

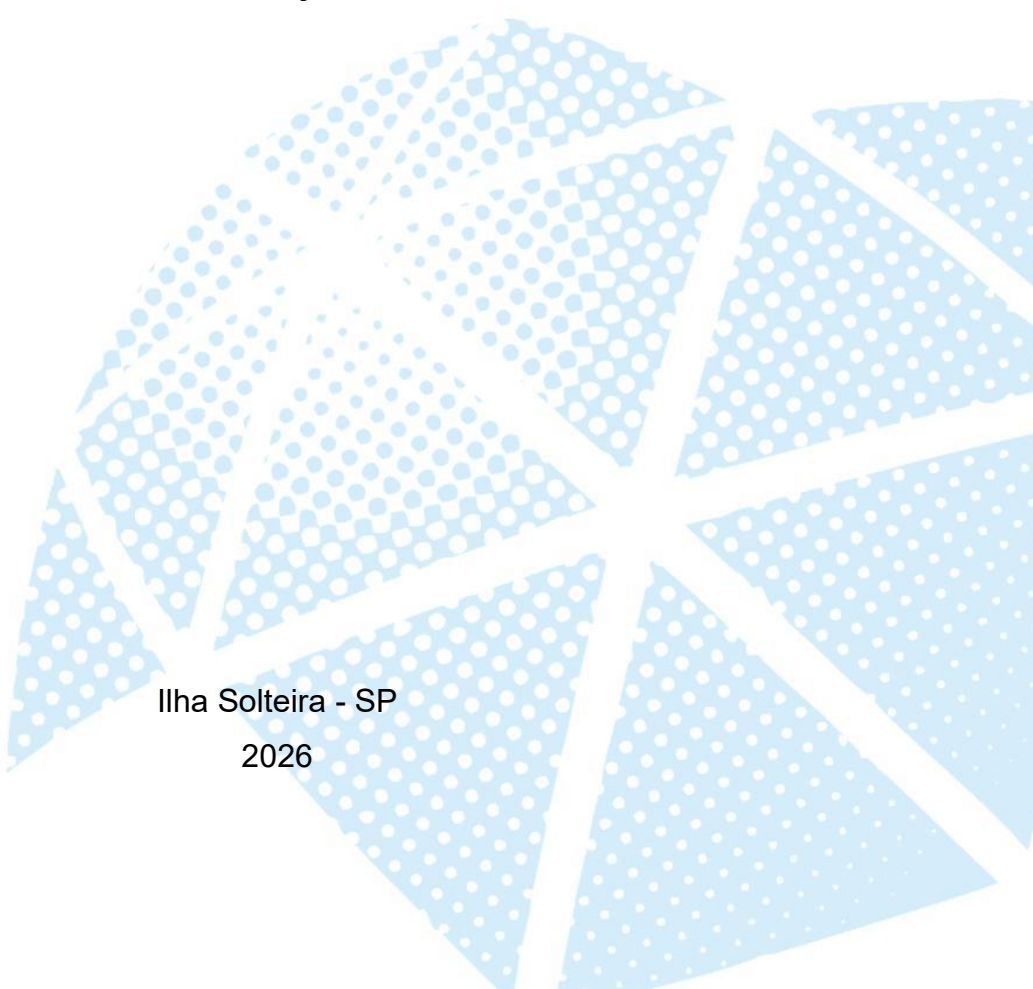
**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

VITOR KAMIKIHARA DE SOUZA

**Projeto e implementação de controladores para sistemas não lineares
descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov
fuzzy**

Ilha Solteira - SP

2026



VITOR KAMIKIHARA DE SOUZA

**Projeto e implementação de controladores para sistemas não lineares
descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov
fuzzy:**

Trabalho de Graduação apresentado à
Universidade Estadual Paulista “Júlio de
Mesquita Filho” Campus de Ilha Solteira,
como parte dos requisitos para obtenção
do grau de Engenheiro Eletricista.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcelo Carvalho
Minhoto Teixeira

Ilha Solteira - SP

2026

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S729p Souza, Vitor Kamikihara de.
Projeto e implementação de controladores para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov fuzzy / Vitor Kamikihara de Souza. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2026
42 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira, 2026

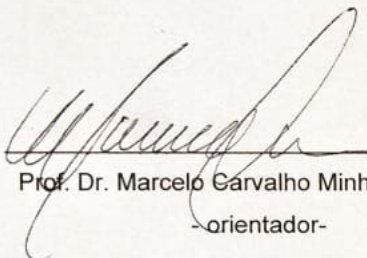
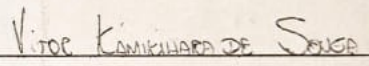
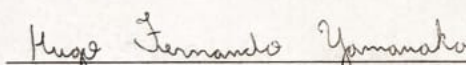
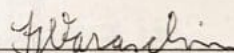
Orientador: Marcelo Carvalho MinhotoTeixeira

Inclui bibliografia

1. Sistemas não lineares. 2. Desigualdade matriciais lineares (LMIs). 3. Helicóptero de Bancada 3 DOF. 4. Lógica fuzzy Takagi-Sugeno. 5. Funções de Lyapunov.

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos vinte e cinco dias do mês de maio do ano de dois mil e vinte e seis, o discente **Vitor Kamikihara De Souza**, matriculado sob o nº 182054314, tendo como banca examinadora o seu orientador, o Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, o Doutorando Hugo Fernando Yamanaka e o Mestrando Filipe Honório Varaschim, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado **"Projeto e implementação de controladores chaveados para sistemas não lineares descritos por modelos fuzzy Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov fuzzy"**, obtendo a nota 10,0 (DEZ INTEIROS) e conceito APROVADO


Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
-orientador-
Vitor Kamikihara De Souza
- discente-
Doutorando Hugo Fernando Yamanaka
- Membro da Banca -
Mestrando Filipe Honório Varaschim
- Membro da Banca -

Dedico este trabalho àqueles que sempre acreditam no poder do esforço, da dedicação e do conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai, Roberto Carlos de Souza, pelo amor e compreensão, por estar ao meu lado nos piores e melhores momentos da minha vida e por todo o apoio.

À minha mãe, Silvia Mayumi Kamikihara, que, apesar de ter deixado esse mundo durante essa fase da minha jornada, ainda é uma grande inspiração em minha vida.

Ao meu amigo de graduação, Thiago Lombarde Vitoriano, pela paciência e companhia nos estudos.

A todos os amigos que conheci durante a faculdade e fora dela, pela companhia, memórias e parceria.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela confiança e apoio durante a elaboração desse trabalho.

Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para minha trajetória acadêmica e pessoal até aqui.

“A educação é a arma mais poderosa que você pode usar para mudar o mundo”.

Nelson Mandela

RESUMO

A implementação da lógica fuzzy na área de controladores foi um dos grandes avanços nos últimos tempos para esta área de controle. Isso é devido à lógica fuzzy, quando aplicada em controladores, possibilitar a descrição de sistemas não lineares, em uma soma de sistemas lineares multiplicados por um fator. Uma das abordagens mais estudadas atualmente é a descrita por Takagi-Sugeno (TS) baseada em funções de Lyapunov, uma vez que, ao descrever o sistema através dessas características, podemos utilizar LMIs (Linear Matrix Inequalities, ou Desigualdades Matriciais Lineares) para encontrar soluções ótimas de um problema. Dessa forma, este presente trabalho, buscou encontrar um controlador, baseado na lógica fuzzy TS baseado em funções de Lyapunov que seja ótimo o suficiente para que o mesmo consiga realizar o controle de um helicóptero de bancada 3-DOF da empresa Quanser durante um trajeto simulado, utilizando, para isso, o software Matlab, juntamente com a ferramenta de simulação Simulink para verificar os resultados obtidos. Assim, projetou-se um controlador de ganho único, baseando-se na teoria apresentada em (Lazarini, 2021) de forma que o controlador, ao ser implementado no sistema do helicóptero de bancada, possibilitou, em simulação, seguir o percurso de referência de forma satisfatória.

Palavras-chave: sistemas não lineares, desigualdades matriciais lineares (LMIs), helicóptero de bancada 3 DOF, lógica fuzzy Takagi-Sugeno, funções de Lyapunov.

ABSTRACT

The implementation of fuzzy logic in the field of controllers has been one of the major recent advances in this area. This is because fuzzy logic, when applied to controllers, allows the description of nonlinear systems as a sum of linear systems multiplied by a weighting factor. One of the most studied approaches today is the Takagi-Sugeno (TS) model based on Lyapunov functions, since by describing the system through these characteristics, it becomes possible to use Linear Matrix Inequalities (LMIs) to find optimal solutions to the problem. Thus, this work aimed to design a controller based on the TS fuzzy logic approach using Lyapunov functions, which is optimal enough to control a Quanser 3-DOF bench-top helicopter during a simulated trajectory. For this purpose, Matlab and the Simulink simulation tool were used to verify the obtained results. A single-gain controller was designed based on the theory presented in (Lazarini, 2021), so that when implemented in the bench-top helicopter system, it was able to follow the reference trajectory satisfactorily in simulation.

Keywords: nonlinear system, linear matrix inequalities (LMIs), 3-DOF bench-top helicopter, Takagi-Sugeno fuzzy logic, Lyapunov functions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Aproximação de um sistema não-linear através da combinação convexa de dois sistemas lineares utilizando a lógica fuzzy TS	16
Figura 2 – (a) Estado de Equilíbrio Estável; (b) Estado de Equilíbrio Estável Assintótico; (c) Estado de Equilíbrio Instável.....	20
Figura 3 – Helicóptero de bancada, 3-DOF helicopter.	25
Figura 4 – Simulação da elevação do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido.	32
Figura 5 – Simulação do deslocamento do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido.....	32
Figura 6 – Sinal de controle para os motores frontal e traseiro utilizando o controlador obtido	33
Figura 7 – Simulação da elevação do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido para massa variante no tempo.	34
Figura 8 – Simulação da elevação do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido para massa variante no tempo	35
Figura 9 – Sinal de controle para os motores frontal e traseiro utilizando o controlador obtido para massa variante no tempo.	35

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros e valores do sistema do helicóptero de bancada 3-DOF Helicopter da Quanser	27
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LPC	Laboratório de Pesquisa em Controle
LMI	Linear Matrix Inequalities
TS	Takagi-Sugeno
3-DOF	Three Degrees of Freedom

LISTA DE SÍMBOLOS

$\dot{x}$	Derivada de x
$\in$	Pertence
$\mathbb{K}_r$	Conjunto de números inteiros com elementos $\{1, 2, 3, \dots, r\}$
$\mathfrak{R}$	Conjunto dos números reais
$\forall$	Para todo
A^T	Matriz A transposta
$\mathfrak{R}^{m \times n}$	Conjunto das matrizes com elementos reais de dimensão $m \times n$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	14
2.1 SISTEMAS FUZZY TS	14
2.2 ESPAÇOS DE ESTADOS	17
2.3 FUNÇÕES DE LYAPUNOV	18
2.3.1 FUNÇÕES DE LYAPUNOV FUZZY	20
2.4 DESIGUALDADE DE MATRIZES LINEARES (LMIS).....	21
2.5 O CONTROLADOR DE GANHO ÚNICO K.....	22
3 MATERIAL E MÉTODO	25
4 RESULTADOS E DISCUSSÃO	29
4.1 PROJETANDO O CONTROLADOR	29
4.2 IMPLEMENTANDO O CONTROLADOR	31
4.3 IMPLEMENTANDO UM CONTROLADOR PARA MASSA VARIANTE NO TEMPO	33
5 CONCLUSÃO	37
5.1 PERSPECTIVAS FUTURAS	37
 REFERENCIAS.....	 38

1 INTRODUÇÃO

Uma das grandes responsáveis pelos avanços tecnológicos nas áreas de processamento de dados e análise de sistemas é a lógica fuzzy (Zadeh, 1965), sendo de extrema importância no estudo de sistemas não lineares. Isso é devido à possibilidade de descrever sistemas não-lineares como uma combinação convexa de sistemas lineares ao utilizar a chamada modelagem fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (Takagi; Sugeno, 1985), por exemplo, na seguinte forma: $\dot{x}(t) = A(h(x(t)))x(t) + B(h(x(t)))u(t)$, sendo que $A(h(x(t))) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))A_i$ e $B(h(x(t))) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t))B_i$, onde, $x(t)$ é o vetor de estado da planta, $u(t)$ o sinal de entrada da planta, (A_i, B_i) são matrizes constantes que representam o modelo local i e $h_i(x(t))$ é o peso relacionado ao modelo local i sendo $h_i(x(t)) \geq 0, i = 1, 2, \dots, r$ e $\sum_{i=1}^r h_i(x(t)) = 1$.

Uma das formas mais utilizadas para a realização de projetos de sistemas de controle é descrever as condições do sistema para a obtenção dos ganhos do controlador através da utilização de LMIs (Linear Matrix Inequalities, ou Desigualdades Matriciais Lineares) (Boyd *et. al*, 1994), pois, através delas, é possível encontrar soluções para problemas de otimização convexos de forma eficiente, computacionalmente. Dessa forma, é possível descrever várias condições e índices de desempenho para o sistema controlado como a estabilidade, a rapidez do transitório, a minimização da influência de um sinal externo na saída da planta, considerar a existência de saturação na entrada de controle e a presença de parâmetros incertos na planta.

Quando se utiliza LMIs em projetos de controladores descritos por modelos fuzzy TS, normalmente os projetos são baseados em funções de Lyapunov (Lyapunov, 1992). Pesquisas nesta área, utilizam de condições de projeto menos conservativas, para atender à crescente exigência de vários índices de desempenho dos sistemas controlados.

Quando se tem um projeto de controladores de sistemas fuzzy TS utilizando funções de Lyapunov fuzzy, normalmente são conhecidos os limitantes das derivadas com respeito ao tempo de $h_i(x(t))$, isto é, $-\phi_{i1} \leq \frac{dh_i(x(t))}{dt} \leq \phi_{i2}$, em que ϕ_{i1} e ϕ_{i2} são constantes positivas conhecidas (Mozelli, Palhares, 2009; Mozelli, Adriano, 2019).

Além disso, quando se calcula a derivada em relação ao tempo de uma função Lyapunov fuzzy, temos o termo $x(t)^T \left[\frac{dh_1(x(t))}{dt} P_1 + \frac{dh_2(x(t))}{dt} P_2 + \dots + \frac{dh_r(x(t))}{dt} P_r \right] x(t)$, que normalmente é tratado ao utilizar majorantes conservadores que são baseados nos limitantes de $\frac{dh_i(x(t))}{dt}$, $i = 1, 2, \dots, r$. Porém, uma outra solução interessante para o problema, é a utilização de LMIs para encontrar majorantes menos conservadores para o projeto do ganho dos controladores (Guedes, 2013). Tomando como base o que é apresentado em (Lazarini, 2021), tem-se uma nova abordagem para o problema, oferecendo majorantes ótimos para o termo descrito anteriormente, de forma que os mesmos serão sempre menores ou iguais ao máximo e o máximo sempre ocorrerá para pelo menos um desses majorantes.

Em (Lazarini, 2021) tem-se que foi adicionada à configuração proposta em um procedimento para projetar controladores não chaveados baseados na lei de controle do tipo $u(t) = -K(h(t))x(t)$ em que $K(h(t)) = h_1(x(t))K_1 + h_2(x(t))K_2 + \dots + h_r(x(t))K_r$, sendo que $K_1, K_2, \dots, K_r$ são os ganhos constantes do controlador.

Dessa forma, o objetivo deste trabalho de graduação é estudar, projetar, simular e implementar controladores para sistemas não-lineares descritos por modelos fuzzy TS com projetos baseados em funções de Lyapunov fuzzy utilizando o controlador não chaveado apresentado em (Lazarini, 2021).

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 SISTEMAS FUZZY TS

Os sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS) foram introduzidos em (Takagi; Sugeno, 1985) como uma representação de um sistema não-linear através de uma combinação convexa de um certo número de modelos locais lineares e invariantes no tempo. Quanto maior a quantidade dos modelos locais lineares utilizados para descrever o sistema não-linear, maior a precisão com o modelo real, porém, ao mesmo tempo, maior a capacidade computacional necessária. Dessa forma, é necessário realizar uma análise do custo-benefício da utilização de vários modelos locais, sempre fazendo o equilíbrio da precisão necessária para o projeto.

A modelagem fuzzy Takagi-Sugeno é um método simples, sendo a sua principal característica a utilização de regras *se-então* onde cada regra fuzzy é descrita como um modelo linear (Esteves, 2011).

Tem-se o seguinte modelo:

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad (2.1)$$

sendo $i \in \mathbb{K}_r = \{1, 2, 3, \dots, r\}$ (onde r é o número de modelos lineares utilizados), $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entrada e $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado. Com isso, monta-se o seguinte conjunto de regras *se-então*:

$$\begin{cases} \text{Se } z_1(t) \text{ é } M_1^i \text{ e } \dots \text{ e } z_p(t) \text{ é } M_p^i, \\ \text{Então } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t). \end{cases} \quad (2.2)$$

Tem-se que M_j^i com $j = 1, 2, \dots, p$, é o conjunto fuzzy j da regra i e $z_1(t)$, $z_2(t)$, $z_p(t)$ são as variáveis premissas. Declarando $\mu_j^i(z_j(t))$ como sendo o “peso” que o conjunto M_j^i associado à $z_j(t)$ possui, temos:

$$w^i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu_j^i(z_j(t)), z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_p(t)]^T. \quad (2.3)$$

Como $\mu_j^i(z_j(t)) \geq 0$, tem-se, para $i \in \mathbb{K}_r$,

$$w^i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r w^i(z(t)) > 0, i \in \mathbb{K}_r \quad (2.4)$$

$\mathbb{K}_r$ sendo o conjunto de números inteiros positivos $\{1, \dots, r\}$.

Uma das escolhas mais convenientes para a obtenção do modelo fuzzy TS para sistemas não lineares é a utilização de $z(t) = x(t)$, onde $x(t)$, conforme descrito anteriormente é o vetor de estado do sistema não linear.

Desta forma, conforme descrito em (Taniguchi, 2001), utilizando o método do centro de gravidade, o modelo matemático final do sistema fuzzy é dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}, \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))((A_i x(t) + B_i u(t))), \\ &= (\sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i)x(t) + (\sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i)u(t) \\ &= A(h)x(t) + B(h)u(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

sendo que,

$$h_i(z(t)) = \frac{w^i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w^i(z(t))}, i \in \mathbb{K}_r, h = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_r]^T, \quad (2.6)$$

onde $h_i(z(t))$ é o peso normalizado para cada regra, também conhecido como a função de pertinência do modelo local i , $i \in \mathbb{K}_r$.

Como para $i \in \mathbb{K}_r$, tem-se a combinação linear convexa de todos os modelos, a somatória de todos as funções de pertinência deve ser igual à 1, ou seja:

$$h_i(z(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, i \in \mathbb{K}_r \quad (2.7)$$

Assim, normalizando os pesos, tem-se as seguintes propriedades:

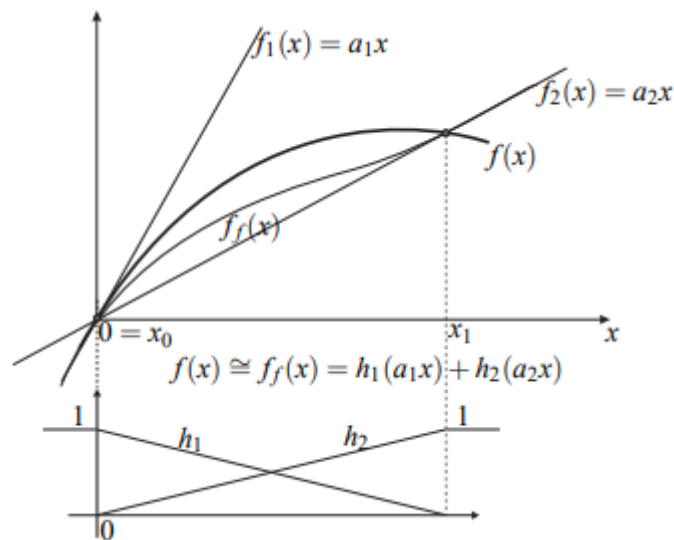
$$h_j(x(t)) \geq 0, \sum_{j=1}^r h_j(x(t)) = 1, \sum_{j=1}^r \dot{h}_j(x(t)) = 0, t \geq 0 \text{ e } j \in \mathbb{K}_r \quad (2.8)$$

Um ponto que sempre deve ser considerado sobre as derivadas temporais das funções de pertinência é a sua limitação intervalar.

Exemplificando:

Um ótimo exemplo da modelagem fuzzy TS pode ser encontrado em (Machado, 2003), como mostra a Figura 1 abaixo.

Figura 1 – Aproximação de um sistema não-linear através da combinação convexa de dois sistemas lineares utilizando a lógica fuzzy TS.



Fonte: (Machado, 2003).

Consideremos a função $f(x)$ mostrado na Figura 1, para o ponto $x = x_0 = 0$, tem-se que a função pode ser aproximada à reta tangente $f_1(x) = a_1x$, que é a reta tangente à curva no ponto $x = 0$. Já para o ponto $x = x_1$, a melhor aproximação linear é a reta $f_2(x) = a_2x$. Adotando-se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ como modelos locais e as funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$ (observe que, conforme definido em 2.8, $h_1(x)$ e $h_2(x)$ são positivas ou nulas e que $h_1(x) + h_2(x) = 1$) tem-se que um modelo simples fuzzy TS para $f(x)$ seria $f_f(x) = h_1(a_1x) + h_2(a_2x)$ (Machado, 2003)

Com isso, observa-se que a função $f_f(x)$ proporciona uma aproximação da função $f(x)$ muito melhor do que as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ separadas. Dessa forma, verifica-se o potencial da utilização de modelos fuzzy TS no tratamento de funções e sistemas não lineares (Machado, 2003).

Para melhores aproximações da função $f_f(x)$ deve-se escolher as funções $h_1(x)$ e $h_2(x)$ de forma a conseguir uma aproximação mais exata $f(x)$.

2.2 ESPAÇOS DE ESTADOS

A descrição de um sistema utilizando o conceito de espaço de estados tem sido amplamente utilizado no controle de sistemas pois permite descrever o comportamento dinâmico de tais sistemas devido à facilidade para tratar várias configurações de dados ausentes, além de permitir uma grande variedade de modelos que podem ser gerados.

Segundo Ogata e Severo (1998), o estado de um sistema dinâmico corresponde ao menor conjunto de variáveis de estado que, uma vez conhecidas no instante $t = t_0$, juntamente com os valores do sinal de entrada para $t \geq t_0$, permitem determinar o comportamento do sistema em qualquer instante $t \geq t_0$.

Se o comportamento de um sistema requer as variáveis de estado $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ para ser descrito, então essas n variáveis podem ser organizadas como componentes de um vetor x , denominado vetor de estado. O espaço de dimensão n cujos eixos coordenados correspondem a $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ recebe o nome de espaço de estados, no qual qualquer estado do sistema pode ser representado por um ponto.

Essas variáveis não precisam, necessariamente, ser grandezas físicas mensuráveis ou diretamente observáveis. Essa flexibilidade na escolha é uma das vantagens do método, já que um mesmo sistema pode ser descrito no espaço de estados por diferentes combinações de variáveis. Contudo, em aplicações práticas de controle, é mais conveniente selecionar variáveis que possam ser observadas e medidas com facilidade, precisão e acurácia, favorecendo o desenvolvimento de uma lei de controle ótima.

Para sistemas dinâmicos descritos por equações diferenciais ordinárias, pode-se utilizar a notação matricial-vetorial para representar uma equação diferencial de ordem n através de uma equação diferencial matricial-vetorial de primeira ordem. Quando os elementos desse vetor correspondem a um conjunto de variáveis de estado, essa equação diferencial matricial-vetorial é denominada equação de estado. Assim, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} u(t), \quad (2.9)$$

$$y(t) = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Podemos compactar as equações para:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t), \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde, $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y(t)$ é o vetor de saídas medidas e $u(t)$ o vetor de entradas de controle.

2.3 FUNÇÕES DE LYAPUNOV

As funções de Lyapunov podem ser utilizadas para garantir a estabilidade de um sistema a ser controlado. Para isso, Lyapunov desenvolveu uma teoria de análise de sistemas análogo à um conceito de energia.

Para entender a estabilidade segundo Lyapunov, é necessário conhecer alguns conceitos:

Estado de Equilíbrio: o estado de equilíbrio, ou ponto de equilíbrio, segundo Lyapunov, é um vetor de estados $x_e(t)$ tal que $\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) = 0$, ou seja, quando um sistema está em seu estado de equilíbrio, suas variáveis de estado não variam no tempo, ou seja, sua derivada de estados é zero. Realizando um paralelo com o conceito de energia, o estado de equilíbrio, onde a variação é zero, representa o ponto de equilíbrio onde o sistema não possui mais variações de energia.

Trajetória: a trajetória de um sistema simboliza a evolução do vetor de estado $x(t)$ ao longo do tempo. Um sistema é considerado estável segundo Lyapunov quando a trajetória do sistema tende a se manter dentro de uma região esférica conforme descrito a seguir.

Região Esférica: considerando o estado de equilíbrio $x_e(t)$, define-se $S(k)$ uma região em torno desse ponto de raio k cujos pontos que pertencem a essa região obedecem:

$$\|x - x_e\| \leq k, \quad (2.12)$$

sendo que $\|x - x_e\|$ representar uma norma Euclidiana da seguinte forma:

$$\|x - x_e\| = \sqrt{(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2}. \quad (2.13)$$

Para definir o conceito de estabilidade segundo Lyapunov, devemos definir duas regiões esféricas:

A primeira região, $S(\delta)$, é definida como:

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta, \quad (2.14)$$

sendo x_0 o estado inicial do sistema. Isso é, a região $S(\delta)$ é tal que os estados iniciais se encontram a uma distância máxima δ do ponto de equilíbrio.

A segunda região, $S(\xi)$, é definida como:

$$\|x(t) - x_e\| \leq \xi, \forall t > 0. \quad (2.15)$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados do sistema. Assim, a região $S(\xi)$ é tal que os estados $x(t)$ se encontram a uma distância máxima ξ do ponto de equilíbrio.

Com essas regiões, pode-se definir o conceito de estabilidade conforme Lyapunov através de três diferentes casos:

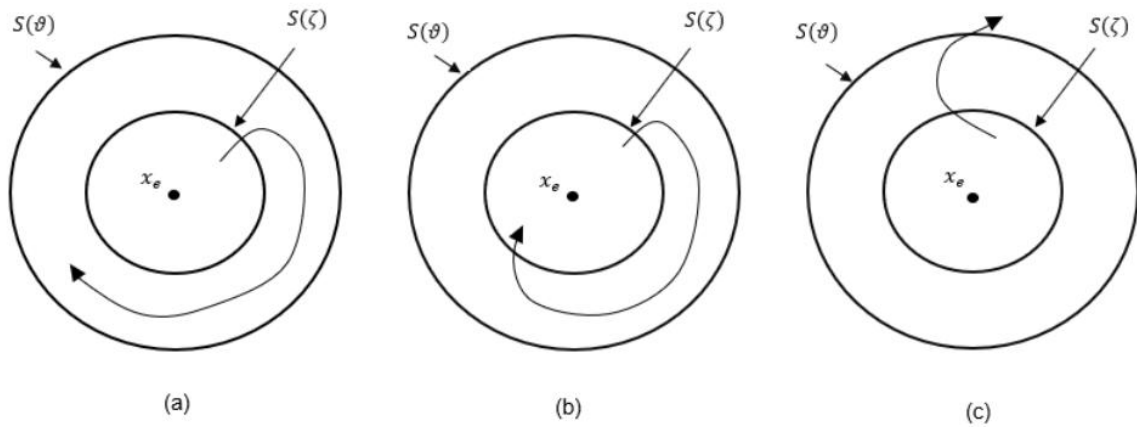
Estabilidade: O estado de equilíbrio x_e é chamado estável se, para $S(\xi)$, as trajetórias iniciadas em $S(\delta)$ não deixam $S(\xi)$ $\forall t > 0$.

Estabilidade Assintótica: O estado de equilíbrio x_e é chamado de assintoticamente estável se, ela é considerável estável, e se todas as trajetórias iniciadas em $S(\delta)$ converge para x_e sem deixar $S(\xi)$ à medida que t aumenta.

Instabilidade: O estado de equilíbrio x_e é chamado instável se existir $S(\xi)$ tal que exista uma condição inicial em $S(\delta)$ que a trajetória deixa $S(\xi)$ à medida que t aumenta.

A Figura 2 exemplifica os três diferentes casos de estabilidade conforme Lyapunov:

Figura 2 – (a) Estado de Equilíbrio Estável; (b) Estado de Equilíbrio Estável Assintótico; (c) Estado de Equilíbrio Instável.



Fonte: Adaptado de (Ogata, 1998)

Lyapunov sugere analisar a estabilidade de um sistema por meio de uma função candidata que represente sua energia. Seja $V(x(t))$ uma função escalar que descreve essa energia. Admitindo que a energia seja positiva, tem-se que, para $x(t) \neq 0$:

$$V(x(t)) > 0 \text{ e } V(0) = 0. \quad (2.16)$$

De acordo com a teoria de Lyapunov, o sistema será assintoticamente estável se a energia diminuir à medida que o estado se aproxima do ponto de equilíbrio. Assim, para $x(t) \neq 0$:

$$\dot{V}(x(t)) < 0, \text{ e } \dot{V}(0) = 0. \quad (2.17)$$

Por fim, segundo essa abordagem, conclui-se que um sistema é assintoticamente estável quando é possível encontrar uma função $V(x(t))$ tal que, para todo $x(t) \neq 0$, $V(x(t)) > 0$ e $\dot{V}(x(t)) < 0$.

2.3.1 Função de Lyapunov Fuzzy

As funções de Lyapunov Fuzzy são uma abordagem proposta para análise de estabilidade de sistemas fuzzy TS (2.5)-(2.8) que utiliza a função de energia proposta por Lyapunov. Assim, tem-se que as Funções de Lyapunov Fuzzy podem ser descritas

como (Jadbabaie, 1999; Lee; Park; Joo, 2012; Lee; Joo; Tak, 2014; Tanaka; Hori; Wang, 2003):

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) x^T(t) P_i x(t), \quad (2.18)$$

onde $P_i, i \in \mathbb{K}_r$, são matrizes simétricas definidas positivas.

2.4 DESIGUALDADE DE MATRIZES LINEARES (LMIS)

As LMIs consistem em restrições formuladas a partir das matrizes que descrevem a dinâmica de um sistema. As condições de projeto, expressas pela positividade ou negatividade de matrizes simétricas, permitem considerar simultaneamente diversas variáveis matriciais. Assim, o projeto de controladores pode incorporar múltiplos requisitos de projetos. Devido à elevada complexidade envolvida, a resolução de LMIs torna-se inviável sem o uso de recursos computacionais. Por esse motivo, a adoção dessa abordagem passou a se tornar mais comum apenas com os avanços recentes na capacidade de processamento e nas ferramentas computacionais.

Normalmente, um conjunto de LMIs é descrito de forma semelhante a uma inequação, onde existem matrizes conhecidas e matrizes com elementos desconhecidos que serão determinados de acordo com as restrições de projetos.

No estudo das Desigualdades de Matrizes Lineares, é fundamental compreender o conceito de matrizes definidas positivas, que está diretamente ligado à noção de forma quadrática positiva. Para isso, consideraremos uma matriz P quadrada e simétrica, essa matriz é definida positiva se:

$$x^T P x > 0, \quad \forall x \neq 0, \quad P \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

utiliza-se a notação $P > 0$ para indicar que P é definida positiva.

Segundo (Boyd et al., 1994), uma LMI é uma desigualdade na seguinte forma:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0. \quad (2.19)$$

onde, $x \in \mathbb{R}^n$ representa a variável vetorial, cujas componentes são x_i , com $i = 1, \dots, n$. As matrizes simétricas $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$, para $i = 0, 1, \dots, n$, são consideradas conhecidas (Boyd et al., 1994). A LMI apresentada em (2.19) constitui uma restrição convexa em relação a x , isto é, o conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ é convexo.

Normalmente, as LMIs são representadas de outras formas, sendo descrito conforme segue (Boyd et al., 1994):

$$R + M_1^T P_1 N_1 + N_1^T P_1 M_1 + \dots + M_n^T P_n N_n + N_n^T P_n M_n < 0, \quad (2.20)$$

sendo, R, M_i e $N_i, i = 1, 2, \dots, n$ matrizes fixas e $P_i, i = 1, 2, \dots, n$ matrizes variáveis.

Uma importante propriedade com relação às LMIs é a possibilidade, através do Complemento de Schur (Boyd et al., 1994) é a transformação da desigualdade quadrática (2.21) na desigualdade linear (2.22):

$$C > 0, A - BC^{-1}B^T > 0, \quad (2.21)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0, \quad (2.22)$$

sendo A e C matrizes simétricas e B uma variável matricial.

As matrizes simétricas A e $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são ditas congruentes quando existe uma matriz não singular $X = P^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A = X^T C X$. Nessas condições, se A e C forem congruentes, então $A > 0$ se, e somente se, $C > 0$.

2.5 O CONTROLADOR DE GANHO ÚNICO K

No desenvolvimento de controladores para sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (TS) fundamentados em funções de Lyapunov fuzzy, geralmente são conhecidos os limitantes das derivadas temporais das funções de pertinência $h_i(x(t))$, expressos por:

$$-\phi_{i1} \leq \frac{dh_i(x(t))}{dt} \leq \phi_{i2},$$

em que ϕ_{i1} e ϕ_{i2} representam constantes positivas previamente conhecidas (Mozelli, 2009; Mozelli, 2019). Além disso, ao se determinar a derivada temporal de uma função de Lyapunov fuzzy, surge o termo $x(t)^T \left[\frac{dh_1(x(t))}{dt} P_1 + \frac{dh_2(x(t))}{dt} P_2 + \dots + \frac{dh_r(x(t))}{dt} P_r \right] x(t)$,

o qual é tradicionalmente tratado por meio da utilização de majorantes conservadores baseados nos limitantes de $\frac{dh_i(x(t))}{dt}$, para $i = 1, 2, \dots, r$.

Entretanto, uma alternativa relevante para reduzir o conservadorismo presente nesse procedimento consiste na utilização de LMIs, possibilitando a obtenção de majorantes menos conservadores e, conseqüentemente, um projeto mais eficiente dos ganhos dos controladores (Guedes, 2013).

Em (Lazarini, 2021) foi proposta uma nova abordagem para esse problema, capaz de fornecer majorantes ótimos para o termo anteriormente descrito. Essa metodologia garante que tais majorantes sejam sempre menores ou iguais ao valor máximo admissível, sendo que esse máximo é necessariamente atingido por pelo menos um dos majorantes obtidos.

Ainda em (Lazarini, 2021), foi incorporada à configuração proposta a utilização de um controlador de ganho único baseado na lei de controle do tipo:

$$u(t) = -Kx(t). \quad (2.23)$$

Essa estratégia de controle não depende explicitamente do conhecimento dos pesos $h_i(x(t))$, $i = 1, 2, \dots, r$, em sua formulação, característica particularmente importante no controle de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas ou à ocorrência de falhas.

Assim, segundo (Lazarini, 2021), considerando o seguinte sistema TS dado por:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(x(t)) [A_i x(t) + B_i u(t)], \quad (2.24)$$

Considerando a lei de controle (2.23), tem-se o seguinte teorema:

Teorema 1. (Lazarini, 2021): O sistema (2.24) é estabilizado pelo controlador (2.23), com ganho dado por $K = S^T R^{-T}$, e também $P_i = R^T \Gamma_i R^{-T}$, se existirem matrizes simétricas Γ_i e matrizes quaisquer R, S que satisfaçam o seguinte conjunto de LMIs:

$$\Gamma_i = R P_i R^T > 0, \quad (2.25)$$

$$\Xi_{ik} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), (k = 1, 2, \dots, m). \quad (2.26)$$

sendo,

$$\Xi_{ik} = \begin{bmatrix} \Gamma_k - A_i R^T - R A_i^T + B_i S^T + S B_i^T & \mu(R + R^T)^* \\ \Gamma_i - \mu(A_i R^T - B_i S^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

$$\Gamma_k^* = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* \Gamma_\rho. \quad (2.28)$$

sendo $\dot{h}_{k\rho}^*$ parâmetros obtidos através do Algoritmo 1 proposto em (Lazarini, 2021) e m definido também neste artigo.

Demonstração: No Teorema 7 em (Lazarini, 2021).

Se as LMIs acima forem respeitadas para todo $k \in \mathbb{K}_m$, o ponto $x = 0$ do sistema (2.24) é assintoticamente estável com ganhos de malha fechada dados por $K = S^T R^{-T}$.

3 MATERIAL E MÉTODO

O objeto a ser estudado será o helicóptero de bancada, 3-DOF helicopter, desenvolvido pela empresa Quanser Inc. (Quanser, 2012), uma imagem do mesmo pode ser vista conforme a Figura 3.

Figura 3 – Helicóptero de bancada, 3-DOF helicopter.



Fonte: (Quanser, 2012)

O helicóptero de bancada é composto por duas hélices que possuem conectados dois motores DCs que são posicionados simetricamente em relação à uma haste metálica conectada tanto às hélices do helicóptero quanto a um contrapeso do lado oposto, que reduz a força necessária para a elevação do sistema. O conjunto inteiro é fixo à uma haste presa em uma base de sustentação.

Como o próprio nome do equipamento sugere, o mesmo possui três graus de liberdade, sendo eles:

Deslocamento, sendo que o ângulo de deslocamento representa o movimento em torno da base de sustentação do modelo e é representado por um ângulo entre 0° e 360° .

Altura, sendo o ângulo formado entre a haste de sustentação e a horizontal. De forma que, quando o helicóptero está posicionado com sua altura em 0° , o mesmo

estará em repouso em cima da bancada, sendo necessário, para que o helicóptero tenha sua haste de sustentação paralela ao eixo horizontal, uma altura de 27.5°.

Arfagem, indicando a inclinação do helicóptero, que é controlado pela diferença entre a força de propulsão dos motores. Ela é diretamente relacionada à velocidade com que o modelo irá realizar o seu plano de voo.

Para projetar o controlador utilizando este modelo, precisa-se descrever o sistema em espaço de estados, fazendo isso, obtemos a seguinte descrição (Quanser, 2012):

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\tau} \\ \dot{\lambda} \\ \ddot{\varepsilon} \\ \ddot{\tau} \\ \ddot{\lambda} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \tau \\ \lambda \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\tau} \\ \dot{\lambda} \\ \xi \\ \gamma \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

sendo, ε o ângulo de elevação, τ o ângulo de arfagem, λ o ângulo de deslocamento, os sinais de referência, V_f e V_b representam as tensões CC que acionam os motores das hélices e ξ e γ são as integrais da diferença entre os ângulos de elevação e deslocamento, respectivamente ou seja (Quanser, 2012):

$$\xi = \int_0^t (\varepsilon - \varepsilon_{ref}) dt, \quad \gamma = \int_0^t (\lambda - \lambda_{ref}) dt. \quad (3.2)$$

As matrizes A e B são compostas por variáveis referentes às características físicas e construtivas do modelo, e são dadas como sendo (Quanser, 2012):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} \\ b_{5,1} & b_{5,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

onde,

$$a_{6,2} = \frac{(2M_f L_a - M_w L_w)g}{2M_f L_w^2 + 2M_f L_h^2 + M_w L_w^2}, \quad (3.3)$$

$$b_{4,1} = b_{4,2} = \frac{L_a K_f}{M_w L_w^2 + 2M_f L_a^2}, \quad (3.4)$$

$$b_{5,1} = -b_{5,2} = \frac{0.5K_f}{M_f L_h}. \quad (3.5)$$

A descrição de cada variável se encontra na Tabela 1 abaixo:

Tabela 1 – Parâmetros e valores do sistema do helicóptero de bancada 3-DOF Helicopter da Quanser.

Parâmetro	Descrição	Valor	Unidade
K_f	Constante da força de empuxo das hélices	0,1188	N/V
M_h	Massa total do helicóptero	1,15	kg
M_w	Massa do contrapeso	1,87	kg
M_f	Massa do motor frontal	0,575	kg
M_b	Massa do motor traseiro	0,713	kg
L_a	Distância do eixo de deslocamento até o helicóptero	0,660	m
L_h	Distância entre os eixos de rotação de cada motor	0,178	m
L_w	Distância do eixo de deslocamento até o contrapeso	0,470	m
g	Constante da aceleração da gravidade	9,81	m/s ²
J_w	Momento de inércia do motor	$3,9 \times 10^{-7}$	kg.m ²
J_e	Momento de inércia sobre o eixo de elevação	0,91	kg.m ²
m	Massa das peças do conjunto de massa ativa	0,154	kg

Fonte: (Quanser, 2012)

Como ferramenta computacional utilizada, tem-se, para este projeto, a utilização do software matemático, Matlab®, onde será feita a programação das LMIs 2.25 à 2.28 onde, ao declarar-se as variáveis do sistema que será utilizado, encontra-se uma solução para o problema. Para isso, faz-se necessário a implementação no Matlab® do toolbox YALMIP além do solver SeDuMi, sendo essas ferramentas

necessárias para a resolução de problemas de otimização convexos como LMIs de forma eficiente.

O toolbox YALMIP (Löfberg, 2004) é uma ferramenta gratuita do Matlab® que permite a resolução de problemas de otimização matemática utilizando formas de representar as matrizes a serem utilizadas nas LMIs de forma mais simples e didática em comparação com outros toolboxes normalmente disponíveis no software Matlab®. Ou seja, a principal função do YALMIP é transformar os problemas matemáticos em um formato que possa ser resolvido pelo solver, nesse caso, utilizado o SeDuMi (Sturm, 1998).

O solver SeDuMi, como o nome sugere, é responsável por resolver as LMIs de interesse. Como cada solver possui métodos numéricos diferentes, a escolha de um solver diferente pode trazer diferentes resultados.

Por fim, para a simulação do sistema, utiliza-se a ferramenta de simulação integrada ao Matlab®, Simulink®, através do mesmo é possível implementar o sistema a ser estudado de forma simples.

O Simulink® é um ambiente de interface gráfica onde pode-se implementar o sistema através de blocos e diagramas de fluxo, de forma que é possível desenvolver um trajeto de referência para o helicóptero. É possível através do Simulink® obter os resultados e comparar com os valores de referência, podendo realizar uma comparação visual do desempenho do controlador.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 PROJETANDO O CONTROLADOR

Este trabalho de graduação tem como objetivo projetar um controlador de ganho único, regido pela lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ utilizando lógica fuzzy TS e verificar o desempenho desse controlador simulando o mesmo utilizando o modelo do helicóptero de bancada 3-DOF Helicopter descrito anteriormente.

Dessa forma, fez-se a implementação, primeiramente, do modelo do helicóptero no software Matlab®, foi proposto para este projeto a adição de uma incerteza na massa do helicóptero, variando-a entre $M_h = 1.15\text{kg}$ e $M_h = 1.23\text{kg}$. Para isso, é necessário a construção de um politipo de incertezas de dois vértices, porém, para adicionar uma complexidade no sistema, com a finalidade de estudar mais a fundo a utilização do método, serão adicionados outros dois vértices no politopo de incerteza, porém, esses vértices serão virtuais, para isso, duplica-se as matrizes calculadas a partir das massas mínimas e máximas, assim sendo, tem-se as seguintes matrizes:

Matrizes A_1, A_3, B_1 e B_3 , calculadas utilizando o valor da massa mínima, $M_h = 1.15\text{kg}$ e as matrizes A_2, A_4, B_2 e B_4 , calculadas utilizando o valor da massa máxima, $M_h = 1.23\text{kg}$, ou seja:

$$A_1 = A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6664 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5804 & -0,5804 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0826 & 0,0826 \\ 0,5426 & -0,5426 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Com isso, pode-se fazer a implementação das LMIs 2.25 à 2.28 para um controlador de ganho único baseado na lei de controle $u(t) = -Kx(t)$, sendo essas LMIs apresentadas conforme Teorema 1:

$$\Gamma_i = R P_i R^T > 0,$$

$$\Xi_{ik} < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), (k = 1, 2, \dots, m),$$

sendo,

$$\Xi_{ik} = \begin{bmatrix} \Gamma_k - A_i R^T - R A_i^T + B_i S^T + S B_i^T & * \\ \Gamma_i - \mu(A_i R^T - B_i S^T) + R & \mu(R + R^T) \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_k^* = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{k\rho}^* \Gamma_\rho,$$

sendo, $r = 4$, sendo o número de vértices do politopo de incertezas.

Define-se, para este projeto, os seguintes limitantes:

$$-\phi_{1,1} = -2 \leq \dot{h}_{k1} \leq 2 = \phi_{1,2},$$

$$-\phi_{2,1} = -1 \leq \dot{h}_{k2} \leq 1 = \phi_{2,2},$$

$$-\phi_{3,1} = -2 \leq \dot{h}_{k3} \leq 2 = \phi_{3,2},$$

$$-\phi_{4,1} = -1 \leq \dot{h}_{k4} \leq 1 = \phi_{4,2}.$$

Segundo o Algoritmo 1 presente em (Lazarini, 2021), considera-se $m = r! = 4! = 24$, porém, uma vez que temos os limitantes escolhidos como sendo: $\emptyset_{1,1} = 2 = \emptyset_{3,1}$, $\emptyset_{1,2} = 2 = \emptyset_{3,2}$, $\emptyset_{2,1} = 1 = \emptyset_{4,1}$ e $\emptyset_{2,2} = 1 = \emptyset_{4,2}$, podemos simplificar a aplicação do Algoritmo 1 usando $m = 12$.

Assim, precisamos considerar todas as ordens de grandezas de Γ_p de forma que o majorante superior de Γ_k estará contemplado na resolução do problema, fazendo isso, tem-se a seguinte matriz para Γ_k :

$$\Gamma_k = \begin{bmatrix} 2\Gamma_1 + 1\Gamma_2 - 1\Gamma_3 - 1\Gamma_4 \\ 2\Gamma_1 + 2\Gamma_3 - 1\Gamma_2 - 1\Gamma_4 \\ 2\Gamma_1 + 1\Gamma_4 - 1\Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ 1\Gamma_2 + 2\Gamma_1 - 2\Gamma_3 - 1\Gamma_4 \\ 1\Gamma_2 + 2\Gamma_3 - 2\Gamma_1 - 1\Gamma_4 \\ 1\Gamma_2 + 1\Gamma_4 - 2\Gamma_1 - 2\Gamma_3 \\ 2\Gamma_3 + 2\Gamma_1 - 1\Gamma_2 - 1\Gamma_4 \\ 2\Gamma_3 + 1\Gamma_2 - 2\Gamma_1 - 1\Gamma_4 \\ 2\Gamma_3 + 1\Gamma_4 - 2\Gamma_1 - 1\Gamma_2 \\ 1\Gamma_4 + 2\Gamma_1 - 1\Gamma_2 - 2\Gamma_3 \\ 1\Gamma_4 + 1\Gamma_2 - 2\Gamma_1 - 2\Gamma_3 \\ 1\Gamma_4 + 2\Gamma_3 - 2\Gamma_1 - 1\Gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma, ao resolver as LMIs, encontra-se uma solução factível, assim, tendo que o K que estabiliza o sistema é dado por $K = S^T R^{-T}$, tem-se um controlador com o seguinte vetor de ganho:

$$K = \begin{bmatrix} 38.2884 & 40.1374 & -83.2602 & 17.4826 & 6.9542 & -85.6926 & 22.5332 & -31.3637 \\ 37.7924 & -53.1905 & 111.0353 & 17.1506 & -9.9880 & 114.7325 & 22.1844 & 41.8060 \end{bmatrix}.$$

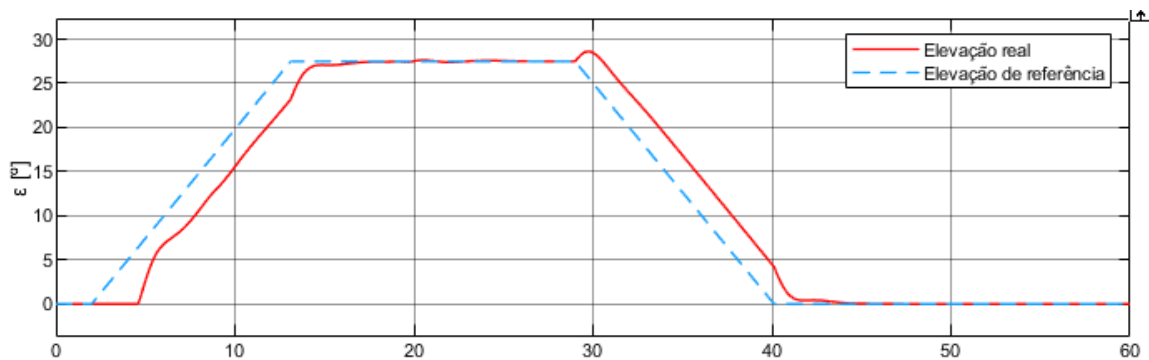
4.2 IMPLEMENTANDO O CONTROLADOR

Com isso, implementa-se o controlador no Simulink®, onde projeta-se um trajeto de referência para o helicóptero seguir, tendo uma duração de 60 segundos, o helicóptero irá ligar seus motores, levantar voo, realizar um deslocamento de 360°, pousar de forma suave, e desligar seus motores.

Fazendo isso, espera-se visualizar se o controlador projetado conseguirá concluir o trajeto, seguindo a referência de forma eficiente.

É possível visualizar conforme a Figura 4, a elevação obtida durante a simulação.

Figura 4 - Simulação da elevação do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido.

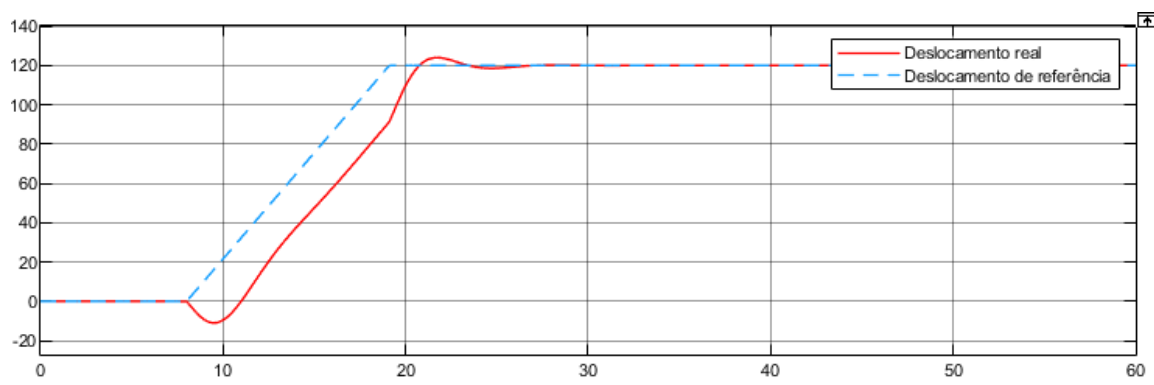


Fonte: Próprio autor.

Analisando a Figura 4, percebe-se que, em relação à elevação, o controlador não teve problemas em finalizar o percurso, apesar de possuir pequenas oscilações na altitude e possuir um pequeno atraso em relação ao valor de referência, porém, ainda tem-se que o resultado obtido é satisfatório.

Já em relação ao deslocamento do helicóptero, o mesmo pode ser visto conforme a Figura 5.

Figura 5 - Simulação do deslocamento do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido.

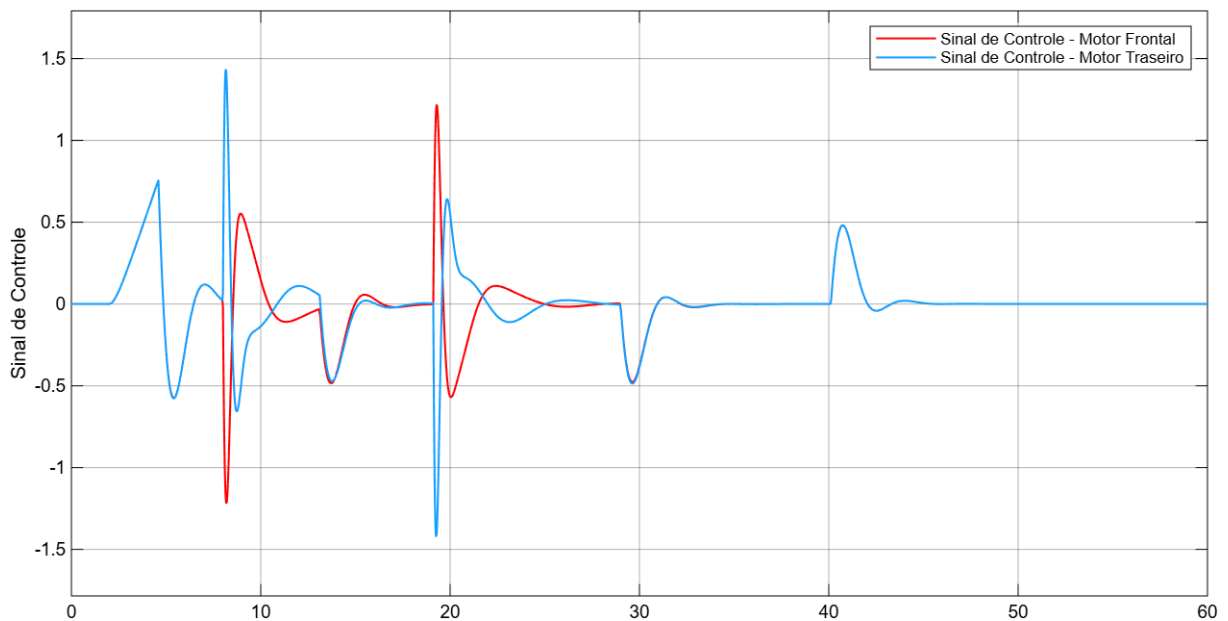


Fonte: Próprio autor.

Com a análise da Figura 5, pode-se perceber que o controlador conseguiu concluir o percurso programado, uma vez que tanto a elevação, quanto o deslocamento seguiram, com pequenas oscilações, seus valores de referência. Novamente, nota-se um atraso em relação à referência e pequenas oscilações durante o voo, porém, ainda considera-se o resultado obtido satisfatório.

Por fim, verificam-se os valores da lei de controle, obtendo os valores para ambos os motores (frontal e traseiro) que podem ser vistos conforme a Figura 6.

Figura 6 – Sinal de controle para os motores frontal e traseiro utilizando o controlador obtido.



Fonte: Próprio autor.

Através da Figura 6, é possível visualizar os sinais de controle nos motores frontal e traseiro, que se mantiveram em valores baixos e se mantiveram estáveis durante todo o percurso de voo, tornando o controlador possível e seguro de se implementar em um sistema real.

4.3 IMPLEMENTANDO UM CONTROLADOR PARA MASSA VARIANTE NO TEMPO

Por fim, será projetado, para fins comparativos, um outro controlador usando dessa vez, como modelagem, uma massa variante no tempo para o helicóptero de bancada. Essa massa variante no tempo tem como objetivo simular, por exemplo, um helicóptero de combate a incêndio que, quando despejando a água em cima de uma queimada, perde massa com o tempo. Para isso, serão utilizados como limitantes, as mesmas massas máximas e mínimas do controlador anterior, ou seja, a massa irá variar entre os valores $M_h(t) = 1.15\text{kg}$ e $M_h(t) = 1.23\text{kg}$.

Os vértices do politopo de incerteza para esse caso se mantêm os mesmos, uma vez que a massa máxima e mínima se mantém, nesse caso, porém, serão implementadas nas LMIs do Teorema 1 diversos pontos de massa intermediários entre os limites. Dessa forma, é esperado que o controlador obtido para esse caso

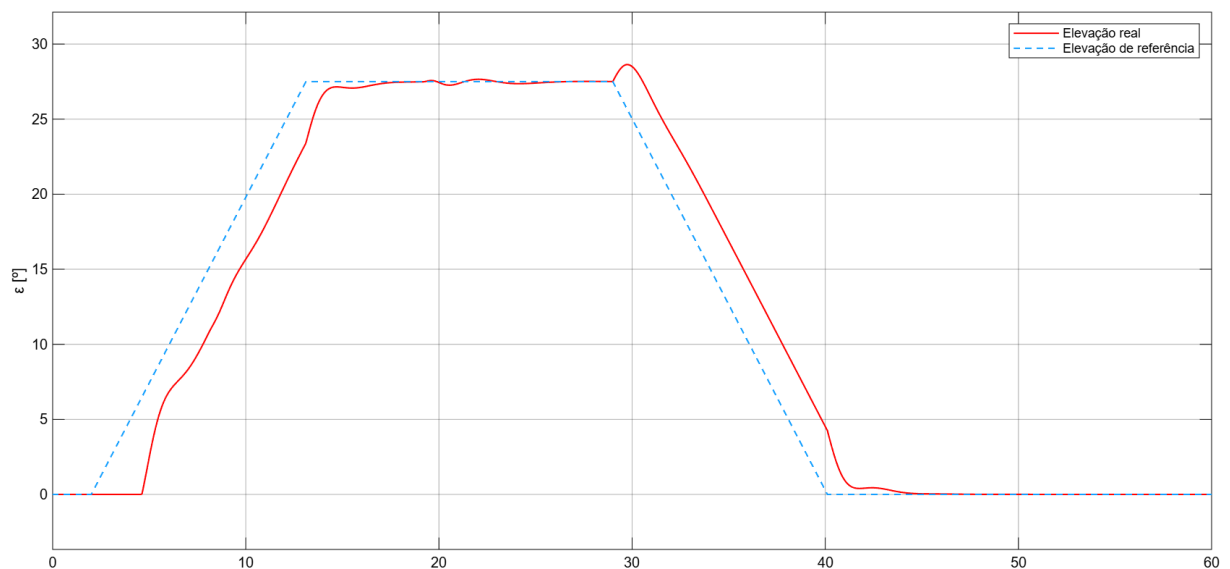
seja levemente mais robusto que o anterior, porém, espera-se que os resultados sejam parecidos.

Com isso, encontra-se o controlador com o seguinte vetor de ganho:

$$K = \begin{bmatrix} 35.9329 & 53.4354 & -111.0518 & 16.2216 & 10.3297 & -115.2137 & 20.8930 & -41.8058 \\ 36.6257 & -34.9747 & 71.9571 & 16.6905 & -5.9623 & 74.2001 & 21.3824 & 27.0991 \end{bmatrix}.$$

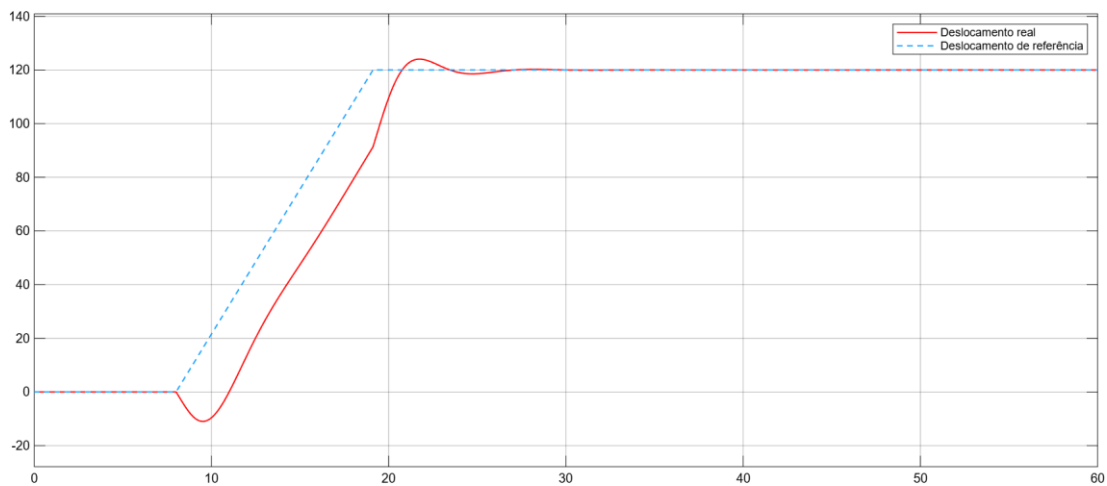
Implementando o controlador para massa variante no tempo no Simulink®, repetindo o trajeto de referência anterior, obtém-se as Figuras 7 e 8 contendo a simulação da elevação e deslocamento do helicóptero para este controlador.

Figura 7 - Simulação da elevação do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido para massa variante no tempo.



Fonte: Próprio autor.

Figura 8 - Simulação da elevação do helicóptero de bancada utilizando o controlador obtido para massa variante no tempo.

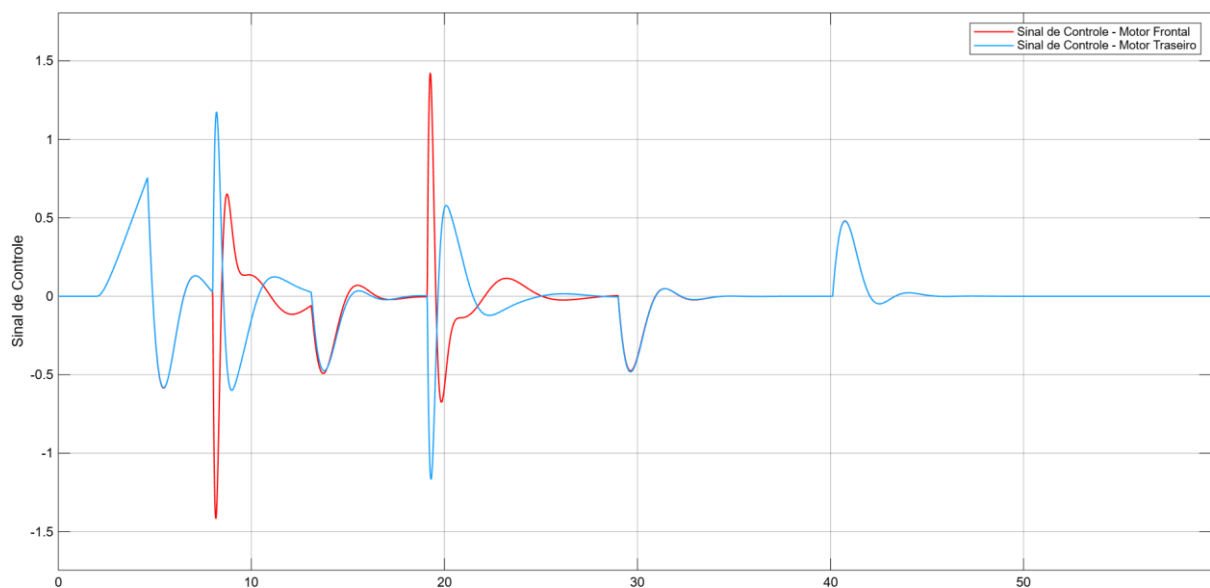


Fonte: Próprio autor.

Assim, verifica-se que, novamente, o controlador foi capaz de acompanhar o trajeto de referência com sucesso, onde, o resultado obtido para uma massa variante no tempo é próximo do resultado obtido utilizando apenas os valores de massa máxima e mínimas.

É possível também, visualizar, através da Figura 9, o sinal de controle para este controlador.

Figura 9 –Sinal de controle para os motores frontal e traseiro utilizando o controlador obtido para massa variante no tempo.



Fonte: Próprio autor.

Novamente, como o sinal de controle se mantém em valores baixos, e estável, entende-se que é possível e seguro a implementação desse controlador no sistema real.

Por fim, comparando as Figuras 4, 5 e 6, com as Figuras 7, 8 e 9, percebe-se que ambos os controladores obtidos tiveram desempenho semelhante, o que era o esperado uma vez que os limitantes das massas não foram alterados.

5 CONCLUSÃO

Durante a realização deste trabalho de graduação foi desenvolvido uma metodologia de controle utilizando como modelo um helicóptero de bancada de três graus de liberdade, 3-DOF helicopter, utilizando os conceitos de LMIs e modelagem fuzzy TS. O objetivo principal do trabalho consistiu em projetar um controlador de ganho único baseado na lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ capaz de realizar com sucesso um trajeto projetado para o modelo de forma satisfatória mesmo na presença de incertezas paramétricas associadas a massa do sistema. Após isso, foi implementado a mesma filosofia de projeto de controladores, porém, utilizando uma massa variante no tempo, onde foi possível verificar a similaridade com o controlador obtido na presença de incertezas no valor da massa.

Os controladores projetados apresentaram desempenho satisfatório durante as simulações realizadas, sendo capazes de estabilizar o sistema e acompanhar adequadamente o sinal de referência do trajeto de 60 segundos proposto, onde o helicóptero simulado realizou corretamente a decolagem, deslocamento de 360° e pouso possuindo um comportamento estável e precisão compatível com os objetivos estabelecidos no projeto. Através dos resultados observados, é possível concluir que a estratégia de controle adotada foi capaz de manter a robustez do sistema mesmo sob as condições operacionais consideradas no modelo.

Além do desempenho obtido, o trabalho também contribui para demonstrar a aplicabilidade de técnicas modernas de controle robusto em sistemas dinâmicos não lineares sujeitos a incertezas, destacando a eficiência da modelagem fuzzy TS associada às LMIs como alternativa para o tratamento desse tipo de problema.

5.1 PERSPECTIVAS FUTURAS

Como perspectivas futuras, ainda é possível continuar os estudos ao projetar e implementar o controlador chaveado descrito em (Lazarini, 2021) para comparação dos resultados entre o controlador de ganho único, e este controlador a ser projetado, e, após isso, implementar ambos os controladores no modelo físico presente no Laboratório de Pesquisa em Controle da UNESP-FEIS.

REFERÊNCIAS

- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in systems and control theory**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p.
- ESTEVEES, T.; JUNIOR, E. M.; MOREIRA, M.; CARDIM, R.; ALVES, M. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Análise da estabilidade de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno utilizando funções de Lyapunov fuzzy. In: **SIMPOSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE**, 2011, São João del-Rei. São João del-Rei, 2011. p. 885–890.
- GUEDES, J. A.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. **Stability of nonlinear system using Takagi-Sugeno fuzzy models and hyper-rectangle of LMIs**, Journal of Control, Automation and Electrical Systems, Heidelberg, v. 24, n. 1-2, p. 46–53, 2013.
- JADBABAIE, A. A reduction in conservatism in stability and L_2 gain analysis of TakagiSugeno fuzzy systems via linear matrix inequalities. In: **IFAC WORD CONGRESS**, China, 1999. p. 285–289.
- LAZARINI, A. Z. N., TEIXEIRA, M. C. M., DE S. RIBEIRO, J. M., ASSUNÇÃO, E., CARDIM, R., BUZETTI, A. S. **Relaxed Stabilization Conditions for TS Fuzzy Systems With Optimal Upper Bounds for the Time Derivative of Fuzzy Lyapunov Functions**, IEEE Access, vol. 9, pp. 64945- 64957, 2021a, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3076030.
- LAZARINI, A. Z. N. **Condições relaxadas para estabilidade e estabilização de sistemas não lineares TS utilizando majorantes ótimos da derivada de funções de Lyapunov fuzzy e controladores chaveados**. p. 102. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista, 2021b.
- LEE, D. H.; PARK, J. B.; JOO, Y. H. **A fuzzy Lyapunov function approach to estimating the domain of attraction for continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems**. Information Sciences, Santa Rosa, v. 185, n. 1, p. 230 – 248, 2012. ISSN 0020-0255.
- LEE, D. H.; JOO, Y. H.; TAK, M. H. **Local stability analysis of continuous-time Takagi-Sugeno fuzzy systems: A fuzzy Lyapunov function approach**. Information Sciences, Santa Rosa, v. 257, p. 163 – 175, 2014. ISSN 0020-0255.
- LÖFBERG, J. YALMIP: **A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB**, Taipei, Taiwan, 2004.
- LYAPUNOV, A. M. **General problem of the stability of motion**. [S.l.]: CRC Press, 1992. 270 p.

MACHADO, E. R. M. D. **Modelagem e controle de sistemas fuzzy Takagi-Sugeno**. 190 p. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2003.

MOZELLI, L. A., PALHARES, R. M., AVELLAR, G.S.C. **A systematic approach to improve multiple Lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems**, Inf. Sci., vol. 179, no. 8, pp. 1149_1162, 2009.

MOZELLI, L. A., ADRIANO, R. L. S. **On computational issues for stability analysis of LPV systems using parameter-dependent Lyapunov functions and LMIs**, Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 29, no. 10, pp. 3267_3277, Jul. 2019.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. [S.l.]: Prentice Hall do Brasil, 1998.

QUANSER INC. **User Manual. 3 DOF Helicopter Experiment. Set Up and Configuration**. 119 Spy Court. Markham, Ontario, Canada, 2012.

STURM, J. F. Using SeDuMi 1.02, a Matlab* **Toolbox for Optimization over Symmetric Cones**. Tilburg, Holanda, 1998.

TANAKA, K.; HORI, T.; WANG, H. **A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, New York, v. 11, n. 4, p. 582–589, 2003.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. **Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control**. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics, New York, v. 15, n. 1, p. 116–132, 1985.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. **Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems**. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, v. 9, n. 4, p. 525–538, 2001. ISSN 1063-6706.

ZADEH, L. A. **Fuzzy sets**. Information and Control, v. 8, n. 2, p. 338–353, 1965.