot \frac{\tilde{c}_1}{s_1 - \bar{a}_1} - f_1 \cdot \frac{\tilde{c}_2}{s_1 - \bar{a}_2} - \dots - f_1 \cdot \frac{\tilde{c}_N}{s_1 - \bar{a}_N} \quad (309)$$

$$f_2 \approx \frac{c_1}{s_2 - \bar{a}_1} + \frac{c_2}{s_2 - \bar{a}_2} + \dots + \frac{c_N}{s_2 - \bar{a}_N} + d - f_2 \cdot \frac{\tilde{c}_1}{s_2 - \bar{a}_1} - f_2 \cdot \frac{\tilde{c}_2}{s_2 - \bar{a}_2} - \dots - f_2 \cdot \frac{\tilde{c}_N}{s_2 - \bar{a}_N} \quad (310)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$f_n \approx \frac{c_1}{s_n - \bar{a}_1} + \frac{c_2}{s_n - \bar{a}_2} + \dots + \frac{c_N}{s_n - \bar{a}_N} + d - f_n \cdot \frac{\tilde{c}_1}{s_n - \bar{a}_1} - f_n \cdot \frac{\tilde{c}_2}{s_n - \bar{a}_2} - \dots - f_n \cdot \frac{\tilde{c}_N}{s_n - \bar{a}_N} \quad (311)$$

A forma matricial das equações lineares (309) a (311) é escrita como sendo:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{s_1 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_1 - \bar{a}_N} & 1 & \frac{-f_1}{s_1 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f_1}{s_1 - \bar{a}_N} \\ \frac{1}{s_2 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_2 - \bar{a}_N} & 1 & \frac{-f_2}{s_2 - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f_2}{s_2 - \bar{a}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{s_n - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_n - \bar{a}_N} & 1 & \frac{-f_n}{s_n - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f_n}{s_n - \bar{a}_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \\ d \\ \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (312)$$

Na equação (312); as incógnitas  $c_1, c_2, \dots, c_N, d, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots$  e  $\tilde{c}_N$  da equação matricial, são os resíduos e o termo independente da aproximação racional da função  $f(s)$ , e os resíduos da aproximação racional da função  $\sigma(s)$ , respectivamente.

A equação (312) representa um sistema linear com  $n$  equações e  $(2N+1)$  incógnitas. Devido ao fato que  $n > (2N+1)$ , o sistema de equações lineares é inconsistente, isto é, não possui solução. Porém, pode-se encontrar uma solução aproximada a partir da definição de um vetor  $[\varepsilon]$ .

O vetor  $[\varepsilon]$  é definida como sendo:

$$[\varepsilon] = [\mathbf{B}] - [\mathbf{A}][x] \quad (313)$$

Onde:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_1 - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{1}{s_1 - \bar{a}_N} & 1 & \frac{-f_1}{s_1 - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{-f_1}{s_1 - \bar{a}_N} \\ \frac{1}{s_2 - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{1}{s_2 - \bar{a}_N} & 1 & \frac{-f_2}{s_2 - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{-f_2}{s_2 - \bar{a}_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{s_n - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{1}{s_n - \bar{a}_N} & 1 & \frac{-f_n}{s_n - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{-f_n}{s_n - \bar{a}_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1(2N+1)} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2(2N+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A}_{n1} & \mathbf{A}_{n2} & \cdots & \mathbf{A}_{n(2N+1)} \end{bmatrix} \quad (314)$$

$$[\mathbf{b}] = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n]^T = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_n]^T \quad (315)$$

$$[x] = [c_1 \quad \cdots \quad c_N \quad d \quad \tilde{c}_1 \quad \cdots \quad \tilde{c}_N]^T = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{(2N+1)}]^T \quad (316)$$

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \cdots \quad \varepsilon_n]^T \quad (317)$$

Na equação (317); o vetor  $[\varepsilon]$  é de ordem  $n \times 1$ . Este vetor contém os erros associados à equação (313).

Desenvolvendo a equação (313), têm-se as seguintes relações:

$$\varepsilon_1 = \mathbf{b}_1 - \left[ \mathbf{A}_{11} \cdot x_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{A}_{1(2N+1)} \cdot x_{(2N+1)} \right] \quad (318)$$

$$\varepsilon_2 = \mathbf{b}_2 - \left[ \mathbf{A}_{21} \cdot x_1 + \mathbf{A}_{22} \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{A}_{2(2N+1)} \cdot x_{(2N+1)} \right] \quad (319)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\varepsilon_n = \mathbf{b}_n - \left[ \mathbf{A}_{n1} \cdot x_1 + \mathbf{A}_{n2} \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{A}_{n(2N+1)} \cdot x_{(2N+1)} \right] \quad (320)$$

Para minimizar os erros associados à equação (313), utiliza-se o Método dos Mínimos Quadrados (RUGIERO, 1998).

Define-se uma função  $g(x_1, x_2, \dots, x_{(2N+1)})$  como sendo:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{(2N+1)}) = g = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2 \quad (321)$$

Substituindo as equações (318) a (320) na equação (321), obtém-se:

$$g = \left\{ \begin{aligned} & \left[ \mathbf{b}_1 - (\mathbf{A}_{11} \cdot x_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{A}_{1(2N+1)} \cdot x_{(2N+1)}) \right]^2 \\ & + \left[ \mathbf{b}_2 - (\mathbf{A}_{21} \cdot x_1 + \mathbf{A}_{22} \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{A}_{2(2N+1)} \cdot x_{(2N+1)}) \right]^2 + \cdots \\ & \cdots + \left[ \mathbf{b}_n - (\mathbf{A}_{n1} \cdot x_1 + \mathbf{A}_{n2} \cdot x_2 + \cdots + \mathbf{A}_{n(2N+1)} \cdot x_{(2N+1)}) \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (322)$$

O Método dos Mínimos Quadrados diz que para minimizar a função  $g$  é necessário que o seu gradiente seja nulo. O anteriormente mencionado é escrito como sendo:

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial x_{(2N+1)}} = 0 \quad (323)$$

A equação (323) pode ser reescrita em forma matricial, como sendo (RUGIERO, 1998):

$$[\mathbf{A}]^T ([\mathbf{b}] - [\mathbf{A}][x]) = 0 \quad (324)$$

Fazendo algumas manipulações matemáticas na equação (324), tem-se:

$$[x] = \left( [\mathbf{A}]^T [\mathbf{A}] \right)^{-1} [\mathbf{A}]^T [\mathbf{b}] \quad (325)$$

Na equação (325);  $\left([A]^T [A]\right)^{-1} [A]^T$  é denominada matriz pseudo-inversa de  $[A]$ . O vetor  $[x]$  contém as  $(2N + 1)$  incógnitas, isto é,  $c_1, c_2, \dots, c_N, d, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots$  e  $\tilde{c}_N$  serão conhecidas.

Entretanto; sabe-se que os  $N$  resíduos da aproximação racional da função  $\sigma(s)$  são iguais aos  $N$  polos da aproximação racional da função  $f(s)$ . Os polos são calculados como se fossem os autovalores de uma matriz  $[H]$ , a qual é definida como sendo (GUSTAVSEN et al., 1999):

$$[H] = [A_1] - [b_1][\tilde{c}]^T \quad (326)$$

Na equação (326);  $[A_1]$  é uma matriz diagonal que contém a estimativa inicial para os polos da aproximação racional da função  $f(s)$ ;  $[b_1]$  é um vetor coluna de uns (1) e  $[\tilde{c}]^T$  é um vetor linha que contém os resíduos (previamente calculados) da aproximação racional da função  $\sigma(s)$ .

Para determinar a aproximação racional da função  $f(s)$  que se ajusta aos valores tabulados da mesma, tem-se utilizar o seguinte processo iterativo:

- i. Escolher uma estimativa inicial para os polos da aproximação racional da função  $f(s)$ .
- ii. Calcular os resíduos da aproximação racional das funções  $f(s)$  e  $\sigma(s)$ , e o termo independente  $d$ , utilizando a equação (325).
- iii. Calcular os polos da aproximação racional da função  $f(s)$  como se fossem os autovalores da matriz  $[H]$ , a qual é estruturada por meio da equação (326).
- iv. Considerar que os polos obtidos em (iii) é a nova estimativa para os polos iniciais da aproximação racional da função  $f(s)$ . Logo, voltar para o passo (ii).
- v. Finalizar o processo iterativo na convergência dos polos e resíduos da aproximação racional da função  $f(s)$ .

## A.2 Aproximação racional de uma função $Z(\omega)$ que ajusta as impedâncias longitudinais de uma linha de transmissão

Do capítulo 2, sabe-se que os parâmetros longitudinais de uma linha de transmissão são variáveis em relação à frequência devido aos efeitos do solo e pelicular.

A partir do anteriormente mencionado, a impedância longitudinal (por unidade de comprimento) de uma linha de transmissão, pode ser descrita como sendo:

$$Z(\omega) = R(\omega) + j\omega \cdot L(\omega) \quad (327)$$

Na equação (327); os termos  $R(\omega)$  e  $L(\omega)$  representam a regra de correspondência da resposta em frequência da resistência e da indutância, por unidade de comprimento, respectivamente.

Entretanto; não existe uma única função que represente o comportamento exato de  $Z(\omega)$ , pois os parâmetros são obtidos por meio de séries numéricas infinitas. Porém, existe uma alternativa de cálculo para a impedância longitudinal  $Z(\omega)$ , isto é, por meio da aproximação racional de uma função  $F(\omega)$  cujos pólos e resíduos são números reais negativos e positivos, respectivamente (KUROKAWA et al., 2007). Deste modo, a função  $F(\omega)$  é definida como sendo (SARTO et al., 2001):

$$F(\omega) = \frac{Z(\omega) - R_{dc}}{j\omega} \quad (328)$$

Onde:

$$R_{dc} = \text{Re}[Z(\omega=0)] \text{ é o valor da resistência elétrica para } \omega = 0$$

Logo, a aproximação racional da função  $F(\omega)$  definida na equação (328), é escrita como sendo:

$$F(\omega) \approx d + \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{s - a_m} \quad (329)$$

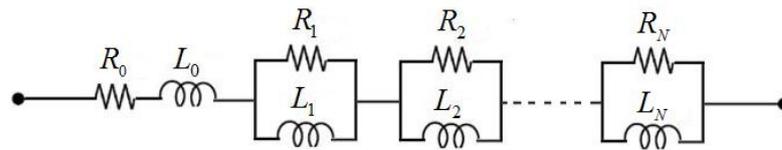
Substituindo a equação (328) na equação (329), obtém-se a aproximação racional da impedância longitudinal  $Z(\omega)$ , a qual é descrita como sendo:

$$Z(\omega) \approx R_{dc} + j\omega \cdot d + \sum_{m=1}^N \frac{j\omega \cdot c_m}{j\omega - a_m} \quad (330)$$

Na equação (330);  $c_m$  e  $a_m$  são o  $m$ -ésimo resíduo e o  $m$ -ésimo polo da aproximação racional da função  $F(\omega)$ , respectivamente.

Logo, na Figura 42; visualiza-se a representação do circuito equivalente relativo à aproximação racional da impedância longitudinal  $Z(\omega)$ .

Figura 42 – Circuito equivalente relativo à aproximação racional de  $Z(\omega)$  (SARTO et al.,2001).



Fonte: Elaboração própria do autor.

A associação série e paralela de resistores e indutores, mostrada na Figura 42, representa a sintetização do efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais.

A equação (330) pode ser reescrita como sendo:

$$Z(\omega) \approx R_0 + j\omega \cdot L_0 + \sum_{m=1}^N \frac{j\omega \cdot R_m}{j\omega + \frac{R_m}{L_m}} \quad (331)$$

Onde:

$$R_0 = R_{dc} \quad (332)$$

$$L_0 = d \quad (333)$$

$$R_m = c_m \quad (334)$$

$$L_m = -\frac{c_m}{a_m} \quad (335)$$

Os modelos de linhas de transmissão que consideram o efeito da frequência, são considerados mais exatos quando comparados com os modelos que consideram os parâmetros constantes.

## APÊNDICE B: CÁLCULO DE MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO MODAL

### B.1 Cálculo das matrizes de transformação modal ( $[T_I]$ e $[T_V]$ ) por meio do método numérico iterativo de Newton-Raphson

A maneira de calcular a matriz de transformação modal  $[T_I]$  de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, consiste em utilizar o método numérico iterativo de Newton-Raphson. Este método possibilita a obtenção dos autovetores  $[T_{I1}]$  e  $[T_{I2}]$ , onde os mesmos possuem elementos complexos que são variáveis em relação à frequência (WEDEPOHL et al., 1996).

Considere uma linha de transmissão de  $n$  fases. Para esta linha, pode-se escrever a seguinte relação (WEDEPHOL et al., 1996):

$$[Y][Z][T_I] = [T_I][\lambda] \quad (336)$$

Considerando  $[S] = [Y][Z]$ , a equação (336) torna-se:

$$[S][T_I] = [T_I][\lambda] \quad (337)$$

Onde:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \cdots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & S_{(n-1)(n-1)} & S_{(n-1)n} \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{n(n-1)} & S_{nn} \end{bmatrix} \text{ é o produto matricial } [Y][Z].$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \text{ é a matriz diagonal que contém os } n$$

autovalores do produto matricial  $[Y][Z]$ .

$$[T_I] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & T_{2n} \\ T_{31} & T_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & T_{(n-1)(n-1)} & T_{(n-1)n} \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{n(n-1)} & T_{nn} \end{bmatrix} \text{ é a matriz cujas colunas são os autovetores}$$

do produto matricial  $[Y][Z]$ .

A matriz  $[S]$  é conhecida; enquanto que as matrizes  $[\lambda]$  e  $[T_I]$  devem ser calculadas para cada valor da faixa discretizada de frequências.

Da equação (337); tem-se a seguinte relação geral (WEDEPHOL et al., 1996):

$$([S] - \lambda_{kk} [U])[T_{Ik}] = [0] \quad (338)$$

Na equação (338), a matriz  $[S]$  corresponde ao produto matricial  $[Y][Z]$ ;  $[T_{Ik}]$  é a k-ésima coluna da matriz  $[T_I]$ ;  $\lambda_{kk}$  é o autovalor associado ao autovetor  $[T_{Ik}]$ , e  $[U]$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

A equação (338) representa um sistema homogêneo com  $n$  equações e  $(n+1)$  incógnitas. Para que o sistema possua uma única solução, deve-se definir mais uma outra equação. Uma condição muito utilizada é a que define que o módulo de qualquer um dos autovetores associado a um autovalor específico, é unitário (WEDEPHOL et al., 1963). Deste modo, obtém-se um sistema de  $(n+1)$  equações com  $(n+1)$  incógnitas que pode ser resolvido por meio do método numérico iterativo de Newton-Raphson.

Para obter o primeiro autovalor, e o autovetor associado ao mesmo; a equação (338) torna-se:

$$([S] - \lambda_{11}[U])[T_{11}] = [0] \quad (339)$$

Na equação (339);  $\lambda_{11}$  é o primeiro autovalor; enquanto que  $[T_{11}]$  é a primeira coluna da matriz  $[T_I]$ , que corresponde a um autovetor de  $\lambda_{11}$ .

Da equação (339), tem-se:

$$\left( \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \cdots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & S_{(n-1)(n-1)} & S_{(n-1)n} \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{n(n-1)} & S_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ \vdots \\ T_{(n-1)1} \\ T_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (340)$$

Desenvolvendo a equação (340), têm-se as seguintes relações:

$$(S_{11} - \lambda_{11})T_{11} + (S_{12})T_{21} + \cdots + (S_{1(n-1)})T_{(n-1)1} + (S_{1n})T_{n1} = 0 \quad (341)$$

$$(S_{21})T_{11} + (S_{22} - \lambda_{11})T_{21} + \cdots + (S_{2(n-1)})T_{(n-1)1} + (S_{2n})T_{n1} = 0 \quad (342)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$(S_{n1})T_{11} + (S_{n2})T_{21} + \cdots + (S_{n(n-1)})T_{(n-1)1} + (S_{nn} - \lambda_{11})T_{n1} = 0 \quad (343)$$

Utilizando-se a definição anteriormente mencionada, isto é, o módulo do autovetor  $[T_{11}]$  é unitário, tem-se a seguinte relação:

$$T_{11}^2 + T_{21}^2 + \cdots + T_{(n-1)1}^2 + T_{n1}^2 - 1 = 0 \quad (344)$$

O jacobiano das equações (341) a (343) é escrito como sendo (SWOKOWSKI, 1995):

$$[J] = \begin{bmatrix} S_{11} - \lambda_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} & -T_{11} \\ S_{21} & S_{22} - \lambda_{11} & \cdots & S_{2n} & -T_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \cdots & S_{nn} - \lambda_{11} & -T_{n1} \\ 2T_{11} & 2T_{21} & \cdots & 2T_{n1} & 0 \end{bmatrix} \quad (345)$$

Logo, das equações (341) a (344), definem-se as seguintes relações:

$$F_1 = (S_{11} - \lambda_{11})T_{11} + (S_{12})T_{21} + \cdots + (S_{1(n-1)})T_{(n-1)1} + (S_{1n})T_{n1} \quad (346)$$

$$F_2 = (S_{21})T_{11} + (S_{22} - \lambda_{11})T_{21} + \cdots + (S_{2(n-1)})T_{(n-1)1} + (S_{2n})T_{n1} \quad (347)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$F_n = (S_{n1})T_{11} + (S_{n2})T_{21} + \cdots + (S_{n(n-1)})T_{(n-1)1} + (S_{nn} - \lambda_{11})T_{n1} \quad (348)$$

$$F_{n+1} = T_{11}^2 + T_{21}^2 + \cdots + T_{(n-1)1}^2 + T_{n1}^2 - 1 \quad (349)$$

Sendo:

$$[F] = [F_1 \quad F_2 \quad \cdots \quad F_n \quad F_{n+1}]^T \quad (350)$$

Define-se o vetor  $[x]$  como sendo:

$$[x] = [T_{11} \quad T_{21} \quad \cdots \quad T_{n1} \quad \lambda_{11}]^T \quad (351)$$

A solução para o vetor  $[x]$  do sistema de equações, definido por meio das equações (346) a (349), é obtida por meio do método numérico iterativo de Newton-Raphson. Deste modo, a  $i$ -ésima iteração no cálculo do vetor  $[x]$  é escrita sob a forma:

$$[x]^i = [x]^{(i-1)} - \left( J \left( F[x]^{(i-1)} \right) \right)^{-1} \cdot \left( F[x]^{(i-1)} \right) \quad (352)$$

Na equação (352);  $[x]^i$  é o vetor  $[x]$  calculado na  $i$ -ésima iteração. Os termos  $\left(J\left(F[x]^{(i-1)}\right)\right)^{-1}$  e  $F[x]^{(i-1)}$  são a inversa do jacobiano do vetor  $[F]$ , e o vetor  $[F]$ ; calculados na  $(i-1)$ -ésima iteração, respectivamente. Geralmente, o método de Newton-Raphson converge muito rápido desde que o vetor inicial  $[x]^0$  esteja muito acerca da solução para o vetor  $[x]$ .

Admitindo-se um erro, o algoritmo de Newton-Raphson se repetirá até a convergência, isto é, o processo iterativo será encerrado quando o erro seja menor do que o admitido. Obtendo-se deste modo, o primeiro autovetor  $\lambda_{11}$  e a primeira coluna da matriz  $[T_I]$ . O procedimento anteriormente mencionado deve-se repetir para o cálculo do segundo autovetor  $\lambda_{22}$  e da segunda coluna da matriz  $[T_I]$ , e assim por diante.

Uma vez obtida a matriz  $[T_I]$ ; a matriz  $[T_V]$  é calculada para cada valor da faixa discretizada de frequências, mediante a seguinte relação (KUROKAWA, 2003):

$$[T_V] = [T_I]^{-T} = \left([T_I]^{-1}\right)^T \quad (353)$$

## APÊNDICE C: REPRESENTAÇÃO DE UMA LINHA DE TRANSMISSÃO POLIFÁSICA

### C.1 Introdução

Neste anexo será mostrado o processo de decomposição modal de uma linha de transmissão polifásica, isto é, uma linha de transmissão de  $n$  fases será representada, no domínio modal, por meio dos seus  $n$  modos de propagação, os quais comportam-se como  $n$  linhas monofásicas matematicamente desacopladas. Este fato simplifica os cálculos na análise de transitórios eletromagnéticos. Uma vez obtidas as linhas monofásicas modais, cada linha é representada por meio dos modelos a parâmetros distribuídos ou a parâmetros discretos. Logo, calculadas as tensões e correntes de cada linha monofásica modal, utilizam-se as matrizes de transformação modal inversa para obter as tensões e correntes da linha de transmissão polifásica, no domínio das fases.

Por fim, aplicarão-se os conceitos gerais anteriormente mencionados para o caso de uma linha bifásica ( $n = 2$ ).

### C.2 Equações diferenciais de uma linha polifásica

As equações diferenciais parciais de primeira ordem para uma linha monofásica (ARAÚJO, 2014) são generalizadas para uma linha de transmissão de  $n$  fases, obtendo-se as seguintes relações:

$$-\frac{\partial [I(x, \omega)]}{\partial x} = [Y(\omega)][V(x, \omega)] \quad (354)$$

$$-\frac{\partial [V(x, \omega)]}{\partial x} = [Z(\omega)][I(x, \omega)] \quad (355)$$

Nas equações (354) e (355);  $[Z(\omega)]$  e  $[Y(\omega)]$  são as matrizes de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais da linha, respectivamente, por unidade de comprimento; enquanto  $[V(x, \omega)]$  e  $[I(x, \omega)]$  são os vetores de tensões e de correntes, respectivamente, em uma posição  $x$  da linha. Todas estas matrizes são escritas como sendo:

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \cdots & Z_{1n}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \cdots & Z_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1}(\omega) & Z_{n2}(\omega) & \cdots & Z_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (356)$$

$$[Y(\omega)] = \begin{bmatrix} Y_{11}(\omega) & Y_{12}(\omega) & \cdots & Y_{1n}(\omega) \\ Y_{21}(\omega) & Y_{22}(\omega) & \cdots & Y_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1}(\omega) & Y_{n2}(\omega) & \cdots & Y_{nn}(\omega) \end{bmatrix} \quad (357)$$

$$[V(x, \omega)] = \begin{bmatrix} V_1(x, \omega) \\ V_2(x, \omega) \\ \vdots \\ V_n(x, \omega) \end{bmatrix} \quad (358)$$

$$[I(x, \omega)] = \begin{bmatrix} I_1(x, \omega) \\ I_2(x, \omega) \\ \vdots \\ I_n(x, \omega) \end{bmatrix} \quad (359)$$

Derivando as equações (354) e (355) com relação à  $x$ , obtêm-se:

$$-\frac{\partial^2 [I(x, \omega)]}{\partial x^2} = [Y(\omega)] \frac{\partial [V(x, \omega)]}{\partial x} \quad (360)$$

$$-\frac{\partial^2 [V(x, \omega)]}{\partial x^2} = [Z(\omega)] \frac{\partial [I(x, \omega)]}{\partial x} \quad (361)$$

Substituindo as equações (354) em (361), e (355) em (360), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 [I(x, \omega)]}{\partial x^2} = [Y(\omega)][Z(\omega)][I(x, \omega)] \quad (362)$$

$$\frac{\partial^2 [V(x, \omega)]}{\partial x^2} = [Z(\omega)][Y(\omega)][V(x, \omega)] \quad (363)$$

Logo, (362) e (363) são as equações diferenciais parciais de segunda ordem de uma linha de transmissão de  $n$  fases. A variável  $\omega$  corresponde à frequência angular.

As matrizes de impedâncias longitudinais e de admitâncias transversais da linha por unidade de comprimento, assim como os vetores de tensões e de correntes; são variáveis em relação à frequência. Por questões de simplificação, a variável  $\omega$  será omitida dessas grandezas no restante deste capítulo.

A matriz  $[Z]$  leva em consideração o efeito pelicular (ou efeito skin) e o efeito do solo (DOMMEL, 1986; MARTI et al., 1982)

### C.3 Decomposição modal de linhas de transmissão

Nas equações (362) e (363), os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  são distintos (as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  não são matrizes diagonais). Este fato dificulta a obtenção das soluções destas equações. No entanto, tais produtos podem ser transformados em matrizes diagonais a partir da utilização de uma transformada de similaridade (CHEN, 1984). Nesse caso, os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  resultam em matrizes diagonais, cujos elementos são os autovalores dos mesmos.

Entretanto,  $[\lambda_v]$  e  $[\lambda_l]$ , que são as matrizes com os autovalores de  $[Z][Y]$  e de  $[Y][Z]$ , respectivamente, são calculadas por meio das seguintes relações (WEDEPOHL et al., 1996):

$$[\lambda_v] = [T_v]^{-1} [Z][Y][T_v] \quad (364)$$

$$[\lambda_l] = [T_l]^{-1} [Y][Z][T_l] \quad (365)$$

Nas equações (364) e (365),  $[T_v]$  e  $[T_l]$  são as matrizes de transformação, cujas colunas das mesmas são os autovetores dos produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ ,

respectivamente. As matrizes  $[T_V]$ ,  $[T_I]$ ,  $[\lambda_V]$  e  $[\lambda_I]$  são complexas e variáveis em relação à frequência.

Os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ , de maneira genérica são distintos. Portanto, as matrizes  $[T_V]$  e  $[T_I]$  são diferentes.

No entanto, mesmo sendo  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  matrizes distintas, os seus determinantes e conseqüentemente as matrizes  $[\lambda_V]$  e  $[\lambda_I]$ , são iguais. Denominando de  $[\lambda_m]$  à matriz com os autovalores dos produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$ , então:

$$[\lambda_m] = [\lambda_V] = [\lambda_I] \quad (366)$$

Substituindo a equação (366) nas equações (364) e (365), e fazendo algumas manipulações matemáticas, obtêm-se:

$$[T_V][\lambda_m][T_V]^{-1} = [Z][Y] \quad (367)$$

$$[T_I][\lambda_m][T_I]^{-1} = [Y][Z] \quad (368)$$

Substituindo as equações (368) e (367) nas equações (362) e (363), respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 [I]}{\partial x^2} = [T_I][\lambda_m][T_I]^{-1} [I] \quad (369)$$

$$\frac{\partial^2 [V]}{\partial x^2} = [T_V][\lambda_m][T_V]^{-1} [V] \quad (370)$$

Multiplicando as equações (369) e (370) por  $[T_I]^{-1}$  e  $[T_V]^{-1}$ , respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 [T_I]^{-1} [I]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [T_I]^{-1} [I] \quad (371)$$

$$\frac{\partial^2 [T_V]^{-1} [V]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [T_V]^{-1} [V] \quad (372)$$

Das equações (371) e (372), definem-se os vetores com as correntes modais e com as tensões modais, como sendo:

$$[I_m] = [T_I]^{-1} [I] \quad (373)$$

$$[V_m] = [T_V]^{-1} [V] \quad (374)$$

Substituindo as equações (373) e (374) nas equações (371) e (372), respectivamente, obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 [I_m]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [I_m] \quad (375)$$

$$\frac{\partial^2 [V_m]}{\partial x^2} = [\lambda_m] [V_m] \quad (376)$$

Logo, (375) e (376) são as equações diferenciais modais da linha. Devido ao fato que  $[\lambda_m]$  é uma matriz diagonal, pode-se afirmar que a linha de transmissão foi decomposta nos seus  $n$  modos de propagação.

Entretanto, as equações (373) e (374) podem ser reescritas como sendo:

$$[I] = [T_I] [I_m] \quad (377)$$

$$[V] = [T_V] [V_m] \quad (378)$$

Substituindo as equações (377) e (378) nas equações (354) e (355), obtêm-se:

$$-\frac{\partial [T_I][I_m]}{\partial x} = [Y][T_V][V_m] \quad (379)$$

$$-\frac{\partial [T_V][V_m]}{\partial x} = [Z][T_I][I_m] \quad (380)$$

Multiplicando as equações (379) e (380) por  $[T_I]^{-1}$  e  $[T_V]^{-1}$ , respectivamente, obtêm-se:

$$-\frac{\partial [I_m]}{\partial x} = [T_I]^{-1}[Y][T_V][V_m] \quad (381)$$

$$-\frac{\partial [V_m]}{\partial x} = [T_V]^{-1}[Z][T_I][I_m] \quad (382)$$

As equações (381) e (382) podem ser descritas como sendo:

$$-\frac{\partial [I_m]}{\partial x} = [Y_m][V_m] \quad (383)$$

$$-\frac{\partial [V_m]}{\partial x} = [Z_m][I_m] \quad (384)$$

Onde:

$[Y_m] = [T_I]^{-1}[Y][T_V]$  é a matriz de admitâncias transversais modais

$[Z_m] = [T_V]^{-1}[Z][T_I]$  é a matriz de impedâncias longitudinais modais

Relacionando  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$ , pode-se concluir que as mesmas são matrizes diagonais, devido às seguintes relações (KUROKAWA, 2003):

$$[Z_m][Y_m] = [\lambda_m] \quad (385)$$

$$[Y_m][Z_m] = [\lambda_m] \quad (386)$$

Substituindo a equação (385) nas equações (375) e (376), obtêm-se as seguintes relações:

$$\frac{\partial^2 [I_m]}{\partial x^2} = [Z_m][Y_m][I_m] \quad (387)$$

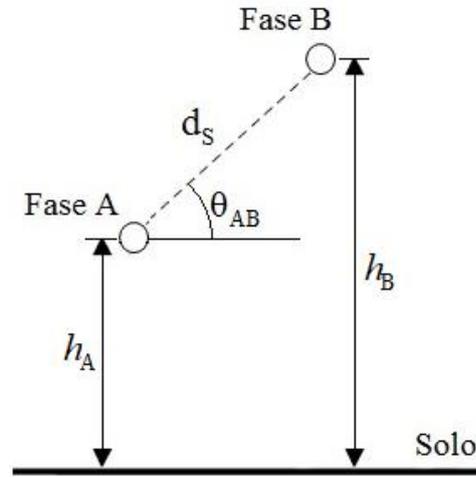
$$\frac{\partial^2 [V_m]}{\partial x^2} = [Z_m][Y_m][V_m] \quad (388)$$

Logo, (387) e (388) são as equações diferenciais modais da linha. Devido ao fato que  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são matrizes diagonais, as equações diferenciais descrevem  $n$  linhas monofásicas matematicamente desacopladas cujas possíveis técnicas de representação foram mostradas no capítulo 3.

#### **C.4 Linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, no domínio modal**

Considere uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, isto é, as fases A e B da linha encontram-se a uma certa altura  $h_A$  e  $h_B$  sobre o solo, respectivamente. Onde cada fase é constituída de um único condutor (do mesmo tipo), conforme visualiza-se na Figura 43.

Figura 43 – Linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, no domínio das fases.



Fonte: Elaboração própria do autor.

Na Figura 43, o acoplamento entre as fases da linha bifásica está representado pelos componentes mútuos das suas matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$ .

As matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  da linha mostrada na Figura 43, são descritas como sendo:

$$[Z] = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \quad (389)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} D & E \\ E & F \end{bmatrix} \quad (390)$$

Relacionando as equações (389) e (390), obtêm-se:

$$[Z][Y] = \begin{bmatrix} AD + BE & AE + BF \\ BD + CE & BE + CF \end{bmatrix} \quad (391)$$

$$[Y][Z] = \begin{bmatrix} AD + BE & BD + CE \\ AE + BF & BE + CF \end{bmatrix} \quad (392)$$

Das equações (391) e (392); pode-se concluir que para uma linha bifásica que não possui plano de simetria vertical, os produtos matriciais  $[Z][Y]$  e  $[Y][Z]$  são diferentes. Eles são denominados  $[S_V]$  e  $[S_I]$ , respectivamente.

Considerando o anteriormente mencionado, a matriz  $[S_I]$  é descrita como sendo:

$$[S_I] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (393)$$

Onde:

$$S_{11} = AD+BE \quad (394)$$

$$S_{12} = BD+CE \quad (395)$$

$$S_{21} = AE+BF \quad (396)$$

$$S_{22} = BE+CF \quad (397)$$

Entretanto, do anexo C.3 sabe-se que as matrizes de transformação modal ( $[T_I]$  e  $[T_V]$ ) de uma linha de transmissão bifásica que não possui plano de simetria vertical, possuem elementos complexos que são variáveis em relação à frequência.

A matriz  $[T_I]$  é escrita como sendo:

$$[T_I] = \begin{bmatrix} T_{I11} & T_{I12} \\ T_{I21} & T_{I22} \end{bmatrix} \quad (398)$$

Onde:

$$[T_{I1}] = \begin{bmatrix} T_{I11} \\ T_{I21} \end{bmatrix} \text{ é o autovetor associado a } \lambda_1$$

$$[T_{I2}] = \begin{bmatrix} T_{I12} \\ T_{I22} \end{bmatrix} \text{ é o autovetor associado a } \lambda_2$$

Da equação (365), têm-se as seguintes relações:

$$[Y][Z][T_{I1}] = \lambda_1 [T_{I1}] \quad (399)$$

$$[Y][Z][T_{I2}] = \lambda_2 [T_{I2}] \quad (400)$$

Substituindo a equação (393) nas equações (399) e (400), e fazendo algumas manipulações matemáticas, obtêm-se:

$$([S_I] - \lambda_1 [I_d])[T_{I1}] = [0] \quad (401)$$

$$([S_I] - \lambda_2 [I_d])[T_{I2}] = [0] \quad (402)$$

Desenvolvendo a equação (401), têm-se as seguintes relações:

$$(S_{11} - \lambda_1)T_{11} + (S_{12})T_{21} = 0 \quad (403)$$

$$(S_{21})T_{11} + (S_{22} - \lambda_1)T_{21} = 0 \quad (404)$$

Considerando que o módulo do autovetor  $[T_{I1}]$  é unitário, tem-se a seguinte relação:

$$T_{11}^2 + T_{21}^2 = 1 \quad (405)$$

Logo, para cada valor da faixa discretizada de frequências, a solução das equações (403) a (405) é obtida por meio do método numérico iterativo de Newton-Raphson (mostrado no anexo B.1), isto é, o autovalor  $\lambda_1$  e o autovetor  $[T_{I1}]$  são conhecidos.

Entretanto, desenvolvendo a equação (402), têm-se as seguintes relações:

$$(S_{11} - \lambda_2)T_{12} + (S_{12})T_{22} = 0 \quad (406)$$

$$(S_{21})T_{12} + (S_{22} - \lambda_2)T_{22} = 0 \quad (407)$$

Considerando que o módulo do autovetor  $[T_{12}]$  é unitário, tem-se a seguinte relação:

$$T_{12}^2 + T_{22}^2 = 1 \quad (408)$$

Logo, para cada valor da faixa discretizada de frequências, a solução das equações (406) a (408) é obtida por meio do método numérico iterativo de Newton-Raphson (mostrado no anexo B.1), isto é, o autovalor  $\lambda_2$  e o autovetor  $[T_{12}]$  são conhecidos.

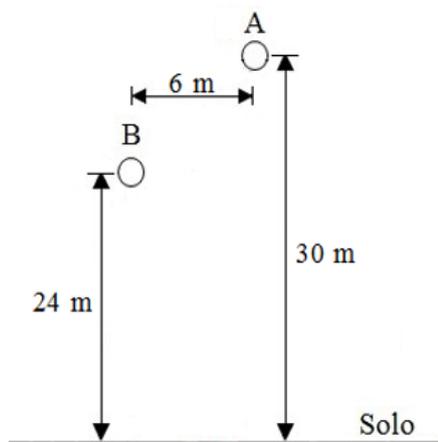
Uma vez obtida  $[T_I]$ ;  $[T_V]$  é calculada para cada valor da faixa discretizada de frequências, mediante a seguinte relação (KUROKAWA, 2003):

$$[T_V] = [T_I]^{-T} = \left([T_I]^{-1}\right)^T \quad (409)$$

Por fim, do anexo C.3 sabe-se que as matrizes  $[Z_m]$  e  $[Y_m]$  são calculadas para cada valor da faixa discretizada de frequências, mediante as seguintes equações:

$$[Z_m] = [T_V]^{-1} [Z] [T_I] \quad (410)$$

$$[Y_m] = [T_I]^{-1} [Y] [T_V] \quad (411)$$

**Exemplo:**

No exemplo, considera-se que cada uma das fases é constituída de um único condutor (tipo Grosbeak) de raio igual a 0.012573 m.

O cálculo dos parâmetros da linha por unidade de comprimento foi feito para uma frequência igual a 10 kHz e para uma resistividade do solo igual a 1000  $\Omega$ .m. Esse cálculo se fez tomando em consideração o efeito pelicular (ou efeito skin) e o efeito do solo.

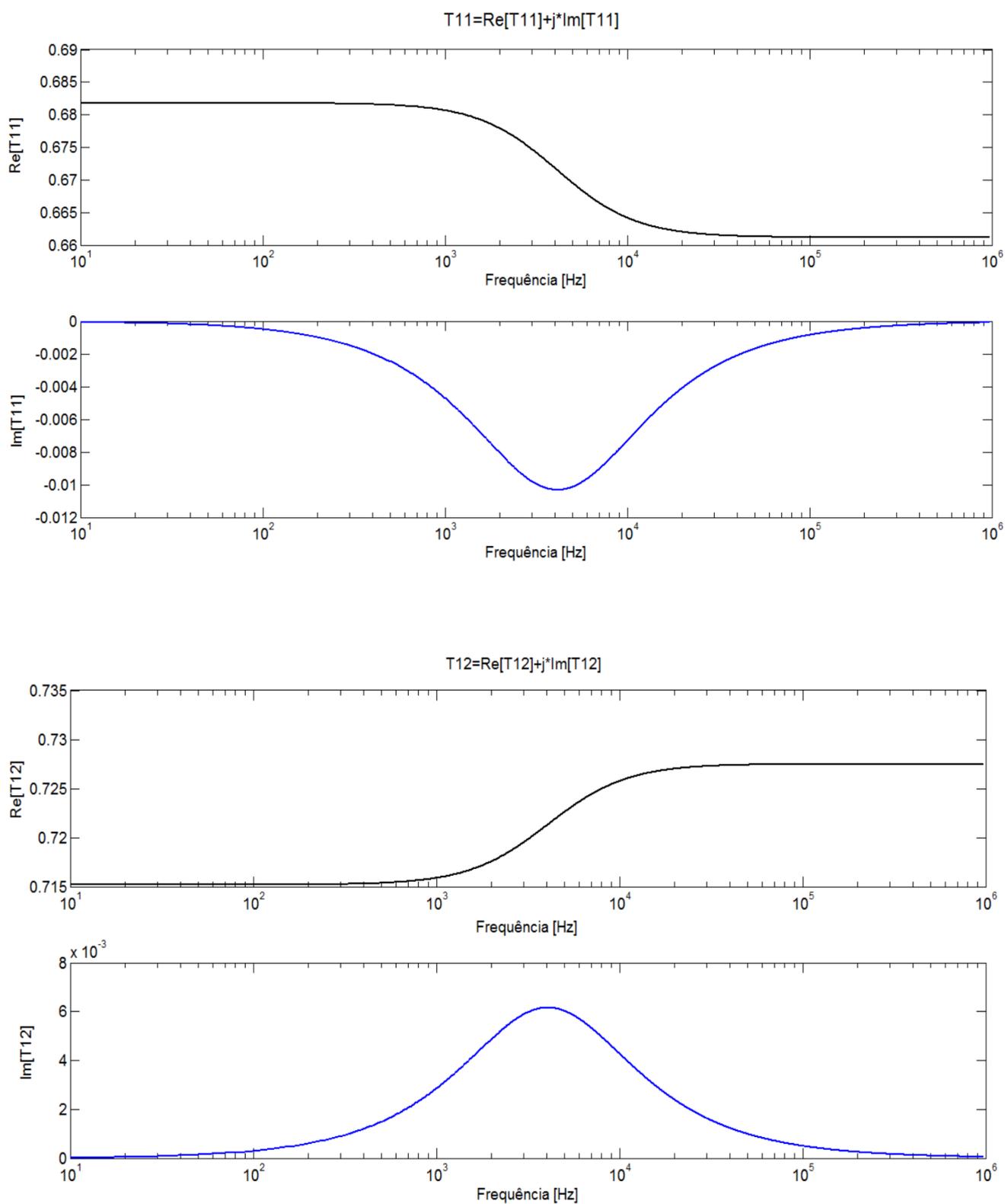
Portanto, as matrizes que contêm os parâmetros da linha bifásica mostrada na figura anterior, por unidade de comprimento, estão dadas por:

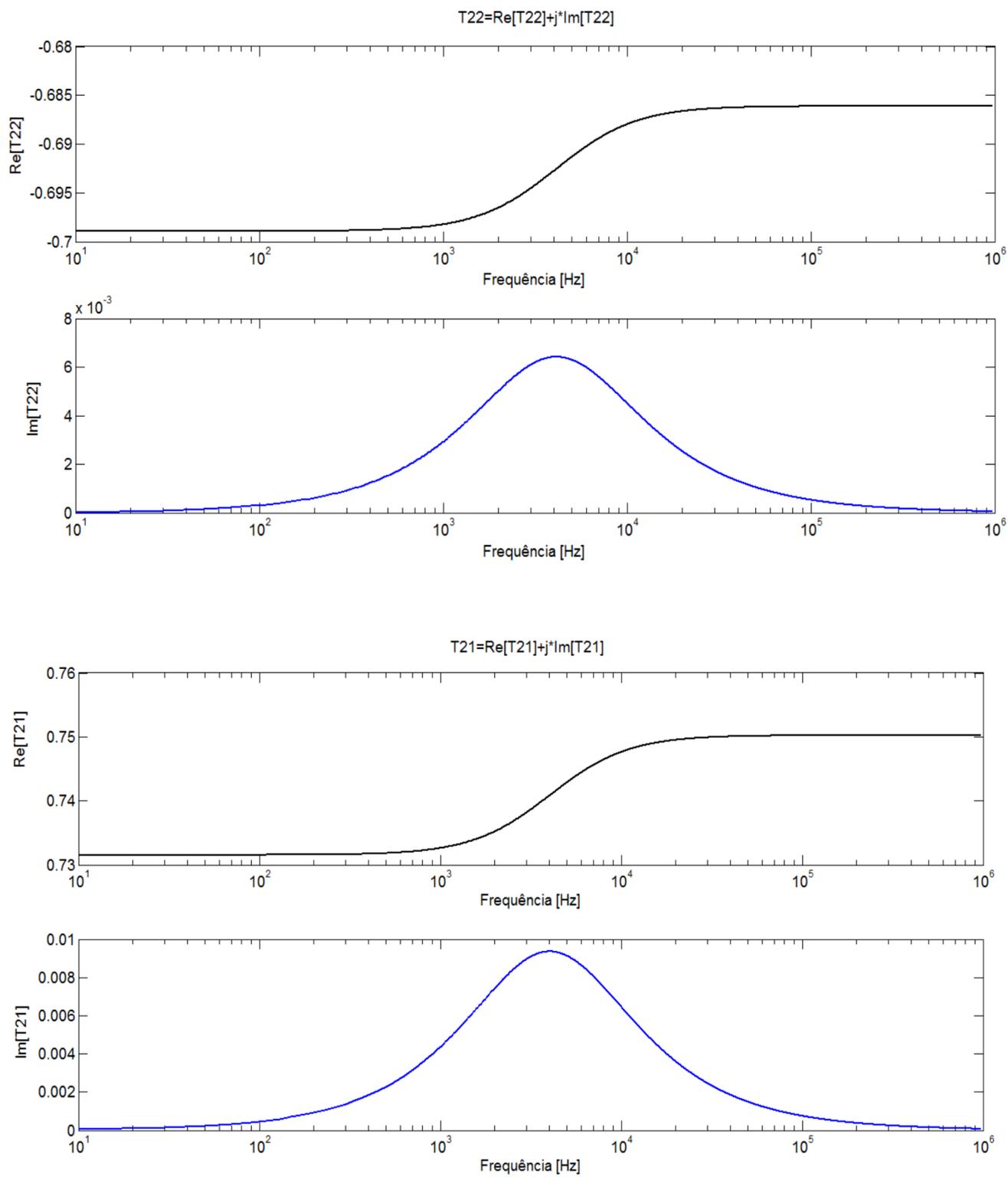
$$[R'] = \begin{bmatrix} 8.088 & 7.964 \\ 7.964 & 8.437 \end{bmatrix} (\Omega/\text{km}) ; [L'] = \begin{bmatrix} 1.995 & 0.6806 \\ 0.6806 & 1.986 \end{bmatrix} (\text{mH}/\text{km}) ; [C'] = \begin{bmatrix} 6.9087 & -1.5553 \\ -1.5553 & 7.0956 \end{bmatrix} (\text{nF}/\text{km})$$

Uma vez obtidas as matrizes  $[Z]$  e  $[Y]$  da linha mostrada na figura anterior, calcula-se a matriz de transformação modal  $[T_I]$  aplicando o procedimento anteriormente descrito.

Na Figura 44, visualizam-se os gráficos da resposta em frequência dos elementos da matriz de transformação modal  $[T_I]$ .

Figura 44 – Resposta em frequência dos elementos da matriz de transformação modal  $[T_I]$ .





Fonte: Elaboração própria do autor.